

ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DE UM CÍRCULO PARA MODELOS
HETEROSCEDÁSTICOS DE REGRESSÃO

FRANCISCO EDUARDO ROMERO MORALES

Orientador: Prof. Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Co-orientador: Prof. Francisco Cribari-Neto

Área de Concentração: Estatística Matemática

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2006

Romero Morales, Francisco Eduardo

**Estimação dos parâmetros de um círculo para
modelos heteroscedásticos de regressão / Francisco
Eduardo Romero Morales. – Recife : O Autor, 2006.
vii, 93 folhas : il., fig., tab.**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Mestrado em Estatística, 2006.**

Inclui bibliografia.

**1. Estatística. 2. Modelos de regressão. 3.
Heteroscedasticidade – Dados circulares. .I. Título.**

**311
310**

**CDU (2.ed.)
CDD (22.ed.)**

**UFPE
BC2006-084**

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

16 de fevereiro de 2006 _____
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Francisco Eduardo Romero Morales

Intitulada

Estimação dos Parâmetros de um Círculo para Modelos Heteroscedásticos de
Regressão

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

orientador

Silvia Lopes de Paula Ferrari

Silvia Lopes de Paula Ferrari (USP)

Getúlio José Amorim do Amaral

Getúlio José Amorim do Amaral



Prof. Klaus L. P. Vasconcellos
Coordenador da
Pós-graduação em
Estatística, UFPE

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

©Copyright by

FRANCISCO EDUARDO ROMERO MORALES

2006

Todos os direitos reservados

Typeset by L^AT_EX

A Carmen y Francisco, que me han dado lo mejor posible.

A la memoria de familiares y amigos

Cristian, Empera, Nohemi, Blanca, Marcos y Miguel.

AGRADECIMENTOS

A Deus principal fonte de sabiduría.

Aos meus pais que me han dado amor incondicionalmente.

A minhas irmãs e familia que estiveram presentes em minha formação.

Aos professores Klaus Vasconcellos e Francisco Cribari Neto, pelo profissionalismo e orientação.

A Valéria, por sua amabilidade e bom espírito de colaboração.

A colegas e amigos de mestrado Nátaly, Daniela, Renata, Fabio, Tiago, Carlos, Camilo e Artur pelos horas de diversão, companherismo e orientações.

Á Coordenação de Aperfeicoamento de Pessoal de Nivel Superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Técnicas clássicas de regressão linear assumem que os erros, que representam a componente aleatória do modelo, têm variância constante, ou seja, assumem homoscedasticidade. Esta é uma suposição bastante forte e, em grande parte dos problemas práticos, pouco razoável. Um estimador consistente da matriz de variâncias e covariâncias do estimador do vetor de parâmetros foi proposto por Halbert White e é conhecido como HC0. Algumas formas alternativas deste estimador foram propostas na literatura, dentre as quais destacam-se HC1, HC2, HC3 e HC4. Os estimadores HC's usam os quadrados dos resíduos irrestritos; nós apresentamos também variantes que usam os quadrados dos resíduos restritos, denotadas por HCR0, HCR1, HCR2, HCR3 e HCR4. O objetivo da presente dissertação é, através de uso de métodos numéricos, estudar o comportamento, sob heteroscedasticidade, de inferência sobre os parâmetros de um círculo mediante um modelo de regressão e mediante o uso dos estimadores consistentes da matriz de variância e covariâncias do estimador do vetor de parâmetros de regressão.

