
INFERÊNCIA SOBRE OS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO
BIRNBAUM-SAUNDERS BI-PARAMÉTRICA

ARTUR JOSÉ LEMONTE

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
Co-orientador: Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Área de Concentração: Estatística Matemática.

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2006

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

16 de fevereiro de 2006

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Artur José Lemonte

intitulada

Inferência sobre os Parâmetros da Distribuição Birnbaum-Saunders

Bi-Paramétrica

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística



Prof. Klaus L. P. Vasconcelos
Coordenador da
Pós-graduação em
Estatística, UFPE

Banca Examinadora:

Francisco Cribari Neto

Francisco Cribari Neto

orientador

Silvia Lopes de Paula Ferrari

Silvia Lopes de Paula Ferrari (USP)

Francisco José de Azevedo Cysneiros

Francisco José de Azevedo Cysneiros

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Dedico este trabalho a meu pai, Jayme Lemonte.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por iluminar os caminhos daqueles que nele acreditam.

Aos meus familiares, em especial a meu pai, por acreditarem em mim.

Aos professores Francisco Cribari Neto e Klaus Leite Pinto Vasconcellos, pela orientação segura e incondicional, amizade, paciência e confiança transmitida no desenvolvimento deste trabalho.

A Themis da Costa Abensur, por todos os momentos de alegria e amor que me tem dedicado.

A meu grande amigo Valdério Anselmo Reisen, pela confiança, crescimento profissional e total apoio que me fez alcançar este objetivo.

Aos colegas do mestrado, em especial a Luis Hernando Vanegas Penagos, pela convivência nestes dois anos.

A Valéria Bittencourt, pela competência e carinho com os alunos da pós-graduação.

Aos professores do Programa de Mestrado em Estatística da UFPE.

À trindade L^AT_EX, O_x e R.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

As Profecias

Tem dias que a gente se sente um pouco talvez menos gente. Um dia daqueles sem graça, de chuva cair na vidraça. Um dia qualquer, sem pensar, sentindo o futuro no ar. O ar carregado, sutil, um dia de maio ou abril. Sem qualquer amigo do lado, sozinho em silêncio calado. Com uma pergunta na alma, por que nesta tarde tão calma o tempo parece parado?

Está em qualquer profecia dos sábios que viram o futuro, dos loucos que escrevem no muro, das teias, do sonho remoto, estouro, explosão, maremoto, a chama da guerra acesa, a fome sentada na mesa, o copo com álcool no bar, um anjo surgindo no mar, os selos de fogo, o eclipse, os símbolos do apocalipse, os séculos de Nostradamus e a fuga geral dos ciganos.

Está em qualquer profecia que o mundo se acaba um dia.

Um gosto azedo na boca, a moça que sonha, a louca, o homem que quer mas esquece o mundo do dá ou do desce.

Está em qualquer profecia que o mundo se acaba um dia.

Sem fogo, sem sangue e sem ais, o mundo dos nossos ancestrais acaba sem guerras mortais, sem glórias de mártir ferido, sem estrondo, mas com gemido. Os selos de fogo, o eclipse, os símbolos do apocalipse, a fuga geral dos ciganos e os séculos de Nostradamus.

Está em qualquer profecia que o mundo se acaba um dia.

Raul Seixas

Resumo

A distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica de parâmetros α e β vem sendo amplamente usada para modelar o tempo de vida de materiais e equipamentos. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam esta distribuição podem não apresentar desempenho satisfatório em amostras de tamanho pequeno. Assim, o cálculo dos vieses destes estimadores torna-se importante, visto que, em geral, quanto menor o tamanho da amostra, maior o viés. A derivação de expressões que permitam calcular os vieses desses estimadores possibilita a obtenção de estimadores corrigidos, que, em princípio, são mais precisos que os não-corrigidos.

Um dos objetivos deste trabalho é fornecer expressões para os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Com a finalidade de reduzir os vieses destes estimadores em amostras finitas, utilizam-se correções de viés obtidas a partir de esquemas analíticos [Cox & Snell (1968); Firth (1993)] e por bootstrap [Efron (1979)]. Também apresentamos intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t para os parâmetros desta distribuição.

Apresentamos testes de hipóteses para o parâmetro α desta distribuição considerando β como um parâmetro de perturbação. Consideramos o teste da razão de verossimilhanças, cuja estatística de teste possui, assintoticamente, distribuição qui-quadrado sob a hipótese nula. Obtemos, para este teste assintótico, um fator de correção em amostras de tamanho finito. Consideramos ainda uma versão bootstrap do teste da razão de verossimilhanças.

Abstract

Our chief interest is inference on the parameters that index the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. We derive closed-form expressions for the second order biases of the maximum likelihood estimators and use them to obtain bias-adjusted estimators. We also consider bias correction via bootstrap. Several different strategies for interval estimation are also considered. Finally, we derive a Bartlett correction to the likelihood ratio test and consider bootstrap-based likelihood ratio tests. Numerical evaluation is performed using Monte Carlo simulation.

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Organização da Dissertação	2
1.3 Plataforma Computacional	3
1.4 Preliminares	5
1.5 Estimadores de Máxima Verossimilhança	7
1.6 Otimização Não-Linear em Estatística	9
1.6.1 Algoritmo de Newton-Raphson	9
1.6.2 Algoritmo Escore de Fisher	10
1.6.3 Método BFGS	10
1.7 Identidades de Bartlett	11
2 A distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica	13
2.1 Introdução	13
2.2 Função Densidade de Probabilidade	17
2.3 Estimação Pontual dos Parâmetros	21
2.4 Estimação Intervalar dos Parâmetros	24

3	Correção de Viés	27
3.1	Introdução	27
3.2	Correção de Cox–Snell	30
3.3	Correção de David Firth	34
3.4	Correção por Bootstrap	37
3.4.1	Introdução	37
3.4.2	Correção de Viés	38
3.4.3	Intervalos de Confiança Bootstrap	40
4	Avaliação Numérica da Correção de Viés	45
4.1	Detalhes Metodológicos	45
4.2	Resultados e Discussão	47
4.2.1	Resultados da Correção de Viés	47
4.2.2	Resultados dos Intervalos de Confiança	53
5	Testes de Hipóteses	90
5.1	Introdução	90
5.2	Testes Estatísticos	90
5.2.1	Teste da Razão de Verossimilhanças	90
5.2.2	Teste da Razão de Verossimilhanças Bootstrap	91
5.3	Correção de Bartlett	92
5.3.1	Introdução	92
5.3.2	Fator de Correção de Bartlett	93
5.4	Avaliação Numérica	98
6	Aplicações	103
6.1	Tempos de Vida de Suportes	103
6.2	Tempos de Vida de Alumínio	105
7	Conclusões	110
	Apêndice	112
A	Cálculo dos Momentos	112

B Programa de Simulação	127
B.1 Programa Principal	128
B.2 Biblioteca de Funções	151
B.3 Programa de Ligação	158
B.4 Programa para gerar os resultados referentes aos testes de hipóteses	159
B.5 Programa em R	167
C Dados Reais	170
Referências	171

Lista de Figuras

2.1	Função de distribuição Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α . . .	16
2.2	Densidade Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α e $\beta = 1.0$. . .	19
2.3	Taxa de falhas da distribuição Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α e $\beta = 1.0$	19
2.4	Densidades: (a) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 5)$; (b) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 10)$; (c) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 50)$; (d) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 100)$. . .	20
3.1	Vieses de $\hat{\alpha}$ para diferentes valores de α	33
3.2	Vieses de $\hat{\beta}$ para diferentes valores de α fixando $\beta = 1.0$	33
3.3	Função escore modificada.	35
4.1	Estimação intervalar para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$	58
4.2	Estimação intervalar para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$	58
4.3	Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$	61
4.4	Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$	61
4.5	Estimação intervalar para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$	78
4.6	Estimação intervalar para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$	78
4.7	Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$	81
4.8	Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$	81
5.1	Comportamento de $b(\theta)$ para diferentes valores de α	97
5.2	Distorções de tamanho dos testes LR , LR_c e LR_b	99
5.3	Quantis assintóticos versus quantis exatos das estatísticas de teste.	100

6.1	Distribuição empírica e distribuições estimadas; primeira aplicação.	106
6.2	Distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica construída a partir das estimativas de máxima verossimilhança de α e β versus distribuição Weibull tri-paramétrica.	106
6.3	Densidades construídas com as estimativas dos parâmetros da primeira aplicação.	107
6.4	Distribuição empírica e distribuições estimadas; segunda aplicação.	109

Lista de Tabelas

4.1	Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$	48
4.2	Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.25$ e $\beta = 1.0$	49
4.3	Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$	50
4.4	Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.75$ e $\beta = 1.0$	51
4.5	Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$	52
4.6	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$	56
4.7	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$	57
4.8	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$	59
4.9	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$	60
4.10	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.25$ considerando $\beta = 1.0$	64
4.11	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.25$ considerando $\beta = 1.0$	65
4.12	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.25$	66
4.13	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.25$	67
4.14	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.5$ considerando $\beta = 1.0$	68
4.15	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.5$ considerando $\beta = 1.0$	69
4.16	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.5$	70
4.17	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.5$	71
4.18	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$	76
4.19	Estimativas intervalares para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$	77
4.20	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$	79

4.21	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$	80
4.22	Estimativas intervalares para $\alpha = 1.0$ considerando $\beta = 1.0$	84
4.23	Estimativas intervalares para $\alpha = 1.0$ considerando $\beta = 1.0$	85
4.24	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 1.0$	86
4.25	Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 1.0$	87
4.26	Estimativas intervalares do intervalo de confiança bootstrap BCa para $\alpha =$ 0.25 e $\beta = 1.0$ considerando $n = 40$	89
5.1	Rejeição nula dos testes LR , LR_c e LR_b ($\mathcal{H}_0: \alpha = 0.75$).	98
6.1	Estimativas pontuais dos parâmetros; primeira aplicação.	104
6.2	Estimativas intervalares dos parâmetros; primeira aplicação.	105
6.3	Estimativas pontuais dos parâmetros; segunda aplicação.	108
6.4	Estimativas intervalares dos parâmetros; segunda aplicação.	108
6.5	Estimativas dos parâmetros quando $n = 20$; segunda aplicação.	109
C.1	Tempos de Vida de Suportes.	170
C.2	Tempos de Vida de Alumínio.	170

1.1 Introdução

A distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica de parâmetros α e β vem sendo amplamente usada em ciências da engenharia para modelar o tempo de vida de materiais e equipamentos. Na prática, os parâmetros que indexam a distribuição são estimados a partir de dados coletados. Os estimadores usuais podem não apresentar, contudo, desempenho satisfatório quando o tamanho da amostra é pequeno. Por isso, torna-se útil obter estimadores mais precisos, com viés pequeno, em pequenas amostras.

Uma importante área de pesquisa é justamente o estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança em pequenas amostras, em particular, análise de viés, que mede quão distante em média está um estimador do verdadeiro valor do parâmetro. Muitas vezes, esta medida é utilizada como critério para avaliar a “qualidade” de um estimador. O viés não é um problema muito sério quando o tamanho da amostra é grande, pois este tipicamente é de ordem $O(n^{-1})$ ao passo que o erro padrão assintótico é de ordem $O(n^{-1/2})$, onde n é o tamanho da amostra. Entretanto, para amostras de tamanho pequeno, a existência de viés pode ser problemática. Dessa forma, a derivação de expressões que permitam reduzir o viés possibilita a obtenção de estimadores mais precisos que os não-corrigidos.

Uma correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que

indexam a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica foi proposta por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003). Entretanto, as expressões dos vieses dos estimadores dos parâmetros α e β encontradas por estes autores não têm embasamento teórico, uma vez que foram obtidas após um ‘longo’ estudo de simulação de Monte Carlo, com posterior análise descritiva e visual dos resultados. Um dos objetivos do presente trabalho é fornecer expressões precisas que permitam corrigir até ordem $O(n^{-1})$ os vieses dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, visto que, em pequenas amostras, os estimadores de máxima verossimilhança desses parâmetros podem ser bastante viesados. Para obtenção das expressões dos vieses, até segunda ordem, dos estimadores dos parâmetros desta distribuição, foi utilizada a expressão geral dada por Cox & Snell (1968). Adicionalmente, utilizamos técnicas bootstrap [Efron (1979)] de correção de viés para reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β .

Também consideramos estimação intervalar dos parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica através da construção de intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t . Os intervalos de confiança foram construídos com erro de cobertura nominal igualmente dividido acima e abaixo dos seus limites superior e inferior. Adicionalmente, apresentamos testes de hipóteses para o parâmetro α considerando β como um parâmetro de perturbação. Consideramos o teste da razão de verossimilhanças, cuja estatística de teste possui, assintoticamente, distribuição qui-quadrado sob a hipótese nula. Obtemos, para este teste assintótico, um fator de correção em amostras de tamanho finito. Consideramos ainda uma versão bootstrap do teste da razão de verossimilhanças, a qual denominamos teste da razão de verossimilhanças bootstrap.

1.2 Organização da Dissertação

A presente dissertação está dividida em sete capítulos. Neste primeiro capítulo abordamos alguns aspectos de estimação, concentrando-nos principalmente nas características dos estimadores de máxima verossimilhança. No segundo capítulo estudamos a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, apresentando suas principais características e propriedades. No terceiro capítulo apresentamos uma revisão geral sobre algumas

técnicas de correção de viés, em particular o método analítico de Cox & Snell (1968). Nesse capítulo fornecemos expressões para os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β . Através da análise de viés, obtemos estimadores de máxima verossimilhança corrigidos por viés para os parâmetros que indexam a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Adicionalmente, apresentamos os respectivos intervalos de confiança assintóticos e de bootstrap para estes estimadores corrigidos. No quarto capítulo, com base em simulações de Monte Carlo para a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, investigamos o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas. Também são analisadas as diferentes estimativas intervalares dos parâmetros desta distribuição. No quinto capítulo apresentamos testes de hipóteses para o parâmetro α da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica considerando β como um parâmetro de perturbação. Nós derivamos um fator de correção para o teste da razão de verossimilhanças com o objetivo de reduzir possíveis distorções de tamanho em amostras de tamanho pequeno. No sexto capítulo aplicamos a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica a dois conjuntos de dados reais e comparamos as estimativas pontuais dos parâmetros desta distribuição por máxima verossimilhança com suas respectivas versões corrigidas. Além disso, analisamos as estimativas intervalares dos parâmetros desta distribuição através dos diferentes intervalos de confiança considerados (assintóticos e bootstrap). Por fim, no sétimo capítulo apresentamos as conclusões deste trabalho.

1.3 Plataforma Computacional

As linguagens de programação `0x`, R e `LATEX` constituem a plataforma computacional usada no desenvolvimento deste trabalho.

✓ `0x`

As avaliações numéricas realizadas ao longo desta dissertação foram feitas utilizando a linguagem matricial de programação `0x` em sua versão 3.40 para o sistema operacional Linux. Esta linguagem de programação foi criada por Jurgen Doornik em 1994 na Universidade de Oxford (Inglaterra). Ela é muito flexível, foi desenvolvida com base na linguagem de programação `C` e tem provado ser bastante útil em computação

numérica. Ox é distribuída gratuitamente para uso acadêmico e se encontra disponível em <http://www.doornik.com>. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Doornik (2001). O Apêndice B desta dissertação contém os programas de simulação que permitem avaliar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders e suas versões corrigidas, juntamente com o programa de simulação usado para gerar os resultados numéricos do Capítulo 5.

✓ R

Os gráficos apresentados neste trabalho foram produzidos utilizando o ambiente de programação, análise de dados e gráficos R em sua versão 2.1.1 para o sistema operacional Linux, que se encontra disponível gratuitamente em <http://www.r-project.org>. Esta linguagem caracteriza-se pelo compromisso entre a flexibilidade oferecida por algumas linguagens compiladas (como C, C++ e FORTRAN) e a conveniência dos tradicionais pacotes estatísticos. Foi criada por Ross Ihaka e Robert Gentleman na Universidade de Auckland com o objetivo de produzir um ambiente de programação parecido com S, uma linguagem desenvolvida no AT&T Bell Laboratories, mas sem sofrer dos mesmos problemas de demanda de memória e desempenho. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Cribari-Neto & Zarkos (1999).

✓ L^AT_EX

A presente dissertação de mestrado foi digitada usando o sistema de tipografia L^AT_EX desenvolvido por Leslie Lamport em 1985, que consiste em uma série de macros ou rotinas do sistema T_EX (criado por Donald Knuth na Universidade de Stanford) que facilitam o desenvolvimento da edição do texto. L^AT_EX tem comandos muito cômodos e elegantes para a criação de tabelas, índices, bibliografia, referências cruzadas, etc., permitindo ao usuário concentrar-se na estrutura do documento em vez de detalhes puramente T_EX-nicos. A popularidade do T_EX e L^AT_EX tem criado uma série de personagens exóticos no mundo acadêmico:

- T_EX-nico: Conhecedor de todos os detalhes e ‘mistérios’ do T_EX;
- T_EX-expert: Pessoa familiarizada com os comandos básicos do T_EX, capaz de programar rotinas ou macros em T_EX;

- T_EX-nocrata: Pessoa que assimilou a filosofia T_EX e que é um usuário do T_EX e/ou L^AT_EX (mesmo desconhecendo ou não se interessando pelo funcionamento “interno” dos comandos do programa).

Detalhes sobre o sistema de tipografia L^AT_EX podem ser encontrados em Mittelbach *et al.* (2004), ou através do site <http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex>.

1.4 Preliminares

O objetivo desta seção é introduzir alguns conceitos básicos para o desenvolvimento do nosso trabalho, assim como definir a notação e terminologia pertinentes. Suponha que $E(\exp(t_0|Y|)) < \infty$ para algum $t_0 > 0$. Neste caso, M_Y , definida por

$$M_Y(t) = E(\exp(tY)), \quad |t| < t_0,$$

é chamada função *geradora de momentos* de Y . Se M_Y está definida em uma vizinhança $\{t : |t| < t_0\}$ de zero, então todos os momentos de Y são finitos e

$$M_Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E(Y^j)}{j!} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m_j}{j!} t^j, \quad |t| < t_0,$$

em que $m_j = E(Y^j)$. Além disso, M_Y tem derivadas de toda ordem em $t = 0$ e

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} M_Y(t) \right|_{t=0} = E(Y^j) = m_j.$$

A função geradora de momentos caracteriza a distribuição de Y , no sentido de que se $M_Y(t)$ é finita para $|t| < t_0$, $t_0 > 0$, então $M_Y(t)$ e a seqüência de momentos m_j ($j = 1, 2, \dots$), identifica, unicamente, a distribuição.

Definimos a função *geradora de cumulantes* de Y como $K_Y(t) = \log(M_Y(t))$, sendo possível representá-la por uma expansão de Taylor da forma

$$K_Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\kappa_j}{j!} t^j,$$

em que as constantes $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ são chamadas de cumulantes de Y e são obtidas pela diferenciação de $K_Y(t)$ da forma

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} K_Y(t) \right|_{t=0} = \kappa_j,$$

com $\kappa_0 = K_Y(0) = 0$. Os dois primeiros cumulantes são a média e a variância de Y , isto é, $\kappa_1 = E(Y)$ e $\kappa_2 = \text{Var}(Y)$. Pode-se mostrar que existe uma relação biunívoca entre momentos e cumulantes, já que o j -ésimo cumulante de Y é uma função dos primeiros j -ésimos momentos de Y , e vice-versa. Isto pode ser verificado expandindo $M_Y(t)$ e $K_Y(t)$ nas formas

$$M_Y(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j!} t^j,$$

$$K_Y(t) = \log(M_Y(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\kappa_j}{j!} t^j = \log\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j!} t^j\right).$$

Então, usando uma expansão em série de Taylor de $\log(1+x)$ ao redor do ponto $x=0$ e ignorando potências de t maiores que quatro, temos que

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j!} t^j\right) &= m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!} + m_3 \frac{t^3}{3!} + m_4 \frac{t^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!} + m_3 \frac{t^3}{3!}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!}\right)^3 - \frac{1}{4} m_1^4 t^4 + \dots \\ &= m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!} + m_3 \frac{t^3}{3!} + m_4 \frac{t^4}{4!} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(m_1^2 t^2 + \frac{1}{4} m_2^2 t^4 + m_1 m_2 t^3 + \frac{1}{3} m_1 m_3 t^4\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(m_1^3 t^3 + \frac{3}{2} m_1^2 m_2 t^4\right) - \frac{1}{4} m_1^4 t^4 + \dots \\ &= m_1 t + (m_2 - m_1^2) \frac{t^2}{2!} + (m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3) \frac{t^3}{3!} \\ &\quad + (m_4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4) \frac{t^4}{4!} + \dots, \end{aligned}$$

de onde se obtém que $\kappa_1 = m_1$, $\kappa_2 = (m_2 - m_1^2)$, $\kappa_3 = (m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3)$, $\kappa_4 = (m_4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4)$, e assim por diante. Uma discussão sobre funções geradoras de momentos e cumulantes pode ser encontrada em Bickel & Doksum (2001).

Os cumulantes oferecem mais vantagens em termos estatísticos do que os momentos. Entre estas vantagens, tem-se: (i) muitos cálculos estatísticos usando cumulantes são mais fáceis do que os cálculos correspondentes através de momentos; (ii) para variáveis aleatórias independentes, os cumulantes de uma soma são, simplesmente, somas dos cumulantes das variáveis individuais; (iii) séries do tipo Edgeworth para aproximar densidades,

distribuições e logaritmos de densidades são expressas de forma mais conveniente via cumulantes ao invés de momentos; (iv) os cumulantes de inúmeras distribuições podem ter ordens pré-estabelecidas, o que não ocorre com os momentos.

O terceiro cumulante de Y é uma medida de assimetria, no sentido de que se $\kappa_3 = E(Y - m_1)^3$ for nulo, então Y é uma variável aleatória simétrica. Os coeficientes de assimetria e de excesso de curtose são dados, respectivamente, por

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}.$$

A análise dos cumulantes é importante no estudo assintótico de estatísticas, já que para $j \geq 3$ estes se anulam para a distribuição normal. Uma discussão detalhada sobre a teoria de cumulantes pode ser encontrada em McCullagh (1987).

1.5 Estimadores de Máxima Verossimilhança

Seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ o valor observado de uma variável aleatória $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ associada a um experimento aleatório, o qual é representado por um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sendo Ω o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e P uma medida de probabilidade definida nos elementos de $\mathcal{A}$. Suponha que $\mathbf{Y}$ é caracterizada por uma função de probabilidade ou densidade com forma analítica $f(\mathbf{y}; \theta)$ conhecida mas envolvendo um vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ de parâmetros desconhecidos. Seja $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ o espaço paramétrico representando o conjunto dos valores possíveis do vetor θ . A função $f(\mathbf{y}; \theta)$ é denominada *função do modelo estatístico* e define uma família $\mathcal{F}$ de distribuições de probabilidade.

A função de verossimilhança $L(\theta)$ é definida como sendo igual à função do modelo, embora seja interpretada diferentemente, como função de θ para $\mathbf{y}$ conhecido. Ou seja, a função de verossimilhança para θ baseada na observação $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ é dada por

$$L(\theta) \equiv L(\theta; \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \theta), \quad \theta \in \Theta, \quad \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Muito freqüentemente, as componentes de $\mathbf{Y}$ são mutuamente independentes para todas as distribuições em $\mathcal{F}$ e a verossimilhança de θ pode ser escrita como

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_i(y_i; \theta), \tag{1.1}$$

em que f_i corresponde à densidade individual da i -ésima observação. Dada a função $L(\theta)$, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ é o valor que maximiza $L(\theta)$ em Θ . Formalmente, o estimador de máxima verossimilhança é definido como a variável aleatória

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta).$$

É conveniente trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, também chamada de *função suporte*, isto é,

$$\ell(\theta) \equiv \ell(\theta; \mathbf{y}) = \log(L(\theta)) = \sum_{i=1}^n \log \{f_i(y_i; \theta)\}. \quad (1.2)$$

Como a função logaritmo é monótona crescente, maximizar $L(\theta)$ e $\ell(\theta)$ em Θ são processos equivalentes.

A função escore $U(\theta) = (U_1(\theta), \dots, U_p(\theta))^{\top}$ é definida como

$$U_r(\theta) = \partial \ell(\theta) / \partial \theta_r, \quad r = 1, \dots, p,$$

ou seja,

$$U(\theta) = \nabla_{\theta} \ell(\theta),$$

em que $\nabla_{\theta} = (\partial / \partial \theta_1, \dots, \partial / \partial \theta_p)^{\top}$ é o operador gradiente. A função escore descreve como a função de log-verossimilhança varia em Θ .

Seja $J(\theta) = -\partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta \partial \theta^{\top}$ o negativo da matriz hessiana da função de log-verossimilhança; $J(\theta)$ é chamada matriz de informação observada [Fisher (1925)]. Sob condições gerais de regularidade [ver Cox & Hinkley (1974, cap. 9) e Lehmann (1999, cap. 7)], temos que

$$K(\theta) = E_{\theta}[U(\theta)U(\theta)^{\top}] = E_{\theta}[J(\theta)],$$

em que o subscrito θ indica que a esperança matemática é calculada supondo que θ é o verdadeiro valor do parâmetro. A matriz $K(\theta)$ é chamada de matriz de informação (esperada) de Fisher de θ . Uma justificativa qualitativa para a palavra “informação” é que quando a matriz $J(\theta)$ “cresce”, isto é, quando é maior a informação sobre θ , a dispersão de $\hat{\theta}$ ao redor de θ decresce [Barndorff-Nielsen & Cox (1994, p. 25)].

Sob condições gerais de regularidade, $\ell(\theta)$ é diferenciável em θ , $\hat{\theta}$ existe e satisfaz a equação de verossimilhança

$$U(\hat{\theta}) = \nabla_{\theta} \ell(\hat{\theta}) = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Adicionalmente,

$$\ell(\hat{\theta}) \geq \ell(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

A equação de verossimilhança (1.3) simplifica-se na forma

$$\sum_{i=1}^n \nabla_{\theta} \log \{f_i(y_i; \theta)\} = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Lehmann & Casela (1998, cap. 6) mostram que, sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, obtido como raiz única da equação (1.4), apresenta as seguintes propriedades:

- (1) É consistente;
- (2) É assintoticamente eficiente, isto é, dentre todos os estimadores consistentes de θ , o estimador de máxima verossimilhança possui variância assintótica mínima;
- (3) É invariante sob transformações biunívocas, isto é, se $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ e g é uma função bijetora de θ , então $g(\hat{\theta})$ é o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$;
- (4) É distribuído assintoticamente como uma variável aleatória normal p -variada da forma: $\hat{\theta} \stackrel{A}{\sim} \mathcal{N}_p(\theta, K(\theta)^{-1})$;
- (5) É, em geral, viesado, embora seja assintoticamente não-viesado.

1.6 Otimização Não-Linear em Estatística

Um dos problemas mais freqüentes na inferência estatística é encontrar o estimador de máxima verossimilhança de θ . Em geral, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ não apresenta forma analítica ‘fechada’ para seu cálculo. Ou seja, o estimador $\hat{\theta}$ será encontrado através da maximização numérica da função de log-verossimilhança utilizando algum procedimento iterativo, tal como os algoritmos de Newton-Raphson, escore de Fisher e quasi-Newton BFGS.

1.6.1 Algoritmo de Newton-Raphson

O processo iterativo de Newton-Raphson para a obtenção do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ é dado como segue. Expandindo a função escore $U(\theta)$ em série de

Taylor até primeira ordem em torno de um valor inicial $\theta^{(0)}$, obtemos

$$U(\theta) \cong U(\theta^{(0)}) + H(\theta^{(0)})(\theta - \theta^{(0)}),$$

em que

$$H(\theta^{(0)}) = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \Big|_{\theta=\theta^{(0)}}$$

é a matriz hessiana ou matriz de segundas derivadas da função de log-verossimilhança. Fazendo $U(\theta) = 0$ e repetindo o procedimento acima, chega-se ao seguinte processo iterativo:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - H(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

podendo ser generalizado da forma

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} H(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.5)$$

em que $\lambda^{(k)}$ é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $-H(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)})$. O processo iterativo anterior é repetido até que a distância entre $\theta^{(k+1)}$ e $\theta^{(k)}$ seja menor que uma tolerância especificada.

1.6.2 Algoritmo Escore de Fisher

Um procedimento alternativo primeiramente sugerido por Sir Ronald Fisher é substituir $-H$ por seu valor esperado $E(-H) = K$, a matriz de informação esperada. Assim, substituindo a informação observada em (1.5) pela esperada, obtemos

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \lambda^{(k)} K(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

em que $\lambda^{(k)}$, como antes, é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $K(\theta^{(k)})^{-1} U(\theta^{(k)})$. Este procedimento iterativo é denominado método escore de Fisher.

1.6.3 Método BFGS

Este algoritmo foi desenvolvido por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno. Ele utiliza o mesmo princípio do método de Newton-Raphson, diferenciando-se pelo fato de utilizar uma sequência de matrizes simétricas e positivas definidas $B^{(k)}$ no lugar da matriz $-H^{-1}$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^{(k)} = -H^{-1}.$$

Comumente, toma-se como matriz inicial, $B^{(0)}$, a matriz identidade de mesma ordem, pois ela é positiva definida e simétrica, assim conduzindo a aproximações $B^{(k)}$ positivas definidas e simétricas. A forma recursiva para obter tais matrizes é dada pela expressão

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} - \frac{B^{(k)}g^{(k)}(g^{(k)})^\top B^{(k)}}{(g^{(k)})^\top B^{(k)}g^{(k)}} + \frac{h^{(k)}(h^{(k)})^\top}{(h^{(k)})^\top g^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

em que $g^{(k)} = \theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}$ e $h^{(k)} = U(\theta^{(k+1)}) - U(\theta^{(k)})$. De forma análoga aos métodos anteriores, o máximo é obtido pela recorrência

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \lambda^{(k)} B^{(k)} U(\theta^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

em que $\lambda^{(k)}$, como anteriormente, é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\theta^{(k)}$ na direção $-B^{(k)}U(\theta^{(k)})$. Uma discussão mais detalhada sobre métodos de otimização não-linear, obtenção de zeros de funções e suas implementações em $\mathbb{C}$, pode ser encontrada em Press *et al.* (1992, capítulos 9 e 10).

1.7 Identidades de Bartlett

Utilizaremos a seguinte notação, dada por Lawley (1956), para as derivadas da log-verossimilhança (1.2), na qual todos os índices variam de 1 a p : $U_r = \partial \ell(\theta) / \partial \theta_r$, $U_{rs} = \partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta_r \partial \theta_s$, $U_{rst} = \partial^3 \ell(\theta) / \partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_t$, etc. Os momentos conjuntos de derivadas de $\ell(\theta)$ são $\mu_r = E(U_r)$, $\mu_{rs} = E(U_{rs})$, $\mu_{rst} = E(U_{rst})$, $\mu_{r,s} = E(U_r U_s)$, $\mu_{r,st} = E(U_r U_{st})$, e assim por diante. Como $\mu_r = 0$, os cumulantes conjuntos expressos em termos de momentos são $\kappa_{rs} = \mu_{rs}$, $\kappa_{r,s} = \mu_{r,s}$, $\kappa_{rs,t} = \mu_{rs,t}$, $\kappa_{rs,tu} = \mu_{rs,tu} - \mu_{rs}\mu_{tu}$, $\kappa_{r,s,t} = \mu_{r,s,t}$ e $\kappa_{r,s,t,u} = \mu_{r,s,t,u} - \sum_{(j)} \mu_{r,s}\mu_{t,u}$, onde $\sum_{(j)}$ representa o somatório sobre todas as j -ésimas combinações de índices, etc. Ainda, $-\kappa^{rs} = \kappa^{r,s}$ representa o elemento (r, s) da inversa da matriz de informação esperada $K(\theta)^{-1}$. As derivadas dos cumulantes são representadas com sobrescritos: $\kappa_{rs}^{(t)} = \partial \kappa_{rs} / \partial \theta_t$, $\kappa_{rs}^{(tu)} = \partial^2 \kappa_{rs} / \partial \theta_t \partial \theta_u$, $\kappa_{rst}^{(u)} = \partial \kappa_{rst} / \partial \theta_u$, etc. Os momentos e cumulantes são intra-relacionados, satisfazendo algumas restrições que facilitam seus cálculos. Estas equações, que decorrem de condições de regularidade, são denominadas *identidades de Bartlett*, as mais conhecidas sendo $\kappa_r = 0$ e $\kappa_{rs} + \kappa_{r,s} = 0$.

Adicionalmente, pode-se mostrar que, sobre a amostra total, os cumulantes são de ordem $O(n)$.¹ A idéia de Bartlett é bastante engenhosa; supondo problemas regulares tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E[T(\mathbf{Y})] = \int T(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\mathbf{y}; \theta) d\mathbf{y}, \quad (1.6)$$

para diversas estatísticas $T(\mathbf{Y})$, isto é, pode-se inverter a ordem das operações de diferenciação em relação a θ e integração com respeito a $\mathbf{y}$. Expressando a identidade (1.6) em termos de momentos e diferenciando sucessivamente com relação às componentes de θ encontram-se as ditas identidades. Assim, por exemplo, da definição da função escore temos que $U_r = L_r/L$ com $L_r = \partial L / \partial \theta_r$. Diferenciando $\int L d\mathbf{y} = 1$ em relação a θ_r obtemos $\int L_r d\mathbf{y} = \int U_r L d\mathbf{y} = 0$, isto é, $\kappa_r = E(U_r) = 0$. Diferenciando esta última expressão em relação a θ_s , encontramos $\int (U_{rs} L + U_r U_s L) d\mathbf{y} = 0$ e, assim, obtemos $\kappa_{rs} + \kappa_{r,s} = 0$. Diferenciando novamente a integral em relação a θ_t , obtém-se $\kappa_{rst} + \kappa_{rs,t} + \kappa_{rt,s} + \kappa_{r,st} + \kappa_{r,s,t} = 0$ e, de forma análoga, outras identidades são deduzidas. A grande vantagem das identidades de Bartlett é facilitar a obtenção dos cumulantes κ 's, já que determinada parametrização pode conduzir a um cálculo simples de alguns cumulantes, sendo os demais obtidos indiretamente através destas identidades. Esses cumulantes têm grande aplicabilidade no cálculo do viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança, como será visto adiante. Uma boa discussão sobre as identidades de Bartlett e suas aplicações pode ser encontrada em Barndorff-Nielsen & Cox (1989, §5.5).

¹Se $\{a_n\}_{n \geq 1}$ e $\{b_n\}_{n \geq 1}$ são duas seqüências de números reais, dizemos que a_n é de ordem menor que b_n e escrevemos $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$. Dizemos que a_n é de ordem no máximo igual a b_n , denotado por $a_n = O(b_n)$, se existe um número real $M > 0$ tal que $|a_n/b_n| \leq M$, isto é, a razão $|a_n/b_n|$ é limitada. Observamos que se $a_n = o(b_n)$, então $a_n = O(b_n)$ e que quando $b_n \rightarrow 0$ a ordem fornece noção da taxa de convergência de a_n para zero.

A distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica

2.1 Introdução

Em 1969, motivados por problemas de vibração encontrados nos novos aviões comerciais e por problemas de falhas de materiais, Birnbaum & Saunders (1969a) propuseram uma nova família de distribuições para modelar o tempo de vida de materiais e equipamentos sujeitos a cargas dinâmicas. Esta distribuição foi derivada a partir de um modelo que mostra que as falhas acontecem devido ao desenvolvimento e ao crescimento de uma rachadura dominante. A seguir, apresentaremos uma breve descrição de como este modelo foi derivado.

Considere um material que é sujeito a um padrão cíclico de tensão e força. Aqui, está implícito que, em qualquer momento no tempo, ‘carga’ é uma função que representa o resultado da tensão lançada no material neste tempo. A falha do material ocorre devido ao desenvolvimento e ao crescimento de uma rachadura dominante dentro do material. Um ciclo é definido como m oscilações e cada aplicação da i -ésima oscilação em um ciclo resulta em uma extensão aleatória da rachadura X_i . A distribuição desta variável aleatória depende somente da rachadura atual causada pela oscilação de carga neste ciclo. A extensão da rachadura devido ao j -ésimo ciclo é dada por

$$Y_j = \sum_{i=1}^m X_i,$$

em que Y_j é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 , para todo $j = 1, 2, 3, \dots$. A extensão total da rachadura após z ciclos é dada por

$$W_z = \sum_{j=1}^z Y_j,$$

com função de distribuição

$$H_z(w) = P(W_z \leq w),$$

para $z = 1, 2, 3, \dots$

Seja C o número de ciclos até a falha, onde tal falha ocorre quando o comprimento da rachadura dominante excede um dado comprimento crítico ω . A função de distribuição da variável C é

$$P(C \leq z) = P\left(\sum_{j=1}^z Y_j > \omega\right) = 1 - H_z(\omega).$$

Assumindo que os Y_j 's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, a função de distribuição de C pode ser aproximada usando o Teorema Central do Limite, isto é,

$$\begin{aligned} P(C \leq z) &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^z \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{z}} \leq \frac{\omega - z\mu}{\sigma\sqrt{z}}\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^z \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{z}} \leq \frac{\omega}{\sigma\sqrt{z}} - \frac{\mu\sqrt{z}}{\sigma}\right) \\ &\cong 1 - \Phi\left(\frac{\omega}{\sigma\sqrt{z}} - \frac{\mu\sqrt{z}}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{z}}{\sigma} - \frac{\omega}{\sigma\sqrt{z}}\right), \end{aligned}$$

em que $\cong$ significa aproximadamente igual e $\Phi(\cdot)$ representa a função distribuição acumulada normal padrão.

Segundo Birnbaum & Saunders (1969a), se z é substituído por uma variável real não-negativa t , a variável aleatória T é a extensão contínua da variável aleatória discreta C . Então, T pode ser considerada como o tempo até a falha. Portanto, a função de distribuição pode agora ser escrita como

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right], \quad t > 0, \quad (2.1)$$

em que

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega\mu}} > 0 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\omega}{\mu} > 0.$$

Dizemos que T segue distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica $[\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)]$. Uma descrição completa e mais detalhada de como este modelo foi derivado pode ser encontrada em Birnbaum & Saunders (1969a).

A distribuição (2.1) possui algumas propriedades interessantes dadas em Birnbaum & Saunders (1969a). O parâmetro α é um parâmetro de forma; à medida que α tende a zero, a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica tende para a distribuição normal de média β e variância τ , onde $\tau \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$. O parâmetro β é um parâmetro de escala, isto é, $T/\beta \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 1)$. Ainda, β é a mediana da distribuição, pois $F_T(\beta) = \Phi(0) = 1/2$. Para qualquer constante real $k > 0$, tem-se que $kT \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, k\beta)$. A distribuição $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ também possui a *propriedade recíproca*, isto é, $T^{-1} \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta^{-1})$, que pertence à mesma família de distribuições [Saunders (1974)].

Na Figura 2.1, apresentamos a função de distribuição (2.1) para alguns valores de α considerando $\beta = 1$. Observamos, através desta figura, que, para diferentes escolhas dos parâmetros (α, β) , as suas respectivas funções de distribuição são diferentes, isto é, a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica é identificável: se temos (α_1, β_1) e (α_2, β_2) com $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ou $\beta_1 \neq \beta_2$, as probabilidades correspondentes a $F(\cdot; \alpha_1, \beta_1)$ são diferentes das probabilidades correspondentes a $F(\cdot; \alpha_2, \beta_2)$.

A distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica vem sendo amplamente usada em ciências da engenharia; conseqüentemente, há vários estudos referentes a esta distribuição. A seguir, listamos alguns trabalhos relevantes. Mann, Schafer & Singpurwalla (1974, p. 155) mostraram que a distribuição (2.1) é unimodal. Engelhardt, Bain & Wright (1981) propuseram intervalos de confiança para α considerando β como um parâmetro de perturbação desconhecido e, da mesma forma, para β considerando α como um parâmetro de perturbação desconhecido. Eles também apresentaram testes de hipóteses para estes parâmetros. Desmond (1985) derivou (2.1) tendo por base um modelo biológico. O autor também estendeu a justificação física para o uso desta distribuição, relaxando algumas suposições feitas em Birnbaum & Saunders (1969a). Desmond (1986) investigou a relação entre a distribuição (2.1) e a distribuição gaussiana inversa. Rieck & Nedelman (1991) formularam e desenvolveram um modelo log-linear para a distribuição $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ e

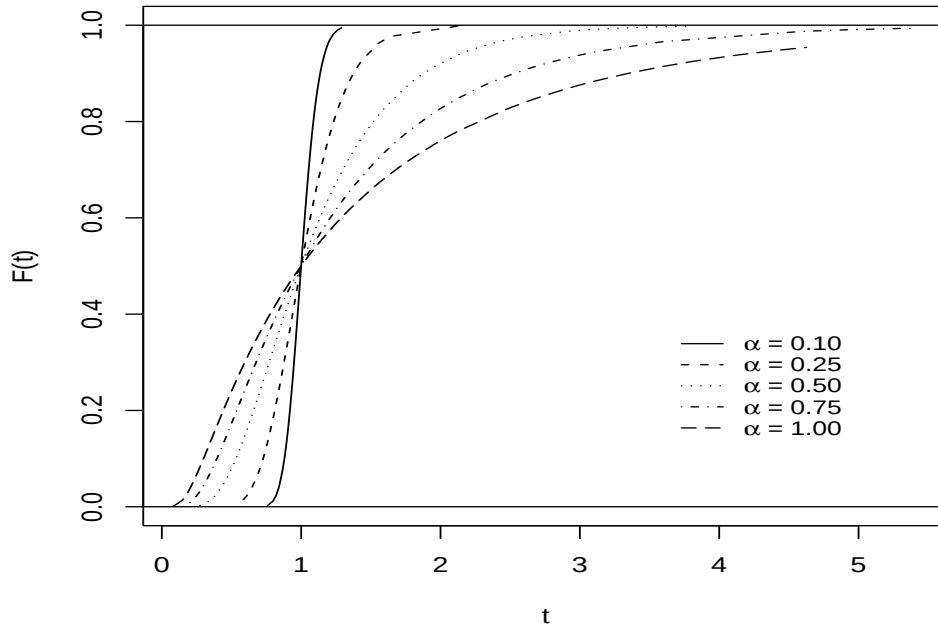


Figura 2.1: Função de distribuição Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α .

mostraram que este modelo pode ser usado para testes de vida acelerada ou para comparar vidas medianas de algumas populações. Achcar (1993) desenvolveu procedimentos de estimação bayesiana para os parâmetros de (2.1) usando aproximações para as distribuições posterioris marginais de α e β . Lu & Chang (1997) utilizaram métodos bootstrap para construir intervalos de predição para observações futuras de uma distribuição $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ e concluíram que os intervalos bootstrap são satisfatórios para tamanhos de amostras maiores que 30. Dupuis & Mills (1998) utilizaram métodos robustos de estimação para estimar os parâmetros da distribuição $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ na presença de outliers nos dados. Eles mostraram que o procedimento robusto é uma técnica alternativa poderosa quando os dados incluem observações distoantes. Rieck (1999) derivou uma função geratriz de momentos para a distribuição senh-normal (seno hiperbólico normal) que pode ser usada para se obter momentos de ordem inteira ou fracionária da distribuição $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$. Outros trabalhos referentes à distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica são Chang & Tang (1993, 1994), Díaz-García & Leiva-Sánchez (2005), Galea, Leiva-Sánchez & Paula (2004), Jin & Kawczak (2003), Ng, Kundu & Balakrishnan (2003), Owen & Padgett

(1999, 2000), Rieck (1995), Wang, Desmond & Lu (2006) e Wu & Wong (2004). Uma boa discussão sobre a distribuição Birnbaum-Saunders pode ser encontrada em Johnson, Kotz & Balakrishnan (1995).

2.2 Função Densidade de Probabilidade

A função distribuição acumulada da variável aleatória T está dada em (2.1), a correspondente função densidade de probabilidade sendo

$$f_T(t; \alpha, \beta) = F'_T(t),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_T(t; \alpha, \beta) &= \phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]\right) \times \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{3/2}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]^2\right\}, \end{aligned}$$

em que $\phi(\cdot)$ é a densidade normal padrão. Portanto, para $t > 0$ e $\alpha, \beta > 0$, temos que

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{3/2}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right\}. \quad (2.2)$$

É importante conhecer a média, variância, coeficientes de assimetria e curtose da densidade (2.2) para determinar seu comportamento sob diferentes valores dos parâmetros. Considere a seguinte transformação monótona:

$$X = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}}\right),$$

ou seja,

$$T = \beta\{1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{1/2}\}.$$

Então, de (2.1) temos que $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{4}\alpha^2)$. Usando a transformação dada acima, o valor esperado, a variância, a assimetria e a curtose são dados, respectivamente, por

$$E(T) = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right), \quad \text{Var}(T) = (\alpha\beta)^2\left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right),$$

$$\mu_3 = \frac{16\alpha^2(11\alpha^2 + 6)}{(5\alpha^2 + 4)^3} \quad \text{e} \quad \mu_4 = 3 + \frac{6\alpha^2(93\alpha^2 + 41)}{(5\alpha^2 + 4)^2}.$$

As quantidades μ_3 e μ_4 medem a assimetria e a largura das caudas da distribuição, respectivamente. Além disso, como foi visto anteriormente, se $T \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$, então $T^{-1} \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta^{-1})$. Conseqüentemente, temos que

$$E(T^{-1}) = \beta^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \quad \text{e} \quad \text{Var}(T^{-1}) = \alpha^2 \beta^{-2} \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2 \right).$$

A densidade (2.2) é caracteristicamente assimétrica à direita. Entretanto, à medida que o valor de α decresce, particularmente para valores menores que um, a densidade se torna mais simétrica. Na Figura 2.2, apresentamos o gráfico da densidade (2.2) para alguns valores de α considerando $\beta = 1$. Observe que à medida que o valor de α decresce, a curva tende a ficar simétrica em torno de β , que é a mediana da distribuição; da mesma forma, note que a variância também decresce com α . Na Figura 2.4 apresentamos o gráfico da densidade (2.2) para alguns valores de β considerando os mesmos valores de α dados na Figura 2.2. Note que o comportamento das curvas nos quatro gráficos são os mesmos que na Figura 2.2, havendo apenas uma mudança na escala dos dados. Isto evidencia o fato de que β é um parâmetro de escala, pois, como foi dado anteriormente, se $T \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$, então $T/\beta \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 1)$.

A taxa de falhas da distribuição Birnbaum-Saunders é expressa como

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \log(1 - F_T(t)) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

e a taxa de falhas média é dada por

$$\nu(t) = \frac{1}{t} \int_0^t h(s) ds.$$

A taxa de falhas média $\nu(t)$ da distribuição Birnbaum-Saunders é quase não-decrescente e aproxima-se de uma constante quando $t \rightarrow \infty$. Mann, Schafer & Singpurwalla (1974) apresentam gráficos da função $\nu(t)$ para diferentes valores de α e β . Uma comparação entre as taxas de falhas das distribuições Birnbaum-Saunders e log-normal foi apresentada em Nelson (1990). A taxa de falhas $h(t)$ da distribuição Birnbaum-Saunders é zero em $t = 0$, cresce até um máximo para algum t_0 e finalmente decresce até um valor finito. Na Figura 2.3 apresentamos o gráfico de $h(t)$ para alguns valores de α fixando $\beta = 1.0$.

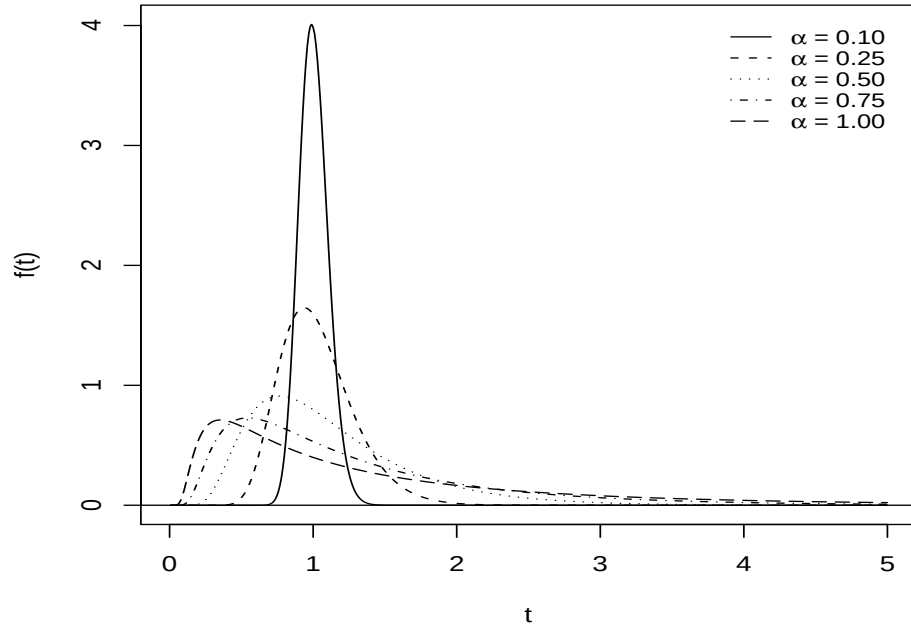


Figura 2.2: Densidade Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α e $\beta = 1.0$.

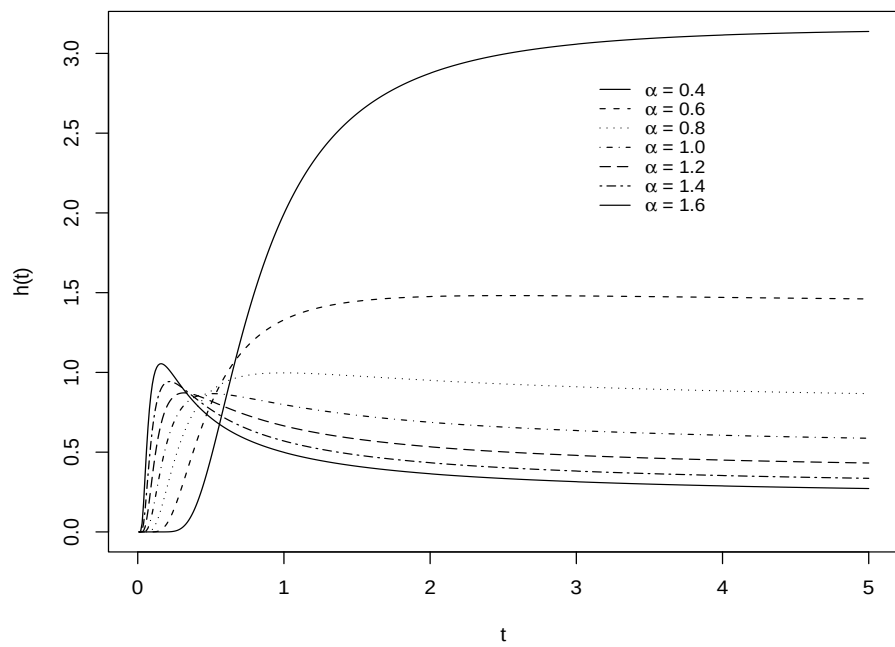


Figura 2.3: Taxa de falhas da distribuição Birnbaum-Saunders para diferentes valores de α e $\beta = 1.0$.

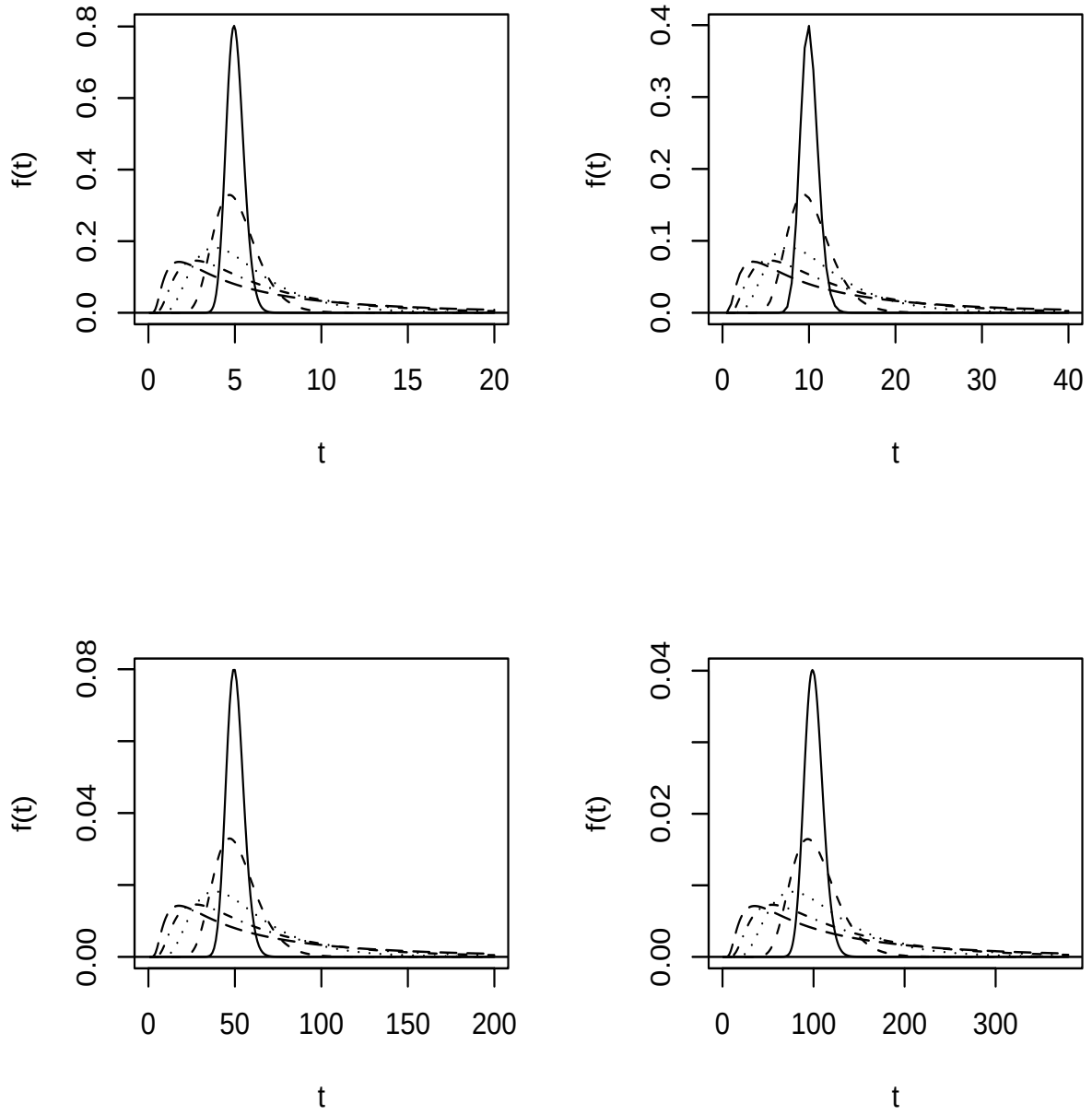


Figura 2.4: Densidades: (a) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 5)$; (b) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 10)$; (c) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 50)$; (d) $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, 100)$.

A log-densidade de (2.2), a menos de uma constante, é da forma

$$-\log(\alpha\beta) + \log \left[\left(\frac{\beta}{t} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right).$$

As derivadas de primeira ordem da log-densidade da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log f(t)}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) + \frac{t}{\alpha^3 \beta} + \frac{\beta}{\alpha^3 t}, \\ \frac{\partial \log f(t)}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{t + \beta} + \frac{t}{2\alpha^2 \beta^2} - \frac{1}{2\alpha^2 t}. \end{aligned}$$

As derivadas de segunda ordem da log-densidade são

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f(t)}{\partial \alpha^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \frac{6}{\alpha^2} \right) - \frac{3t}{\alpha^4 \beta} - \frac{3\beta}{\alpha^4 t}, \\ \frac{\partial^2 \log f(t)}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{t}{\alpha^3 \beta^2} + \frac{1}{\alpha^3 t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \log f(t)}{\partial \beta^2} = \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{(t + \beta)^2} - \frac{t}{\alpha^2 \beta^3}. \end{aligned}$$

As derivadas de terceira ordem da log-densidade são

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \log f(t)}{\partial \alpha^3} &= -\frac{2}{\alpha^3} \left(1 + \frac{12}{\alpha^2} \right) - \frac{12t}{\alpha^5 \beta} - \frac{12\beta}{\alpha^5 t}, \\ \frac{\partial^3 \log f(t)}{\partial \alpha^2 \partial \beta} &= \frac{3}{\alpha^4} \left(\frac{t}{\beta^2} - \frac{1}{t} \right), \quad \frac{\partial^3 \log f(t)}{\partial \alpha \partial \beta^2} = \frac{2t}{\alpha^3 \beta^3}, \\ \frac{\partial^3 \log f(t)}{\partial \beta^3} &= -\frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{(t + \beta)^3} + \frac{3t}{\alpha^2 \beta^4}. \end{aligned}$$

Note acima que as derivadas de terceira ordem da log-densidade (ou log-verossimilhança) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica com respeito aos parâmetros dependem da variável aleatória t .

2.3 Estimação Pontual dos Parâmetros

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^\top$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, ou seja, os t_i 's são variáveis aleatórias independentes com densidades

$$f(t_i; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\},$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f(t_i; \alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \end{aligned}$$

e a função de log-verossimilhança $\ell(\alpha, \beta)$ é

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= \log\{L(\alpha, \beta)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \right) + \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\log(2\alpha\beta\sqrt{2\pi}) + \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\ &= -n \log(2\alpha\beta\sqrt{2\pi}) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \\ &= -n \log(\alpha\beta\sqrt{8\pi}) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, a menos de uma constante, $\ell(\alpha, \beta)$ é dada por

$$\ell(\alpha, \beta) = -n \log(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right). \quad (2.3)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ de α e β são obtidos através da maximização de (2.3), a partir da solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^3 \beta} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\beta}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0, \\ \frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i + \beta} + \frac{1}{2\alpha^2 \beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Com base em (2.4), Birnbaum & Saunders (1969b) mostraram que $\hat{\alpha}$ pode ser escrito como

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right)^{1/2},$$

em que

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \text{e} \quad r = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \right)^{-1}.$$

Entretanto, para encontrar $\hat{\beta}$ é necessário resolver uma equação não-linear em β , ou seja, $\hat{\beta}$ é obtido como a raiz positiva da equação

$$\beta^2 - \beta[2r + \mathcal{K}(\beta)] + r[s + \mathcal{K}(\beta)] = 0, \quad (2.5)$$

em que

$$\mathcal{K}(\delta) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\delta + t_i)^{-1} \right]^{-1} \quad \text{para} \quad \delta > 0.$$

Birnbaum & Saunders (1969b) propuseram dois procedimentos iterativos para encontrar $\hat{\beta}$ a partir de (2.5), que denominaram de ‘Método I’ e de ‘Método II’. Eles observaram que o Método I funciona bem para valores de $\alpha < 0.5$, mas não funciona bem quando $\alpha > 2$. Também notaram que o Método II não funciona adequadamente para alguns valores de α . Neste trabalho, para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de α e β , a função de log-verossimilhança dada em (2.3) foi maximizada utilizando o algoritmo de otimização não-linear BFGS com derivadas analíticas.

Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) apresentaram uma discussão sobre os estimadores de máxima verossimilhança de α e β . Os autores também propuseram estimadores de momentos modificados para estes parâmetros. Adicionalmente, usaram um método simples de correção de viés para reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhança de α e β . Eles concluíram, após um extensivo estudo de simulação de Monte Carlo, que os vieses de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ podem ser aproximados, respectivamente, por

$$\text{viés}(\hat{\alpha}) \approx -\frac{\alpha}{n} \quad \text{e} \quad \text{viés}(\hat{\beta}) \approx \frac{\alpha^2 \beta}{4n}. \quad (2.6)$$

Assim, de acordo com a definição do viés de um estimador, temos que

$$E(\hat{\alpha}) - \alpha \approx -\frac{\alpha}{n},$$

o que implica que

$$E(\hat{\alpha}) \approx \alpha - \frac{\alpha}{n},$$

isto é,

$$E(\hat{\alpha}) \approx \left(\frac{n-1}{n} \right) \alpha.$$

Agora defina

$$\check{\alpha} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \hat{\alpha},$$

o que implica

$$E(\check{\alpha}) = E \left[\left(\frac{n}{n-1} \right) \hat{\alpha} \right] = \left(\frac{n}{n-1} \right) E(\hat{\alpha}) \approx \alpha.$$

Da mesma forma,

$$E(\hat{\beta}) - \beta \approx \frac{\alpha^2 \beta}{4n}$$

e, portanto,

$$E(\hat{\beta}) \approx \beta + \frac{\alpha^2 \beta}{4n},$$

isto é,

$$E(\hat{\beta}) \approx \left(1 + \frac{\alpha^2}{4n} \right) \beta.$$

Definindo

$$\check{\beta} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{4n} \right)^{-1} \hat{\beta} \approx \left(1 + \frac{\check{\alpha}^2}{4n} \right)^{-1} \hat{\beta},$$

temos que

$$E(\check{\beta}) \approx \beta.$$

Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) propuseram, assim, os estimadores

$$\check{\alpha} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \hat{\alpha} \quad \text{e} \quad \check{\beta} = \left(1 + \frac{\check{\alpha}^2}{4n} \right)^{-1} \hat{\beta}, \quad (2.7)$$

para α e β , respectivamente.

