
DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA NA AVALIAÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DE
RIQUEZA NO BRASIL: UMA COMPARAÇÃO ENTRE DISTRIBUIÇÃO DE
TERRA E DE RENDA NOS ANOS DE 1985 E 1995

THEMIS DA COSTA ABENSUR

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria Cristina Falcão Raposo

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2006

Abensur, Themis da Costa

Dominância estocástica na avaliação da concentração de riqueza no Brasil : uma comparação entre distribuição de terra e de renda nos anos de 1985 e 1995 / Themis da Costa Abensur. – Recife : O Autor, 2006.

xi, 52 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Estatística, 2006.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Estatística aplicada – Aspectos econômicos. 2. Concentração de riqueza no Brasil – Dominância estocástica – Medidas de concentração. I. Título.

**519.25
519.5**

**CDU (2.ed.)
CDD (22.ed.)**

**UFPE
BC2006-100**

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

21 de fevereiro de 2006

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Themis da Costa Abensur

intitulada

Dominância Estocástica na avaliação da concentração de riqueza no Brasil:

uma comparação entre distribuição de terra e de renda nos anos de 1985 e

1995

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus L. P. Vasconcellos

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística



Prof. Klaus L. P. Vasconcellos
Coordenador da
Pós-graduação em
Estatística, UFPE

Banca Examinadora:

Maria Cristina Falcão Raposo

Maria Cristina Falcão Raposo

orientador

Beatriz Vaz de Melo Mendes

Beatriz Vaz de Melo Mendes (UFRJ)

Francisco Cribari Neto

Francisco Cribari Neto

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus pelo dom divino da vida, saúde e sabedoria.

Aos meus pais Aldenora L. A. da Costa Abensur e Eliraldo da Silva Abensur pelo amor, educação e bons princípios que sempre procuraram me dar.

À minha irmã Cristina Maria da Costa e Siva e à minha sobrinha Jade da Costa Wang, pelos momentos de alegria e pelo incentivo que têm me proporcionado.

À minha orientadora Maria Cristina Falcão Raposo pela boa orientação, paciência e incentivo no desenvolvimento deste trabalho.

A Artur José Lemonte, por todos os momentos de alegria e amor que me tem dedicado.

A meu grande amigo e professor do Departamento de Economia do Centro Integrado de Ensino Superior do Amazonas Antônio Geraldo Harb, por sua confiança e incentivo que me ajudaram a atingir esse objetivo.

A todos os meus colegas do mestrado, em especial Daniela Trentin Nava, Debora Araújo da Cunha, Hemílio Fernandes Campos Coêlho, Katya Silene Porto Rodrigues e Rejane dos Santos Brito, por terem sido verdadeiros irmãos e parceiros nos momentos bons e mais difíceis.

A Valéria Bittencourt pelo enorme carinho que tem pelos alunos da pós-graduação.

Aos professores do programa de Mestrado em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, com carinho especial, a André Toom, Francisco Cribari Neto, Francisco José de Azevêdo Cysneiros e Klaus Leite Pinto Vasconcellos.

Aos professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Amazonas, pela recomendação e incentivo, fatores importantes e responsáveis da grande conquista do mestrado.

À banca examinadora pelas valiosas sugestões que contribuíram e enriqueceram a qualidade deste trabalho.

“Pensamos em demasia e sentimos bem pouco. Mais do que de máquinas, precisamos de humanidade. Mais do que de inteligência, de afeição e doçura. Sem essas virtudes, a vida será de violência e tudo estará perdido.”

Charles Chaplin

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma abordagem econométrica para a avaliação da concentração (ou desigualdade) de riqueza no Brasil, onde as riquezas abordadas são a propriedade de terra e a renda. A avaliação da concentração de riqueza baseia-se na análise das principais medidas de concentração, tais como: as da classe entropia generalizada, da classe de Atkinson e o índice de Gini, complementada pelo estudo da dominância estocástica. O interesse no estudo da concentração de terra deve-se ao fato de que estudos dessa natureza são bastante escassos no Brasil. Neste sentido, o objetivo desse trabalho é identificar qual medida de concentração reflete as pequenas mudanças ocorridas na distribuição de terra e na distribuição de renda no Brasil entre 1985 e 1995. Para isso, são utilizados dados do censo agropecuário do IBGE e dados da PNAD nos anos considerados, a partir dos quais foram obtidos os valores das medidas de concentração e construídas curvas de dominância estocástica para avaliar a concentração da riqueza no Brasil. A partir dos resultados obtidos, foram comparadas as concentrações de terra com renda em cada ano e as concentrações do mesmo tipo de riqueza entre os anos. A partir da análise dos resultados, observamos que a concentração de terra é superior à concentração de renda no Brasil nos anos estudados. Além disso, constatamos uma redução muito pequena, tanto na concentração de terra, quanto na concentração de renda de 1985 para 1995.

Abstract

This dissertation presents an econometric approach to evaluate wealth inequality in Brazil. We use the measures of inequality, such as the generalized entropy class, the Atkinson class (classified by inequality aversion parameter), and the Gini index that is associated to Lorenz curve which allows for the graphic comparisson of the land and income concentrations. The interest lies in studying land inequality is motivated by the shortage of studies realized in Brazil. Our chief goal is to identify the measure of inequality that best captures the small changes occurred in land distribution and income distribution in Brazil from 1985 to 1995. We use the IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) agricultural data census and PNAD (Pesquisa Nacional por Amostrs de Domicílios) data from 1985 to 1995. We obtained the values of the inequality measures and built stochastic dominance curves to evaluate wealth inequality in Brazil.

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Medindo Concentração	5
2.1 Introdução	5
2.2 Distribuição de Renda e Bem Estar Social	5
2.3 Axiomas das Medidas de Concentração	7
2.3.1 Anonimidade	7
2.3.2 Princípio da População	7
2.3.3 Princípio da Transferência	8
2.3.4 Independência de Escala	8
2.3.5 Decomposição	8
2.4 Medidas de Concentração	9
2.4.1 Classe Entropia Generalizada	9
2.4.2 Classe de Atkinson	13
2.4.3 Índice de Gini	17
3 Dominância Estocástica	20
3.1 Introdução	20

3.2	Dominância Estocástica de Primeira Ordem	21
3.3	Dominância Estocástica de Segunda Ordem	22
3.4	Dominância Estocástica de Lorenz	23
4	Avaliação da Concentração de Riqueza no Brasil	27
4.1	Método	27
4.2	Dados Básicos	28
4.3	Concentração de Terra e de Renda	30
4.4	Dominância Estocástica	34
5	Conclusões e Recomendações	41
	Apêndice	43
	Referências	48

LISTA DE FIGURAS

3.1	Dominância de primeira ordem de G sobre F	22
3.2	Curvas de Lorenz generalizadas: Dominância de G sobre F	23
3.3	Curvas de Lorenz: Dominância de G sobre F	24
3.4	Curvas de Lorenz: Dominância equivalente de G sobre F	25
4.1	Dominância de Primeira Ordem da Distribuição das Propriedades Rurais no Brasil em 1985 e 1995.	35
4.2	Dominância de Segunda Ordem da Distribuição das Propriedades Rurais no Brasil em 1985 e 1995.	35
4.3	Dominância de Lorenz da Distribuição das Propriedades Rurais no Brasil em 1985 e 1995.	36
4.4	Dominância de Primeira Ordem da Distribuição de Renda no Brasil em 1985 e 1995.	36
4.5	Dominância de Segunda Ordem da Distribuição de Renda no Brasil em 1985 e 1995.	38
4.6	Dominância de Lorenz da Distribuição de Renda no Brasil em 1985 e 1995.	38
4.7	Curvas de Lorenz das Distribuições de Terra e Renda no Brasil em 1985.	40
4.8	Curvas de Lorenz das Distribuições de Terra e Renda no Brasil em 1995.	40

LISTA DE TABELAS

4.1	Distribuição de frequência das propriedades rurais e área total das propriedades no Brasil (1985–1995).	29
4.2	Medidas Descritivas das Distribuições de Terra e de Renda no Brasil (1985–1995).	29
4.3	Medidas de Concentração das Distribuições de Terra e de Renda no Brasil (1985–1995).	31
4.4	Incremento Relativo das Medidas de Concentração das Distribuições de Terra e de Renda de 1985 para 1995.	32
4.5	Razão entre as Medidas de Concentração das Distribuições de Terra e de Renda (1985–1995).	32

CAPÍTULO 1

Introdução

Para que possamos fazer a mensuração da concentração de riqueza, precisamos definir três fatores importantes: (a) a especificação de uma unidade individual social tal como um indivíduo, uma família (ou domicílio) ou uma propriedade rural; (b) a descrição de uma variável aleatória pessoal tal como renda, riqueza ou área da propriedade; e (c) um método de representação e/ou agregação de alocação dessas variáveis entre os indivíduos em uma dada população.

A partir da definição dos três fatores referidos, além do cálculo das medidas adequadas de concentração é possível fazer comparação entre as funções de distribuição das variáveis de interesse, usando os diversos conceitos de dominância estocástica. Muitos trabalhos como, por exemplo, Cowell (2000), Leshno e Levy (2002), Litchfield (1999), Maccheroni (2004) e Thistle (1989), classificam a dominância estocástica como dominância de primeira ordem e de segunda ordem. Em especial, Cowell (2000) e Litchfield (1999) também classificam a dominância de Lorenz.

Nosso interesse neste trabalho é estudar a concentração de renda e de propriedade de terra no Brasil nos anos de 1985 e 1995, que foram os dois últimos anos em que foi realizado o censo agropecuário. Cabe lembrar que estes dois anos são atípicos por conta da implantação de planos econômicos de estabilização ocorridos um pouco antes da realização do levantamento de dados de renda. Haddad e Perobelli (2002) referem que durante os anos 1980 e a década de 1990 o Brasil experimentou tanto um período de desaceleração do crescimento e de instabilidade econômica quanto um período de estabilidade econômica

(pós 1994) mas, com taxas de crescimento modestas do produto global e setorial.

Nosso estudo foi realizado através da análise de medidas de concentração e da dominância estocástica. Inicialmente é necessário apresentar, de forma mais ampla, o conceito de renda e propriedade de terra.

A renda é um indicador do bem estar de um indivíduo e de uma sociedade, podendo ser classificada como:

- **Renda pessoal** que é a remuneração (salário, lucro, juro, aluguel, arrendamento, etc.) recebida pelo indivíduo por serviços prestados;
- **Renda domiciliar**, representada pela soma de todos os rendimentos recebidos pelos membros em um mesmo domicílio;
- **Renda nacional**, também conhecida como PIB (Produto Interno Bruto), que é a soma de todos os rendimentos adquiridos, durante determinado período de tempo, pelos habitantes de um país, a título de remuneração dos fatores de produção como salários, lucros, juros, aluguéis, arrendamento, receitas recebidas por aqueles que trabalham por conta própria e ainda os lucros e rendas líquidas dos órgãos governamentais que não são distribuídos por não haver capital privado a remunerar;
- **Renda per capita**, que é um indicador utilizado para medir o grau de desenvolvimento de um país, obtido a partir da divisão da renda total pela população. Este índice, embora útil, oferece algumas desvantagens, pois, tratando-se de uma média, esconde as disparidades na distribuição de renda. Assim, um país pode ter uma renda per capita elevada, mas uma distribuição muito desigual dessa renda. Ou, ao contrário, pode ter uma renda per capita baixa, mas uma renda bem distribuída, não registrando grandes disparidades entre ricos e pobres;
- **Renda domiciliar per capita**, que é definida pela divisão da renda domiciliar pelo número de moradores do domicílio;
- **Renda da terra**, que está relacionada com a apropriação da terra e trabalho no solo.

Com relação ao conceito de propriedade de terra, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, IBGE (1996), descreve alguns conceitos importantes:

- **Estabelecimento** é todo terreno de área contínua, independente do tamanho ou situação (urbana ou rural), formado de uma ou mais parcelas, subordinado a um único produtor, onde se processa uma exploração agropecuária. As áreas, sob a mesma administração, ocupadas segundo diferentes condições legais (próprias, arrendadas e ocupadas gratuitamente), são consideradas como único estabelecimento. As áreas pertencentes a um só proprietário, mas entregues a administrações diversas e áreas exploradas em regime de parceria em que os responsáveis por sua administração são os próprios parceiros, são consideradas como estabelecimentos distintos.
- **Área total** compreende a totalidade das áreas que formam as propriedades. Os dados referentes à área são apresentados em hectare, procedendo-se às conversões das várias unidades de superfície ainda em uso no território nacional.
- **Propriedades das terras** caracterizam as propriedades agropecuárias que os constituíam nas seguintes categorias: individual, condomínio ou sociedade de pessoas, sociedade anônima, sociedade limitada, cooperativa, entidade pública e instituição religiosa.

Existem muitos trabalhos sobre medidas de concentração (ou desigualdade) de renda, sendo que tais medidas também podem ser utilizadas para medir concentração de outras variáveis (como áreas rurais e produção industrial, por exemplo). No Brasil nos últimos anos, trabalhos sobre concentração de renda foram realizados por Azzoni (2001), Ramos e Vieira (2001), Hoffmann (2001 e 2002), dentre outros. Porém, trabalhos sobre concentração de terra no Brasil ainda são escassos, destacando-se o trabalho de Hoffmann (2000). Daí, se dá o interesse em estudar concentração de terra. As variáveis utilizadas em nosso estudo são renda domiciliar per capita e área total das propriedades de terra. Através destas variáveis, faremos o estudo da concentração de renda e de terra nos anos de 1985 e 1995.

Desta forma, os objetivos do nosso trabalho são: (a) comparar as distribuições de propriedades rurais e de renda domiciliar per capita no Brasil nos anos de 1985 e 1995; (b) identificar qual medida de concentração melhor reflete as pequenas mudanças ocorridas na distribuição de terra e na distribuição de renda; (c) complementar o estudo da concentração de riqueza usando o conceito de dominância estocástica.

A presente dissertação está dividida em cinco capítulos. Este primeiro capítulo faz uma abordagem preliminar sobre o estudo da concentração de riqueza e sua importância considerando as técnicas a serem utilizadas. No segundo capítulo fazemos uma detalhada revisão sobre as medidas de concentração utilizadas na prática, dentre elas, temos a classe entropia generalizada de medidas desenvolvida por Theil (1967), a classe de medidas de Atkinson (1970) e o índice de Gini (1910). No terceiro capítulo apresentamos o conceito de dominância estocástica de primeira ordem, de segunda ordem e de Lorenz, que utilizamos em nosso estudo. No quarto capítulo apresentamos o estudo da concentração de terra e de renda no Brasil nos anos de 1985 e 1995 utilizando as medidas de concentração e a dominância estocástica, analisando as mudanças ocorridas na concentração de terra e de renda de um ano para outro. Os dados utilizados são os dos últimos censos agropecuários do IBGE de 1985 e 1995 e os dados amostrais da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) sob responsabilidade do IBGE, para os mesmos anos. Por último, no capítulo cinco são apresentadas as conclusões de nosso estudo e recomendações para trabalhos futuros. No apêndice, encontra-se o programa elaborado para a obtenção das medidas e construção dos gráficos.