ABSTRACT

This thesis considers the have issue of performing inference on the parameters of a circle through a regression model. We focus on the situation where the erros are heteroskedastic and the functional form of heteroskedasticity is unknown. We evaluate the finite-sample performance of tests based on different consistent estimators of the variance-covariance matrix of the vector of least squares parameter estimators.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Considerações iniciais	1
1.2	Organização da dissertação	3
1.3	Suporte computacional	3
2	Modelo de regressão	4
2.1	Introdução	4
2.2	O modelo de regressão linear e seus estimadores	6
2.3	Dados direcionais	20
2.3.1	Introdução	20
2.3.2	Estatísticas descritivas de dados circulares	20
2.3.3	Algumas distribuições de probabilidade circulares	24
2.3.4	Modelos de regressão	29
2.4	O modelo estudado e suas estimativas	32
3	Avaliação numérica	37
3.1	Introdução	37
3.2	Metodologia	38
3.3	Resultados numéricos	41
3.4	Medidas descritivas da distribuição empírica das estatísticas de teste	68
4	Conclusões	87
	Referências Bibliográficas	89

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

Análise de regressão é uma ferramenta estatística que explora a relação entre variáveis quantitativas (ou qualitativas). Foi primeiro desenvolvida pelo pesquisador britânico Sir Francis Galton (1822-1911), num estudo das alturas médias dos filhos e pais muito altos e muito baixos. Ele descobriu que filhos de pais muito altos ou muito baixos tendiam a ser altos ou baixos, respectivamente, mas não tão altos ou tão baixos quanto seus pais. Essa tendência de se mover afastando-se dos extremos em direção à média foi chamada de *regressão*. O estudo foi publicado em 1885 e denominado de *Regressão em Direção à Mediocridade na Estatura Hereditária*.

A inferência estatística tradicional sobre o modelo de regressão linear está funda-

mentada em suposições muito estritas sobre a componente aleatória, que na prática são freqüentemente violadas. Em particular, ao se utilizar o modelo de regressão clássico, é usual assumir que os erros têm variância constante, caso em que se diz haver homoscedasticidade; esta suposição não é verificada em muitas situações práticas. Na presença de heteroscedasticidade, a estimativa pelo método de mínimos quadrados ordinários da matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros de regressão torna-se imprecisa, podendo conduzir a conclusões incorretas a respeito da relação entre as variáveis dependente e explicativas do modelo. Isso ocorre porque os testes t associados requerem estimativas confiáveis das variâncias dos estimadores dos parâmetros. Uma possível solução é usar estimadores consistentes da matriz de variâncias e covariâncias, os estimadores HC's, que funcionam bem tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade (Long & Ervin 2000). Os estimadores HC's usam os quadrados dos resíduos irrestritos; em contraste, as variantes que usam quadrados dos resíduos restritos, denotadas por HCR0, HCR1, HCR2, HCR3 e HCR4, funcionam bem em amostras finitas com diferenças pequenas entre elas (Godfrey 2005).

Nosso objetivo é realizar uma comparação dos testes de hipóteses baseados nos diferentes estimadores da matriz de variâncias e covariâncias do estimador do vetor de parâmetros, com base em um conjunto de dados circulares usando modelos de regressão linear com estrutura de variância heteroscedástica quando as diferenças angulares entre dois pontos quaisquer são conhecidas.

1.2 Organização da dissertação

A presente dissertação de mestrado está dividida em quatro capítulos. No segundo capítulo é apresentado formalmente o modelo de regressão linear e algumas de suas propriedades quando tem-se estrutura de variância homoscedástica e heteroscedástica. Faz-se uma breve descrição dos dados direcionais, e as suposições que, em geral são feitas. É apresentado o modelo no que é baseada a presente dissertação. No terceiro capítulo são apresentados os resultados numéricos, onde é feita uma comparação entre os desempenhos dos testes baseados nos diferentes estimadores da matriz de variâncias e covariâncias, HC0, HC2, HC3 e HC4, e os testes baseados nos estimadores restritos da matriz de variâncias e covariâncias HCR0, HCR2, HCR3 e HCR4. No quarto capítulo são apresentadas as conclusões obtidas ao longo desta dissertação.

1.3 Suporte computacional

A linguagem de programação matricial `0x`, criada por Jurgen Doornik em 1994, constitui a plataforma computacional utilizada no desenvolvimento da presente dissertação de mestrado. Esta é uma linguagem bastante flexível e que permite a implementação de técnicas estatísticas com grande facilidade e eficiência. Ela é distribuída gratuitamente para uso acadêmico no endereço: <http://www.doornik.com>. Detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Doornik (2001).