2.4 Estimação Intervalar dos Parâmetros

Considere $\theta = (\alpha, \beta)^\top$ e seja $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$ o estimador de máxima verossimilhança de θ . Dada a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, tem-se que

$$\hat{\theta} \stackrel{A}{\sim} \mathcal{N}_2(\theta, K(\theta)^{-1}),$$

quando n é grande, $\overset{A}{\sim}$ denotando aproximadamente distribuído. Aqui, $K(\theta)$ é a matriz de informação de Fisher, $K(\theta)^{-1}$ representando sua inversa. Como pode ser observado no Apêndice A, os valores esperados das derivadas de segunda ordem da função de log-verossimilhança (2.3) em relação aos parâmetros α e β são

$$\kappa_{\alpha\alpha} = -\frac{2n}{\alpha^2}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{e} \quad \kappa_{\beta\beta} = -\frac{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]}{\alpha^2\beta^2},$$

em que $h(\alpha)$ é dada por

$$h(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \pi e^{2/\alpha^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{2}{\alpha}\right) \right].$$

Então,

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2n}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1]}{\alpha^2\beta^2} \end{pmatrix}$$

e

$$K(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2\beta^2}{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1]} \end{pmatrix}.$$

Assim, tem-se que

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2 \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2\beta^2}{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1]} \end{pmatrix} \right]. \quad (2.8)$$

Observe em (2.8) que os parâmetros α e β são ortogonais, ou seja, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são assintoticamente independentes. Então, a partir de (2.8), podemos construir intervalos de confiança assintóticos para α e β , que são dados por

$$\left(\hat{\alpha} - z_{1-\frac{\gamma}{2}}(K(\hat{\theta})^{\alpha\alpha})^{1/2}, \quad \hat{\alpha} + z_{1-\frac{\gamma}{2}}(K(\hat{\theta})^{\alpha\alpha})^{1/2} \right) \quad (2.9)$$

e

$$\left(\hat{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}}(K(\hat{\theta})^{\beta\beta})^{1/2}, \quad \hat{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}}(K(\hat{\theta})^{\beta\beta})^{1/2} \right). \quad (2.10)$$

Esses são intervalos de confiança assintóticos (ICA) para α e β , respectivamente, de tamanho $100(1-\gamma)\%$. A quantidade z_η é tal que $P(Z \leq z_\eta) = \eta$, onde Z tem distribuição normal padrão. As variâncias assintóticas de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são $K(\hat{\theta})^{\alpha\alpha}$ e $K(\hat{\theta})^{\beta\beta}$, respectivamente, sendo $K(\hat{\theta})^{\alpha\alpha}$ o elemento (1,1) da matriz $K(\theta)^{-1}$ avaliado em $\hat{\theta}$ e $K(\hat{\theta})^{\beta\beta}$, o elemento (2,2) da matriz $K(\theta)^{-1}$ avaliado em $\hat{\theta}$.

Da mesma forma que é possível construir intervalos de confiança assintóticos para θ com base em seu respectivo estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, também é possível construir intervalos de confiança assintóticos para θ com base no estimador $\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta})^\top$ proposto por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) apresentado em (2.7). Ou seja, dada a consistência e a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, tem-se que

$$\check{\theta} = \begin{pmatrix} \check{\alpha} \\ \check{\beta} \end{pmatrix} \overset{A}{\sim} \mathcal{N}_2(\theta, K(\theta)^{-1}).$$

Assim,

$$\left(\check{\alpha} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\check{\theta})^{\alpha\alpha})^{1/2}, \quad \check{\alpha} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\check{\theta})^{\alpha\alpha})^{1/2} \right) \quad (2.11)$$

e

$$\left(\check{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\check{\theta})^{\beta\beta})^{1/2}, \quad \check{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\check{\theta})^{\beta\beta})^{1/2} \right) \quad (2.12)$$

são intervalos de confiança assintóticos para α e β de tamanho $100(1 - \gamma)\%$, respectivamente, denotados por ICNg. As variâncias assintóticas de $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ são $K(\check{\theta})^{\alpha\alpha}$ e $K(\check{\theta})^{\beta\beta}$, respectivamente, sendo $K(\check{\theta})^{\alpha\alpha}$ o elemento (1,1) da matriz $K(\theta)^{-1}$ avaliado em $\check{\theta}$ e $K(\check{\theta})^{\beta\beta}$, o elemento (2,2) da matriz $K(\theta)^{-1}$ avaliado em $\check{\theta}$.

Wu & Wong (2004) estudaram estimação intervalar dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Para construir intervalos de confiança para os parâmetros desconhecidos, eles utilizaram a estatística da razão de log-verossimilhanças sinalizada modificada proposta por Barndorff-Nielsen (1986, 1991). Este método, em teoria, tem precisão de $O(n^{-3/2})$, sendo, portanto, extremamente preciso em amostras de tamanho pequeno. Eles ainda ressaltam que a vantagem de se usar os estimadores de máxima verossimilhança para a construção de intervalos de confiança deve-se à simplicidade de cálculos. Entretanto, intervalos de confiança baseados na estatística da razão de log-verossimilhanças sinalizada modificada tipicamente apresenta melhores probabilidades de cobertura que os intervalos de confiança baseados em estimadores de máxima verossimilhança.

3.1 Introdução

Os estimadores de máxima verossimilhança (EsMV) em modelos estatísticos paramétricos são, em geral, viesados para os valores verdadeiros dos parâmetros quando o tamanho da amostra n é pequeno ou quando a informação de Fisher é reduzida. Usualmente o viés é ignorado na prática sob a justificativa de que é desprezível quando comparado com o erro padrão do estimador do parâmetro, dado que em uma amostra aleatória de tamanho n o viés do estimador de máxima verossimilhança, em geral, é de ordem $O(n^{-1})$ enquanto o seu respectivo erro padrão assintótico é de ordem $O(n^{-1/2})$. Entretanto, em pequenas amostras, o viés pode ser apreciável e pode ter magnitude comparável ao erro padrão da estimativa do parâmetro. Portanto, é útil obter expressões para calcular o viés de segunda ordem dos EsMV, para que se possa avaliar a qualidade das estimativas em amostras de tamanho pequeno ou moderado. Um artigo pioneiro sobre correção de viés é devido a Bartlett (1953). O autor obteve intervalos de confiança aproximados baseados no EMV no caso uniparamétrico, fornecendo uma expressão simples para o viés de ordem $O(n^{-1})$. Haldane (1953) e Haldane & Smith (1956) apresentaram expressões de ordem $O(n^{-1})$ para os primeiros quatro cumulantes em amostras aleatórias de um ou dois parâmetros desconhecidos. Shenton & Wallington (1962) desenvolveram uma metodologia para obter o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV no contexto bi-paramétrico. Posteriormente, Cox &

Snell (1968), supondo observações independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas, apresentaram uma expressão geral para o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV nos casos uniparamétrico e multiparamétrico. Um incômodo na aplicação da metodologia de Cox & Snell (1968) em modelos multiparamétricos é a necessidade do cálculo de vários momentos de derivadas da função de log-verossimilhança.

Robertson & Fryer (1970) desenvolveram um método geral para encontrar o viés e covariância de ordem $O(n^{-2})$ dos estimadores de máxima verossimilhança. Um método geral para calcular o viés de segunda ordem em uma classe de problemas de mínimos quadrados não-lineares foi apresentado por Box (1971), que também considerou o cálculo do viés por estimação bayesiana. Fórmulas para o viés de ordem $O(n^{-1})$ e para a covariância de ordem $O(n^{-2})$ em um modelo de resposta quantal, com aplicação ao modelo probit, foram apresentadas em Sowden (1971). O autor mostrou que o viés de segunda ordem pode ser apreciável em amostras de tamanho pequeno ou moderado. Sowden (1972) fez uma comparação entre os métodos de máxima verossimilhança, χ^2 mínimo e χ^2 mínimo modificado, para estimar os parâmetros em um modelo de resposta quantal, em termos de viés de segunda ordem das estimativas dos parâmetros. O autor verificou que o método de máxima verossimilhança foi o mais satisfatório entre os três em termos de viés. Fryer & Robertson (1972) compararam o viés dos estimadores de momentos, de máxima verossimilhança, multinomial e χ^2 mínimo até ordem $O(n^{-1})$ e erro quadrático médio de ordem $O(n^{-2})$ para uma variedade de distribuições misturadas.

Seguindo a fórmula geral para encontrar o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança desenvolvida por Cox & Snell (1968), Anderson & Richardson (1979) e MacLachlan (1980) encontraram o viés dos EsMV em problemas de discriminação logística. Cook, Tsai & Wei (1986) apresentaram o viés dos EsMV para um modelo de regressão não-linear normal. Os autores mostraram que o viés pode ser devido à posição de variáveis explicativas no espaço amostral. Young & Bakir (1987) apresentaram estimadores corrigidos em modelos de regressão log-gama. Cordeiro & McCullagh (1991) derivaram uma fórmula geral para o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV em modelos lineares generalizados. Cordeiro & Cribari-Neto (1993) apresentaram uma discussão sobre correção de viés em modelos lineares generalizados com aplicação em modelos econométricos. Cordeiro & Klein (1994) desenvolveram uma fórmula matricial

geral para obter o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV em modelos ARMA. Ferrari, Botter, Cordeiro & Cribari-Neto (1996) obtiveram o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV em modelos uniparamétricos e compararam o estimador corrigido com o estimador de máxima verossimilhança usual em termos de erro quadrático médio. Cordeiro, Rocha, Rocha & Cribari-Neto (1997) apresentaram expressões em forma fechada para o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV dos parâmetros da distribuição beta. Cribari-Neto, Botter, Cordeiro & Ferrari (1998) obtiveram expressões em forma fechada para o viés de segunda ordem dos EsMV para um número de distribuições da família exponencial uniparamétrica.

Cordeiro & Vasconcellos (1997) apresentaram uma fórmula geral para calcular o viés de segunda ordem dos EsMV em uma ampla classe de modelos multivariados normais não-lineares. Vasconcellos & Cordeiro (1997a) generalizaram os trabalhos de Box (1971) e Cook, Tsai & Wei (1986) ao obterem fórmulas gerais em notação matricial para o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV em modelos multivariados não-lineares heteroscedásticos. Vasconcellos & Cordeiro (1997b) obtiveram uma fórmula geral para o viés de segunda ordem dos EsMV nos modelos SUR (“Seemingly Unrelated Regressions”) não-lineares, os quais apresentam correlação serial entre os erros nas diferentes equações de regressão. Os autores mostraram que tais vieses podem ser facilmente obtidos como vetores de estimadores de mínimos quadrados em regressões lineares ponderadas auxiliares. Cordeiro, Vasconcellos & Santos (1998) obtiveram uma expressão para o viés de segunda ordem dos EsMV em um modelo de regressão não-linear com erros t -Student.

Cordeiro & Cribari-Neto (1998) discutiram a redução de viés em modelos lineares generalizados e modelos não-lineares de regressão da família exponencial. Cordeiro & Vasconcellos (1999) apresentaram EsMV corrigidos para o modelo de regressão von Mises. Vasconcellos & Cordeiro (2000) obtiveram expressões em forma matricial para o viés de segunda ordem dos EsMV na função resposta e na matriz escala em modelos de regressão multivariado não-linear com erros t -Student. Cordeiro, Ferrari, Uribe-Opazo & Vasconcellos (2000) derivaram uma fórmula matricial geral para o viés de segunda ordem dos EsMV em uma classe de modelos de regressão não-lineares simétricos. Cribari-Neto & Vasconcellos (2002) analisaram o comportamento, em amostras finitas, de três procedimentos alternativos para corrigir o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos EsMV da distribuição beta. Os autores concluíram que os dois métodos analíticos utilizados apresentaram melhor

desempenho que o método numérico. Recentemente, Saha & Paul (2005) apresentaram um estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de segunda ordem para o parâmetro de dispersão em um modelo de regressão binomial negativa. Os autores concluíram, a partir de critérios de viés e eficiência, que o estimador corrigido pelo viés de segunda ordem tem desempenho superior ao do estimador não-corrigido. Vasconcellos & Silva (2005) obtiveram estimadores corrigidos em um modelo de regressão t -Student não-linear quando o número de graus de liberdade é desconhecido.

Além do método analítico geral para encontrar o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança desenvolvido por Cox & Snell (1968), há ainda dois métodos de correção de viés que vêm sendo amplamente explorados. O primeiro é o método proposto por David Firth em 1993 [Firth (1993)], cuja a idéia é modificar a função escore, ou a função de log-verossimilhança, para obter estimadores corrigidos. O segundo é o método conhecido por bootstrap, desenvolvido por Bradley Efron em 1979 [Efron (1979)], que evita a necessidade de cálculos, substituindo esses cálculos por esforço computacional. Ferrari & Cribari-Neto (1998) exploraram a relação entre o método analítico, baseado em expansões de Edgeworth, e o método bootstrap.

3.2 Correção de Cox–Snell

Cox & Snell (1968) obtiveram uma fórmula geral para calcular o viés de ordem $O(n^{-1})$ do estimador de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$. A expressão geral é dada por

$$B(\hat{\theta}_s) = \sum_{r,t,u} \kappa^{s,r} \kappa^{t,u} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{rtu} + \kappa_{rt,u} \right\}, \quad (3.1)$$

em que r, s, t, u indexam o espaço paramétrico e os κ 's são como definidos na Seção 1.7. Dizemos que $B(\hat{\theta}_s)$ é o viés de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_s$. Em muitas situações torna-se conveniente substituir, como consequência das identidades de Bartlett, $\frac{1}{2} \kappa_{rtu} + \kappa_{rt,u}$ por $\kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{rtu}$. No caso da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica temos que $\theta = (\alpha, \beta)^\top$. Assim, introduzimos a seguinte notação. As derivadas da função de log-verossimilhança (2.3) com respeito aos parâmetros desconhecidos são indicadas por índices, onde a letra α corresponde às derivadas com respeito ao parâmetro α e a letra β corresponde às derivadas com respeito ao parâmetro β . Logo, $U_\alpha = \partial \ell(\theta) / \partial \alpha$,

$U_\beta = \partial\ell(\theta)/\partial\beta$, $U_{\alpha\beta} = \partial^2\ell(\theta)/\partial\alpha\partial\beta$, $U_{\alpha\alpha\beta} = \partial^3\ell(\theta)/\partial\alpha^2\partial\beta$ e assim por diante. A notação para os momentos destas derivadas é dada por Lawley (1956): $\kappa_{\alpha\alpha} = E(U_{\alpha\alpha})$, $\kappa_{\alpha\beta} = E(U_{\alpha\beta})$, $\kappa_{\beta\beta} = E(U_{\beta\beta})$, $\kappa_{\alpha\alpha,\beta} = E(U_{\alpha\alpha}U_\beta)$, $\kappa_{\alpha\alpha\beta} = E(U_{\alpha\alpha\beta})$, etc., onde todos os κ 's são momentos sobre a amostra e em geral são de ordem $O(n)$. As derivadas são denotadas por $\kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)} = \partial\kappa_{\alpha\beta}/\partial\alpha$, $\kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} = \partial\kappa_{\alpha\beta}/\partial\beta$, etc. Adicionalmente, $\kappa^{\alpha,\alpha}$ denota o elemento (1,1) da inversa $K(\theta)^{-1}$ da matriz de informação, $\kappa^{\alpha,\beta}$ denota o elemento (1,2) e $\kappa^{\beta,\beta}$ denota o elemento (2,2).

A partir da expressão (3.1), a fórmula para calcular o viés de ordem $O(n^{-1})$ do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ é dada por

$$\begin{aligned} B(\hat{\alpha}) = & \kappa^{\alpha,\alpha}\kappa^{\alpha,\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\alpha}\right\} + \kappa^{\alpha,\alpha}\kappa^{\alpha,\beta}\left\{\kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\beta}\right\} \\ & + \kappa^{\alpha,\alpha}\kappa^{\beta,\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta\alpha}\right\} + \kappa^{\alpha,\beta}\kappa^{\alpha,\alpha}\left\{\kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\alpha\alpha}\right\} \\ & + \kappa^{\alpha,\beta}\kappa^{\beta,\alpha}\left\{\kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\beta\alpha}\right\} + \kappa^{\alpha,\beta}\kappa^{\alpha,\beta}\left\{\kappa_{\beta\alpha}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\alpha\beta}\right\} \\ & + \kappa^{\alpha,\alpha}\kappa^{\beta,\beta}\left\{\kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta\beta}\right\} + \kappa^{\alpha,\beta}\kappa^{\beta,\beta}\left\{\kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\beta\beta}\right\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

a do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ sendo

$$\begin{aligned} B(\hat{\beta}) = & \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\beta}\left\{\kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\beta\beta}\right\} + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\alpha}\left\{\kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\beta\alpha}\right\} \\ & + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\alpha,\beta}\left\{\kappa_{\beta\alpha}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\alpha\beta}\right\} + \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\beta}\left\{\kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta\beta}\right\} \\ & + \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\alpha,\beta}\left\{\kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\beta}\right\} + \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta\alpha}\right\} \\ & + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\alpha,\alpha}\left\{\kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\alpha\alpha}\right\} + \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\alpha,\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\alpha}\right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pode-se observar em (2.8) que os parâmetros α e β são ortogonais, isto é, as quantidades $\kappa^{\alpha,\beta} = \kappa^{\beta,\alpha} = 0$. Dessa forma, as expressões (3.2) e (3.3) se reduzem, respectivamente, a

$$B(\hat{\alpha}) = \kappa^{\alpha,\alpha}\kappa^{\alpha,\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\alpha}\right\} + \kappa^{\alpha,\alpha}\kappa^{\beta,\beta}\left\{\kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta\beta}\right\}$$

e

$$B(\hat{\beta}) = \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\beta}\left\{\kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\beta\beta}\right\} + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\alpha,\alpha}\left\{\kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\beta\alpha\alpha}\right\}.$$

As quantidades necessárias para a obtenção de $B(\hat{\alpha})$ e $B(\hat{\beta})$ estão dadas no Apêndice A. A partir de alguns cálculos, temos que os vieses de segunda ordem de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são dados, respectivamente, por

$$B(\hat{\alpha}) = -\frac{\alpha}{4n} \left(1 + \frac{2 + \alpha^2}{\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1} \right) \quad (3.4)$$

e

$$B(\hat{\beta}) = \frac{\beta\alpha^2}{2n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]}, \quad (3.5)$$

onde $h(\alpha)$ está dada no Apêndice A, expressão (A.17).

A fim de comparar os vieses de segunda ordem $B(\hat{\alpha})$ e $B(\hat{\beta})$ com os vieses obtidos empiricamente por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) apresentados em (2.6), apresentamos nas Figuras 3.1 e 3.2 gráficos destes vieses considerando $n = 5$. Na Figura 3.1 apresentamos o gráfico dos vieses de $\hat{\alpha}$ para diferentes valores de α . Observe nesta figura que o viés de segunda ordem $B(\hat{\alpha})$ é menor, em módulo, que o viés de $\hat{\alpha}$ obtido empiricamente por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003). Note ainda que esta diferença aumenta com o parâmetro α . Na Figura 3.2 apresentamos o gráfico dos vieses de $\hat{\beta}$ para diferentes valores de α fixando $\beta = 1.0$. Note nesta figura que o viés de segunda ordem $B(\hat{\beta})$ é maior que o viés de $\hat{\beta}$ obtido por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) para valores de $\alpha \in (0, 1.7)$, mas é menor para $\alpha > 1.7$.

A partir das expressões (3.4) e (3.5), definimos os estimadores de máxima verossimilhança corrigidos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ da forma

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \hat{B}(\hat{\alpha}) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta} = \hat{\beta} - \hat{B}(\hat{\beta}), \quad (3.6)$$

em que $\hat{B}(\hat{\alpha})$ e $\hat{B}(\hat{\beta})$ denotam os estimadores de máxima verossimilhança de $B(\hat{\alpha})$ e $B(\hat{\beta})$, respectivamente, isto é, os parâmetros desconhecidos são substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança. Dizemos que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são estimadores de máxima verossimilhança corrigidos pelo viés de ordem $O(n^{-1})$. Estes novos estimadores têm viés de ordem $O(n^{-2})$, pois $E(\tilde{\alpha}) = \alpha + O(n^{-2})$ e $E(\tilde{\beta}) = \beta + O(n^{-2})$. Espera-se que os estimadores corrigidos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ tenham melhores propriedades em amostras finitas do que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, cujo viés é de ordem $O(n^{-1})$.

Seja $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^\top$ o estimador de máxima verossimilhança de $\theta = (\alpha, \beta)^\top$ corrigido pelo viés de ordem $O(n^{-1})$. Como o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ é consistente

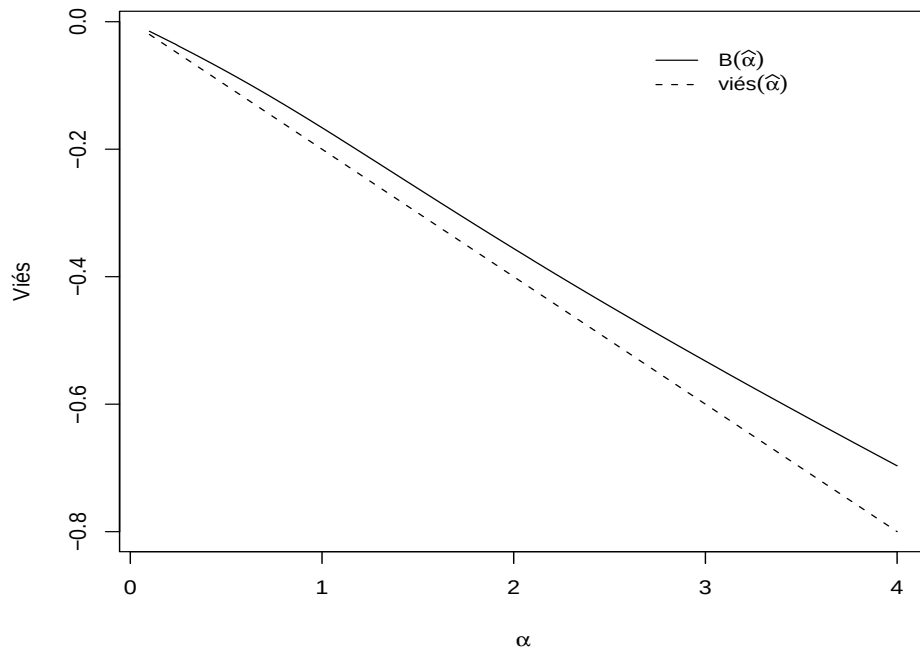


Figura 3.1: Vieses de $\hat{\alpha}$ para diferentes valores de α .

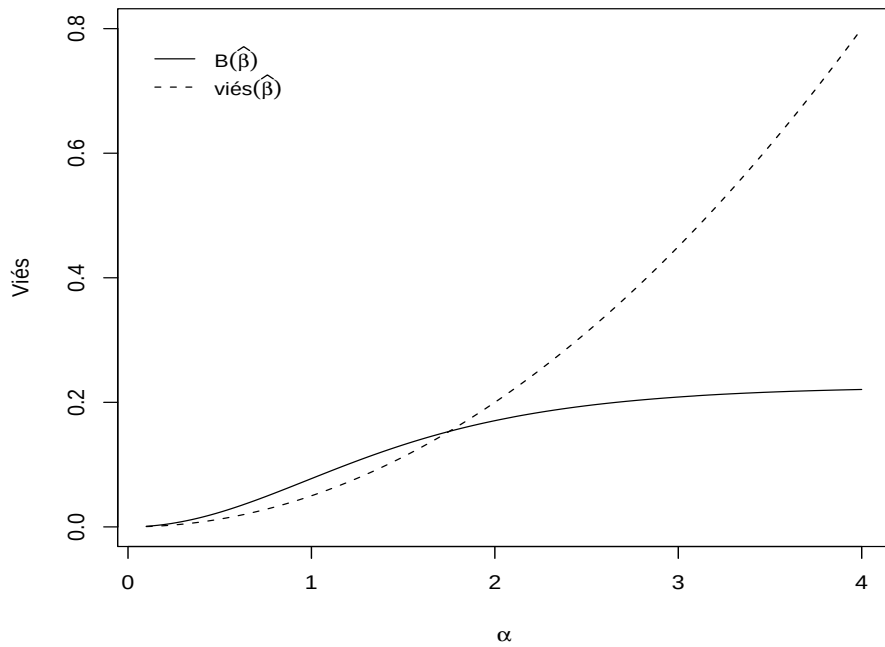


Figura 3.2: Vieses de $\hat{\beta}$ para diferentes valores de α fixando $\beta = 1.0$.

para θ e, pela expressão (3.1), o viés $B(\hat{\theta})$ de segunda ordem converge para zero quando o tamanho da amostra n tende ao infinito, então o estimador corrigido $\tilde{\theta}$ é consistente para θ . Adicionalmente, dada a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, tem-se que

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \overset{A}{\sim} \mathcal{N}_2(\theta, K(\theta)^{-1}).$$

Assim, para um tamanho amostral suficientemente grande, segue que

$$\left(\tilde{\alpha} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\tilde{\theta})^{\alpha\alpha})^{1/2}, \quad \tilde{\alpha} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\tilde{\theta})^{\alpha\alpha})^{1/2} \right) \quad (3.7)$$

e

$$\left(\tilde{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\tilde{\theta})^{\beta\beta})^{1/2}, \quad \tilde{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} (K(\tilde{\theta})^{\beta\beta})^{1/2} \right) \quad (3.8)$$

são intervalos de confiança assintóticos para α e β de tamanho $100(1 - \gamma)\%$, respectivamente, denotados por ICCS. As variâncias assintóticas de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são $K(\tilde{\theta})^{\alpha\alpha}$ e $K(\tilde{\theta})^{\beta\beta}$, respectivamente, sendo $K(\tilde{\theta})^{\alpha\alpha}$ o elemento (1,1) da matriz $K(\theta)^{-1}$ avaliado em $\tilde{\theta}$ e $K(\tilde{\theta})^{\beta\beta}$, o elemento (2,2) da matriz $K(\theta)^{-1}$ avaliado em $\tilde{\theta}$.

Como os estimadores corrigidos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são consistentes para os valores verdadeiros dos parâmetros e possuem vieses de ordem $O(n^{-2})$, espera-se que os valores das variâncias assintóticas estimadas de cada estimativa corrigida estejam mais próximos das verdadeiras variâncias em amostras de tamanho pequeno e moderado que as variâncias estimadas correspondentes às estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, que possuem vieses de ordem $O(n^{-1})$. Assim, os intervalos (3.7) e (3.8) comparados com os intervalos (2.9) e (2.10) devem, em princípio, proporcionar estimativas intervalares mais precisas.

3.3 Correção de David Firth

Em problemas regulares, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ pode ser obtido como solução da equação score

$$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

onde $\ell(\theta) = \log\{L(\theta)\}$ é o logaritmo da função de verossimilhança. Ainda, o viés do estimador $\hat{\theta}$ pode ser escrito como uma série de potências de $1/n$ da forma

$$B(\hat{\theta}) = \frac{B_1(\theta)}{n} + \frac{B_2(\theta)}{n^2} + \dots, \quad (3.9)$$

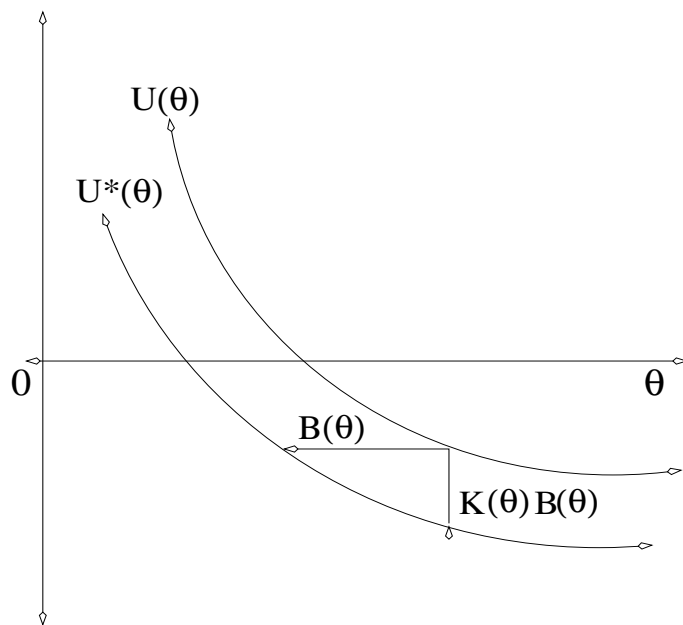


Figura 3.3: Função escore modificada.

onde n , como antes, é o tamanho da amostra. O método desenvolvido por Firth (1993) para corrigir o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança consiste em uma modificação conveniente da função escore $U(\theta)$, que permite remover o termo n^{-1} da expansão (3.9), dada por

$$U^*(\theta) = U(\theta) + K(\theta)B(\theta), \quad (3.10)$$

em que $K(\theta)$ é a matriz de informação de Fisher e $B(\theta)$ é o viés de segunda ordem dado em (3.1). A modificação de $U(\theta)$ pode ser explicada por uma simples geometria de triângulos, como ilustrado na Figura 3.3. A solução θ^* de $U^*(\theta) = 0$ produz uma estimativa corrigida. Em particular, quando $E(U_r U_{ut}) = 0$ para todo r, u, t , pode-se mostrar que θ^* pode ser obtido maximizando-se a função de log-verossimilhança modificada [ver Firth (1993), §3.1]

$$\ell^*(\theta) = \ell(\theta) + \frac{1}{2} \log |K(\theta)|,$$

em que $|K(\theta)|$ denota o determinante da matriz de informação $K(\theta)$. Este é o caso quando as derivadas de segunda ordem com respeito a θ da função de log-verossimilhança não dependem dos valores amostrais; isto acontece, por exemplo, quando θ é um parâmetro canônico de modelos da família exponencial.

A proposta de Firth (1993) é “preventiva”, pois modifica a função escore (ou, a função de log-verossimilhança) para produzir um estimador modificado, enquanto a proposta de Cox & Snell (1968) é “corretiva”, pois modifica o estimador de máxima verossimilhança após sua obtenção. Segundo Firth (1993) e de forma análoga ao método corretivo discutido na seção anterior, o estimador corrigido θ^* apresenta as mesmas propriedades assintóticas do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, isto é, θ^* é consistente para θ , e sua distribuição assintótica é tal que

$$\theta^* \overset{A}{\sim} \mathcal{N}(\theta, K(\theta)^{-1}).$$

Além disso, θ^* tem viés de ordem $O(n^{-2})$, isto é, $E(\theta^*) = \theta + O(n^{-2})$.

Se $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros, a expressão $U^*(\theta)$ é vista como uma equação vetorial. No caso da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica temos que $\theta = (\alpha, \beta)^\top$. A matriz de informação de Fisher $K(\theta)$ e o vetor de viés $B(\theta)$ são dados, respectivamente, por

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2n}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1]}{\alpha^2\beta^2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{4n} \left\{ 1 + \frac{2+\alpha^2}{\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1} \right\} \\ \frac{\beta\alpha^2}{2n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1]} \end{pmatrix}.$$

A função escore modificada $U^*(\theta)$, dada em (3.10), para a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica é da forma

$$U^*(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} + n \left(\frac{2+\alpha^2}{\alpha^2} \right) + \frac{2+\alpha^2}{2[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)+1]} \right\} + \frac{1}{\alpha^3\beta} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\beta}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \\ -\frac{(n-1)}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i+\beta} + \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \end{pmatrix}.$$

Entretanto, ao tentar encontrar o estimador corrigido $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*)^\top$ através da solução do sistema não-linear $U^*(\theta) = 0$, em avaliações numéricas apresentadas no Capítulo 4, o algoritmo utilizado para solucionar $U^*(\theta) = 0$ apresentou constantes falhas de convergência para tamanhos amostrais menores que 60, sendo este algoritmo o de Newton-Rapshon, que está implementado na linguagem de programação **0x** [Doornik (2001)] através da função **SolveNLE**. Ou seja, o método proposto por Firth (1993), quando aplicado à distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, pôde ser implementado apenas para valores amostrais maiores que 60. Por isso, este método não foi incluído nos estudos de simulação de Monte Carlo apresentados no Capítulo 4.

3.4 Correção por Bootstrap

3.4.1 Introdução

Em vários problemas de inferência estatística, surge a impossibilidade de se obter soluções analíticas ou de estabelecer pressupostos que viabilizem a sua derivação. É a partir destas situações que os métodos de simulação assumem um papel importante, permitindo obter aproximações para as soluções desses problemas. O bootstrap é um método computacional em inferência estatística introduzido por Bradley Efron em 1979 [Efron (1979)] capaz de responder a questões reais sem a necessidade de complicados e muitas vezes inviáveis cálculos analíticos. O método bootstrap permite a estimação de variâncias, intervalos de confiança, p -valores e outras quantidades de interesse da inferência estatística através da reamostragem direta dos dados, os quais são tratados como se fossem a própria população. A terminologia *bootstrap* surgiu de uma analogia com a obra do século XVIII intitulada “Aventuras do Barão de Munchausen” de autoria de Rudolph Raspe. O barão encontrava-se no fundo de um lago e se salvou puxando a si próprio para cima pelas alças de suas botas.

Considere uma amostra aleatória $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ de uma variável aleatória populacional Y cuja distribuição está determinada completamente por sua função de distribuição $F \equiv F_Y(y)$. Seja $\theta = t(F)$ uma função de F denominada parâmetro e seja $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$ um estimador de θ . A aplicação de bootstrap neste caso consiste em obter, a partir da amostra original $\mathbf{y}$, um grande número de pseudo-amostras $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^\top$, calcular as respectivas réplicas bootstrap de $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}^* = s(\mathbf{y}^*)$ e, com base na distribuição empírica de $\hat{\theta}^*$, estimar a função de distribuição de $\hat{\theta}$. De modo geral, o método bootstrap tenta realizar o que seria desejável em aplicações práticas, isto é, repetir várias vezes o experimento.

Existem duas versões do método bootstrap, a primeira é o método bootstrap não-paramétrico e a segunda, o método bootstrap paramétrico. Na primeira versão do método bootstrap, a amostra aleatória bootstrap $\mathbf{y}^*$ é obtida de uma estimativa não-paramétrica $\hat{F}$ de F , que é a função de distribuição empírica da amostra original $\mathbf{y}$, dada por

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(-\infty, y]}(y_i) = \frac{\#\{y_i \leq y\}}{n}, \quad (3.11)$$

que atribui probabilidade $1/n$ a cada y_i , $i = 1, \dots, n$. O termo $\mathbb{I}_{(-\infty, y]}(y_i)$ é uma função

indicadora dada por

$$\mathbb{I}_{(-\infty, y]}(y_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_i \in (-\infty, y], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Basicamente, quando calculamos a função de distribuição empírica $\hat{F}$, obtemos a proporção empírica das realizações na amostra que são $\leq y$ e usamos esta proporção empírica para estimar a verdadeira probabilidade desconhecida $F(y)$ de uma realização no intervalo $(-\infty, y]$. O bootstrap não-paramétrico é uma aplicação direta do princípio “plug-in”, o qual utiliza $\hat{F}$ no lugar da distribuição populacional desconhecida F , isto é, se o parâmetro θ é da forma $\theta = t(F)$, o seu respectivo estimador é dado por $\hat{\theta} = t(\hat{F})$. Por exemplo, segundo o princípio “plug-in”, podemos estimar a média populacional $\mu = t(F) = \int x dF(x)$ através da média amostral $\bar{x} = t(\hat{F}) = \int x d\hat{F}(x)$. Uma boa discussão do princípio “plug-in” pode ser encontrada em Efron & Tibshirani (1993, §4.3). Na segunda versão do método bootstrap, F deve pertencer a uma família paramétrica dimensionalmente finita e conhecida, F_ξ . A obtenção de um estimador consistente para ξ viabiliza uma estimativa paramétrica para F , representada por $F_{\hat{\xi}}$. Ou seja, neste caso, ao invés de obtermos amostras independentes com reposição dos dados, retiramos amostras aleatórias de tamanho n a partir da estimativa paramétrica da função F_ξ .

3.4.2 Correção de Viés

O método bootstrap foi introduzido para obter a estimativa do erro padrão de um estimador arbitrário. A idéia inicial de Efron foi usar bootstrap para estimar o erro padrão de $\hat{\theta} = t(\hat{F})$ de maneira “automática”, sem se importar quão complicada é a forma funcional de $\hat{\theta} = t(\hat{F})$. Entretanto, o método bootstrap pode ser facilmente adaptado para estimar o viés de um estimador e, portanto, pode ser aplicado como um procedimento para correção de viés.

Seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma função distribuição desconhecida F e $\theta = t(F)$ um parâmetro que será estimado pela estatística $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$. Denotamos o viés do estimador $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$ por $B_F(\hat{\theta}, \theta)$, ou seja,

$$B_F(\hat{\theta}, \theta) = E_F[s(\mathbf{y})] - t(F), \quad (3.12)$$

em que o subscrito F indica que a esperança matemática é calculada com base em F . Os estimadores de bootstrap do viés nas versões paramétrica e não-paramétrica são definidos

substituindo a verdadeira distribuição F , que gerou a amostra original, pelas distribuições estimadas $F_{\hat{\xi}}$ e $\hat{F}$, respectivamente, na expressão (3.12). Assim, os vieses nas duas formas bootstrap (paramétrico e não-paramétrico) são dados, respectivamente, por

$$B_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) = E_{F_{\hat{\xi}}}[s(\mathbf{y})] - t(F_{\hat{\xi}}) \quad \text{e} \quad B_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = E_{\hat{F}}[s(\mathbf{y})] - t(\hat{F}).$$

Se B amostras bootstrap $(\mathbf{y}^{*1}, \mathbf{y}^{*2}, \dots, \mathbf{y}^{*B})$ são geradas de forma independente a partir da amostra original $\mathbf{y}$ e se são calculadas as respectivas réplicas bootstrap $(\hat{\theta}^{*1}, \hat{\theta}^{*2}, \dots, \hat{\theta}^{*B})$, em que $\hat{\theta}^{*b} = s(\mathbf{y}^{*b})$ para $b = 1, 2, \dots, B$, é possível aproximar as esperanças bootstrap $E_{F_{\hat{\xi}}}[s(\mathbf{y})]$ e $E_{\hat{F}}[s(\mathbf{y})]$ pela média

$$\hat{\theta}^{*(\cdot)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^{*b} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B s(\mathbf{y}^{*b}).$$

Assim, as estimativas bootstrap do viés baseadas nas B réplicas bootstrap de $\hat{\theta}$ são

$$\hat{B}_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \hat{B}_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{y})$$

para os casos paramétrico e não-paramétrico, respectivamente. A diferença entre essas estimativas está na forma de geração das amostras bootstrap para obtenção das B estimativas $\hat{\theta}^{*b}$, $b = 1, 2, \dots, B$. Tipicamente, o cálculo de estimativas do viés requer entre 50 e 200 amostras bootstrap. Utilizando as estimativas bootstrap do viés, definem-se os estimadores corrigidos até segunda ordem por bootstrap da forma

$$\bar{\theta}_1 = s(\mathbf{y}) - \hat{B}_{F_{\hat{\xi}}}(\hat{\theta}, \theta) = 2s(\mathbf{y}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}, \quad (3.13)$$

$$\bar{\theta}_2 = s(\mathbf{y}) - \hat{B}_{\hat{F}}(\hat{\theta}, \theta) = 2s(\mathbf{y}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}, \quad (3.14)$$

onde as estimativas corrigidas $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são denominadas estimativas CBC (Constant-Bias-Correcting), seguindo MacKinnon & Smith (1998).

Neste trabalho, para a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, utilizaremos como estimador corrigido por bootstrap de $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$ a versão paramétrica (3.13), que será denotada por $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})^\top$. Uma discussão detalhada sobre correção de viés de segunda ordem por bootstrap e sua relação com a correção analítica pode ser encontrada em Ferrari & Cribari-Neto (1998).

3.4.3 Intervalos de Confiança Bootstrap

Em muitas aplicações práticas, a estimativa intervalar de um parâmetro pode ser considerada mais adequada do que simplesmente uma estimativa pontual. Portanto, a busca por uma estimativa intervalar precisa, com erro de cobertura pequeno, é de fundamental importância. Através da metodologia bootstrap, é possível construir intervalos de confiança que apresentem níveis de cobertura próximos da verdadeira probabilidade de cobertura nominal. A seguir, apresentaremos alguns intervalos de confiança bootstrap, dentre os quais: Intervalo Bootstrap Percentil, Intervalo Bootstrap BC (Bias-Corrected), Intervalo Bootstrap BCa (Bias-Corrected and accelerated) e Intervalo Bootstrap- t . Para uma descrição completa e detalhada sobre a construção de intervalos de confiança bootstrap, ver Davison & Hinkley (1997) e Efron & Tibshirani (1993).

Intervalo Bootstrap Percentil

Podemos utilizar o método bootstrap, paramétrico ou não-paramétrico, para obter a distribuição empírica $\hat{F}$ de $\hat{\theta}$ através das réplicas bootstrap $\hat{\theta}^{*b} = s(\mathbf{y}^{*b})$, $b = 1, 2, \dots, B$. A partir da distribuição empírica que é obtida das B réplicas bootstrap, podemos construir o intervalo de confiança bootstrap percentil, com nível aproximado de cobertura $1 - \gamma$, definido pelos percentis $\gamma/2$ e $1 - \gamma/2$ de $\hat{F}$, da forma

$$\left(\hat{F}^{-1}(\gamma/2), \hat{F}^{-1}(1 - \gamma/2) \right).$$

Temos que $\hat{F}^{-1}(\gamma/2) = \hat{\theta}^{*(\gamma/2)}$ e $\hat{F}^{-1}(1 - \gamma/2) = \hat{\theta}^{*(1-\gamma/2)}$. Dessa forma, podemos escrever o intervalo percentil como

$$\left(\hat{\theta}^{*(\gamma/2)}, \hat{\theta}^{*(1-\gamma/2)} \right), \quad (3.15)$$

ou seja, ordenamos as B réplicas bootstrap de $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}^{*b} = s(\mathbf{y}^{*b})$, e consideramos como limites inferior e superior do intervalo percentil as réplicas $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$, respectivamente, assumindo que $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ são inteiros. Se $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ não forem inteiros, podemos utilizar o seguinte procedimento: assumindo que $0 < \gamma < 1/2$, seja $k = \lfloor (B + 1) \times \gamma/2 \rfloor$ o maior inteiro $\leq (B + 1) \times \gamma/2$; então, definimos os limites inferior e superior do intervalo percentil pelos k -ésimo e $(B + 1 - k)$ -ésimo elementos ordenados das B réplicas bootstrap, respectivamente.

Neste trabalho, além de considerar o intervalo percentil para o parâmetro $\theta = (\alpha, \beta)^\top$

baseado na distribuição empírica $\widehat{F}$ de $\widehat{\theta} = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})^\top$, denotado por ICP, também consideramos intervalos de confiança do tipo percentil para $\theta = (\alpha, \beta)^\top$ utilizando a distribuição empírica $\widehat{F}$ do estimador corrigido pelo viés de segunda ordem $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})^\top$ e do estimador proposto por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) $\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta})^\top$, os quais denotamos por ICPCS e ICPNg, respectivamente.

Note que o intervalo percentil (3.15) não necessariamente é simétrico em relação a $\widehat{\theta}$. Observe ainda que sua construção garante a não inclusão de valores impróprios para o parâmetro de interesse no intervalo de confiança. Além disso, outra vantagem do método percentil é que, através de uma transformação, podemos normalizar perfeitamente a distribuição de $\widehat{\theta}$ [Efron & Tibshirani (1993, p. 173)]. Suponha que $\widehat{\theta}$ não tem distribuição normal em amostras finitas e seja $\widehat{\rho} = g(\widehat{\theta})$ a transformação que normaliza a distribuição de $\widehat{\theta}$, isto é,

$$\widehat{\rho} \sim \mathcal{N}(\rho, \tau^2),$$

em que τ é algum desvio padrão constante. Dessa forma, é possível construir um intervalo de confiança exato com probabilidade de cobertura $1 - \gamma$ para o parâmetro ρ da forma

$$\left(\widehat{\rho} - z_{1-\frac{\gamma}{2}}\tau, \widehat{\rho} + z_{1-\frac{\gamma}{2}}\tau \right).$$

Assim, o intervalo percentil de $\widehat{\theta}$ pode ser expresso como

$$\left(g^{-1}(\widehat{\rho} - z_{1-\frac{\gamma}{2}}\tau), g^{-1}(\widehat{\rho} + z_{1-\frac{\gamma}{2}}\tau) \right),$$

sem a necessidade de conhecer a função normalizadora $g(\theta)$ [ver Efron (1981, §6)]. Uma desvantagem do método percentil é que o intervalo resultante pode subestimar as caudas da distribuição bootstrap [Efron & Tibshirani (1993, cap. 13)].

Intervalo Bootstrap BC

Uma forma de generalizar o método anterior é permitir que a função normalizadora e estabilizadora da variância de $\widehat{\theta}$, $\widehat{\rho} = g(\widehat{\theta})$, apresente viés constante v_0 [Efron (1981)], isto é,

$$\frac{\widehat{\rho} - \rho}{\tau} \sim \mathcal{N}(-v_0, 1).$$

Dessa forma, deduz-se o intervalo de confiança exato com probabilidade de cobertura $1 - \gamma$ para o parâmetro ρ da forma

$$\left(\widehat{\rho} + \tau v_0 - z_{1-\frac{\gamma}{2}}\tau, \widehat{\rho} + \tau v_0 + z_{1-\frac{\gamma}{2}}\tau \right),$$

o qual pode ser convertido em um intervalo de confiança para θ aplicando-se a transformação inversa, g^{-1} , aos limites inferior e superior.

O intervalo bootstrap BC para θ , com nível de cobertura de aproximadamente $1 - \gamma$, é da forma

$$\left(\hat{F}^{-1}(\Phi(z_{[\gamma/2]})), \hat{F}^{-1}(\Phi(z_{[1-\gamma/2]})) \right), \quad (3.16)$$

em que $\Phi(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada normal padrão e as quantidades $z_{[\gamma/2]}$ e $z_{[1-\gamma/2]}$ são dadas por

$$z_{[\gamma/2]} = 2v_0 + z_{\gamma/2} \quad \text{e} \quad z_{[1-\gamma/2]} = 2v_0 + z_{1-\gamma/2},$$

$z_{\gamma/2}$ e $z_{1-\gamma/2}$ sendo os percentis $\gamma/2$ e $1 - \gamma/2$ da distribuição normal padrão, respectivamente. Como o valor de v_0 é desconhecido, podemos estimá-lo como

$$\hat{v}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#\{\hat{\theta}^{*b} < \hat{\theta}\}}{B}\right),$$

em que $\Phi^{-1}(\cdot)$ denota a inversa da função de distribuição normal padrão. A expressão de $\hat{v}_0$ é uma medida do viés da mediana da distribuição bootstrap com relação a $\hat{\theta}$.

Efron (1981) denominou o intervalo (3.16) de BC (Bias-Corrected). O intervalo bootstrap BC não foi considerado nos estudos de simulação de Monte Carlo apresentados no Capítulo 4, pois este é um método intermediário entre o bootstrap percentil, apresentado anteriormente, e o método que será apresentado a seguir.

Intervalo Bootstrap BCa

Uma extensão do método BC é obtida considerando-se a possibilidade de variação do erro padrão para diferentes valores de θ . O intervalo BCa (Bias-Corrected and accelerated) é baseado em uma suposição mais geral [DiCiccio & Tibshirani (1987) e Efron (1986, 1987)]. Suponha que

$$\hat{\rho} - \rho \sim \mathcal{N}(-v_0(1 + a\rho), (1 + a\rho)^2),$$

em que $\rho = g(\theta)$ é uma transformação monótona. Assim, em uma escala transformada, a estatística padronizada é normal, com algum viés e provavelmente com erro padrão variando linearmente com o parâmetro ρ . Note que ao fazer $a = 0$ no método BCa, sua forma distribucional se torna idêntica à do método BC a menos da constante τ . Embora os métodos BC e BCa sejam aparentemente similares, eles apresentam uma grande

diferença, a saber: no método BC a transformação $g(\theta)$ deve produzir a normalização e a estabilização da variância de $\hat{\theta}$, enquanto no método BCa, $g(\theta)$ precisa apenas normalizar a distribuição de $\hat{\theta}$.

O intervalo de confiança bootstrap BCa com probabilidade de cobertura de aproximadamente $1 - \gamma$ para θ é dado por

$$\left(\hat{F}^{-1}(\Phi(z_{[\gamma/2]}^*)), \hat{F}^{-1}(\Phi(z_{[1-\gamma/2]}^*)) \right), \quad (3.17)$$

em que

$$z_{[\gamma/2]}^* = v_0 + \frac{v_0 + z_{\gamma/2}}{1 - a(v_0 + z_{\gamma/2})} \quad \text{e} \quad z_{[1-\gamma/2]}^* = v_0 + \frac{v_0 + z_{1-\gamma/2}}{1 - a(v_0 + z_{1-\gamma/2})}.$$

A constante a mede a razão de mudança do erro padrão de $\hat{\theta}$ com respeito ao verdadeiro valor do parâmetro. As quantidades v_0 e a são denominadas constante de correção de viés e constante de aceleração, respectivamente. A constante a tipicamente não é conhecida, podendo ser estimada através da expressão

$$\hat{a} = \frac{1}{6} \text{Skew}(\dot{\ell}_\theta(\hat{\theta})) \Big|_{\theta=\hat{\theta}},$$

em que $\text{Skew}(\cdot)$ denota o coeficiente de assimetria e $\dot{\ell}_\theta(\hat{\theta})$ é a derivada da função de log-verossimilhança avaliada em $\hat{\theta}$. Portanto, de forma análoga ao método percentil, os limites do intervalo bootstrap BCa com probabilidade de cobertura de aproximadamente $1 - \gamma$ são os percentis δ_1 e δ_2 definidos através da distribuição bootstrap de $\hat{\theta}$ dados por

$$\delta_1 = \Phi\left(\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_{\gamma/2}}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_{\gamma/2})}\right) \quad \text{e} \quad \delta_2 = \Phi\left(\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_{1-\gamma/2}}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_{1-\gamma/2})}\right).$$

A principal desvantagem do método BCa é a grande quantidade de réplicas bootstrap requeridas. Usualmente, são empregadas entre 1000 e 2000 réplicas bootstrap, aumentando assim o custo computacional relativamente a outros métodos bootstrap. Neste trabalho, o intervalo de confiança bootstrap BCa para os parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica foi denotado convenientemente por BCa.

Intervalo Bootstrap- t

Outro método bootstrap para construir um intervalo de confiança para o parâmetro de interesse θ , denominado Intervalo de Confiança Bootstrap- t , é obtido através da estimativa da distribuição da estatística $\mathcal{T}$ diretamente da amostra aleatória observada

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, onde $\mathcal{T}$ é dado por

$$\mathcal{T} = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{\text{ep}}(\hat{\theta})},$$

sendo $\mathcal{T}$ conhecida como estatística t quando há suposição de normalidade nos dados e $\widehat{\text{ep}}(\hat{\theta})$ sendo o erro padrão estimado de $\hat{\theta}$. De acordo com Efron & Tibshirani (1993, §12.5), seguindo a metodologia bootstrap, geramos B amostras bootstrap $(\mathbf{y}^{*1}, \dots, \mathbf{y}^{*B})$ a partir da amostra original $\mathbf{y}$ e, para cada amostra bootstrap, calculamos

$$\mathcal{T}^{*b} = \frac{\hat{\theta}^{*b} - \hat{\theta}}{\widehat{\text{ep}}^{*b}},$$

$b = 1, 2, \dots, B$, onde $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$ é o valor estimado de θ a partir da amostra original $\mathbf{y}$, $\hat{\theta}^{*b} = s(\mathbf{y}^{*b})$ é o valor estimado de θ para a amostra bootstrap $\mathbf{y}^{*b}$ e $\widehat{\text{ep}}^{*b}$ é o erro padrão estimado de $\hat{\theta}^{*b}$ para a amostra bootstrap $\mathbf{y}^{*b}$. Os percentis $\gamma/2$ e $1 - \gamma/2$ de $\mathcal{T}^{*b}$ são estimados pelos valores $\hat{t}^{(\gamma/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\gamma/2)}$, respectivamente, tais que

$$\frac{\#\{\mathcal{T}^{*b} \leq \hat{t}^{(\gamma/2)}\}}{B} = \frac{\gamma}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\#\{\mathcal{T}^{*b} \leq \hat{t}^{(1-\gamma/2)}\}}{B} = 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Dessa forma, o intervalo de confiança bootstrap- t é dado por

$$\left(\hat{\theta} - \hat{t}^{(1-\gamma/2)} \widehat{\text{ep}}, \hat{\theta} - \hat{t}^{(\gamma/2)} \widehat{\text{ep}} \right),$$

em que $\widehat{\text{ep}} \equiv \widehat{\text{ep}}(\hat{\theta})$. As quantidades $\hat{t}^{(\gamma/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\gamma/2)}$ são obtidas como segue; ordenamos as B réplicas bootstrap $\mathcal{T}^{*b}$, e as réplicas $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ são as quantidades $\hat{t}^{(\gamma/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\gamma/2)}$, respectivamente, assumindo que $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ são inteiros. Se $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ não forem inteiros, podemos utilizar o seguinte procedimento: assumindo que $0 < \gamma < 1/2$, seja $k = \lfloor (B + 1) \times \gamma/2 \rfloor$ o maior inteiro $\leq (B + 1) \times \gamma/2$; então, as quantidades $\hat{t}^{(\gamma/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\gamma/2)}$ são dadas pelos k -ésimo e $(B + 1 - k)$ -ésimo elementos ordenados de $\mathcal{T}^{*b}$, respectivamente.

Efron & Tibshirani (1993, p. 178) ressaltam que “the bootstrap- t intervals have good theoretical coverage probabilities, but tend to be erratic in actual practice. The percentile intervals are less erratic, but have less satisfactory coverage properties.” Neste trabalho, o intervalo de confiança bootstrap- t para os parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica foi denotado por ICBt. Uma boa discussão sobre intervalos de confiança bootstrap do tipo percentil e bootstrap- t pode ser encontrada em Hall (1988).

Avaliação Numérica da Correção de Viés

4.1 Detalhes Metodológicos

Através de simulações de Monte Carlo, avaliamos os desempenhos dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica e suas versões corrigidas em amostras de tamanho finito e sob diferentes cenários. Todo o processo de simulação de Monte Carlo foi realizado utilizando a linguagem matricial de programação **0x** em sua versão 3.40 [Cribari-Neto & Zarkos (2003); Doornik (2001)] e todos os gráficos apresentados nesta dissertação foram construídos utilizando o pacote estatístico **R** em sua versão 2.1.1 [Cribari-Neto & Zarkos (1999); Venables & Ripley (2002)].

A simulação de uma variável aleatória T com distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, foi realizada através da transformação monótona

$$X = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right).$$

De (2.1) temos que $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{4}\alpha^2)$. Assim, a partir da equação acima, T pode ser escrito da forma

$$T = \beta \{1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{1/2}\}. \quad (4.1)$$

Ou seja, números pseudo-aleatórios da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica podem ser obtidos a partir de números pseudo-aleatórios normais usando (4.1). Os tama-

nhos amostrais considerados foram $n = 10, 20, 40$ e 60 , os valores considerados para o parâmetro α sendo $\alpha = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ e 1.0 . Sem perda de generalidade, o parâmetro de escala β foi fixado em 1.0 , isto é, $\beta = 1.0$ em todos os experimentos de Monte Carlo. Consideramos $R = 5000$ (número de réplicas de Monte Carlo) e $B = 600$ (número de réplicas bootstrap).

Para cada réplica de Monte Carlo geramos uma amostra aleatória da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^\top$, onde $t_i \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\alpha, \beta)$, $i = 1, \dots, n$. Para o processo de maximização da função de log-verossimilhança (2.3), os valores iniciais tomados foram

$$\alpha_0 = \left(\frac{s}{\beta_0} + \frac{\beta_0}{r} - 2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \beta_0 = (rs)^{1/2},$$

onde as quantidades r e s estão definidas na Seção 2.3. O valor inicial β_0 foi sugerido em Birnbaum & Saunders (1969b). A função de log-verossimilhança foi maximizada através do método de otimização não-linear BFGS discutido no Capítulo 1, Seção 1.6.3; os valores de α e β associados ao ponto máximo desta função são as estimativas $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Através das estimativas de máxima verossimilhança, obtemos as estimativas $\hat{B}(\hat{\alpha})$ e $\hat{B}(\hat{\beta})$ dos vieses de segunda ordem de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, respectivamente. Conseqüentemente, calculamos os estimadores de máxima verossimilhança corrigidos $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \hat{B}(\hat{\alpha})$ e $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \hat{B}(\hat{\beta})$. Além disso, também calculamos os estimadores $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ propostos por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) e apresentados em (2.7).

Adicionalmente, para cada réplica de Monte Carlo, ou seja, para cada estimativa de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, geramos B réplicas bootstrap de forma paramétrica, isto é, geramos $(\mathbf{t}^{*1}, \mathbf{t}^{*2}, \dots, \mathbf{t}^{*B})$, onde $\mathbf{t}^{*b} = (t_1^*, \dots, t_n^*)^\top$, $b = 1, \dots, B$, é formado por $t_i^* \sim \mathcal{B}\text{-}\mathcal{S}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, $i = 1, \dots, n$. Com estas réplicas bootstrap determinamos as estimativas bootstrap dos vieses de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ e calculamos, assim, as estimativas corrigidas por bootstrap $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$. Também, para cada réplica de Monte Carlo e cada uma das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, foram consideradas estimativas intervalares do tipo assintótico ICA, ICCS, ICNg; bootstrap percentil ICP, ICPCS, ICPNg; bootstrap- t ICBt; e bootstrap BCa. Todos os intervalos foram construídos a duas caudas. Para cada tamanho de amostra são realizadas pelo menos $(5000 + 5000 \times 600)$ maximizações não-lineares. Ou seja, mais de 3000000 (três milhões) de maximizações não-lineares são

realizadas por experimento. Dessa forma, as simulações foram computacionalmente intensivas.

Para a análise dos resultados da estimação pontual foram calculados para cada tamanho de amostra: a média, o viés relativo (o viés relativo de um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro escalar θ é definido como $\{E(\hat{\theta}) - \theta\}/\theta$, e o viés relativo estimado é obtido estimando $E(\hat{\theta})$ via Monte Carlo) e a raiz quadrada do erro quadrático médio ($\sqrt{EQM}$) das 5000 estimativas. Para a análise dos resultados da estimação intervalar são apresentadas as probabilidades de cobertura nominais, as médias dos 5000 limites inferiores e superiores de cada intervalo, as médias dos 5000 comprimentos de cada intervalo, as probabilidades de cobertura observadas, as probabilidades observadas dos limites inferiores dos intervalos serem maiores que o verdadeiro valor do parâmetro e dos limites superiores dos intervalos serem menores que o verdadeiro valor do parâmetro.

4.2 Resultados e Discussão

4.2.1 Resultados da Correção de Viés

Nesta seção apresentaremos os resultados das simulações referentes à correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Seja $\theta = (\alpha, \beta)^\top$ o vetor de parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders. Nas tabelas que serão apresentadas a seguir, $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ , $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^\top$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ corrigido pelo viés de segunda ordem, $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})^\top$ é o estimador de θ corrigido pelo viés bootstrap e $\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta})^\top$ é o estimador de θ proposto por Ng, Kundu & Balakrishnan (2003).