Esta dissertação foi digitada utilizando o sistema de tipografia L^AT_EX. O cálculo das medidas de concentração e a construção dos gráficos de dominância estocástica foram feitos utilizando a plataforma R em sua versão 2.1.1 com o auxílio do pacote `ineq`, o qual contém implementadas várias medidas de concentração e algumas rotinas de dominância estocástica. Maiores detalhes sobre este pacote estatístico podem ser encontrados em <http://www.r-project.org>.

CAPÍTULO 2

Medindo Concentração

2.1 Introdução

Existem muitos trabalhos sobre medidas de concentração (ou desigualdade) de renda, medidas essas que podem ser utilizadas para medir concentração de outras variáveis, não apenas renda. Por exemplo, Cowell (1995) apresenta uma descrição de pelo menos doze medidas de concentração. Entretanto, muitas dessas medidas são sensíveis apenas a grandes mudanças nos extremos da distribuição, como, por exemplo, o logaritmo do desvio médio, que é uma medida de Theil (1967), e o coeficiente de variação. As medidas mais adequadas para medir concentração são aquelas que obedecem a um conjunto de axiomas; além disso, a análise da concentração de riqueza pode estar sendo feita a partir de distribuições com comportamentos diferentes e, então, faz-se necessário uma análise complementar, a partir do conceito de dominância estocástica.

Por simplificação, o conceito de concentração abordado neste trabalho estará ligado à variável renda, embora este conceito possa ser aplicado a outras variáveis como terra, por exemplo. Começamos pela apresentação da definição de distribuição de riqueza e do bem-estar social; em seguida, apresentamos as abordagens axiomáticas estabelecidas por Cowell (2000) e, por fim, as medidas de concentração.

2.2 Distribuição de Renda e Bem Estar Social

Seja $\mathcal{F}$ o espaço de todas as distribuições de probabilidade da variável aleatória X com suporte em $\mathbb{R}$ e variância finita. Neste trabalho, $\mathcal{F}$ será usado como a base para

modelar a distribuição empírica de riqueza. Tomando x_0 como um valor particular de X e $F \in \mathcal{F}$ como uma função de distribuição empírica de riqueza, tem-se que $F_X(x_0)$ define a probabilidade da riqueza X assumir um valor menor ou igual a x_0 , ou seja,

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = \sum_{x=\underline{x}}^{x_0} p(x),$$

em que $\underline{x} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ e $p(x) = P(X = x)$ é a função de probabilidade de X .

Para uma população com N indivíduos, seja $W : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ a função bem-estar social, que depende somente de F e pode ser expressa da forma

$$W(F) = \sum_{i=1}^N u(x_i), \quad (2.1)$$

em que $u : X \mapsto \mathbb{R}$ é uma função de avaliação das riquezas individuais de X , ou seja, é o bem-estar que a sociedade associa a riqueza à i -ésima pessoa, não coincidindo, necessariamente, com o bem-estar individual ou utilidade individual. A função bem-estar social W pode pertencer a duas classes de funções bem-estar social, $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$. Na classe $\mathcal{W}_1$, $u(\cdot)$ é não-decrescente e em $\mathcal{W}_2$, subclasse de $\mathcal{W}_1$, $u(\cdot)$ é *Schur* côncava [ver, por exemplo, Litchfield (1999) e Moore (1996)]. As classes $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ são importantes na interpretação das classificações de dominância estocástica.

A classe $\mathcal{W}_1$, de acordo com Moore (1996), refere-se ao princípio fraco de Pareto, em que W é não-decrescente em X . Esta classe é devida à existência de funções utilidade que são não-decrescentes em X . O princípio forte de Pareto requer que W seja monotonicamente crescente em X , o qual é aplicável à dominância estocástica de primeira ordem.

A classe $\mathcal{W}_2$, segundo Moore (1996), refere-se à propriedade da *Schur* concavidade, qual seja: para todas as matrizes bi-estocásticas $\mathbf{B}$, $W(\mathbf{B}F) \geq W(F)$.¹ Esta propriedade assegura que, preservando transferências regressivas, W não cresce e também incorpora a propriedade de simetria (ou de anonimidade) de indivíduos, desde que qualquer permutação matricial seja uma matriz bi-estocástica.² Além disso, *Schur* concavidade estrita, isto é, $W(\mathbf{B}F) > W(F)$ para matrizes bi-estocásticas $\mathbf{B}$, serve para incorporar o bem-estar equivalente da condição de Pigou-Dalton [Dalton (1920) e Pigou (1912)] de medidas

¹Uma matriz biestocástica é aquela em que todos os elementos são não-negativos e que a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna é igual a 1.

²As propriedades de simetria e de transferências estão definidas na próxima seção.

de concentração. Este princípio, junto ao princípio de Pareto, são aplicáveis à dominância estocástica de segunda ordem.

2.3 Axiomas das Medidas de Concentração

Nesta seção, vamos considerar um conceito utilizado para comparar distribuições no contexto de medidas de concentração, segundo Cowell (2000) e Litchfield (1999). Inicialmente, usaremos o termo **ordem de concentração** para representar a relação $\succsim_{\mathcal{I}}$ em $\mathcal{F}$; se tal ordem é contínua, podemos representá-la como uma relação funcional $\mathcal{I} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$, onde $\mathcal{I}$ denota concentração. Da mesma forma, outros conceitos de distribuição podem ser expressos; por exemplo, uma ordem de distribuição de bem-estar social, expressa por $\succsim_W$ ou equivalentemente à função bem-estar social, vista na Seção 2.2, $W : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$. Em cada caso, a ordem estrita $\succ$ e a ordem de equivalência $\sim$ serão definidas da forma usual e as propriedades $\succsim_{\mathcal{I}}$ e $\succsim_W$, pelos principais axiomas distribucionais descritos a seguir. Uma informação importante deve ser considerada: toda medida de concentração que satisfaz todos esses axiomas é uma boa medida para descrever concentração.

2.3.1 Anonimidade

Anonimidade, também conhecida como simetria, requer que a medida de concentração seja independente de algumas características individuais, exceto suas rendas (ou indicador de bem-estar cuja distribuição está sendo medida). Por exemplo, tomemos o vetor de riquezas $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^\top$. Todas as permutações $\mathbf{X}^*$ de $\mathbf{X}$ são distribuídas de forma equivalente, ou seja,

$$(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^\top \sim_{\mathcal{I}} (X_2, X_1, X_3, \dots, X_N)^\top \sim_{\mathcal{I}} (X_1, X_3, X_2, \dots, X_N)^\top \sim_{\mathcal{I}} \dots$$

A caracterização estatística de uma distribuição depende apenas dos valores das riquezas, não interessando saber qual a pessoa recebe qual renda. Uma permutação das riquezas não muda a distribuição.

2.3.2 Princípio da População

O princípio da população, segundo Dalton (1920), requer que as medidas de concentração sejam invariantes para replicações da população, ou seja, a fusão de duas dis-

tribuições idênticas não deve alterar a concentração. Em outras palavras, uma medida de concentração satisfaz este princípio se tal medida aplicada à uma economia com N pessoas não se alterar quando (mantendo a mesma proporção do número de pessoas que recebem uma dada renda) o número de pessoas aumentar para $2N$. Então, para algum escalar $r > 0$,

$$\begin{aligned} (X_1, X_2, \dots, X_N)^\top &\sim_{\mathcal{I}} (X_1, X_1, X_2, X_2, \dots, X_N, X_N)^\top \sim_{\mathcal{I}} \dots \\ &\sim_{\mathcal{I}} \underbrace{(X_1, \dots, X_1)}_{r \text{ vezes}}, \underbrace{(X_2, \dots, X_2)}_{r \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{(X_N, \dots, X_N)}_{r \text{ vezes}}^\top. \end{aligned}$$

2.3.3 Princípio da Transferência

O princípio da transferência, devido a Dalton (1920) e Pigou (1912), mostra que (no caso da renda) uma transferência na renda de uma pessoa mais pobre para uma pessoa mais rica registraria-se como um crescimento na concentração e uma transferência na renda da pessoa mais rica para uma mais pobre registraria-se como uma redução na concentração. Tal princípio pode ser visto, por exemplo, nos textos de Atkinson (1970 e 1983), Cowell (1985) e Sen (1973). Vamos considerar o vetor $\mathbf{X}^*$ que é uma transformação do vetor de rendas $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^\top$ obtido por uma transferência τ de X_j para X_i , onde $X_i > X_j$ e $X_i + \tau > X_j - \tau$. O princípio da transferência é satisfeito se $\mathbf{X}^* \succ_{\mathcal{I}} \mathbf{X}$. Muitas medidas de concentração disponíveis na literatura, incluindo a classe entropia generalizada, a classe de Atkinson e o índice de Gini satisfazem este princípio.

2.3.4 Independência de Escala

Este axioma requer que a medida de concentração seja invariante a mudanças de escala proporcionalmente uniformes: se cada riqueza individual muda na mesma proporção, então a concentração não deve mudar. Assim, para algum escalar $\lambda > 0$, temos que $\mathbf{X} \sim_{\mathcal{I}} \lambda \mathbf{X}$.

2.3.5 Decomposição

Considerando uma distribuição de riqueza cuja população é dividida em k grupos de riqueza, este axioma refere-se à capacidade das medidas de concentração de serem decompostas da forma: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_h + \mathcal{I}_e$, onde $\mathcal{I}_h$ é a medida de concentração dentro de cada

grupo com $h = 1, \dots, k$ e $\mathcal{I}_e$ refere-se à concentração de tal medida entre os k grupos de riqueza. Algumas medidas como as da classe entropia generalizada, da classe de Atkinson e o índice de Gini são facilmente decompostas. Em Hoffmann (1998) são apresentadas formas simplificadas de suas decomposições.

2.4 Medidas de Concentração

Nesta seção, apresentamos as medidas mais utilizadas no estudo de concentração de riqueza tais como a classe das medidas entropia generalizada EG, a classe das medidas de Atkinson e o índice de Gini.

2.4.1 Classe Entropia Generalizada

A classe de medidas Entropia Generalizada pode ser definida da forma

$$\text{EG}_\eta = \frac{1}{\eta^2 - \eta} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\mu} \right)^\eta - 1 \right], \quad (2.2)$$

em que μ é a média populacional e η é um parâmetro de sensibilidade de uma medida EG específica para partes particulares da distribuição. A função EG assume valores no intervalo $[0, \infty)$, com $\text{EG}_\eta = 0$ representando o caso em que as riquezas são igualmente distribuídas e grandes valores de EG_η representando altos níveis de concentração. Para valores de η negativos, EG_η é mais sensível a mudanças no extremo inferior da distribuição e para valores muito grandes de η , EG_η é sensível a mudanças que afetam o extremo superior da distribuição. Os valores mais usados de η são 0, 1 e 2: assim, $\eta = 0$ dá mais peso às distâncias entre riquezas no extremo inferior da distribuição, $\eta = 1$ aplica pesos iguais ao longo da distribuição, enquanto $\eta = 2$ dá proporcionalmente mais peso às distâncias entre riquezas no extremo superior.

Índices de Theil

Casos particulares das medidas EG com parâmetros 0 e 1 são as medidas de concentração de Theil (1967), o logaritmo do desvio médio $\mathcal{L}$ e o índice de Theil $\mathcal{T}$, respectivamente, dadas por

$$\mathcal{L} = \text{EG}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{\mu}{x_i} \right) \quad (2.3)$$

e

$$\mathcal{T} = \text{EG}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\mu} \log \left(\frac{x_i}{\mu} \right). \quad (2.4)$$

Os índices $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$ satisfazem todos os axiomas das medidas de concentração.

O valor mínimo de $\mathcal{L}$ é zero, ocorrendo quando a riqueza é igualmente distribuída. Além disso, $\mathcal{L} \rightarrow \infty$ quando qualquer $x_i \rightarrow 0$. Temos também que $\mathcal{T} = 0$ no caso de uma distribuição igualitária e $\mathcal{T} = \log N$ no caso de máxima concentração.

De acordo com Theil (1967), os valores das medidas (2.3) e (2.4) seriam dados em *nits* ou *bits*, conforme o uso, respectivamente, de logaritmos naturais ou de base dois. Na prática, tem sido usado apenas logaritmo natural, tornando desnecessário enfatizar que se trata da medida em *nits*.

Decomposição dos Índices de Theil

Uma importante vantagem das medidas de concentração $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$ é que, quando as rendas individuais podem ser agrupadas segundo algum critério (por regiões, por exemplo), elas podem ser decompostas em uma medida de concentração **entre** os grupos e uma média ponderada das medidas de concentração **dentro** dos grupos. A decomposição destes índices pode ser vista em Gray *et al.* (2003) e Hoffmann (1998).

Suponha que dispomos de dados sobre k grupos. Seja n_h , com $h = 1, \dots, k$, o número de pessoas no h -ésimo grupo e seja x_{hi} , com $i = 1, \dots, n_h$, a riqueza pertencente à i -ésima pessoa do h -ésimo grupo. O número total de pessoas na população é $N = \sum_{h=1}^k n_h$. Se a riqueza média da população é μ , a fração da riqueza total apropriada pela i -ésima pessoa do h -ésimo grupo é dada por $y_{hi} = x_{hi}/(N\mu)$. A proporção populacional que se situa no h -ésimo grupo é dada por $\pi_h = n_h/N$ e a correspondente proporção da riqueza total é dada por $Y_h = \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$.

Temos então que o índice $\mathcal{L}$ de Theil para toda a população é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{1}{N y_{hi}} \right). \quad (2.5)$$

Da expressão (2.5), somando e subtraindo

$$\sum_{h=1}^k \pi_h \log \left(\frac{\pi_h}{Y_h} \right) = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{n_h}{N Y_h} \right)$$

em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{1}{N y_{hi}} \right) + \sum_{h=1}^k \pi_h \log \left(\frac{\pi_h}{Y_h} \right) - \sum_{h=1}^k \pi_h \log \left(\frac{\pi_h}{Y_h} \right) \\
&= \sum_{h=1}^k \pi_h \log \left(\frac{\pi_h}{Y_h} \right) + \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{1}{N y_{hi}} \right) - \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{n_h}{N Y_h} \right) \\
&= \sum_{h=1}^k \pi_h \log \left(\frac{\pi_h}{Y_h} \right) + \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{Y_h}{n_h y_{hi}} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{h=1}^k \pi_h \log \left(\frac{\pi_h}{Y_h} \right)}_{\mathcal{L}_e} + \sum_{h=1}^k \pi_h \underbrace{\frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \log \left(\frac{Y_h}{n_h y_{hi}} \right)}_{\mathcal{L}_h}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \sum_{h=1}^k \pi_h \mathcal{L}_h. \quad (2.6)$$

O valor de $\mathcal{L}_h$ corresponde à concentração dentro do h -ésimo grupo. O último termo da expressão (2.6) é, portanto, uma média ponderada das medidas de concentração dentro dos grupos. O valor de $\mathcal{L}_e$ corresponde ao valor da medida de concentração entre os grupos. A expressão (2.6) mostra que, se houver perfeita igualdade na distribuição da riqueza dentro dos grupos ($\mathcal{L}_h = 0$ para todo h), o valor de $\mathcal{L}$ para toda a população será igual ao componente relativo à concentração entre grupos.