2.1 Introdução

Análise de regressão é uma ferramenta estatística que explora a relação entre variáveis quantitativas (ou qualitativas). Técnicas clássicas de regressão linear tipicamente assumem que os erros, que correspondem à componente aleatória do modelo, têm variância constante, ou seja, apresentam a propriedade de *homoscedasticidade*. Esta suposição é bastante forte e em muitos problemas práticos é pouco razoável.

Para a estimação dos parâmetros é comum usar o método de *mínimos quadrados ordinários* (MQO), o qual fornece estimadores que possuem propriedades desejáveis, como não-viés, consistência e eficiência, além da fácil implementação computacional. Quando a suposição de homoscedasticidade é violada, ou seja, a variância dos erros não é constante,

dizemos que há *heteroscedasticidade* no modelo.

Sob heteroscedasticidade, o *estimador de mínimos quadrados ordinários* (EMQO) do vetor de parâmetros de regressão mantém algumas propriedades, ele é não-viesado e consistente, tornando-se ineficiente, i.e., não sendo mais o melhor estimador linear não-viesado. O estimador usual de sua matriz de variâncias e covariâncias passa a ser viesado e não-consistente, tornando, assim, pouco confiáveis estimativas intervalares e testes de hipóteses (tais como o teste t) que utilizam estes valores. Torna-se necessária a obtenção de um método de estimação alternativo para a matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros da regressão. Dessa forma, é possível realizar inferências assintoticamente válidas.

A estimação dos parâmetros do círculo pode ser feita com base no melhor estimador linear não-viesado (BLUE), via estimação de mínimos quadrados (EMQO) ou através de estimação em duas etapas (TSE), esta última tendo sido proposta por Yin & Wang (2004).

Na literatura há uma grande variedade de métodos para estimação no círculo, algumas delas fazendo uso de modelos estatísticos; ver, por exemplo, Chan (1965), Anderson (1981), Berman & Culpin (1986) e Wu (1997).

Sejam (x_i, y_i) as coordenadas x e y do i -ésimo dado, n o número de dados, (ξ_1, ξ_2) as coordenadas do centro e ρ o raio do círculo. Para o cálculo estatístico, Berman & Somlo (1986) assumem que todos os x_i e y_i são variáveis aleatórias com variância comum. Em algumas situações práticas esta suposição pode ser violada; como notou Kasa (1976), em engenharia de microondas. Um dos exemplos de aplicação para este tipo de modelo é a calibração de um instrumento de medição da impedância. O Laboratório de Microondas no

Laboratório de Medidas Nacional CSIRO tem um instrumento o qual é usado para medir a impedância (um número complexo) nas frequências de microonda. Este instrumento deve ser calibrado (Somlo & Hunter 1982). No processo de calibração, diversas seções de linha da transmissão da precisão variando comprimentos e terminações com impedância comum são conectadas ao instrumento. A conexão de cada seção produz um número complexo chamado coeficiente de reflexão. De acordo com a teoria física, o coeficiente de reflexão fica num círculo com centro e radio desconhecido, já que a solução de este sistema corresponde às equações de um círculo, mas devido a várias causas as leituras estão sujeitas a uma componente aleatória (são ruidosas). A calibração do instrumento requer a estimação do centro do círculo teórico.

Igualmente, as diferenças angulares entre os coeficientes de reflexão estão funcionalmente relacionadas aos comprimentos da correspondente seção da linha de transmissão de uma maneira sabida. Daqui, um conhecimento dos comprimentos das seções permite um uso do modelo a estudar para estimar o centro do círculo. Neste capítulo estudaremos a estimação do círculo por um modelo de regressão que foi introduzido em Berman & Somlo (1986) e Berman (1983); por enquanto, não assumimos que x_i e y_i têm variância comum.