Na Tabela 4.1 são apresentados os resultados da correção de viés para o caso em que $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$. Nota-se que os estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ apresentaram, em módulo, viés relativo consideravelmente menor que o viés relativo do estimador $\hat{\alpha}$ para todos os tamanhos amostrais. Entretanto, dentre os estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$, o estimador $\check{\alpha}$ foi o menos eficaz no que tange à correção do viés do estimador $\hat{\alpha}$; por exemplo, para $n = 10$, o viés relativo do estimador $\check{\alpha}$ foi 0.02553, enquanto os vieses relativos dos estimadores $\tilde{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ foram, em módulo, 0.00768 e 0.00563, respectivamente. Note também que as

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$.

n	Estimador	Estimativas de α			Estimativas de β		
		Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$	Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$
10	$\hat{\theta}$	0.09230	-0.07702	0.02333	1.00046	0.00046	0.03177
	$\tilde{\theta}$	0.09923	-0.00768	0.02369	1.00001	0.00001	0.03176
	$\bar{\theta}$	0.09944	-0.00563	0.02376	1.00001	0.00001	0.03177
	$\check{\theta}$	0.10255	0.02553	0.02460	1.00019	0.00019	0.03176
20	$\hat{\theta}$	0.09617	-0.03828	0.01594	1.00040	0.00040	0.02251
	$\tilde{\theta}$	0.09978	-0.00216	0.01605	1.00016	0.00016	0.02250
	$\bar{\theta}$	0.09983	-0.00169	0.01608	1.00016	0.00016	0.02253
	$\check{\theta}$	0.10123	0.01233	0.01633	1.00027	0.00027	0.02250
40	$\hat{\theta}$	0.09815	-0.01853	0.01116	1.00024	0.00024	0.01577
	$\tilde{\theta}$	0.09999	-0.00010	0.01121	1.00012	0.00012	0.01576
	$\bar{\theta}$	0.09999	-0.00011	0.01126	1.00012	0.00012	0.01586
	$\check{\theta}$	0.10066	0.00663	0.01131	1.00018	0.00018	0.01577
60	$\hat{\theta}$	0.09876	-0.01239	0.00902	1.00005	0.00005	0.01276
	$\tilde{\theta}$	0.10000	0.00000	0.00905	0.99997	-0.00003	0.01275
	$\bar{\theta}$	0.10000	0.00001	0.00907	0.99997	-0.00003	0.01278
	$\check{\theta}$	0.10043	0.00435	0.00910	1.00001	0.00001	0.01275

estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ não apresentaram grandes variações em relação à estimativa de $\sqrt{\text{EQM}}$ do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$; isto ocorreu porque, em princípio, a correção por viés só deveria deslocar a distribuição do estimador de máxima verossimilhança na direção do verdadeiro valor do parâmetro sem afetar de forma notável sua estrutura de variância. Por exemplo, para $n = 40$, as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ estão em torno do valor 0.01124. Esta mesma estabilidade permanece para os diferentes tamanhos de amostra considerados. Note ainda nesta tabela que, ao comparar a média e o viés relativo de $\hat{\beta}$ com as médias e os vieses relativos dos estimadores $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$, percebe-se que estas quantidades não diferem muito, o que nos leva a concluir que o ganho de precisão dos estimadores corrigidos do parâmetro β não é notável quando $\alpha = 0.1$. Da mesma forma, as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$ estão muito próximas, mantendo uma estabilidade em todos os tamanhos de

Tabela 4.2: Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.25$ e $\beta = 1.0$.

n	Estimador	Estimativas de α			Estimativas de β		
		Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$	Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$
10	$\hat{\theta}$	0.23060	-0.07760	0.05834	1.00304	0.00304	0.07925
	$\tilde{\theta}$	0.24807	-0.00773	0.05929	1.00027	0.00027	0.07899
	$\bar{\theta}$	0.24857	-0.00572	0.05947	1.00026	0.00026	0.07902
	$\check{\theta}$	0.25622	0.02488	0.06144	1.00130	0.00130	0.07907
20	$\hat{\theta}$	0.24035	-0.03859	0.03985	1.00193	0.00193	0.05602
	$\tilde{\theta}$	0.24946	-0.00217	0.04016	1.00047	0.00047	0.05590
	$\bar{\theta}$	0.24957	-0.00172	0.04023	1.00046	0.00046	0.05598
	$\check{\theta}$	0.25300	0.01202	0.04081	1.00111	0.00111	0.05595
40	$\hat{\theta}$	0.24533	-0.01868	0.02790	1.00105	0.00105	0.03922
	$\tilde{\theta}$	0.24998	-0.00010	0.02804	1.00030	0.00030	0.03917
	$\bar{\theta}$	0.24997	-0.00011	0.02816	1.00031	0.00031	0.03941
	$\check{\theta}$	0.25162	0.00648	0.02826	1.00065	0.00065	0.03919
60	$\hat{\theta}$	0.24688	-0.01249	0.02255	1.00042	0.00042	0.03168
	$\tilde{\theta}$	0.25000	0.00000	0.02262	0.99991	-0.00009	0.03166
	$\bar{\theta}$	0.25000	0.00001	0.02267	0.99991	-0.00009	0.03172
	$\check{\theta}$	0.25106	0.00425	0.02273	1.00015	0.00015	0.03167

amostra considerados.

Na Tabela 4.2 apresentamos resultados numéricos referentes às correções de viés para o caso em que $\alpha = 0.25$ e $\beta = 1.0$. Observamos que, de forma análoga ao que acontece na Tabela 4.1, os estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ apresentaram, em módulo, viés relativo consideravelmente menor que o viés relativo do estimador $\hat{\alpha}$ para todos os tamanhos amostrais, sendo as correções analítica de Cox & Snell (1968) e por bootstrap as mais eficazes, isto é, os vieses relativos dos estimadores $\tilde{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ são menores, em módulo, do que os vieses relativos dos outros estimadores em todos os tamanhos de amostra. Note também que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ não apresentaram grandes variações em relação à estimativa de $\sqrt{\text{EQM}}$ do estimador $\hat{\alpha}$, sendo $\sqrt{\text{EQM}}$ de $\hat{\alpha}$ levemente inferior às demais; por exemplo, quando $n = 60$, as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ foram 0.02255, 0.02262, 0.02267 e 0.02273, respectivamente. Observe, ainda nesta

Tabela 4.3: Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$.

n	Estimador	Estimativas de α			Estimativas de β		
		Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$	Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$
10	$\hat{\theta}$	0.46029	-0.07942	0.11686	1.01182	0.01182	0.15715
	$\tilde{\theta}$	0.49606	-0.00788	0.11900	1.00125	0.00125	0.15521
	$\bar{\theta}$	0.49700	-0.00600	0.11933	1.00113	0.00113	0.15525
	$\check{\theta}$	0.51143	0.02287	0.12266	1.00489	0.00489	0.15579
20	$\hat{\theta}$	0.48022	-0.03957	0.07975	1.00667	0.00667	0.11023
	$\tilde{\theta}$	0.49888	-0.00224	0.08045	1.00110	0.00110	0.10943
	$\bar{\theta}$	0.49909	-0.00182	0.08059	1.00106	0.00106	0.10957
	$\check{\theta}$	0.50549	0.01098	0.08151	1.00339	0.00339	0.10972
40	$\hat{\theta}$	0.49041	-0.01918	0.05583	1.00345	0.00345	0.07693
	$\tilde{\theta}$	0.49995	-0.00011	0.05613	1.00059	0.00059	0.07664
	$\bar{\theta}$	0.49993	-0.00013	0.05637	1.00060	0.00060	0.07710
	$\check{\theta}$	0.50299	0.00597	0.05649	1.00185	0.00185	0.07676
60	$\hat{\theta}$	0.49360	-0.01280	0.04510	1.00171	0.00171	0.06195
	$\tilde{\theta}$	0.50000	0.00000	0.04526	0.99979	-0.00021	0.06180
	$\bar{\theta}$	0.50001	0.00002	0.04535	0.99977	-0.00023	0.06192
	$\check{\theta}$	0.50197	0.00393	0.04544	1.00065	0.00065	0.06186

tabela, que o estimador corrigido pelo viés de segunda ordem $\tilde{\beta}$ e o estimador corrigido pelo viés bootstrap $\bar{\beta}$ apresentaram os melhores resultados em termos de viés relativo; por exemplo, para $n = 10$, os vieses relativos dos estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$ foram 0.00304, 0.00027, 0.00026 e 0.00130, respectivamente. Observe também que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ de todos os estimadores do parâmetro β não diferem muito. Por exemplo, para $n = 60$, as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$ foram 0.03168, 0.03166, 0.03172 e 0.03167, respectivamente.

Na Tabela 4.3 apresentamos os resultados relativos às correções de viés para o caso em que $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$. Observamos que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.1 e 4.2, os estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ apresentaram, em módulo, vieses relativos consideravelmente menores que o viés relativo do estimador $\hat{\alpha}$ para todos os tamanhos amostrais, sendo o estimador corrigido pelo viés de segunda ordem $\tilde{\alpha}$ e o estimador corrigido por

Tabela 4.4: Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 0.75$ e $\beta = 1.0$.

n	Estimador	Estimativas de α			Estimativas de β		
		Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$	Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$
10	$\hat{\theta}$	0.68855	-0.08193	0.17586	1.02503	0.02503	0.23242
	$\tilde{\theta}$	0.74379	-0.00828	0.17932	1.00304	0.00304	0.22667
	$\bar{\theta}$	0.74512	-0.00650	0.17981	1.00241	0.00241	0.22661
	$\check{\theta}$	0.76506	0.02008	0.18371	1.00949	0.00949	0.22816
20	$\hat{\theta}$	0.71935	-0.04087	0.11982	1.01343	0.01343	0.16083
	$\tilde{\theta}$	0.74824	-0.00235	0.12095	1.00184	0.00184	0.15849
	$\bar{\theta}$	0.74853	-0.00195	0.12116	1.00166	0.00166	0.15868
	$\check{\theta}$	0.75721	0.00961	0.12214	1.00604	0.00604	0.15924
40	$\hat{\theta}$	0.73514	-0.01981	0.08381	1.00684	0.00684	0.11166
	$\tilde{\theta}$	0.74992	-0.00011	0.08431	1.00089	0.00089	0.11081
	$\bar{\theta}$	0.74990	-0.00014	0.08467	1.00089	0.00089	0.11149
	$\check{\theta}$	0.75399	0.00532	0.08470	1.00323	0.00323	0.11111
60	$\hat{\theta}$	0.74011	-0.01319	0.06764	1.00362	0.00362	0.08952
	$\tilde{\theta}$	0.75002	0.00003	0.06790	0.99963	-0.00037	0.08909
	$\bar{\theta}$	0.75004	0.00006	0.06805	0.99959	-0.00041	0.08927
	$\check{\theta}$	0.75265	0.00353	0.06810	1.00124	0.00124	0.08924

bootstrap $\bar{\alpha}$ menos viesados do que os demais estimadores. Note ainda que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ de todos os estimadores do parâmetro α não diferem muito, sendo a estimativa de $\sqrt{\text{EQM}}$ do estimador $\check{\alpha}$ levemente maior do que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos demais estimadores em todos os tamanhos de amostra considerados; por exemplo, para $n = 10$, as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ foram 0.11686, 0.11900, 0.11933 e 0.12266, respectivamente. Observe também que os estimadores $\tilde{\beta}$ e $\bar{\beta}$ apresentaram os melhores resultados em todos os casos. Note ainda que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ de todos os estimadores de β estão próximas, mantendo uma estabilidade em todos os tamanhos amostrais. Por exemplo, para $n = 10$, as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$ estão em torno do valor 0.15585.

Nas Tabelas 4.4 e 4.5 apresentamos os resultados da avaliação numérica de correção de viés para os casos em que $\alpha = 0.75$ e $\beta = 1.0$, e $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$, respectivamente.

Tabela 4.5: Estimativas dos parâmetros no caso de $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$.

n	Estimador	Estimativas de α			Estimativas de β		
		Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$	Média	viés rel.	$\sqrt{\text{EQM}}$
10	$\hat{\theta}$	0.91544	-0.08456	0.23561	1.04116	0.04116	0.30398
	$\tilde{\theta}$	0.99116	-0.00884	0.24025	1.00588	0.00588	0.29233
	$\bar{\theta}$	0.99293	-0.00707	0.24102	1.00391	0.00391	0.29198
	$\check{\theta}$	1.01716	0.01716	0.24496	1.01368	0.01368	0.29478
20	$\hat{\theta}$	0.95775	-0.04225	0.16017	1.02140	0.02140	0.20631
	$\tilde{\theta}$	0.99745	-0.00255	0.16167	1.00286	0.00286	0.20164
	$\bar{\theta}$	0.99785	-0.00215	0.16197	1.00231	0.00231	0.20181
	$\check{\theta}$	1.00816	0.00816	0.16284	1.00828	0.00828	0.20286
40	$\hat{\theta}$	0.97949	-0.02051	0.11191	1.01075	0.01075	0.14225
	$\tilde{\theta}$	0.99982	-0.00018	0.11257	1.00126	0.00126	0.14055
	$\bar{\theta}$	0.99979	-0.00021	0.11305	1.00120	0.00120	0.14141
	$\check{\theta}$	1.00460	0.00460	0.11293	1.00434	0.00434	0.14104
60	$\hat{\theta}$	0.98634	-0.01366	0.09025	1.00590	0.00590	0.11352
	$\tilde{\theta}$	1.00000	0.00000	0.09059	0.99953	-0.00047	0.11265
	$\bar{\theta}$	1.00003	0.00003	0.09078	0.99945	-0.00055	0.11288
	$\check{\theta}$	1.00306	0.00306	0.09077	1.00167	0.00167	0.11290

Observamos que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, os estimadores $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ apresentaram, em módulo, vieses relativos consideravelmente menores que aquele do estimador $\hat{\alpha}$ para todos os tamanhos amostrais, sendo os estimadores $\tilde{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ mais eficazes no que tange à redução do viés do estimador de máxima verossimilhança de α . Note também que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ de todos os estimadores de α não diferem muito entre si, mantendo uma estabilidade em todos os tamanhos de amostra considerados. Observe também que o estimador corrigido pelo viés de segunda ordem $\tilde{\beta}$ e o estimador corrigido pelo viés bootstrap $\bar{\beta}$ apresentaram os melhores resultados. Observe ainda que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores do parâmetro β estão próximas, sendo a estimativa de $\sqrt{\text{EQM}}$ do estimador $\tilde{\beta}$ levemente inferior às demais em todos os tamanhos amostrais considerados.

Pode-se perceber em todas as tabelas que as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ de todos os esti-

madores dos parâmetros α e β diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta, como era de se esperar. Note também que os estimadores $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ tendem a superestimar os verdadeiros valores dos parâmetros α e β , respectivamente, uma vez que os vieses relativos destes estimadores foram sempre positivos. Um fato interessante a ser ressaltado é que, à medida que o valor do parâmetro de forma α da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica aumenta, os vieses relativos, em módulo, e as estimativas de $\sqrt{\text{EQM}}$ dos estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$ também aumentam, isto é, à medida que o valor do parâmetro α cresce, as estimativas do parâmetro de escala β pioram.

Em suma, de acordo com os resultados apresentados nas Tabelas 4.1 a 4.5, dentre os estimadores $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ e $(\check{\alpha}, \check{\beta})$, os estimadores $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ e $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ foram os que apresentaram os melhores resultados, mostrando assim a eficácia das correções analítica de Cox & Snell (1968) e por bootstrap, enquanto que os estimadores $(\check{\alpha}, \check{\beta})$ apresentaram os piores resultados, evidenciando assim que os estimadores propostos em Ng, Kundu & Balakrishnan (2003) são inferiores aos estimadores propostos neste trabalho. A partir dos resultados desta seção, podemos também concluir que as correções analítica de Cox & Snell (1968) e por bootstrap são altamente eficazes e ‘competitivas’ para reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhança de α e β (veja as Tabelas 4.1 até 4.5). Adicionalmente, os estimadores de máxima verossimilhança destes parâmetros se apresentam muito viesados, principalmente em amostras de tamanho pequeno; desta forma, recomendamos fortemente sua correção por viés. Para isso, sugerimos a correção analítica de Cox & Snell (1968) ou a correção via bootstrap, que apresentaram desempenhos favoráveis relativamente à estimação por máxima verossimilhança. Os estimadores corrigidos pelos vieses de segunda ordem $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ têm a vantagem de serem obtidos sem a necessidade de um esforço computacionalmente intensivo, contrariamente aos estimadores $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$. Por outro lado, dado que os custos computacionais estão decrescendo rapidamente, nós acreditamos que as técnicas bootstrap serão cada vez mais atraentes do ponto de vista de aplicações empíricas.

4.2.2 Resultados dos Intervalos de Confiança

Nesta seção apresentaremos os resultados das simulações referentes à construção dos intervalos de confiança definidos ao longo deste trabalho, isto é, os intervalos assintóticos

(ICA, ICCS, ICNg), bootstrap percentil (ICP, ICPCS, ICPNg), bootstrap- t (ICBt) e bootstrap BCa para os parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Foram avaliados ao todo 480 intervalos com níveis nominais de cobertura $1 - \gamma$ iguais a 0.90, 0.95 e 0.99 para os tamanhos de amostra $n = 10, 20, 40$ e 60 , tomando-se $\alpha = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ e $\beta = 1.0$. Todos os intervalos de confiança foram construídos de tal forma que contivessem o verdadeiro valor do parâmetro de interesse com probabilidade $1 - \gamma$, com probabilidade $\gamma/2$ do limite inferior do intervalo ser maior que o verdadeiro valor do parâmetro e com probabilidade $\gamma/2$ do limite superior do intervalo ser menor que o verdadeiro valor do parâmetro, para $0 < \gamma < 1/2$.

Para cada um dos métodos de estimação intervalar utilizados, a probabilidade de cobertura observada, denotada por “Cobertura”, foi calculada a partir da frequência com que os 5000 intervalos construídos contiveram o verdadeiro valor do parâmetro. A probabilidade observada do limite inferior de confiança ser maior do que o verdadeiro valor do parâmetro, mostrada nas tabelas desta seção por “% Esquerdo”, foi estimada a partir da frequência com que os limites inferiores dos 5000 intervalos de confiança excederam este valor. Analogamente, a probabilidade observada do limite superior de confiança ser menor do que o verdadeiro valor do parâmetro, indicada nas tabelas desta seção por “% Direito”, foi estimada a partir da frequência com que os limites superiores dos 5000 intervalos de confiança não excederam este valor.

As Figuras 4.1 até 4.8 contêm histogramas construídos a partir das 5000 estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Os segmentos de reta representam cada intervalo de confiança considerado, sua longitude simbolizando o comprimento médio observado. As legendas superiores indicam o “% Esquerdo” e as legendas inferiores representam o “% Direito”. A título de exemplo, no Apêndice B.5 apresentamos o programa usado para gerar o histograma com os intervalos de confiança do parâmetro $\alpha = 0.1$ quando $n = 10$.

As Tabelas 4.6 e 4.7 apresentam os intervalos de confiança para o parâmetro $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$. Observe na Tabela 4.6 que nenhum intervalo de confiança abrangeu valores fora do espaço paramétrico de α . Note que os limites inferior (“Limite Inferior”) e superior (“Limite Superior”) médios dos intervalos de confiança do tipo assintótico ICA, ICCS e ICNg estão próximos entre si. Adicionalmente, note que os comprimentos médios

destes intervalos (“Comprimento do Intervalo”) também são muito parecidos, sendo o comprimento médio do intervalo de confiança ICA o menor em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura considerados; por exemplo, para o nível nominal de cobertura de 90% e tamanho amostral $n = 20$, os comprimentos médios dos intervalos ICA, ICCS e ICNg foram 0.0500, 0.0519 e 0.0527, respectivamente. Os intervalos de confiança bootstrap percentil ICP, ICPCS e ICPNg também apresentaram resultados similares em termos de limite inferior, limite superior e comprimento, sendo o comprimento médio do intervalo ICP o menor em todos os casos. Observe ainda que o intervalo de confiança bootstrap BCa apresentou bons resultados em termos de comprimento médio, pois em quase todos os tamanhos amostrais e níveis nominais de cobertura seu comprimento foi menor que os respectivos comprimentos médios dos outros intervalos, seguido do intervalo de confiança ICP. Note que, dentre todos os intervalos, o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os piores resultados em termos de comprimento médio em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura; por exemplo, quando $n = 10$ e $\gamma = 1\%$, os comprimentos médios dos intervalos ICA e ICBt foram 0.1063 e 0.1959, respectivamente, ou seja, o comprimento médio do intervalo ICBt foi quase duas vezes maior que o comprimento médio do intervalo de confiança do tipo assintótico ICA. Note ainda que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os comprimentos médios de todos os intervalos diminuem, ou seja, as estimativas intervalares tornam-se mais precisas.

Observe na Tabela 4.7 que os intervalos de confiança do tipo assintótico ICCS, ICNg e bootstrap do tipo ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, seguidos do intervalo BCa. Observe ainda que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou o melhor balanceamento dentre todos os intervalos, isto é, as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente nas caudas da densidade do estimador de máxima verossimilhança de α considerando os diferentes níveis de cobertura e tamanhos de amostra. Note que este balanceamento torna-se mais marcante com o aumento do tamanho da amostra. Os demais intervalos são altamente não-balanceados, já que a probabilidade observada “% Direito” é bem superior à probabilidade observada “% Esquerdo”; por exemplo, para $n = 10$ e nível nominal de cobertura de 90%, as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” do intervalo ICP foram 0.22% e 33.48%, respectivamente. Observe também

Tabela 4.6: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.0584	0.0712	0.0801	0.0839	0.1262	0.1212	0.1162	0.1136	0.0679	0.0500	0.0361	0.0297
	ICCS	0.0627	0.0738	0.0816	0.0850	0.1357	0.1257	0.1184	0.1150	0.0730	0.0519	0.0368	0.0300
	ICNg	0.0648	0.0749	0.0822	0.0854	0.1403	0.1276	0.1192	0.1155	0.0754	0.0527	0.0370	0.0302
	ICP	0.0536	0.0690	0.0790	0.0832	0.1133	0.1151	0.1134	0.1118	0.0597	0.0461	0.0344	0.0287
	ICPCS	0.0577	0.0716	0.0805	0.0842	0.1218	0.1194	0.1156	0.1132	0.0642	0.0478	0.0351	0.0290
	ICPNg	0.0596	0.0727	0.0810	0.0846	0.1259	0.1211	0.1163	0.1137	0.0663	0.0485	0.0353	0.0292
	ICBt	0.0753	0.0805	0.0850	0.0872	0.1634	0.1347	0.1221	0.1174	0.0881	0.0543	0.0371	0.0301
	BCa	0.0678	0.0772	0.0836	0.0864	0.1257	0.1246	0.1193	0.1160	0.0579	0.0473	0.0356	0.0296
5%	ICA	0.0518	0.0664	0.0766	0.0811	0.1327	0.1260	0.1197	0.1164	0.0809	0.0596	0.0430	0.0353
	ICCS	0.0557	0.0689	0.0781	0.0821	0.1427	0.1307	0.1219	0.1179	0.0870	0.0618	0.0438	0.0358
	ICNg	0.0576	0.0699	0.0786	0.0825	0.1475	0.1326	0.1227	0.1184	0.0899	0.0627	0.0441	0.0359
	ICP	0.0472	0.0645	0.0757	0.0804	0.1176	0.1190	0.1166	0.1145	0.0704	0.0545	0.0409	0.0341
	ICPCS	0.0508	0.0670	0.0771	0.0815	0.1264	0.1235	0.1188	0.1160	0.0757	0.0565	0.0417	0.0345
	ICPNg	0.0525	0.0679	0.0776	0.0818	0.1307	0.1253	0.1196	0.1165	0.0782	0.0574	0.0419	0.0347
	ICBt	0.0727	0.0778	0.0827	0.0852	0.1881	0.1445	0.1275	0.1214	0.1154	0.0666	0.0448	0.0362
	BCa	0.0624	0.0734	0.0808	0.0841	0.1304	0.1295	0.1233	0.1194	0.0680	0.0561	0.0425	0.0354
1%	ICA	0.0391	0.0570	0.0699	0.0755	0.1455	0.1353	0.1264	0.1220	0.1063	0.0783	0.0565	0.0464
	ICCS	0.0421	0.0591	0.0712	0.0765	0.1564	0.1404	0.1288	0.1235	0.1143	0.0813	0.0576	0.0470
	ICNg	0.0435	0.0600	0.0717	0.0768	0.1616	0.1425	0.1297	0.1241	0.1181	0.0825	0.0580	0.0472
	ICP	0.0350	0.0556	0.0691	0.0750	0.1251	0.1261	0.1224	0.1195	0.0901	0.0705	0.0533	0.0446
	ICPCS	0.0376	0.0577	0.0704	0.0759	0.1345	0.1309	0.1247	0.1210	0.0969	0.0732	0.0543	0.0451
	ICPNg	0.0389	0.0585	0.0709	0.0762	0.1390	0.1327	0.1255	0.1215	0.1001	0.0743	0.0546	0.0453
	ICBt	0.0684	0.0735	0.0788	0.0817	0.2643	0.1690	0.1400	0.1304	0.1959	0.0955	0.0611	0.0487
	BCa	0.0527	0.0664	0.0755	0.0795	0.1321	0.1329	0.1279	0.1243	0.0794	0.0666	0.0525	0.0447

Tabela 4.7: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	80.00	85.38	87.66	88.98	0.18	0.74	1.24	1.76	19.82	13.88	11.10	9.26
	ICCS	86.00	88.84	89.54	90.30	0.74	1.54	2.26	2.54	13.26	9.62	8.20	7.16
	ICNg	87.56	89.42	90.12	90.64	1.32	2.18	2.64	2.84	11.12	8.40	7.24	6.52
	ICP	66.30	77.56	82.68	85.30	0.22	0.82	1.48	1.78	33.48	21.62	15.84	12.92
	ICPCS	75.50	82.14	85.46	87.10	0.74	1.54	2.26	2.58	23.76	16.32	12.28	10.32
	ICPNg	78.30	83.76	86.16	87.68	1.36	2.06	2.60	2.80	20.34	14.18	11.24	9.52
	ICBt	83.78	86.40	87.62	89.04	9.82	7.68	6.36	5.76	6.40	5.92	6.02	5.20
	BCa	74.32	83.50	86.72	88.20	4.44	4.44	4.70	4.84	21.24	12.06	8.58	6.96
5%	ICA	84.74	90.48	92.74	93.98	0.02	0.10	0.40	0.38	15.24	9.42	6.86	5.64
	ICCS	89.76	93.04	94.08	94.90	0.02	0.26	0.66	0.62	10.22	6.70	5.26	4.48
	ICNg	91.22	93.96	94.66	95.12	0.16	0.38	0.74	0.80	8.62	5.66	4.60	4.08
	ICP	71.22	83.18	88.28	91.10	0.04	0.20	0.62	0.60	28.74	16.62	11.10	8.30
	ICPCS	79.82	87.44	90.72	92.62	0.16	0.44	0.92	0.90	20.02	12.12	8.36	6.48
	ICPNg	82.56	88.62	91.32	92.88	0.22	0.74	1.10	1.18	17.22	10.64	7.58	5.94
	ICBt	89.76	92.04	93.36	93.94	7.00	4.86	3.70	3.16	3.24	3.10	2.94	2.90
	BCa	79.74	89.28	92.56	93.24	1.80	2.08	2.26	2.34	18.46	8.64	5.18	4.42
1%	ICA	90.72	95.46	97.20	97.86	0.00	0.00	0.02	0.02	9.28	4.54	2.78	2.12
	ICCS	94.08	96.88	97.88	98.36	0.00	0.02	0.02	0.06	5.92	3.10	2.10	1.58
	ICNg	95.34	97.40	98.12	98.46	0.00	0.02	0.04	0.06	4.66	2.58	1.84	1.48
	ICP	78.46	89.68	94.28	95.96	0.00	0.04	0.06	0.10	21.54	10.28	5.66	3.94
	ICPCS	84.82	92.54	95.86	96.72	0.00	0.12	0.10	0.16	15.18	7.34	4.04	3.12
	ICPNg	87.26	93.58	96.22	97.00	0.00	0.14	0.14	0.20	12.74	6.28	3.64	2.80
	ICBt	95.36	97.06	98.18	98.38	3.96	2.08	1.22	0.80	0.68	0.86	0.60	0.82
	BCa	82.50	92.84	96.46	97.50	0.24	0.38	0.60	0.44	17.26	6.78	2.94	2.06

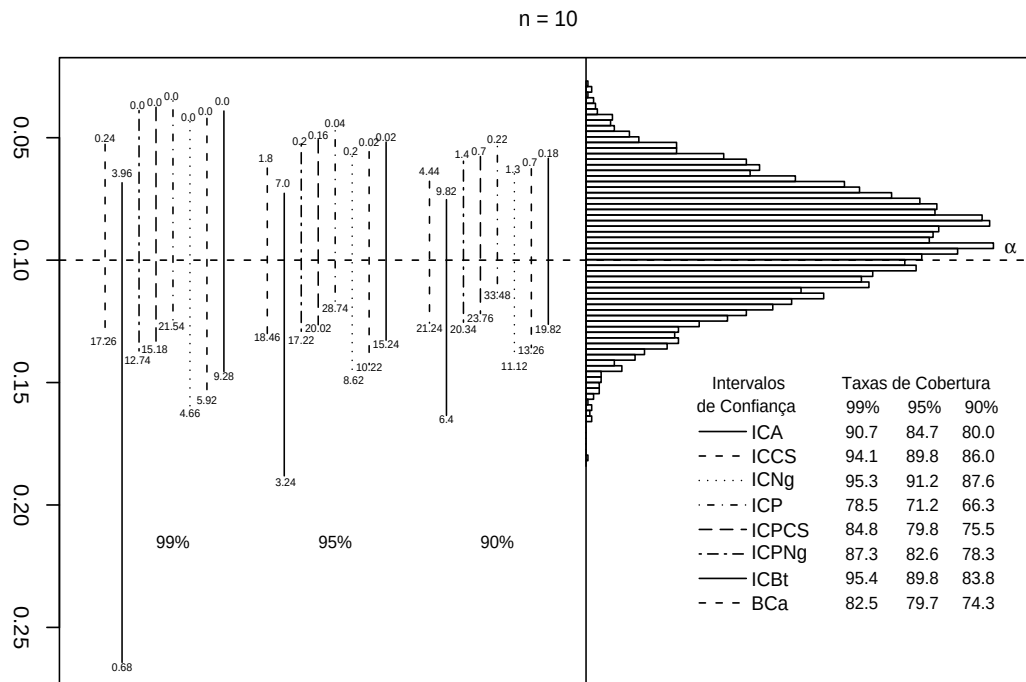


Figura 4.1: Estimação intervalar para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$.

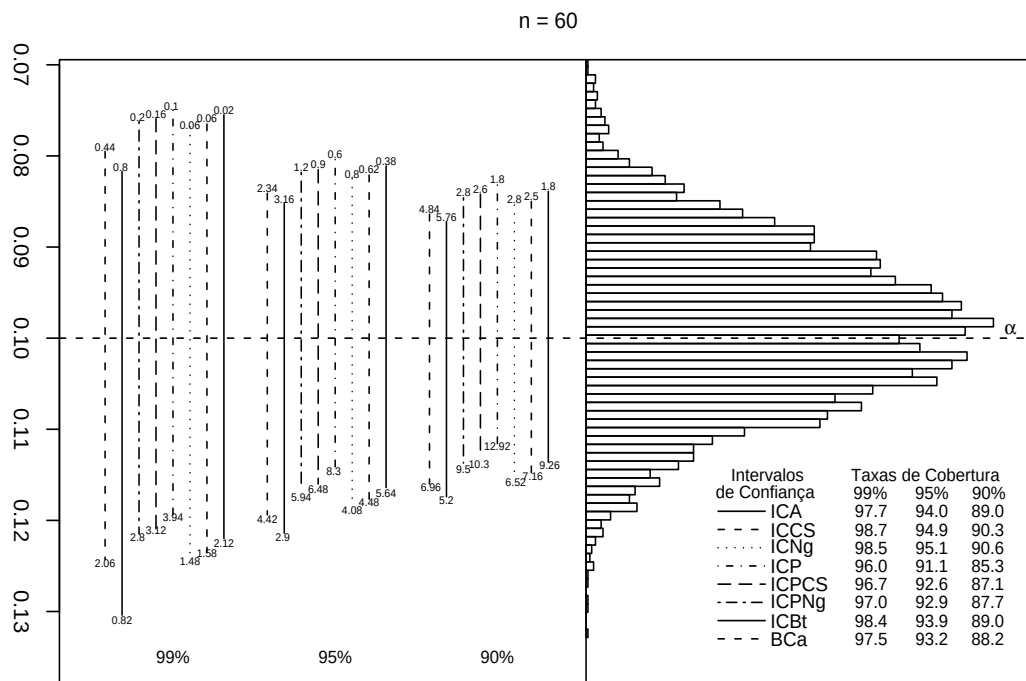


Figura 4.2: Estimação intervalar para $\alpha = 0.1$ considerando $\beta = 1.0$.

Tabela 4.8: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.9525	0.9651	0.9747	0.9791	1.0484	1.0357	1.0257	1.0210	0.0959	0.0707	0.0510	0.0419
	ICCS	0.9485	0.9635	0.9741	0.9788	1.0516	1.0368	1.0261	1.0212	0.1031	0.0733	0.0519	0.0424
	ICNg	0.9469	0.9631	0.9740	0.9787	1.0535	1.0375	1.0263	1.0213	0.1065	0.0744	0.0523	0.0426
	ICP	0.9535	0.9656	0.9749	0.9792	1.0493	1.0362	1.0259	1.0211	0.0958	0.0706	0.0510	0.0418
	ICPCS	0.9532	0.9654	0.9748	0.9792	1.0489	1.0360	1.0258	1.0210	0.0958	0.0706	0.0510	0.0418
	ICPNg	0.9533	0.9655	0.9749	0.9792	1.0491	1.0361	1.0259	1.0210	0.0958	0.0706	0.0510	0.0418
	ICBt	0.9432	0.9628	0.9742	0.9789	1.0615	1.0397	1.0272	1.0219	0.1182	0.0770	0.0530	0.0429
	BCa	0.9525	0.9652	0.9747	0.9791	1.0504	1.0367	1.0262	1.0213	0.0980	0.0715	0.0515	0.0422
5%	ICA	0.9433	0.9583	0.9699	0.9751	1.0576	1.0425	1.0306	1.0250	0.1143	0.0842	0.0608	0.0499
	ICCS	0.9386	0.9565	0.9692	0.9747	1.0614	1.0438	1.0311	1.0252	0.1228	0.0874	0.0619	0.0505
	ICNg	0.9367	0.9559	0.9690	0.9746	1.0637	1.0446	1.0313	1.0254	0.1269	0.0886	0.0623	0.0508
	ICP	0.9450	0.9590	0.9702	0.9752	1.0586	1.0430	1.0308	1.0251	0.1136	0.0840	0.0607	0.0499
	ICPCS	0.9446	0.9588	0.9700	0.9752	1.0582	1.0428	1.0307	1.0250	0.1136	0.0840	0.0607	0.0499
	ICPNg	0.9448	0.9589	0.9701	0.9752	1.0584	1.0429	1.0308	1.0251	0.1136	0.0840	0.0607	0.0499
	ICBt	0.9290	0.9549	0.9691	0.9748	1.0780	1.0486	1.0329	1.0263	0.1491	0.0937	0.0637	0.0515
	BCa	0.9432	0.9584	0.9697	0.9749	1.0602	1.0438	1.0312	1.0254	0.1169	0.0854	0.0615	0.0505
1%	ICA	0.9253	0.9451	0.9603	0.9672	1.0756	1.0557	1.0402	1.0329	0.1502	0.1107	0.0799	0.0656
	ICCS	0.9193	0.9428	0.9594	0.9668	1.0807	1.0576	1.0408	1.0332	0.1614	0.1148	0.0814	0.0664
	ICNg	0.9168	0.9420	0.9592	0.9667	1.0836	1.0585	1.0411	1.0334	0.1668	0.1165	0.0819	0.0667
	ICP	0.9282	0.9458	0.9604	0.9671	1.0755	1.0558	1.0400	1.0326	0.1473	0.1099	0.0796	0.0655
	ICPCS	0.9279	0.9456	0.9603	0.9670	1.0751	1.0555	1.0398	1.0325	0.1472	0.1099	0.0796	0.0655
	ICPNg	0.9280	0.9457	0.9603	0.9670	1.0752	1.0556	1.0399	1.0326	0.1473	0.1099	0.0796	0.0655
	ICBt	0.8957	0.9390	0.9593	0.9671	1.1223	1.0687	1.0450	1.0358	0.2266	0.1297	0.0857	0.0687
	BCa	0.9252	0.9435	0.9587	0.9657	1.0788	1.0578	1.0412	1.0336	0.1535	0.1143	0.0825	0.0679

Tabela 4.9: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	84.22	86.76	89.10	90.04	7.32	6.20	4.98	4.88	8.46	7.04	5.92	5.08
	ICCS	87.04	88.46	89.78	90.54	5.94	5.26	4.54	4.54	7.02	6.28	5.68	4.92
	ICNg	88.28	89.04	90.08	90.68	5.50	5.12	4.46	4.46	6.22	5.84	5.46	4.86
	ICP	84.16	86.68	88.94	89.96	7.70	6.44	5.16	4.84	8.14	6.88	5.90	5.20
	ICPCS	84.06	86.62	88.92	89.96	7.64	6.40	5.10	4.80	8.30	6.98	5.98	5.24
	ICPNg	84.12	86.68	88.90	89.98	7.64	6.40	5.12	4.80	8.24	6.92	5.98	5.22
	ICBt	89.64	89.54	90.30	90.48	5.26	5.32	4.68	4.90	5.10	5.14	5.02	4.62
	BCa	84.52	86.46	89.06	89.74	7.58	6.60	5.14	5.04	7.90	6.94	5.80	5.22
5%	ICA	90.12	92.64	93.92	94.88	4.60	3.48	2.86	2.38	5.28	3.88	3.22	2.74
	ICCS	92.38	93.70	94.44	95.08	3.26	2.84	2.54	2.26	4.36	3.46	3.02	2.66
	ICNg	93.20	94.10	94.64	95.14	2.98	2.66	2.44	2.26	3.82	3.24	2.92	2.60
	ICP	90.04	92.34	94.18	94.44	4.96	3.64	2.70	2.74	5.00	4.02	3.12	2.82
	ICPCS	90.02	92.22	94.20	94.44	4.84	3.60	2.64	2.68	5.14	4.18	3.16	2.88
	ICPNg	90.06	92.32	94.18	94.42	4.86	3.64	2.68	2.74	5.08	4.04	3.14	2.84
	ICBt	94.82	94.88	95.00	95.26	2.74	2.70	2.44	2.56	2.44	2.42	2.56	2.18
	BCa	89.82	92.62	94.10	94.76	4.88	3.48	2.72	2.50	5.30	3.90	3.18	2.74
1%	ICA	96.36	98.18	98.38	98.78	1.70	0.86	0.70	0.48	1.94	0.96	0.92	0.74
	ICCS	97.16	98.46	98.48	98.82	1.32	0.70	0.66	0.46	1.52	0.84	0.86	0.72
	ICNg	97.62	98.60	98.56	98.84	1.14	0.62	0.62	0.44	1.24	0.78	0.82	0.72
	ICP	95.66	97.78	98.16	98.52	2.14	1.04	0.90	0.60	2.20	1.18	0.94	0.88
	ICPCS	95.64	97.80	98.14	98.56	2.14	1.02	0.90	0.56	2.22	1.18	0.96	0.88
	ICPNg	95.66	97.78	98.14	98.54	2.14	1.04	0.90	0.58	2.20	1.18	0.96	0.88
	ICBt	98.68	98.86	98.74	98.94	0.82	0.62	0.82	0.42	0.50	0.52	0.44	0.64
	BCa	95.40	97.84	98.22	98.60	2.30	1.02	0.84	0.56	2.30	1.14	0.94	0.84

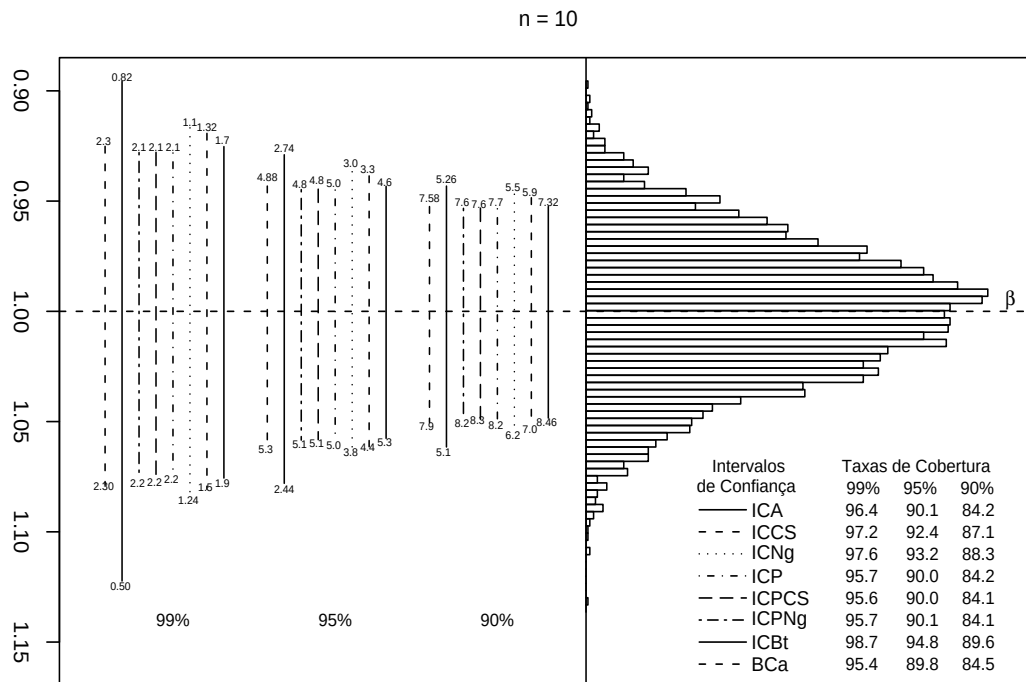


Figura 4.3: Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$.

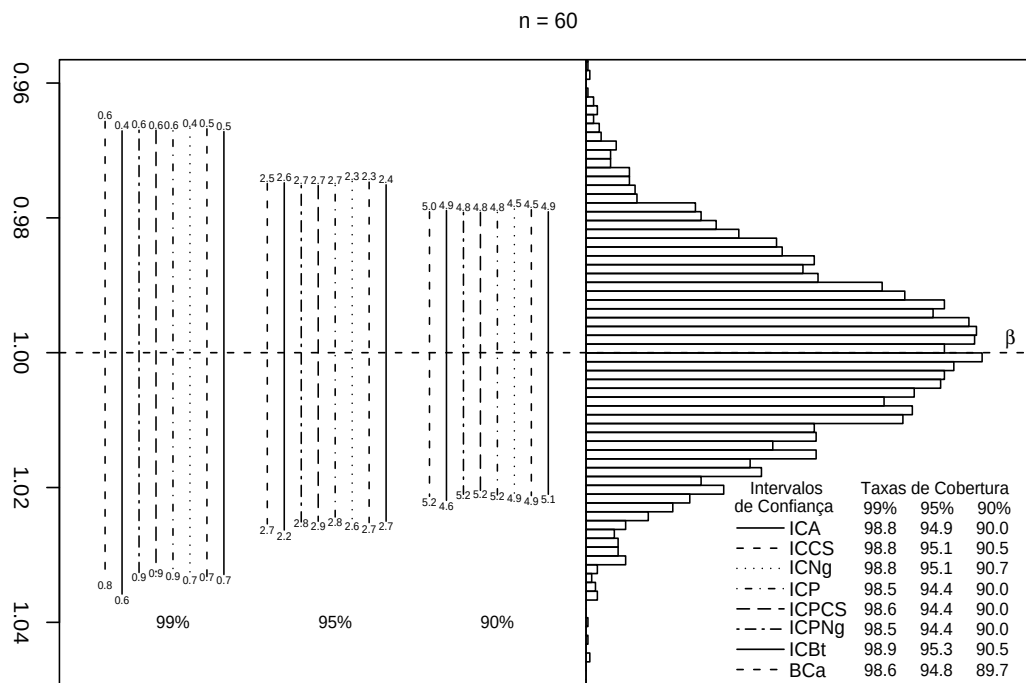


Figura 4.4: Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$.

que o aumento do tamanho da amostra melhora os desempenhos de todos os intervalos, isto é, as probabilidades de cobertura observadas aproximam-se da probabilidade de cobertura nominal.

As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam os resultados relativos aos intervalos de confiança para $\alpha = 0.1$ quando $n = 10$ e $n = 60$, respectivamente, considerando $\beta = 1.0$. Observe nestas figuras que os intervalos assintóticos ICA, ICCS e ICNg foram aproximadamente simétricos ao redor do parâmetro α , com o intervalo ICCS apresentando a melhor simetria. Note ainda que, dentre os intervalos bootstrap, o intervalo BCa se revelou o mais simétrico. Observe também que quando o tamanho da amostra é pequeno, o intervalo de confiança bootstrap do tipo ICBt é altamente assimétrico em todos os níveis nominais de cobertura considerados. Entretanto, com o aumento do tamanho da amostra, a assimetria torna-se menos acentuada para todos os intervalos de confiança.

As Tabelas 4.8 e 4.9 apresentam os intervalos de confiança para o parâmetro $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.1$. Observe na Tabela 4.8 que nenhum intervalo analisado abrangeu valores fora do espaço paramétrico de β . Além disso, note que os limites inferior e superior médios de cada intervalo de confiança considerado são bastante similares entre si. Por exemplo, para cobertura nominal de 90% e $n = 20$, os limites inferiores dos intervalos ICA e BCa foram 0.9651 e 0.9652, respectivamente. Observe ainda que, para os três níveis nominais de cobertura e diferentes tamanhos de amostra, os comprimentos médios dos intervalos do tipo ICP, ICPCS e ICPNg foram menores que os respectivos comprimentos médios dos demais intervalos, seguidos dos intervalos ICA e BCa. Adicionalmente, note que o intervalo de confiança bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os casos considerados.

Observe na Tabela 4.9 que os intervalos ICCS, ICNg e ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura considerados, seguidos do intervalo de confiança bootstrap BCa. Um fato interessante a ser ressaltado a partir dos resultados apresentados nas Tabelas 4.8 e 4.9 é que, em geral, para os diferentes tamanhos de amostra, os intervalos de confiança ICA, ICP e BCa apresentaram desempenhos similares em “Comprimento do Intervalo”, “Cobertura” e percentagens “% Esquerdo” e “% Direito”, o que nos leva a concluir que quando $\alpha = 0.1$ as distribuições empírica e assintótica de $\hat{\beta}$ são muito semelhantes.

As Figuras 4.3 e 4.4 apresentam os resultados relativos aos intervalos de confiança para $\beta = 1.0$ quando $n = 10$ e $n = 60$, respectivamente, considerando $\alpha = 0.1$. Estas figuras mostram que todos os intervalos de confiança considerados para β são aproximadamente simétricos e balanceados, isto é, as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente nas caudas da densidade do estimador de máxima verossimilhança de β considerando os diferentes níveis de cobertura e tamanhos de amostra; isto é verificado a partir dos resultados apresentados na Tabela 4.9. Observe também nesta tabela que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, o balanceamento torna-se mais marcante para todos os intervalos de confiança. Por exemplo, para o nível de cobertura de 90%, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os valores de “% Esquerdo” e “% Direito” se aproximam em média aos valores 4.91% e 5.6%, respectivamente. Além disso, o aumento do tamanho da amostra melhora o desempenho de todos os intervalos de confiança, isto é, as coberturas aumentam e, dado que a variância diminui, os comprimentos médios dos intervalos são menores.

As Tabelas 4.10 e 4.11 apresentam os resultados relativos aos intervalos de confiança para o parâmetro $\alpha = 0.25$ considerando $\beta = 1.0$. Observe na Tabela 4.10 que, de forma análoga ao que acontece na Tabela 4.6, nenhum intervalo inclui valores que não pertencem ao espaço paramétrico de α . Além disso, note que os limites inferior e superior dos intervalos do tipo assintótico ICA, ICCS e ICNg são similares. Os comprimentos médios destes intervalos também estão próximos, sendo o comprimento médio do intervalo de confiança ICA levemente menor em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura; por exemplo, para o nível nominal de cobertura de 99% e $n = 40$, os comprimentos médios dos intervalos ICA, ICCS e ICNg foram 0.1413, 0.1440 e 0.1449, respectivamente. Da mesma forma, os intervalos de confiança bootstrap do tipo ICP, ICPCS e ICPNg também apresentaram resultados similares em termos de limite inferior, limite superior e comprimento. Os intervalos bootstrap ICP e BCa apresentaram os menores comprimentos médios em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura considerados. Adicionalmente, o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os casos; por exemplo, para cobertura nominal de 99% e $n = 10$, os comprimentos dos intervalos BCa e ICBt foram 0.1983 e 0.4901, respectivamente. Ou seja, a estimativa intervalar através do intervalo bootstrap ICBt em

Tabela 4.10: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.25$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.1458	0.1778	0.2002	0.2098	0.3154	0.3029	0.2904	0.2839	0.1696	0.1250	0.0902	0.0741
	ICCS	0.1568	0.1846	0.2040	0.2125	0.3393	0.3143	0.2959	0.2875	0.1825	0.1298	0.0919	0.0751
	ICNg	0.1620	0.1872	0.2053	0.2134	0.3505	0.3188	0.2979	0.2888	0.1885	0.1316	0.0925	0.0754
	ICP	0.1339	0.1725	0.1974	0.2079	0.2830	0.2875	0.2835	0.2795	0.1491	0.1150	0.0860	0.0717
	ICPCS	0.1440	0.1790	0.2012	0.2105	0.3046	0.2985	0.2889	0.2831	0.1605	0.1195	0.0877	0.0726
	ICPNg	0.1488	0.1816	0.2025	0.2114	0.3145	0.3027	0.2907	0.2843	0.1656	0.1211	0.0883	0.0729
	ICBt	0.1883	0.2012	0.2124	0.2181	0.4085	0.3368	0.3053	0.2934	0.2202	0.1356	0.0928	0.0753
	BCa	0.1693	0.1931	0.2091	0.2161	0.3139	0.3113	0.2981	0.2901	0.1446	0.1182	0.0890	0.0740
5%	ICA	0.1295	0.1659	0.1916	0.2027	0.3317	0.3148	0.2991	0.2910	0.2021	0.1490	0.1075	0.0883
	ICCS	0.1393	0.1722	0.1952	0.2053	0.3568	0.3268	0.3048	0.2947	0.2174	0.1546	0.1096	0.0895
	ICNg	0.1439	0.1746	0.1965	0.2061	0.3685	0.3314	0.3068	0.2960	0.2246	0.1568	0.1103	0.0898
	ICP	0.1179	0.1613	0.1892	0.2011	0.2937	0.2974	0.2913	0.2863	0.1758	0.1361	0.1022	0.0852
	ICPCS	0.1268	0.1673	0.1927	0.2036	0.3160	0.3087	0.2969	0.2899	0.1893	0.1413	0.1041	0.0863
	ICPNg	0.1310	0.1697	0.1940	0.2045	0.3263	0.3130	0.2988	0.2911	0.1953	0.1433	0.1048	0.0866
	ICBt	0.1816	0.1946	0.2068	0.2130	0.4703	0.3611	0.3188	0.3034	0.2887	0.1665	0.1120	0.0904
	BCa	0.1558	0.1836	0.2020	0.2102	0.3256	0.3236	0.3081	0.2985	0.1698	0.1401	0.1061	0.0883
1%	ICA	0.0978	0.1425	0.1747	0.1888	0.3634	0.3382	0.3160	0.3049	0.2656	0.1958	0.1413	0.1161
	ICCS	0.1052	0.1479	0.1780	0.1912	0.3909	0.3511	0.3220	0.3088	0.2858	0.2032	0.1440	0.1176
	ICNg	0.1086	0.1500	0.1792	0.1920	0.4038	0.3560	0.3241	0.3101	0.2952	0.2061	0.1449	0.1181
	ICP	0.0873	0.1388	0.1727	0.1874	0.3124	0.3150	0.3058	0.2987	0.2251	0.1762	0.1331	0.1113
	ICPCS	0.0939	0.1441	0.1759	0.1897	0.3362	0.3270	0.3116	0.3025	0.2424	0.1830	0.1356	0.1128
	ICPNg	0.0970	0.1461	0.1771	0.1905	0.3471	0.3316	0.3136	0.3038	0.2501	0.1855	0.1365	0.1132
	ICBt	0.1709	0.1839	0.1971	0.2042	0.6611	0.4225	0.3499	0.3259	0.4901	0.2387	0.1528	0.1217
	BCa	0.1315	0.1658	0.1887	0.1988	0.3298	0.3320	0.3197	0.3105	0.1983	0.1662	0.1310	0.1117

Tabela 4.11: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.25$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	79.92	85.38	87.64	88.96	0.18	0.70	1.24	1.76	19.90	13.92	11.12	9.28
	ICCS	86.00	88.80	89.52	90.28	0.76	1.56	2.24	2.52	13.24	9.64	8.24	7.20
	ICNg	87.48	89.36	90.06	90.64	1.34	2.20	2.64	2.84	11.18	8.44	7.30	6.52
	ICP	66.26	77.52	82.62	85.30	0.22	0.80	1.48	1.76	33.52	21.68	15.90	12.94
	ICPCS	75.46	82.10	85.42	87.08	0.74	1.50	2.26	2.58	23.80	16.40	12.32	10.34
	ICPNg	78.32	83.74	86.08	87.62	1.30	2.02	2.60	2.80	20.38	14.24	11.32	9.58
	ICBt	83.74	86.30	87.66	89.02	9.88	7.72	6.34	5.82	6.38	5.98	6.00	5.16
	BCa	74.36	83.52	86.72	88.24	4.38	4.34	4.70	4.82	21.26	12.14	8.58	6.94
5%	ICA	84.72	90.46	92.72	93.98	0.02	0.10	0.40	0.38	15.26	9.44	6.88	5.64
	ICCS	89.74	93.04	94.06	94.92	0.04	0.26	0.66	0.62	10.22	6.70	5.28	4.46
	ICNg	91.20	93.96	94.66	95.10	0.16	0.36	0.74	0.80	8.64	5.68	4.60	4.10
	ICP	71.08	83.06	88.24	91.04	0.04	0.20	0.60	0.60	28.88	16.74	11.16	8.36
	ICPCS	79.80	87.44	90.64	92.64	0.16	0.44	0.92	0.88	20.04	12.12	8.44	6.48
	ICPNg	82.52	88.62	91.28	92.90	0.22	0.72	1.10	1.14	17.26	10.66	7.62	5.96
	ICBt	89.74	92.00	93.38	93.98	7.00	4.90	3.68	3.14	3.26	3.10	2.94	2.88
	BCa	79.70	89.18	92.46	93.24	1.76	2.10	2.28	2.36	18.54	8.72	5.26	4.40
1%	ICA	90.58	95.46	97.18	97.86	0.00	0.00	0.02	0.02	9.42	4.54	2.80	2.12
	ICCS	94.06	96.88	97.88	98.36	0.00	0.02	0.02	0.06	5.94	3.10	2.10	1.58
	ICNg	95.32	97.38	98.12	98.48	0.00	0.02	0.04	0.06	4.68	2.60	1.84	1.46
	ICP	78.34	89.60	94.24	95.92	0.00	0.04	0.06	0.10	21.66	10.36	5.70	3.98
	ICPCS	84.74	92.52	95.86	96.72	0.00	0.12	0.10	0.16	15.26	7.36	4.04	3.12
	ICPNg	87.24	93.54	96.24	96.96	0.00	0.14	0.14	0.20	12.76	6.32	3.62	2.84
	ICBt	95.36	97.04	98.16	98.36	3.96	2.10	1.24	0.82	0.68	0.86	0.60	0.82
	BCa	82.44	92.76	96.48	97.44	0.22	0.40	0.58	0.44	17.34	6.84	2.94	2.12

Tabela 4.12: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.25$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.8837	0.9140	0.9377	0.9484	1.1224	1.0898	1.0644	1.0525	0.2387	0.1758	0.1267	0.1041
	ICCS	0.8724	0.9094	0.9358	0.9473	1.1281	1.0915	1.0648	1.0526	0.2557	0.1820	0.1290	0.1053
	ICNg	0.8692	0.9088	0.9357	0.9473	1.1334	1.0935	1.0656	1.0530	0.2642	0.1847	0.1299	0.1058
	ICP	0.8907	0.9177	0.9394	0.9496	1.1291	1.0932	1.0661	1.0535	0.2384	0.1755	0.1266	0.1039
	ICPCS	0.8886	0.9165	0.9388	0.9491	1.1265	1.0917	1.0653	1.0529	0.2378	0.1752	0.1265	0.1038
	ICPNg	0.8894	0.9170	0.9391	0.9493	1.1275	1.0924	1.0657	1.0532	0.2381	0.1753	0.1266	0.1039
	ICBt	0.8656	0.9109	0.9376	0.9488	1.1607	1.1024	1.0694	1.0554	0.2951	0.1916	0.1318	0.1067
	BCa	0.8884	0.9168	0.9388	0.9491	1.1321	1.0946	1.0666	1.0540	0.2437	0.1778	0.1279	0.1049
5%	ICA	0.8608	0.8972	0.9255	0.9384	1.1453	1.1067	1.0766	1.0624	0.2844	0.2095	0.1510	0.1240
	ICCS	0.8479	0.8920	0.9234	0.9372	1.1526	1.1089	1.0772	1.0627	0.3047	0.2169	0.1537	0.1255
	ICNg	0.8439	0.8911	0.9233	0.9371	1.1587	1.1112	1.0780	1.0632	0.3149	0.2201	0.1548	0.1260
	ICP	0.8711	0.9024	0.9280	0.9399	1.1540	1.1113	1.0788	1.0638	0.2829	0.2089	0.1508	0.1239
	ICPCS	0.8693	0.9012	0.9274	0.9395	1.1514	1.1098	1.0780	1.0633	0.2822	0.2086	0.1507	0.1238
	ICPNg	0.8700	0.9018	0.9277	0.9397	1.1524	1.1104	1.0784	1.0635	0.2824	0.2087	0.1507	0.1239
	ICBt	0.8322	0.8922	0.9254	0.9389	1.2050	1.1258	1.0840	1.0669	0.3728	0.2336	0.1586	0.1279
	BCa	0.8674	0.9010	0.9269	0.9392	1.1585	1.1134	1.0798	1.0646	0.2911	0.2125	0.1528	0.1254
1%	ICA	0.8161	0.8643	0.9018	0.9189	1.1899	1.1396	1.1003	1.0819	0.3738	0.2753	0.1985	0.1630
	ICCS	0.8001	0.8579	0.8993	0.9175	1.2005	1.1430	1.1013	1.0824	0.4004	0.2851	0.2020	0.1649
	ICNg	0.7944	0.8565	0.8990	0.9173	1.2082	1.1457	1.1024	1.0830	0.4138	0.2893	0.2034	0.1657
	ICP	0.8335	0.8721	0.9051	0.9206	1.2004	1.1452	1.1026	1.0832	0.3670	0.2731	0.1976	0.1626
	ICPCS	0.8319	0.8710	0.9044	0.9201	1.1980	1.1437	1.1019	1.0827	0.3661	0.2728	0.1974	0.1626
	ICPNg	0.8325	0.8715	0.9047	0.9203	1.1989	1.1444	1.1022	1.0829	0.3664	0.2729	0.1975	0.1626
	ICBt	0.7547	0.8549	0.9021	0.9205	1.3243	1.1793	1.1157	1.0915	0.5696	0.3244	0.2137	0.1710
	BCa	0.8274	0.8670	0.9012	0.9173	1.2099	1.1509	1.1059	1.0859	0.3824	0.2839	0.2048	0.1686

Tabela 4.13: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.25$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	84.14	87.04	89.18	90.02	6.74	5.58	4.62	4.56	9.12	7.38	6.20	5.42
	ICCS	86.76	88.20	89.74	90.44	5.12	4.80	4.16	4.14	8.12	7.00	6.10	5.42
	ICNg	88.04	88.66	90.02	90.66	4.82	4.72	4.16	4.16	7.14	6.62	5.82	5.18
	ICP	84.12	86.66	88.98	89.90	7.72	6.48	5.12	4.90	8.16	6.86	5.90	5.20
	ICPCS	83.98	86.40	89.02	89.88	7.56	6.36	4.94	4.78	8.46	7.24	6.04	5.34
	ICPNg	84.02	86.50	88.96	89.92	7.62	6.38	5.06	4.80	8.36	7.12	5.98	5.28
	ICBt	89.60	89.42	90.30	90.50	5.22	5.34	4.66	4.88	5.18	5.24	5.04	4.62
	BCa	84.50	86.46	89.00	89.88	7.58	6.54	5.20	4.98	7.92	7.00	5.80	5.14
5%	ICA	90.36	92.74	94.04	94.66	3.96	2.90	2.52	2.26	5.68	4.36	3.44	3.08
	ICCS	92.10	93.70	94.40	94.98	2.80	2.34	2.24	2.00	5.10	3.96	3.36	3.02
	ICNg	92.96	94.10	94.56	95.14	2.54	2.18	2.20	2.00	4.50	3.72	3.24	2.86
	ICP	89.92	92.22	94.22	94.50	5.02	3.72	2.70	2.72	5.06	4.06	3.08	2.78
	ICPCS	90.08	92.20	94.10	94.28	4.72	3.50	2.66	2.68	5.20	4.30	3.24	3.04
	ICPNg	89.98	92.28	94.20	94.38	4.88	3.54	2.66	2.70	5.14	4.18	3.14	2.92
	ICBt	94.72	94.84	95.06	95.22	2.72	2.72	2.40	2.58	2.56	2.44	2.54	2.20
	BCa	89.72	92.54	94.08	94.68	4.94	3.54	2.74	2.60	5.34	3.92	3.18	2.72
1%	ICA	96.18	98.14	98.38	98.74	1.48	0.70	0.64	0.42	2.34	1.16	0.98	0.84
	ICCS	97.16	98.44	98.54	98.84	1.02	0.56	0.52	0.36	1.82	1.00	0.94	0.80
	ICNg	97.54	98.52	98.58	98.84	0.90	0.54	0.52	0.36	1.56	0.94	0.90	0.80
	ICP	95.64	97.74	98.14	98.54	2.16	1.06	0.90	0.58	2.20	1.20	0.96	0.88
	ICPCS	95.56	97.76	98.12	98.58	2.14	1.02	0.90	0.54	2.30	1.22	0.98	0.88
	ICPNg	95.62	97.74	98.12	98.56	2.14	1.04	0.90	0.56	2.24	1.22	0.98	0.88
	ICBt	98.58	98.78	98.74	98.92	0.84	0.66	0.80	0.44	0.58	0.56	0.46	0.64
	BCa	95.40	97.82	98.18	98.60	2.32	1.00	0.88	0.56	2.28	1.18	0.94	0.84