O índice $\mathcal{T}$ de Theil para toda a população é dado por

$$\mathcal{T} = \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \log(N y_{hi}). \quad (2.7)$$

Da expressão (2.7), somando e subtraindo em ambos os lados da igualdade

$$\sum_{h=1}^k Y_h \log \left(\frac{N Y_h}{n_h} \right) = \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \log \left(\frac{N Y_h}{n_h} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \log(Ny_{hi}) + \sum_{h=1}^k Y_h \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) - \sum_{h=1}^k Y_h \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) \\
&= \sum_{h=1}^k Y_h \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) + \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \log(Ny_{hi}) - \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) \\
&= \sum_{h=1}^k Y_h \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) + \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \left[\log(Ny_{hi}) - \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) \right] \\
&= \sum_{h=1}^k Y_h \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) + \sum_{h=1}^k Y_h \sum_{i=1}^{n_h} \frac{y_{hi}}{Y_h} \left[\log(Ny_{hi}) - \log\left(\frac{NY_h}{n_h}\right) \right] \\
&= \underbrace{\sum_{h=1}^k Y_h \log\left(\frac{Y_h}{\pi_h}\right)}_{\mathcal{T}_e} + \sum_{h=1}^k Y_h \underbrace{\sum_{i=1}^{n_h} \frac{y_{hi}}{Y_h} \log\left(n_h \frac{y_{hi}}{Y_h}\right)}_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_e + \sum_{h=1}^k Y_h \mathcal{T}_h. \quad (2.8)$$

O valor de $\mathcal{T}_h$ é o índice de Theil dentro do h -ésimo grupo. Então, o último termo da equação (2.8) é uma média ponderada dos índices de Theil dentro dos grupos. O valor de $\mathcal{T}_e$ é o índice de Theil entre grupos.

Tal como o índice $\mathcal{L}$, havendo perfeita igualdade na distribuição da riqueza dentro dos grupos, temos $y_{hi} = Y_h/n_h$ para todo i , $\mathcal{T}_h = 0$ para todo h e o índice de Theil total é igual ao índice de Theil entre grupos.

Coeficiente de Variação

Com $\eta = 2$, a medida EG assume a forma do coeficiente de variação (relação entre o desvio padrão e a média da distribuição), usualmente dado em valor percentual,

$$\mathcal{CV} = \text{EG}_2 = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

Essa medida não satisfaz o axioma de decomposição, mas satisfaz os demais axiomas.

2.4.2 Classe de Atkinson

Para obter uma classe de medidas de concentração de Atkinson (1970), foi introduzido o conceito de **nível de riqueza equivalente numa equi-distribuição** x_* que é o valor da riqueza que cada indivíduo deveria adquirir para que, com todos adquirindo mesma riqueza, o nível de bem-estar social fosse igual ao da distribuição observada. Considerando a função bem-estar social definida na expressão (2.1), temos

$$W(F) = \sum_{i=1}^N u(x_i) = Nu(x_*),$$

visto que

$$u(x_*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(x_i). \quad (2.10)$$

Se $u(x_i)$ for uma função côncava, temos $x_* \leq \mu$, com $x_* = \mu$ apenas quando todas as riquezas x_i forem iguais. A medida de concentração proposta por Atkinson é

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{x_*}{\mu}. \quad (2.11)$$

Tal medida assume valores no intervalo $[0, 1]$, com zero representando a perfeita igualdade.

Vamos admitir que o bem-estar marginal é inversamente proporcional a x_i^ε , isto é,

$$\frac{du(x_i)}{dx_i} = \frac{\beta}{x_i^\varepsilon}, \quad (2.12)$$

com $\beta > 0$ e $\varepsilon > 0$. Restringindo os parâmetros β e ε a valores positivos, fica assegurado que o bem-estar marginal é decrescente e, conseqüentemente, a função $u(x_i)$ é côncava. Integrando a função (2.12) com respeito a x_i , temos

$$u(x_i) = \alpha + \beta \log x_i, \quad \varepsilon = 1, \quad (2.13)$$

onde α é uma constante e

$$u(x_i) = \alpha + \beta \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \neq 1. \quad (2.14)$$

Das equações (2.10) e (2.13) temos que

$$x_* = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i \right), \quad \varepsilon = 1. \quad (2.15)$$

Das expressões (2.10) e (2.14), segue-se que

$$x_\star = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon \neq 1. \quad (2.16)$$

Podemos observar que, tanto na equação (2.15) quanto na (2.16), o nível de riqueza equivalente na distribuição igualitária $x_\star$ não depende dos parâmetros α e β . E assim, substituindo tais expressões em (2.11), obtemos, para $\varepsilon = 1$,

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(x_i) \right) \quad (2.17)$$

ou

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{x_i}{\mu} \right) \right) \quad (2.18)$$

e, para $0 < \varepsilon \neq 1$, obtemos

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (2.19)$$

ou

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (2.20)$$

Segundo Cowell (1995), é importante observar que, fazendo $\eta = 1 - \varepsilon$, a classe de Atkinson para valores de $0 < \eta < 1$ torna-se equivalente à classe entropia generalizada.

De acordo com Hoffmann (1998), alguns casos particulares devem ser levados em consideração:

- (a) Se todos os indivíduos têm a mesmo valor de riqueza ($x_i = \mu$, para todo i), temos que $x_\star = \mu$ e, de acordo com a equação (2.11), $\mathcal{A}(\varepsilon) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$. Esse resultado pode ser obtido considerando $x_i = \mu$ nas expressões (2.18) e (2.20).
- (b) Se $0 < \varepsilon < 1$ e um único indivíduo se apropria de toda a riqueza ($x_h = N\mu$ e $x_i = 0$ para $i \neq h$), temos $\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - N^{-\varepsilon/(1-\varepsilon)}$.
- (c) Quando $\varepsilon \geq 1$, basta haver uma pessoa com valor nulo da riqueza para que se tenha $\mathcal{A}(\varepsilon) = 1$. Isso corresponde a uma definição especial onde identificamos o índice com o seu limite quando um dos x_i tende a zero, pois as funções (2.17) e (2.19)

com $\varepsilon > 1$ não são definidas para $x_i = 0$. O valor extremo do índice de Atkinson $\mathcal{A}(\varepsilon) = 1$ nesse caso está associado ao fato de que, com $\varepsilon \geq 1$, $u(x_i) \rightarrow -\infty$ quando $x_i \rightarrow 0$.

- (d) Para que a função bem-estar seja côncava, temos que admitir $\varepsilon > 0$. Quando $\varepsilon = 0$ e de acordo com a equação (2.12), a função $u(x_i)$ seria constante, ou seja, no caso da renda, o bem-estar adicional decorrente de um acréscimo Δx na renda seria o mesmo para uma pessoa pobre e para uma pessoa rica. De acordo com a expressão (2.14), a função $u(x_i)$ seria uma função linear da renda. Daí, podemos verificar que com $\varepsilon = 0$ teríamos $\mathcal{A}(\varepsilon) = 0$ para qualquer distribuição de renda.

O parâmetro ε indica o grau de **aversão à desigualdade**:³ $\varepsilon = 0$ significa que há indiferença em relação à concentração, de forma que valores elevados de ε significam forte aversão à desigualdade.

De acordo com Hoffmann (1998), $\mathcal{A}(\varepsilon)$, com $\varepsilon = 1$ é uma transformação monotonicamente crescente do $\mathcal{L}$ de Theil e, como $\mathcal{L}$ sempre aumenta quando é feita uma transferência regressiva de renda (obedecendo à condição de Pigou-Dalton), então o índice de Atkinson com $\varepsilon = 1$ é uma medida de concentração que obedece à condição de Pigou-Dalton. Isso também é válido para todos os índices de Atkinson.

Decomposição do Índice de Atkinson

Vamos admitir que a população está dividida em k grupos, da mesma forma como foi apresentado para a decomposição dos índices de Theil. Conforme a notação já definida, temos que x_{hi} é a riqueza da i -ésima pessoa do h -ésimo grupo, n_h é o número de pessoas no h -ésimo grupo, N é o número de pessoas em toda a população, μ é a média populacional e

$$\mu_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi} = \frac{Y_h}{\pi_h} \mu \quad (2.21)$$

é a riqueza média do h -ésimo grupo.

³Dadas duas distribuições de riqueza, que são igualmente distribuídas, Atkinson (1970) faz a suposição de que se fosse requerido que se uma medida de concentração para cada distribuição fosse invariante com respeito a mudanças, então poderia ser considerado que o grau de concentração é independente do nível médio de riquezas. Este requerimento é conhecido como aversão à desigualdade.

Para $0 < \varepsilon \neq 1$, o índice de Atkinson da população é dado por

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

e o índice de Atkinson dentro do h -ésimo grupo é

$$\mathcal{A}_h(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\mu_h} \left(\frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Verifica-se que o índice de Atkinson para a população pode ser expresso por

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k n_h [(1 - \mathcal{A}_h(\varepsilon)) \mu_h]^{1-\varepsilon} \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Se $\mathcal{A}_h(\varepsilon) = 0$, para todo h , obtemos o índice de Atkinson entre os grupos:

$$\mathcal{A}_e(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{N} \sum_{h=1}^k n_h \mu_h^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Para $\varepsilon = 1$, o índice de Atkinson da população é dado por

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{n_h} \log x_{hi} \right)$$

e o índice dentro do h -ésimo grupo é dado por

$$\mathcal{A}_h = 1 - \frac{1}{\mu_h} \exp \left(\frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \log x_{hi} \right).$$

Então, o índice de Atkinson para a população pode ser expresso como

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left\{ \frac{1}{N} \sum_{h=1}^k n_h \log [(1 - \mathcal{A}_h) \mu_h] \right\}$$

e o índice entre grupos sendo

$$\mathcal{A}_e = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{h=1}^k n_h \log \mu_h \right).$$

Nesta decomposição, podemos observar que as diferenças $\mathcal{A}(\varepsilon) - \mathcal{A}_e(\varepsilon)$ e $\mathcal{A} - \mathcal{A}_e$ não são médias ponderadas dos índices referentes à concentração dentro dos grupos.

2.4.3 Índice de Gini

Para as riquezas x_i ordenadas de forma que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$, o índice de Gini, proposto por Gini (1910), é definido como

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2N^2\mu} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j|, \quad i \neq j. \quad (2.22)$$

Como $|x_i - x_j| = x_i + x_j - 2 \min(x_i, x_j)$, tem-se que

$$\mathcal{G} = 1 - \frac{1}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \min(x_i, x_j) \quad (2.23)$$

$$= 1 + \frac{1}{N} - \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N x_i (N + 1 - i). \quad (2.24)$$

A equação (2.22) mostra que o índice de Gini é definido como a média aritmética dos valores absolutos das diferenças entre todos os pares de riqueza. A expressão (2.23) admite que o bem-estar de qualquer par de indivíduos é igual ao nível de bem estar da pessoa de menor valor da riqueza entre as duas. Já a relação (2.24) mostra que a função bem-estar implícita, a qual fundamenta o índice de Gini, é uma soma ponderada dos ranks das riquezas de diferentes indivíduos. Da relação (2.24), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= 1 + \frac{1}{N} - \left(\frac{2}{N\mu} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N i x_i \right) \\ &= 1 + \frac{1}{N} - \left(2 + \frac{2}{N} - \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N i x_i \right) \\ &= \frac{2}{N^2\mu} \sum_{i=1}^N i x_i - 1 - \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

O índice de Gini é obtido a partir da área de concentração (área compreendida pela curva de Lorenz definida a seguir e a reta de perfeita igualdade) e o triângulo de máxima concentração.

O índice de Gini satisfaz todos os axiomas da Seção 2.3, porém, não é sensível a mudanças nos extremos da distribuição de riqueza. Existem na literatura [por exemplo, Hoffmann (2004)] dois índices de concentração derivados do índice de Gini; os índices de

Mehran e Piesch, dados pelas expressões

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{6}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (1-p_i)(p_i - \Phi_i), \quad 0 \leq \mathcal{M} \leq 1 - \frac{1}{N^2} \\ \mathcal{P} &= \frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N-1} p_i(p_i - \Phi_i), \quad 0 \leq \mathcal{P} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{2N}\right),\end{aligned}$$

onde $p_i = i/N$ e $\Phi_i = (1/N\mu) \sum_{j=1}^i y_j$. A diferença entre a ordenada da linha de perfeita igualdade e a ordenada da curva de Lorenz é ponderada por $1 - p_i$ tornando o índice de Mehran mais sensível a mudanças no extremo inferior da distribuição, quando comparado com o índice de Gini. No índice de Piesch, o fator de ponderação é p_i o tornando mais sensível a mudanças na extremidade superior da distribuição.

Decomposição do Índice de Gini

Dados sobre distribuição de renda consistem, muitas vezes, no número de pessoas (ou de famílias) e na riqueza média ou total para k estratos (ou grupos) de renda. Hoffmann (1998) decompõe o índice de Gini, o qual, inicialmente é considerada a expressão para uma população dividida em k grupos, considerando o valor da riqueza de cada pessoa.

Da mesma forma como foi apresentado para os índices de Theil e de Atkinson, conforme notação já definida, o índice de Gini para dados agrupados, segundo Hoffmann (1998), é decomposto da forma

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_e + \sum_{h=1}^k \pi_h Y_h \mathcal{G}_h, \quad (2.25)$$

em que $\mathcal{G}_e$ é o índice de Gini da concentração entre os grupos, isto é, o índice de Gini da população se dentro de cada grupo a riqueza fosse igualmente distribuída, $\mathcal{G}_h$ é o índice de Gini da distribuição dentro do h -ésimo grupo.

O valor de $\mathcal{G}_e$ é dado por

$$\mathcal{G}_e = 1 - \sum_{h=1}^k (\Phi_h + \Phi_{h-1}) \pi_h, \quad (2.26)$$

onde

$$\Phi_0 = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_h = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^h \mu_j \pi_j, \quad h = 1, \dots, k.$$

Pela equação (2.21), é fácil verificar que $\Phi_h = \sum_{j=1}^h Y_j$.

O valor de $\mathcal{G}_h$ é dado por

$$\mathcal{G}_h = 1 - \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} (\Phi_{hi} + \Phi_{h,i-1}), \quad (2.27)$$

onde

$$\Phi_{h0} = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_{hi} = \frac{1}{n_h \mu_h} \sum_{j=1}^h x_{hj}, \quad i = 1, \dots, n_h.$$

Caso apenas os valores referentes aos grupos sejam conhecidos, isto é, quando não dispomos dos valores da riqueza ou da proporção da riqueza adquirida por cada indivíduo, basta calcular $\mathcal{G}_e$ (para isso basta ter os valores de π_h e Y_h , por exemplo). Ou seja, nesses casos $\mathcal{G}_e$ é considerada a medida de concentração da distribuição. Isso constitui uma subestimação do verdadeiro grau de concentração $\mathcal{G}$, uma vez que as concentrações dentro dos grupos não estão sendo consideradas. Se o número de grupos for grande, este procedimento será aceitável. Por outro lado, se o número de grupos for pequeno ou o intervalo correspondente a um ou mais grupos for grande, o erro de subestimação poderá ser substancial.