2.2 O modelo de regressão linear e seus estimadores

Consideramos o modelo de regressão linear definido como

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ é um vetor contendo n observações da variável dependente, $\mathbf{X}$ é uma matriz $n \times p$ ($p < n$) de regressores fixos, de posto coluna completo,

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor contendo os p parâmetros desconhecidos e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^\top$ é um vetor de erros aleatórios.

As seguintes suposições são feitas:

1. $E(\varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$
2. $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2, \quad 0 < \sigma_i^2 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n;$
3. $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j;$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{L}, \quad \text{onde } \mathbf{L} \text{ é uma matriz positiva definida;}$

As suposições (1) – (3) garantem que o vetor de erros do modelo $\boldsymbol{\varepsilon}$ tem média zero e matriz de variâncias e covariâncias diagonal, que definiremos como

$$\text{cov}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\Omega} = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 \}, \quad (2.2)$$

onde cada elemento σ_i^2 representa a i -ésima variância, i.e., $\sigma_i^2 = \text{var}(\varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Em caso de homoscedasticidade, todos os elementos diagonais da matriz (2.2) são iguais, ou seja, $\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$. A condição de regularidade assintótica sobre a matriz $\mathbf{X}$ na suposição (4) indica que, quando n cresce, os elementos de $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ não crescem a uma razão maior do que n e que, no limite, os regressores são linearmente independentes.

Consideremos ainda a seguinte suposição:

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} = \mathbf{M}, \quad \text{onde } \mathbf{M} \text{ é uma matriz positiva definida.}$

O vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\beta}$ representa os efeitos dos regressores considerados sobre a média da variável dependente. Um dos objetivos centrais em modelagem de regressão é fazer inferências sobre este vetor de parâmetros. O método de MQO é o mais

utilizado para estimar os parâmetros do modelo (2.1). O estimador MQO de β é obtido minimizando-se a soma de quadrados dos erros do modelo $(\mathbf{SQ})$, dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{SQ} &= \varepsilon^\top \varepsilon \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta).\end{aligned}\tag{2.3}$$

O EMQO de β é

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}.\tag{2.4}$$

Uma vez que $\hat{\beta}$ é uma função do vetor aleatório $\mathbf{y}$, $\hat{\beta}$ também é uma variável aleatória. Duas quantidades de interesse podem ser calculadas a partir da estimação de β e da matriz de regressores $\mathbf{X}$; são elas, o vetor de valores preditos,

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{H}\mathbf{y},\tag{2.5}$$

onde $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$, e o vetor de resíduos de MQO,

$$\hat{\varepsilon} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{y} = \mathbf{H}^*\mathbf{y},\tag{2.6}$$

onde $\mathbf{H}^* = \mathbf{I}_n - \mathbf{H}$. A matriz $\mathbf{H}$ é chamada de *matriz chapéu* por possuir a característica de que, quando multiplicada por $\mathbf{y}$, fornece $\hat{\mathbf{y}}$ como em (2.5), também sendo conhecida como *matriz projeção*. As matrizes $\mathbf{H}^*$ e $\mathbf{H}$ são simétricas e idempotentes. O i -ésimo elemento da diagonal da matriz $\mathbf{H}$, h_i , é usado como uma medida de influência da i -ésima observação sobre o respectivo valor ajustado, assumindo valores no intervalo $[0,1]$ (Hoaglin & Welsch 1978), em especial quando h_i é grande, i.e., $h_i > \frac{2p}{n}$, acostuma-se dizer que é ponto de alavanca.

Para avaliar a qualidade do estimador encontrado, devemos investigar as propriedades amostrais de $\hat{\beta}$.