Tabela 4.14: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.5$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Limite Inferior			Limite Superior			Comprimento do Intervalo					
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.2910	0.3553	0.4002	0.4195	0.6296	0.6051	0.5806	0.5677	0.3386	0.2498	0.1804	0.1482
	ICCS	0.3136	0.3691	0.4080	0.4249	0.6785	0.6286	0.5919	0.5751	0.3649	0.2595	0.1839	0.1502
	ICNg	0.3233	0.3740	0.4105	0.4266	0.6995	0.6370	0.5955	0.5773	0.3762	0.2629	0.1850	0.1507
	ICP	0.2668	0.3444	0.3945	0.4155	0.5643	0.5739	0.5663	0.5586	0.2975	0.2295	0.1717	0.1431
	ICPCS	0.2871	0.3575	0.4021	0.4209	0.6088	0.5965	0.5774	0.5659	0.3217	0.2389	0.1753	0.1451
	ICPNg	0.2965	0.3625	0.4047	0.4226	0.6270	0.6041	0.5808	0.5681	0.3305	0.2416	0.1761	0.1455
	ICBt	0.3762	0.4023	0.4250	0.4363	0.8173	0.6735	0.6104	0.5867	0.4411	0.2712	0.1855	0.1504
	BCa	0.3376	0.3859	0.4181	0.4322	0.6255	0.6213	0.5956	0.5799	0.2879	0.2355	0.1775	0.1477
5%	ICA	0.2586	0.3314	0.3829	0.4053	0.6620	0.6290	0.5979	0.5819	0.4035	0.2976	0.2149	0.1766
	ICCS	0.2787	0.3443	0.3904	0.4105	0.7135	0.6535	0.6095	0.5895	0.4348	0.3092	0.2191	0.1789
	ICNg	0.2873	0.3488	0.3928	0.4122	0.7356	0.6621	0.6132	0.5918	0.4483	0.3133	0.2204	0.1796
	ICP	0.2348	0.3219	0.3780	0.4019	0.5854	0.5934	0.5819	0.5721	0.3506	0.2715	0.2039	0.1701
	ICPCS	0.2526	0.3342	0.3852	0.4071	0.6317	0.6168	0.5934	0.5796	0.3791	0.2826	0.2081	0.1725
	ICPNg	0.2608	0.3388	0.3877	0.4088	0.6505	0.6246	0.5968	0.5818	0.3896	0.2858	0.2092	0.1730
	ICBt	0.3629	0.3893	0.4136	0.4261	0.9416	0.7222	0.6375	0.6067	0.5787	0.3330	0.2239	0.1806
	BCa	0.3105	0.3668	0.4040	0.4203	0.6489	0.6458	0.6156	0.5967	0.3384	0.2790	0.2116	0.1764
1%	ICA	0.1952	0.2846	0.3492	0.3775	0.7254	0.6758	0.6316	0.6097	0.5302	0.3912	0.2825	0.2321
	ICCS	0.2103	0.2957	0.3560	0.3824	0.7818	0.7021	0.6439	0.6176	0.5714	0.4064	0.2880	0.2351
	ICNg	0.2169	0.2996	0.3581	0.3839	0.8060	0.7114	0.6478	0.6200	0.5891	0.4117	0.2897	0.2361
	ICP	0.1735	0.2770	0.3451	0.3745	0.6227	0.6286	0.6107	0.5968	0.4491	0.3515	0.2656	0.2223
	ICPCS	0.1866	0.2876	0.3517	0.3793	0.6722	0.6535	0.6227	0.6047	0.4855	0.3659	0.2711	0.2254
	ICPNg	0.1928	0.2916	0.3539	0.3809	0.6919	0.6617	0.6263	0.6069	0.4991	0.3700	0.2724	0.2261
	ICBt	0.3416	0.3678	0.3943	0.4086	1.3256	0.8453	0.6997	0.6517	0.9840	0.4776	0.3053	0.2432
	BCa	0.2618	0.3313	0.3773	0.3976	0.6574	0.6624	0.6384	0.6204	0.3956	0.3312	0.2611	0.2228

Tabela 4.15: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.5$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	79.82	85.26	87.56	88.88	0.18	0.66	1.22	1.76	20.00	14.08	11.22	9.36
	ICCS	85.80	88.62	89.50	90.26	0.78	1.66	2.26	2.50	13.42	9.72	8.24	7.24
	ICNg	87.52	89.40	90.04	90.66	1.24	2.12	2.64	2.80	11.24	8.48	7.32	6.54
	ICP	65.88	77.16	82.46	85.16	0.22	0.78	1.42	1.76	33.90	22.06	16.12	13.08
	ICPCS	75.36	82.06	85.26	87.08	0.76	1.50	2.28	2.54	23.88	16.44	12.46	10.38
	ICPNg	78.22	83.48	86.02	87.60	1.22	1.98	2.52	2.76	20.56	14.54	11.46	9.64
	ICBt	83.88	86.28	87.66	89.00	9.70	7.72	6.34	5.78	6.42	6.00	6.00	5.22
	BCa	74.20	83.32	86.62	88.14	4.26	4.32	4.70	4.78	21.54	12.36	8.68	7.08
5%	ICA	84.56	90.30	92.66	93.98	0.02	0.10	0.40	0.36	15.42	9.60	6.94	5.66
	ICCS	89.74	92.98	94.06	94.94	0.04	0.28	0.66	0.66	10.22	6.74	5.28	4.40
	ICNg	91.08	93.86	94.60	95.08	0.14	0.36	0.76	0.78	8.78	5.78	4.64	4.14
	ICP	70.74	82.82	88.10	90.90	0.04	0.18	0.56	0.60	29.22	17.00	11.34	8.50
	ICPCS	79.82	87.40	90.60	92.68	0.14	0.44	0.92	0.84	20.04	12.16	8.48	6.48
	ICPNg	82.40	88.54	91.24	92.96	0.20	0.66	1.04	1.06	17.40	10.80	7.72	5.98
	ICBt	89.76	92.04	93.40	93.98	7.00	4.86	3.66	3.16	3.24	3.10	2.94	2.86
	BCa	79.68	88.96	92.42	93.16	1.58	2.14	2.28	2.32	18.74	8.90	5.30	4.52
1%	ICA	90.48	95.42	97.12	97.84	0.00	0.00	0.02	0.02	9.52	4.58	2.86	2.14
	ICCS	94.04	96.88	97.86	98.36	0.00	0.02	0.04	0.06	5.96	3.10	2.10	1.58
	ICNg	95.24	97.32	98.14	98.46	0.00	0.02	0.04	0.06	4.76	2.66	1.82	1.48
	ICP	78.08	89.44	94.22	95.88	0.00	0.04	0.06	0.10	21.92	10.52	5.72	4.02
	ICPCS	84.62	92.46	95.82	96.70	0.00	0.12	0.10	0.16	15.38	7.42	4.08	3.14
	ICPNg	87.06	93.44	96.22	96.96	0.00	0.14	0.12	0.18	12.94	6.42	3.66	2.86
	ICBt	95.46	97.02	98.16	98.28	3.86	2.12	1.24	0.90	0.68	0.86	0.60	0.82
	BCa	82.22	92.72	96.46	97.34	0.22	0.36	0.58	0.46	17.56	6.92	2.96	2.20

Tabela 4.16: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.5$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.7772	0.8344	0.8795	0.9000	1.2465	1.1790	1.1274	1.1034	0.4693	0.3446	0.2480	0.2034
	ICCS	0.7526	0.8236	0.8747	0.8970	1.2499	1.1786	1.1265	1.1025	0.4974	0.3550	0.2517	0.2055
	ICNg	0.7481	0.8233	0.8751	0.8974	1.2617	1.1835	1.1286	1.1039	0.5136	0.3602	0.2535	0.2064
	ICP	0.8042	0.8490	0.8867	0.9049	1.2736	1.1927	1.1342	1.1078	0.4694	0.3437	0.2475	0.2029
	ICPCS	0.7975	0.8447	0.8843	0.9032	1.2625	1.1866	1.1311	1.1058	0.4650	0.3418	0.2468	0.2025
	ICPNg	0.7998	0.8465	0.8854	0.9040	1.2663	1.1891	1.1325	1.1067	0.4665	0.3426	0.2471	0.2027
	ICBt	0.7557	0.8355	0.8831	0.9033	1.3416	1.2121	1.1413	1.1119	0.5859	0.3766	0.2582	0.2086
	BCa	0.8006	0.8474	0.8856	0.9041	1.2800	1.1957	1.1355	1.1090	0.4794	0.3483	0.2500	0.2049
5%	ICA	0.7322	0.8014	0.8557	0.8805	1.2914	1.2120	1.1512	1.1229	0.5592	0.4106	0.2955	0.2424
	ICCS	0.7049	0.7896	0.8506	0.8774	1.2976	1.2126	1.1506	1.1222	0.5926	0.4230	0.2999	0.2449
	ICNg	0.6989	0.7888	0.8508	0.8777	1.3109	1.2180	1.1529	1.1236	0.6120	0.4292	0.3020	0.2460
	ICP	0.7704	0.8218	0.8659	0.8872	1.3289	1.2313	1.1608	1.1291	0.5585	0.4095	0.2948	0.2419
	ICPCS	0.7644	0.8177	0.8636	0.8855	1.3179	1.2252	1.1576	1.1270	0.5535	0.4074	0.2940	0.2415
	ICPNg	0.7665	0.8194	0.8646	0.8863	1.3217	1.2277	1.1590	1.1279	0.5552	0.4083	0.2944	0.2417
	ICBt	0.6958	0.8015	0.8606	0.8851	1.4399	1.2623	1.1717	1.1355	0.7441	0.4607	0.3110	0.2504
	BCa	0.7645	0.8192	0.8639	0.8858	1.3392	1.2363	1.1629	1.1309	0.5747	0.4171	0.2990	0.2451
1%	ICA	0.6444	0.7369	0.8093	0.8424	1.3793	1.2765	1.1976	1.1610	0.7349	0.5396	0.3883	0.3186
	ICCS	0.6118	0.7231	0.8035	0.8389	1.3907	1.2791	1.1977	1.1607	0.7789	0.5559	0.3942	0.3218
	ICNg	0.6027	0.7213	0.8034	0.8390	1.4071	1.2854	1.2003	1.1623	0.8044	0.5641	0.3969	0.3233
	ICP	0.7074	0.7692	0.8249	0.8520	1.4361	1.3056	1.2112	1.1696	0.7286	0.5364	0.3863	0.3176
	ICPCS	0.7027	0.7655	0.8227	0.8504	1.4256	1.2993	1.2079	1.1674	0.7229	0.5338	0.3852	0.3170
	ICPNg	0.7044	0.7670	0.8237	0.8511	1.4292	1.3019	1.2093	1.1684	0.7248	0.5349	0.3857	0.3173
	ICBt	0.5572	0.7344	0.8181	0.8510	1.7104	1.3797	1.2392	1.1871	1.1533	0.6453	0.4211	0.3360
	BCa	0.6990	0.7614	0.8183	0.8462	1.4586	1.3185	1.2187	1.1753	0.7596	0.5570	0.4004	0.3291

Tabela 4.17: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.5$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	84.12	86.96	89.12	89.90	5.78	4.94	4.08	4.10	10.10	8.10	6.80	6.00
	ICCS	85.92	87.98	89.44	90.32	4.28	3.96	3.64	3.58	9.80	8.06	6.92	6.10
	ICNg	87.18	88.52	89.80	90.44	4.08	3.94	3.68	3.64	8.74	7.54	6.52	5.92
	ICP	83.92	86.46	89.00	89.66	7.76	6.52	5.12	5.02	8.32	7.02	5.88	5.32
	ICPCS	83.58	86.26	88.76	89.72	7.28	6.10	4.90	4.70	9.14	7.64	6.34	5.58
	ICPNg	83.66	86.32	88.90	89.66	7.56	6.30	5.02	4.86	8.78	7.38	6.08	5.48
	ICBt	89.36	89.34	90.12	90.44	5.12	5.26	4.88	4.80	5.52	5.40	5.00	4.76
	BCa	84.38	86.32	88.76	89.88	7.68	6.68	5.40	5.00	7.94	7.00	5.84	5.12
5%	ICA	90.16	92.58	93.88	94.78	3.10	2.36	2.20	1.88	6.74	5.06	3.92	3.34
	ICCS	91.36	93.24	94.26	94.92	2.30	1.72	1.80	1.68	6.34	5.04	3.94	3.40
	ICNg	92.18	93.76	94.40	95.02	2.08	1.68	1.80	1.70	5.74	4.56	3.80	3.28
	ICP	89.72	92.14	94.06	94.36	5.14	3.80	2.74	2.70	5.14	4.06	3.20	2.94
	ICPCS	89.82	92.12	93.98	94.36	4.60	3.42	2.56	2.56	5.58	4.46	3.46	3.08
	ICPNg	89.74	92.08	94.08	94.34	4.86	3.60	2.62	2.68	5.40	4.32	3.30	2.98
	ICBt	94.52	94.68	95.02	95.16	2.70	2.76	2.44	2.60	2.78	2.56	2.54	2.24
	BCa	89.68	92.30	94.12	94.66	4.94	3.66	2.72	2.62	5.38	4.04	3.16	2.72
1%	ICA	95.80	97.74	98.42	98.64	1.10	0.52	0.48	0.32	3.10	1.74	1.10	1.04
	ICCS	96.68	97.96	98.44	98.76	0.70	0.42	0.46	0.20	2.62	1.62	1.10	1.04
	ICNg	97.02	98.28	98.46	98.82	0.58	0.40	0.46	0.20	2.40	1.32	1.08	0.98
	ICP	95.54	97.70	98.10	98.52	2.16	1.06	0.92	0.58	2.30	1.24	0.98	0.90
	ICPCS	95.50	97.66	98.18	98.54	2.12	1.00	0.82	0.54	2.38	1.34	1.00	0.92
	ICPNg	95.48	97.68	98.16	98.54	2.14	1.04	0.84	0.56	2.38	1.28	1.00	0.90
	ICBt	98.42	98.78	98.82	98.88	0.92	0.64	0.70	0.50	0.66	0.58	0.48	0.62
	BCa	95.40	97.68	98.20	98.52	2.30	1.06	0.86	0.56	2.30	1.26	0.94	0.92

amostras de tamanho pequeno é altamente imprecisa. Note também que os comprimentos médios de todos intervalos diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta, isto é, as estimativas intervalares tornam-se mais precisas.

Observe na Tabela 4.11 que, de forma análoga ao que acontece na Tabela 4.7, os intervalos de confiança do tipo assintótico ICCS, ICNg e bootstrap do tipo ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, seguidos do intervalo BCa. Note também que, dentre todos os intervalos, o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou o melhor balanceamento, pois as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente. Adicionalmente, com o aumento do tamanho da amostra, este balanceamento torna-se mais marcante. Observe também que, dentre os intervalos de confiança bootstrap ICP, ICPCS, ICPNg e BCa, o intervalo BCa apresentou o melhor balanceamento; por exemplo, para o nível nominal de cobertura de 90% e $n = 60$, as probabilidades observadas “% Esquerdo” dos intervalos ICP, ICPCS, ICPNg e BCa foram 1.76%, 2.58%, 2.80% e 4.82%, respectivamente, e as correspondentes probabilidades observadas “% Direito” destes intervalos foram 12.94%, 10.34%, 9.58% e 6.94%.

As Tabelas 4.12 e 4.13 apresentam os intervalos de confiança para o parâmetro $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.25$. Observe na Tabela 4.12 que, de forma análoga ao que acontece na Tabela 4.8, nenhum dos intervalos considerados incluiu valores fora do espaço paramétrico de β . Observe também que, em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, os comprimentos médios dos intervalos bootstrap do tipo percentil ICP, ICPCS e ICPNg foram menores que os respectivos comprimentos médios dos demais intervalos, seguidos dos intervalos ICA e BCa. Note ainda que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os casos; por exemplo, para $n = 10$ e $\gamma = 1\%$, os comprimentos médios dos intervalos ICA e ICBt foram 0.3738 e 0.5696, respectivamente.

Observe na Tabela 4.13 que, similarmente ao que acontece na Tabela 4.9, os intervalos ICCS, ICNg e ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, seguidos do intervalo bootstrap BCa. Observe ainda nas Tabelas 4.12 e 4.13 que, da mesma forma que para $\alpha = 0.1$, os intervalos ICA, ICP e BCa apresentaram resultados similares em “Cobertura”, “Com-

primento do Intervalo”, “% Esquerdo” e “% Direito”, o que nos leva a concluir que, quando $\alpha = 0.25$, a distribuição empírica de $\hat{\beta}$ e sua distribuição assintótica ainda são semelhantes, apresentando apenas pequenas diferenças nos percentis. Observe também na Tabela 4.13 que todos os intervalos de confiança são aproximadamente balanceados, já que as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito ” coincidem aproximadamente. Adicionalmente, à medida que o tamanho da amostra aumenta, as probabilidades de cobertura observadas de todos os intervalos aproximam-se da verdadeira probabilidade de cobertura nominal.

As Tabelas 4.14 e 4.15 apresentam os intervalos de confiança para o parâmetro $\alpha = 0.5$ considerando $\beta = 1.0$. Observe na Tabela 4.14 que, similarmente ao que acontece nas Tabelas 4.6 e 4.10, nenhum intervalo incluiu valores fora do espaço paramétrico de α . Além disso, observe que os limites inferiores e superiores dos intervalos do tipo assintótico ICA, ICCS e ICNg são muito parecidos. Note ainda que os comprimentos médios destes intervalos também estão próximos, sendo o comprimento médio do intervalo ICA levemente inferior em todos os casos. Da mesma forma, os intervalos bootstrap do tipo ICP, ICPCS e ICPNg também apresentaram resultados similares. Observe ainda que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura; por exemplo, para tamanho de amostra $n = 10$ e nível de cobertura de 99%, os comprimentos médios dos intervalos ICA e ICBt foram 0.5302 e 0.9840, respectivamente. Ou seja, em amostras de tamanho pequeno, a estimativa intervalar através do intervalo bootstrap do tipo ICBt é consideravelmente imprecisa.

Observe na Tabela 4.15 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.7 e 4.11, os intervalos de confiança do tipo assintótico ICCS, ICNg e bootstrap do tipo ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, seguidos do intervalo BCa. Note também que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou o melhor balanceamento dentre todos os intervalos, pois as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente. Observe ainda que os intervalos bootstrap do tipo ICP, ICPCS e ICPNg foram altamente não-balanceados, já que as probabilidades observadas “% Direito” são muito superiores às probabilidades observadas “% Esquerdo”; por exemplo, para o nível nominal

de cobertura de 90% e tamanho amostral $n = 40$, as probabilidades “% Esquerdo” e “% Direito” do intervalo ICP foram 1.42% e 16.12%, respectivamente. Adicionalmente, estes intervalos apresentaram as piores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura considerados.

As Tabelas 4.16 e 4.17 apresentam os resultados relativos aos intervalos de confiança para o parâmetro $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.5$. Observe na Tabela 4.16 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.8 e 4.12, nenhum intervalo incluiu valores fora do espaço paramétrico de β . Além disso, observe também que os intervalos bootstrap do tipo ICP, ICPCS e ICPNg apresentaram os menores comprimentos médios em todos os casos, seguidos dos intervalos ICA e BCa. Note ainda que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou, em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, os maiores comprimentos médios. Entretanto, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os comprimentos médios dos intervalos diminuem. Por exemplo, para o nível nominal de cobertura de 90%, os comprimentos médios dos intervalos estão em torno do valor 0.4933 para $n = 10$ e em torno do valor 0.2046 para $n = 60$.

Observe na Tabela 4.17 que, similarmente ao que acontece nas Tabelas 4.9 e 4.13, os intervalos ICCS, ICNg e ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os casos, seguidos do intervalo bootstrap BCa, sendo o intervalo bootstrap do tipo ICBt o mais balanceado em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura. Observe ainda nas Tabelas 4.16 e 4.17 que, da mesma forma que foi discutido anteriormente quando $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 0.25$, os intervalos ICA, ICP e BCa apresentaram resultados similares em “Cobertura”, “Comprimento do Intervalo”, “% Esquerdo” e “% Direito”, o que nos leva a concluir que quando $\alpha = 0.5$ a distribuição empírica de $\hat{\beta}$ e sua distribuição assintótica ainda são muito parecidas, apresentando apenas pequenas diferenças nos percentis

As Tabelas 4.18 e 4.19 apresentam os resultados relativos aos intervalos de confiança para o parâmetro $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$. Observe na Tabela 4.18 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.6, 4.10 e 4.14, nenhum intervalo considerado incluiu valores fora do espaço paramétrico de α . Note também que os comprimentos médios dos intervalos do tipo assintótico ICA, ICCS e ICNg estão próximos, sendo o comprimento médio do intervalo ICA levemente inferior em todos os casos. Observe ainda

que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura. A Tabela 4.19 revela que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.7, 4.11 e 4.15, os intervalos ICCS, ICNg e ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os casos, seguidos do intervalo BCa. Entretanto, o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou o melhor balanceamento, isto é, as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente. Adicionalmente, note também que, com o aumento do tamanho da amostra, as coberturas de todos os intervalos melhoram.

As Figuras 4.5 e 4.6 apresentam resultados sobre os intervalos de confiança para $\alpha = 0.75$ quando $n = 10$ e $n = 60$, respectivamente. Observe nestas figuras que todos os intervalos considerados para α são assimétricos, sendo o intervalo bootstrap do tipo ICBt o que apresentou maior assimetria dentre todos os intervalos. Além disso, observe que o intervalo do tipo assintótico ICCS foi o mais simétrico ao redor de α em todos os níveis nominais de cobertura considerados, seguido do intervalo assintótico ICNg. Entretanto, observe também que à medida que o tamanho da amostra aumenta a simetria torna-se mais acentuada para todos os intervalos de confiança.

As Tabelas 4.20 e 4.21 apresentam resultados referentes aos intervalos de confiança para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$. Observe na Tabela 4.20 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.8, 4.12 e 4.16, nenhum intervalo incluiu valores fora do espaço paramétrico de β . Observe ainda que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura. Observe também que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os comprimentos médios de todos os intervalos diminuem.

Observe na Tabela 4.21 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.9, 4.13 e 4.17, os intervalos ICCS, ICNg e ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os casos, seguidos do intervalo bootstrap BCa, sendo que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou o melhor balanceamento, pois as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura. Adicionalmente, à medida que o tamanho da amostra aumenta, as coberturas observadas de todos os intervalos de confiança aproximam-se da verdadeira probabilidade de cobertura nominal.

Tabela 4.18: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Limite Inferior			Limite Superior			Comprimento do Intervalo					
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.4353	0.5323	0.5999	0.6290	0.9418	0.9064	0.8703	0.8512	0.5065	0.3742	0.2704	0.2223
	ICCS	0.4702	0.5536	0.6120	0.6374	1.0174	0.9428	0.8878	0.8626	0.5471	0.3892	0.2758	0.2252
	ICNg	0.4837	0.5603	0.6153	0.6396	1.0464	0.9541	0.8927	0.8657	0.5628	0.3939	0.2773	0.2260
	ICP	0.3978	0.5152	0.5911	0.6228	0.8432	0.8587	0.8482	0.8372	0.4453	0.3435	0.2571	0.2143
	ICPCS	0.4285	0.5353	0.6028	0.6311	0.9123	0.8938	0.8655	0.8486	0.4837	0.3585	0.2627	0.2175
	ICPNg	0.4420	0.5423	0.6063	0.6334	0.9369	0.9038	0.8699	0.8514	0.4948	0.3616	0.2637	0.2180
	ICBt	0.5634	0.6033	0.6375	0.6545	1.2277	1.0103	0.9155	0.8800	0.6643	0.4070	0.2780	0.2255
	BCa	0.5043	0.5781	0.6270	0.6482	0.9342	0.9299	0.8926	0.8694	0.4298	0.3517	0.2656	0.2212
5%	ICA	0.3868	0.4964	0.5740	0.6077	0.9903	0.9423	0.8962	0.8725	0.6035	0.4458	0.3222	0.2648
	ICCS	0.4178	0.5164	0.5856	0.6158	1.0698	0.9801	0.9142	0.8842	0.6519	0.4638	0.3287	0.2684
	ICNg	0.4298	0.5226	0.5888	0.6180	1.1004	0.9919	0.9192	0.8873	0.6706	0.4693	0.3304	0.2693
	ICP	0.3496	0.4814	0.5663	0.6024	0.8746	0.8878	0.8716	0.8573	0.5250	0.4063	0.3053	0.2548
	ICPCS	0.3764	0.5001	0.5774	0.6104	0.9466	0.9242	0.8894	0.8689	0.5701	0.4241	0.3120	0.2586
	ICPNg	0.3884	0.5068	0.5808	0.6126	0.9718	0.9345	0.8939	0.8718	0.5834	0.4277	0.3131	0.2591
	ICBt	0.5435	0.5838	0.6205	0.6392	1.4161	1.0837	0.9562	0.9101	0.8726	0.4999	0.3357	0.2708
	BCa	0.4633	0.5495	0.6059	0.6304	0.9689	0.9664	0.9224	0.8944	0.5056	0.4169	0.3165	0.2640
1%	ICA	0.2920	0.4264	0.5234	0.5661	1.0851	1.0123	0.9469	0.9141	0.7932	0.5859	0.4234	0.3481
	ICCS	0.3154	0.4435	0.5340	0.5737	1.1722	1.0530	0.9659	0.9264	0.8568	0.6095	0.4319	0.3527
	ICNg	0.3244	0.4488	0.5369	0.5757	1.2057	1.0656	0.9711	0.9296	0.8813	0.6168	0.4343	0.3540
	ICP	0.2576	0.4141	0.5169	0.5613	0.9302	0.9403	0.9145	0.8943	0.6726	0.5262	0.3976	0.3329
	ICPCS	0.2772	0.4300	0.5270	0.5687	1.0073	0.9792	0.9333	0.9065	0.7301	0.5491	0.4064	0.3378
	ICPNg	0.2862	0.4359	0.5301	0.5709	1.0335	0.9898	0.9379	0.9094	0.7473	0.5539	0.4078	0.3386
	ICBt	0.5116	0.5516	0.5917	0.6130	1.9994	1.2693	1.0496	0.9776	1.4878	0.7177	0.4579	0.3646
	BCa	0.3895	0.4959	0.5657	0.5963	0.9821	0.9908	0.9559	0.9295	0.5925	0.4949	0.3901	0.3332

Tabela 4.19: Estimativas intervalares para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	79.38	85.06	87.46	88.86	0.16	0.70	1.18	1.74	20.46	14.24	11.36	9.40
	ICCS	85.62	88.56	89.42	90.24	0.86	1.70	2.26	2.52	13.52	9.74	8.32	7.24
	ICNg	87.38	89.28	90.00	90.66	1.24	2.08	2.58	2.70	11.38	8.64	7.42	6.64
	ICP	65.34	76.82	82.20	85.18	0.20	0.74	1.40	1.68	34.46	22.44	16.40	13.14
	ICPCS	75.12	81.80	85.14	87.14	0.68	1.54	2.26	2.52	24.20	16.66	12.60	10.34
	ICPNg	77.96	83.34	85.86	87.50	1.12	1.84	2.46	2.70	20.92	14.82	11.68	9.80
	ICBt	83.78	86.22	87.78	88.94	9.66	7.72	6.20	5.82	6.56	6.06	6.02	5.24
	BCa	74.10	83.18	86.56	88.06	4.04	4.22	4.60	4.82	21.86	12.60	8.84	7.12
5%	ICA	84.36	90.20	92.58	93.92	0.02	0.10	0.40	0.36	15.62	9.70	7.02	5.72
	ICCS	89.58	93.00	94.06	94.98	0.06	0.28	0.62	0.64	10.36	6.72	5.32	4.38
	ICNg	90.88	93.88	94.56	95.12	0.12	0.34	0.74	0.74	9.00	5.78	4.70	4.14
	ICP	70.02	82.40	87.94	90.80	0.04	0.18	0.54	0.56	29.94	17.42	11.52	8.64
	ICPCS	79.74	87.20	90.54	92.48	0.12	0.46	0.92	0.88	20.14	12.34	8.54	6.64
	ICPNg	82.12	88.42	91.16	92.88	0.20	0.60	1.00	1.00	17.68	10.98	7.84	6.12
	ICBt	89.68	92.16	93.28	94.04	7.00	4.76	3.70	3.18	3.32	3.08	3.02	2.78
	BCa	79.52	88.94	92.34	93.14	1.44	2.10	2.26	2.32	19.04	8.96	5.40	4.54
1%	ICA	90.34	95.38	97.06	97.82	0.00	0.00	0.02	0.02	9.66	4.62	2.92	2.16
	ICCS	93.90	96.88	97.86	98.36	0.00	0.02	0.04	0.06	6.10	3.10	2.10	1.58
	ICNg	95.18	97.26	98.10	98.48	0.00	0.02	0.04	0.06	4.82	2.72	1.86	1.46
	ICP	77.80	89.22	94.04	95.92	0.00	0.04	0.06	0.06	22.20	10.74	5.90	4.02
	ICPCS	84.46	92.34	95.74	96.66	0.00	0.12	0.10	0.16	15.54	7.54	4.16	3.18
	ICPNg	86.72	93.20	96.16	96.96	0.00	0.14	0.10	0.18	13.28	6.66	3.74	2.86
	ICBt	95.48	97.02	98.14	98.22	3.84	2.10	1.24	0.92	0.68	0.88	0.62	0.86
	BCa	82.00	92.62	96.46	97.36	0.22	0.36	0.54	0.44	17.78	7.02	3.00	2.20

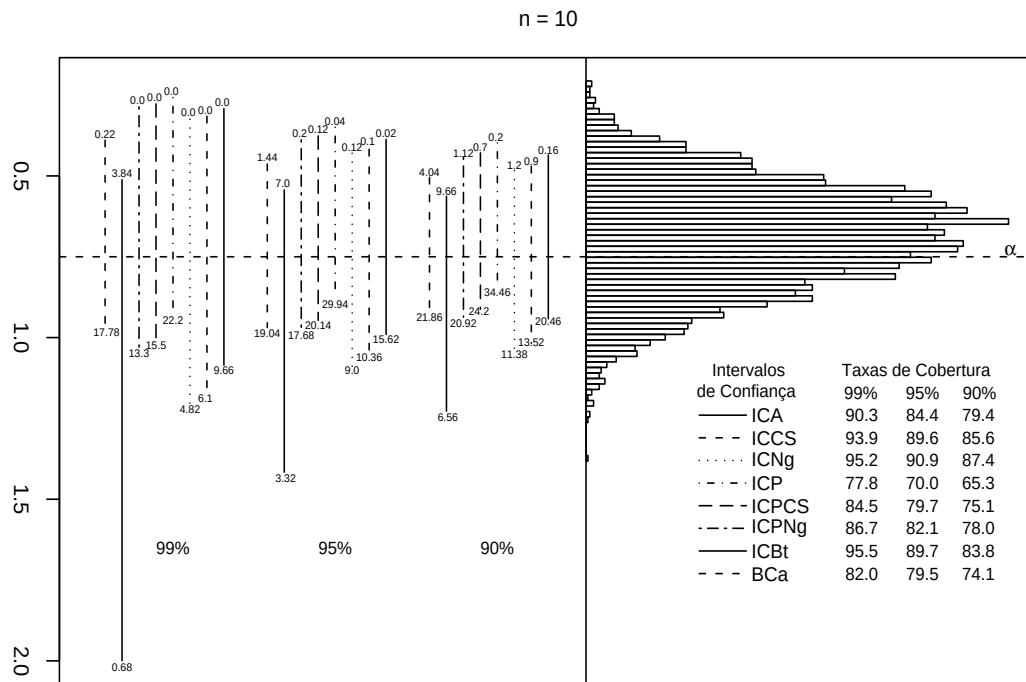


Figura 4.5: Estimação intervalar para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$.

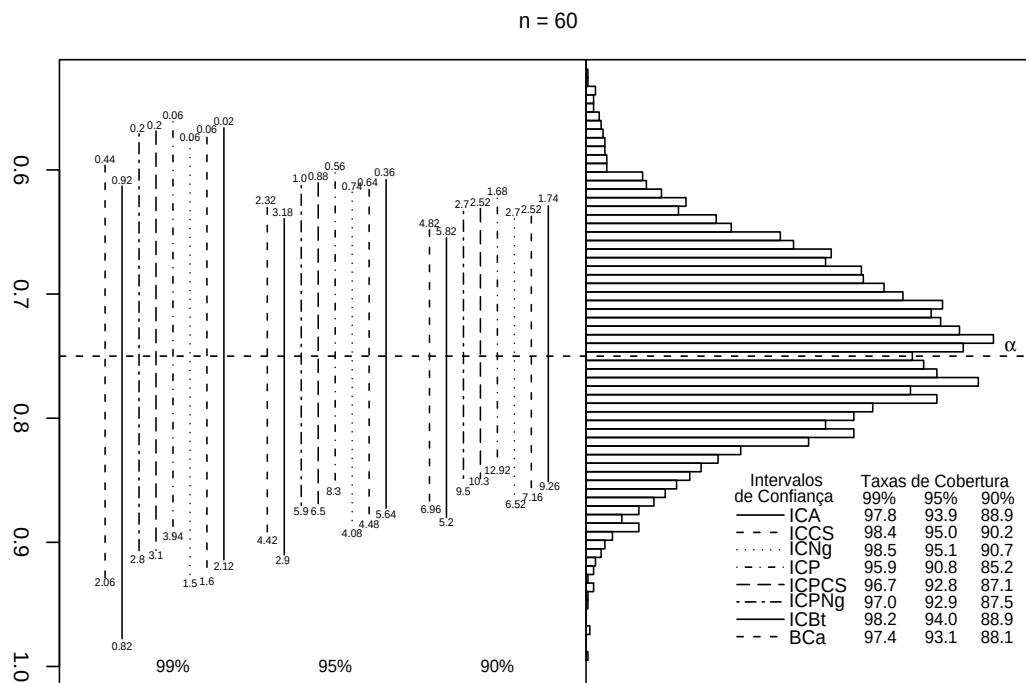


Figura 4.6: Estimação intervalar para $\alpha = 0.75$ considerando $\beta = 1.0$.

Tabela 4.20: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.6832	0.7637	0.8277	0.8568	1.3669	1.2632	1.1860	1.1504	0.6836	0.4995	0.3583	0.2936
	ICCS	0.6466	0.7466	0.8197	0.8517	1.3595	1.2570	1.1820	1.1475	0.7130	0.5104	0.3623	0.2958
	ICNg	0.6420	0.7471	0.8208	0.8527	1.3770	1.2649	1.1856	1.1498	0.7351	0.5178	0.3648	0.2971
	ICP	0.7382	0.7941	0.8431	0.8673	1.4253	1.2922	1.2005	1.1600	0.6871	0.4981	0.3575	0.2927
	ICPCS	0.7259	0.7859	0.8383	0.8640	1.4006	1.2788	1.1937	1.1555	0.6747	0.4929	0.3554	0.2915
	ICPNg	0.7296	0.7889	0.8402	0.8653	1.4079	1.2837	1.1964	1.1573	0.6783	0.4948	0.3562	0.2920
	ICBt	0.6689	0.7745	0.8378	0.8648	1.5349	1.3225	1.2114	1.1660	0.8660	0.5480	0.3736	0.3011
	BCa	0.7342	0.7921	0.8414	0.8662	1.4347	1.2970	1.2024	1.1617	0.7006	0.5049	0.3610	0.2956
5%	ICA	0.6177	0.7159	0.7933	0.8287	1.4323	1.3110	1.2203	1.1786	0.8146	0.5951	0.4270	0.3499
	ICCS	0.5783	0.6978	0.7850	0.8234	1.4278	1.3059	1.2167	1.1759	0.8496	0.6082	0.4317	0.3524
	ICNg	0.5715	0.6975	0.7859	0.8242	1.4474	1.3145	1.2206	1.1783	0.8759	0.6170	0.4347	0.3541
	ICP	0.6939	0.7579	0.8148	0.8430	1.5159	1.3530	1.2411	1.1921	0.8220	0.5951	0.4263	0.3491
	ICPCS	0.6832	0.7503	0.8103	0.8397	1.4912	1.3393	1.2341	1.1875	0.8080	0.5890	0.4238	0.3478
	ICPNg	0.6865	0.7531	0.8120	0.8410	1.4986	1.3443	1.2368	1.1894	0.8121	0.5912	0.4248	0.3483
	ICBt	0.5881	0.7283	0.8070	0.8398	1.6965	1.4017	1.2580	1.2018	1.1084	0.6734	0.4510	0.3620
	BCa	0.6871	0.7546	0.8120	0.8410	1.5321	1.3608	1.2443	1.1950	0.8450	0.6063	0.4322	0.3540
1%	ICA	0.4897	0.6224	0.7263	0.7737	1.5603	1.4045	1.2874	1.2335	1.0706	0.7822	0.5612	0.4598
	ICCS	0.4448	0.6022	0.7172	0.7680	1.5613	1.4015	1.2846	1.2312	1.1165	0.7993	0.5673	0.4632
	ICNg	0.4339	0.6006	0.7176	0.7686	1.5850	1.4115	1.2889	1.2339	1.1511	0.8109	0.5713	0.4653
	ICP	0.6137	0.6892	0.7600	0.7954	1.6977	1.4723	1.3193	1.2540	1.0841	0.7831	0.5593	0.4586
	ICPCS	0.6057	0.6827	0.7559	0.7924	1.6735	1.4581	1.3121	1.2492	1.0678	0.7754	0.5562	0.4568
	ICPNg	0.6082	0.6851	0.7575	0.7936	1.6810	1.4633	1.3150	1.2511	1.0728	0.7782	0.5574	0.4576
	ICBt	0.4009	0.6379	0.7493	0.7933	2.1517	1.5916	1.3635	1.2812	1.7508	0.9537	0.6142	0.4879
	BCa	0.6044	0.6803	0.7516	0.7881	1.7354	1.4933	1.3310	1.2633	1.1310	0.8129	0.5794	0.4753

Tabela 4.21: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	84.40	86.88	88.96	89.92	4.82	4.38	3.80	3.74	10.78	8.74	7.24	6.34
	ICCS	85.50	87.62	89.30	89.84	3.46	3.28	3.18	3.36	11.04	9.10	7.52	6.80
	ICNg	86.42	88.14	89.56	90.08	3.34	3.28	3.22	3.44	10.24	8.58	7.22	6.48
	ICP	83.56	85.98	88.76	89.36	7.88	6.84	5.34	5.22	8.56	7.18	5.90	5.42
	ICPCS	83.20	86.12	88.72	89.38	7.22	6.02	4.80	4.70	9.58	7.86	6.48	5.92
	ICPNg	83.38	86.24	88.82	89.48	7.32	6.28	5.00	4.84	9.30	7.48	6.18	5.68
	ICBt	88.94	89.14	89.54	90.12	5.14	5.30	5.12	4.98	5.92	5.56	5.34	4.90
	BCa	84.14	86.06	88.62	89.42	7.76	6.74	5.46	5.12	8.10	7.20	5.92	5.46
5%	ICA	89.58	92.48	93.72	94.62	2.64	1.82	1.86	1.80	7.78	5.70	4.42	3.58
	ICCS	90.34	92.88	93.84	94.76	1.84	1.22	1.50	1.46	7.82	5.90	4.66	3.78
	ICNg	91.22	93.44	94.08	94.88	1.80	1.20	1.54	1.52	6.98	5.36	4.38	3.60
	ICP	89.50	91.88	93.94	94.38	5.16	3.84	2.76	2.70	5.34	4.28	3.30	2.92
	ICPCS	89.34	91.80	93.74	94.26	4.62	3.46	2.58	2.60	6.04	4.74	3.68	3.14
	ICPNg	89.32	91.86	93.76	94.28	4.92	3.58	2.66	2.64	5.76	4.56	3.58	3.08
	ICBt	94.20	94.48	94.90	95.22	2.84	2.82	2.50	2.52	2.96	2.70	2.60	2.26
	BCa	89.50	92.20	93.78	94.54	5.00	3.78	2.78	2.68	5.50	4.02	3.44	2.78
1%	ICA	95.30	97.28	98.18	98.66	0.72	0.40	0.38	0.18	3.98	2.32	1.44	1.16
	ICCS	95.86	97.40	98.16	98.58	0.40	0.24	0.30	0.16	3.74	2.36	1.54	1.26
	ICNg	96.42	97.66	98.32	98.68	0.38	0.20	0.30	0.16	3.20	2.14	1.38	1.16
	ICP	95.38	97.64	98.20	98.48	2.24	1.10	0.86	0.60	2.38	1.26	0.94	0.92
	ICPCS	95.46	97.48	98.18	98.54	2.06	1.06	0.74	0.50	2.48	1.46	1.08	0.96
	ICPNg	95.52	97.58	98.14	98.52	2.10	1.06	0.84	0.52	2.38	1.36	1.02	0.96
	ICBt	98.18	98.80	98.78	98.84	1.02	0.58	0.66	0.50	0.80	0.62	0.56	0.66
	BCa	95.30	97.54	98.20	98.50	2.32	1.14	0.88	0.56	2.38	1.32	0.92	0.94

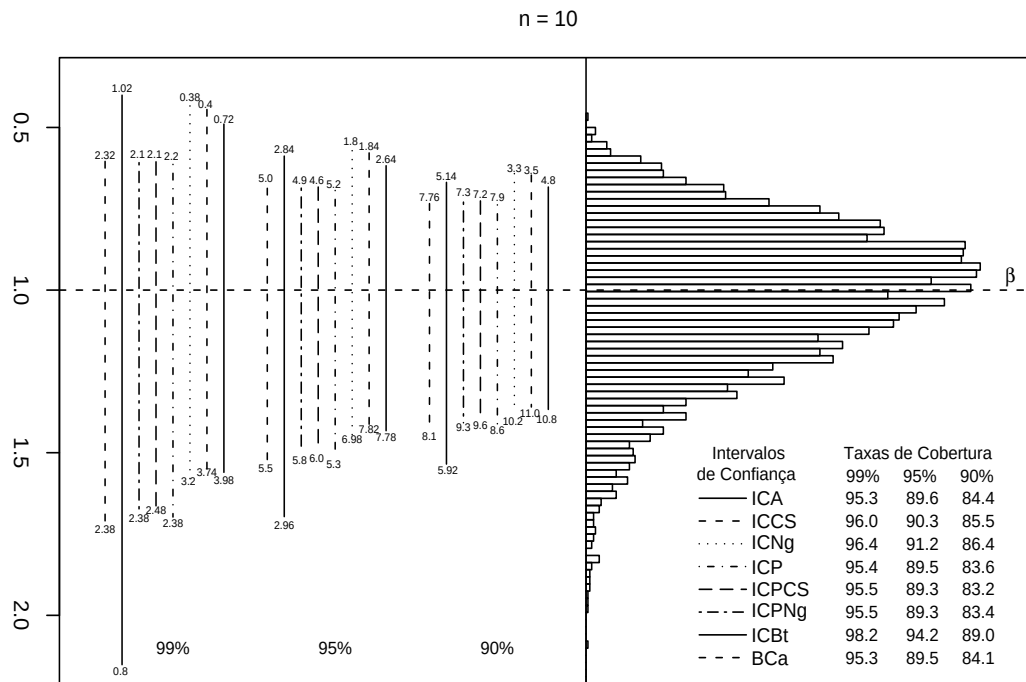


Figura 4.7: Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$.

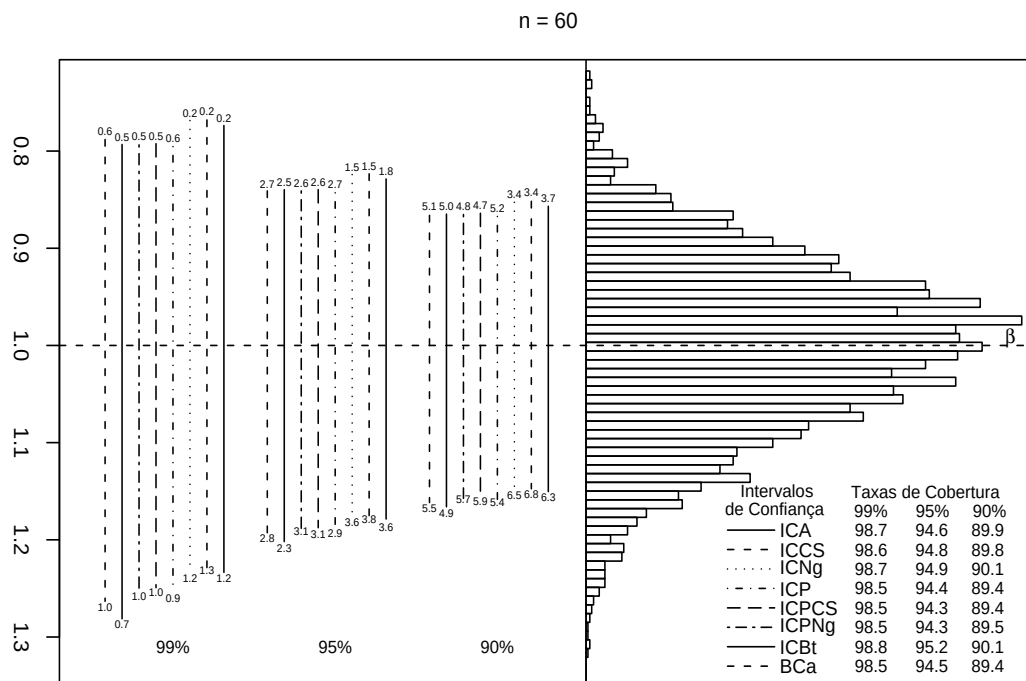


Figura 4.8: Estimação intervalar para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 0.75$.

As Figuras 4.7 e 4.8 apresentam os resultados referentes aos intervalos de confiança para $\beta = 1.0$ quando $n = 10$ e $n = 60$, respectivamente, considerando $\alpha = 0.75$. Observe nestas figuras que todos os intervalos de confiança considerados para β são assimétricos, principalmente quando o tamanho da amostra é pequeno. Além disso, observe que dentre os intervalos de confiança do tipo assintótico ICA, ICCS e ICNg, o intervalo ICCS foi o menos assimétrico em todos os níveis nominais de cobertura. Note também que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, a simetria em torno de β torna-se mais acentuada para todos os intervalos em todos os níveis nominais de cobertura considerados.

Ao compararmos as Figuras 4.7 e 4.8 com as Figuras 4.3 e 4.4, percebemos que, à medida que o valor do parâmetro de forma α da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica aumenta, os intervalos de confiança para β tornam-se mais assimétricos. Outro fato interessante a ser ressaltado ao observar as Tabelas 4.15 e 4.16 é que, ao contrário do que acontece quando $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.25$ e $\alpha = 0.5$, os intervalos de confiança ICA e ICP não apresentaram desempenhos similares em “Comprimento do Intervalo”, “% Esquerdo” e “% Direito”, o que nos leva a concluir que quando $\alpha = 0.75$, isto é, quando o valor do parâmetro α aumenta, a distribuição empírica de $\hat{\beta}$ e sua distribuição assintótica diferem de forma notável.

As Tabelas 4.22 e 4.23 apresentam resultados relativos aos intervalos de confiança para o parâmetro $\alpha = 1.0$ considerando $\beta = 1.0$. Observe na Tabela 4.22 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.6, 4.10, 4.14 e 4.18, o intervalo de confiança bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura. Por exemplo, para $n = 20$ e nível nominal de cobertura de 95%, os comprimentos médios dos intervalos ICA e ICBt foram 0.5936 e 0.6682, respectivamente. Adicionalmente, note que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os comprimentos médios dos intervalos diminuem; por exemplo, para o nível nominal de cobertura de 90%, os comprimentos médios dos intervalos estão em torno do valor 0.6893 para $n = 10$ e em torno do valor 0.2948 para $n = 60$.

Observe na Tabela 4.23 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.7, 4.11, 4.15 e 4.19, os intervalos de confiança ICCS, ICNg e ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, seguidos do intervalo BCa. Entretanto, o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou

melhor balanceamento, já que as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente. Note também que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, as probabilidades de cobertura de todos os intervalos aproximam-se da verdadeira probabilidade de cobertura nominal; por exemplo, para tamanho de amostra $n = 60$ e nível nominal de cobertura de 95%, as probabilidades de cobertura observadas dos intervalos do tipo assintótico ICCS e ICNg foram 94.96% e 95.08%, respectivamente.

As Tabelas 4.24 e 4.25 apresentam resultados referentes aos intervalos de confiança para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 1.0$. Observe na Tabela 4.24 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.8, 4.12, 4.16 e 4.20, nenhum intervalo incluiu valores fora do espaço paramétrico de β . Além disso, note que o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentou os maiores comprimentos médios em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais de cobertura, principalmente em amostras de tamanho pequeno, ou seja, quando o tamanho da amostra não é relativamente grande, estimativas intervalares através do intervalo bootstrap do tipo ICBt são altamente imprecisas; por exemplo, para tamanho de amostra $n = 10$ e nível nominal de cobertura de 99%, os comprimentos médios dos intervalos ICCS e ICBt foram 1.4034 e 2.3558, respectivamente. Entretanto, observe que os comprimentos médios de todos os intervalos diminuem à medida que o tamanho da amostra cresce.

Observe na Tabela 4.25 que, de forma análoga ao que acontece nas Tabelas 4.9, 4.13, 4.17 e 4.21, os intervalos de confiança do tipo assintótico ICCS, ICNg e o intervalo bootstrap do tipo ICBt apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos de amostra e níveis nominais cobertura considerados, seguidos do intervalo BCa, sendo que o intervalo ICBt apresentou melhor balanceamento, pois as probabilidades observadas “% Esquerdo” e “% Direito” coincidem aproximadamente em todos os casos. Vale ressaltar ainda que, como discutido anteriormente quando $\alpha = 0.75$, ao observarmos as Tabelas 4.24 e 4.25, os intervalos ICA e ICP não apresentaram desempenho similares em “Comprimento do Intervalo”, “% Esquerdo” e “% Direito”, o que nos leva a concluir que quando $\alpha = 1.0$, isto é, à medida que o valor do parâmetro α aumenta, a distribuição empírica de $\hat{\beta}$ e sua distribuição assintótica diferem de forma notável.

Ao compararmos as Tabelas 4.6, 4.10, 4.14, 4.18 e 4.22, percebemos que à medida que o valor do parâmetro α aumentou os comprimentos médios de todos os intervalos de con-

Tabela 4.22: Estimativas intervalares para $\alpha = 1.0$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Limite Inferior			Limite Superior			Comprimento do Intervalo					
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.5787	0.7087	0.7994	0.8382	1.2521	1.2068	1.1596	1.1344	0.6734	0.4982	0.3603	0.2962
	ICCS	0.6266	0.7380	0.8160	0.8498	1.3557	1.2569	1.1837	1.1502	0.7291	0.5188	0.3677	0.3003
	ICNg	0.6430	0.7460	0.8199	0.8524	1.3913	1.2704	1.1893	1.1537	0.7482	0.5244	0.3695	0.3012
	ICP	0.5264	0.6847	0.7870	0.8297	1.1200	1.1422	1.1294	1.1152	0.5936	0.4575	0.3423	0.2855
	ICPCS	0.5678	0.7121	0.8030	0.8410	1.2148	1.1905	1.1532	1.1309	0.6470	0.4784	0.3503	0.2899
	ICPNg	0.5849	0.7207	0.8072	0.8438	1.2444	1.2023	1.1583	1.1341	0.6595	0.4815	0.3511	0.2903
	ICBt	0.7497	0.8040	0.8499	0.8726	1.6419	1.3478	1.2207	1.1733	0.8923	0.5439	0.3708	0.3007
	BCa	0.6687	0.7696	0.8357	0.8641	1.2398	1.2374	1.1892	1.1586	0.5711	0.4678	0.3535	0.2945
5%	ICA	0.5142	0.6609	0.7648	0.8099	1.3166	1.2546	1.1941	1.1628	0.8024	0.5936	0.4293	0.3530
	ICCS	0.5568	0.6883	0.7807	0.8211	1.4255	1.3066	1.2189	1.1789	0.8688	0.6182	0.4382	0.3578
	ICNg	0.5714	0.6957	0.7845	0.8236	1.4629	1.3206	1.2247	1.1825	0.8916	0.6248	0.4403	0.3589
	ICP	0.4618	0.6396	0.7539	0.8025	1.1619	1.1809	1.1604	1.1419	0.7001	0.5412	0.4065	0.3394
	ICPCS	0.4977	0.6651	0.7691	0.8134	1.2606	1.2310	1.1850	1.1580	0.7628	0.5660	0.4159	0.3446
	ICPNg	0.5131	0.6733	0.7732	0.8161	1.2909	1.2430	1.1902	1.1612	0.7779	0.5697	0.4169	0.3451
	ICBt	0.7231	0.7779	0.8273	0.8523	1.8976	1.4462	1.2751	1.2134	1.1746	0.6682	0.4478	0.3611
	BCa	0.6133	0.7312	0.8075	0.8403	1.2863	1.2856	1.2288	1.1919	0.6730	0.5544	0.4213	0.3516
1%	ICA	0.3882	0.5677	0.6974	0.7544	1.4427	1.3478	1.2616	1.2183	1.0545	0.7801	0.5642	0.4639
	ICCS	0.4203	0.5912	0.7119	0.7649	1.5620	1.4037	1.2878	1.2351	1.1418	0.8125	0.5759	0.4703
	ICNg	0.4313	0.5976	0.7153	0.7672	1.6030	1.4188	1.2939	1.2389	1.1717	0.8212	0.5786	0.4717
	ICP	0.3387	0.5496	0.6880	0.7477	1.2354	1.2506	1.2175	1.1911	0.8966	0.7010	0.5295	0.4435
	ICPCS	0.3648	0.5712	0.7017	0.7577	1.3410	1.3041	1.2435	1.2080	0.9763	0.7329	0.5417	0.4503
	ICPNg	0.3764	0.5785	0.7056	0.7604	1.3726	1.3164	1.2488	1.2113	0.9963	0.7379	0.5431	0.4510
	ICBt	0.6809	0.7352	0.7889	0.8174	2.6897	1.6957	1.3999	1.3036	2.0089	0.9605	0.6110	0.4863
	BCa	0.5141	0.6595	0.7538	0.7948	1.3044	1.3178	1.2726	1.2381	0.7903	0.6583	0.5188	0.4433

Tabela 4.23: Estimativas intervalares para $\alpha = 1.0$ considerando $\beta = 1.0$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	79.02	84.84	87.34	88.82	0.16	0.72	1.18	1.72	20.82	14.44	11.48	9.46
	ICCS	85.48	88.30	89.26	90.32	0.92	1.76	2.32	2.54	13.60	9.94	8.42	7.14
	ICNg	87.12	89.12	89.98	90.46	1.20	2.04	2.54	2.72	11.68	8.84	7.48	6.82
	ICP	64.92	76.40	82.22	84.94	0.20	0.72	1.30	1.68	34.88	22.88	16.48	13.38
	ICPCS	74.74	81.70	85.10	87.06	0.64	1.52	2.18	2.48	24.62	16.78	12.72	10.46
	ICPNg	77.48	83.02	85.64	87.42	1.06	1.80	2.42	2.64	21.46	15.18	11.94	9.94
	ICBt	83.92	86.26	87.84	88.90	9.36	7.62	6.12	5.82	6.72	6.12	6.04	5.28
	BCa	73.72	83.00	86.50	87.78	3.74	4.14	4.52	4.86	22.54	12.86	8.98	7.36
5%	ICA	84.10	89.88	92.48	93.92	0.02	0.10	0.40	0.34	15.88	10.02	7.12	5.74
	ICCS	89.28	93.02	94.10	94.96	0.08	0.30	0.60	0.64	10.64	6.68	5.30	4.40
	ICNg	90.78	93.76	94.50	95.08	0.12	0.34	0.72	0.74	9.10	5.90	4.78	4.18
	ICP	69.28	82.06	87.80	90.66	0.04	0.18	0.48	0.54	30.68	17.76	11.72	8.80
	ICPCS	79.48	87.10	90.52	92.34	0.12	0.42	0.92	0.92	20.40	12.48	8.56	6.74
	ICPNg	81.74	88.14	91.00	92.74	0.16	0.50	0.96	0.98	18.10	11.36	8.04	6.28
	ICBt	89.72	92.26	93.26	94.04	6.86	4.60	3.74	3.20	3.42	3.14	3.00	2.76
	BCa	79.26	88.84	92.10	93.00	1.36	2.02	2.32	2.38	19.38	9.14	5.58	4.62
1%	ICA	90.16	95.26	97.02	97.72	0.00	0.00	0.02	0.02	9.84	4.74	2.96	2.26
	ICCS	93.76	96.82	97.86	98.36	0.00	0.02	0.04	0.06	6.24	3.16	2.10	1.58
	ICNg	94.90	97.16	98.06	98.48	0.00	0.02	0.04	0.06	5.10	2.82	1.90	1.46
	ICP	77.32	88.90	93.88	95.74	0.00	0.04	0.06	0.06	22.68	11.06	6.06	4.20
	ICPCS	84.28	92.16	95.68	96.66	0.00	0.10	0.10	0.14	15.72	7.74	4.22	3.20
	ICPNg	86.26	92.94	96.12	96.90	0.00	0.12	0.10	0.14	13.74	6.94	3.78	2.96
	ICBt	95.50	97.08	98.16	98.20	3.82	2.02	1.20	0.94	0.68	0.90	0.64	0.86
	BCa	81.68	92.44	96.42	97.44	0.14	0.34	0.52	0.40	18.18	7.22	3.06	2.16

Tabela 4.24: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 1.0$.

γ	Intervalo	Limite Inferior				Limite Superior				Comprimento do Intervalo			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	0.6032	0.7037	0.7837	0.8202	1.4791	1.3391	1.2378	1.1916	0.8759	0.6354	0.4540	0.3714
	ICCS	0.5578	0.6814	0.7729	0.8131	1.4540	1.3243	1.2296	1.1860	0.8962	0.6429	0.4567	0.3729
	ICNg	0.5533	0.6825	0.7744	0.8144	1.4741	1.3341	1.2342	1.1890	0.9208	0.6516	0.4598	0.3746
	ICP	0.6890	0.7518	0.8085	0.8370	1.5782	1.3869	1.2612	1.2072	0.8892	0.6351	0.4528	0.3701
	ICPCS	0.6711	0.7397	0.8013	0.8319	1.5359	1.3643	1.2500	1.1998	0.8649	0.6247	0.4487	0.3679
	ICPNg	0.6754	0.7433	0.8037	0.8336	1.5460	1.3711	1.2537	1.2023	0.8706	0.6278	0.4500	0.3686
	ICBt	0.6028	0.7274	0.8019	0.8339	1.7321	1.4273	1.2755	1.2148	1.1293	0.7000	0.4737	0.3809
	BCa	0.6851	0.7498	0.8066	0.8357	1.5887	1.3928	1.2639	1.2095	0.9036	0.6430	0.4573	0.3738
5%	ICA	0.5193	0.6428	0.7402	0.7846	1.5630	1.4000	1.2813	1.2272	1.0437	0.7572	0.5410	0.4426
	ICCS	0.4720	0.6198	0.7291	0.7774	1.5398	1.3859	1.2734	1.2217	1.0678	0.7661	0.5442	0.4444
	ICNg	0.4651	0.6200	0.7304	0.7785	1.5623	1.3965	1.2783	1.2248	1.0972	0.7765	0.5479	0.4463
	ICP	0.6366	0.7087	0.7744	0.8075	1.7082	1.4702	1.3153	1.2494	1.0716	0.7616	0.5410	0.4419
	ICPCS	0.6213	0.6975	0.7676	0.8026	1.6652	1.4470	1.3037	1.2418	1.0440	0.7494	0.5362	0.4392
	ICPNg	0.6251	0.7009	0.7698	0.8042	1.6758	1.4540	1.3076	1.2443	1.0506	0.7531	0.5377	0.4401
	ICBt	0.5054	0.6718	0.7647	0.8035	1.9647	1.5361	1.3377	1.2623	1.4592	0.8643	0.5731	0.4588
	BCa	0.6291	0.7048	0.7711	0.8051	1.7289	1.4805	1.3196	1.2534	1.0999	0.7758	0.5485	0.4483
1%	ICA	0.3553	0.5239	0.6552	0.7151	1.7270	1.5189	1.3663	1.2967	1.3717	0.9951	0.7110	0.5817
	ICCS	0.3042	0.4995	0.6436	0.7075	1.7076	1.5063	1.3589	1.2915	1.4034	1.0068	0.7152	0.5840
	ICNg	0.2927	0.4981	0.6443	0.7084	1.7347	1.5185	1.3644	1.2950	1.4420	1.0205	0.7200	0.5866
	ICP	0.5435	0.6282	0.7092	0.7505	1.9775	1.6374	1.4213	1.3320	1.4340	1.0092	0.7121	0.5815
	ICPCS	0.5328	0.6190	0.7031	0.7461	1.9349	1.6131	1.4092	1.3241	1.4021	0.9941	0.7060	0.5780
	ICPNg	0.5357	0.6219	0.7052	0.7476	1.9461	1.6207	1.4132	1.3268	1.4104	0.9988	0.7081	0.5792
	ICBt	0.2805	0.5638	0.6953	0.7474	2.6363	1.8037	1.4808	1.3685	2.3558	1.2398	0.7855	0.6211
	BCa	0.5347	0.6193	0.7003	0.7422	2.0304	1.6650	1.4366	1.3445	1.4957	1.0457	0.7363	0.6024

Tabela 4.25: Estimativas intervalares para $\beta = 1.0$ considerando $\alpha = 1.0$.