3.1 Introdução

Considere duas funções distribuições F e G . A dominância de G sobre F se dá segundo três princípios de comparação de distribuições:

- (a) **dominância estrita:** $G \succ_T F \iff G \succeq_T F$ e $F \not\preceq_T G$;
- (b) **dominância equivalente:** $G \sim_T F \iff G \succeq_T F$ e $F \succeq_T G$;
- (c) **dominância não-comparável:** $G \perp_T F \iff G \not\preceq_T F$ e $F \not\preceq_T G$.

A notação $\succeq_T$ indica que as distribuições F e G são induzidas por algum princípio de comparação T . A expressão $G \succeq_T F$ significa que a distribuição G tem dominância sobre a distribuição F . A notação $\sim_T$ refere-se à equivalência e $\perp_T$, à não-comparabilidade.

Embora as medidas discutidas anteriormente satisfaçam o conjunto de axiomas desejáveis, é possível que elas classifiquem o mesmo conjunto de distribuições de diferentes formas, simplesmente por causa de suas grandes sensibilidades a mudanças em partes diferentes da distribuição. A seguir, serão discutidos três tipos de dominância estocástica, dominância de primeira ordem, de segunda ordem e de Lorenz. As duas primeiras são fundamentais para comparações de bem-estar social, além disso, são sensíveis à média da distribuição e, portanto, não são aplicáveis para estabelecer diferenças nos níveis de concentrações; já a dominância de Lorenz serve para comparar concentrações ao longo das distribuições.

3.2 Dominância Estocástica de Primeira Ordem

Os critérios de dominância de primeira ordem são baseados nos quantis da distribuição. Neste caso, o **quantil funcional** de X é dado por

$$Q(F; q) = \inf \{x | F_X(x) \geq q\} = x_q, \quad (3.1)$$

para toda distribuição F e para todo quantil $q \in [0, 1]$.

Se cada quantil na distribuição G não está acima do correspondente quantil na distribuição F , e pelo menos um quantil está estritamente abaixo, então a distribuição G assumirá o maior nível de bem-estar para toda função bem-estar social na classe $\mathcal{W}_1$. Isso significa que a distribuição G tem dominância de primeira ordem sobre a distribuição F se e somente se $W(G) \geq W(F)$ (ver figura 3.1). Em termos mais formais, de acordo com Saposnik (1981 e 1983),

$$G \succeq_Q F \iff W(G) \geq W(F),$$

para toda função $W \in \mathcal{W}_1$, que é equivalente a $G \succeq_Q F$ se $G(q) \leq F(q)$ para todo $q \in [0, 1]$ e uma concentração estrita para algum q .

Podemos expressar a dominância de primeira ordem numa forma alternativa usando a função inversa $x = F^{-1}(p)$, onde p é a parte da população com renda menor que um dado nível de riqueza: a dominância de primeira ordem é atingida se $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo p . A função inversa $F^{-1}(p)$ é conhecida como **Parada de Pen**, definida por Pen (1974), onde são construídos gráficos de renda contra população acumulada, usando quantis de riqueza q . Neste caso, a distribuição dominante é aquela cuja parada de Pen não está abaixo do correspondente quantil na distribuição e pelo menos um quantil está estritamente abaixo da outra distribuição.

As paradas de Pen foram conceitualizadas para comparações de riqueza de todos os indivíduos da população. O exemplo dado por Pen foi do alinhamento de indivíduos em ordem crescente de renda e re-escalando suas alturas para representar seus níveis de riqueza. Se estes indivíduos fossem desfilar, seria observado um número grande de anões (pessoas pobres), eventualmente seguidos por indivíduos de altura média (riqueza média) e finalmente por um número pequeno de gigantes (pessoas muito ricas).

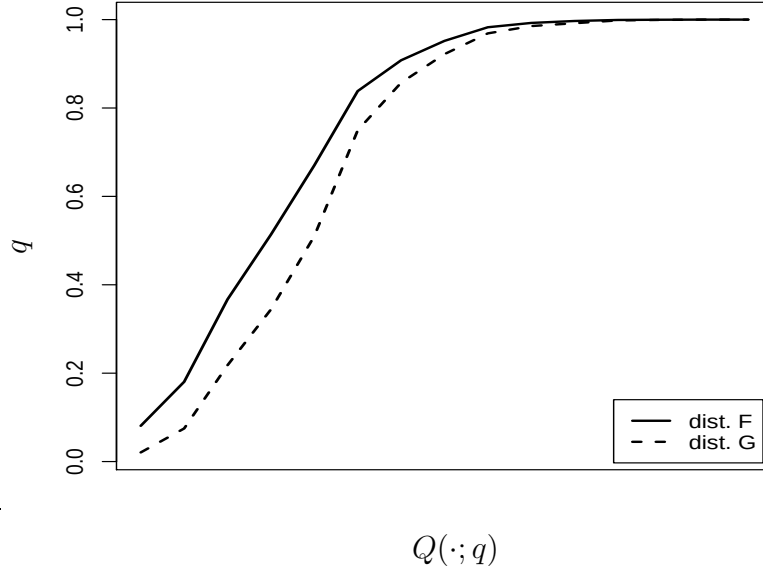


Figura 3.1: Dominância de primeira ordem de G sobre F .

3.3 Dominância Estocástica de Segunda Ordem

Apesar de sua utilidade, o critério de dominância de primeira ordem apresenta algumas desvantagens:

- Em aplicações práticas, é muito freqüente o caso em que não há dominância de primeira ordem de uma distribuição G sobre uma distribuição F ou de F sobre G ;
- Não emprega todos os princípios padrões da análise de bem-estar social; além disso, não incorpora o princípio da transferência de Pigou-Dalton.

Por estas razões, é usual introduzir o critério de dominância de segunda ordem, o qual requer a definição de **riqueza acumulada funcional** para todo quantil $q \in [0, 1]$, dada por

$$C(F; q) = \sum_{x=\underline{x}}^{Q(F; q)} x p(x), \quad (3.2)$$

em que $\underline{x} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $C(F; 0) = 0$ e $C(F; 1) = \mu$. O gráfico de $C(F; q)$ contra q descreve a **curva de Lorenz generalizada** (ilustrado pela figura 3.2), sendo a base para a análise da dominância de segunda ordem segundo Shorrocks (1983).

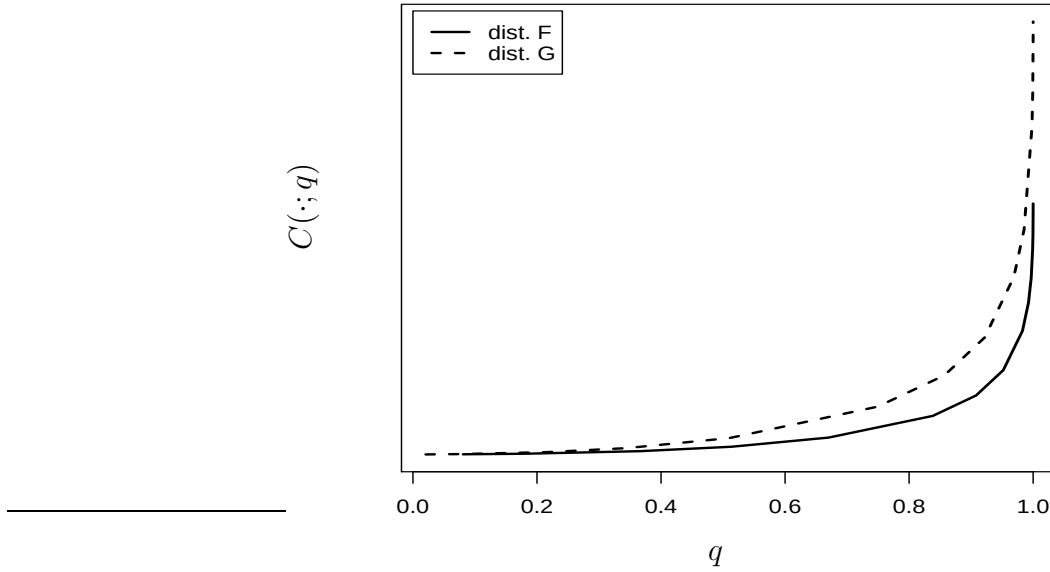


Figura 3.2: Curvas de Lorenz generalizadas: Dominância de G sobre F .

Uma distribuição G tem dominância de segunda ordem (ou simplesmente dominância de Lorenz generalizada) sobre F se e somente se a função bem-estar social de G é maior ou igual à função bem-estar social de F com relação à riqueza acumulada, ou seja, $\forall F, G : G \succsim_C F \iff W(G) \geq W(F)$. Note que dominância de segunda ordem implica dominância de primeira ordem, mas a recíproca não é verdadeira.

A curva de Lorenz generalizada é uma ferramenta fundamental para que possamos tirar conclusões sobre o bem-estar de indivíduos. Diretamente associadas a ela estão outras técnicas importantes da análise de distribuições. Entre essas técnicas, está a convencional curva de Lorenz (1905), ou **curva de Lorenz relativa**, usada para distinguir a curva generalizada de outros conceitos com nomes similares.

3.4 Dominância Estocástica de Lorenz

Um método utilizado para evidenciar os diferentes graus de concentração das estruturas de repartição da renda foi proposto por Max Lorenz em 1905. Este método é dado pela curva de Lorenz de uma distribuição F . A curva de Lorenz, definida por

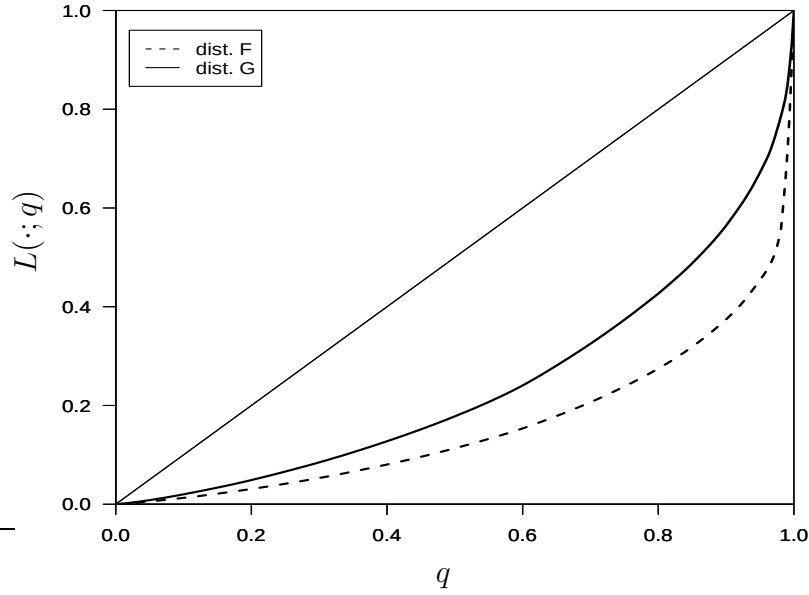


Figura 3.3: Curvas de Lorenz: Dominância de G sobre F .

$L(F; q) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, é tal que

$$L(F; q) = \frac{C(F; q)}{\mu}. \quad (3.3)$$

O gráfico $\{q, L(F; q)\}$ representa a *curva de Lorenz*. Similarmente pode-se definir a curva de Lorenz absoluta pelo gráfico $\{q, A(F; q)\}$, onde

$$A(F; q) = C(F; q) - q\mu.$$

A dominância de Lorenz de uma distribuição G sobre F ocorre se a curva de Lorenz da distribuição G não está abaixo e, pelo menos a partir de algum ponto, está acima da curva de Lorenz da distribuição F . Tal dominância é ilustrada na figura 3.3. A curva de Lorenz é geralmente comparada com uma **reta de equidistribuição**, que corresponde a uma situação teórica em que a renda seria igualmente distribuída entre a população, ou seja, todos os indivíduos teriam a mesma riqueza. Entre a curva de Lorenz e a reta de equidistribuição, define-se uma **área de concentração**. Quanto maior for esta área, maior será a concentração de riqueza.

A partir da curva de Lorenz, podemos calcular o índice de concentração de Gini $\mathcal{G}$, discutido na Seção 2.4.3, equação (2.24), que é igual a duas vezes a área entre a curva de

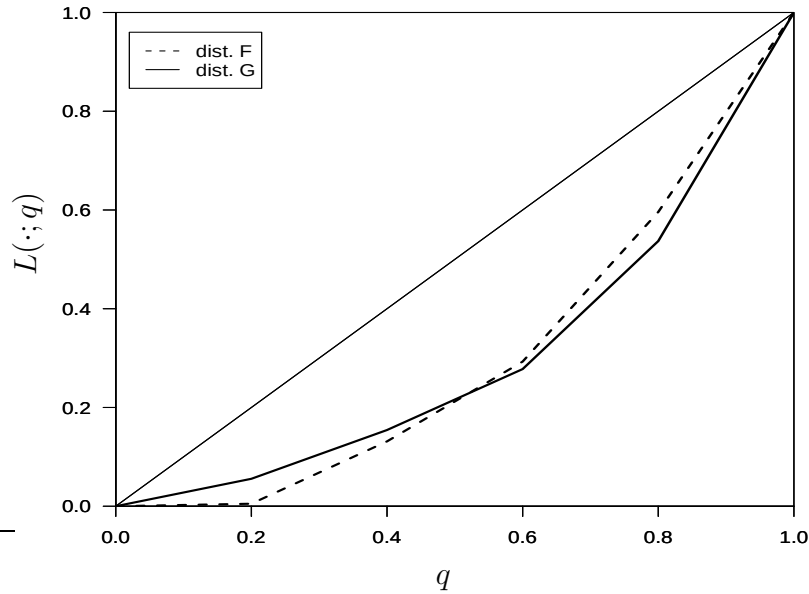


Figura 3.4: Curvas de Lorenz: Dominância equivalente de G sobre F .

Lorenz e a reta de equidistribuição. O índice de Gini assume valores no intervalo $[0, 1]$, com zero indicando que não há concentração e um representando uma área igual a duas vezes a área do triângulo de plena concentração ilustrado na figura 3.3.

Shorrocks (1983) analisa as condições para obtenção de ordenações não ambíguas, isto é, que as médias das distribuições não sejam iguais e que as curvas de Lorenz não se interceptem. As curvas de Lorenz ilustradas na figura 3.4 mostram que para valores da riqueza mais baixos a distribuição G é menos concentrada que a distribuição F e que para valores da riqueza mais altos a distribuição G é mais concentrada que a distribuição F . Para resolver este problema, Shorrocks (1983) sugere o gráfico da curva de Lorenz generalizada, discutida na dominância de segunda ordem (ver figura 3.2), dada pela expressão (3.2).