O estimador $\hat{\beta}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}, \quad \text{de (2.4)} \\
&= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top (\mathbf{X}\beta + \varepsilon), \quad \text{por (2.1)} \\
&= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon \\
&= \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando o fato de que $\mathbf{X}$ é uma matriz de regressores fixos, podemos obter o valor esperado de $\hat{\beta}$:

$$\begin{aligned}
E[\hat{\beta}] &= E[\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon] \\
&= \beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top E(\varepsilon) \\
&= \beta, \quad \text{pela suposição (1).}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Um estimador qualquer $\hat{\theta}$ é dito ser não-viesado para um parâmetro θ se $E(\hat{\theta}) = \theta$, (Hogg & Craig 1995). A partir de (2.8), conclui-se que o EMQO é não-viesado para β , ou seja, a média de $\hat{\beta}$ é igual ao verdadeiro valor do parâmetro.

Observe que para estabelecer a propriedade de não-viés do EMQO, não foi necessário assumir homoscedasticidade. Utilizou-se apenas que os erros têm média zero, além da suposição básica de que o modelo sendo o estimado é o correto. Sob heteroscedasticidade, além de ser não-viesado, o EMQO é consistente para β , i.e., quando o tamanho amostral n aumenta, $\hat{\beta}$ converge em probabilidade para β , denotado $\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta$, onde “plim” representa o limite em probabilidade. É possível provar este resultado utilizando o teorema que garante que se $g(\cdot)$ é uma função contínua e z_n é qualquer sequência de vetores aleatórios, então

$$\text{plim } g(z_n) = g[\text{plim}(z_n)]$$

se $\text{plim}(z_n)$ existe (Rao 1973). Por (2.7), temos que

$$\begin{aligned}\text{plim}(\hat{\beta}) &= \text{plim}(\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon) \\ &= \beta + \text{plim}\left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \varepsilon\right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Utilizando o fato de que o limite em probabilidade de uma seqüência não-estocástica é igual a seu limite e aplicando o teorema citado, tem-se que

$$\begin{aligned}\text{plim}\left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} &= \left(\text{plim} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} \\ &= \mathbf{L}^{-1}, \quad \text{por (4)}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Além disso, ε é um vetor de variáveis aleatórias não-correlacionadas que possuem variâncias finitas e $\mathbf{X}^\top \varepsilon = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{(i)}^\top \varepsilon_i$, onde $\mathbf{X}_{(i)}^\top$ é a i -ésima linha da matriz $\mathbf{X}$ e ε_i é o i -ésimo elemento do vetor ε , sendo $E(\mathbf{X}^\top \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{(i)}^\top E(\varepsilon_i) = 0$ por (1). Então, pela *Lei Fraca de Chebyshev* (Rao 1973) e por (5), temos que

$$\text{plim}\left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \varepsilon\right) = 0;\tag{2.11}$$

logo, por (2.10) e (2.11) segue que $\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta$, ou seja, $\hat{\beta}$ é consistente para β .

Para avaliar a precisão do EMQO no modelo (2.1), será obtida sua matriz de variâncias e covariâncias:

$$\begin{aligned}\Psi &= \text{cov}[\hat{\beta}] \\ &= \text{cov}[\beta + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon], \quad \text{por (2.7)} \\ &= \text{cov}[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon] \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \text{cov}[\varepsilon] \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \Omega \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \quad \text{por (2.2)}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Se o modelo for homoscedástico, a matriz de variâncias e covariâncias dos erros será dada por $\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$. Neste caso, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \sigma^2 \mathbf{I}_n \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

O Teorema de Gauss-Markov, enunciado a seguir, garante que a matriz em (2.13) é mínima, ou seja, garante a eficiência de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, dentro da classe de estimadores lineares e não-viesados para $\boldsymbol{\beta}$.

Teorema 1 (Gauss-Markov). Seja $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{C}^\top \mathbf{y}$, onde $\mathbf{C}$ é uma matriz $(p \times n)$ de constantes tais que $\mathbf{C}^\top \mathbf{X} = \mathbf{I}_n$, e sejam válidas as suposições (1), (2) e (3). Então, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é mais *preciso* do que $\boldsymbol{\beta}^*$ se $\hat{\boldsymbol{\beta}} \neq \boldsymbol{\beta}^*$, ou seja,

$$\text{cov}(\boldsymbol{\beta}^*) = \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{B},$$

onde $\mathbf{B}$ é uma matriz positiva-definida.