γ	Intervalo	Cobertura				% Esquerdo				% Direito			
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$
10%	ICA	84.26	87.02	88.82	89.66	4.32	3.84	3.46	3.60	11.42	9.14	7.72	6.74
	ICCS	84.56	87.26	88.70	89.50	2.98	2.70	2.86	3.08	12.46	10.04	8.44	7.42
	ICNg	85.68	87.76	88.96	89.84	2.84	2.80	2.90	3.12	11.48	9.44	8.14	7.04
	ICP	83.18	85.78	88.32	89.14	7.96	7.00	5.52	5.38	8.86	7.22	6.16	5.48
	ICPCS	82.64	85.80	88.38	88.84	7.16	6.00	4.80	4.88	10.20	8.20	6.82	6.28
	ICPNg	82.78	85.78	88.52	88.90	7.36	6.36	4.98	5.08	9.86	7.86	6.50	6.02
	ICBt	88.70	88.88	89.48	90.02	5.24	5.48	5.10	5.06	6.06	5.64	5.42	4.92
	BCa	83.80	86.06	88.28	89.18	7.92	6.78	5.54	5.40	8.28	7.16	6.18	5.42
5%	ICA	89.20	92.36	93.62	94.54	2.24	1.46	1.60	1.54	8.56	6.18	4.78	3.92
	ICCS	89.48	92.22	93.70	94.40	1.54	1.06	1.24	1.30	8.98	6.72	5.06	4.30
	ICNg	90.20	92.72	93.86	94.70	1.44	1.06	1.28	1.30	8.36	6.22	4.86	4.00
	ICP	89.04	91.90	93.72	94.30	5.42	3.86	2.78	2.80	5.54	4.24	3.50	2.90
	ICPCS	88.74	91.72	93.62	94.20	4.64	3.40	2.52	2.50	6.62	4.88	3.86	3.30
	ICPNg	88.96	91.68	93.64	94.24	4.82	3.56	2.60	2.60	6.22	4.76	3.76	3.16
	ICBt	93.96	94.34	94.70	95.12	2.80	2.80	2.64	2.40	3.24	2.86	2.66	2.48
	BCa	89.46	92.20	93.70	94.20	4.96	3.88	2.88	2.90	5.58	3.92	3.42	2.90
1%	ICA	94.70	97.06	97.94	98.64	0.54	0.22	0.32	0.10	4.76	2.72	1.74	1.26
	ICCS	94.76	97.00	97.88	98.56	0.34	0.14	0.22	0.08	4.90	2.86	1.90	1.36
	ICNg	95.44	97.20	98.02	98.64	0.32	0.14	0.22	0.08	4.24	2.66	1.76	1.28
	ICP	95.38	97.62	98.10	98.38	2.24	1.12	0.88	0.62	2.38	1.26	1.02	1.00
	ICPCS	95.32	97.46	98.00	98.42	2.08	1.04	0.82	0.50	2.60	1.50	1.18	1.08
	ICPNg	95.38	97.50	98.04	98.46	2.14	1.10	0.84	0.52	2.48	1.40	1.12	1.02
	ICBt	98.24	98.62	98.66	98.74	0.90	0.72	0.70	0.60	0.86	0.66	0.64	0.66
	BCa	95.36	97.58	98.24	98.50	2.28	1.16	0.90	0.56	2.36	1.26	0.86	0.94

fiança para o parâmetro α também aumentaram. Da mesma forma, ao compararmos as Tabelas 4.8, 4.12, 4.16, 4.20 e 4.24, observamos que à medida que o valor do parâmetro α aumentou os comprimentos médios de todos os intervalos de confiança para o parâmetro β também aumentaram. Isto é, tanto as estimativas intervalares para α quanto as estimativas intervalares para β tornam-se menos precisas à medida que o valor de α aumenta.

O fato do intervalo de confiança bootstrap BCa não ter apresentado melhor desempenho nas avaliações numéricas apresentadas anteriormente pode estar relacionado com o número de réplicas bootstrap B utilizadas, pois, como foi ressaltado na Seção 3.4.3, geralmente são empregadas entre 1000 e 2000 réplicas bootstrap nesse esquema bootstrap. Na Tabela 4.26, apresentamos os resultados de um experimento de Monte Carlo em que consideramos $R = 5000$, $\alpha = 0.25$, $\beta = 1.0$, $n = 40$ e $B = 600, 1200$ e 2000 , a fim de examinarmos o impacto do número de réplicas bootstrap sobre a inferência BCa. Observe nesta tabela que o desempenho do intervalo BCa melhora de forma significativa à medida que o número B de réplicas bootstrap aumenta, isto é, a cobertura empírica aproxima-se da nominal e o balanceamento do intervalo torna-se mais marcante. Entretanto, esta melhoria demanda um elevado custo computacional para grandes valores de B . Por exemplo, para obter os resultados com base em 2000 réplicas bootstrap, foi necessário realizar 10000000 (dez milhões) de maximizações não-lineares. Por outro lado, dado que os custos computacionais estão decrescendo rapidamente, nós acreditamos que as técnicas bootstrap serão cada vez mais atraentes do ponto de vista de aplicações empíricas.

De modo geral, de acordo com os resultados apresentados nesta seção, os intervalos de confiança assintóticos ICCS, ICNg e bootstrap do tipo ICBt apresentaram probabilidades de cobertura estimadas mais próximas dos níveis nominais de cobertura considerados, seguidos do intervalo de confiança bootstrap BCa. Porém, o intervalo ICBt apresentou balanceamento mais definido do que os intervalos assintóticos e bootstrap BCa. Entretanto, este intervalo apresentou comprimento médio maior que os comprimentos médios dos intervalos ICCS, ICNg e BCa, principalmente em amostras de tamanho pequeno (em torno de 20 observações). É necessário salientar que, diferentemente da comparação de estimadores pontuais, que possui critérios de avaliação bem definidos, como, por exemplo, o valor do erro quadrático médio estimado, escolher o melhor método de construção de intervalo de confiança muitas vezes depende da subjetividade do avaliador. Dessa forma,

Tabela 4.26: Estimativas intervalares do intervalo de confiança bootstrap BCa para $\alpha = 0.25$ e $\beta = 1.0$ considerando $n = 40$.

B	Parâmetro	γ	Cobertura	% Esquerdo	% Direito
600	α	10%	86.48	4.68	8.84
		5%	91.74	2.34	5.92
		1%	95.82	0.56	3.62
	β	10%	88.64	5.64	5.72
		5%	93.76	3.00	3.24
		1%	98.20	0.72	1.08
1200	α	10%	87.88	4.92	7.20
		5%	93.40	2.36	4.24
		1%	97.28	0.62	2.10
	β	10%	88.86	5.44	5.70
		5%	94.02	2.95	3.03
		1%	98.50	0.70	0.80
2000	α	10%	89.62	4.78	5.60
		5%	94.80	2.34	2.86
		1%	98.90	0.52	0.58
	β	10%	89.80	5.02	5.18
		5%	94.85	2.53	2.62
		1%	98.95	0.51	0.54

deixamos sob responsabilidade do pesquisador a escolha entre a construção de intervalos assintóticos (ICCS e ICNg) e intervalos bootstrap (ICBt e BCa) para os parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica em pesquisas aplicadas.

5.1 Introdução

No Capítulo 4 avaliamos a estimação pontual e intervalar dos parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. No presente capítulo, apresentaremos testes de hipóteses para o parâmetro de forma α desta distribuição considerando β como um parâmetro de perturbação. Consideraremos o teste da razão de verossimilhanças, cuja estatística de teste possui, assintoticamente, distribuição qui-quadrado sob a hipótese nula. Obteremos um fator de correção em amostras de tamanho finito para este teste assintótico. Também consideraremos uma versão bootstrap do teste da razão de verossimilhanças, a qual denominaremos teste da razão de verossimilhanças bootstrap.

5.2 Testes Estatísticos

Considere as hipóteses

$$\mathcal{H}_0: \alpha = \alpha^{(0)} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1: \alpha \neq \alpha^{(0)}. \quad (5.1)$$

5.2.1 Teste da Razão de Verossimilhanças

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^\top$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica de parâmetros $\theta = (\alpha, \beta)^\top$ com função densidade de

probabilidade $f(t; \theta)$ dada em (2.2), função de verossimilhança $L(\theta; \mathbf{t})$ e função de log-verossimilhança $\ell(\theta; \mathbf{t})$ dada em (2.3). A estatística da razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula em (5.1) é definida como

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\theta}^*; \mathbf{t})}{L(\hat{\theta}; \mathbf{t})},$$

em que $\hat{\theta}^* = (\alpha^{(0)}, \hat{\beta}^*)^\top$ e $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$ são os estimadores de máxima verossimilhança de θ correspondentes às maximizações de $L(\theta; \mathbf{t})$ segundo $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$, respectivamente.

Observe que Λ representa o quociente entre o máximo da verossimilhança restrito a $\alpha = \alpha^{(0)}$ e o máximo da verossimilhança irrestrito. Em geral, a distribuição exata da estatística Λ sob a hipótese nula é muito complicada. Por isso, utiliza-se uma transformação conveniente de Λ definida por

$$LR = -2 \log \Lambda.$$

Dessa forma, a estatística do teste da razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula em (5.1) pode ser escrita como

$$LR = 2\{\ell(\hat{\theta}; \mathbf{t}) - \ell(\hat{\theta}^*; \mathbf{t})\}. \quad (5.2)$$

Sob a hipótese nula, tem-se para o nosso problema específico que

$$LR \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_1^2. \quad (5.3)$$

Uma demonstração rigorosa de (5.3) para o caso geral pode ser encontrada em Rao (1973). Rejeitamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0$ se $LR > q_{1-\gamma}$, onde $q_{1-\gamma}$ representa o quantil $1 - \gamma$ da distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade e γ é o nível de significância adotado. Buse (1982) apresenta de forma bastante didática a interpretação geométrica do teste da razão de verossimilhanças para o caso de hipóteses simples.

5.2.2 Teste da Razão de Verossimilhanças Bootstrap

O uso de bootstrap para o teste da razão de verossimilhanças objetiva obter a distribuição da estatística LR diretamente da amostra aleatória observada $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)^\top$. Seguindo a metodologia bootstrap, geramos, supondo $\mathcal{H}_0$ verdadeira, B amostras bootstrap $(\mathbf{t}^{*1}, \dots, \mathbf{t}^{*B})$ a partir da amostra original $\mathbf{t}$ e, para cada amostra bootstrap, calculamos

$$LR^{*b} = 2\{\ell(\hat{\theta}^{*b}; \mathbf{t}^{*b}) - \ell(\hat{\theta}^{**b}; \mathbf{t}^{*b})\}, \quad (5.4)$$

$b = 1, 2, \dots, B$, onde $\hat{\theta}^{**b} = (\alpha^{(0)}, \hat{\beta}^{**b})^\top$ e $\hat{\theta}^{*b} = (\hat{\alpha}^{*b}, \hat{\beta}^{*b})^\top$ são os estimadores de máxima verossimilhança de θ correspondentes às maximizações de $\ell(\theta; \mathbf{t}^{*b})$ segundo $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$, respectivamente. O percentil $1 - \gamma$ de LR^{*b} é estimado pelo valor $\hat{q}_{1-\gamma}$, tal que

$$\frac{\#\{LR^{*b} \leq \hat{q}_{1-\gamma}\}}{B} = 1 - \gamma.$$

O teste da razão de verossimilhanças bootstrap consiste em rejeitar a hipótese nula $\mathcal{H}_0$ apresentada em (5.1) se

$$LR > \hat{q}_{1-\gamma}.$$

A quantidade $\hat{q}_{1-\gamma}$ é obtida como segue; após ordenarmos as B réplicas bootstrap LR^{*b} , a réplica $B \times (1 - \gamma)$ é o percentil estimado $\hat{q}_{1-\gamma}$, assumindo que $B \times (1 - \gamma)$ é inteiro. Se $B \times (1 - \gamma)$ não for inteiro, podemos utilizar o seguinte procedimento: seja $k = \lfloor (B + 1) \times \gamma \rfloor$ o maior inteiro $\leq (B + 1) \times \gamma$; então, a quantidade $\hat{q}_{1-\gamma}$ é dada pelo $(B + 1 - k)$ -ésimo elemento ordenado de LR^{*b} . Uma boa discussão sobre o uso de bootstrap em testes de hipóteses pode ser encontrada em Efron & Tibshirani (1993, cap. 16).

5.3 Correção de Bartlett

5.3.1 Introdução

Testes baseados em aproximações para grandes amostras são freqüentemente usados em Estatística, pois testes exatos nem sempre estão disponíveis. Esses testes são denominados “assintóticos de primeira ordem”, isto é, são baseados em valores críticos obtidos de uma distribuição nula limite conhecida. Um problema natural que surge é verificar se a aproximação de primeira ordem é adequada para a distribuição nula da estatística de teste em consideração. Os testes assintóticos cujas distribuições de referência são qui-quadrado mais conhecidos são: razão de verossimilhanças, score e Wald. As estatísticas destes três testes são equivalentes em grandes amostras e, em problemas regulares, convergem, sob a hipótese nula $\mathcal{H}_0$, para a distribuição χ_q^2 , onde q é o número de restrições impostas por $\mathcal{H}_0$. Em pequenas amostras, a aproximação de primeira ordem pode não ser satisfatória, podendo conduzir a taxas de rejeição sob a hipótese nula bastante distorcidas.

A primeira proposta de melhoria de testes estatísticos foi feita por Bartlett (1937). O autor considerou apenas a estatística da razão de verossimilhanças, calculando seu valor esperado segundo $\mathcal{H}_0$ até ordem n^{-1} . Uma correção para a estatística escore em problemas regulares foi obtida por Cordeiro & Ferrari (1991) e uma correção para a estatística Wald para o teste de restrições não-lineares foi obtida por Ferrari & Cribari-Neto (1993). Boas revisões sobre correção de Bartlett e correção tipo-Bartlett podem ser encontradas em Cribari-Neto & Cordeiro (1996) e em Cordeiro (1999).

5.3.2 Fator de Correção de Bartlett

Considere um modelo paramétrico $f(y; \theta)$ e seja $\ell(\theta; y)$ a respectiva função de log-verossimilhança, onde $\theta = (\theta_1^\top, \theta_2^\top)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecido de dimensão p . As dimensões de θ_1 e θ_2 são q e $p - q$, respectivamente. Deseja-se testar a hipótese nula composta $\mathcal{H}_0: \theta_1 = \theta_1^{(0)}$ versus $\mathcal{H}_1: \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}$, sendo θ_2 um vetor de parâmetros de perturbação e $\theta_1^{(0)}$ um vetor de constantes conhecidas. Seja LR a estatística da razão de verossimilhanças definida por

$$LR = 2\{\ell(\hat{\theta}; y) - \ell(\hat{\theta}^*; y)\}, \quad (5.5)$$

em que $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)^\top$ e $\hat{\theta}^* = (\theta_1^{(0)}, \hat{\theta}_2^*)^\top$ são os estimadores de máxima verossimilhança de $\theta = (\theta_1, \theta_2)^\top$ correspondentes às maximizações de $\ell(\theta; y)$ segundo $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_0$, respectivamente.

Bartlett (1937) calculou o valor esperado de LR segundo $\mathcal{H}_0$ até ordem n^{-1} como

$$E(LR) = q + b(\theta) + O(n^{-2}),$$

em que $b(\theta)$ é uma constante de ordem $O(n^{-1})$ que pode ser estimada segundo a hipótese nula $\mathcal{H}_0$. É possível mostrar que, sob a hipótese nula, a estatística da razão de verossimilhanças modificada

$$LR_c = \frac{LR}{1 + b(\theta)/q}$$

tem valor esperado q , exceto por termos de ordem $O(n^{-2})$. Adicionalmente, enquanto $P(LR \leq x) = P(\chi_q^2 \leq x) + O(n^{-1})$ tem-se o melhoramento $P(LR_c \leq x) = P(\chi_q^2 \leq x) + O(n^{-2})$. O fator de correção

$$c = 1 + \frac{b(\theta)}{q}$$

tornou-se conhecido como *fator de correção de Bartlett*, sendo usado para definir uma estatística da razão de verossimilhanças aperfeiçoada que tem distribuição, segundo a hipótese nula, mais próxima da distribuição χ_q^2 de referência do que a razão de verossimilhanças LR usual.

Em problemas regulares, Lawley (1956) deduziu uma fórmula geral para $b(\theta)$ em termos de cumulantes da log-verossimilhança, que são valores esperados de produtos de derivadas da função de log-verossimilhança. Adicionalmente, através de uma demonstração extremamente complicada, Lawley concluiu que os momentos de LR_c concordam com os correspondentes momentos da distribuição χ_q^2 exceto por termos de ordem n^{-2} . Este resultado é muito importante, pois mostra que a simples correção do primeiro momento de LR possibilita obter uma estatística de teste aperfeiçoada, cujos momentos (segundo $\mathcal{H}_0$) concordam, até termos de ordem n^{-1} , com os correspondentes momentos da distribuição qui-quadrado de referência.

Pode-se escrever LR na equação (5.5) do teste de $\mathcal{H}_0: \theta_1 = \theta_1^{(0)}$ versus $\mathcal{H}_1: \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}$ como

$$LR = 2\{\ell(\hat{\theta}; y) - \ell(\theta; y)\} - 2\{\ell(\hat{\theta}^*; y) - \ell(\theta; y)\},$$

onde $\ell(\theta; y)$ é a função de log-verossimilhança avaliada no verdadeiro vetor de parâmetros. Lawley (1956) demonstrou que

$$2E[\ell(\hat{\theta}; y) - \ell(\theta; y)] = p + \epsilon_p + O(n^{-2}),$$

onde ϵ_p é um termo de ordem n^{-1} dado por

$$\epsilon_p = \sum (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}), \quad (5.6)$$

em que $\sum$ é o somatório sobre todas as componentes do vetor θ , isto é, os índices r, s, t, u, v e w variam sobre todos os p parâmetros, e os λ 's são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_{rstu} &= \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left\{ \kappa_{rstu}/4 - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)} \right\}, \\ \lambda_{rstuvw} &= \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rtv} (\kappa_{suw}/6 - \kappa_{sw}^{(u)}) \right. \\ &\quad \left. + \kappa_{rtu} (\kappa_{svw}/4 - \kappa_{sw}^{(v)}) + \kappa_{rt}^{(v)} \kappa_{sw}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

a partir dos cumulantes κ 's definidos na Seção 1.7. Além disso, Lawley (1956) também demonstrou que

$$2E[\ell(\hat{\theta}^*; y) - \ell(\theta; y)] = p - q + \epsilon_{p-q} + O(n^{-2}),$$

onde ϵ_{p-q} é um termo de ordem n^{-1} sendo deduzido da equação (5.6) com o somatório $\sum$ estendendo-se apenas sobre as componentes de θ_2 , isto é, sobre os $p - q$ parâmetros de perturbação, uma vez que θ_1 está fixo em $\theta_1^{(0)}$.

Dessa forma, segundo a hipótese nula $\mathcal{H}_0$, o valor esperado da estatística da razão de verossimilhanças é dado por

$$E(LR) = q + \epsilon_p - \epsilon_{p-q} + O(n^{-2}).$$

Assim, pode-se melhorar a aproximação da estatística de teste pela distribuição χ_q^2 utilizando

$$LR_c = \frac{LR}{c}$$

ao invés de LR , onde o fator de correção de Bartlett é dado por

$$c = 1 + \frac{\epsilon_p - \epsilon_{p-q}}{q}, \quad (5.8)$$

isto é,

$$c = 1 + \frac{b(\theta)}{q},$$

em que

$$b(\theta) = \epsilon_p - \epsilon_{p-q}.$$

A estatística corrigida LR_c tem distribuição χ_q^2 até ordem $O(n^{-1})$ sob $\mathcal{H}_0$. O teste aperfeiçoado compara LR_c com o quantil apropriado da distribuição χ_q^2 de referência. A dificuldade do aperfeiçoamento reside no cálculo de ϵ_p e ϵ_{p-q} a partir das equações (5.6) e (5.7). Quando o fator de correção de Bartlett depender de parâmetros desconhecidos, estes devem ser substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança segundo $\mathcal{H}_0$, o que não afeta a ordem da aproximação resultante. O inconveniente no uso da fórmula de Lawley (5.8), na prática, é o cálculo do grande número de produtos de cumulantes em testes envolvendo três ou mais parâmetros.

Para a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica de parâmetros $\theta = (\alpha, \beta)^\top$, $p = 2$. Considerando as hipóteses dadas em (5.1), temos que $q = 1$. Dessa forma, a partir de (5.6), tem-se que

$$\epsilon_1 = \sum_{\beta} (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = \sum_{\alpha, \beta} (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}),$$

onde os somatórios $\sum_{\beta}$ e $\sum_{\alpha, \beta}$ se estendem sobre os parâmetros β e (α, β) , respectivamente. Dado que α e β são ortogonais, ao desenvolvermos ϵ_1 e ϵ_2 obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \lambda_{\beta\beta\beta\beta} - \lambda_{\beta\beta\beta\beta\beta}, \\ \epsilon_2 &= \lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha} + \lambda_{\alpha\alpha\beta\beta} + \lambda_{\beta\beta\alpha\alpha} + \lambda_{\beta\beta\beta\beta} - \lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} \\ &\quad - \lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta} - \lambda_{\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha} - \lambda_{\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha} - \lambda_{\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta} \\ &\quad - \lambda_{\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta} - \lambda_{\beta\beta\beta\beta\alpha\alpha} - \lambda_{\beta\beta\beta\beta\beta\beta}.\end{aligned}$$

Como

$$b(\theta) = \epsilon_2 - \epsilon_1,$$

temos que

$$\begin{aligned}b(\theta) &= \lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha} + \lambda_{\alpha\alpha\beta\beta} + \lambda_{\beta\beta\alpha\alpha} - \lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} \\ &\quad - \lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta} - \lambda_{\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha} - \lambda_{\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha} - \lambda_{\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta} \\ &\quad - \lambda_{\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta} - \lambda_{\beta\beta\beta\beta\alpha\alpha}.\end{aligned}$$

As quantidades necessárias para a obtenção de $b(\theta)$ estão dadas no Apêndice A. Após o cálculo dos λ 's e após alguma álgebra, é possível escrever $b(\theta)$ como

$$b(\theta) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{23}{12} + \frac{1 - 4\alpha^2 - 5\alpha^4/4 + 8(1 + \alpha^2)h(\alpha)/\alpha\sqrt{2\pi}}{2[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]^2} \right\}, \quad (5.9)$$

em que $h(\alpha)$ está dada no Apêndice A, expressão (A.17). Dessa forma, a estatística da razão de verossimilhanças corrigida pelo fator de correção de Bartlett para testar a hipótese nula apresentada em (5.1) é dada por

$$LR_c = \frac{LR}{1 + b(\theta)}, \quad (5.10)$$

em que LR está dado em (5.2) e $b(\theta)$, em (5.9).

Um fato interessante a ser ressaltado é que o fator corretivo $b(\theta)$ dado em (5.9) não depende do parâmetro de perturbação β . Isto é, o fator de correção de Bartlett depende apenas do valor do parâmetro α que está especificado em $\mathcal{H}_0$. A fim de verificar como o fator de correção muda com α , apresentamos na Figura 5.1 o gráfico de $b(\theta)$ versus α considerando $n = 1$. Observe nesta figura que $b(\theta)$ é maior que 3 para valores de α

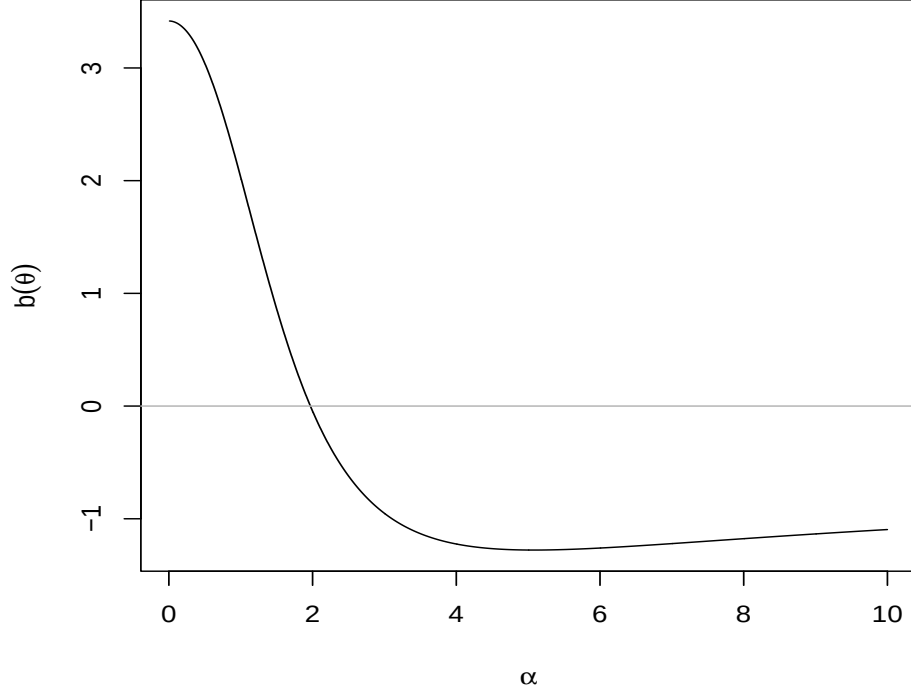


Figura 5.1: Comportamento de $b(\theta)$ para diferentes valores de α .

próximos de zero e decresce para valores de α no intervalo $(0, 5)$. Note também que, para valores de $\alpha > 2$, $b(\theta)$ assume valores negativos.

Como o fator de correção de Bartlett não depende do parâmetro de perturbação β , podemos obter LR_c dado em (5.10) a priori para diferentes hipóteses de interesse. A título de exemplo, suponha que estamos interessados em testar, para um tamanho de amostra n fixo, as seguintes hipóteses: (i) $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.1$ versus $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.1$; (ii) $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.25$ versus $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.25$; (iii) $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.5$ versus $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.5$; (iv) $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.75$ versus $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.75$; (v) $\mathcal{H}_0 : \alpha = 1.0$ versus $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 1.0$. A partir de (5.10) obtemos as respectivas estatísticas de teste corrigidas da razão de verossimilhanças LR_c para testar as hipóteses (i) até (v):

$$LR_c = \frac{LR}{1 + 3.4017/n}, \quad LR_c = \frac{LR}{1 + 3.3227/n}, \quad LR_c = \frac{LR}{1 + 3.0414/n},$$

$$LR_c = \frac{LR}{1 + 2.5924/n} \quad \text{e} \quad LR_c = \frac{LR}{1 + 2.0307/n}.$$

Tabela 5.1: Rejeição nula dos testes LR , LR_c e LR_b ($\mathcal{H}_0: \alpha = 0.75$).

n	LR				LR_c				LR_b			
	10%	5%	1%	0.5%	10%	5%	1%	0.5%	10%	5%	1%	0.5%
5	18.74	11.08	3.28	1.84	9.66	4.68	0.86	0.50	10.20	5.14	1.18	0.70
10	13.36	7.72	1.74	1.00	9.78	4.80	0.92	0.42	10.24	5.44	1.16	0.68
20	12.02	6.34	1.30	0.72	10.02	5.02	0.94	0.44	10.16	5.32	1.12	0.64
40	11.02	5.72	1.12	0.62	9.84	4.80	0.86	0.42	10.20	5.24	1.08	0.60
60	10.72	5.14	0.96	0.50	9.94	4.74	0.82	0.44	10.02	4.98	1.04	0.60

5.4 Avaliação Numérica

Através de simulações de Monte Carlo, avaliamos o desempenho dos testes da razão de verossimilhanças LR [cuja estatística é dada em (5.2)], razão de verossimilhanças corrigido pelo fator de Bartlett LR_c [cuja estatística é dada em (5.10)] e razão de verossimilhanças bootstrap LR_b [ver (5.4)] para o parâmetro de forma α da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica considerando β como um parâmetro de perturbação. Consideramos, nos estudos de simulação, $\alpha^{(0)} = 0.75$, isto é, testamos

$$\mathcal{H}_0: \alpha = 0.75 \quad \text{versus} \quad \mathcal{H}_1: \alpha \neq 0.75,$$

para os tamanhos de amostra $n = 5, 10, 20, 40$ e 60 e níveis de significância $\gamma = 10\%, 5\%, 1\%$ e 0.5% . Utilizamos 5000 réplicas de Monte Carlo ($R = 5000$) e 600 réplicas bootstrap ($B = 600$).

A Tabela 5.1 apresenta as probabilidades empíricas de rejeição da hipótese nula dos testes LR , LR_c e LR_b . Observe que o teste LR é extremamente liberal em pequenas amostras, isto é, suas taxas de rejeição estão muito acima dos níveis de significância considerados; por exemplo, para $n = 5$ e $\gamma = 10\%$, a taxa de rejeição deste teste foi 18.74%. Entretanto, à medida que o tamanho da amostra aumenta, tais taxas de rejeição aproximam-se dos verdadeiros níveis de significância considerados. Note que o teste da razão de verossimilhanças bootstrap LR_b apresentou desempenho bem superior ao do teste da razão de verossimilhanças LR ; por exemplo, para $n = 10$ e $\gamma = 5\%$, as taxas de rejeição dos testes LR e LR_b foram 7.72% e 5.44%, respectivamente. Adicionalmente, note que o teste da razão de verossimilhanças corrigido pelo fator de Bartlett LR_c também é claramente superior ao teste LR , pois em todos os tamanhos de amostras suas taxas de

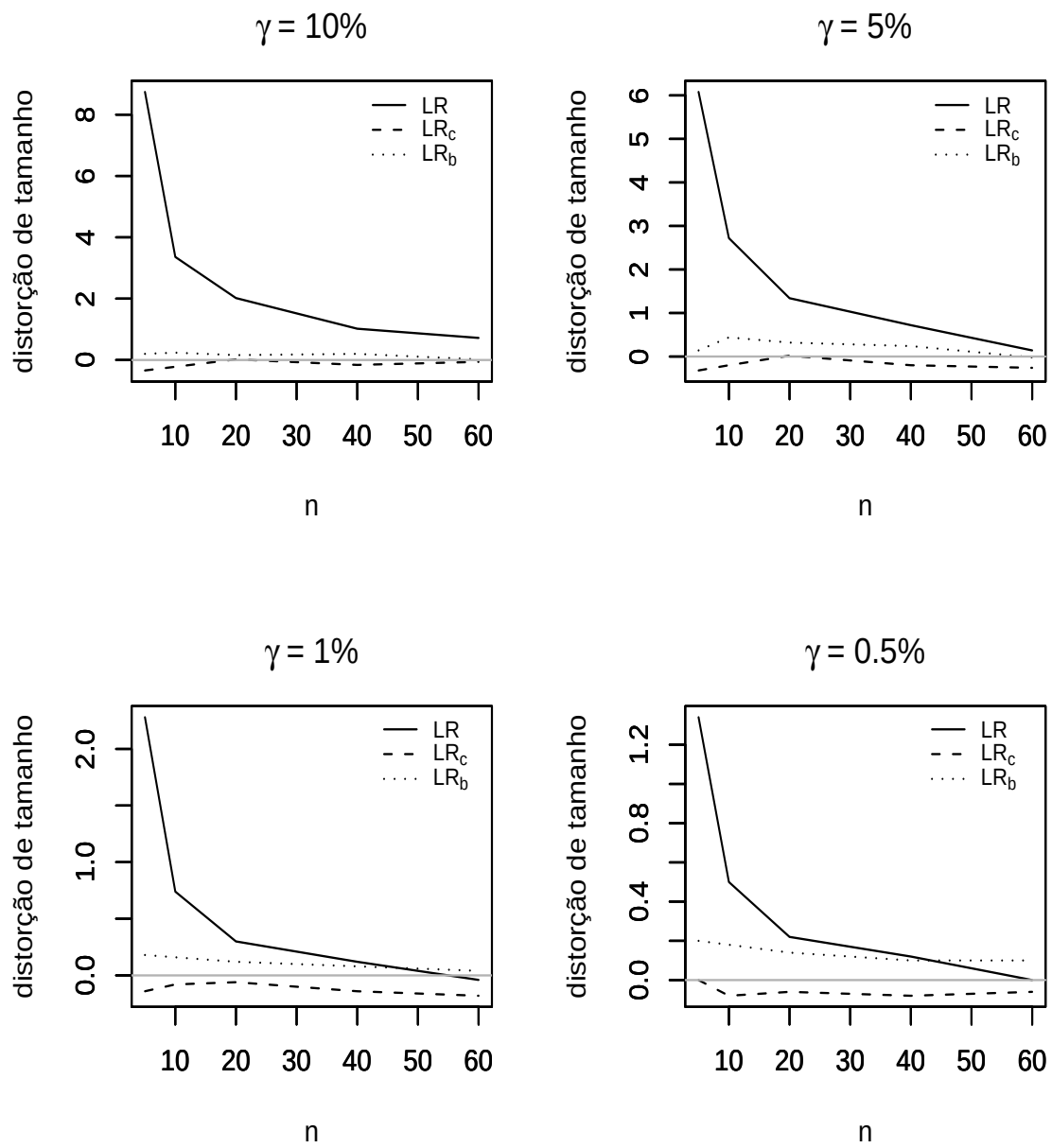


Figura 5.2: Distorções de tamanho dos testes LR , LR_c e LR_b .

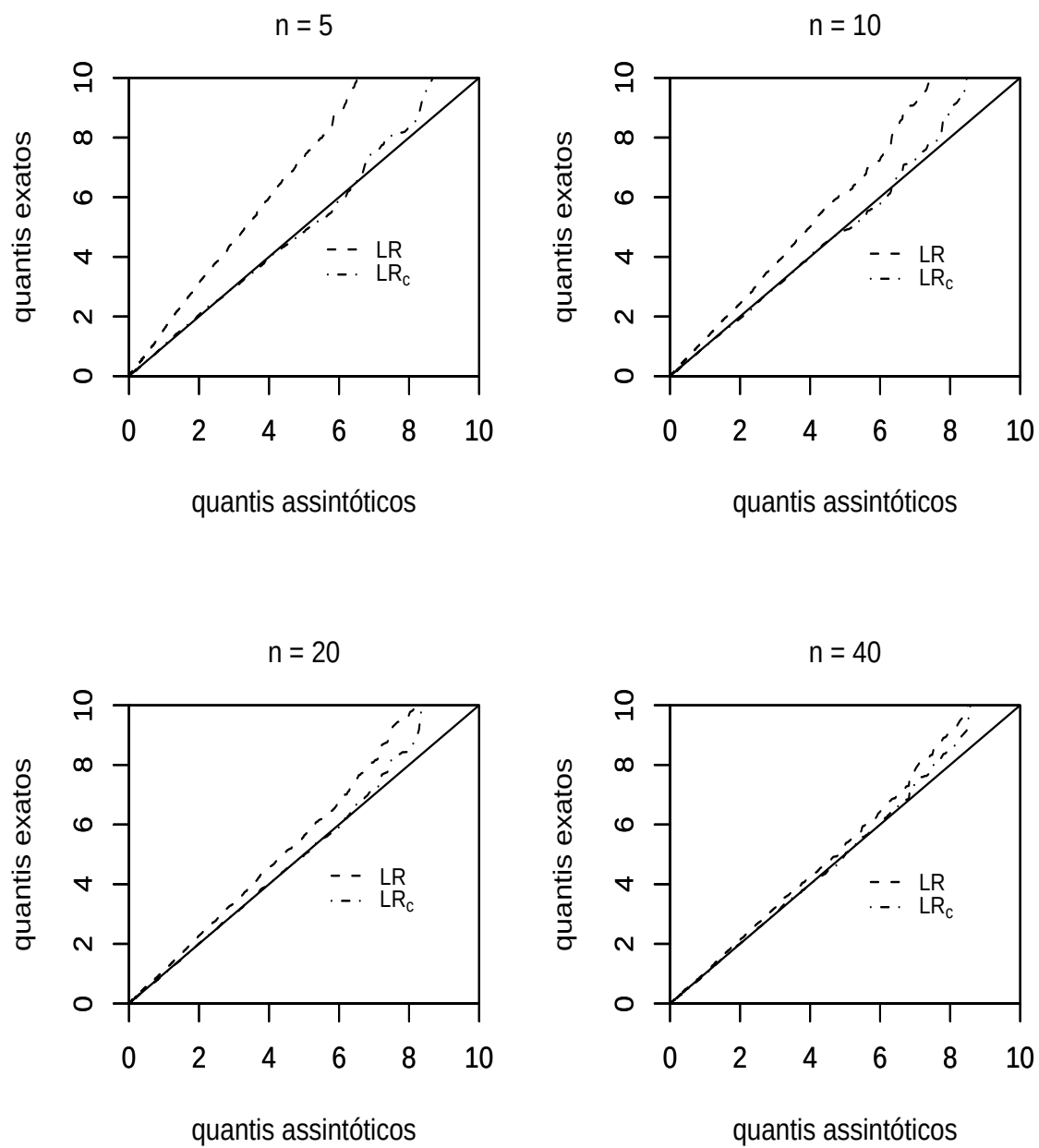


Figura 5.3: Quantis assintóticos versus quantis exatos das estatísticas de teste.

rejeição estão próximas dos níveis de significância adotados; por exemplo, para $n = 10$ e $\gamma = 1\%$, as taxas de rejeição dos testes LR e LR_c foram 1.74% e 0.92%, respectivamente. Note ainda que o teste da razão de verossimilhanças bootstrap LR_b não apresentou bom desempenho para os níveis de significância $\gamma = 0.5\%$ e 1% relativamente ao teste da razão de verossimilhanças corrigido pelo fator de Bartlett LR_c , que apresentou desempenho satisfatório em todos os tamanhos de amostra e níveis de significância; por exemplo, para $n = 20$ e $\gamma = 0.5\%$, as taxas de rejeição dos testes LR_c e LR_b foram 0.44% e 0.64%, respectivamente.

A Figura 5.2 apresenta as distorções de tamanho dos testes LR , LR_c e LR_b para os diferentes níveis de significância γ , onde estamos definindo a distorção de tamanho do teste da forma $\hat{\gamma} - \gamma$, isto é, tamanho real menos o nível nominal do teste. Observe que o teste da razão de verossimilhanças LR apresenta tamanho estimado bastante distorcido, principalmente em amostras de tamanho pequeno, seguido do teste da razão de verossimilhanças bootstrap LR_b . Note ainda que o teste da razão de verossimilhanças corrigido pelo fator de Bartlett LR_c apresenta distorções de tamanho próximas de zero em todos os tamanhos de amostra e níveis de significância considerados.

A Figura 5.3 apresenta gráficos dos quantis das estatísticas LR (linha tracejada) e LR_c (linha ponto traço) versus os quantis assintóticos (qui-quadrado com um grau de liberdade) para diferentes tamanhos amostrais. A linha cheia representa a identidade, ou seja, os quantis assintóticos são iguais aos quantis exatos. Observe que a estatística do teste da razão de verossimilhanças LR apresenta quantis bem superiores aos quantis da distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade, principalmente quando o tamanho da amostra é pequeno. Porém, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os quantis da estatística LR tendem aos quantis da distribuição qui-quadrado, ou seja, a linha tracejada aproxima-se da linha sólida. Note ainda que a estatística corrigida do teste da razão de verossimilhanças LR_c apresenta quantis bem próximos dos quantis da distribuição qui-quadrado em todos os tamanhos de amostra, evidenciando que a distribuição nula da estatística LR_c é bem aproximada pela distribuição assintótica utilizada no teste.

Nos estudos de simulação de Monte Carlo também consideramos um teste de hipóteses baseado no intervalo de confiança bootstrap BCa, tendo como regra de decisão: rejeite $\mathcal{H}_0$ se $\alpha^{(0)} \notin$ intervalo BCa de nível $1 - \gamma$. Entretanto, em pequenas amostras, o tamanho

estimado deste teste foi muito elevado. Por isso, não apresentamos os resultados correspondentes.

A partir dos resultados apresentados na Tabela 5.1 e nas Figuras 5.2 e 5.3, para hipóteses do tipo (5.1), recomendamos o teste LR_c , pois este teste apresentou o melhor desempenho em amostras de tamanho pequeno e moderado.

Neste capítulo, aplicaremos a metodologia apresentada nos capítulos anteriores a dois conjuntos de dados reais.

6.1 Tempos de Vida de Suportes

Os dados apresentados no Apêndice C, Tabela C.1, obtidos de McCool (1974), correspondem ao tempo de vida em horas de 10 suportes de um certo tipo. Estes dados foram usados como exemplo ilustrativo para a distribuição Weibull tri-paramétrica por Cohen, Whitten & Ding (1984).

As estimativas pontuais e intervalares estão apresentadas nas Tabelas 6.1 e 6.2, respectivamente. Na Tabela 6.1 apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β e suas versões corrigidas, juntamente com os respectivos erros-padrão assintóticos (entre parênteses). Observe que as estimativas corrigidas $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ excederam a estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e as estimativas corrigidas $\tilde{\beta}$, $\bar{\beta}$ e $\check{\beta}$ foram inferiores à estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$. Isto é, todas as correções apontam para mesma direção; elas indicam que a estimação por máxima verossimilhança subestima o parâmetro α e superestima o parâmetro β .

Observe na Tabela 6.2 que todos os intervalos de confiança para o parâmetro α apresentaram comportamentos distintos, sendo a diferença mais acentuada para o intervalo de

Tabela 6.1: Estimativas pontuais dos parâmetros; primeira aplicação.

Estimador	Parâmetros	
	α	β
$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	0.28249 (0.06317)	212.04910 (18.75291)
$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$	0.30395 (0.06796)	211.21988 (20.06633)
$\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$	0.30604 (0.06378)	210.80410 (19.44586)
$\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta})$	0.31388 (0.07018)	211.52811 (20.73594)

confiança bootstrap do tipo ICBt. Para o parâmetro β , os intervalos do tipo assintótico ICCS e ICNg foram similares. Da mesma forma, os intervalos bootstrap do tipo ICP, ICPCS e ICPNg também foram similares entre si.

Na Figura 6.1 apresentamos a distribuição empírica acumulada e a função de distribuição acumulada Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, dada em (2.1), estimada a partir das estimativas $(\hat{\theta}, \tilde{\theta}, \bar{\theta}$ e $\check{\theta})$ da Tabela 6.1. Observe nesta figura que as distribuições estimadas estão próximas entre si e acompanham a trajetória da distribuição empírica acumulada.

Cohen, Whitten & Ding (1984) utilizaram a distribuição Weibull tri-paramétrica¹ para descrever os dados da Tabela C.1. A fim de compararmos o ajuste da distribuição Weibull tri-paramétrica com o ajuste da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica aos dados desta tabela, apresentamos na Figura 6.2 estas duas distribuições estimadas e a distribuição empírica acumulada. Observe nesta figura que as distribuições estimadas (Weibull e Birnbaum-Saunders) apresentam comportamentos semelhantes em relação à

¹Se uma variável aleatória Y tem distribuição Weibull tri-paramétrica, sua densidade é dada por [Johnson, Kotz & Balakrishnan (1994)]

$$f(y) = \frac{a}{b} \left(\frac{y-c}{b} \right)^{a-1} \exp \left\{ - \left(\frac{y-c}{b} \right)^a \right\}, \quad y > c,$$

em que $a > 0, b > 0$ e $c > 0$. O parâmetro a é um parâmetro de forma, b é um parâmetro de escala e c é um parâmetro de locação. A função de distribuição acumulada da variável aleatória Y é dada por

$$F(y) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{y-c}{b} \right)^a \right\}.$$

Estudos sobre os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros a , b e c podem ser encontrados em Engelhardt & Bain (1977) e Kappenman (1985). As estimativas dos parâmetros a , b e c , correspondentes aos dados da Tabela C.1, foram obtidas seguindo a proposta de Kappenman (1985).

Tabela 6.2: Estimativas intervalares dos parâmetros; primeira aplicação.

Intervalo	α		β	
	90%	95%	90%	95%
ICA	(0.179; 0.386)	(0.158; 0.406)	(181.203; 242.894)	(175.294; 248.804)
ICCS	(0.192; 0.415)	(0.170; 0.437)	(178.213; 244.226)	(171.890; 250.549)
ICNg	(0.199; 0.429)	(0.176; 0.451)	(177.420; 245.635)	(170.886; 252.169)
ICP	(0.129; 0.381)	(0.122; 0.398)	(180.692; 236.508)	(176.900; 243.766)
ICPCS	(0.139; 0.410)	(0.131; 0.429)	(180.448; 235.183)	(176.772; 242.001)
ICPNg	(0.143; 0.423)	(0.136; 0.443)	(180.534; 235.664)	(176.821; 242.639)
BCa	(0.142; 0.428)	(0.136; 0.444)	(192.303; 268.775)	(189.460; 272.886)
ICBt	(0.209; 0.616)	(0.200; 0.650)	(193.672; 282.077)	(190.665; 294.741)

distribuição empírica acumulada. A vantagem de se utilizar a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica a estes dados reside na necessidade de se estimar apenas dois parâmetros desconhecidos ao invés de três.

Na Figura 6.3 apresentamos a densidade (2.1) construída a partir das estimativas de α e β apresentadas na Tabela 6.1. Note que as densidades obtidas usando os estimadores corrigidos $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ e $(\check{\alpha}, \check{\beta})$ estão próximas entre si. Observe ainda que a densidade obtida usando os estimadores de máxima verossimilhança $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ apresenta o ‘maior pico’; isto acontece por causa da subestimação do parâmetro de forma α da distribuição.

A partir das estimativas apresentadas na Tabela 6.1 podemos calcular as vidas médias estimadas correspondentes a cada uma delas. Ou seja, estimar o valor esperado da distribuição Birnbaum-Saunders a partir das estimativas consideradas. Dessa forma, as vidas médias correspondentes às estimativas $\hat{\theta}$, $\tilde{\theta}$, $\bar{\theta}$ e $\check{\theta}$ foram, 220.51, 220.98, 220.68 e 221.95, respectivamente. Observe que a vida média calculada usando $\check{\theta}$ é quase uma hora maior que a vida média calculada usando $\tilde{\theta}$.

6.2 Tempos de Vida de Alumínio

O conjunto de dados apresentado no Apêndice C, Tabela C.2, foi obtido de Birnbaum & Saunders (1969b) e corresponde ao número de ciclos até a falha de 101 tiras de lâmina de alumínio 6061-T6 cortadas paralelamente ao sentido do rolo e sob oscilação de 18 ciclos por segundo. Cada tira de alumínio foi submetida a uma pressão máxima de 31000 psi,

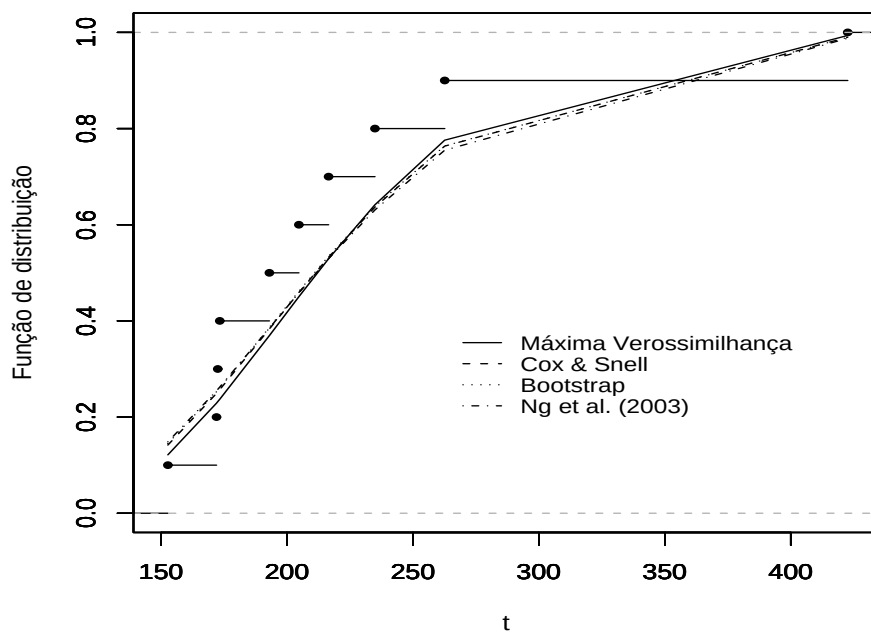


Figura 6.1: Distribuição empírica e distribuições estimadas; primeira aplicação.

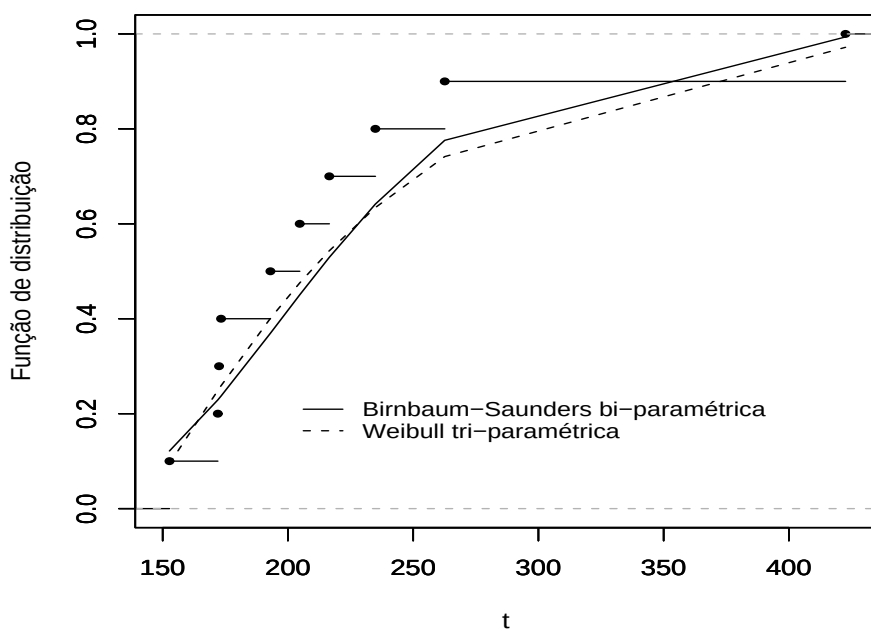


Figura 6.2: Distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica construída a partir das estimativas de máxima verossimilhança de α e β versus distribuição Weibull tri-paramétrica.

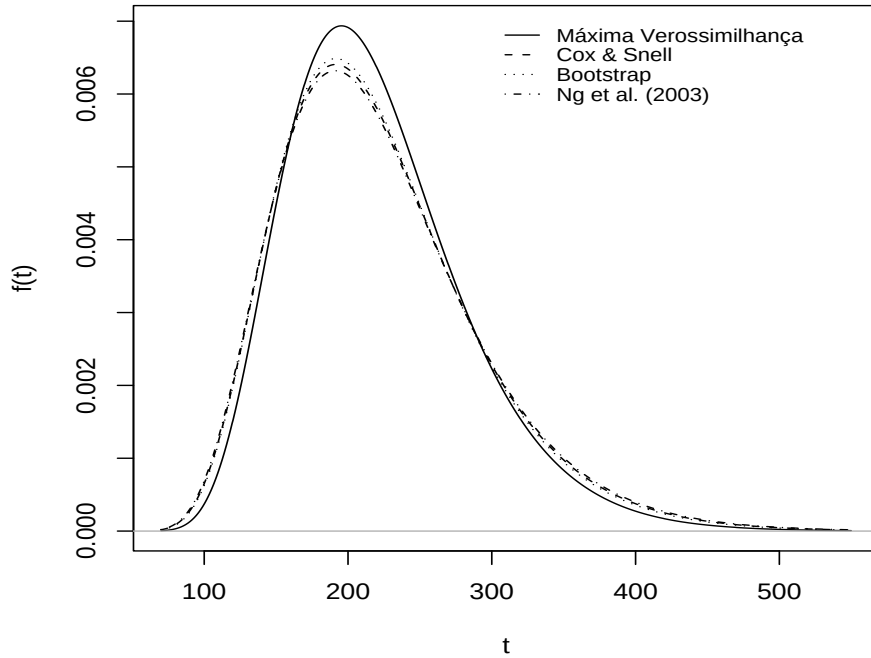


Figura 6.3: Densidades construídas com as estimativas dos parâmetros da primeira aplicação.

onde psi (Pounds per Square Inch) é uma medida de pressão.

As estimativas pontuais e intervalares estão apresentadas nas Tabelas 6.3 e 6.4, respectivamente. Na Tabela 6.3 apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β e suas versões corrigidas, juntamente com os respectivos erros-padrão assintóticos (entre parênteses). Observe que as estimativas do parâmetro α não diferem muito entre si, isto é, as estimativas corrigidas $\tilde{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ e $\check{\alpha}$ permanecem quase constantes relativamente à estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$. Da mesma forma, note que as estimativas do parâmetro β também não diferem muito entre si. Observe na Tabela 6.4 que, ao contrário do que aconteceu na Tabela 6.2, todos os intervalos de confiança foram similares, o que era de se esperar, pois os resultados da Tabela 6.2 correspondem a $n = 10$ observações, enquanto que os resultados da Tabela 6.4 correspondem a $n = 101$ observações.

A Tabela 6.5 contém estimativas dos parâmetros α e β baseadas em 20 observações selecionadas aleatoriamente da amostra de 101 observações, isto é, das observações listadas

Tabela 6.3: Estimativas pontuais dos parâmetros; segunda aplicação.

Estimador	Parâmetros	
	α	β
$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	0.17038 (0.01199)	131.81879 (2.22672)
$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$	0.17166 (0.01208)	131.79998 (2.24289)
$\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$	0.17154 (0.01196)	131.89084 (2.20471)
$\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta})$	0.17209 (0.01211)	131.80913 (2.24866)

Tabela 6.4: Estimativas intervalares dos parâmetros; segunda aplicação.

Intervalo	α		β	
	90%	95%	90%	95%
ICA	(0.150; 0.190)	(0.146; 0.193)	(128.156; 135.481)	(127.454; 136.183)
ICCS	(0.151; 0.191)	(0.148; 0.195)	(128.110; 135.489)	(127.404; 136.196)
ICNg	(0.152; 0.192)	(0.148; 0.195)	(128.110; 135.507)	(127.401; 136.216)
ICP	(0.146; 0.196)	(0.141; 0.201)	(128.045; 135.190)	(127.044; 135.652)
ICPCS	(0.147; 0.197)	(0.142; 0.203)	(128.028; 135.173)	(127.026; 135.624)
ICPNg	(0.147; 0.198)	(0.142; 0.203)	(128.037; 135.181)	(127.035; 135.637)
BCa	(0.149; 0.201)	(0.145; 0.205)	(128.455; 135.556)	(127.813; 136.179)
ICBt	(0.148; 0.198)	(0.143; 0.205)	(128.476; 135.611)	(128.015; 136.519)

na Tabela C.2 (Apêndice C). Isto foi feito para avaliar o impacto das correções em amostras finitas quando o tamanho da amostra é pequeno. Note que todas as correções indicam que a estimação pontual por máxima verossimilhança subestima α e superestima β , justamente como na primeira aplicação. Desta forma, as correções podem conter informações úteis quando o tamanho da amostra não é grande.

A Figura 6.4 apresenta a distribuição empírica acumulada e a função de distribuição acumulada Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, dada em (2.1), estimada a partir das estimativas $(\hat{\theta}, \tilde{\theta}, \bar{\theta} \text{ e } \check{\theta})$ da Tabela 6.3. Observe nesta figura que não há diferença notável entre as distribuições estimadas e a distribuição empírica acumulada, evidenciando que a distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica descreve os dados de forma satisfatória.

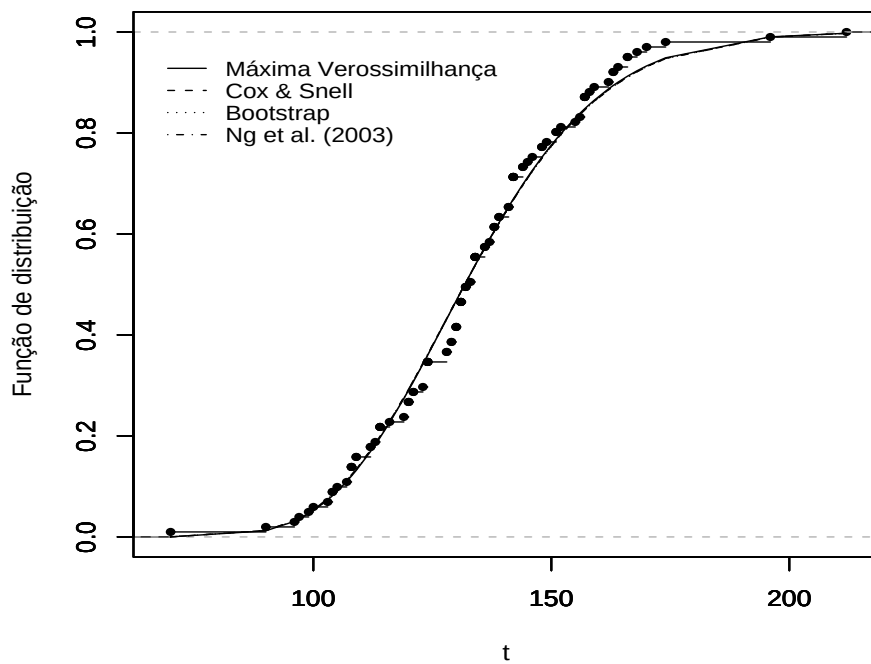


Figura 6.4: Distribuição empírica e distribuições estimadas; segunda aplicação.

Tabela 6.5: Estimativas dos parâmetros quando $n = 20$; segunda aplicação.

Estimador	Parâmetro	
	α	β
$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	0.14929 (0.02361)	129.06166 (4.29645)
$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$	0.15491 (0.02449)	128.99015 (4.45473)
$\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$	0.15652 (0.02412)	128.00445 (4.32573)
$\check{\theta} = (\check{\alpha}, \check{\beta})$	0.15715 (0.02485)	129.02183 (4.51981)

CAPÍTULO 7

Conclusões

No desenvolvimento deste trabalho, foram apresentadas características e propriedades da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Derivamos, para esta distribuição, uma expressão que permite remover o viés de segunda ordem das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α e β . Adicionalmente, apresentamos a metodologia de correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança por bootstrap. Um dos esquemas analíticos utilizados neste trabalho, sendo este método o desenvolvido por Firth (1993), não foi considerado nas simulações de Monte Carlo por causa da não convergência do método em amostras de tamanho menores que 60.

Os resultados das simulações de Monte Carlo realizadas mostraram que as correções de viés são eficazes quando os tamanhos de amostra são pequenos (em torno de vinte observações), sendo que as correções analítica de Cox & Snell (1968) e por bootstrap apresentaram os melhores desempenhos em termos de viés relativo. Dessa forma, para estimar os parâmetros (α, β) da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica, recomendamos a correção analítica de Cox & Snell (1968) ou a correção via bootstrap, visto que estas duas metodologias apresentam desempenhos favoráveis relativamente à estimação por máxima verossimilhança.

Ao analisarmos o comportamento das estimativas intervalares, observamos que, em geral, os intervalos de confiança assintóticos ICCS, ICNg e bootstrap do tipo ICBt apresentaram probabilidades de cobertura estimadas mais próximas dos níveis nominais de

cobertura considerados, seguidos do intervalo de confiança bootstrap BCa. Porém, o intervalo ICBt apresentou balanceamento mais definido do que os intervalos assintóticos e bootstrap BCa. Entretanto, este intervalo apresentou comprimento médio maior que os comprimentos médios dos intervalos ICCS, ICNg e BCa, principalmente em amostras de tamanho pequeno (em torno de vinte observações). É necessário salientar que, diferentemente da comparação de estimadores pontuais, que possui critérios de avaliação bem definidos, como, por exemplo, o erro quadrático médio, escolher o melhor método de construção de intervalo de confiança muitas vezes depende da subjetividade do avaliador. Dessa forma, deixamos sob responsabilidade do pesquisador a escolha entre a construção de intervalos assintóticos (ICCS e ICNg) e intervalos bootstrap (ICBt e BCa) para os parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica em aplicações empíricas.

Por fim, ao analisarmos o desempenho de testes estatísticos (LR , LR_c e LR_b) para o parâmetro de forma α da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica em hipóteses do tipo $\mathcal{H}_0: \alpha = \alpha^{(0)}$ versus $\mathcal{H}_1: \alpha \neq \alpha^{(0)}$, observamos que o teste da razão de verossimilhanças corrigido pelo fator de Bartlett LR_c apresentou o melhor desempenho em amostras de tamanho pequeno e moderado relativamente ao teste da razão de verossimilhanças e à sua versão bootstrap, conduzindo a taxas de rejeição sob $\mathcal{H}_0$ bastante satisfatórias. O fator de correção de Bartlett para esse teste foi derivado na presente dissertação. Os resultados numéricos recomendam fortemente o uso do teste corrigido (LR_c) em inferências sobre o parâmetro de forma da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica em pesquisas aplicadas.

APÊNDICE A

Cálculo dos Momentos

Neste apêndice, iremos obter os momentos das derivadas da função de log-verossimilhança para o cálculo dos vieses de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, e para o cálculo do fator de correção de Bartlett.