Admitindo o fato de que as distribuições possuem a mesma média, Atkinson (1970) mostra que este fato equivale à restrição de que as curvas de Lorenz não se interceptam. Então, pode-se classificar as duas distribuições G e F sem a necessidade de conhecer a forma da função bem-estar social $W(\cdot)$, exceto que $W(\cdot) \in \mathcal{W}_2$, onde $\mathcal{W}_2$ é a classe em que $W(\cdot)$ tem *Schur* concavidade.

Dalton (1920) discute que qualquer classificação das distribuições deve satisfazer o

princípio da transferência. Com isso, uma condição necessária e suficiente para se classificar duas distribuições, *ceteris paribus*, é que uma delas pode ser obtida a partir da outra pela redistribuição da renda do mais rico para o mais pobre.

Cowell (2000) descreve que em situações em que as curvas de Lorenz se interceptam é importante considere duas soluções. A primeira seria suplementar as restrições na classe de funções de bem-estar, conforme definida na expressão (2.1), que significa impor uma restrição na função de avaliação da riqueza $u(\cdot)$; a segunda solução seria derivar índices de concentração específicos.

CAPÍTULO 4

Avaliação da Concentração de Riqueza no Brasil

4.1 Método

Neste capítulo apresentamos os resultados da análise da concentração de riqueza no Brasil nos anos de 1985 e 1995. Adotamos as variáveis área de propriedades rurais e renda domiciliar per capita como riquezas econômicas para o estudo da concentração (ou desigualdade). Realizamos o cálculo de algumas medidas descritivas e a análise da concentração é dada pelo cálculo das medidas de concentração e pela análise gráfica da dominância estocástica. Como já mencionamos anteriormente, as medidas de concentração utilizadas são as da classe entropia generalizada com parâmetro $\eta \in \{0, 1, 2\}$, classe de medidas de Atkinson $\mathcal{A}(\varepsilon)$ com parâmetro de aversão à desigualdade $\varepsilon \in \{0,5, 1, 2\}$ e o índice de Gini $\mathcal{G}$. Além disso, utilizamos os gráficos de dominância de primeira ordem, segunda ordem e a curva de Lorenz para a análise gráfica da concentração. Ao longo de nossas análises são comparadas as distribuições de terra e de renda em 1985 e 1995 da seguinte forma: (a) para cada variável (terra e renda) comparamos a variação da concentração de um ano para o outro, ou seja, em qual ano a concentração foi maior ou menor e (b) em cada ano estudado comparamos a variação da concentração da distribuição de uma variável com relação à distribuição da outra, ou seja, o quanto a distribuição de terra é mais (ou menos) concentrada que a distribuição de renda.

De acordo com o que foi apresentado no Capítulo 2, existem medidas de concentração que são sensíveis a mudanças que ocorrem no extremo inferior da distribuição da riqueza, entre as quais temos o logaritmo do desvio médio $\mathcal{L}$ e o índice de Atkinson $\mathcal{A}(\varepsilon)$ para pequenos valores de ε (parâmetro de aversão à desigualdade). Tem-se ainda as medidas

que apresentam grande sensibilidade a mudanças ocorridas no extremo superior da distribuição, como o coeficiente de variação $\mathcal{CV}$ e o índice de Atkinson $\mathcal{A}(\varepsilon)$ para grandes valores de ε . Além disso, existem medidas que não se alteram com mudanças ocorridas nos extremos da distribuição, tais como: o índice $\mathcal{T}$ de Theil e o índice de Gini $\mathcal{G}$.

4.2 Dados Básicos

Neste trabalho, utilizamos dados de área total das propriedades de terra (em hectares) dos censos agropecuários do IBGE (1985 e 1996). Os dados dos censos agropecuários são apresentados na tabela 4.1, os quais são distribuídos em grupos de área total. Além disso, consideramos os microdados de renda domiciliar per capita (em unidades monetárias R\$) da PNAD disponibilizados pelo IBGE. Como as unidades monetárias de 1985 e 1995 são diferentes, utilizamos o INPC (Índice Nacional de Preço ao Consumidor) para deflacionar os valores de renda de 1985 com base nos valores de 1995.

O INPC é construído da seguinte forma: são coletados mensalmente preços de produtos em 10 regiões metropolitanas brasileiras mais o Distrito Federal (não há outra alternativa de índice com maior abrangência regional). A variação nos preços, entre dois meses consecutivos, é então calculada para cada produto em cada região. A partir daí, segue-se um processo de agregação que permite obter um índice de preço para cada uma das regiões. Os produtos pesquisados, e seus respectivos pesos, são definidos a partir dos hábitos de uma parcela restrita de consumidores, ou seja, aqueles com renda familiar na faixa de 1 a 8 salários mínimos. O próprio IBGE calcula um outro índice com base nos hábitos das famílias com renda na faixa de 1 a 40 salários mínimos. Segundo Corseuil e Foguel (2002), para deflacionar valores de renda domiciliar per capita, é mais adequado utilizar um índice que mede com maior precisão o poder de compra das famílias mais pobres, para as quais a renda real é mais sensível a ajustes e por esta razão usamos o INPC.

Cabe ressaltar algumas observações sobre os dados de renda que foram consideradas neste trabalho. A PNAD é realizada através de uma amostra estratificada regionalmente e composta de três estágios de seleção. No primeiro estágio, para cada uma das unidades da federação subdivididas em Região Metropolitana e Não-Metropolitana, são selecionados probabilisticamente os municípios (classificados por auto-representativos e não auto-

Tabela 4.1: Distribuição de frequência das propriedades rurais e área total das propriedades no Brasil (1985–1995).

Grupos de área total (ha)	Propriedades Rurais		Área (ha)	
	1985	1995	1985	1995
< 1	637311	512032	364421	280955
1 ⊢ 2	617003	471298	833487	637186
2 ⊢ 5	1043185	796724	3347274	2543527
5 ⊢ 10	767323	622320	5441406	4420526
10 ⊢ 20	815020	701417	11309854	9799204
20 ⊢ 50	907481	814695	28115002	25438629
50 ⊢ 100	437830	400375	30140265	27455753
100 ⊢ 200	283004	246314	37402682	32919190
200 ⊢ 500	174758	165243	53071662	50436030
500 ⊢ 1000	59669	58407	40958279	40186297
1000 ⊢ 2000	29060	28504	39642478	38995636
2000 ⊢ 5000	15688	14982	46023641	44178250
5000 ⊢ 10000	3538	3688	23959741	24997369
10000 ⊢ 100000	2066	2147	42241718	43031313
≥ 100000	59	37	12072837	8291381
Total	5795004	4838183	374924747	353611246

Fonte: Censos Agropecuários de 1985 e 1995 – IBGE.

Tabela 4.2: Medidas Descritivas das Distribuições de Terra e de Renda no Brasil (1985–1995).

Medidas Descritivas	Terra		Renda (R\$)	
	1985	1995	1985 (*)	1995
Mínimo	0,572	0,549	0,00	0,00
1º Quartil	3,209	3,192	42,47	70,00
Mediana	7,091	13,971	84,93	138,30
3º Quartil	30,981	31,225	180,83	275,00
Máximo	204624,4	224091,4	29557,50	23000,00
Média	64,720	73,088	172,04	263,75
Desv. Pad	800,644	800,201	310,41	457,04

(*) Valores deflacionados a preços de 1995.

representativos). No segundo estágio, de cada município selecionado, são sorteados setores censitários aleatoriamente. No terceiro estágio, de cada setor censitário da amostra, foram selecionados com igual probabilidade os domicílios particulares e as unidades de habitação em domicílios coletivos para a investigação das características dos moradores e da habitação. Em função do plano amostral utilizado pelo IBGE, faz-se necessária a utilização da informação do “peso” do indivíduo disponibilizado no banco de dados da PNAD, a fim de corrigir a inexistência de equiprobabilidade dos elementos da amostra.

A tabela 4.2 apresenta algumas medidas descritivas da renda domiciliar per capita e da área das propriedades rurais no Brasil nos anos de 1985 e 1995, de onde podemos destacar que nos anos estudados a área mínima de terra no Brasil foi de aproximadamente 0,6 hectares, a área máxima de terra foi de aproximadamente 204624 hectares em 1985 aumentando para 224091 hectares em 1995, o 1º quartil registrou que 25% das menores propriedades rurais possuíam no máximo 3,2 hectares nos dois anos, a mediana é de cerca de 7 hectares em 1985 e cerca de 14 hectares em 1995 e a área média foi de aproximadamente 65 hectares em 1985 e 73 hectares em 1995. O aumento do valor de algumas medidas reflete a diminuição da quantidade de propriedades rurais que passou de cerca de 5,8 milhões em 1985 para 4,8 milhões em 1995.

Com relação à renda, constatamos renda zero nos dois anos e a renda máxima foi de R\$ 29557,50 em 1985 diminuindo para R\$ 23000,00 em 1995. Observamos, pelo 1º quartil, que as 25% pessoas mais pobres possuíam renda de no máximo R\$ 42,47 em 1985 aumentando para R\$ 70,00 em 1995; a mediana era de R\$ 84,93 em 1985 aumentando para R\$ 138,30 em 1995; as 25% pessoas mais ricas possuíam renda mínima de R\$ 180,83 em 1985 aumentando para R\$ 275,00 em 1995. A renda domiciliar per capita média foi de R\$ 172,04 em 1985 aumentando para R\$ 263,75 em 1995. Pelo menos em termos das medidas de tendência central houve um aumento real da renda per capita no Brasil.

4.3 Concentração de Terra e de Renda

Como foi visto no Capítulo 2, o cálculo das medidas de concentração de Theil apresenta problemas na presença de rendas com valor igual a zero. Nos dados das PNAD's de 1985 e 1995 temos valores de renda iguais a zero, então, para não perdermos informação sobre os dados, utilizamos renda R\$ 0,10 ao invés de R\$ 0,00.

Tabela 4.3: Medidas de Concentração das Distribuições de Terra e de Renda no Brasil (1985–1995).

Medidas de Concentração	Terra		Renda	
	1985	1995	1985	1995
$\mathcal{L}$	1,9572	1,9688	0,6492	0,7067
$\mathcal{T}$	2,3748	2,3168	0,6967	0,6779
$\mathcal{CV}$	12,371	10,948	1,8043	1,7328
$\mathcal{A}(0,5)$	0,6586	0,6560	0,2860	0,2828
$\mathcal{A}(1)$	0,8587	0,8604	0,4775	0,5067
$\mathcal{A}(2)$	0,9574	0,9611	0,7724	0,9771
$\mathcal{G}$	0,8533	0,8519	0,5890	0,5798

A tabela 4.3 apresenta as medidas de concentração de terra e renda de interesse. Podemos observar que houve uma redução em ambas concentrações de terra e de renda, de acordo com o índice de Theil $\mathcal{T}$, coeficiente de variação, índice $\mathcal{A}(0,5)$ e o índice de Gini. Os demais índices apresentaram um aumento nas concentrações de terra e de renda. Podemos observar ainda que todas as medidas de concentração de terra são maiores que as medidas de concentração de renda nos dois anos em questão, exceto o índice $\mathcal{A}(2)$ em 1995, mostrando que a concentração de terra é superior à concentração de renda.

O incremento relativo de 1985 para 1995 para cada variável (ou seja, o quanto a desigualdade aumentou ou diminuiu de 1985 para 1995) dado pela expressão

$$I = \frac{\mathcal{I}_{95} - \mathcal{I}_{85}}{\mathcal{I}_{85}} \times 100,$$

onde $\mathcal{I}$ é a representação da medida de concentração, pode ser visto na tabela 4.4. Podemos observar que houve redução na concentração da distribuição das propriedades rurais no Brasil de 1985 para 1995, segundo as medidas $\mathcal{T}$ de Theil, coeficiente de variação, $\mathcal{A}(0,5)$ e o índice de Gini, onde o coeficiente de variação apresentou a maior redução (cerca de 11,5%). Entretanto, constata-se um pequeno aumento na concentração da distribuição de terra, de acordo com as demais medidas, podendo-se considerar que a concentração se manteve praticamente inalterada. A mesma situação ocorreu com a concentração de renda, sendo que houve um aumento maior na concentração de acordo com o índice de Atkinson com $\varepsilon = 2$. De acordo com esses resultados, concluímos que houve grandes mudanças no extremo superior das duas distribuições de renda.

Tabela 4.4: Incremento Relativo das Medidas de Concentração das Distribuições de Terra e de Renda de 1985 para 1995.

Medidas de Concentração	Incremento (%)	
	Terra	Renda
$\mathcal{L}$	0,59	8,86
$\mathcal{T}$	-2,44	-2,70
$\mathcal{CV}$	-11,50	-3,96
$\mathcal{A}(0,5)$	-0,39	-1,12
$\mathcal{A}(1)$	0,20	6,11
$\mathcal{A}(2)$	0,39	26,50
$\mathcal{G}$	-0,16	-1,56

Tabela 4.5: Razão entre as Medidas de Concentração das Distribuições de Terra e de Renda (1985–1995).

Medidas de Concentração	Razão (I_T/I_R) (%)	
	1985	1995
$\mathcal{L}$	301,48	278,59
$\mathcal{T}$	340,86	341,76
$\mathcal{CV}$	685,64	631,81
$\mathcal{A}(0,5)$	230,28	231,97
$\mathcal{A}(1)$	179,83	169,80
$\mathcal{A}(2)$	123,95	98,36
$\mathcal{G}$	144,87	146,93

A tabela 4.5 apresenta a variação da desigualdade da distribuição de terra com relação à distribuição de renda no Brasil em 1985 e 1995, ou seja, o quanto a concentração de terra é maior ou menor que a concentração de renda em cada ano. Em 1985 podemos observar que a concentração de terra foi 301,5% superior à concentração de renda, segundo o índice $\mathcal{L}$ de Theil, 340,9% maior com relação à concentração de renda no índice $\mathcal{T}$ de Theil, 685,6% maior segundo o coeficiente de variação $\mathcal{CV}$, 230,3% maior segundo o índice de Atkinson $\mathcal{A}(0,5)$, 179,8% maior de acordo com o índice de Atkinson $\mathcal{A}(1)$, 123,9% maior segundo o índice de Atkinson $\mathcal{A}(2)$ e a concentração de terra foi superior em 144,9% à concentração de renda segundo o índice de Gini. No ano de 1995 observamos resultados semelhantes para todos os índices.

De forma geral, a concentração de terra é substancialmente maior que a concentração de renda em todas as medidas de concentração consideradas, nos dois anos estudados.

Apesar de termos realizado o estudo da concentração de terra e de renda no Brasil em 1985 e 1995, é importante destacarmos os fatos ocorridos ao longo dos anos subsequentes. Muitos trabalhos sobre concentração de riqueza no Brasil descrevem a concentração segundo o índice de Gini. De acordo com Hoffmann (2000), ocorreu aumento da concentração de terra de 0,844 em 1970 para 0,85 em 1985, havendo redução (quase insignificante) na concentração de 1985 para 1995. Em nosso estudo, o índice de Gini também revelou uma leve diminuição da concentração de terra no período de 1985/95. Segundo documentários do MST [Movimento sem Terra (2001)], o grau de concentração da terra no Brasil, medido pelo índice de Gini, diminuiu de 0,848 em 1999 para 0,802 em 2000. Esse valor obtido para o ano de 1999 (0,848) é inferior àquele que calculamos para 1995 (0,8519) refletindo uma tendência de redução da concentração de terra.

Não é possível dizer se este nível de concentração de terra é bom ou ruim para o Brasil, pois existem grandes hectares de terra que são utilizados para a produção agrícola, entretanto, há grande concentração de terra improdutiva. É devido a esta última afirmação que grupos como os do Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra (MST) e os da Confederação dos Trabalhadores Rurais na Agricultura (CONTAG) se organizam para reivindicar a reforma agrária. De acordo com Guanziroli (1999), a eliminação dos subsídios e incentivos aos grandes proprietários foi uma das condições básicas para se promover uma verdadeira reforma agrária no Brasil, a qual foi resolvida.

Ainda segundo Guanziroli (1999), não existem argumentos econômicos relevantes que expliquem a existência das grandes propriedades e das muito pequenas, sobra apenas o argumento das políticas públicas. As formas extensivas de produção agrícola, organizadas em grandes estabelecimentos, têm grandes dificuldades de operar a taxas de lucro compatíveis com o custo de oportunidade das atividades industriais ou financeiras, principalmente por causa do risco proveniente dos problemas climáticos, pragas e existência de tempos ociosos na agricultura.

Com relação à concentração de renda no Brasil, de acordo com Hoffmann (2002), ocorreu uma redução na concentração da distribuição de renda de 1992 a 2001 segundo o índice de Gini $\mathcal{G}$ e segundo os índices de Theil $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$. Ainda segundo Hoffmann (2005), houve uma redução da concentração de renda no Brasil de 2002 para 2003 nos três últimos índices citados, em que o índice de Gini foi de 0,563 em 2002 diminuindo para 0,555 em 2003, valores esses menores do que os que calculamos para 1995 (0,5798) confirmando a continuação da tendência de redução da concentração de renda.

4.4 Dominância Estocástica

As figuras 4.1 e 4.2 apresentam o comportamento da concentração das áreas rurais no Brasil em 1985 e 1995, em que ocorre dominância estocástica da distribuição de terra no ano de 1995 sobre o ano de 1985 indicando que houve uma pequena redução da concentração de terra do ano de 1985 para 1995. Na figura 4.3, observamos que as curvas de Lorenz das distribuições de terra de 1985 e 1995 são relativamente iguais, indicando que há dominância equivalente entre as duas distribuições, mesmo tendo-se observado uma pequena redução da concentração de terra de um ano para o outro pelo índice de Gini $\mathcal{G}$, dado na tabela 4.3. As curvas de Lorenz na figura 4.3 mostram que em 1985 50% dos pequenos proprietários detinham apenas 2,34% da área total, diminuindo para 2,30% em 1995, enquanto os 5% maiores proprietários detinham 68,97% da área total, diminuindo para 68,05% em 1995.

As figuras 4.4 e 4.6 apresentam os gráficos de dominância estocástica para estudo da concentração de renda no Brasil em 1985 e 1995. Nestas figuras, podemos observar que houve dominância equivalente da distribuição de renda do ano de 1995 sob o ano de 1985, porém, a figura 4.5 mostrou que houve redução da concentração de renda de 1985

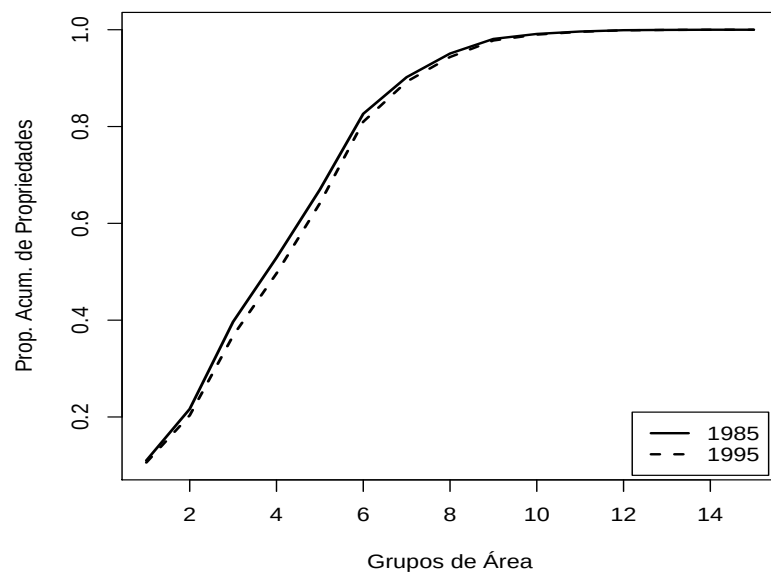


Figura 4.1: Dominância de Primeira Ordem da Distribuição das Propriedades Rurais no Brasil em 1985 e 1995.

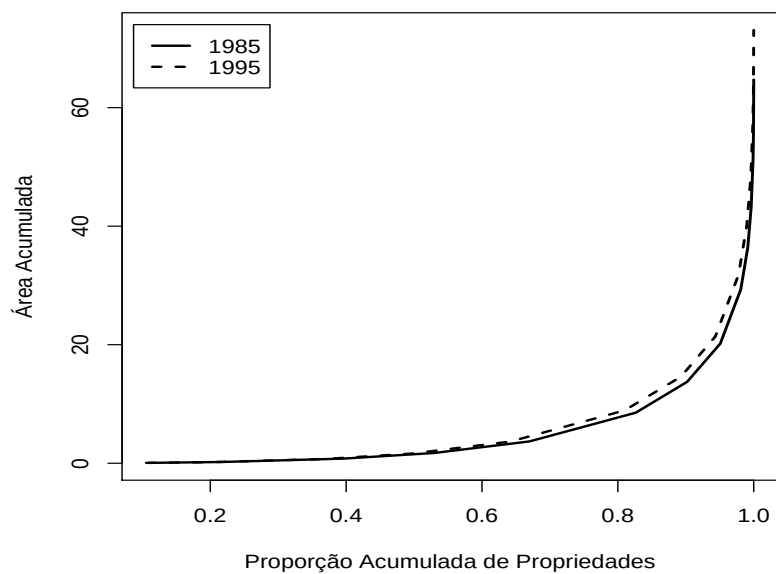


Figura 4.2: Dominância de Segunda Ordem da Distribuição das Propriedades Rurais no Brasil em 1985 e 1995.

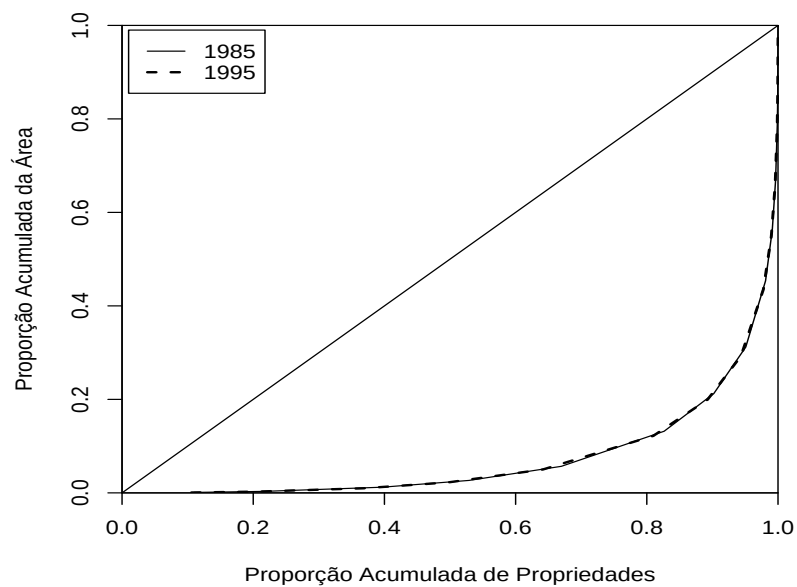


Figura 4.3: Dominância de Lorenz da Distribuição das Propriedades Rurais no Brasil em 1985 e 1995.

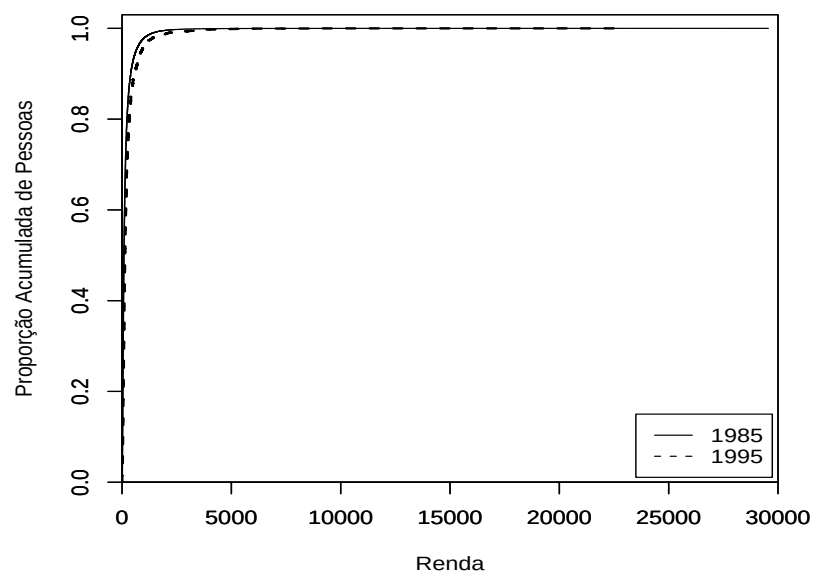


Figura 4.4: Dominância de Primeira Ordem da Distribuição de Renda no Brasil em 1985 e 1995.

para 1995, pois houve a dominância da distribuição de renda de 1995 com relação à de 1985. A confirmação da dominância de Lorenz é dada pelo índice de Gini, que revelou que houve uma pequena redução na concentração de renda. Podemos destacar alguns pontos das curvas de Lorenz, apresentadas na figura 4.6: a participação na renda dos 50% mais pobres aumentou de 12,9% em 1985 para 13,2% em 1995, porém, os 5% mais ricos tiveram aumento de 33,1% em 1985 para 33,3% em 1995. Esses pequenos aumentos na concentração de renda mostram que houve mudança nos extremos da distribuição.

No caso da distribuição de renda, a dominância de segunda ordem, do ano 1995 sobre o ano 1985, é bem mais visível do que as demais. Isto ocorre por conta da sensibilidade à média da distribuição, o que não quer dizer que houve aumento na concentração. Como um dos objetivos deste trabalho é comparar as concentrações de terra e de renda, e com unidades de medidas diferentes (ha e R\$), só é possível fazer a comparação através da dominância de Lorenz.

A análise gráfica, bem como os valores das medidas de concentração, mostra que a concentração de renda no Brasil ainda é grande. Cabe resaltar que o Brasil não é um país pobre, mas um país com muitos pobres, cuja origem da pobreza não reside na escassez de recursos. Isto quer dizer que o país é capaz de gerar renda suficiente para eliminar o contingente de pobres da população. De acordo com Diniz e Arraes (2005) nos estados mais ricos do país, inclusive, a renda per capita chega a ser comparável à de países colocados no grupo dos países de renda alta. Entretanto, quando comparada à desigualdade brasileira com a observada em países de renda per capita similar como países da América Latina ou mesmo a América do Sul, o Brasil assume um *ranking* nada desejável de primeiro lugar em desigualdade de renda.

A desigualdade brasileira é destacada por sua persistência ao longo do tempo, pois existe uma estabilidade histórica dos índices de desigualdade em termos absolutos, que descreve tanto a distribuição da renda individual como o rendimento domiciliar. Segundo Barros, Henriques e Mendonça (2000) “uma estabilidade que se mantém independente das transformações e mudanças cíclicas da economia”. Mesmo os “choques” observados, em decorrência dos vários planos de estabilização, que se seguiram entre as décadas de 1980 e 2000, tiveram um efeito pouco durador para atenuar a desigualdade.

A figura 4.7 mostra as curvas de dominância de Lorenz de terra com relação à de

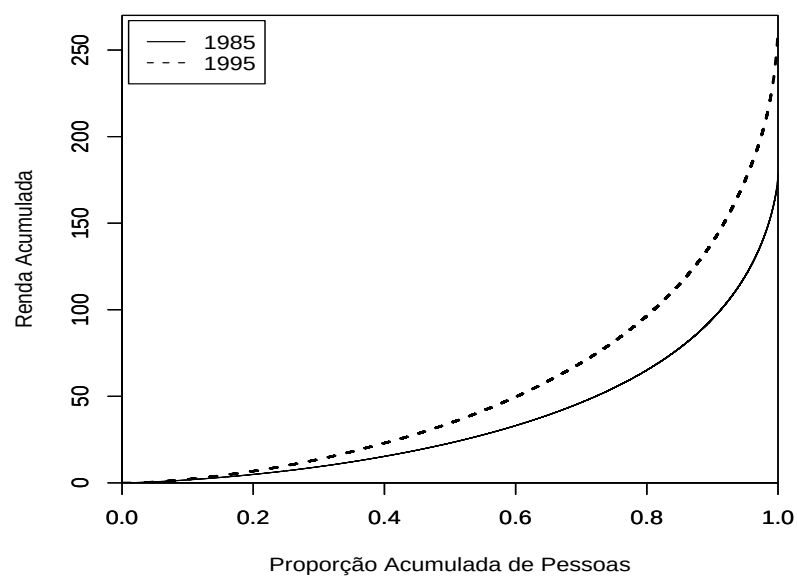


Figura 4.5: Dominância de Segunda Ordem da Distribuição de Renda no Brasil em 1985 e 1995.

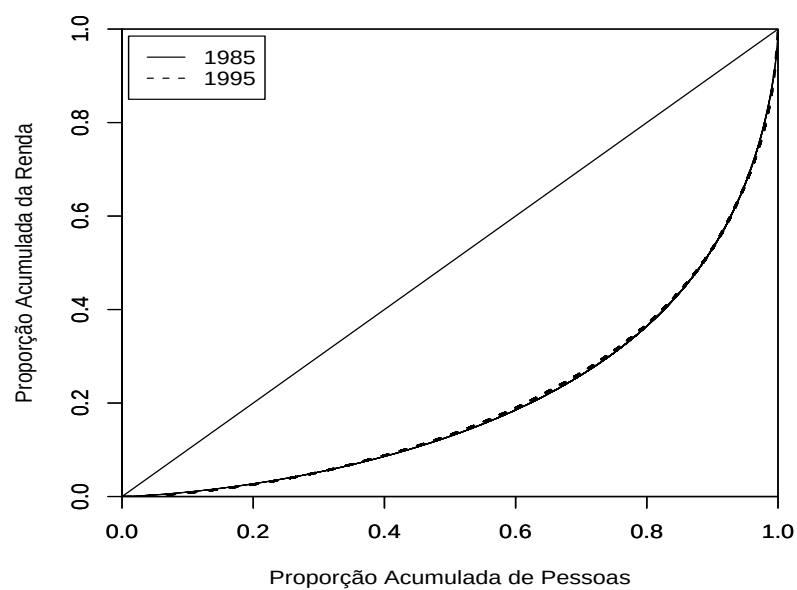


Figura 4.6: Dominância de Lorenz da Distribuição de Renda no Brasil em 1985 e 1995.

renda no ano de 1985. Podemos observar que há dominância de Lorenz da distribuição de renda com relação à de terra em 1985. O mesmo ocorre com as distribuições de terra e de renda no ano de 1995 (figura 4.8). Esses resultados confirmam que a distribuição de terra é bem mais concentrada que a distribuição de renda.