Função de log-verossimilhança

A função de log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica é dada, a menos de uma constante, por

$$\ell(\alpha, \beta) = -n \log(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right).$$

Derivadas da função de log-verossimilhança

Derivadas de primeira ordem:

$$\begin{aligned} U_{\alpha} &= \frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -n \log(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ -n \log \alpha - \frac{1}{2\alpha^2\beta} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\beta}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} + \frac{n}{\alpha^2} \right\} \\ &= -\frac{n}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^3\beta} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\beta}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
U_\beta &= \frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ -n \log(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{3/2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\
&= -\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{t_i + \beta} + \frac{1}{2\beta} \right] + \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \\
&= -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i + \beta} + \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Derivadas de segunda ordem:

$$U_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} + \frac{6n}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^4\beta} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{3\beta}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \tag{A.3}$$

$$U_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{1}{\alpha^3\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \tag{A.4}$$

$$U_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} = \frac{n}{2\beta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{\alpha^2\beta^3} \sum_{i=1}^n t_i. \tag{A.5}$$

Derivadas de terceira ordem:

$$U_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{\partial^3 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^3} = -\frac{2n}{\alpha^3} - \frac{24n}{\alpha^5} + \frac{12}{\alpha^5\beta} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{12\beta}{\alpha^5} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \tag{A.6}$$

$$U_{\alpha\alpha\beta} = \frac{\partial^3 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = \frac{3}{\alpha^4\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{3}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \tag{A.7}$$

$$U_{\alpha\beta\beta} = \frac{\partial^3 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta^2} = \frac{2}{\alpha^3\beta^3} \sum_{i=1}^n t_i, \tag{A.8}$$

$$U_{\beta\beta\beta} = \frac{\partial^3 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta^3} = -\frac{n}{\beta^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2}{(t_i + \beta)^3} + \frac{3}{\alpha^2\beta^4} \sum_{i=1}^n t_i. \tag{A.9}$$

Derivadas de quarta ordem:

$$U_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \frac{\partial^4 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^4} = \frac{6n}{\alpha^4} + \frac{120n}{\alpha^6} - \frac{60}{\alpha^6\beta} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{60\beta}{\alpha^6} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \tag{A.10}$$

$$U_{\alpha\alpha\alpha\beta} = \frac{\partial^4 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^3 \partial \beta} = -\frac{12}{\alpha^5\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{12}{\alpha^5} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}, \tag{A.11}$$

$$U_{\alpha\alpha\beta\beta} = \frac{\partial^4 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} = -\frac{6}{\alpha^4 \beta^3} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (\text{A.12})$$

$$U_{\alpha\beta\beta\beta} = \frac{\partial^4 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta^3} = -\frac{6}{\alpha^3 \beta^4} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (\text{A.13})$$

$$U_{\beta\beta\beta\beta} = \frac{\partial^4 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta^4} = -\frac{3n}{\beta^4} - \sum_{i=1}^n \frac{6}{(t_i + \beta)^4} - \frac{12}{\alpha^2 \beta^5} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (\text{A.14})$$

Cálculo de cumulantes

$$\kappa_{\alpha\alpha} = E(U_{\alpha\alpha}) = E\left(\frac{n}{\alpha^2} + \frac{6n}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^4 \beta} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{3\beta}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = -\frac{2n}{\alpha^2}, \quad (\text{A.15})$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = E(U_{\alpha\beta}) = E\left(-\frac{1}{\alpha^3 \beta^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\kappa_{\beta\beta} = E(U_{\beta\beta}) = E\left(\frac{n}{2\beta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{\alpha^2 \beta^3} \sum_{i=1}^n t_i\right) = -\frac{n}{\alpha^2 \beta^2} - n\mathcal{L}_{\beta\beta},$$

em que

$$\mathcal{L}_{\beta\beta} = \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^2} \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{3/2} \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right\} dt.$$

Fazendo uma mudança de variável na integral anterior da forma $t = \beta u$, $dt = \beta du$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta\beta} &= \int_0^\infty \frac{1}{(\beta u + \beta)^2} \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} [u^{-1/2} + u^{-3/2}] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u + u^{-1} - 2)\right\} \beta du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2(u + 1)^2} \frac{1}{2\alpha\sqrt{2\pi}} [u^{-1/2} + u^{-3/2}] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u + u^{-1} - 2)\right\} du \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{(u + 1)^2} [u^{-1/2} + u^{-3/2}] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u + u^{-1} - 2)\right\} du \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{(u + 1)^2} u^{-1/2} [1 + u^{-1}] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u + u^{-1} - 2)\right\} du \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{u^{-1/2}}{(u + 1)^2} \left(\frac{1 + u}{u}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u + u^{-1} - 2)\right\} du \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{u^{-3/2}}{(u + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u + u^{-1} - 2)\right\} du \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{u^{-3/2}}{(u + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(u^{1/2} - u^{-1/2})^2\right\} du. \end{aligned}$$

Fazendo novamente uma mudança de variável da forma $u = v^2$, $du = 2v dv$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\beta\beta} &= \frac{1}{2\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{v^{-3}}{(1+v^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(v-v^{-1})^2\right\} 2v dv \\ &= \frac{1}{\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{v^{-2}}{(1+v^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(v-v^{-1})^2\right\} dv \\ &= \frac{1}{\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{v^2(1+v^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(v-v^{-1})^2\right\} dv \\ &= \frac{1}{\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}} h(\alpha),\end{aligned}$$

em que

$$h(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{v^2(1+v^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}(v-v^{-1})^2\right\} dv.$$

Fazendo $\theta = 1/2\alpha^2$, tem-se que

$$\begin{aligned}h(\theta) &= \int_0^\infty \frac{1}{v^2(1+v^2)} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{1+v^2} \right] \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv - \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv.\end{aligned}$$

Sabemos de Abramowitz & Stegun (1965) que

$$\int_0^\infty \frac{1}{v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}.$$

Dessa forma,

$$h(\theta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} - g(\theta),$$

em que

$$g(\theta) = \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv.$$

Derivando $g(\theta)$ em relação a θ obtemos

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \frac{dg(\theta)}{d\theta} \\ &= \frac{d}{d\theta} \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} dv \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{1+v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} \right] dv \\ &= - \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2} \exp\{-\theta(v-v^{-1})^2\} (v-v^{-1})^2 dv.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
-g'(\theta) &= \int_0^\infty \frac{(v - v^{-1})^2}{1 + v^2} \exp\{-\theta(v - v^{-1})^2\} dv \\
&= \int_0^\infty \frac{v^2 - 2 + v^{-2}}{1 + v^2} \exp\{-\theta(v - v^{-1})^2\} dv \\
&= \int_0^\infty \frac{v^2}{1 + v^2} \exp\{-\theta(v - v^{-1})^2\} dv - 2g(\theta) + h(\theta) \\
&= m(\theta) - 2g(\theta) + h(\theta),
\end{aligned}$$

isto é,

$$-g'(\theta) = m(\theta) - 2g(\theta) + h(\theta),$$

em que

$$m(\theta) = \int_0^\infty \frac{v^2}{1 + v^2} \exp\{-\theta(v - v^{-1})^2\} dv.$$

Fazendo uma mudança de variável na integral $m(\theta)$ da forma $v = -1/w$, $dv = dw/w^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
m(\theta) &= \int_0^\infty \frac{w^{-2}}{1 + w^{-2}} \exp\{-\theta(w^{-1} - w)^2\} \frac{dw}{w^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{w^2(1 + w^2)} \exp\{-\theta(w^{-1} - w)^2\} dw \\
&= h(\theta).
\end{aligned}$$

Daí, voltando à expressão de $-g'(\theta)$, temos que

$$\begin{aligned}
-g'(\theta) &= h(\theta) - 2g(\theta) + h(\theta) \\
&= 2[h(\theta) - g(\theta)] \\
&= 2\left[h(\theta) + h(\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\right] \\
&= 4h(\theta) - \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}.
\end{aligned}$$

Podemos escrever $h(\theta)$ da forma

$$h(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{-1/2} - g(\theta).$$

Ao derivarmos $h(\theta)$ em relação a θ obtemos

$$\begin{aligned}
h'(\theta) &= \frac{dh(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{-1/2} - g(\theta) \right] \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\theta^{-3/2} + 4h(\theta) - \sqrt{\pi}\theta^{-1/2},
\end{aligned}$$

isto é,

$$h'(\theta) - 4h(\theta) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\theta^{-3/2} - \sqrt{\pi}\theta^{-1/2}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial acima por $e^{-4\theta}$, obtemos

$$e^{-4\theta}h'(\theta) - 4e^{-4\theta}h(\theta) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-4\theta}\theta^{-3/2} - \sqrt{\pi}e^{-4\theta}\theta^{-1/2}.$$

Observe que

$$e^{-4\theta}h'(\theta) - 4e^{-4\theta}h(\theta) = \frac{d}{d\theta}[h(\theta)e^{-4\theta}],$$

logo,

$$\frac{d}{d\theta}[h(\theta)e^{-4\theta}] = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-4\theta}\theta^{-3/2} - \sqrt{\pi}e^{-4\theta}\theta^{-1/2}. \quad (*)$$

Agora, para encontrarmos $h(\theta)$ precisamos resolver duas integrais em (*):

$$I_1 = \int e^{-4\theta}\theta^{-3/2}d\theta \quad \text{e} \quad I_2 = \int e^{-4\theta}\theta^{-1/2}d\theta.$$

Fazendo uma mudança de variável na integral I_2 da forma $\theta = z^2/8$, $d\theta = 2zdz/8 = zdz/4$, tem-se que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int e^{-z^2/2}z^{-1}\sqrt{8}\frac{zdz}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int e^{-z^2/2}dz \\ &= \sqrt{\pi} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz = \sqrt{\pi}\Phi(z) \\ &= \sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{8\theta}), \end{aligned}$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição acumulada normal padrão. Note que

$$\frac{d}{d\theta}[e^{-4\theta}\theta^{-1/2}] = -4e^{-4\theta}\theta^{-1/2} - \frac{1}{2}e^{-4\theta}\theta^{-3/2}.$$

Integrando ambos os lados da equação acima

$$\begin{aligned} e^{-4\theta}\theta^{-1/2} &= -4 \int e^{-4\theta}\theta^{-1/2}d\theta - \frac{1}{2} \int e^{-4\theta}\theta^{-3/2}d\theta \\ e^{-4\theta}\theta^{-1/2} &= -4\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{8\theta}) - \frac{1}{2} \int e^{-4\theta}\theta^{-3/2}d\theta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^{-4\theta}\theta^{-3/2}d\theta \\ &= -2e^{-4\theta}\theta^{-1/2} - 8\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{8\theta}). \end{aligned}$$

Logo, integrando ambos os lados da equação diferencial (*), obtemos como solução geral

$$\begin{aligned}
h(\theta)e^{-4\theta} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \int e^{-4\theta}\theta^{-3/2}d\theta - \sqrt{\pi} \int e^{-4\theta}\theta^{-1/2}d\theta + C \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} [-2e^{-4\theta}\theta^{-1/2} - 8\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{8\theta})] - \sqrt{\pi}[\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{8\theta})] + C \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-4\theta}\theta^{-1/2} + 2\pi\Phi(\sqrt{8\theta}) - \pi\Phi(\sqrt{8\theta}) + C \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}e^{-4\theta} + \pi\Phi(\sqrt{8\theta}) + C.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$h(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} + \pi\Phi(\sqrt{8\theta})e^{4\theta} + Ce^{4\theta}.$$

Isolando C na equação acima, temos

$$C = \frac{h(\theta)}{e^{4\theta}} - \frac{1}{2e^{4\theta}}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} - \pi\Phi(\sqrt{8\theta}).$$

Agora, tem-se que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} h(\theta) = 0.$$

Então,

$$C = -\pi.$$

Como $\theta = 1/2\alpha^2$, temos que

$$h(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \pi\Phi\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{2/\alpha^2} - \pi e^{2/\alpha^2}.$$

Logo,

$$h(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \pi e^{2/\alpha^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{2}{\alpha}\right) \right]. \quad (\text{A.17})$$

Então,

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta\beta} &= \mathbb{E}(U_{\beta\beta}) = -\frac{n}{\alpha^2\beta^2} - n\mathcal{L}_{\beta\beta} = -\frac{n[1 + \alpha^2\beta^2\mathcal{L}_{\beta\beta}]}{\alpha^2\beta^2} \\
&= -\frac{n\left[1 + \alpha^2\beta^2\frac{1}{\alpha\beta^2\sqrt{2\pi}}h(\alpha)\right]}{\alpha^2\beta^2} \\
&= -\frac{n[1 + \alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)]}{\alpha^2\beta^2}, \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

em que $h(\alpha)$ está dado em (A.17).

$$\kappa_{\alpha\alpha\alpha} = E(U_{\alpha\alpha\alpha}) = E\left(-\frac{2n}{\alpha^3} - \frac{24n}{\alpha^5} + \frac{12}{\alpha^5\beta} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{12\beta}{\alpha^5} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = \frac{10n}{\alpha^3}, \quad (\text{A.19})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha\beta} = E(U_{\alpha\alpha\beta}) = E\left(\frac{3}{\alpha^4\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{3}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\kappa_{\alpha\beta\beta} = E(U_{\alpha\beta\beta}) = E\left(\frac{2}{\alpha^3\beta^3} \sum_{i=1}^n t_i\right) = \frac{2n}{\alpha^3\beta^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta\beta\beta} &= E(U_{\beta\beta\beta}) = E\left(-\frac{n}{\beta^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2}{(t_i + \beta)^3} + \frac{3}{\alpha^2\beta^4} \sum_{i=1}^n t_i\right) \\ &= \frac{n}{2\beta^3} + \frac{3n}{\alpha^2\beta^3} + 2n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

em que

$$\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} = \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^3} \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{3/2} \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right\} dt.$$

Tem-se ainda que,

$$\kappa_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = E(U_{\alpha\alpha\alpha\alpha}) = E\left(\frac{6n}{\alpha^4} + \frac{120n}{\alpha^6} - \frac{60}{\alpha^6\beta} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{60\beta}{\alpha^6} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = -\frac{54n}{\alpha^4}, \quad (\text{A.23})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha\alpha\beta} = E(U_{\alpha\alpha\alpha\beta}) = E\left(-\frac{12}{\alpha^5\beta^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{12}{\alpha^5} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha\beta\beta} = E(U_{\alpha\alpha\beta\beta}) = E\left(-\frac{6}{\alpha^4\beta^3} \sum_{i=1}^n t_i\right) = -\frac{6n}{\alpha^4\beta^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad (\text{A.25})$$

$$\kappa_{\alpha\beta\beta\beta} = E(U_{\alpha\beta\beta\beta}) = E\left(-\frac{6}{\alpha^3\beta^4} \sum_{i=1}^n t_i\right) = -\frac{6n}{\alpha^3\beta^3} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta\beta\beta\beta} &= E(U_{\beta\beta\beta\beta}) = E\left(-\frac{3n}{\beta^4} - \sum_{i=1}^n \frac{6}{(t_i + \beta)^4} - \frac{12}{\alpha^2\beta^5} \sum_{i=1}^n t_i\right) \\ &= -\frac{9n}{\beta^4} - \frac{12n}{\alpha^2\beta^4} - 6nE\left[\frac{1}{(T + \beta)^4}\right] \\ &= -\frac{9n}{\beta^4} - \frac{12n}{\alpha^2\beta^4} - 6n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

em que

$$\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta} = \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^4} \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{3/2} \right] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right\} dt.$$

Derivadas de cumulantes

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{2n}{\alpha^2} \right] = \frac{4n}{\alpha^3}, \quad (\text{A.28})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[-\frac{2n}{\alpha^2} \right] = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [0] = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$\kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} = \frac{\partial \kappa_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} [0] = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$\kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial \kappa_{\beta\beta}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{n}{\alpha^2\beta^2} - n\mathcal{L}_{\beta\beta} \right] = \frac{2n}{\alpha^3\beta^2} - n\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\alpha)},$$

em que

$$\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\beta\beta}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^2} f(t) dt,$$

onde $f(t)$ é a densidade da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\beta\beta}}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^2} \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial \alpha} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^2} \frac{\partial \log f(t)}{\partial \alpha} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^2} U_\alpha f(t) dt \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{U_\alpha}{(T+\beta)^2} \right]. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{U_\alpha}{(T+\beta)^2} \right] &= -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha^3\beta} \mathbb{E} \left[\frac{T}{(T+\beta)^2} \right] + \frac{\beta}{\alpha^3} \mathbb{E} \left[\frac{1}{T(T+\beta)^2} \right] \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha^3\beta} A_1 + \frac{\beta}{\alpha^3} A_2, \end{aligned}$$

em que

$$A_1 = E\left[\frac{T}{(T + \beta)^2}\right] \quad \text{e} \quad A_2 = E\left[\frac{1}{T(T + \beta)^2}\right].$$

Observe que

$$A_1 = E\left[\frac{T}{(T + \beta)^2}\right] = E\left[\frac{1}{T + \beta} \left(1 - \frac{\beta}{T + \beta}\right)\right] = A_1^* - \beta \mathcal{L}_{\beta\beta},$$

onde

$$A_1^* = E\left[\frac{1}{T + \beta}\right].$$

Vamos calcular A_1^* a partir da função escore do parâmetro β , U_β , isto é, sob certas condições de regularidade, temos que

$$E(U_\beta) = 0.$$

Dessa forma,

$$E\left(-\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{T + \beta} + \frac{T}{2\alpha^2\beta^2} - \frac{1}{2\alpha^2T}\right) = 0,$$

isto é,

$$A_1^* = E\left[\frac{1}{T + \beta}\right] = \frac{1}{2\beta}.$$

Logo,

$$A_1 = A_1^* - \beta \mathcal{L}_{\beta\beta} = \frac{1}{2\beta} - \beta \mathcal{L}_{\beta\beta}.$$

Observe que (usando frações parciais)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t + \beta)^2} &= \frac{at + b}{(t + \beta)^2} + \frac{c}{t} \\ &= \frac{(at + b)t + c(t + \beta)^2}{t(t + \beta)^2} \\ &= \frac{at^2 + bt + ct^2 + 2c\beta t + c\beta^2}{t(t + \beta)^2}, \end{aligned}$$

o que conduz ao sistema

$$\begin{cases} c\beta^2 = 1, \\ b + 2c\beta = 0, \\ a + c = 0. \end{cases}$$

Ao resolvermos o sistema acima obtemos

$$a = -\frac{1}{\beta^2}, \quad b = -\frac{2}{\beta} \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{\beta^2}.$$

Dessa forma,

$$A_2 = \mathbb{E} \left[\frac{1}{T(T + \beta)^2} \right] = a \mathbb{E} \left[\frac{T}{(T + \beta)^2} \right] + b \mathbb{E} \left[\frac{1}{(T + \beta)^2} \right] + c \mathbb{E} \left[\frac{1}{T} \right].$$

Logo,

$$A_2 = -\frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2\beta} - \beta \mathcal{L}_{\beta\beta} \right] - \frac{2}{\beta} \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{1}{\beta^2} \beta^{-1} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) = \frac{1}{2\beta^3} - \frac{1}{\beta} \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^3}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\alpha)} = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^3} \right) \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha^3 \beta^2} + \frac{1}{2\alpha \beta^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)} &= \frac{2n}{\alpha^3 \beta^2} - n \mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\alpha)} = \frac{2n}{\alpha^3 \beta^2} - n \left[-\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^3} \right) \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha^3 \beta^2} + \frac{1}{2\alpha \beta^2} \right] \\ &= n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^3} \right) \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{n}{\alpha^3 \beta^2} - \frac{n}{2\alpha \beta^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Ainda,

$$\kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} = \frac{\partial \kappa_{\beta\beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{n}{\alpha^2 \beta^2} - n \mathcal{L}_{\beta\beta} \right] = \frac{2n}{\alpha^2 \beta^3} - n \mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)},$$

em que

$$\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\beta\beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^2} f(t) dt.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{(t + \beta)^2} f(t) dt = \int_0^\infty \left[\frac{1}{(t + \beta)^2} \frac{\partial}{\partial \beta} f(t) - \frac{2}{(t + \beta)^3} f(t) \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^2} \frac{\partial}{\partial \beta} f(t) dt - \int_0^\infty \frac{2}{(t + \beta)^3} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^2} \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial \beta} f(t) dt - 2 \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} = \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^2} \frac{\partial \log f(t)}{\partial \beta} f(t) dt - 2 \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t + \beta)^2} U_\beta f(t) dt - 2 \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} = \int_0^\infty \frac{U_\beta}{(t + \beta)^2} f(t) dt - 2 \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{U_\beta}{(T + \beta)^2} \right] - 2 \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} = A_3 - 2 \mathcal{L}_{\beta\beta\beta}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} A_3 &= \mathbb{E} \left[\frac{U_\beta}{(T + \beta)^2} \right] = -\frac{1}{2\beta} \mathcal{L}_{\beta\beta} + \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} + \frac{1}{2\alpha^2 \beta^2} \mathbb{E} \left[\frac{T}{(T + \beta)^2} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \mathbb{E} \left[\frac{1}{T(T + \beta)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2\beta} \mathcal{L}_{\beta\beta} + \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} + \frac{1}{2\alpha^2 \beta^2} \left[\frac{1}{2\beta} - \beta \mathcal{L}_{\beta\beta} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{1}{2\beta^3} - \frac{1}{\beta} \mathcal{L}_{\beta\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^3} \right] \\ &= -\frac{1}{2\beta} \mathcal{L}_{\beta\beta} + \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} - \frac{1}{4\beta^3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)} = -\frac{1}{2\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta} - \mathcal{L}_{\beta\beta\beta} - \frac{1}{4\beta^3}.$$

Então,

$$\kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} = \frac{2n}{\alpha^2\beta^3} - n\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)} = \frac{2n}{\alpha^2\beta^3} + \frac{n}{4\beta^3} + \frac{n}{2\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta} + n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}, \quad (\text{A.33})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha\alpha}^{(\alpha)} = \frac{\partial\kappa_{\alpha\alpha\alpha}}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[\frac{10n}{\alpha^3} \right] = -\frac{30n}{\alpha^4}, \quad (\text{A.34})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha\alpha)} = \frac{\partial^2\kappa_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \left[-\frac{2n}{\alpha^2} \right] = -\frac{12n}{\alpha^4}, \quad (\text{A.35})$$

$$\kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha\beta)} = \frac{\partial^2\kappa_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} [0] = 0, \quad (\text{A.36})$$

$$\kappa_{\alpha\alpha\beta}^{(\beta)} = \frac{\partial\kappa_{\alpha\alpha\beta}}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} [0] = 0, \quad (\text{A.37})$$

$$\kappa_{\alpha\beta\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial\kappa_{\alpha\beta\beta}}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[\frac{2n}{\alpha^3\beta^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] = -\frac{6n}{\alpha^4\beta^2} - \frac{n}{\alpha^2\beta^2}, \quad (\text{A.38})$$

$$\kappa_{\beta\alpha}^{(\beta\alpha)} = \frac{\partial^2\kappa_{\beta\alpha}}{\partial\beta\partial\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} [0] = 0, \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta\beta}^{(\beta\beta)} &= \frac{\partial^2\kappa_{\beta\beta}}{\partial\beta^2} = \frac{\partial\kappa_{\beta\beta}^{(\beta)}}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} \left[\frac{2n}{\alpha^2\beta^3} + \frac{n}{4\beta^3} + \frac{n}{2\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta} + n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} \right] \\ &= \frac{n}{2\beta^2}(\beta\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)} - \mathcal{L}_{\beta\beta}) + n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} - \frac{3n}{4\beta^4} - \frac{4n}{\alpha^2\beta^3}, \end{aligned}$$

em que

$$\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} = \frac{\partial\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^3} f(t) dt,$$

$$\kappa_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} = \frac{\partial\kappa_{\beta\beta\beta}}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} \left[\frac{n}{2\beta^3} + \frac{3n}{\alpha^2\beta^3} + 2n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} \right] = -\frac{3n}{2\beta^4} - \frac{9n}{\alpha^2\beta^4} + 2n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{1}{(t+\beta)^3} f(t) dt = \int_0^\infty \left[\frac{1}{(t+\beta)^3} \frac{\partial f(t)}{\partial\beta} - \frac{3}{(t+\beta)^4} f(t) \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^3} \frac{\partial f(t)}{\partial\beta} dt - 3\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} = \int_0^\infty \frac{1}{(t+\beta)^3} \frac{\partial \log f(t)}{\partial\beta} f(t) dt - 3\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} \\ &= \int_0^\infty \frac{U_\beta}{(t+\beta)^3} f(t) dt - 3\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{U_\beta}{(T+\beta)^3} \right] - 3\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}. \end{aligned}$$

O valor esperado acima pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{U_\beta}{(T+\beta)^3}\right] &= -\frac{1}{2\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} + \mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta} + \frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\mathbb{E}\left[\frac{T}{(T+\beta)^3}\right] - \frac{1}{2\alpha^2}\mathbb{E}\left[\frac{1}{T(T+\beta)^3}\right] \\ &= -\frac{1}{2\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} + \mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta} + \frac{1}{2\alpha^2\beta^2}A_4 - \frac{1}{2\alpha^2}A_5, \end{aligned}$$

em que

$$A_4 = \mathbb{E}\left[\frac{T}{(T+\beta)^3}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{(T+\beta)^2}\left(1 - \frac{\beta}{T+\beta}\right)\right] = \mathcal{L}_{\beta\beta} - \beta\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}.$$

Observe que (usando frações parciais)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t+\beta)^3} &= \frac{dt^2 + ct + b}{(t+\beta)^3} + \frac{a}{t} \\ &= \frac{dt^3 + ct^2 + bt + a(t+\beta)^3}{t(t+\beta)^3} \\ &= \frac{dt^3 + ct^2 + bt + at^3 + 3a\beta t^2 + 3a\beta^2 t + a\beta^3}{t(t+\beta)^3}, \end{aligned}$$

o que conduz ao sistema

$$\begin{cases} a\beta^3 = 1, \\ b + 3a\beta^2 = 0, \\ c + 3a\beta = 0, \\ d + a = 0. \end{cases}$$

Ao resolvermos o sistema acima obtemos

$$a = \frac{1}{\beta^3}, \quad b = -\frac{3}{\beta}, \quad c = -\frac{3}{\beta^2} \quad \text{e} \quad d = -\frac{1}{\beta^3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t+\beta)^3} &= \frac{1}{(t+\beta)^2}\left[-\frac{t^2}{\beta^3} - \frac{3t}{\beta^2} - \frac{3}{\beta}\right] + \frac{1}{\beta^3 t} \\ &= \frac{1}{\beta^3 t} - \frac{t^2}{\beta^3(t+\beta)^2} - \frac{3t}{\beta^2(t+\beta)^2} - \frac{3}{\beta(t+\beta)^2} \\ &= \frac{1}{\beta^3 t} - \frac{1}{\beta^3(t+\beta)} - \frac{1}{\beta^2(t+\beta)^2} - \frac{1}{\beta(t+\beta)^3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_5 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{T(T+\beta)^3}\right] \\ &= \frac{1}{\beta^3}\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\right] - \frac{1}{\beta^3}\mathbb{E}\left[\frac{1}{T+\beta}\right] - \frac{1}{\beta^2}\mathbb{E}\left[\frac{1}{(T+\beta)^2}\right] - \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\left[\frac{1}{(T+\beta)^3}\right] \\ &= \frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{2\beta^4} - \frac{1}{\beta^2}\mathcal{L}_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} = -\frac{1}{4\alpha^2\beta^4} - \frac{1}{4\beta^4} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\mathcal{L}_{\beta\beta} - \frac{1}{2\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} - 2\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta\beta}^{(\beta\beta)} &= \frac{n}{2\beta^2}(\beta\mathcal{L}_{\beta\beta}^{(\beta)} - \mathcal{L}_{\beta\beta}) + n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} - \frac{3n}{4\beta^4} - \frac{4n}{\alpha^2\beta^3} \\ &= -\frac{9n}{8\beta^4} - \frac{n}{4\alpha^2\beta^4} - \frac{4n}{\alpha^2\beta^3} - \frac{3n}{4\beta^2}\mathcal{L}_{\beta\beta} - \frac{n}{\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} + \frac{n}{\alpha^2\beta^2}\mathcal{L}_{\beta\beta} - 2n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta} \\ &= -\frac{n}{\beta^3}\left(\frac{4}{\alpha^2} + \frac{9}{8\beta} + \frac{1}{4\alpha^2\beta}\right) - \frac{n}{\beta^2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\mathcal{L}_{\beta\beta} - \frac{n}{\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} - 2n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta},\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} &= -\frac{3n}{2\beta^4} - \frac{9n}{\alpha^2\beta^4} + 2n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta}^{(\beta)} \\ &= -\frac{2n}{\beta^4} - \frac{19n}{2\alpha^2\beta^4} + \frac{2n}{\alpha^2\beta^2}\mathcal{L}_{\beta\beta} - \frac{n}{\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} - 4n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta} \\ &= -\frac{n}{\beta^4}\left(2 + \frac{19}{2\alpha^2}\right) + \frac{2n}{\alpha^2\beta^2}\mathcal{L}_{\beta\beta} - \frac{n}{\beta}\mathcal{L}_{\beta\beta\beta} - 4n\mathcal{L}_{\beta\beta\beta\beta}.\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

Cálculo dos λ 's

Temos que

$$\kappa^{\alpha\alpha} = \frac{\alpha^2}{2n} \quad \text{e} \quad \kappa^{\beta\beta} = \frac{\alpha^2\beta^2}{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]}.$$

Dessa forma,

$$\lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \kappa^{\alpha\alpha}\kappa^{\alpha\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\alpha\alpha\alpha}/4 - \kappa_{\alpha\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha\alpha)}\right\} = \frac{9}{8n}, \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha\alpha\beta\beta} &= \kappa^{\alpha\alpha}\kappa^{\beta\beta}\left\{\kappa_{\alpha\alpha\beta\beta}/4 - \kappa_{\alpha\alpha\beta}^{(\beta)} + \kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha\beta)}\right\} \\ &= -\frac{3}{4n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right),\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\beta\beta\alpha\alpha} &= \kappa^{\beta\beta}\kappa^{\alpha\alpha}\left\{\kappa_{\beta\beta\alpha\alpha}/4 - \kappa_{\beta\beta\alpha}^{(\alpha)} + \kappa_{\beta\alpha}^{(\beta\alpha)}\right\} \\ &= \frac{\alpha^4}{2n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]}\left(\frac{9}{2\alpha^4} + \frac{1}{4\alpha^2}\right),\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} &= \kappa^{\alpha\alpha}\kappa^{\alpha\alpha}\kappa^{\alpha\alpha}\left\{\kappa_{\alpha\alpha\alpha}(\kappa_{\alpha\alpha\alpha}/6 - \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}) + \kappa_{\alpha\alpha\alpha}(\kappa_{\alpha\alpha\alpha}/4 - \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)})\right. \\ &\quad \left.+ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} + \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}\right\} \\ &= -\frac{19}{24n},\end{aligned}\quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha\alpha\alpha\beta\beta} &= \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\beta\beta} \left\{ \kappa_{\alpha\alpha\beta} (\kappa_{\alpha\alpha\beta}/6 - \kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)}) + \kappa_{\alpha\alpha\alpha} (\kappa_{\alpha\beta\beta}/4 - \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)} \kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)} + \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} \right\} \\
&= \frac{5}{4n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right), \tag{A.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha} &= \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\beta\beta} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\alpha\beta\alpha} (\kappa_{\alpha\beta\alpha}/6 - \kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)}) + \kappa_{\alpha\beta\beta} (\kappa_{\alpha\alpha\alpha}/4 - \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)} \kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)} + \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} \right\} \\
&= -\frac{3}{4n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right), \tag{A.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha} &= \kappa^{\beta\beta} \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\beta\alpha\alpha} (\kappa_{\beta\alpha\alpha}/6 - \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)}) + \kappa_{\beta\alpha\alpha} (\kappa_{\beta\alpha\alpha}/4 - \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} + \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \right\} \\
&= 0, \tag{A.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta} &= \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\beta\beta} \kappa^{\beta\beta} \left\{ \kappa_{\alpha\beta\beta} (\kappa_{\alpha\beta\beta}/6 - \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)}) + \kappa_{\alpha\beta\beta} (\kappa_{\alpha\beta\beta}/4 - \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} + \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)} \right\} \\
&= \frac{5}{6n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right)^2, \tag{A.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta} &= \kappa^{\beta\beta} \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\beta\beta} \left\{ \kappa_{\beta\alpha\beta} (\kappa_{\beta\alpha\beta}/6 - \kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)}) + \kappa_{\beta\alpha\alpha} (\kappa_{\beta\beta\beta}/4 - \kappa_{\beta\beta}^{(\beta)}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{\beta\alpha}^{(\beta)} \kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)} + \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} \right\} \\
&= \frac{\alpha^6 \beta^4}{n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]^2} \left\{ \frac{1}{\alpha^3 \beta^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \left[\frac{1}{3\alpha^3 \beta^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\alpha \beta^2 \sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^3} \right) h(\alpha) - \frac{1}{\alpha^3 \beta^2} + \frac{1}{2\alpha \beta^2} \right] \right\}, \tag{A.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\beta\beta\beta\beta\alpha\alpha} &= \kappa^{\beta\beta} \kappa^{\beta\beta} \kappa^{\alpha\alpha} \left\{ \kappa_{\beta\beta\alpha} (\kappa_{\beta\beta\alpha}/6 - \kappa_{\beta\alpha}^{(\beta)}) + \kappa_{\beta\beta\beta} (\kappa_{\beta\alpha\alpha}/4 - \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)} \kappa_{\beta\alpha}^{(\beta)} + \kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \right\} \\
&= \frac{1}{3n[\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right)^2. \tag{A.51}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B

Programa de Simulação

Neste apêndice apresentamos os programas de simulação utilizados neste trabalho. O programa foi desenvolvido na linguagem de programação `0x` em sua versão 3.40 e está dividido em três módulos. No primeiro módulo (Apêndice B.1), encontra-se o programa de simulação de Monte Carlo; o segundo módulo (Apêndice B.2) contém as funções que permitem o cálculo das estimativas corrigidas e a construção dos intervalos de confiança; no terceiro módulo (Apêndice B.3), encontram-se as diretrizes de ligação dos módulos `ProgTESE.ox` e `Birnbaum.ox`. O programa de simulação fornece estimativas de máxima verossimilhança com suas versões corrigidas. Ainda são apresentados intervalos de confiança dos tipos assintótico e bootstrap para os níveis nominais de confiança de 90%, 95% e 99%; no quarto módulo (Apêndice B.4), encontra-se o programa usado para gerar os resultados referentes aos testes de hipóteses utilizados no Capítulo 5. Além disso, no quinto módulo (Apêndice B.5) apresentamos, como exemplo, o programa que permite gerar o gráfico do histograma das 5000 estimativas de máxima verossimilhança do parâmetro $\alpha = 0.1$ com as diferentes versões de intervalos de confiança para os níveis de confiança 90%, 95% e 99% e tamanho de amostra $n = 10$. O programa foi desenvolvido no pacote estatístico R em sua versão 2.1.1. Para maiores informações sobre esta plataforma, ver <http://www.r-project.org>.

B.1 Programa Principal

```
/******
* Autor: Artur José Lemonte
*
* Programa: ProgTESE.ox
*
* Função: Correção pontual e intervalar para os estimadores de máxima
* verossimilhança (EsMV) dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da
* distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica usando o método
* analítico de Cox & Snell (1968) e por bootstrap paramétrico.
*
* Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
* Co-orientador: Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos
*
* Versão: 3.1415
*
* Data de início: 28-01-2005
*
* Última modificação: 01-06-2005
*****/

/* Bibliotecas principais */
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <oxfloat.h>
#include <maximize>
#include <solvenle>
#include "Birnbaum.ox"
#include "Saunders.h"
#pragma link("maximize.oxo")

/* Constantes fixas para simulação */
const decl t_n = <10; 20; 40; 60>; //Tamanho amostral
const decl alpha = <0.1; 0.25; 0.5; 0.75; 1.0>; //Parâmetro de forma
const decl beta = 1.0; //Parâmetro de escala (locação)
const decl REP = 5000; //Réplicas de Monte Carlo
const decl B = 600; //Réplicas Bootstrap

/******
Início do corpo principal do programa
*****/
main()
{
//Variáveis locais utilizadas no programa
decl i, ir1, c_n, Exectime, X, Z, s, r, v_theta, vpar_EMV, vpar_Ng,
vpar_CS, var_EMV, var_CS, var_Ng, aprox, abserr, aproxCS,
abserrCS, aproxNg, abserrNg, vp, dfunc, i_beta, assimetria,
assimetriaBCa, nP_SKEW, nP_Zo, Zo, ZBoot, zP, vparBP;

//Inicializando o tempo de processamento
Exectime = timer();

//Controle de erros
oxwarning(0);

//Gerador de números pseudo-aleatórios de George-Marsaglia
ranseed("GM");

//Quantis normais para os intervalos de confiança assintóticos
decl quant10 = quann(0.95);
decl quant5 = quann(0.975);
decl quant1 = quann(0.995);

//---Loop para diferentes valores de alpha
```

```

for (c = 0; c < sizerc(alpha); ++c)
{
  //Vetor de parâmetros verdadeiros
  v_theta = alpha[c][0] | beta;

  //---Loop para os tamanhos amostrais
  for (c_n = 0; c_n < sizerc(t_n); ++c_n)
  {
    //Valor para o tamanho da amostra
    n = t_n[c_n][0];

    //===== Variáveis inicializadas para o loop de Monte Carlo =====
    //Variável para o "chute" inicial MLE
    decl i_vp = zeros(2, 1);

    //Variáveis de impressão
    decl ResultMean = zeros(8, 2); decl ResultBias = zeros(8, 2); decl ResultBiasRelat = zeros(8, 2);
    decl ResultVar = zeros(8, 2); decl ResultEQM = zeros(8, 2); decl ResultAss = zeros(8, 2);
    decl ResultCurt = zeros(8, 2); decl ResultIC90 = zeros(2, 6); decl ResultIC95 = zeros(2, 6);
    decl ResultIC99 = zeros(2, 6); decl ResultICCS90 = zeros(2, 6); decl ResultICCS95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICCS99 = zeros(2, 6); decl ResultIC2CS90 = zeros(2, 6); decl ResultIC2CS95 = zeros(2, 6);
    decl ResultIC2CS99 = zeros(2, 6); decl ResultICNg90 = zeros(2, 6); decl ResultICNg95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICNg99 = zeros(2, 6); decl ResultIC2Ng90 = zeros(2, 6); decl ResultIC2Ng95 = zeros(2, 6);
    decl ResultIC2Ng99 = zeros(2, 6); decl ResultICP90 = zeros(2, 6); decl ResultICP95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICP99 = zeros(2, 6); decl ResultICPCS90 = zeros(2, 6); decl ResultICPCS95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICPCS99 = zeros(2, 6); decl ResultICPNg90 = zeros(2, 6); decl ResultICPNg95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICPNg99 = zeros(2, 6); decl ResultICBt90 = zeros(2, 6); decl ResultICBt95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICBt99 = zeros(2, 6); decl ResultICBCa90 = zeros(2, 6); decl ResultICBCa95 = zeros(2, 6);
    decl ResultICBCa99 = zeros(2, 6);

    //===== Variáveis para a estimação pontual =====
    decl alpha_hat_EMV = zeros(REP, 1); decl beta_hat_EMV = zeros(REP, 1);
    decl alpha_tilde_CS = zeros(REP, 1); decl beta_tilde_CS = zeros(REP, 1);
    decl alpha_tilde_BOOT = zeros(REP, 1); decl beta_tilde_BOOT = zeros(REP, 1);
    decl theta_hat_BOOT = zeros(B, 8); decl reamostra_BOOT = zeros(B, 8);
    decl alpha_hat_UEMV = zeros(REP, 1); decl beta_hat_UEMV = zeros(REP, 1);
    decl alpha_hat_EMM = zeros(REP, 1); decl beta_hat_EMM = zeros(REP, 1);
    decl alpha_hat_UEMM = zeros(REP, 1); decl beta_hat_UEMM = zeros(REP, 1);
    decl alpha_hat_Jackk_EMM = zeros(REP, 1); decl beta_hat_Jackk_EMM = zeros(REP, 1);
    decl alpha_hat_JEMM = zeros(REP, 1); decl beta_hat_JEMM = zeros(REP, 1);
    decl alpha_hat_Jackk_EMV = zeros(REP, 1); decl beta_hat_Jackk_EMV = zeros(REP, 1);
    decl alpha_hat_JEMV = zeros(REP, 1); decl beta_hat_JEMV = zeros(REP, 1);
    decl theta_hat_Jackk = zeros(n, 4);

    //===== Variáveis para a estimação intervalar =====
    //===== Intervalos Assintóticos =====
    //Máxima Verossimilhança
    decl c_EMV_alpha_90 = c_EMV_alpha_95 = c_EMV_alpha_99 = 0;
    decl c_EMV_beta_90 = c_EMV_beta_95 = c_EMV_beta_99 = 0;
    decl c_Inf_EMV_alpha_90 = c_Inf_EMV_alpha_95 = c_Inf_EMV_alpha_99 = 0;
    decl c_Inf_EMV_beta_90 = c_Inf_EMV_beta_95 = c_Inf_EMV_beta_99 = 0;
    decl c_Sup_EMV_alpha_90 = c_Sup_EMV_alpha_95 = c_Sup_EMV_alpha_99 = 0;
    decl c_Sup_EMV_beta_90 = c_Sup_EMV_beta_95 = c_Sup_EMV_beta_99 = 0;
    decl LI_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1);
    decl LI_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1);
    decl LI_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1);
    decl LI_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1);
    decl LI_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1);
    decl LI_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1);

    //Cox & Snell (1968)
    decl c_CS_alpha_90 = c_CS_alpha_95 = c_CS_alpha_99 = 0;
    decl c_CS_beta_90 = c_CS_beta_95 = c_CS_beta_99 = 0;
    decl c_Inf_CS_alpha_90 = c_Inf_CS_alpha_95 = c_Inf_CS_alpha_99 = 0;
    decl c_Inf_CS_beta_90 = c_Inf_CS_beta_95 = c_Inf_CS_beta_99 = 0;

```

```

decl c_Sup_CS_alpha_90 = c_Sup_CS_alpha_95 = c_Sup_CS_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_CS_beta_90 = c_Sup_CS_beta_95 = c_Sup_CS_beta_99 = 0;
decl LI_CS_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_beta_99 = zeros(REP, 1);

//Cox & snell, mas com var_EMV
decl c_CS_EMV_alpha_90 = c_CS_EMV_alpha_95 = c_CS_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_CS_EMV_beta_90 = c_CS_EMV_beta_95 = c_CS_EMV_beta_99 = 0;
decl c_Inf_CS_EMV_alpha_90 = c_Inf_CS_EMV_alpha_95 = c_Inf_CS_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_CS_EMV_beta_90 = c_Inf_CS_EMV_beta_95 = c_Inf_CS_EMV_beta_99 = 0;
decl c_Sup_CS_EMV_alpha_90 = c_Sup_CS_EMV_alpha_95 = c_Sup_CS_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_CS_EMV_beta_90 = c_Sup_CS_EMV_beta_95 = c_Sup_CS_EMV_beta_99 = 0;
decl LI_CS_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_CS_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_CS_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1);

//Ng et al. (2003)
decl c_UEMV_alpha_90 = c_UEMV_alpha_95 = c_UEMV_alpha_99 = 0;
decl c_UEMV_beta_90 = c_UEMV_beta_95 = c_UEMV_beta_99 = 0;
decl c_Inf_UEMV_alpha_90 = c_Inf_UEMV_alpha_95 = c_Inf_UEMV_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_UEMV_beta_90 = c_Inf_UEMV_beta_95 = 0; c_Inf_UEMV_beta_99 = 0;
decl c_Sup_UEMV_alpha_90 = c_Sup_UEMV_alpha_95 = c_Sup_UEMV_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_UEMV_beta_90 = c_Sup_UEMV_beta_95 = c_Sup_UEMV_beta_99 = 0;
decl LI_UEMV_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_beta_99 = zeros(REP, 1);

//Ng et al., mas com var_EMV
decl c_UEMV_EMV_alpha_90 = c_UEMV_EMV_alpha_95 = c_UEMV_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_UEMV_EMV_beta_90 = c_UEMV_EMV_beta_95 = c_UEMV_EMV_beta_99 = 0;
decl c_Inf_UEMV_EMV_alpha_90 = c_Inf_UEMV_EMV_alpha_95 = c_Inf_UEMV_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_UEMV_EMV_beta_90 = c_Inf_UEMV_EMV_beta_95 = c_Inf_UEMV_EMV_beta_99 = 0;
decl c_Sup_UEMV_EMV_alpha_90 = c_Sup_UEMV_EMV_alpha_95 = c_Sup_UEMV_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_UEMV_EMV_beta_90 = c_Sup_UEMV_EMV_beta_95 = c_Sup_UEMV_EMV_beta_99 = 0;
decl LI_UEMV_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_UEMV_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_UEMV_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1);

//===== Intervalos Bootstrap =====
//-----Intervalo Percentil
decl vlimICB_90 = zeros(6, 2);
decl vlimICB_95 = zeros(6, 2);
decl vlimICB_99 = zeros(6, 2);

//Percentil
decl c_P_EMV_alpha_90 = c_P_EMV_alpha_95 = c_P_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_P_EMV_beta_90 = c_P_EMV_beta_95 = c_P_EMV_beta_99 = 0;
decl c_Inf_P_EMV_alpha_90 = c_Inf_P_EMV_alpha_95 = c_Inf_P_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_P_EMV_beta_90 = c_Inf_P_EMV_beta_95 = c_Inf_P_EMV_beta_99 = 0;
decl c_Sup_P_EMV_alpha_90 = c_Sup_P_EMV_alpha_95 = c_Sup_P_EMV_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_P_EMV_beta_90 = c_Sup_P_EMV_beta_95 = c_Sup_P_EMV_beta_99 = 0;
decl LI_P_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_P_EMV_alpha_90 = zeros(REP, 1);

```



```

decl LI_P_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_P_EMV_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_P_EMV_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_P_EMV_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_P_EMV_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_P_EMV_beta_99 = zeros(REP, 1);

//Percentil Cox & Snell
decl c_P_CS_alpha_90 = c_P_CS_alpha_95 = c_P_CS_alpha_99 = 0;
decl c_P_CS_beta_90 = c_P_CS_beta_95 = c_P_CS_beta_99 = 0;
decl c_Inf_P_CS_alpha_90 = c_Inf_P_CS_alpha_95 = c_Inf_P_CS_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_P_CS_beta_90 = c_Inf_P_CS_beta_95 = c_Inf_P_CS_beta_99 = 0;
decl c_Sup_P_CS_alpha_90 = c_Sup_P_CS_alpha_95 = c_Sup_P_CS_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_P_CS_beta_90 = c_Sup_P_CS_beta_95 = c_Sup_P_CS_beta_99 = 0;
decl LI_P_CS_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_P_CS_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_CS_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_P_CS_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_CS_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_P_CS_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_CS_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_P_CS_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_CS_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_P_CS_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_CS_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_P_CS_beta_99 = zeros(REP, 1);

//Percentil Ng et al.
decl c_P_Ng_alpha_90 = c_P_Ng_alpha_95 = c_P_Ng_alpha_99 = 0;
decl c_P_Ng_beta_90 = c_P_Ng_beta_95 = c_P_Ng_beta_99 = 0;
decl c_Inf_P_Ng_alpha_90 = c_Inf_P_Ng_alpha_95 = c_Inf_P_Ng_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_P_Ng_beta_90 = c_Inf_P_Ng_beta_95 = c_Inf_P_Ng_beta_99 = 0;
decl c_Sup_P_Ng_alpha_90 = c_Sup_P_Ng_alpha_95 = c_Sup_P_Ng_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_P_Ng_beta_90 = c_Sup_P_Ng_beta_95 = c_Sup_P_Ng_beta_99 = 0;
decl LI_P_Ng_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_P_Ng_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_Ng_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_P_Ng_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_Ng_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_P_Ng_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_Ng_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_P_Ng_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_Ng_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_P_Ng_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_P_Ng_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_P_Ng_beta_99 = zeros(REP, 1);

//-----Intervalo Bootstrap-t
decl Bt_90 = zeros(2, 2);
decl Bt_95 = zeros(2, 2);
decl Bt_99 = zeros(2, 2);
decl c_Bt_alpha_90 = c_Bt_alpha_95 = c_Bt_alpha_99 = 0;
decl c_Bt_beta_90 = c_Bt_beta_95 = c_Bt_beta_99 = 0;
decl c_Inf_Bt_alpha_90 = c_Inf_Bt_alpha_95 = c_Inf_Bt_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_Bt_beta_90 = c_Inf_Bt_beta_95 = c_Inf_Bt_beta_99 = 0;
decl c_Sup_Bt_alpha_90 = c_Sup_Bt_alpha_95 = c_Sup_Bt_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_Bt_beta_90 = c_Sup_Bt_beta_95 = c_Sup_Bt_beta_99 = 0;
decl LI_Bt_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_Bt_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_Bt_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_Bt_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_Bt_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_Bt_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_Bt_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_Bt_beta_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_Bt_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_Bt_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_Bt_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_Bt_beta_99 = zeros(REP, 1);

//-----Intervalo BCa
decl vlimICBCa_90 = zeros(2, 2);
decl vlimICBCa_95 = zeros(2, 2);
decl vlimICBCa_99 = zeros(2, 2);
decl c_BCa_alpha_90 = c_BCa_alpha_95 = c_BCa_alpha_99 = 0;
decl c_BCa_beta_90 = c_BCa_beta_95 = c_BCa_beta_99 = 0;
decl c_Inf_BCa_alpha_90 = c_Inf_BCa_alpha_95 = c_Inf_BCa_alpha_99 = 0;
decl c_Inf_BCa_beta_90 = c_Inf_BCa_beta_95 = c_Inf_BCa_beta_99 = 0;
decl c_Sup_BCa_alpha_90 = c_Sup_BCa_alpha_95 = c_Sup_BCa_alpha_99 = 0;
decl c_Sup_BCa_beta_90 = c_Sup_BCa_beta_95 = c_Sup_BCa_beta_99 = 0;
decl LI_BCa_alpha_90 = zeros(REP, 1); decl LS_BCa_alpha_90 = zeros(REP, 1);
decl LI_BCa_alpha_95 = zeros(REP, 1); decl LS_BCa_alpha_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_BCa_alpha_99 = zeros(REP, 1); decl LS_BCa_alpha_99 = zeros(REP, 1);
decl LI_BCa_beta_90 = zeros(REP, 1); decl LS_BCa_beta_90 = zeros(REP, 1);

```

```

decl LI_BCa_beta_95 = zeros(REP, 1); decl LS_BCa_beta_95 = zeros(REP, 1);
decl LI_BCa_beta_99 = zeros(REP, 1); decl LS_BCa_beta_99 = zeros(REP, 1);

/--Início do Loop de Monte Carlo
for (i = 0, s = 0, r = 0; i < REP; ++i)
{
//Semente para o loop Monte Carlo
ranseed({1981 + 500 + 21*i, 2005 + 1000 + 37*i});

//Gerando números pseudo-aleatórios da distribuição BS(alpha, beta)
Z = rann(n, 1); //Z ~ N(0, 1)
X = (0.5*alpha[c][0]) * Z; //X ~ N(0, 0.25*alpha[c][0]^2)
T = beta * ( 1 + 2*(X.^ 2) + 2*X .* ((1 + X.^ 2) .^ (0.5)) );
//T ~ BS(alpha[c][0], beta)

//Cálculo da média aritmética e harmônica
s = meanc(T); r = (sumc(1 ./ T)/n)^(-1);

//Palpite inicial para a maximização de floglikeBS
//Palpite de acordo com Birnbaum-Saunders (1969b)
i_beta = (s*r)^(0.5);
i_vp[0] = 1.0;
i_vp[1] = i_beta;
vp = i_vp;

//Maximizando a função floglikeBS
ir1 = MaxBFGS(floglikeBS, &vp, &dfunc, 0, FALSE);

if(ir1 == MAX_CONV || ir1 == MAX_WEAK_CONV)
{
//===== CORREÇÃO PONTUAL =====
//Estimativas de Máxima Verossimilhança
alpha_hat_EMV[i] = vp[0]; beta_hat_EMV[i] = vp[1];
alpha_hat_UEMV[i] = (n/(n-1))*alpha_hat_EMV[i];
beta_hat_UEMV[i] = ((1 + (alpha_hat_UEMV[i]^2/(4*n)))^(-1))*beta_hat_EMV[i];
alpha_EMV = alpha_hat_EMV[i]; //Usado em K(alpha)
alpha_Ng = alpha_hat_UEMV[i]; //Usado em K(alpha)
nP_SKEW = vp[0] | vp[1]; //Usado em fBoot para o cálculo em fDerLogLik
nP_Zo = vp[0] | vp[1]; //Usado em fBCaZo
zP = vp[0] | vp[1]; //Usado em fBootZ

//Estimativas pelo método dos Momentos
alpha_hat_EMM[i] = (2*((s/r)^(0.5) - 1))^(0.5);
beta_hat_EMM[i] = (s*r)^(0.5);
alpha_hat_UEMM[i] = (n / (n - 1))*alpha_hat_EMM[i];
beta_hat_UEMM[i] = ( (1 + (alpha_hat_UEMM[i]^2/(4*n)) )^(-1))*beta_hat_EMM[i];

//Estimadores corrigidos através do método de Cox & Snell
alpha_tilde_CS[i] = alpha_hat_EMV[i] + ( alpha_hat_EMV[i] / (4*n) ) +
( (alpha_hat_EMV[i] / (2*n*(h_alpha*(alpha_hat_EMV[i]/M_SQRT2PI) + 1))) *
(1 + 0.5*(alpha_hat_EMV[i]^2)) );
alpha_CS = alpha_tilde_CS[i];
beta_tilde_CS[i] = beta_hat_EMV[i] - ( ((alpha_hat_EMV[i]^2)*beta_hat_EMV[i]) /
(2*n*(h_alpha*(alpha_hat_EMV[i]/M_SQRT2PI) + 1)) );

//===== CORREÇÃO INTERVALAR =====
//===== INTERVALOS ASSINTÓTICOS =====
//Quantidades necessárias para os intervalos de confiança assintóticos
vpar_EMV = alpha_hat_EMV[i] | beta_hat_EMV[i];
vpar_Ng = alpha_hat_UEMV[i] | beta_hat_UEMV[i];
vpar_CS = alpha_tilde_CS[i] | beta_tilde_CS[i];
var_EMV = fInvFisher(vpar_EMV, n, h_alpha);
var_Ng = fInvFisher(vpar_Ng, n, h_alpha_Ng);
var_CS = fInvFisher(vpar_CS, n, h_alpha_CS);

```

```

//-----Intervalos a 90%
//Máxima verossimilhança
LI_EMV_alpha_90[i] = alpha_hat_EMV[i] - quant10*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_EMV_alpha_90[i] = alpha_hat_EMV[i] + quant10*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_EMV_beta_90[i] = beta_hat_EMV[i] - quant10*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_EMV_beta_90[i] = beta_hat_EMV[i] + quant10*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_EMV_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_EMV_alpha_90;
if (LI_EMV_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_EMV_alpha_90;
if (LS_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_EMV_alpha_90;
if (LI_EMV_beta_90[i] < beta && LS_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_EMV_beta_90;
if (LI_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_EMV_beta_90;
if (LS_EMV_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_EMV_beta_90;

//Cox & Snell
LI_CS_alpha_90[i] = alpha_tilde_CS[i] - quant10*sqrt(var_CS[0][0]);
LS_CS_alpha_90[i] = alpha_tilde_CS[i] + quant10*sqrt(var_CS[0][0]);
LI_CS_beta_90[i] = beta_tilde_CS[i] - quant10*sqrt(var_CS[1][1]);
LS_CS_beta_90[i] = beta_tilde_CS[i] + quant10*sqrt(var_CS[1][1]);
//Taxas
if (LI_CS_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_CS_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_CS_alpha_90;
if (LI_CS_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_CS_alpha_90;
if (LS_CS_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_CS_alpha_90;
if (LI_CS_beta_90[i] < beta && LS_CS_beta_90[i] > beta) ++c_CS_beta_90;
if (LI_CS_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_CS_beta_90;
if (LS_CS_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_CS_beta_90;

//Cox & Snell, mas com var_EMV
LI_CS_EMV_alpha_90[i] = alpha_tilde_CS[i] - quant10*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_CS_EMV_alpha_90[i] = alpha_tilde_CS[i] + quant10*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_CS_EMV_beta_90[i] = beta_tilde_CS[i] - quant10*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_CS_EMV_beta_90[i] = beta_tilde_CS[i] + quant10*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_CS_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_CS_EMV_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_CS_EMV_alpha_90;
if (LI_CS_EMV_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_CS_EMV_alpha_90;
if (LS_CS_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_CS_EMV_alpha_90;
if (LI_CS_EMV_beta_90[i] < beta && LS_CS_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_CS_EMV_beta_90;
if (LI_CS_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_CS_EMV_beta_90;
if (LS_CS_EMV_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_CS_EMV_beta_90;

//Ng et al.
LI_UEMV_alpha_90[i] = alpha_hat_UEMV[i] - quant10*sqrt(var_Ng[0][0]);
LS_UEMV_alpha_90[i] = alpha_hat_UEMV[i] + quant10*sqrt(var_Ng[0][0]);
LI_UEMV_beta_90[i] = beta_hat_UEMV[i] - quant10*sqrt(var_Ng[1][1]);
LS_UEMV_beta_90[i] = beta_hat_UEMV[i] + quant10*sqrt(var_Ng[1][1]);
//Taxas
if (LI_UEMV_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_UEMV_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_UEMV_alpha_90;
if (LI_UEMV_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_UEMV_alpha_90;
if (LS_UEMV_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_UEMV_alpha_90;
if (LI_UEMV_beta_90[i] < beta && LS_UEMV_beta_90[i] > beta) ++c_UEMV_beta_90;
if (LI_UEMV_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_UEMV_beta_90;
if (LS_UEMV_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_UEMV_beta_90;

//Ng et al., mas com var_EMV
LI_UEMV_EMV_alpha_90[i] = alpha_hat_UEMV[i] - quant10*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_UEMV_EMV_alpha_90[i] = alpha_hat_UEMV[i] + quant10*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_UEMV_EMV_beta_90[i] = beta_hat_UEMV[i] - quant10*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_UEMV_EMV_beta_90[i] = beta_hat_UEMV[i] + quant10*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_UEMV_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_UEMV_EMV_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_UEMV_EMV_alpha_90;

```

```

if (LI_UEMV_EMV_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_UEMV_EMV_alpha_90;
if (LS_UEMV_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_UEMV_EMV_alpha_90;
if (LI_UEMV_EMV_beta_90[i] < beta && LS_UEMV_EMV_beta_90[i]
    > beta) ++c_UEMV_EMV_beta_90;
if (LI_UEMV_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_UEMV_EMV_beta_90;
if (LS_UEMV_EMV_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_UEMV_EMV_beta_90;

//-----Intervalos a 95%
//Máxima verossimilhança
LI_EMV_alpha_95[i] = alpha_hat_EMV[i] - quant5*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_EMV_alpha_95[i] = alpha_hat_EMV[i] + quant5*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_EMV_beta_95[i] = beta_hat_EMV[i] - quant5*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_EMV_beta_95[i] = beta_hat_EMV[i] + quant5*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_EMV_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_EMV_alpha_95;
if (LI_EMV_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_EMV_alpha_95;
if (LS_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_EMV_alpha_95;
if (LI_EMV_beta_95[i] < beta && LS_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_EMV_beta_95;
if (LI_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_EMV_beta_95;
if (LS_EMV_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_EMV_beta_95;

//Cox & Snell
LI_CS_alpha_95[i] = alpha_tilde_CS[i] - quant5*sqrt(var_CS[0][0]);
LS_CS_alpha_95[i] = alpha_tilde_CS[i] + quant5*sqrt(var_CS[0][0]);
LI_CS_beta_95[i] = beta_tilde_CS[i] - quant5*sqrt(var_CS[1][1]);
LS_CS_beta_95[i] = beta_tilde_CS[i] + quant5*sqrt(var_CS[1][1]);
//Taxas
if (LI_CS_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_CS_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_CS_alpha_95;
if (LI_CS_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_CS_alpha_95;
if (LS_CS_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_CS_alpha_95;
if (LI_CS_beta_95[i] < beta && LS_CS_beta_95[i] > beta) ++c_CS_beta_95;
if (LI_CS_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_CS_beta_95;
if (LS_CS_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_CS_beta_95;

//Cox & Snell, mas com var_EMV
LI_CS_EMV_alpha_95[i] = alpha_tilde_CS[i] - quant5*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_CS_EMV_alpha_95[i] = alpha_tilde_CS[i] + quant5*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_CS_EMV_beta_95[i] = beta_tilde_CS[i] - quant5*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_CS_EMV_beta_95[i] = beta_tilde_CS[i] + quant5*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_CS_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_CS_EMV_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_CS_EMV_alpha_95;
if (LI_CS_EMV_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_CS_EMV_alpha_95;
if (LS_CS_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_CS_EMV_alpha_95;
if (LI_CS_EMV_beta_95[i] < beta && LS_CS_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_CS_EMV_beta_95;
if (LI_CS_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_CS_EMV_beta_95;
if (LS_CS_EMV_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_CS_EMV_beta_95;

//Ng et al.
LI_UEMV_alpha_95[i] = alpha_hat_UEMV[i] - quant5*sqrt(var_Ng[0][0]);
LS_UEMV_alpha_95[i] = alpha_hat_UEMV[i] + quant5*sqrt(var_Ng[0][0]);
LI_UEMV_beta_95[i] = beta_hat_UEMV[i] - quant5*sqrt(var_Ng[1][1]);
LS_UEMV_beta_95[i] = beta_hat_UEMV[i] + quant5*sqrt(var_Ng[1][1]);
//Taxas
if (LI_UEMV_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_UEMV_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_UEMV_alpha_95;
if (LI_UEMV_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_UEMV_alpha_95;
if (LS_UEMV_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_UEMV_alpha_95;
if (LI_UEMV_beta_95[i] < beta && LS_UEMV_beta_95[i] > beta) ++c_UEMV_beta_95;
if (LI_UEMV_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_UEMV_beta_95;
if (LS_UEMV_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_UEMV_beta_95;

//Ng et al., mas com var_EMV