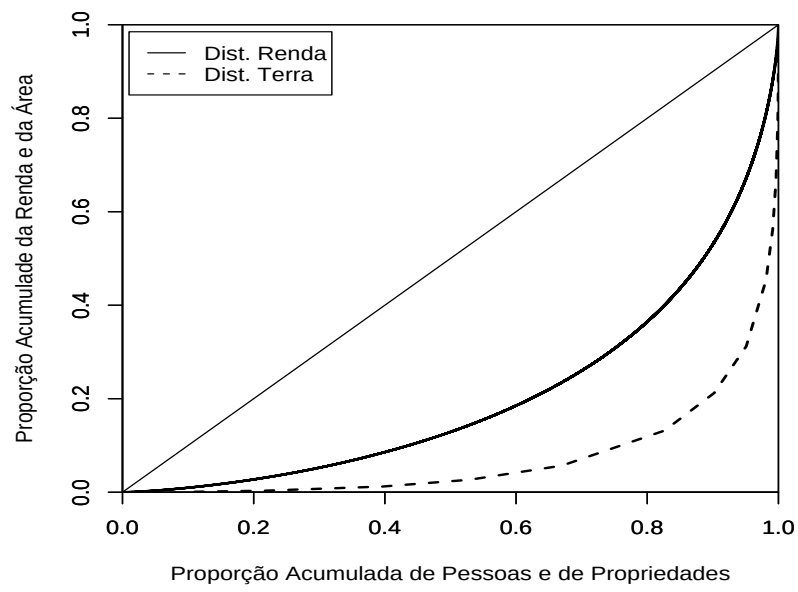


Figura 4.7: Curvas de Lorenz das Distribuições de Terra e Renda no Brasil em 1985.

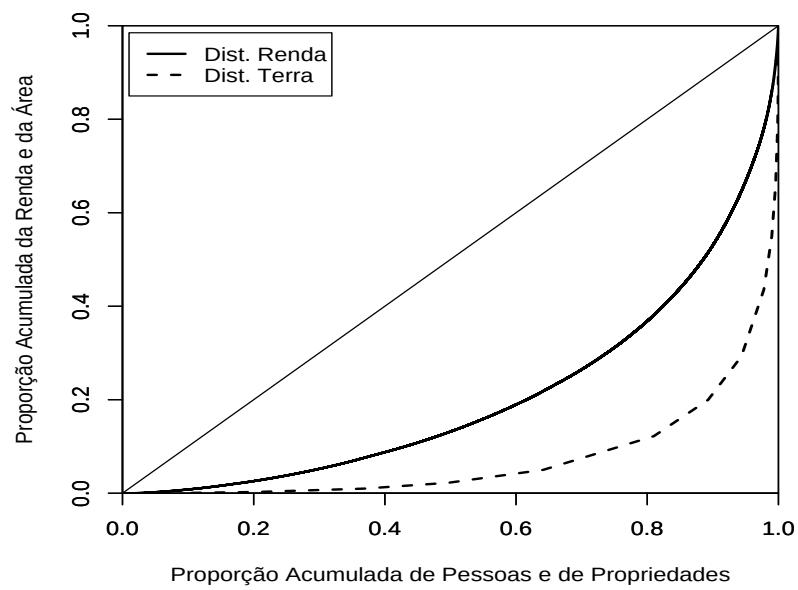


Figura 4.8: Curvas de Lorenz das Distribuições de Terra e Renda no Brasil em 1995.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Recomendações

O presente estudo confirma que, no caso das áreas rurais, grandes áreas de terra ainda concentram-se nas mãos de poucos proprietários e, no caso das rendas individuais, existe ainda uma grande concentração de pessoas com baixa renda e uma riqueza muito grande nas mãos de poucas pessoas.

A avaliação da concentração de riqueza no Brasil nos anos de 1985 e 1995 mostrou que as concentrações de terra e de renda diminuíram no período segundo algumas medidas de concentração: o índice $\mathcal{T}$ de Theil, coeficiente de variação, índice de Atkinson com $\varepsilon = 0,5$ e o índice de Gini. Porém, os índices de Atkinson com $\varepsilon \in \{1, 2\}$ indicaram aumento na concentração de riqueza no Brasil de 1985 para 1995, refletindo mudanças no extremo superior das distribuições das riquezas. Entretanto, a medida de concentração que melhor refletiu essas mudanças foi $\mathcal{A}(0, 5)$.

Ao avaliarmos a concentração de riqueza segundo a dominância estocástica, ou seja, pelo estudo das distribuições de terra e de renda no Brasil em 1985 e 1995, observamos que a distribuição de terra de 1995 apresentou dominâncias de primeira e segunda ordens sobre a distribuição de 1985; já a dominância de Lorenz foi equivalente entre as distribuições de terra nos dois anos. Além disso, observamos que a distribuição de renda em 1995 apresentou dominância de segunda ordem sobre a distribuição de renda em 1985, entretanto as dominâncias de primeira ordem e de Lorenz foram consideradas equivalentes para as distribuições de renda nos dois anos.

A comparação entre a distribuição de terra e a distribuição de renda em cada ano

revelou que a concentração de terra é superior à concentração de renda. Isso significa que não basta apenas elaborar políticas econômicas para que a renda seja melhor distribuída, sendo necessária a realização de uma reforma agrária para redistribuir as terras improdutivas e, conseqüentemente, reduzir a concentração. No caso do Brasil, não é possível afirmar que o nível de concentração de terra deve ser semelhante ao nível de concentração de renda.

De acordo com alguns dos mais recentes estudos sobre concentração de riqueza no Brasil, tais como Hoffmann (2000) sobre concentração de terra e Hoffmann (2002 e 2005) sobre concentração de renda, vimos que a concentração de terra diminuiu de 2000 para 2001 e a concentração de renda diminuiu de 1992 para 2003. Esses resultados mostraram que há uma tendência de redução da concentração de renda e de terra no Brasil.

A partir da divulgação de um novo censo agropecuário, visto que o último foi realizado em 1995, é importante estudar a concentração de terra no Brasil separando por região geográfica como também a concentração de renda utilizando a decomposição das medidas de concentração, complementando-se com a análise da dominância estocástica das distribuições, em cada região do país.

Neste apêndice apresentamos o programa computacional construído na plataforma R para obtenção das medidas de concentração e construção dos gráficos de dominância estocástica para análise da concentração de distribuição de terra e renda no Brasil nos anos de 1985 e 1995.

```
#####
## Programa para obtenção de medidas de concentração e ##
## construção das curvas de dominância estocástica para ##
## os dados de renda domiiliar per capita da PNAD e para ##
## os dados de terra do Censo Agropecuário no Brasil. ##
## Anos: 1985 e 1995. ##
## ##
## Autora: Themis da Costa Abensur ##
## Última Atualização: 26/12/2005 ##
#####

rm(list=ls())
library(ineq)

#####
##### CHAMANDO OS DADOS DO CENSO AGROPECUÁRIO DE 1985 e 1995 #####
#####

censo.85 <- read.table("C:\\1985m.txt", header=T)
censo.95 <- read.table("C:\\1995m.txt", header=T)
attach(censo.85)
attach(censo.95)

## Gerando microdados dos censos Agropecuários ##

div.AreaEstab.85 <- censo.85$Area/censo.85$Estab
dvi1.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[1] , 637311))
dvi2.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[2] , 617003))
dvi3.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[3] , 1043185))
dvi4.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[4] , 767323))
dvi5.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[5] , 815029))
dvi6.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[6] , 907481))
dvi7.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[7] , 437830))
dvi8.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[8] , 283004))
dvi9.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[9] , 174758))
dvi10.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[10] , 59669))
dvi11.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[11] , 29060))
dvi12.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[12] , 15688))
dvi13.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[13] , 3538))
dvi14.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[14] , 2066))
dvi15.85 <- cbind(rep(div.AreaEstab.85[15] , 59))
```

```

Area.85 <- rbind(dvi1.85, dvi2.85, dvi3.85, dvi4.85, dvi5.85, dvi6.85, dvi7.85, dvi8.85, dvi9.85,
                dvi10.85, dvi11.85, dvi12.85, dvi13.85, dvi14.85, dvi15.85)

div.AreaEstab.95 <- censo.95$Area/censo.95$Estab
dvi1.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[1] , 512032))
dvi2.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[2] , 471298))
dvi3.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[3] , 796724))
dvi4.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[4] , 622320))
dvi5.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[5] , 701417))
dvi6.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[6] , 814695))
dvi7.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[7] , 400375))
dvi8.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[8] , 246314))
dvi9.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[9] , 165243))
dvi10.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[10], 58407))
dvi11.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[11], 28504))
dvi12.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[12], 14982))
dvi13.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[13], 3688))
dvi14.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[14], 2147))
dvi15.95 <- cbind(rep(div.AreaEstab.95[15], 37))
Area.95 <- rbind(dvi1.95, dvi2.95, dvi3.95, dvi4.95, dvi5.95, dvi6.95, dvi7.95, dvi8.95, dvi9.95,
                dvi10.95, dvi11.95, dvi12.95, dvi13.95, dvi14.95, dvi15.95)

## Transformando as frequências da variável Terra em proporções acumuladas ##

EstabAcum.85 <- censo.85$EstabAcum/censo.85$EstabAcum[15]
AreaAcum.85 <- censo.85$AreaAcum/censo.85$AreaAcum[15]
AreaAcum1.85 <- AreaAcum.85*(sum(censo.85$Area))/censo.85$EstabAcum[15]
EstabAcum.95 <- censo.95$EstabAcum/censo.95$EstabAcum[15]
AreaAcum.95 <- censo.95$AreaAcum/censo.95$AreaAcum[15]
AreaAcum1.95 <- AreaAcum.95*(sum(censo.95$Area))/censo.95$EstabAcum[15]

##### MEDIDAS DESCRITIVAS DE TERRA DE 1985 E 1995 #####

Qt.T.85 <- quantile(Area.85, probs = seq(0.0, 1.0, 0.25))
round(rbind(Qt.T.85), 4)
min.T.85 <- min(Area.85)
me.T.85 <- mean(Area.85)
md.T.85 <- median(Area.85)
dp.T.85 <- sqrt(sum((Area.85 - me.T.85)^2)/censo.85$EstabAcum[15])
max.T.85 <- max(Area.85)
medidas.descritivas.T.85 <- rbind(min.T.85, me.T.85, md.T.85, dp.T.85, max.T.85)
round(medidas.descritivas.T.85, 4)

Qt.T.95 <- quantile(Area.95, probs = seq(0.0, 1.0, 0.25))
round(rbind(Qt.T.95), 4)
min.T.95 <- min(Area.95)
me.T.95 <- mean(Area.95)
md.T.95 <- median(Area.95)
dp.T.95 <- sqrt(sum((Area.95 - me.T.95)^2)/censo.95$EstabAcum[15])
max.T.95 <- max(Area.95)
medidas.descritivas.T.95 <- rbind(min.T.95, me.T.95, md.T.95, dp.T.95, max.T.95)
round(medidas.descritivas.T.95, 4)

##### MEDIDAS DE CONCENTRAÇÃO DE TERRA DE 1985 E 1995 #####

L.T.85 <- (sum(log(me.T.85/Area.85)))/censo.85$EstabAcum[15]
T.T.85 <- (sum((Area.85/me.T.85)*log(Area.85/me.T.85)))/censo.85$EstabAcum[15]
CV.T.85 <- dp.T.85/me.T.85
eps1.85 <- 0.5
eps3.85 <- 2.0
A1.T.85 <- 1 - (sum((Area.85/me.T.85)^(1-eps1))/censo.85$EstabAcum[15])^(1/(1-eps1))
A2.T.85 <- 1 - (1/me.T.85)*exp((1/censo.85$EstabAcum[15])*sum(sum(log(Area.85))))
A3.T.85 <- 1 - (sum((Area.85/me.T.85)^(1-eps3))/censo.85$EstabAcum[15])^(1/(1-eps3))
G.T.85 <- Gini(Area.85)
medidas.desigualdade.T.85 <- rbind(L.T.85, T.T.85, CV.T.85, A1.T.85, A2.T.85, A3.T.85, G.T.85)

```



```

round(medidas.desigualdade.T.85, 4)

L.T.95 <- (sum(log(me.T.95/Area.95)))/censo.95$EstabAcum[15]
T.T.95 <- (sum((Area.95/me.T.95)*log(Area.95/me.T.95)))/censo.95$EstabAcum[15]
CV.T.95 <- dp.T.95/me.T.95
eps1.95 <- 0.5
eps3.95 <- 2.0
A1.T.95 <- 1 - (sum((Area.95/me.T.95)^(1-eps1)))/censo.95$EstabAcum[15])^(1/(1-eps1))
A2.T.95 <- 1 - (1/me.T.95)*exp((1/censo.95$EstabAcum[15])*sum(sum(log(Area.95))))
A3.T.95 <- 1 - (sum((Area.95/me.T.95)^(1-eps3)))/censo.95$EstabAcum[15])^(1/(1-eps3))
G.T.95 <- Gini(Area.95)
medidas.desigualdade.T.95 <- rbind(L.T.95, T.T.95, CV.T.95, A1.T.95, A2.T.95, A3.T.95, G.T.95)
round(medidas.desigualdade.terra.95, 4)

##### GRÁFICOS DE DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA DAS ÁREAS RURAIS #####

Estab.85.95 <- cbind(EstabAcum.85, EstabAcum.95)
matplot(Estab.85.95, type = "l", lty = c(1, 2), col=1:1, lwd=c(2,2),
        xlab="Grupos de Área", ylab="Prop. Acum. de Propriedades")
legend(12.2, 0.21, legend=c("1985", "1995"), lty=1:2, lwd=2:2)

Es.85.95 <- cbind(EstabAcum.85, EstabAcum.95)
Ar1.85.95 <- cbind(AreaAcum1.85, AreaAcum1.95)
ylim <- range(AreaAcum1.85, AreaAcum1.95)
matplot(Es.85.95, Ar1.85.95, type = "l", lty = c(1, 2), col = 1:1, lwd=c(2,2),
        xlab="Prop. Acum. de Propriedades", ylab="Área Acumulada", ylim = ylim)
legend(0.087, 74, legend=c("1985", "1995"), lty=1:2, col=1:1, lwd=c(2,2))

Es.85.95 <- cbind(EstabAcum.85, EstabAcum.95)
Ar.85.95 <- cbind(AreaAcum.85, AreaAcum.95)
matplot(Es.85.95, Ar.85.95, type = "l", lty = c(1, 2), col = 1:1, xlim=c(0,1), ylim=c(0,1),
        lwd=c(1,2), xlab="Prop. Acum. de Propriedades", ylab="Prop. Acum. de Área",
        xaxs = "i", yaxs = "i")
lines(0:1,0:1)
legend(0.01, 0.99, legend=c("1985", "1995"), lty=1:2, col=1:1, lwd=c(1,2))

#####
##### CHAMANDO OS DADOS DA PNAD DE 1985 e 1995 #####
#####

pnad.85 <- read.table("C:\\rdpcA85.txt", header=T)
pnad.95 <- read.table("C:\\rdpcA95.txt", header=T)
attach(pnad.85)
attach(pnad.95)

##### MEDIDAS DE CONCENTRAÇÃO DE RENDA DE 1985 E 1995 #####

#Função para calcular o índice de Theil de acordo com Cowell (2000) e Lichfield (1999)
Theil <- function(x, p, parameter = 0)
{
  if (is.null(parameter))
    parameter <- 0
  if (parameter == 0) {
    n <- sum(p)
    x <- x[!(x == 0)]
    mu <- (sum(p*x))/sum(p)
    Th <- mu/x
    Th <- sum(p*(log(Th)))
    Th <- Th/n
  }
  else {
    n <- sum(p)
    x <- x[!(x == 0)]
    mu <- (sum(p*x))/sum(p)
    Th <- x/mu
  }
}