```

```

LI_UEMV_EMV_alpha_95[i] = alpha_hat_UEMV[i] - quant5*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_UEMV_EMV_alpha_95[i] = alpha_hat_UEMV[i] + quant5*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_UEMV_EMV_beta_95[i] = beta_hat_UEMV[i] - quant5*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_UEMV_EMV_beta_95[i] = beta_hat_UEMV[i] + quant5*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_UEMV_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_UEMV_EMV_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_UEMV_EMV_alpha_95;
if (LI_UEMV_EMV_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_UEMV_EMV_alpha_95;
if (LS_UEMV_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_UEMV_EMV_alpha_95;
if (LI_UEMV_EMV_beta_95[i] < beta && LS_UEMV_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_UEMV_EMV_beta_95;
if (LI_UEMV_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_UEMV_EMV_beta_95;
if (LS_UEMV_EMV_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_UEMV_EMV_beta_95;

//-----Intervalos a 99%
//Máxima verossimilhança
LI_EMV_alpha_99[i] = alpha_hat_EMV[i] - quant1*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_EMV_alpha_99[i] = alpha_hat_EMV[i] + quant1*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_EMV_beta_99[i] = beta_hat_EMV[i] - quant1*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_EMV_beta_99[i] = beta_hat_EMV[i] + quant1*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_EMV_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_EMV_alpha_99;
if (LI_EMV_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_EMV_alpha_99;
if (LS_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_EMV_alpha_99;
if (LI_EMV_beta_99[i] < beta && LS_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_EMV_beta_99;
if (LI_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_EMV_beta_99;
if (LS_EMV_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_EMV_beta_99;

//Cox & Snell
LI_CS_alpha_99[i] = alpha_tilde_CS[i] - quant1*sqrt(var_CS[0][0]);
LS_CS_alpha_99[i] = alpha_tilde_CS[i] + quant1*sqrt(var_CS[0][0]);
LI_CS_beta_99[i] = beta_tilde_CS[i] - quant1*sqrt(var_CS[1][1]);
LS_CS_beta_99[i] = beta_tilde_CS[i] + quant1*sqrt(var_CS[1][1]);
//Taxas
if (LI_CS_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_CS_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_CS_alpha_99;
if (LI_CS_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_CS_alpha_99;
if (LS_CS_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_CS_alpha_99;
if (LI_CS_beta_99[i] < beta && LS_CS_beta_99[i] > beta) ++c_CS_beta_99;
if (LI_CS_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_CS_beta_99;
if (LS_CS_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_CS_beta_99;

//Cox & Snell, mas com var_EMV
LI_CS_EMV_alpha_99[i] = alpha_tilde_CS[i] - quant1*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_CS_EMV_alpha_99[i] = alpha_tilde_CS[i] + quant1*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_CS_EMV_beta_99[i] = beta_tilde_CS[i] - quant1*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_CS_EMV_beta_99[i] = beta_tilde_CS[i] + quant1*sqrt(var_EMV[1][1]);
if (LI_CS_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_CS_EMV_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_CS_EMV_alpha_99;
if (LI_CS_EMV_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_CS_EMV_alpha_99;
if (LS_CS_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_CS_EMV_alpha_99;
if (LI_CS_EMV_beta_99[i] < beta && LS_CS_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_CS_EMV_beta_99;
if (LI_CS_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_CS_EMV_beta_99;
if (LS_CS_EMV_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_CS_EMV_beta_99;

//Ng et al.
LI_UEMV_alpha_99[i] = alpha_hat_UEMV[i] - quant1*sqrt(var_Ng[0][0]);
LS_UEMV_alpha_99[i] = alpha_hat_UEMV[i] + quant1*sqrt(var_Ng[0][0]);
LI_UEMV_beta_99[i] = beta_hat_UEMV[i] - quant1*sqrt(var_Ng[1][1]);
LS_UEMV_beta_99[i] = beta_hat_UEMV[i] + quant1*sqrt(var_Ng[1][1]);
//Taxas
if (LI_UEMV_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_UEMV_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_UEMV_alpha_99;
if (LI_UEMV_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_UEMV_alpha_99;
if (LS_UEMV_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_UEMV_alpha_99;

```

```

if (LI_UEMV_beta_99[i] < beta && LS_UEMV_beta_99[i] > beta) ++c_UEMV_beta_99;
if (LI_UEMV_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_UEMV_beta_99;
if (LS_UEMV_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_UEMV_beta_99;

//Ng et al., mas com var_EMV
LI_UEMV_EMV_alpha_99[i] = alpha_hat_UEMV[i] - quant1*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_UEMV_EMV_alpha_99[i] = alpha_hat_UEMV[i] + quant1*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_UEMV_EMV_beta_99[i] = beta_hat_UEMV[i] - quant1*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_UEMV_EMV_beta_99[i] = beta_hat_UEMV[i] + quant1*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_UEMV_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_UEMV_EMV_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_UEMV_EMV_alpha_99;
if (LI_UEMV_EMV_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_UEMV_EMV_alpha_99;
if (LS_UEMV_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_UEMV_EMV_alpha_99;
if (LI_UEMV_EMV_beta_99[i] < beta && LS_UEMV_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_UEMV_EMV_beta_99;
if (LI_UEMV_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_UEMV_EMV_beta_99;
if (LS_UEMV_EMV_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_UEMV_EMV_beta_99;

//===== CORREÇÃO PONTUAL BOOTSTRAP =====
//Estimativas de alpha e beta corrigidas por Bootstrap
vparBP = alpha_hat_EMV[i] | beta_hat_EMV[i];
theta_hat_BOOT = fBoot(vparBP, n, B, nP_SKEW);
alpha_tilde_BOOT[i] = ( 2*alpha_hat_EMV[i] ) - meanc(theta_hat_BOOT[][0]);
beta_tilde_BOOT[i] = ( 2*beta_hat_EMV[i] ) - meanc(theta_hat_BOOT[][1]);

//===== CORREÇÃO INTERVALAR BOOTSTRAP =====
//===== INTERVALOS BOOTSTRAP =====
//===== Bootstrap Percentil =====
reamostra_BOOT = theta_hat_BOOT;
vlimICB_90 = fBootPerc(reamostra_BOOT, 5.0);
vlimICB_95 = fBootPerc(reamostra_BOOT, 2.5);
vlimICB_99 = fBootPerc(reamostra_BOOT, 0.5);

//---Máxima Verossimilhança
//90%
LI_P_EMV_alpha_90[i] = vlimICB_90[0][0];
LS_P_EMV_alpha_90[i] = vlimICB_90[0][1];
LI_P_EMV_beta_90[i] = vlimICB_90[3][0];
LS_P_EMV_beta_90[i] = vlimICB_90[3][1];
//Taxas
if (LI_P_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_P_EMV_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_EMV_alpha_90;
if (LI_P_EMV_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_EMV_alpha_90;
if (LS_P_EMV_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_EMV_alpha_90;
if (LI_P_EMV_beta_90[i] < beta && LS_P_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_P_EMV_beta_90;
if (LI_P_EMV_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_P_EMV_beta_90;
if (LS_P_EMV_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_P_EMV_beta_90;

//95%
LI_P_EMV_alpha_95[i] = vlimICB_95[0][0];
LS_P_EMV_alpha_95[i] = vlimICB_95[0][1];
LI_P_EMV_beta_95[i] = vlimICB_95[3][0];
LS_P_EMV_beta_95[i] = vlimICB_95[3][1];
//Taxas
if (LI_P_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_P_EMV_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_EMV_alpha_95;
if (LI_P_EMV_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_EMV_alpha_95;
if (LS_P_EMV_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_EMV_alpha_95;
if (LI_P_EMV_beta_95[i] < beta && LS_P_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_P_EMV_beta_95;
if (LI_P_EMV_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_P_EMV_beta_95;
if (LS_P_EMV_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_P_EMV_beta_95;

//99%
LI_P_EMV_alpha_99[i] = vlimICB_99[0][0];
LS_P_EMV_alpha_99[i] = vlimICB_99[0][1];

```

```

LI_P_EMV_beta_99[i] = vlimICB_99[3][0];
LS_P_EMV_beta_99[i] = vlimICB_99[3][1];
//Taxas
if (LI_P_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_P_EMV_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_EMV_alpha_99;
if (LI_P_EMV_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_EMV_alpha_99;
if (LS_P_EMV_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_EMV_alpha_99;
if (LI_P_EMV_beta_99[i] < beta && LS_P_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_P_EMV_beta_99;
if (LI_P_EMV_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_P_EMV_beta_99;
if (LS_P_EMV_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_P_EMV_beta_99;

//---Cox & Snell
//90%
LI_P_CS_alpha_90[i] = vlimICB_90[1][0];
LS_P_CS_alpha_90[i] = vlimICB_90[1][1];
LI_P_CS_beta_90[i] = vlimICB_90[4][0];
LS_P_CS_beta_90[i] = vlimICB_90[4][1];
//Taxas
if (LI_P_CS_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_P_CS_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_CS_alpha_90;
if (LI_P_CS_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_CS_alpha_90;
if (LS_P_CS_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_CS_alpha_90;
if (LI_P_CS_beta_90[i] < beta && LS_P_CS_beta_90[i] > beta) ++c_P_CS_beta_90;
if (LI_P_CS_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_P_CS_beta_90;
if (LS_P_CS_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_P_CS_beta_90;

//95%
LI_P_CS_alpha_95[i] = vlimICB_95[1][0];
LS_P_CS_alpha_95[i] = vlimICB_95[1][1];
LI_P_CS_beta_95[i] = vlimICB_95[4][0];
LS_P_CS_beta_95[i] = vlimICB_95[4][1];
//Taxas
if (LI_P_CS_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_P_CS_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_CS_alpha_95;
if (LI_P_CS_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_CS_alpha_95;
if (LS_P_CS_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_CS_alpha_95;
if (LI_P_CS_beta_95[i] < beta && LS_P_CS_beta_95[i] > beta) ++c_P_CS_beta_95;
if (LI_P_CS_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_P_CS_beta_95;
if (LS_P_CS_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_P_CS_beta_95;

//99%
LI_P_CS_alpha_99[i] = vlimICB_99[1][0];
LS_P_CS_alpha_99[i] = vlimICB_99[1][1];
LI_P_CS_beta_99[i] = vlimICB_99[4][0];
LS_P_CS_beta_99[i] = vlimICB_99[4][1];
//Taxas
if (LI_P_CS_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_P_CS_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_CS_alpha_99;
if (LI_P_CS_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_CS_alpha_99;
if (LS_P_CS_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_CS_alpha_99;
if (LI_P_CS_beta_99[i] < beta && LS_P_CS_beta_99[i] > beta) ++c_P_CS_beta_99;
if (LI_P_CS_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_P_CS_beta_99;
if (LS_P_CS_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_P_CS_beta_99;

//---Ng et al.
//90%
LI_P_Ng_alpha_90[i] = vlimICB_90[2][0];
LS_P_Ng_alpha_90[i] = vlimICB_90[2][1];
LI_P_Ng_beta_90[i] = vlimICB_90[5][0];
LS_P_Ng_beta_90[i] = vlimICB_90[5][1];
//Taxas
if (LI_P_Ng_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_P_Ng_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_Ng_alpha_90;
if (LI_P_Ng_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_Ng_alpha_90;
if (LS_P_Ng_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_Ng_alpha_90;

```

```

if (LI_P_Ng_beta_90[i] < beta && LS_P_Ng_beta_90[i] > beta) ++c_P_Ng_beta_90;
if (LI_P_Ng_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_P_Ng_beta_90;
if (LS_P_Ng_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_P_Ng_beta_90;

//95%
LI_P_Ng_alpha_95[i] = vlimICB_95[2][0];
LS_P_Ng_alpha_95[i] = vlimICB_95[2][1];
LI_P_Ng_beta_95[i] = vlimICB_95[5][0];
LS_P_Ng_beta_95[i] = vlimICB_95[5][1];
//Taxas
if (LI_P_Ng_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_P_Ng_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_Ng_alpha_95;
if (LI_P_Ng_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_Ng_alpha_95;
if (LS_P_Ng_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_Ng_alpha_95;
if (LI_P_Ng_beta_95[i] < beta && LS_P_Ng_beta_95[i] > beta) ++c_P_Ng_beta_95;
if (LI_P_Ng_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_P_Ng_beta_95;
if (LS_P_Ng_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_P_Ng_beta_95;

//99%
LI_P_Ng_alpha_99[i] = vlimICB_99[2][0];
LS_P_Ng_alpha_99[i] = vlimICB_99[2][1];
LI_P_Ng_beta_99[i] = vlimICB_99[5][0];
LS_P_Ng_beta_99[i] = vlimICB_99[5][1];
//Taxas
if (LI_P_Ng_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_P_Ng_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_P_Ng_alpha_99;
if (LI_P_Ng_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_P_Ng_alpha_99;
if (LS_P_Ng_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_P_Ng_alpha_99;
if (LI_P_Ng_beta_99[i] < beta && LS_P_Ng_beta_99[i] > beta) ++c_P_Ng_beta_99;
if (LI_P_Ng_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_P_Ng_beta_99;
if (LS_P_Ng_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_P_Ng_beta_99;

//===== Bootstrap-t =====
ZBoot = fBootZ(reamostra_BOOT, zP, B, n);
Bt_90 = fBoot_t(ZBoot, B, 5.0);
Bt_95 = fBoot_t(ZBoot, B, 2.5);
Bt_99 = fBoot_t(ZBoot, B, 0.5);

//90%
LI_Bt_alpha_90[i] = alpha_hat_EMV[i] - Bt_90[0][1]*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_Bt_alpha_90[i] = alpha_hat_EMV[i] - Bt_90[0][0]*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_Bt_beta_90[i] = beta_hat_EMV[i] - Bt_90[1][1]*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_Bt_beta_90[i] = beta_hat_EMV[i] - Bt_90[1][0]*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_Bt_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_Bt_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_Bt_alpha_90;
if (LI_Bt_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_Bt_alpha_90;
if (LS_Bt_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_Bt_alpha_90;
if (LI_Bt_beta_90[i] < beta && LS_Bt_beta_90[i] > beta) ++c_Bt_beta_90;
if (LI_Bt_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_Bt_beta_90;
if (LS_Bt_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_Bt_beta_90;

//95%
LI_Bt_alpha_95[i] = alpha_hat_EMV[i] - Bt_95[0][1]*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_Bt_alpha_95[i] = alpha_hat_EMV[i] - Bt_95[0][0]*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_Bt_beta_95[i] = beta_hat_EMV[i] - Bt_95[1][1]*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_Bt_beta_95[i] = beta_hat_EMV[i] - Bt_95[1][0]*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_Bt_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_Bt_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_Bt_alpha_95;
if (LI_Bt_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_Bt_alpha_95;
if (LS_Bt_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_Bt_alpha_95;
if (LI_Bt_beta_95[i] < beta && LS_Bt_beta_95[i] > beta) ++c_Bt_beta_95;
if (LI_Bt_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_Bt_beta_95;
if (LS_Bt_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_Bt_beta_95;

```



```

//99%
LI_Bt_alpha_99[i] = alpha_hat_EMV[i] - Bt_99[0][1]*sqrt(var_EMV[0][0]);
LS_Bt_alpha_99[i] = alpha_hat_EMV[i] - Bt_99[0][0]*sqrt(var_EMV[0][0]);
LI_Bt_beta_99[i] = beta_hat_EMV[i] - Bt_99[1][1]*sqrt(var_EMV[1][1]);
LS_Bt_beta_99[i] = beta_hat_EMV[i] - Bt_99[1][0]*sqrt(var_EMV[1][1]);
//Taxas
if (LI_Bt_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_Bt_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_Bt_alpha_99;
if (LI_Bt_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_Bt_alpha_99;
if (LS_Bt_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_Bt_alpha_99;
if (LI_Bt_beta_99[i] < beta && LS_Bt_beta_99[i] > beta) ++c_Bt_beta_99;
if (LI_Bt_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_Bt_beta_99;
if (LS_Bt_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_Bt_beta_99;

//===== Bootstrap BCa =====
//Calculando a assimetria
assimetria = moments(reamostra_BOOT[][6:7]);
assimetriaBCa = ( (1/6) * assimetria[3][ ] )';

//Calculando Zo
Zo = fBCaZo(nP_Zo, reamostra_BOOT, B);

//Calculando os limites do intervalo de confiança BCa
vlimICBCa_90 = fICBCa(reamostra_BOOT, quant10, Zo, assimetriaBCa, B);
vlimICBCa_95 = fICBCa(reamostra_BOOT, quant5, Zo, assimetriaBCa, B);
vlimICBCa_99 = fICBCa(reamostra_BOOT, quant1, Zo, assimetriaBCa, B);

//90%
LI_BCa_alpha_90[i] = vlimICBCa_90[0][0];
LS_BCa_alpha_90[i] = vlimICBCa_90[0][1];
LI_BCa_beta_90[i] = vlimICBCa_90[1][0];
LS_BCa_beta_90[i] = vlimICBCa_90[1][1];
//Taxas
if (LI_BCa_alpha_90[i] < alpha[c][0] && LS_BCa_alpha_90[i]
    > alpha[c][0]) ++c_BCa_alpha_90;
if (LI_BCa_alpha_90[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_BCa_alpha_90;
if (LS_BCa_alpha_90[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_BCa_alpha_90;
if (LI_BCa_beta_90[i] < beta && LS_BCa_beta_90[i] > beta) ++c_BCa_beta_90;
if (LI_BCa_beta_90[i] > beta) ++c_Inf_BCa_beta_90;
if (LS_BCa_beta_90[i] < beta) ++c_Sup_BCa_beta_90;

//95%
LI_BCa_alpha_95[i] = vlimICBCa_95[0][0];
LS_BCa_alpha_95[i] = vlimICBCa_95[0][1];
LI_BCa_beta_95[i] = vlimICBCa_95[1][0];
LS_BCa_beta_95[i] = vlimICBCa_95[1][1];
//Taxas
if (LI_BCa_alpha_95[i] < alpha[c][0] && LS_BCa_alpha_95[i]
    > alpha[c][0]) ++c_BCa_alpha_95;
if (LI_BCa_alpha_95[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_BCa_alpha_95;
if (LS_BCa_alpha_95[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_BCa_alpha_95;
if (LI_BCa_beta_95[i] < beta && LS_BCa_beta_95[i] > beta) ++c_BCa_beta_95;
if (LI_BCa_beta_95[i] > beta) ++c_Inf_BCa_beta_95;
if (LS_BCa_beta_95[i] < beta) ++c_Sup_BCa_beta_95;

//99%
LI_BCa_alpha_99[i] = vlimICBCa_99[0][0];
LS_BCa_alpha_99[i] = vlimICBCa_99[0][1];
LI_BCa_beta_99[i] = vlimICBCa_99[1][0];
LS_BCa_beta_99[i] = vlimICBCa_99[1][1];
//Taxas
if (LI_BCa_alpha_99[i] < alpha[c][0] && LS_BCa_alpha_99[i]
    > alpha[c][0]) ++c_BCa_alpha_99;
if (LI_BCa_alpha_99[i] > alpha[c][0]) ++c_Inf_BCa_alpha_99;

```

```

    if (LS_BCa_alpha_99[i] < alpha[c][0]) ++c_Sup_BCa_alpha_99;
    if (LI_BCa_beta_99[i] < beta && LS_BCa_beta_99[i] > beta) ++c_BCa_beta_99;
    if (LI_BCa_beta_99[i] > beta) ++c_Inf_BCa_beta_99;
    if (LS_BCa_beta_99[i] < beta) ++c_Sup_BCa_beta_99;
}
else --i;

} //Fim do loop de Monte Carlo

//=====ESTIMATIVAS DA PARTE PONTUAL
//Cálculo das estimativas médias
ResultMean[0][0] = meanc( alpha_hat_EMV );
ResultMean[0][1] = meanc( beta_hat_EMV );
ResultMean[1][0] = meanc( alpha_tilde_CS );
ResultMean[1][1] = meanc( beta_tilde_CS );
ResultMean[2][0] = meanc( alpha_tilde_BOOT );
ResultMean[2][1] = meanc( beta_tilde_BOOT );
ResultMean[3][0] = meanc( alpha_hat_UEMV );
ResultMean[3][1] = meanc( beta_hat_UEMV );
ResultMean[4][0] = meanc( alpha_hat_EMM );
ResultMean[4][1] = meanc( beta_hat_EMM );
ResultMean[5][0] = meanc( alpha_hat_UEMM );
ResultMean[5][1] = meanc( beta_hat_UEMM );
ResultMean[6][0] = meanc( alpha_hat_JEMV );
ResultMean[6][1] = meanc( beta_hat_JEMV );
ResultMean[7][0] = meanc( alpha_hat_JEMM );
ResultMean[7][1] = meanc( beta_hat_JEMM );

//Cálculo dos vieses estimados
ResultBias[0][0] = ResultMean[0][0] - alpha[c][0];
ResultBias[0][1] = ResultMean[0][1] - beta;
ResultBias[1][0] = ResultMean[1][0] - alpha[c][0];
ResultBias[1][1] = ResultMean[1][1] - beta;
ResultBias[2][0] = ResultMean[2][0] - alpha[c][0];
ResultBias[2][1] = ResultMean[2][1] - beta;
ResultBias[3][0] = ResultMean[3][0] - alpha[c][0];
ResultBias[3][1] = ResultMean[3][1] - beta;
ResultBias[4][0] = ResultMean[4][0] - alpha[c][0];
ResultBias[4][1] = ResultMean[4][1] - beta;
ResultBias[5][0] = ResultMean[5][0] - alpha[c][0];
ResultBias[5][1] = ResultMean[5][1] - beta;
ResultBias[6][0] = ResultMean[6][0] - alpha[c][0];
ResultBias[6][1] = ResultMean[6][1] - beta;
ResultBias[7][0] = ResultMean[7][0] - alpha[c][0];
ResultBias[7][1] = ResultMean[7][1] - beta;

//Cálculo dos vieses relativos
ResultBiasRelat[0][0] = ResultBias[0][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[0][1] = ResultBias[0][1] / beta;
ResultBiasRelat[1][0] = ResultBias[1][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[1][1] = ResultBias[1][1] / beta;
ResultBiasRelat[2][0] = ResultBias[2][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[2][1] = ResultBias[2][1] / beta;
ResultBiasRelat[3][0] = ResultBias[3][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[3][1] = ResultBias[3][1] / beta;
ResultBiasRelat[4][0] = ResultBias[4][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[4][1] = ResultBias[4][1] / beta;
ResultBiasRelat[5][0] = ResultBias[5][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[5][1] = ResultBias[5][1] / beta;
ResultBiasRelat[6][0] = ResultBias[6][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[6][1] = ResultBias[6][1] / beta;
ResultBiasRelat[7][0] = ResultBias[7][0] / alpha[c][0];
ResultBiasRelat[7][1] = ResultBias[7][1] / beta;

```

```

//Cálculo das variâncias estimadas
ResultVar[0][0] = varc( alpha_hat_EMV );
ResultVar[0][1] = varc( beta_hat_EMV );
ResultVar[1][0] = varc( alpha_tilde_CS );
ResultVar[1][1] = varc( beta_tilde_CS );
ResultVar[2][0] = varc( alpha_tilde_BOOT );
ResultVar[2][1] = varc( beta_tilde_BOOT );
ResultVar[3][0] = varc( alpha_hat_UEMV );
ResultVar[3][1] = varc( beta_hat_UEMV );
ResultVar[4][0] = varc( alpha_hat_EMM );
ResultVar[4][1] = varc( beta_hat_EMM );
ResultVar[5][0] = varc( alpha_hat_UEMM );
ResultVar[5][1] = varc( beta_hat_UEMM );
ResultVar[6][0] = varc( alpha_hat_JEMV );
ResultVar[6][1] = varc( beta_hat_JEMV );
ResultVar[7][0] = varc( alpha_hat_JEMM );
ResultVar[7][1] = varc( beta_hat_JEMM );

//Cálculo dos erros quadráticos médios
ResultEQM[0][0] = meanc( (alpha_hat_EMV - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[0][1] = meanc( (beta_hat_EMV - beta) .^ 2 );
ResultEQM[1][0] = meanc( (alpha_tilde_CS - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[1][1] = meanc( (beta_tilde_CS - beta) .^ 2 );
ResultEQM[2][0] = meanc( (alpha_tilde_BOOT - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[2][1] = meanc( (beta_tilde_BOOT - beta) .^ 2 );
ResultEQM[3][0] = meanc( (alpha_hat_UEMV - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[3][1] = meanc( (beta_hat_UEMV - beta) .^ 2 );
ResultEQM[4][0] = meanc( (alpha_hat_EMM - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[4][1] = meanc( (beta_hat_EMM - beta) .^ 2 );
ResultEQM[5][0] = meanc( (alpha_hat_UEMM - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[5][1] = meanc( (beta_hat_UEMM - beta) .^ 2 );
ResultEQM[6][0] = meanc( (alpha_hat_JEMV - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[6][1] = meanc( (beta_hat_JEMV - beta) .^ 2 );
ResultEQM[7][0] = meanc( (alpha_hat_JEMM - alpha[c][0]) .^ 2 );
ResultEQM[7][1] = meanc( (beta_hat_JEMM - beta) .^ 2 );

//Cálculo da Assimetria
ResultAss[0][0] = ( moments( alpha_hat_EMV ) [3] [0] );
ResultAss[0][1] = ( moments( beta_hat_EMV ) [3] [0] );
ResultAss[1][0] = ( moments( alpha_tilde_CS ) [3] [0] );
ResultAss[1][1] = ( moments( beta_tilde_CS ) [3] [0] );
ResultAss[2][0] = ( moments( alpha_tilde_BOOT ) [3] [0] );
ResultAss[2][1] = ( moments( beta_tilde_BOOT ) [3] [0] );
ResultAss[3][0] = ( moments( alpha_hat_UEMV ) [3] [0] );
ResultAss[3][1] = ( moments( beta_hat_UEMV ) [3] [0] );
ResultAss[4][0] = ( moments( alpha_hat_EMM ) [3] [0] );
ResultAss[4][1] = ( moments( beta_hat_EMM ) [3] [0] );
ResultAss[5][0] = ( moments( alpha_hat_UEMM ) [3] [0] );
ResultAss[5][1] = ( moments( beta_hat_UEMM ) [3] [0] );
ResultAss[6][0] = ( moments( alpha_hat_JEMV ) [3] [0] );
ResultAss[6][1] = ( moments( beta_hat_JEMV ) [3] [0] );
ResultAss[7][0] = ( moments( alpha_hat_JEMM ) [3] [0] );
ResultAss[7][1] = ( moments( beta_hat_JEMM ) [3] [0] );

//Cálculo da curtose
ResultCurt[0][0] = ( moments( alpha_hat_EMV ) [4] [0] );
ResultCurt[0][1] = ( moments( beta_hat_EMV ) [4] [0] );
ResultCurt[1][0] = ( moments( alpha_tilde_CS ) [4] [0] );
ResultCurt[1][1] = ( moments( beta_tilde_CS ) [4] [0] );
ResultCurt[2][0] = ( moments( alpha_tilde_BOOT ) [4] [0] );
ResultCurt[2][1] = ( moments( beta_tilde_BOOT ) [4] [0] );
ResultCurt[3][0] = ( moments( alpha_hat_UEMV ) [4] [0] );
ResultCurt[3][1] = ( moments( beta_hat_UEMV ) [4] [0] );
ResultCurt[4][0] = ( moments( alpha_hat_EMM ) [4] [0] );
ResultCurt[4][1] = ( moments( beta_hat_EMM ) [4] [0] );

```

```

ResultCurt[5][0] = ( moments( alpha_hat_UEMM ) [4] [0] );
ResultCurt[5][1] = ( moments( beta_hat_UEMM ) [4] [0] );
ResultCurt[6][0] = ( moments( alpha_hat_JEMV ) [4] [0] );
ResultCurt[6][1] = ( moments( beta_hat_JEMV ) [4] [0] );
ResultCurt[7][0] = ( moments( alpha_hat_JEMM ) [4] [0] );
ResultCurt[7][1] = ( moments( beta_hat_JEMM ) [4] [0] );

//=====ESTIMATIVAS DA PARTE INTERVALAR
//---Intervalos de Máxima Verossimilhança assintóticos
//Intervalos a 90%
ResultIC90[0][0] = meanc(LI_EMV_alpha_90);
ResultIC90[0][1] = meanc(LS_EMV_alpha_90);
ResultIC90[0][2] = ResultIC90[0][1] - ResultIC90[0][0];
ResultIC90[0][3] = c_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC90[0][4] = c_Inf_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC90[0][5] = c_Sup_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC90[1][0] = meanc(LI_EMV_beta_90);
ResultIC90[1][1] = meanc(LS_EMV_beta_90);
ResultIC90[1][2] = ResultIC90[1][1] - ResultIC90[1][0];
ResultIC90[1][3] = c_EMV_beta_90 / REP;
ResultIC90[1][4] = c_Inf_EMV_beta_90 / REP;
ResultIC90[1][5] = c_Sup_EMV_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultIC95[0][0] = meanc(LI_EMV_alpha_95);
ResultIC95[0][1] = meanc(LS_EMV_alpha_95);
ResultIC95[0][2] = ResultIC95[0][1] - ResultIC95[0][0];
ResultIC95[0][3] = c_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC95[0][4] = c_Inf_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC95[0][5] = c_Sup_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC95[1][0] = meanc(LI_EMV_beta_95);
ResultIC95[1][1] = meanc(LS_EMV_beta_95);
ResultIC95[1][2] = ResultIC95[1][1] - ResultIC95[1][0];
ResultIC95[1][3] = c_EMV_beta_95 / REP;
ResultIC95[1][4] = c_Inf_EMV_beta_95 / REP;
ResultIC95[1][5] = c_Sup_EMV_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultIC99[0][0] = meanc(LI_EMV_alpha_99);
ResultIC99[0][1] = meanc(LS_EMV_alpha_99);
ResultIC99[0][2] = ResultIC99[0][1] - ResultIC99[0][0];
ResultIC99[0][3] = c_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC99[0][4] = c_Inf_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC99[0][5] = c_Sup_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC99[1][0] = meanc(LI_EMV_beta_99);
ResultIC99[1][1] = meanc(LS_EMV_beta_99);
ResultIC99[1][2] = ResultIC99[1][1] - ResultIC99[1][0];
ResultIC99[1][3] = c_EMV_beta_99 / REP;
ResultIC99[1][4] = c_Inf_EMV_beta_99 / REP;
ResultIC99[1][5] = c_Sup_EMV_beta_99 / REP;

//---Intervalos assintóticos Cox & Snell
//Intervalos a 90%
ResultICCS90[0][0] = meanc(LI_CS_alpha_90);
ResultICCS90[0][1] = meanc(LS_CS_alpha_90);
ResultICCS90[0][2] = ResultICCS90[0][1] - ResultICCS90[0][0];
ResultICCS90[0][3] = c_CS_alpha_90 / REP;
ResultICCS90[0][4] = c_Inf_CS_alpha_90 / REP;
ResultICCS90[0][5] = c_Sup_CS_alpha_90 / REP;
ResultICCS90[1][0] = meanc(LI_CS_beta_90);
ResultICCS90[1][1] = meanc(LS_CS_beta_90);
ResultICCS90[1][2] = ResultICCS90[1][1] - ResultICCS90[1][0];
ResultICCS90[1][3] = c_CS_beta_90 / REP;
ResultICCS90[1][4] = c_Inf_CS_beta_90 / REP;
ResultICCS90[1][5] = c_Sup_CS_beta_90 / REP;

```

```

//Intervalos a 95%
ResultICCS95[0][0] = meanc(LI_CS_alpha_95);
ResultICCS95[0][1] = meanc(LS_CS_alpha_95);
ResultICCS95[0][2] = ResultICCS95[0][1] - ResultICCS95[0][0];
ResultICCS95[0][3] = c_CS_alpha_95 / REP;
ResultICCS95[0][4] = c_Inf_CS_alpha_95 / REP;
ResultICCS95[0][5] = c_Sup_CS_alpha_95 / REP;
ResultICCS95[1][0] = meanc(LI_CS_beta_95);
ResultICCS95[1][1] = meanc(LS_CS_beta_95);
ResultICCS95[1][2] = ResultICCS95[1][1] - ResultICCS95[1][0];
ResultICCS95[1][3] = c_CS_beta_95 / REP;
ResultICCS95[1][4] = c_Inf_CS_beta_95 / REP;
ResultICCS95[1][5] = c_Sup_CS_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICCS99[0][0] = meanc(LI_CS_alpha_99);
ResultICCS99[0][1] = meanc(LS_CS_alpha_99);
ResultICCS99[0][2] = ResultICCS99[0][1] - ResultICCS99[0][0];
ResultICCS99[0][3] = c_CS_alpha_99 / REP;
ResultICCS99[0][4] = c_Inf_CS_alpha_99 / REP;
ResultICCS99[0][5] = c_Sup_CS_alpha_99 / REP;
ResultICCS99[1][0] = meanc(LI_CS_beta_99);
ResultICCS99[1][1] = meanc(LS_CS_beta_99);
ResultICCS99[1][2] = ResultICCS99[1][1] - ResultICCS99[1][0];
ResultICCS99[1][3] = c_CS_beta_99 / REP;
ResultICCS99[1][4] = c_Inf_CS_beta_99 / REP;
ResultICCS99[1][5] = c_Sup_CS_beta_99 / REP;

//---Intervalos assintóticos Cox & Snell com var_EMV
//Intervalos a 90%
ResultIC2CS90[0][0] = meanc(LI_CS_EMV_alpha_90);
ResultIC2CS90[0][1] = meanc(LS_CS_EMV_alpha_90);
ResultIC2CS90[0][2] = ResultIC2CS90[0][1] - ResultIC2CS90[0][0];
ResultIC2CS90[0][3] = c_CS_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC2CS90[0][4] = c_Inf_CS_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC2CS90[0][5] = c_Sup_CS_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC2CS90[1][0] = meanc(LI_CS_EMV_beta_90);
ResultIC2CS90[1][1] = meanc(LS_CS_EMV_beta_90);
ResultIC2CS90[1][2] = ResultIC2CS90[1][1] - ResultIC2CS90[1][0];
ResultIC2CS90[1][3] = c_CS_EMV_beta_90 / REP;
ResultIC2CS90[1][4] = c_Inf_CS_EMV_beta_90 / REP;
ResultIC2CS90[1][5] = c_Sup_CS_EMV_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultIC2CS95[0][0] = meanc(LI_CS_EMV_alpha_95);
ResultIC2CS95[0][1] = meanc(LS_CS_EMV_alpha_95);
ResultIC2CS95[0][2] = ResultIC2CS95[0][1] - ResultIC2CS95[0][0];
ResultIC2CS95[0][3] = c_CS_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC2CS95[0][4] = c_Inf_CS_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC2CS95[0][5] = c_Sup_CS_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC2CS95[1][0] = meanc(LI_CS_EMV_beta_95);
ResultIC2CS95[1][1] = meanc(LS_CS_EMV_beta_95);
ResultIC2CS95[1][2] = ResultIC2CS95[1][1] - ResultIC2CS95[1][0];
ResultIC2CS95[1][3] = c_CS_EMV_beta_95 / REP;
ResultIC2CS95[1][4] = c_Inf_CS_EMV_beta_95 / REP;
ResultIC2CS95[1][5] = c_Sup_CS_EMV_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultIC2CS99[0][0] = meanc(LI_CS_EMV_alpha_99);
ResultIC2CS99[0][1] = meanc(LS_CS_EMV_alpha_99);
ResultIC2CS99[0][2] = ResultIC2CS99[0][1] - ResultIC2CS99[0][0];
ResultIC2CS99[0][3] = c_CS_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC2CS99[0][4] = c_Inf_CS_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC2CS99[0][5] = c_Sup_CS_EMV_alpha_99 / REP;

```

```

ResultIC2CS99[1][0] = meanc(LI_CS_EMV_beta_99);
ResultIC2CS99[1][1] = meanc(LS_CS_EMV_beta_99);
ResultIC2CS99[1][2] = ResultIC2CS99[1][1] - ResultIC2CS99[1][0];
ResultIC2CS99[1][3] = c_CS_EMV_beta_99 / REP;
ResultIC2CS99[1][4] = c_Inf_CS_EMV_beta_99 / REP;
ResultIC2CS99[1][5] = c_Sup_CS_EMV_beta_99 / REP;

//---Intervalos assintóticos Ng et al. (2003)
//Intervalos a 90%
ResultICNg90[0][0] = meanc(LI_UEMV_alpha_90);
ResultICNg90[0][1] = meanc(LS_UEMV_alpha_90);
ResultICNg90[0][2] = ResultICNg90[0][1] - ResultICNg90[0][0];
ResultICNg90[0][3] = c_UEMV_alpha_90 / REP;
ResultICNg90[0][4] = c_Inf_UEMV_alpha_90 / REP;
ResultICNg90[0][5] = c_Sup_UEMV_alpha_90 / REP;
ResultICNg90[1][0] = meanc(LI_UEMV_beta_90);
ResultICNg90[1][1] = meanc(LS_UEMV_beta_90);
ResultICNg90[1][2] = ResultICNg90[1][1] - ResultICNg90[1][0];
ResultICNg90[1][3] = c_UEMV_beta_90 / REP;
ResultICNg90[1][4] = c_Inf_UEMV_beta_90 / REP;
ResultICNg90[1][5] = c_Sup_UEMV_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultICNg95[0][0] = meanc(LI_UEMV_alpha_95);
ResultICNg95[0][1] = meanc(LS_UEMV_alpha_95);
ResultICNg95[0][2] = ResultICNg95[0][1] - ResultICNg95[0][0];
ResultICNg95[0][3] = c_UEMV_alpha_95 / REP;
ResultICNg95[0][4] = c_Inf_UEMV_alpha_95 / REP;
ResultICNg95[0][5] = c_Sup_UEMV_alpha_95 / REP;
ResultICNg95[1][0] = meanc(LI_UEMV_beta_95);
ResultICNg95[1][1] = meanc(LS_UEMV_beta_95);
ResultICNg95[1][2] = ResultICNg95[1][1] - ResultICNg95[1][0];
ResultICNg95[1][3] = c_UEMV_beta_95 / REP;
ResultICNg95[1][4] = c_Inf_UEMV_beta_95 / REP;
ResultICNg95[1][5] = c_Sup_UEMV_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICNg99[0][0] = meanc(LI_UEMV_alpha_99);
ResultICNg99[0][1] = meanc(LS_UEMV_alpha_99);
ResultICNg99[0][2] = ResultICNg99[0][1] - ResultICNg99[0][0];
ResultICNg99[0][3] = c_UEMV_alpha_99 / REP;
ResultICNg99[0][4] = c_Inf_UEMV_alpha_99 / REP;
ResultICNg99[0][5] = c_Sup_UEMV_alpha_99 / REP;
ResultICNg99[1][0] = meanc(LI_UEMV_beta_99);
ResultICNg99[1][1] = meanc(LS_UEMV_beta_99);
ResultICNg99[1][2] = ResultICNg99[1][1] - ResultICNg99[1][0];
ResultICNg99[1][3] = c_UEMV_beta_99 / REP;
ResultICNg99[1][4] = c_Inf_UEMV_beta_99 / REP;
ResultICNg99[1][5] = c_Sup_UEMV_beta_99 / REP;

//---Intervalos assintóticos Ng et al. com var_EMV
//Intervalos a 90%
ResultIC2Ng90[0][0] = meanc(LI_UEMV_EMV_alpha_90);
ResultIC2Ng90[0][1] = meanc(LS_UEMV_EMV_alpha_90);
ResultIC2Ng90[0][2] = ResultIC2Ng90[0][1] - ResultIC2Ng90[0][0];
ResultIC2Ng90[0][3] = c_UEMV_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC2Ng90[0][4] = c_Inf_UEMV_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC2Ng90[0][5] = c_Sup_UEMV_EMV_alpha_90 / REP;
ResultIC2Ng90[1][0] = meanc(LI_UEMV_EMV_beta_90);
ResultIC2Ng90[1][1] = meanc(LS_UEMV_EMV_beta_90);
ResultIC2Ng90[1][2] = ResultIC2Ng90[1][1] - ResultIC2Ng90[1][0];
ResultIC2Ng90[1][3] = c_UEMV_EMV_beta_90 / REP;
ResultIC2Ng90[1][4] = c_Inf_UEMV_EMV_beta_90 / REP;
ResultIC2Ng90[1][5] = c_Sup_UEMV_EMV_beta_90 / REP;

```

```

//Intervalos a 95%
ResultIC2Ng95[0][0] = meanc(LI_UEMV_EMV_alpha_95);
ResultIC2Ng95[0][1] = meanc(LS_UEMV_EMV_alpha_95);
ResultIC2Ng95[0][2] = ResultIC2Ng95[0][1] - ResultIC2Ng95[0][0];
ResultIC2Ng95[0][3] = c_UEMV_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC2Ng95[0][4] = c_Inf_UEMV_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC2Ng95[0][5] = c_Sup_UEMV_EMV_alpha_95 / REP;
ResultIC2Ng95[1][0] = meanc(LI_UEMV_EMV_beta_95);
ResultIC2Ng95[1][1] = meanc(LS_UEMV_EMV_beta_95);
ResultIC2Ng95[1][2] = ResultIC2Ng95[1][1] - ResultIC2Ng95[1][0];
ResultIC2Ng95[1][3] = c_UEMV_EMV_beta_95 / REP;
ResultIC2Ng95[1][4] = c_Inf_UEMV_EMV_beta_95 / REP;
ResultIC2Ng95[1][5] = c_Sup_UEMV_EMV_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultIC2Ng99[0][0] = meanc(LI_UEMV_EMV_alpha_99);
ResultIC2Ng99[0][1] = meanc(LS_UEMV_EMV_alpha_99);
ResultIC2Ng99[0][2] = ResultIC2Ng99[0][1] - ResultIC2Ng99[0][0];
ResultIC2Ng99[0][3] = c_UEMV_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC2Ng99[0][4] = c_Inf_UEMV_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC2Ng99[0][5] = c_Sup_UEMV_EMV_alpha_99 / REP;
ResultIC2Ng99[1][0] = meanc(LI_UEMV_EMV_beta_99);
ResultIC2Ng99[1][1] = meanc(LS_UEMV_EMV_beta_99);
ResultIC2Ng99[1][2] = ResultIC2Ng99[1][1] - ResultIC2Ng99[1][0];
ResultIC2Ng99[1][3] = c_UEMV_EMV_beta_99 / REP;
ResultIC2Ng99[1][4] = c_Inf_UEMV_EMV_beta_99 / REP;
ResultIC2Ng99[1][5] = c_Sup_UEMV_EMV_beta_99 / REP;

//---Intervalos percentis EMV
//Intervalos a 90%
ResultICP90[0][0] = meanc(LI_P_EMV_alpha_90);
ResultICP90[0][1] = meanc(LS_P_EMV_alpha_90);
ResultICP90[0][2] = ResultICP90[0][1] - ResultICP90[0][0];
ResultICP90[0][3] = c_P_EMV_alpha_90 / REP;
ResultICP90[0][4] = c_Inf_P_EMV_alpha_90 / REP;
ResultICP90[0][5] = c_Sup_P_EMV_alpha_90 / REP;
ResultICP90[1][0] = meanc(LI_P_EMV_beta_90);
ResultICP90[1][1] = meanc(LS_P_EMV_beta_90);
ResultICP90[1][2] = ResultICP90[1][1] - ResultICP90[1][0];
ResultICP90[1][3] = c_P_EMV_beta_90 / REP;
ResultICP90[1][4] = c_Inf_P_EMV_beta_90 / REP;
ResultICP90[1][5] = c_Sup_P_EMV_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultICP95[0][0] = meanc(LI_P_EMV_alpha_95);
ResultICP95[0][1] = meanc(LS_P_EMV_alpha_95);
ResultICP95[0][2] = ResultICP95[0][1] - ResultICP95[0][0];
ResultICP95[0][3] = c_P_EMV_alpha_95 / REP;
ResultICP95[0][4] = c_Inf_P_EMV_alpha_95 / REP;
ResultICP95[0][5] = c_Sup_P_EMV_alpha_95 / REP;
ResultICP95[1][0] = meanc(LI_P_EMV_beta_95);
ResultICP95[1][1] = meanc(LS_P_EMV_beta_95);
ResultICP95[1][2] = ResultICP95[1][1] - ResultICP95[1][0];
ResultICP95[1][3] = c_P_EMV_beta_95 / REP;
ResultICP95[1][4] = c_Inf_P_EMV_beta_95 / REP;
ResultICP95[1][5] = c_Sup_P_EMV_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICP99[0][0] = meanc(LI_P_EMV_alpha_99);
ResultICP99[0][1] = meanc(LS_P_EMV_alpha_99);
ResultICP99[0][2] = ResultICP99[0][1] - ResultICP99[0][0];
ResultICP99[0][3] = c_P_EMV_alpha_99 / REP;
ResultICP99[0][4] = c_Inf_P_EMV_alpha_99 / REP;
ResultICP99[0][5] = c_Sup_P_EMV_alpha_99 / REP;
ResultICP99[1][0] = meanc(LI_P_EMV_beta_99);

```

```

ResultICP99[1][1] = meanc(LS_P_EMV_beta_99);
ResultICP99[1][2] = ResultICP99[1][1] - ResultICP99[1][0];
ResultICP99[1][3] = c_P_EMV_beta_99 / REP;
ResultICP99[1][4] = c_Inf_P_EMV_beta_99 / REP;
ResultICP99[1][5] = c_Sup_P_EMV_beta_99 / REP;

//---Intervalos percentis Cox & Snell
//Intervalos a 90%
ResultICPCS90[0][0] = meanc(LI_P_CS_alpha_90);
ResultICPCS90[0][1] = meanc(LS_P_CS_alpha_90);
ResultICPCS90[0][2] = ResultICPCS90[0][1] - ResultICPCS90[0][0];
ResultICPCS90[0][3] = c_P_CS_alpha_90 / REP;
ResultICPCS90[0][4] = c_Inf_P_CS_alpha_90 / REP;
ResultICPCS90[0][5] = c_Sup_P_CS_alpha_90 / REP;
ResultICPCS90[1][0] = meanc(LI_P_CS_beta_90);
ResultICPCS90[1][1] = meanc(LS_P_CS_beta_90);
ResultICPCS90[1][2] = ResultICPCS90[1][1] - ResultICPCS90[1][0];
ResultICPCS90[1][3] = c_P_CS_beta_90 / REP;
ResultICPCS90[1][4] = c_Inf_P_CS_beta_90 / REP;
ResultICPCS90[1][5] = c_Sup_P_CS_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultICPCS95[0][0] = meanc(LI_P_CS_alpha_95);
ResultICPCS95[0][1] = meanc(LS_P_CS_alpha_95);
ResultICPCS95[0][2] = ResultICPCS95[0][1] - ResultICPCS95[0][0];
ResultICPCS95[0][3] = c_P_CS_alpha_95 / REP;
ResultICPCS95[0][4] = c_Inf_P_CS_alpha_95 / REP;
ResultICPCS95[0][5] = c_Sup_P_CS_alpha_95 / REP;
ResultICPCS95[1][0] = meanc(LI_P_CS_beta_95);
ResultICPCS95[1][1] = meanc(LS_P_CS_beta_95);
ResultICPCS95[1][2] = ResultICPCS95[1][1] - ResultICPCS95[1][0];
ResultICPCS95[1][3] = c_P_CS_beta_95 / REP;
ResultICPCS95[1][4] = c_Inf_P_CS_beta_95 / REP;
ResultICPCS95[1][5] = c_Sup_P_CS_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICPCS99[0][0] = meanc(LI_P_CS_alpha_99);
ResultICPCS99[0][1] = meanc(LS_P_CS_alpha_99);
ResultICPCS99[0][2] = ResultICPCS99[0][1] - ResultICPCS99[0][0];
ResultICPCS99[0][3] = c_P_CS_alpha_99 / REP;
ResultICPCS99[0][4] = c_Inf_P_CS_alpha_99 / REP;
ResultICPCS99[0][5] = c_Sup_P_CS_alpha_99 / REP;
ResultICPCS99[1][0] = meanc(LI_P_CS_beta_99);
ResultICPCS99[1][1] = meanc(LS_P_CS_beta_99);
ResultICPCS99[1][2] = ResultICPCS99[1][1] - ResultICPCS99[1][0];
ResultICPCS99[1][3] = c_P_CS_beta_99 / REP;
ResultICPCS99[1][4] = c_Inf_P_CS_beta_99 / REP;
ResultICPCS99[1][5] = c_Sup_P_CS_beta_99 / REP;

//---Intervalos percentis Ng et al.
//Intervalos a 90%
ResultICPNg90[0][0] = meanc(LI_P_Ng_alpha_90);
ResultICPNg90[0][1] = meanc(LS_P_Ng_alpha_90);
ResultICPNg90[0][2] = ResultICPNg90[0][1] - ResultICPNg90[0][0];
ResultICPNg90[0][3] = c_P_Ng_alpha_90 / REP;
ResultICPNg90[0][4] = c_Inf_P_Ng_alpha_90 / REP;
ResultICPNg90[0][5] = c_Sup_P_Ng_alpha_90 / REP;
ResultICPNg90[1][0] = meanc(LI_P_Ng_beta_90);
ResultICPNg90[1][1] = meanc(LS_P_Ng_beta_90);
ResultICPNg90[1][2] = ResultICPNg90[1][1] - ResultICPNg90[1][0];
ResultICPNg90[1][3] = c_P_Ng_beta_90 / REP;
ResultICPNg90[1][4] = c_Inf_P_Ng_beta_90 / REP;
ResultICPNg90[1][5] = c_Sup_P_Ng_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%

```



```

ResultICPNg95[0][0] = meanc(LI_P_Ng_alpha_95);
ResultICPNg95[0][1] = meanc(LS_P_Ng_alpha_95);
ResultICPNg95[0][2] = ResultICPNg95[0][1] - ResultICPNg95[0][0];
ResultICPNg95[0][3] = c_P_Ng_alpha_95 / REP;
ResultICPNg95[0][4] = c_Inf_P_Ng_alpha_95 / REP;
ResultICPNg95[0][5] = c_Sup_P_Ng_alpha_95 / REP;
ResultICPNg95[1][0] = meanc(LI_P_Ng_beta_95);
ResultICPNg95[1][1] = meanc(LS_P_Ng_beta_95);
ResultICPNg95[1][2] = ResultICPNg95[1][1] - ResultICPNg95[1][0];
ResultICPNg95[1][3] = c_P_Ng_beta_95 / REP;
ResultICPNg95[1][4] = c_Inf_P_Ng_beta_95 / REP;
ResultICPNg95[1][5] = c_Sup_P_Ng_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICPNg99[0][0] = meanc(LI_P_Ng_alpha_99);
ResultICPNg99[0][1] = meanc(LS_P_Ng_alpha_99);
ResultICPNg99[0][2] = ResultICPNg99[0][1] - ResultICPNg99[0][0];
ResultICPNg99[0][3] = c_P_Ng_alpha_99 / REP;
ResultICPNg99[0][4] = c_Inf_P_Ng_alpha_99 / REP;
ResultICPNg99[0][5] = c_Sup_P_Ng_alpha_99 / REP;
ResultICPNg99[1][0] = meanc(LI_P_Ng_beta_99);
ResultICPNg99[1][1] = meanc(LS_P_Ng_beta_99);
ResultICPNg99[1][2] = ResultICPNg99[1][1] - ResultICPNg99[1][0];
ResultICPNg99[1][3] = c_P_Ng_beta_99 / REP;
ResultICPNg99[1][4] = c_Inf_P_Ng_beta_99 / REP;
ResultICPNg99[1][5] = c_Sup_P_Ng_beta_99 / REP;

//---Intervalos de Confiança Bootstrap BCa
//Intervalos a 90%
ResultICBCa90[0][0] = meanc(LI_BCa_alpha_90);
ResultICBCa90[0][1] = meanc(LS_BCa_alpha_90);
ResultICBCa90[0][2] = ResultICBCa90[0][1] - ResultICBCa90[0][0];
ResultICBCa90[0][3] = c_BCa_alpha_90 / REP;
ResultICBCa90[0][4] = c_Inf_BCa_alpha_90 / REP;
ResultICBCa90[0][5] = c_Sup_BCa_alpha_90 / REP;
ResultICBCa90[1][0] = meanc(LI_BCa_beta_90);
ResultICBCa90[1][1] = meanc(LS_BCa_beta_90);
ResultICBCa90[1][2] = ResultICBCa90[1][1] - ResultICBCa90[1][0];
ResultICBCa90[1][3] = c_BCa_beta_90 / REP;
ResultICBCa90[1][4] = c_Inf_BCa_beta_90 / REP;
ResultICBCa90[1][5] = c_Sup_BCa_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultICBCa95[0][0] = meanc(LI_BCa_alpha_95);
ResultICBCa95[0][1] = meanc(LS_BCa_alpha_95);
ResultICBCa95[0][2] = ResultICBCa95[0][1] - ResultICBCa95[0][0];
ResultICBCa95[0][3] = c_BCa_alpha_95 / REP;
ResultICBCa95[0][4] = c_Inf_BCa_alpha_95 / REP;
ResultICBCa95[0][5] = c_Sup_BCa_alpha_95 / REP;
ResultICBCa95[1][0] = meanc(LI_BCa_beta_95);
ResultICBCa95[1][1] = meanc(LS_BCa_beta_95);
ResultICBCa95[1][2] = ResultICBCa95[1][1] - ResultICBCa95[1][0];
ResultICBCa95[1][3] = c_BCa_beta_95 / REP;
ResultICBCa95[1][4] = c_Inf_BCa_beta_95 / REP;
ResultICBCa95[1][5] = c_Sup_BCa_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICBCa99[0][0] = meanc(LI_BCa_alpha_99);
ResultICBCa99[0][1] = meanc(LS_BCa_alpha_99);
ResultICBCa99[0][2] = ResultICBCa99[0][1] - ResultICBCa99[0][0];
ResultICBCa99[0][3] = c_BCa_alpha_99 / REP;
ResultICBCa99[0][4] = c_Inf_BCa_alpha_99 / REP;
ResultICBCa99[0][5] = c_Sup_BCa_alpha_99 / REP;
ResultICBCa99[1][0] = meanc(LI_BCa_beta_99);
ResultICBCa99[1][1] = meanc(LS_BCa_beta_99);

```

```

ResultICBCa99[1][2] = ResultICBCa99[1][1] - ResultICBCa99[1][0];
ResultICBCa99[1][3] = c_BCa_beta_99 / REP;
ResultICBCa99[1][4] = c_Inf_BCa_beta_99 / REP;
ResultICBCa99[1][5] = c_Sup_BCa_beta_99 / REP;

//---Intervalos de Confiança Bootstrap-t
//Intervalos a 90%
ResultICBt90[0][0] = meanc(LI_Bt_alpha_90);
ResultICBt90[0][1] = meanc(LS_Bt_alpha_90);
ResultICBt90[0][2] = ResultICBt90[0][1] - ResultICBt90[0][0];
ResultICBt90[0][3] = c_Bt_alpha_90 / REP;
ResultICBt90[0][4] = c_Inf_Bt_alpha_90 / REP;
ResultICBt90[0][5] = c_Sup_Bt_alpha_90 / REP;
ResultICBt90[1][0] = meanc(LI_Bt_beta_90);
ResultICBt90[1][1] = meanc(LS_Bt_beta_90);
ResultICBt90[1][2] = ResultICBt90[1][1] - ResultICBt90[1][0];
ResultICBt90[1][3] = c_Bt_beta_90 / REP;
ResultICBt90[1][4] = c_Inf_Bt_beta_90 / REP;
ResultICBt90[1][5] = c_Sup_Bt_beta_90 / REP;

//Intervalos a 95%
ResultICBt95[0][0] = meanc(LI_Bt_alpha_95);
ResultICBt95[0][1] = meanc(LS_Bt_alpha_95);
ResultICBt95[0][2] = ResultICBt95[0][1] - ResultICBt95[0][0];
ResultICBt95[0][3] = c_Bt_alpha_95 / REP;
ResultICBt95[0][4] = c_Inf_Bt_alpha_95 / REP;
ResultICBt95[0][5] = c_Sup_Bt_alpha_95 / REP;
ResultICBt95[1][0] = meanc(LI_Bt_beta_95);
ResultICBt95[1][1] = meanc(LS_Bt_beta_95);
ResultICBt95[1][2] = ResultICBt95[1][1] - ResultICBt95[1][0];
ResultICBt95[1][3] = c_Bt_beta_95 / REP;
ResultICBt95[1][4] = c_Inf_Bt_beta_95 / REP;
ResultICBt95[1][5] = c_Sup_Bt_beta_95 / REP;

//Intervalos a 99%
ResultICBt99[0][0] = meanc(LI_Bt_alpha_99);
ResultICBt99[0][1] = meanc(LS_Bt_alpha_99);
ResultICBt99[0][2] = ResultICBt99[0][1] - ResultICBt99[0][0];
ResultICBt99[0][3] = c_Bt_alpha_99 / REP;
ResultICBt99[0][4] = c_Inf_Bt_alpha_99 / REP;
ResultICBt99[0][5] = c_Sup_Bt_alpha_99 / REP;
ResultICBt99[1][0] = meanc(LI_Bt_beta_99);
ResultICBt99[1][1] = meanc(LS_Bt_beta_99);
ResultICBt99[1][2] = ResultICBt99[1][1] - ResultICBt99[1][0];
ResultICBt99[1][3] = c_Bt_beta_99 / REP;
ResultICBt99[1][4] = c_Inf_Bt_beta_99 / REP;
ResultICBt99[1][5] = c_Sup_Bt_beta_99 / REP;

//====Impressão dos parâmetros de simulação
print("\n\t PROGRAMA Ox: ", oxfilename());
print("\n\t VERSÃO Ox: ", oxversion());
print("\n\n\t |----- CORREÇÃO DO VIÉS DOS ESTIMADORES -----|");
print("\n\t |----- DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO -----|");
print("\n\t |----- BIRNBAUM-SAUNDERS BI-PARAMÉTRICA -----|");
print("\n\n\t NUM. REP. DE MONTE CARLO: ", REP);
print("\n\t NUM. REP. BOOT: ", B);
print("\n\t MENOR TAMANHO AMOSTRA: 10");
print("\n\t MAIOR TAMANHO AMOSTRA: 60");
print("\n\t =====");
print("\n\t TAMANHO AMOSTRA DESTA SIMULAÇÃO: ", n);
print("\n\t =====");
print("\n\n\t PARÂMETROS VERDADEIROS ", "%12.4f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
      "%r", {"", ""}, v_theta');

//Impressão dos resultados da simulação para a parte pontual

```

```

print("\n\n|===== RESULTADOS DA SIMULAÇÃO =====|\n");
print("|===== \t PARTE PONTUAL \t =====|\n");
print("\n\t\t ESTIMATIVAS MÉDIAS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultMean);

print("\n\t\t VIESES ESTIMADOS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultBias);

print("\n\t\t VIESES RELATIVOS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultBiasRelat);

print("\n\t\t VARIÂNCIAS ESTIMADAS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultVar);

print("\n\t\t DESVIOS PADRÃO ESTIMADOS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, sqrt(ResultVar));

print("\n\t\t EQM'S ESTIMADOS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultEQM);

print("\n\t\t REQM'S ESTIMADOS ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, sqrt(ResultEQM));

print("\n\t\t ASSIMETRIA ESTIMADA ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultAss);

print("\n\t\t CURTOSE ESTIMADA ", "%12.5f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
"%r", {"EMV", "CS_EMV", "BOOT_EMV", "UEMV", "EMM", "UEMM", "JEMV", "JEMM"}, ResultCurt);

//Impressão dos resultados da simulação para a parte intervalar
print("\n\n|===== RESULTADOS DA SIMULAÇÃO =====|\n");
print("|===== \t PARTE INTERVALAR \t =====|\n");

print("\n|===== ASSINTÓTICO =====|\n");
print("\nIC NORMAL 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC90);
print("\nIC NORMAL 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC95);
print("\nIC NORMAL 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC99);

print("\n|===== ASSINTÓTICO COX & SNELL =====|\n");
print("\nIC CS 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICCS90);
print("\nIC CS 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICCS95);
print("\nIC CS 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICCS99);

print("\n|===== ASSINTÓTICO Ng et al. =====|\n");
print("\nIC Ng 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICNg90);
print("\nIC Ng 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICNg95);
print("\nIC Ng 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICNg99);

print("\n|===== PERCENTIL =====|\n");
print("\nIC PERCENTIL 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICP90);
print("\nIC PERCENTIL 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICP95);
print("\nIC PERCENTIL 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Eq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICP99);

```

```

print("\n|==== PERCENTIL COX & SNELL =====|\n");
print("IC PERCENTIL CS 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICPCS90);
print("\nIC PERCENTIL CS 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICPCS95);
print("\nIC PERCENTIL CS 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICPCS99);

print("\n|==== PERCENTIL Ng et al. =====|\n");
print("IC PERCENTIL Ng 90%: ", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICPNg90);
print("\nIC PERCENTIL Ng 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICPNg95);
print("\nIC PERCENTIL Ng 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICPNg99);

print("\n|==== INTERVALO BOOTSTRAP BCa =====|\n");
print("IC BCa 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICBCa90);
print("\nIC BCa 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICBCa95);
print("\nIC BCa 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICBCa99);

print("\n|==== INTERVALO BOOTSTRAP-t =====|\n");
print("IC BOOTSTRAP t 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICBt90);
print("\nIC BOOTSTRAP t 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICBt95);
print("\nIC BOOTSTRAP t 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultICBt99);

print("\n|==== ASSINTÓTICO COX & SNELL COM var_EMV =====|\n");
print("IC CS_EMV 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC2CS90);
print("\nIC CS_EMV 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC2CS95);
print("\nIC CS_EMV 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC2CS99);

print("\n|==== ASSINTÓTICO Ng et al. COM var_EMV =====|\n");
print("IC Ng_EMV 90%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC2Ng90);
print("\nIC Ng_EMV 95%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC2Ng95);
print("\nIC Ng_EMV 99%:", "%12.4f", "%c", {"LimInf", "LimSup", "Tamanho", "Cobertura",
"%Esq", "%Dir"}, "%r", {"alpha", "beta"}, ResultIC2Ng99);

print("\n\t DATA: ", date());
print("\n\t HORA: ", time());
print("\n\t TEMPO TOTAL DE EXECUÇÃO: ", timespan(Exectime), " segundos.\n\n" );

print("-----\n");

//Fim loop amostra

print("\t\t\t\t\t FIM LOOP PARA ALPHA IGUAL A ", alpha[c][0]);
print("\n=====");
print("=====");

//Fim loop valores de alpha

//Fim main()

```

B.2 Biblioteca de Funções

```

/*****
* Autor: Artur José Lemonte
* Programa: Birnbaum.ox
*****/

/* Bibliotecas principais */
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>
#import <solvenle>
#pragma link("maximize.oxo")

/* Variáveis globais utilizadas */
static decl n; //Tamanho amostral
static decl T; //T ~ BS(alpha, beta) para a estimação de MV
static decl s_T; //s_T ~ BS(alpha, beta) para a estimação por Jackknife
static decl sB_T; //sB_T ~ BS(alpha, beta) para a estimação por Bootstrap
static decl alpha_EMV; //Estimador para o cálculo do viés CS
static decl alpha_B_EMV; //Estimador para o cálculo do viés CS em fBoot
static decl alpha_CS; //Estimador CS para o ICACS
static decl alpha_Ng; //Estimador Ng para o ICANG
static decl alphaBoot_t; /*Estimador usado para estimar o erro padrão
                           de alpha para cada alpha estimado dentro do
                           loop Bootstrap*/
static decl c; //Contador para o loop de alpha

/* Função log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
   bi-paramétrica, denotada por BS(alpha, beta) */
floglikeBS(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(vP[0]*vP[1]) +
        sumc( log( ((vP[1]*(1 ./ T)).^0.5) + ((vP[1]*(1 ./ T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[1]*(vP[0]^2)))*sumc(T) - (vP[1]/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ T)
        + n/(vP[0]^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/vP[0] + (1/(vP[1]*(vP[0]^3)))*sumc(T) +
            (vP[1]/(vP[0]^3))*sumc(1 ./ T) - (2*n)/(vP[0]^3);
        (avScore[0])[1] = -n/(2*vP[1]) + sumc(1 ./ (T + vP[1])) +
            (1/(2*(vP[1]^2)*(vP[0]^2)))*sumc(T) -
            (1/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ T);
    }

    //Condição de convergência
    if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;
    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

//Fim floglikeBS

/* Função log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
   usada para a estimação dos parâmetros por Jackknife */
floglikeBSJackk(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl N = n - 1;

```

```

adFunc[0] = -N*log( 2*M_SQRT2PI ) -N*log(vP[0]*vP[1]) +
    sumc( log( ((vP[1]*(1 ./ s_T)).^0.5) + ((vP[1]*(1 ./ s_T)).^1.5) ) )
    - (1/(2*vP[1]*(vP[0]^2)))*sumc(s_T) -
    (vP[1]/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ s_T) + N/(vP[0]^2);

//Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
if (avScore)
{
    (avScore[0])[0] = -N/vP[0] + (1/(vP[1]*(vP[0]^3)))*sumc(s_T) +
        (vP[1]/(vP[0]^3))*sumc(1 ./ s_T) - (2*N)/(vP[0]^3);
    (avScore[0])[1] = -N/(2*vP[1]) + sumc(1 ./ (s_T + vP[1])) +
        (1/(2*(vP[1]^2)*(vP[0]^2)))*sumc(s_T) -
        (1/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ s_T);
}

//Condição de convergência
if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; // 1 indica sucesso
}

//Fim floglikeBSJackk

/* Função log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
usada para a estimação por Bootstrap */
floglikeBSBoot(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(vP[0]*vP[1]) +
        sumc( log( ((vP[1]*(1 ./ sB_T)).^0.5) + ((vP[1]*(1 ./ sB_T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[1]*(vP[0]^2)))*sumc(sB_T) -
        (vP[1]/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ sB_T) + n/(vP[0]^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/vP[0] + (1/(vP[1]*(vP[0]^3)))*sumc(sB_T) +
            (vP[1]/(vP[0]^3))*sumc(1 ./ sB_T) - (2*n)/(vP[0]^3);
        (avScore[0])[1] = -n/(2*vP[1]) + sumc(1 ./ (sB_T + vP[1])) +
            (1/(2*(vP[1]^2)*(vP[0]^2)))*sumc(sB_T) -
            (1/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ sB_T);
    }

    //Condição de convergência
    if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
    else
return 1; // 1 indica sucesso
}

//Fim floglikeBSBoot

/* Função de derivadas analíticas da função log-verossimilhança BS(alpha, beta) para
a estimação da assimetria no cálculo do Intervalo de Confiança Bootstrap BCa */
fDerLogLik(const skewP)
{
    decl vScore;
    decl U_alpha = -n/skewP[0] + (1/(skewP[1]*(skewP[0]^3)))*sumc(sB_T) +
        (skewP[1]/(skewP[0]^3))*sumc(1 ./ sB_T) - (2*n)/(skewP[0]^3);
    decl U_beta = -n/(2*skewP[1]) + sumc(1 ./ (sB_T + skewP[1])) +
        (1/(2*(skewP[1]^2)*(skewP[0]^2)))*sumc(sB_T) -
        (1/(2*(skewP[0]^2)))*sumc(1 ./ sB_T);

    return vScore = (U_alpha ~ U_beta);
}

```

```

} //Fim fDerLogLik

/* Função para gerar o vetor de reamostragem Bootstrap em sua forma paramétrica */
f_gera_Y(const func, const vP, const cn)
{
    decl ci;
    decl v_X = zeros(cn, 1);
    decl v_Y = zeros(cn, 1);

    for (ci = 0; ci < cn; ci++)
    {
        v_X[ci] = (0.5*vP[0]) * rann(1, 1);
        v_Y[ci] = vP[1] * ( 1 + 2*(v_X[ci] ^ 2) + 2*v_X[ci] * ((1 + v_X[ci] ^ 2) ^ (0.5)) );
    }

    func[0] = v_Y; //Amostra bootstrap: v_Y ~ B-S(alpha_hat, beta_hat)

    return 1; //1 indica sucesso
} //Fim f_gera_Y

/* Função para estimar alpha e beta por Bootstrap e corrigi-los em cada
réplica Bootstrap usando Cox & Snell (1968) e Ng et al. (2003) */
fBoot(const vT, const tn, const nB, const vp1)
{
    decl k, ir2, sB, rB, i_beta_B, dfuncB, aproxBCS, abserrBCS,
        theta_hat_BOOT, sB_T1;;
    decl i_vpB = zeros(2, 1); decl vpB = zeros(2, 1);
    decl alpha_hat_BOOT = zeros(nB, 1);
    decl beta_hat_BOOT = zeros(nB, 1);
    decl alpha_hat_B_UEMV = zeros(nB, 1);
    decl beta_hat_B_UEMV = zeros(nB, 1);
    decl alpha_tilde_B_CS = zeros(nB, 1);
    decl beta_tilde_B_CS = zeros(nB, 1);
    decl SKEW = zeros(nB, 2);

    //Início do loop Bootstrap
    for (k = 0, sB = 0, rB = 0, i_beta_B = 0; k < nB; ++k)
    {
        //Selecionando amostra Bootstrap (paramétrico)
        //sB_T ~ B-S(alpha_hat, beta_hat)]
        f_gera_Y(&sB_T1, vpar, tn);
        sB_T = sB_T1;

        //Média aritmética e harmônica bootstrap
        sB = meanc(sB_T);
        rB = (sumc(1 ./ sB_T)/tn)^(-1);

        //Palpite inicial Bootstrap
        //Palpite de acordo com Birnbaum-Saunders (1969b)
        i_beta_B = (sB*rB)^(1/2);
        i_vpB[0] = 1.0; i_vpB[1] = i_beta_B; vpB = i_vpB;

        //Avaliando fDerLogLik em vp1 (EMV's da amostra T) para calcular
        //a constante de aceleração do Intervalo de Confiança Bootstrap BCA
        SKEW[k][0] = fDerLogLik(vp1);

        //Maximizando a função flolikeBSBoot
        ir2 = MaxBFGS(floglikeBSBoot, &vpB, &dfuncB, 0, FALSE);

        if(ir2 == MAX_CONV || ir2 == MAX_WEAK_CONV)
        {
            alpha_hat_BOOT[k] = vpB[0];

```

```

beta_hat_BOOT[k] = vpB[1];

//-----Corrigindo alpha e beta pela proposta de Ng et al. (2003)
alpha_hat_B_UEMV[k] = (tn/(tn - 1))*alpha_hat_BOOT[k];
beta_hat_B_UEMV[k] = ((1 + (alpha_hat_B_UEMV[k]^2/(4*tn)))^(-1))*beta_hat_BOOT[k];

//-----Corrigindo alpha e beta por Cox & Snell (1968)
alpha_B_EMV = alpha_hat_BOOT[k];
alpha_tilde_B_CS[k] = alpha_hat_BOOT[k] + ( alpha_hat_BOOT[k] / (4*tn) ) +
    ( (alpha_hat_BOOT[k] / (2*tn*(h_alphaBCS*(alpha_hat_BOOT[k]/M_SQRT2PI) + 1))) *
    (1 + 0.5*(alpha_hat_BOOT[k]^2)) );
beta_tilde_B_CS[k] = beta_hat_BOOT[k] - ( ((alpha_hat_BOOT[k]^2)*beta_hat_BOOT[k]) /
    (2*tn*(h_alphaBCS*(alpha_hat_BOOT[k]/M_SQRT2PI) + 1)) );
}
else --k;

} //Fim loop Boot

theta_hat_BOOT = alpha_hat_BOOT ~ beta_hat_BOOT ~ alpha_tilde_B_CS ~ beta_tilde_B_CS ~
    alpha_hat_B_UEMV ~ beta_hat_B_UEMV ~ SKEW;

return ( theta_hat_BOOT );

} //Fim fBoot

/* Função para calcular os intervalos de alpha e beta usando
   bootstrap percentil, percentil CS e percentil Ng et al. */
fBootPerc(const reamostra, const nivel)
{
    decl dims = rows(reamostra);
    decl vordem = sortc(reamostra);
    decl posicao = dims*nivel;
    decl limICB = zeros(6, 2);

    if (imod(posicao, 100) == 0)
    {
        decl perc = posicao/100;

        limICB[0][0] = vordem[perc - 1][0]; //lim. inf. alpha EMV
        limICB[1][0] = vordem[perc - 1][2]; //lim. inf. alpha CS
        limICB[2][0] = vordem[perc - 1][4]; //lim. inf. alpha Ng
        limICB[0][1] = vordem[dims - perc - 1][0]; //lim. sup. alpha EMV
        limICB[1][1] = vordem[dims - perc - 1][2]; //lim. sup. alpha CS
        limICB[2][1] = vordem[dims - perc - 1][4]; //lim. sup. alpha Ng
        limICB[3][0] = vordem[perc - 1][1]; //lim. inf. beta EMV
        limICB[4][0] = vordem[perc - 1][3]; //lim. inf. beta CS
        limICB[5][0] = vordem[perc - 1][5]; //lim. inf. beta Ng
        limICB[3][1] = vordem[dims - perc - 1][1]; //lim. sup. beta EMV
        limICB[4][1] = vordem[dims - perc - 1][3]; //lim. sup. beta CS
        limICB[5][1] = vordem[dims - perc - 1][5]; //lim. sup. beta Ng

        return ( limICB );
    }
    else
    {
        decl perc = floor( (posicao + nivel)/100 );

        limICB[0][0] = vordem[perc - 1][0]; //lim. inf. alpha EMV
        limICB[1][0] = vordem[perc - 1][2]; //lim. inf. alpha CS
        limICB[2][0] = vordem[perc - 1][4]; //lim. inf. alpha Ng
        limICB[0][1] = vordem[dims - perc - 1][0]; //lim. sup. alpha EMV
        limICB[1][1] = vordem[dims - perc - 1][2]; //lim. sup. alpha CS
        limICB[2][1] = vordem[dims - perc - 1][4]; //lim. sup. alpha Ng
        limICB[3][0] = vordem[perc - 1][1]; //lim. inf. beta EMV
    }
}

```



```

    limICB[4][0] = vordem[perc - 1][3]; //lim. inf. beta CS
    limICB[5][0] = vordem[perc - 1][5]; //lim. inf. beta Ng
    limICB[3][1] = vordem[dims - perc - 1][1]; //lim. sup. beta EMV
    limICB[4][1] = vordem[dims - perc - 1][3]; //lim. sup. beta CS
    limICB[5][1] = vordem[dims - perc - 1][5]; //lim. sup. beta Ng

    return ( limICB );
}

} //Fim fBootPerc

/* Função para calcular Zo (bias-correction) para o Intervalo
de Confiança Bootstrap BCa */
fBCaZo(const zP, const zreamostra, const zB)
{
    decl vZ = zeros(2, 1);
    decl vE = zeros(zB, 2);
    decl cvE = zeros(2, 1);

    vE[0][0] = ones(zB, 1) * zP[0];
    vE[1][0] = ones(zB, 1) * zP[1];

    cvE[0][0] = ( sumc(zreamostra[0][0] .< vE[0][0]) ) / zB;
    cvE[1][0] = ( sumc(zreamostra[1][0] .< vE[1][0]) ) / zB;

    vZ[0][0] = quann( cvE[0][0] );
    vZ[1][0] = quann( cvE[1][0] );

    return ( vZ );
} //Fim fBCaZo

/* Função para calcular o Intervalo de Confiança Bootstrap BCa */
fICBCa(const breamostra, const z_quantil, const vZ, const vA, const bB)
{
    decl cc, cr, ct, result;
    decl mE = sortc(breamostra);

    //Inicializando a matriz de percentis
    decl mPerc = zeros(2, 2);

    //Inicializando o vetor dos limites do intervalo de confiança
    decl vlmt = zeros(1, 4);

    //Percentil inferior alpha
    mPerc[0][0] = probn(vZ[0][0] + ((vZ[0][0] - z_quantil) / (1 - vA[0][0] * (vZ[0][0] - z_quantil)))) );
    //Percentil superior alpha
    mPerc[1][0] = probn(vZ[0][0] + ((vZ[0][0] + z_quantil) / (1 - vA[0][0] * (vZ[0][0] + z_quantil)))) );
    //Percentil inferior beta
    mPerc[0][1] = probn(vZ[1][0] + ((vZ[1][0] - z_quantil) / (1 - vA[1][0] * (vZ[1][0] - z_quantil)))) );
    //Percentil superior beta
    mPerc[1][1] = probn(vZ[1][0] + ((vZ[1][0] + z_quantil) / (1 - vA[1][0] * (vZ[1][0] + z_quantil)))) );

    //Obtenção dos limites de confiança
    ct = 0;
    for (cc = 0; cc < 2; ++cc)
    {
        for (cr = 0; cr < 2; ++cr)
        {
            decl ipr = bB * mPerc[cr][cc];
            decl id = floor(ipr);
            if ( (ipr - id) == 0 )
            {

```

```

        if (ipr >= 1)
            vlmt[0][ct] = mE[ipr - 1][cc];
        else
            vlmt[0][ct] = mE[ipr][cc];
    }
    else
    {
        if (ipr >= 1)
            vlmt[0][ct] = mE[ipr - 1 + cr][cc];
        else
            vlmt[0][ct] = mE[ipr + cr][cc];
    }
    ++ct;
} //Fim for cr
} //Fim for cc

result = ( vlmt[0][0] | vlmt[0][2]) ~ ( vlmt[0][1] | vlmt[0][3] );

return ( result );

} //Fim fICBCa

//Função escore modificada de David Firth
fscoreDF(const avScore, const vP)
{
    v_alpha = vP[0];

    decl U_alpha = -n/vP[0] + (1/(vP[1]*(vP[0]^3))*sumc(T) +
        (vP[1]/(vP[0]^3))*sumc(1 ./ T) - (2*n)/(vP[0]^3);
    decl U_beta = -n/(2*vP[1]) + sumc(1 ./ (T + vP[1])) +
        (1/(2*(vP[1]^2)*(vP[0]^2))*sumc(T) - (1/(2*(vP[0]^2))*sumc(1 ./ T);
    decl K_bias_alpha = (-1/vP[0]) * ( 1/2 + (1 / (h_alphaDF*(vP[0]/M_SQRT2PI) + 1)) *
        (1 + 0.5*(vP[0]^2))) );
    decl K_bias_beta = 1 / (2*vP[1]);
    decl U_theta = U_alpha | U_beta;
    decl K_bias_theta = K_bias_alpha | K_bias_beta;

    avScore[0] = U_theta - K_bias_theta;

    return 1; //1 indica sucesso
} //Fim fscoreDF

/* Função para estimar alpha e beta por Jackknife, proposta de Ng et al. (2003) */
fJackk(const jT, const tn)
{
    decl j, ir3, sj, rj, dx, dfuncj, theta_hat_EMV,
        theta_hat_EMM, theta_hat_EMV_EMM;
    decl i_vpj = zeros(2, 1); decl vpj = zeros(2, 1);
    decl i_beta_J = zeros(tn, 1);
    decl s_j = zeros(tn, 1); decl r_j = zeros(tn, 1);
    decl alpha_hat_Jackk_j_EMM = zeros(tn, 1);
    decl beta_hat_Jackk_j_EMM = zeros(tn, 1);
    decl alpha_hat_Jackk_j_EMV = zeros(tn, 1);
    decl beta_hat_Jackk_j_EMV = zeros(tn, 1);

    //Cálculo da média aritmética e harmônica Jackknife
    sj = meanc(jT);
    rj = ( sumc(1 ./ jT) / tn )^(-1);

    //Início do loop Jackknife
    for (j = 0; j < tn; ++j)
    {

```

```

//Momentos
s_j[j] = (tn*s_j - jT[j]) / (tn - 1);
r_j[j] = ((tn*(r_j^(-1)) - jT[j]^(-1)) / (tn - 1))^(-1);
alpha_hat_Jackk_j_EMM[j] = ( 2*((s_j[j] / r_j[j])^(0.5) - 1) )^(0.5);
beta_hat_Jackk_j_EMM[j] = ( s_j[j]*r_j[j] )^(0.5);

//Máxima Verossimilhança
dx = ones(tn, 1);
dx[j][0] = 0;
s_T = selectifr(jT, dx); //Seleção da amostra Jackknife

//Palpite inicial Jackknife
//Palpite de acordo com Birnbaum-Saunders (1969b)
i_beta_J[j] = (s_j[j]*r_j[j])^(1/2);
i_vpj[0] = 1.0; i_vpj[1] = i_beta_J[j]; vpj = i_vpj;

//Maximizando a função floglikeBSJackk
MaxBFGS(floglikeBSJackk, &vpj, &dfuncj, 0, FALSE);

if(ir3 == MAX_CONV || ir3 == MAX_WEAK_CONV)
{
    alpha_hat_Jackk_j_EMV[j] = vpj[0];
    beta_hat_Jackk_j_EMV[j] = vpj[1];
}
else j = j;

} //Fim loop Jackknife

theta_hat_EMV = alpha_hat_Jackk_j_EMV ~ beta_hat_Jackk_j_EMV;
theta_hat_EMM = alpha_hat_Jackk_j_EMM ~ beta_hat_Jackk_j_EMM;
theta_hat_EMV_EMM = theta_hat_EMV ~ theta_hat_EMM;

return ( theta_hat_EMV_EMM );

} //Fim fJackk

/* Função Inversa da Matriz de Informação de Fisher Esperada */
fInvFisher(const vPar, const tn, const aproxIF)
{
    decl InvFisher = zeros(2, 2);

    InvFisher[0][0] = (vPar[0]^2) / (2 * tn);
    InvFisher[0][1] = 0;
    InvFisher[1][0] = 0;
    InvFisher[1][1] = ( (vPar[0]*vPar[1])^2 ) / ( tn * ((vPar[0]/M_SQRT2PI)*aproxIF + 1) );

    return ( InvFisher );
} //Fim fInvFisher

/* Função para calcular Z*(b) usado no Intervalo de Confiança Bootstrap-t */
fBootZ(const zamostra, const zP, const zB, const zn)
{
    decl i, vtheta, aproxBoot_t, abserrBoot_t, Ztheta;
    decl Zalpha = zeros(zB, 1); decl Zbeta = zeros(zB, 1);

    for (i = 0; i < zB; ++i)
    {
        alphaBoot_t = zamostra[i][0];

        //Variância para cada alpha e beta estimado dentro do loop Boot
        vtheta = fInvFisher( (zamostra[i][0:1])', zn, aproxBoot_t );
    }
}

```

```

    Zalpha[i][0] = ( zamostra[i][0] - zP[0] ) / sqrt( vtheta[0][0] );
    Zbeta[i][0] = ( zamostra[i][1] - zP[1] ) / sqrt( vtheta[1][1] );
}

Ztheta = Zalpha ~ Zbeta;

return ( Ztheta );

} //Fim fBootZ

/* Função para estimar t (ponto crítico), para o cálculo do Intervalo de
   Confiança Bootstrap-t */
fBoot_t(const tZ, const tB, const nivel)
{
    decl ordemZ = sortc(tZ);
    decl posZ = tB*nivel;
    decl t = zeros(2, 2);

    if (imod(posZ, 100) == 0)
    {
        decl perct = posZ/100;

        t[0][0] = ordemZ[perct - 1][0]; //t inf. alpha
        t[0][1] = ordemZ[tB - perct - 1][0]; //t sup. alpha
        t[1][0] = ordemZ[perct - 1][1]; //t inf. beta
        t[1][1] = ordemZ[tB - perct - 1][1]; //t sup. beta

        return ( t );
    }
    else
    {
        decl perct = floor( (posZ + nivel)/100 );

        t[0][0] = ordemZ[perct - 1][0]; //t inf. alpha
        t[0][1] = ordemZ[tB - perct - 1][0]; //t sup. alpha
        t[1][0] = ordemZ[perct - 1][1]; //t inf. beta
        t[1][1] = ordemZ[tB - perct - 1][1]; //t sup. beta

        return ( t );
    }
} //Fim fBoot_t

/* Função para gerar semente aleatória */
currenttime()
{
    decl h, m, s, stim = time();

    sscanf(stim[0:1], "%d", &h);
    sscanf(stim[3:4], "%d", &m);
    sscanf(stim[6:7], "%d", &s);

    return ( h * 3600 + m * 60 + s );
} //Fim currenttime

```

B.3 Programa de Ligação

```

/*****
* Autor: Artur José Lemonte
* Programa: Saunders.h
*

```



```

* Programa: Likelihood_ratio.ox
*
* Data de início: 27-08-2005
*
* Função: Calcular o tamanho dos testes da razão de verossimilhanças tradicional, razão
*         de verossimilhanças bootstrap e razão de verossimilhanças corrigido pelo fator
*         de Bartlett
*
* Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
* Co-orientador: Prof. Dr. Klaus Vasconcellos
*
* Versão: 1.7
*
* Última modificação: 11-11-2005
*****/

/* Bibliotecas utilizadas */
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <oxfloat.h>
#import <maximize>

/* Constantes fixas para simulação */
const decl t_n = <5; 10; 20; 40; 60>; //Tamanho amostral
const decl t_Ho = <0.75>; //Valor de alpha a ser testado em Ho
const decl beta = 1.0; //Parâmetro de escala
const decl REP = 5000; //Réplicas de Monte Carlo
const decl B = 600; //Réplicas Bootstrap

/* Variáveis globais utilizadas */
decl alpha_Ho; //Valor de alpha em Ho
decl n; //Tamanho amostral
decl T; //T ~ BS(alpha, beta) para a estimação de MV
decl sB_T; //sB_T ~ BS(alpha, beta) para a estimação por Bootstrap
decl c; //Contador para o loop de alpha

/* Função de log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
bi-paramétrica --- MAXIMIZADA EM Ho --- para o teste da Razão de
Verossimilhanças Tradicional PARA O PARÂMETRO ALPHA */
floglikeBS_Ho(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(alpha_Ho*vP[0]) +
        sumc( log( ((vP[0]*(1 ./ T)).^0.5) + ((vP[0]*(1 ./ T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[0]*(alpha_Ho^2)))*sumc(T) - (vP[0]/(2*(alpha_Ho^2)))*sumc(1 ./ T)
        + n/(alpha_Ho^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/(2*vP[0]) + sumc(1 ./ (T + vP[0])) +
            (1/(2*(vP[0]^2)*(alpha_Ho^2)))*sumc(T) - (1/(2*(alpha_Ho^2)))*sumc(1 ./ T);
    }

    //Condição de convergência
    if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;
    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

//Fim floglikeBS_Ho

/* Função de log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
bi-paramétrica --- MAXIMIZADA EM Ho --- para o teste da Razão de
Verossimilhanças Bootstrap PARA O PARÂMETRO ALPHA */

```

```

floglikeBS_Ho_boot(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(alpha_Ho*vP[0]) +
        sumc( log( ((vP[0]*(1 ./ sB_T)).^0.5) + ((vP[0]*(1 ./ sB_T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[0]*(alpha_Ho^2)))*sumc(sB_T) - (vP[0]/(2*(alpha_Ho^2)))*sumc(1 ./ sB_T)
        + n/(alpha_Ho^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/(2*vP[0]) + sumc(1 ./ (sB_T + vP[0])) +
            (1/(2*(vP[0]^2)*(alpha_Ho^2)))*sumc(sB_T) - (1/(2*(alpha_Ho^2)))*sumc(1 ./ sB_T);
    }

    //Condição de convergência
    if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;
    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

//Fim floglikeBS_Ho_boot

/* Função de log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
   bi-paramétrica --- MAXIMIZADA EM Ho --- para o teste da Razão de
   Verossimilhanças Bootstrap PARA O PARÂMETRO ALPHA */
floglikeBS_Ho_BOOT(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(alpha_Ho*vP[0]) +
        sumc( log( ((vP[0]*(1 ./ T)).^0.5) + ((vP[0]*(1 ./ T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[0]*(alpha_Ho^2)))*sumc(T) - (vP[0]/(2*(alpha_Ho^2)))*sumc(1 ./ T)
        + n/(alpha_Ho^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/(2*vP[0]) + sumc(1 ./ (T + vP[0])) +
            (1/(2*(vP[0]^2)*(alpha_Ho^2)))*sumc(T) - (1/(2*(alpha_Ho^2)))*sumc(1 ./ T);
    }

    //Condição de convergência
    if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;
    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

//Fim floglikeBS_Ho_BOOT

/* Função de log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
   bi-paramétrica --- MAXIMIZADA EM H1 --- para o teste da Razão de
   Verossimilhanças tradicional PARA O PARÂMETRO ALPHA */
floglikeBS_H1(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(vP[0]*vP[1]) +
        sumc( log( ((vP[1]*(1 ./ T)).^0.5) + ((vP[1]*(1 ./ T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[1]*(vP[0]^2)))*sumc(T) - (vP[1]/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ T)
        + n/(vP[0]^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/vP[0] + (1/(vP[1]*(vP[0]^3)))*sumc(T) +
            (vP[1]/(vP[0]^3))*sumc(1 ./ T) - (2*n)/(vP[0]^3);
    }
}

```

```

    (avScore[0])[1] = -n/(2*vP[1]) + sumc(1 ./ (T + vP[1])) +
        (1/(2*(vP[1]^2)*(vP[0]^2)))*sumc(T) - (1/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ T);
}

//Condição de convergência
if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
else
return 1; // 1 indica sucesso

} //Fim floglikeBS_H1

/* Função de log-verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders
bi-paramétrica --- MAXIMIZADA EM H1 --- para o teste da Razão de
Verossimilhanças Bootstrap PARA O PARÂMETRO ALPHA */
floglikeBS_H1_boot(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -n*log( 2*M_SQRT2PI ) -n*log(vP[0]*vP[1]) +
        sumc( log( ((vP[1]*(1 ./ sB_T)).^0.5) + ((vP[1]*(1 ./ sB_T)).^1.5) ) )
        - (1/(2*vP[1]*(vP[0]^2)))*sumc(sB_T) - (vP[1]/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ sB_T)
        + n/(vP[0]^2);

    //Derivadas analíticas da função de log-verossimilhança
    if (avScore)
    {
        (avScore[0])[0] = -n/vP[0] + (1/(vP[1]*(vP[0]^3)))*sumc(sB_T) +
            (vP[1]/(vP[0]^3))*sumc(1 ./ sB_T) - (2*n)/(vP[0]^3);
        (avScore[0])[1] = -n/(2*vP[1]) + sumc(1 ./ (sB_T + vP[1])) +
            (1/(2*(vP[1]^2)*(vP[0]^2)))*sumc(sB_T) - (1/(2*(vP[0]^2)))*sumc(1 ./ sB_T);
    }

    //Condição de convergência
    if ( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
return 0;
    else
return 1; // 1 indica sucesso

} //Fim floglikeBS_H1_boot

/* Função para gerar o vetor de reamostragem Bootstrap em sua forma paramétrica */
f_gera_Y(const func, const vP, const cn)
{
    decl ci;
    decl v_X = zeros(cn, 1);
    decl v_Y = zeros(cn, 1);

    for (ci = 0; ci < cn; ci++)
    {
        v_X[ci] = (0.5*vP[0]) * rann(1, 1);
        v_Y[ci] = vP[1] * ( 1 + 2*(v_X[ci]^2) + 2*v_X[ci]*((1 + v_X[ci]^2)^(0.5)) );
    }

    func[0] = v_Y; //Amostra bootstrap: v_Y ~ B-S(alpha_hat, beta_hat)

    return 1; //1 indica sucesso

} //Fim f_gera_Y

/* Função para estimar a distribuição empírica por bootstrap
do teste da razão de verossimilhanças tradicional */
fBoot(const vpar, const tn, const nB)
{

```



```

decl X1, vT2, k, ir2, sB, rB, i_beta_B, dfunc_LRBoot_Ho,
      dfunc_LRBoot_H1, sB_T1, vpB_Ho;
decl LR_BOOT = zeros(nB, 1);
decl i_vpB = zeros(2, 1);
decl vpB = zeros(2, 1);

//Início do loop Bootstrap
for (k = 0, sB = 0, rB = 0, i_beta_B = 0; k < nB; ++k)
{
  //Selecionando amostra Bootstrap [versão Paramétrica, isto é,
  //sB_T ~ B-S(alpha_Ho, beta_hat_Ho)]
  f_gera_Y(&sB_T1, vpar, tn);
  sB_T = sB_T1;

  //Média aritmética e harmônica
  sB = meanc(sB_T);
  rB = (sumc(1 ./ sB_T)/tn)^(-1);

  //Palpite inicial Bootstrap
  //Palpite de acordo com Birnbaum-Saunders (1969b)
  i_beta_B = (sB*rB)^(1/2);
  i_vpB[0] = 1.0;
  i_vpB[1] = i_beta_B;
  vpB = i_vpB;

  //Maximizando a função de log-verossimilhança em H1
  ir2 = MaxBFGS(floglikeBS_H1_boot, &vpB, &dfunc_LRBoot_H1, 0, FALSE);

  if(ir2 == MAX_CONV || ir2 == MAX_WEAK_CONV)
  {
    //Chute em Ho
    vpB_Ho = i_beta_B;

    //Maximizando a função de log-verossimilhança em Ho
    MaxBFGS(floglikeBS_Ho_boot, &vpB_Ho, &dfunc_LRBoot_Ho, 0, FALSE);

    //Calculando o valor de LR_BOOT
    LR_BOOT[k] = 2 * ( dfunc_LRBoot_H1 - dfunc_LRBoot_Ho);
  }
  else --k;
}

return ( LR_BOOT );
}

//Fim fBoot

/* Função para estimar os pontos críticos bootstrap, para o cálculo do
   teste da razão de verossimilhanças bootstrap */
fBoot_Crit(const LRB, const tB, const nivel)
{
  decl ordemLRB = sortc(LRB);
  decl posLRB = tB*nivel;
  decl pc;

  if (imod(posLRB, 100) == 0)
  {
    decl perc = posLRB/100;
    pc = ordemLRB[tB - perc - 1][0];
    return ( pc );
  }
  else
  {

```

```

    decl perc = floor( (posLRB + nivel)/100 );
    pc = ordemLRB[tB - perc - 1][0];
    return ( pc );
}

} //Fim fBoot_Crit

/*****
INÍCIO DO CORPO PRINCIPAL DO PROGRAMA
*****/
main()
{
    //Variáveis utilizadas no programa
    decl i, ir1, c_n, Exectime, X, Z, s, r, v_theta, i_beta,
        vp, dfunc_H1, vp_Ho, dfunc_LRT_Ho, pcLRB_10, pcLRB_5, pcLRB_1, pcLRB_05,
        aprox, abserr, bartlett, Kalpha, vparBP, vp_Ho_B, dfunc_LR_Ho_B, beta_hat_Ho;

    //Iniciando o tempo de processamento
    Exectime = timer();

    //Gerador de números pseudo-aleatórios de George-Marsaglia
    ranseed("GM");

    //Pontos críticos da Qui-Quadrado
    decl pqui10 = quanchi(0.90, 1);
    decl pqui5 = quanchi(0.95, 1);
    decl pqui1 = quanchi(0.99, 1);
    decl pqui05 = quanchi(0.995, 1);

    //---Loop para diferentes valores de alpha_Ho
    for (c = 0; c < sizerc(t_Ho); ++c)
    {
        //Vetor de parâmetros verdadeiros
        v_theta = t_Ho[c][0] | beta;

        //Valor de alpha em Ho
        alpha_Ho = t_Ho[c][0];

        //---Loop para os tamanhos amostrais
        for (c_n = 0; c_n < sizerc(t_n); ++c_n)
        {
            //Valor para o tamanho da amostra
            n = t_n[c_n][0];

            //Variável para os pontos críticos
            decl pcLR = zeros(3, 1);

            //Variável para o "chute" inicial MLE
            decl i_vp = zeros(2, 1);

            //==== Variáveis para os Testes de Hipóteses =====//
            //---Teste LR tradicional
            decl c_LRT_alpha_90 = c_LRT_alpha_95 = c_LRT_alpha_99 = 0;
            decl c_LRT_alpha_995 = 0; decl LRT_alpha = zeros(REP, 1);

            //---Teste LR corrigido pelo fator de Bartlett
            decl c_LRc_alpha_90 = c_LRc_alpha_95 = c_LRc_alpha_99 = 0;
            decl c_LRc_alpha_995 = 0; decl LRc_alpha = zeros(REP, 1);

            //---Teste LR Bootstrap
            decl c_LRBoot_alpha_90 = c_LRBoot_alpha_95 = c_LRBoot_alpha_99 = 0;
            decl c_LRBoot_alpha_995 = 0; decl Pcrit = zeros(B, 1);
            decl LRBoot_alpha = zeros(REP, 1);

            //==== Fator de correção de Bartlett para o teste LRc =====

```

```

bartlett = (1/n) * (23/12 + ( 1 / (2*((alpha_Ho*Kalpha/M_SQRT2PI + 1)^2)) ) *
    ( 1 - 4*(alpha_Ho^2) - 5*(alpha_Ho^4)/4
    + (8*(1 + alpha_Ho^2)*halpha)/(alpha_Ho*M_SQRT2PI) ) );

//---Início do Loop de Monte Carlo
for (i = 0, s = 0, r = 0; i < REP; ++i)
{
    //Condição para a semente no cálculo do tamanho dos testes LR, LRc e LRb
    ranseed({1981 + i + 55550055555, 2005 + i + 55550055555});

    //Gerando números pseudo-aleatórios da distribuição BS(alpha, beta)
    Z = rann(n, 1); //Z ~ N(0, 1)
    X = (0.5*alpha_Ho) * Z; //X ~ N(0, 0.25*alpha_Ho^2)
    T = beta * ( 1 + 2*(X.^ 2) + 2*X .* ((1 + X.^ 2).^ (0.5)) );
    //T ~ BS(alpha[c][0], beta)

    //Cálculo da média aritmética e harmônica
    s = meanc(T);
    r = (sumc(1 ./ T)/n)^(-1);

    //Palpite inicial para a maximização de floglikeBS
    //Palpite de acordo com Birnbaum-Saunders (1969b)
    i_beta = (s*r)^(0.5);
    i_vp[0] = 1.0;
    i_vp[1] = i_beta;
    vp = i_vp;

    //Maximizando a função floglikeBS_H1
    ir1 = MaxBFGS(floglikeBS_H1, &vp, &dfunc_H1, 0, FALSE);

    if(ir1 == MAX_CONV || ir1 == MAX_WEAK_CONV)
    {
        //=====Teste da Razão de Verossimilhanças tradicional
        //Chute inicial em Ho (alpha é conhecido)
        vp_Ho = i_beta;

        //Maximizando a função de log-verossimilhança em Ho
        MaxBFGS(floglikeBS_Ho, &vp_Ho, &dfunc_LRT_Ho, 0, FALSE);

        //Calculando LRT
        LRT_alpha[i] = 2 * ( dfunc_H1 - dfunc_LRT_Ho );

        //Aplicando o teste
        if (LRT_alpha[i] > pqui10) ++c_LRT_alpha_90;
        if (LRT_alpha[i] > pqui5) ++c_LRT_alpha_95;
        if (LRT_alpha[i] > pqui1) ++c_LRT_alpha_99;
        if (LRT_alpha[i] > pqui05) ++c_LRT_alpha_995;

        //=====Teste da Razão de Verossimilhanças corrigido pelo fator de Bartlett
        //Calculando o teste LRb
        LRc_alpha[i] = ( LRT_alpha[i] ) / ( 1 + bartlett );

        //Aplicando o teste
        if (LRc_alpha[i] > pqui10) ++c_LRc_alpha_90;
        if (LRc_alpha[i] > pqui5) ++c_LRc_alpha_95;
        if (LRc_alpha[i] > pqui1) ++c_LRc_alpha_99;
        if (LRc_alpha[i] > pqui05) ++c_LRc_alpha_995;

        //=====Teste da Razão de Verossimilhanças Bootstrap
        //---Calculando LRBoot em fBoot
        //Chute inicial em Ho
        vp_Ho_B = (s*r)^(0.5);

        //Maximizando a função de log-verossimilhança em Ho
        MaxBFGS(floglikeBS_Ho_BOOT, &vp_Ho_B, &dfunc_LR_Ho_B, 0, FALSE);
    }
}

```

```

//Valor estimado de beta em Ho
beta_hat_Ho = vp_Ho_B;

//vparBP é sob Ho
vparBP = alpha_Ho | beta_hat_Ho;
Pcrit = fBoot(vparBP, n, B);

//Calculando os pontos críticos bootstrap
pcLRB_10 = fBoot_Crit(Pcrit, B, 10.0);
pcLRB_5 = fBoot_Crit(Pcrit, B, 5.0);
pcLRB_1 = fBoot_Crit(Pcrit, B, 1.0);
pcLRB_05 = fBoot_Crit(Pcrit, B, 0.5);

//Calculando o teste LRBoot
LRBoot_alpha[i] = 2 * ( dfunc_H1 - dfunc_LRT_Ho );

//Aplicando o teste
if (LRBoot_alpha[i] > pcLRB_10) ++c_LRBoot_alpha_90;
if (LRBoot_alpha[i] > pcLRB_5) ++c_LRBoot_alpha_95;
if (LRBoot_alpha[i] > pcLRB_1) ++c_LRBoot_alpha_99;
if (LRBoot_alpha[i] > pcLRB_05) ++c_LRBoot_alpha_995;

}
else --i;

} //Fim do loop de Monte Carlo

//Impressão dos parâmetros de simulação
print("\n\t DATA: ", date());
print("\n\t HORA: ", time());
print("\n\t NUM. REP. DE MONTE CARLO: ", REP);
print("\n\t NUM. REP. BOOT: ", B);
print("\n\t =====");
print("\n\t TAMANHO AMOSTRA DESTA SIMULAÇÃO: ", n);
print("\n\t =====");
print("\n\t PARÂMETROS VERDADEIROS ", "%12.4f", "%c", {"Alpha", "Beta"},
      "%r", {" ", " }, v_theta');
print("\n\t |----- TESTES ESTATÍSTICOS -----|");
print("\n\t |--- LR TRADICIONAL ---|");
print("\n\t\t90%\t\t95%\t\t99%\t\t99.5%", "%12.4f",
      (1/REP) * (c_LRT_alpha_90~c_LRT_alpha_95~c_LRT_alpha_99~c_LRT_alpha_995) );

print("\n\t |--- LR BARTLETT ---|");
print("\n\t\t90%\t\t95%\t\t99%\t\t99.5%", "%12.4f",
      (1/REP) * (c_LRC_alpha_90~c_LRC_alpha_95~c_LRC_alpha_99~c_LRC_alpha_995) );

print("\n\t |--- LR BOOTSTRAP ---|");
print("\n\t\t90%\t\t95%\t\t99%\t\t99.5%", "%12.4f",
      (1/REP) * (c_LRBoot_alpha_90~c_LRBoot_alpha_95~c_LRBoot_alpha_99~c_LRBoot_alpha_995) );

print("\n\t DATA: ", date());
print("\n\t HORA: ", time());
print("\n\t TEMPO TOTAL DE EXECUÇÃO: ", timespan(Exectime)," segundos.\n\n" );
print("-----\n");

} //Fim loop amostra

print("\t\t\t\t\t FIM LOOP PARA ALPHA EM Ho IGUAL A ", alpha_Ho[c][0]);
print("\n===== \n");

} //Fim loop valores de alpha

} //Fim do programa Prog_TAMANHO_BI.ox

```

B.5 Programa em R

```
#####
#Autor: Artur José Lemonte
#Programa: ProgR_Hist.R
#####

#Bibliotecas principais
library(MASS)
library(KernSmooth)

#Lendo os dados
dados <- read.table("C:\\Users\\Alunos\\Artur\\Artur30.03.2005\\Mestrado
\\DISSERTACAO\\R\\0.1alpha.txt", header=T)
attach(dados)

#Salvando o gráfico no formato .eps
postscript("C:/Users/Alunos/Artur/Artur30.03.2005/Mestrado/DISSERTACAO/TeseLaTeX/
Texto/graficos/IC_10_01alpha.eps", horizontal=FALSE,height=8.0,width=5.0, pointsize=10)

#Definindo variáveis
a <- dados$alpha
h <- dpih(a)/2
xli <- min(a)
xls <- max(a)
bins <- seq(xli-0.001, xls+0.001+h, by=h)

#Precaução com os limites dos eixos
hist(a, breaks=bins, ylim=c(-260,220), xlim=c(xli-0.001,0.265),
      type="n",xlab="",yaxt='n',ylab="",main="")

abline(h=0)
abline(v=0.1, lty=2)

#Intervalos de confiança
#90%
segments(0.0584, -20, 0.1262, -20, lty=1)
segments(0.0627, -29, 0.1357, -29, lty=2)
segments(0.0648, -38, 0.1403, -38, lty=3)
segments(0.0536, -47, 0.1133, -47, lty=4)
segments(0.0577, -56, 0.1218, -56, lty=5)
segments(0.0596, -65, 0.1259, -65, lty=6)
segments(0.0753, -74, 0.1634, -74, lty=7)
segments(0.0678, -83, 0.1257, -83, lty=8)

#95%
segments(0.0518, -106, 0.1327, -106, lty=1)
segments(0.0557, -115, 0.1427, -115, lty=2)
segments(0.0576, -124, 0.1475, -124, lty=3)
segments(0.0472, -133, 0.1176, -133, lty=4)
segments(0.0508, -142, 0.1264, -142, lty=5)
segments(0.0525, -151, 0.1307, -151, lty=6)
segments(0.0727, -160, 0.1881, -160, lty=7)
segments(0.0624, -169, 0.1304, -169, lty=8)

#99%
segments(0.0391, -192, 0.1455, -192, lty=1)
segments(0.0421, -201, 0.1564, -201, lty=2)
segments(0.0435, -210, 0.1616, -210, lty=3)
segments(0.0350, -219, 0.1251, -219, lty=4)
segments(0.0376, -228, 0.1345, -228, lty=5)
segments(0.0389, -237, 0.1390, -237, lty=6)
segments(0.0684, -246, 0.2643, -246, lty=7)
segments(0.0527, -255, 0.1321, -255, lty=8)

#Legenda superior dos segmentos
```

```

#90%
text(0.0584 - 0.002, -20, " 0.18 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0627 - 0.0025, -29, " 0.7 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0648 - 0.002, -38, " 1.3 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0536 - 0.003, -47, " 0.22 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0577 - 0.002, -56, " 0.7 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0596 - 0.003, -65, " 1.4 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0753 - 0.0035, -74, " 9.82 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0678 - 0.004, -83, " 4.44 ", cex = .5, srt=90)

#95%
text(0.0518 - 0.002, -106, " 0.02 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0557 - 0.004, -115, " 0.02 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0576 - 0.002, -124, " 0.2 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0472 - 0.003, -133, " 0.04 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0508 - 0.002, -142, " 0.16 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0525 - 0.001, -151, " 0.2 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0727 - 0.004, -160, " 7.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0624 - 0.004, -169, " 1.8 ", cex = .5, srt=90)

#99%
text(0.0391 - 0.004, -192, " 0.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0421 - 0.003, -201, " 0.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0435 - 0.002, -210, " 0.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0350 - 0.0021, -219, " 0.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0376 - 0.002, -228, " 0.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0389 - 0.002, -237, " 0.0 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0684 - 0.004, -246, " 3.96 ", cex = .5, srt=90)
text(0.0527 - 0.0025, -255, " 0.24 ", cex = .5, srt=90)

#Legenda inferior dos segmentos
#90%
text(0.1262 + 0.002, -20, " 19.82 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1357 + 0.001, -29, " 13.26 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1403 + 0.003, -38, " 11.12 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1133 + 0.001, -47, " 33.48 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1218 + 0.0019, -56, " 23.76 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1259 + 0.0025, -65, " 20.34 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1634 + 0.0015, -74, " 6.4 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1257 + 0.0019, -83, " 21.24 ", cex = .5, srt=90)

#95%
text(0.1327 + 0.0015, -106, " 15.24 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1427 + 0.0009, -115, " 10.22 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1475 + 0.0015, -124, " 8.62 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1176 + 0.0021, -133, " 28.74 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1264 + 0.0015, -142, " 20.02 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1307 + 0.002, -151, " 17.22 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1881 + 0.0025, -160, " 3.24 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1304 + 0.001, -169, " 18.46 ", cex = .5, srt=90)

#99%
text(0.1455 + 0.002, -192, " 9.28 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1564 + 0.001, -201, " 5.92 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1616 + 0.001, -210, " 4.66 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1251 + 0.002, -219, " 21.54 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1345 + 0.0019, -228, " 15.18 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1390 + 0.002, -237, " 12.74 ", cex = .5, srt=90)
text(0.2643 + 0.0019, -246, " 0.68 ", cex = .5, srt=90)
text(0.1321 + 0.001, -255, " 17.26 ", cex = .5, srt=90)

#Níveis dos Intervalos de Confiança
text(0.215, -47, " 90% ", cex = .8, srt=90)
text(0.215, -133, " 95% ", cex = .8, srt=90)
text(0.215, -219, " 99% ", cex = .8, srt=90)

```

```

#Inserindo o parâmetro \alpha no gráfico
text(0.095, 225, expression(alpha), cex = .9,srt=90)

#Inserindo legendas dos segmentos
segments(0.17, 10+50, 0.17, 35+50, lty=1)
segments(0.18, 10+50, 0.18, 35+50, lty=2)
segments(0.19, 10+50, 0.19, 35+50, lty=3)
segments(0.20, 10+50, 0.20, 35+50, lty=4)
segments(0.21, 10+50, 0.21, 32+50, lty=5)
segments(0.22, 10+50, 0.22, 35+50, lty=6)
segments(0.23, 10+50, 0.23, 35+50, lty=7)
segments(0.24, 10+50, 0.24, 35+50, lty=8)

text(0.15, 35+50, " Intervalos", cex = .8, srt=90)
text(0.16, 35+50, " de Confiança ", cex = .8, srt=90)
text(0.17, 80+5, " ICA ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.18, 80+5, " ICCS ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.19, 80+5, " ICNg ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.20, 80+5, " ICP ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.21, 80+5, " ICPCS ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.22, 80+5, " ICPNg ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.23, 80+5, " ICBt ", cex = .9, srt=90,adj=0)
text(0.24, 80+5, " BCa ", cex = .9, srt=90,adj=0)

text(0.15, 125+50, "Taxas de Cobertura", cex = .8, srt=90)
text(0.16, 125+50, "99% 95% 90%", cex = .8, srt=90)
text(0.17, 130+5, " 90.7 84.7 80.0", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.18, 130+5, " 94.1 89.8 86.0", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.19, 130+5, " 95.3 91.2 87.6", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.20, 130+5, " 78.5 71.2 66.3", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.21, 130+5, " 84.8 79.8 75.5", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.22, 130+5, " 87.3 82.6 78.3", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.23, 130+5, " 95.4 89.8 83.8", cex = .8, srt=90,adj=0)
text(0.24, 130+5, " 82.5 79.7 74.3", cex = .8, srt=90,adj=0)

#Inserindo n = 10 no gráfico
mtext("n = 10", side=2, line=1)

#Inserindo caixa no plot
box()

#Fechando gráfico (no R) no formato .eps
dev.off()

```

APÊNDICE C

Dados Reais

Neste apêndice apresentamos os dados reais utilizados neste trabalho.

Tabela C.1: Tempos de Vida de Suportes.

152.7	172.0	172.5	173.3	193.0	204.7	216.5	234.9	262.6	422.6
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Tabela C.2: Tempos de Vida de Alumínio.

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105	107	108	108	108	109
109	112	112	113	114	114	114	116	119	120	120	120	121	121	123
124	124	124	124	124	128	128	129	129	130	130	130	131	131	131
131	131	132	132	132	133	134	134	134	134	134	136	136	137	138
138	138	139	139	141	141	142	142	142	142	142	142	144	144	145
146	148	148	149	151	151	152	155	156	157	157	157	157	158	159
162	163	163	164	166	166	168	170	174	196	212				

Referências

- [1] Abramowitz, M. L. & Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- [2] Achcar, J. A. (1993). Inference for the Birnbaum–Saunders fatigue life model using Bayesian methods. *Computational Statistics & Data Analysis*, **15**, 367–380.
- [3] Anderson, J. A. & Richardson, S. C. (1979). Logistic discrimination and bias correction in maximum likelihood estimation. *Technometrics*, **22**, 621–627.
- [4] Barndorff-Nielsen, O. E. (1986). Inference on full or partial parameters based on the standardized signed log-likelihood ratio. *Biometrika*, **73**, 307–322.
- [5] Barndorff-Nielsen, O. E. (1991). Modified signed log-likelihood ratio. *Biometrika*, **78**, 557–563.
- [6] Barndorff-Nielsen, O. E. & Cox, D. R. (1989). *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*. Chapman & Hall, London.
- [7] Barndorff-Nielsen, O. E. & Cox, D. R. (1994). *Inference and Asymptotics*. Chapman & Hall, London.
- [8] Bartlett, M. S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society A*, **160**, 268–282.
- [9] Bartlett, M. S. (1953). Approximate confidence intervals II. *Biometrika*, **40**, 306–317.
- [10] Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (2001). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, Volume I*, 2nd ed. Prentice Hall, London.
- [11] Birnbaum, Z. W. & Saunders, S. C. (1969a). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, **6**, 319–327.
- [12] Birnbaum, Z. W. & Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal Applied Probability*, **6**, 328–347.

- [13] Box, M. J. (1971). Bias in nonlinear estimation (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **33**, 171–201.
- [14] Buse, A. (1982). The likelihood ratio, Wald, and Lagrange multiplier tests: An expository note. *The American Statistician*, **36**, 153–157.
- [15] Chang, D. S. & Tang, L. C. (1993). Reliability bounds and critical time for the Birnbaum-Saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 464–469.
- [16] Chang, D. S. & Tang, L. C. (1994). Percentile bounds and tolerance limits for the Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **23**, 2853–2863.
- [17] Cohen, A. C., Whitten, B. J. & Ding, Y. (1984). Modified moment estimation for the three-parameter Weibull distribution. *Journal of Quality Technology*, **16**, 159–167.
- [18] Cook, R., Tsai, C. & Wei, B. (1986). Bias in nonlinear regression. *Biometrika*, **73**, 615–623.
- [19] Cordeiro, G. M. (1999). *Introdução à Teoria Assintótica*. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.
- [20] Cordeiro, G. M. & Cribari-Neto, F. (1993). On Bartlett corrections, bias reduction and a new class of transformations. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **7**, 179–200.
- [21] Cordeiro, G. M. & Cribari-Neto, F. (1998). On bias reduction in exponential and non-exponential family regression models. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **27**, 485–500.
- [22] Cordeiro, G. M. & Ferrari, S. L. P. (1991). A modified score statistic having chi-squared distribution to order n^{-1} . *Biometrika*, **78**, 573–582.
- [23] Cordeiro, G. M. & Klein, R. (1994). Bias correction in ARMA models. *Statistics and Probability Letters*, **19**, 169–176.
- [24] Cordeiro, G. M. & McCullagh, P. (1991). Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **53**, 629–643.
- [25] Cordeiro, G. M. & Vasconcellos, K. L. P. (1997). Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, **35**, 155–164.
- [26] Cordeiro, G. M. & Vasconcellos, K. L. P. (1999). Second-order biases of the maximum likelihood estimates in von Mises regression models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 901–910.
- [27] Cordeiro, G. M., Rocha, E. C., Rocha, J. G. C. & Cribari-Neto, F. (1997). Bias-corrected maximum likelihood estimation for the beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **58**, 21–35.
- [28] Cordeiro, G. M., Vasconcellos, K. L. P. & Santos, M. L. (1998). On the second order bias of parameter estimates in nonlinear regressions models with Student t erros. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **60**, 363–378.

- [29] Cordeiro, G. M., Ferrari, S. L. P., Uribe-Opazo, M. A. & Vasconcellos, K. L. P. (2000). Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, **46**, 317–328.
- [30] Cox, D. R. & Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. Chapman & Hall, London.
- [31] Cox, D. R. & Snell, E. (1968). A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **30**, 248–275.
- [32] Cribari-Neto, F. & Cordeiro, G. M. (1996). On Bartlett and Bartlett-type corrections. *Econometric Reviews*, **15**, 339–367.
- [33] Cribari-Neto, F. & Vasconcellos, K. L. P. (2002). Nearly unbiased maximum likelihood estimation for the beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **72**, 107–118.
- [34] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S. G. (1999). Econometric and statistical computing using Ox. *Computational Economics*, **21**, 277–295.
- [35] Cribari-Neto, F., Botter, D. A., Cordeiro, G. M. & Ferrari, S. L. P. (1998). Bias reduction in one-parameter exponential family models. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **27**, 761–782.
- [36] Davison, A. C. & Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge University Press, New York.
- [37] Díaz-García, J. A. & Leiva-Sánchez, V. (2005). A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **128**, 445–457.
- [38] Desmonde, A. F. (1985). Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics*, **13**, 171–183.
- [39] Desmonde, A. F. (1986). On the relationship between two fatigue-life models. *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 167–169.
- [40] DiCiccio, T. J. & Tibshirani, R. (1987). Bootstrap confidence intervals and bootstrap approximations. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 163–170.
- [41] Doornik, J. A. (2001). *Ox: An Object-Oriented Matrix Language*. 4th ed. Timberlake Consultants Press, London; Oxford, <http://www.doornik.com>.
- [42] Dupuis, D. J. & Mills, J. E. (1998). Robust estimation of the Birnbaum-Saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **47**, 88–95.
- [43] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**, 1–26.
- [44] Efron, B. (1981). Nonparametric standard errors and confidence intervals. *Canadian Journal of Statistics*, **9**, 139–172.

- [45] Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 171–200.
- [46] Efron, B. & Tibshirani, R. J. (1986). Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy. *Statistical Science*, **1**, 54–77.
- [47] Efron, B. & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [48] Engelhardt, M. & Bain, L. J. (1977). Simplified statistical procedures for the Weibull or extreme-value distribution. *Technometrics*, **19**, 323–332.
- [49] Engelhardt, M., Bain, L. J. & Wright, F. T. (1981). Inferences on the parameters of the Birnbaum–Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. *Technometrics*, **23**, 251–255.
- [50] Ferrari, S. L. P. & Cribari-Neto, F. (1993). On the corrections to the Wald test of non-linear restrictions. *Economics Letters*, **42**, 321–326.
- [51] Ferrari, S. L. P. & Cribari-Neto, F. (1998). On bootstrap and analytical bias corrections. *Economics Letters*, **58**, 7–15.
- [52] Ferrari, S. L. P., Botter, D. A., Cordeiro, G. M. & Cribari-Neto, F. (1996). Second and third order bias reduction for one-parameter family models. *Statistics and Probability Letters*, **30**, 339–345.
- [53] Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, **80**, 27–38.
- [54] Fisher, R. A. (1925). Theory of statistical estimation. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, **22**, 700–725.
- [55] Fryer, J. G. & Robertson, C. A. (1972). A comparason of some methods for estimating mixed normal distributions. *Biometrika*, **59**, 639–648.
- [56] Galea, M., Leiva-Sánchez, V. & Paula, G. A. (2004). Influence diagnostics in log-Birnbaum–Saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 1049–1064.
- [57] Haldane, J. B. S. (1953). The estimation of two parameters from a sample. *Sankhyā*, **12**, 313–320.
- [58] Haldane, J. B. S. & Smith, S. M. (1956). The sampling distribution of a maximum likelihood estimate. *Biometrika*, **43**, 96–103.
- [59] Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *Annals of Statistics*, **16**, 927–953.
- [60] Jin, X. & Kawczak, J. (2003). Birnbaum–Saunders and lognormal kernel estimators for modelling durations in high frequency financial data. *Annals of Economics and Finance*, **4**, 103–124.
- [61] Johnson, N., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions – Volume 1*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York.

- [62] Johnson, N., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions – Volume 2*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York.
- [63] Kappenman, R. F. (1985). Estimation for the three-parameter Weibull, lognormal, and gamma distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, **3**, 11–23.
- [64] Lawley, D. (1956). A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, **43**, 295–303.
- [65] Lehmann, E. L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [66] Lehmann, E. L. & Casella, E. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer-Verlag, New York.
- [67] Lu, M. & Chang, D. S. (1997). Bootstrap prediction intervals for the Birnbaum–Saunders distribution. *Microelectron Reliability*, **37**, 1213–1216.
- [68] MacKinnon, J. G. & Smith, J. A. A. (1998). Approximate bias correction in econometrics. *Journal of Econometrics*, **85**, 205–230.
- [69] Mann, N. R., Schafer, R. E. & Singpurwalla, N. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley and Sons, New York.
- [70] McCool, J. I. (1974). Inferential techniques for Weibull populations. Aerospace Research Laboratories Report ARL TR74-0180. WrightPatterson Air Force Base, Dayton, OH.
- [71] McCullagh, P. (1987). *Tensor Methods in Statistics*. Chapman & Hall, London.
- [72] McLachlan, G. J. (1980). A note on bias correction in maximum likelihood estimation with logistic discrimination. *Technometrics*, **21**, 71–78.
- [73] Mittelbach, F., Goossens, M., Braams, J., Carlisle, D. & Rowley, C. (2004). *The L^AT_EX Companion. Tools and Techniques for Computer Typesetting*. Addison Wesley, Boston.
- [74] Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing, Statistical Models, Test Plans and Data Analysis*. Wiley, New York.
- [75] Ng, H. K. T., Kundu, D. & Balakrishnan, N. (2003). Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, **43**, 283–298.
- [76] Owen, W. J. & Padgett, W. J. (1999). Accelerated test models for system strength based on Birnbaum–Saunders distributions. *Lifetime Data Analysis*, **5**, 133–147.
- [77] Owen, W. J. & Padgett, W. J. (2000). A Birnbaum–Saunders accelerated life model. *IEEE Transactions on Reliability*, **49**, 224–229.
- [78] Press, W. H., Teulosky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. Cambridge University Press, New York.

- [79] Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed. John Wiley and Sons, London.
- [80] Rieck, J. R. (1995). Parametric estimation for the Birnbaum–Saunders distribution based on symmetrically censored samples. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **24**, 1721–1736.
- [81] Rieck, J. R. (1999). A moment-generating function with application to the Birnbaum–Saunders distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **28**, 2213–2222.
- [82] Rieck, J. R. & Nedelman, J. R. (1991). A log-linear model for the Birnbaum–Saunders distribution. *Technometrics*, **33**, 51–60.
- [83] Robertson, C. A. & Fryer, J. F. (1970). The bias and accuracy of moment estimators. *Biometrika*, **57**, 57–65.
- [84] Saha, K. & Paul, S. (2005). Bias-corrected maximum likelihood estimator of the negative binomial dispersion parameter. *Biometrics*, **61**, 179–185.
- [85] Saunders, S. C. (1974). A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 533–539.
- [86] Shenton, L. R. & Wallington, P. A. (1962). The bias of moment estimators with application to the negative binomial distribution. *Biometrika*, **49**, 193–204.
- [87] Sowden, R. R. (1971). Bias and accuracy of parameter estimates in a quantal response model. *Biometrika*, **58**, 595–603.
- [88] Sowden, R. R. (1972). On the first-order bias of parameter estimates in a quantal response model under alternative estimation procedures. *Biometrika*, **59**, 573–579.
- [89] Vasconcellos, K. L. P. & Cordeiro, G. M. (1997a). Approximate bias for multivariate nonlinear heteroscedastic regressions. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **11**, 141–159.
- [90] Vasconcellos, K. L. P. & Cordeiro, G. M. (1997b). Estimadores corrigidos para modelos SUR não lineares. *Revista de Econometria*, **17**, 45–65.
- [91] Vasconcellos, K. L. P. & Cordeiro, G. M. (2000). Bias corrected estimates in multivariate Student t regression models. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **29**, 797–822.
- [92] Vasconcellos, K. L. P. & Silva, S. G. (2005). Corrected estimates for Student t regression models with unknown degrees of freedom. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**, 409–423.
- [93] Venables, W. N. & Ripley, B. D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*, 4th ed. Springer-Verlag, New York.
- [94] Wang, Z., Desmond, A. F. & Lu, X. (2006). Modified censored moment estimation for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, **50**, 1033–1051.

- [95] Wu, J. & Wong, A. C. M. (2004). Improved interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, **47**, 809–821.
- [96] Young, D. & Bakir, S. (1987). Bias correction for a generalized log-gamma regression model. *Technometrics*, **29**, 183–191.