```

```

        Th <- sum(Th * (p*log(Th)))
        Th <- Th/n
    }
    Th
}

#Função para calcular o coeficiente de variação
var.coeff <- function (x, p, square = FALSE)
{
    n <- sum(p)
    mu <- (sum(p*x))/sum(p)
    V <- sum(p*(x-mu)^2)
    CV <- sqrt(V/n)/mu
    if (square)
        CV <- CV^2
    CV
}

#Função para calcular o índice de Atkinson
Atkinson <- function (x, p, parameter = 0.5)
{
    n <- sum(p)
    mu <- (sum(p*x))/sum(p)
    if (is.null(parameter))
        parameter <- 0.5
    if (parameter == 1)
        A <- 1 - (exp(sum(p*(log(x/mu))))/n)
    else {
        A <- 1 - ((sum(p*((x/mu)^(1-parameter))))/n)^(1/(1-parameter))
    }
    A
}

#Função para calcular o índice de Gini com pesos
Gini.ponderado <- function(z)
{
    x <- z[,1]      #renda
    n <- length(x)  #número de observações
    p <- z[,2]      #peso
    x.ord <- order(x, decreasing = TRUE)
    x.peso.ord <- cbind(x[x.ord], p[x.ord])
    N <- sum(p)
    mu <- sum(x.peso.ord[,1] * x.peso.ord[,2]) / N
    ci <- matrix(0, n + 1, 1)
    ci[1] <- 0
    ci[2:(n + 1)] <- cumsum(x.peso.ord[,2])
    G1 <- 1 + (1 / N)
    G2 <- 1 / (N * sum(x.peso.ord[,1] * x.peso.ord[,2]))
    G3 <- sum(x.peso.ord[,1] * (ci[1:n] + 1) * x.peso.ord[,2]) +
        sum(x.peso.ord[,1]*ci[2:(n+1)]*x.peso.ord[,2])
    G <- G1 - G2 * G3
    G
}

L.R.85 <- Theil(renda85, peso85, parameter = 0)
T.R.85 <- Theil(renda85, peso85, parameter = 1)
CV.R.85 <- var.coeff(renda85, peso85, square = FALSE)
A1.R.85 <- Atkinson(renda85, peso85, parameter = 0.5)
A2.R.85 <- Atkinson(renda85, peso85, parameter = 1.0)
A3.R.85 <- Atkinson(renda85, peso85, parameter = 2.0)
z.85 <- cbind(renda85, peso85)
G.R.85 <- Gini.ponderado(z.85)
medidas.desigualdade.R.85 <- rbind(L.R.85, T.R.85, CV.R.85, A1.R.85, A2.R.85, A3.R.85, G.R.85)
round(medidas.desigualdade.R.85, 4)

```

```

L.R.95 <- Theil(renda95, peso95, parameter = 0)
T.R.95 <- Theil(renda95, peso95, parameter = 1)
CV.R.95 <- var.coeff(renda95, peso95, square = FALSE)
A1.R.95 <- Atkinson(renda95, peso95, parameter = 0.5)
A2.R.95 <- Atkinson(renda95, peso95, parameter = 1.0)
A3.R.95 <- Atkinson(renda95, peso95, parameter = 2.0)
z.95 <- cbind(renda95, peso95)
G.R.95 <- Gini.ponderado(z.95)
medidas.desigualdade.R.95 <- rbind(L.R.95, T.R.95, CV.R.95, A1.R.95, A2.R.95, A3.R.95, G.R.95)
round(medidas.desigualdade.renda.95, 4)

##### GRÁFICOS DE DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA DAS RENDAS #####

FD <- function (x, n = rep(1, length(x)), plot = FALSE)
{
  k <- length(x)
  o <- order(x)
  x <- x[o]
  n <- n[o]
  x <- n * x
  q <- cumsum(n)/sum(n)
  Q <- x
  q <- c(0, q)
  Q <- c(0, Q)
  FD <- list(Q, q)
  names(FD) <- c("Q", "q",)
  class(FD) <- "FD"
  if (plot)
    plot(FD)
  FD
}

FD.85.renda <- FD(renda85)
FD.95.renda <- FD(renda95)
plot(FD.85.renda$Q, FD.85.renda$q, xaxs="i", yaxs="i", lty=1, xlab="Renda", ylab="Prop. Acum. de Pessoas", main="",
      xlim=c(-0.01,30000), ylim=c(0,1.03), lwd=1, type="l")
par(new=T)
plot(FD.95.renda$Q, FD.95.renda$q, xaxs="i", yaxs="i", lty=2, xlab="", ylab="", main="", xlim=c(-0.01,30000),
      ylim=c(0,1.03), lwd=2, type="l")
legend(23500, 0.15, legend=c("1985", "1995"), lty=1:2)

Lc.85.renda <- Lc(renda85)
Lc.95.renda <- Lc(renda95)
plot(Lc.85.renda$p, Lc.85.renda$L.general, xaxs="i", yaxs="i", lty=1, xlab="Prop. Acum. de Pessoas",
      ylab="Renda Acumulada", ylim=c(0,270), main="", lwd=1, type="l")
par(new=T)
plot(Lc.95.renda$p, Lc.95.renda$L.general, xaxs="i", yaxs="i", lty=2, xlab="", ylab="", main="", ylim=c(0,270),
      lwd=2, type="l")
legend(.01, 267, legend=c("1985", "1995"), lty=1:2)

Lc.85.renda <- Lc(renda85)
Lc.95.renda <- Lc(renda95)
plot(Lc.85.renda$p, Lc.85.renda$L, xaxs="i", yaxs="i", lty=1, xlab="Prop. Acum. de Pessoas",
      ylab="Prop. Acum. de Renda", main="", lwd=1, type="l")
par(new=T)
plot(Lc.95.renda$p, Lc.95.renda$L, xaxs="i", yaxs="i", lty=2, xlab="", ylab="", main="", lwd=2, type="l")
abline(0,1)
legend(.01, 0.985, legend=c("1985", "1995"), lty=1:2)

##### PONTOS DAS CURVAS DE LORENZ DA DISTRIBUIÇÃO DE RENDA #####

p.renda.85 <- (Lc.85.renda$p)*100
L.renda.85 <- (Lc.85.renda$L)*100
pontosLc.renda.85 <- cbind(p.renda.85, L.renda.85)
a.renda <- fix(pontosLc.renda.85)

```

```

p.renda.95 <- (Lc.95.renda$p)*100
L.renda.95 <- (Lc.95.renda$L)*100
pontosLc.renda.95 <- cbind(p.renda.95, L.renda.95)
b.renda <- fix(pontosLc.renda.95)

##### GRÁFICOS DE DOMINÂNCIA DE LORENZ DE TERRA COM RENDA #####

Lc.85.renda <- Lc(renda85)
plot(Lc.85.renda$p, Lc.85.renda$L, xaxs = "i", yaxs = "i", lty=1, xlab="Prop. Acum. de Pessoas e de Propriedades",
     ylab="", main="", lwd=2, xlim=c(0,1), ylim=c(0,1), type="l")
par(new=T)
plot(EstabAcum.85, AreaAcum.85, xaxs = "i", yaxs = "i", type = "l", lty=2, xlab="",
     ylab="Prop. Acum. de Renda e de Terra",
     main="", lwd=2, xlim=c(0,1), ylim=c(0,1))
abline(0,1)
legend(.01, 0.985, legend=c("Dist. Renda", "Dist. Terra"), lty=1:2)

Lc.95.renda <- Lc(renda95)
plot(Lc.95.renda$p, Lc.95.renda$L, xaxs = "i", yaxs = "i", lty=1, xlab="Prop. Acum. de Pessoas e de Propriedades",
     ylab="", main="", lwd=2, xlim=c(0,1), ylim=c(0,1), type="l")
par(new=T)
plot(EstabAcum.95, AreaAcum.95, xaxs = "i", yaxs = "i", type = "l", lty=2, xlab="",
     ylab="Prop. Acum. de Renda e de Terra", main="", lwd=2, xlim=c(0,1), ylim=c(0,1))
abline(0,1)
legend(.01, 0.985, legend=c("Dist. Renda", "Dist. Terra"), lty=1:2, lwd=c(2,2))

```

REFERÊNCIAS

- [1] Atkinson, A. B. (1970). On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, **2**, 244–263.
- [2] Atkinson, A. B. (1983). *The Economics of Inequality (2nd edition)*. Clarendon Press, Oxford.
- [3] Azzoni, C. R. (2001). Economic Growth and Regional Income Inequality in Brazil. *The Annals of Regional Science*, **35**, 133–152.
- [4] BARROS, R. P.; HENRIQUES, R. & MENDONÇA, R. (2000). A estabilidade inaceitável: desigualdade e pobreza no Brasil. *Desigualdade e pobreza no Brasil*, Rio de Janeiro: IPEA.
- [5] Corseuil, C. H. (2002). *Uma Sugestão de Deflatores para Rendas Obtidas a partir de Algumas Pesquisas Domiciliares do IBGE*. Nota Técnica, IPEA.
- [6] Cowell, F. A. (1985). Measures of Distributional Change: An Axiomatic Approach. *Review of Economic Studies*, **52**, 135–151.
- [7] Cowell, F. A. (1995). *Measuring Inequality (2nd edition)*. Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead.
- [8] Cowell, F. A. (2000). Measurement of Inequality in Atkinson, A.B. and F. Bourguignon (eds). *Handbook of Income Distribution (vol. 1)*. Elsevier Science, North Holland, Amsterdam.

- [9] Dalton, H. (1920). The Measurement of the Inequality of Incomes. *Economic Journal*, **30**, 348–61.
- [10] Diniz, M. B. & Arraes, R. A. (2005). *Desenvolvimento Econômico e Desigualdade de Renda no Brasil*. Em: www.bnb.gov.br.
- [11] Gini, C. (1910). *Indici di concentrazione e di dipendenza*. Torino: Unione Tipografica - Editrice Torinese, XX: 453–469.
- [12] Gray, D., Mills, J. A. & Zandvakili, S. (2003). Statistical Analysis of Inequality with Decompositions: the Canadian Experience. *Empirical Economics*, **28**, 291–302.
- [13] Guanziroli, C. E. (1999). Reforma Agrária e Globalização da Economia: o Caso do Brasil. *Econômica*, **1**, 27–52.
- [14] Haddad, E. A. & Perobelli, F. S. (2002). Mudança Estrutural na Economia Brasileira no Período de 1985–1996: Uma Análise de Insumo-Produto. *Texto para Discussão nº 15, Núcleo de Pesquisas Econômicas*.
- [15] Hoffmann, R. (1998). *Distribuição de Renda: Medidas de Desigualdade e Pobreza*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.
- [16] Hoffmann, R. (2000). *Distribuição da Posse da Terra no Brasil e nas Unidades da Federação, Conforme a Condição do Produtor, 1970 a 1995/96*. Em: www.eco.unicamp.br/projetos/rurbano.html.
- [17] Hoffmann, R. (2001). Effect of the Rise on a Pearsons Income on Inequality. *Brazilian Review of Econometrics*, **21**, 237–262.
- [18] Hoffmann, R. (2002). A distribuição da renda no Brasil no período 1992-2001. *Economia e Sociedade*, Campinas/SP, n.11, 213–235.
- [19] Hoffmann, R. (2004). Decomposition of Mehran and Piesch Inequality Measures by Factor Components and their Application to the Distribution of Per Capita Household in Brazil. *Brazilian Review of Econometrics*, **24**, 149–171.
- [20] Hoffmann, R. (2005). Distribuição da Renda no Brasil: Mudanças de 2002 para 2003 e a Delimitação dos Relativamente Ricos. *Econômica*, **7**, 77–95.

- [21] IBGE (1985). *Censo Agropecuário de 1985 (número 1)*. Rio de Janeiro, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.
- [22] IBGE (1996). *Censo Agropecuário de 1995-1996 (número 1)*. Rio de Janeiro, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.
- [23] Leshno, M. & Levy, H. (2002). Preferred by “All” and Preferred by “Most” Decision Makers: Almost Stochastic Dominance. *Management Science*, **48**, 1074–1085.
- [24] Litchfield, J. A. (1999). *Inequality: Methods and Tools*. The World Bank, 1999.
- [25] Lorenz, M. O. (1905). Methods for Measuring Concentration of Wealth. *Journal of the American Statistical Association*, **9**, 209–219.
- [26] Maccheroni, F. (2004). Yaari’s Dual Theory Without the Completeness Axiom. *Economic Theory*, **23**, 701–714.
- [27] Moore, R. E. (1996). Ranking Income Distributions Using the Geometric Mean and a Related General Measure. *Southern Economic Journal*, **63**, 69–75.
- [28] Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra – MST, (2001). *Apoios – Fogos de Artifício na Zona Rural*. Em: www.mst.org.br/interar/apoios/fbetto.html.
- [29] Pen, J. (1974). *Income Distribution (2nd edition)*. Penguin, Harmondsworth.
- [30] Pigou, A. F. (1912). *Wealth and Welfare*. Macmillan, London.
- [31] Ramos, L. e Vieira, M. L. (2001). Desigualdade de Rendimentos no Brasil nas Décadas de 80 e 90: Evolução e Principais Determinantes. *Texto para Discussão do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA)*, Rio de Janeiro.
- [32] Saposnik, R. (1981). Rank Dominance in Income Distribution. *Public Choice*, **36**, 147–151.
- [33] Saposnik, R. (1983). On Evaluating Income Distributions: Rank Dominance. *Public Choice*, **40**, 329–336.
- [34] Sen, A. K. (1973). *On Economic Inequality*. Oxford University Press, London.

- [35] Shorrocks, A. F. (1983). Ranking Income Distributions. *Economica*, **50**, 3–17.
- [36] Theil, H. (1967). *Economics and Information Theory*. North Holland, Amsterdam.
- [37] Thistle, P. D. (1989). Ranking Distributions with Generalized Lorenz Curves. *Southern Economic Journal*, **56**, 1–12.