Uma implicação do Teorema de Gauss-Markov é que, quando há homoscedasticidade, o EMQO apresenta propriedades amostrais superiores a qualquer outro estimador para $\boldsymbol{\beta}$ que seja linear e não-viesado.

Agora, nosso interesse reside em verificar o que acontece quando a suposição (2) é violada, ou seja, queremos analisar as conseqüências dos erros serem heteroscedásticos sobre o processo de estimação de $\boldsymbol{\beta}$. Para isso, é necessário definir o *estimador de mínimos quadrados generalizados* (EMQG).

Seja o modelo (2.1) e as suposições para ele estabelecidas (de (1) até (5)). Dado que $\mathbf{\Omega}$ é uma matriz positiva definida e $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}^\top$, sua inversa existe (pela propriedade de seus

menores principais) e $\mathbf{\Omega}^{-1} = (\mathbf{\Omega}^{-1})^\top$, sendo $\mathbf{\Omega}^{-1}$ uma matriz positiva definida. Então, existe uma matriz $\mathbf{P}$ de dimensão $(n \times n)$ não-singular (Harville 1997, p. 219) tal que

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{P}^\top \mathbf{P}, \quad (2.14)$$

o que implica que

$$\mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}^\top = \mathbf{I}_n. \quad (2.15)$$

Assim, podemos transformar o modelo (2.1) usando a matriz $\mathbf{P}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon},$$

ou, fazendo uma mudança de variáveis,

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{y}^* = \mathbf{P}\mathbf{y}$, $\mathbf{X}^* = \mathbf{P}\mathbf{X}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$. O vetor de erros transformado $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ tem média zero, pois pela suposição (1),

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{E}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{P}\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

A matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ é dada por

$$\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}] = \mathbf{E}[\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{P}^\top] = \mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}^\top = \mathbf{I}. \quad (2.18)$$

Assim, o modelo transformado é equivalente ao modelo (2.1), exceto pela estrutura homoscedástica dos erros. Utilizando o critério de mínimos quadrados, o estimador para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ no modelo (2.16) é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_G = (\mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*T} \mathbf{y}^*,$$

podendo ser escrito da forma

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_G &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y}, \quad \text{por (2.14)}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Esse é o EMQG. Utilizando as suposições do modelo, pode-se mostrar que $\hat{\beta}_G$ é um estimador não-viesado para β , ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\beta}_G) &= (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{E}(\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X} \beta \\ &= \beta\end{aligned}$$

e que $\Psi_G = \text{cov}[\hat{\beta}_G] = (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1}$.

Assumindo que a matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\Omega}$ é conhecida e que $\mathbf{X}^*$ satisfaz as mesmas condições que $\mathbf{X}$, verifica-se que $\hat{\beta}_G$ é consistente para β . Outro resultado é oferecido pelo **Teorema 1**, estabelecendo que $\hat{\beta}_G$ é o *melhor estimador linear não-viesado* de β (BLUE, Best Linear Unbiased estimator). Como consequência, temos que $\text{cov}(\hat{\beta}_G) \leq \text{cov}(\hat{\beta})$, ou seja

$$(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1}$$

é uma matriz positiva semi-definida.

Concluimos, então, que o EMQO $\hat{\beta}$, sob heteroscedasticidade, apesar de não-viesado é, em geral, ineficiente.

A utilização do EMQG é inviabilizada pelo fato de que, na prática, a matriz $\boldsymbol{\Omega}$ é desconhecida, sendo necessário fazer alguma suposição sobre a forma da heteroscedasticidade. Uma alternativa é substituir a matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\Omega}$ por algum

estimador consistente $\hat{\Omega}$, obtendo-se o *estimador de mínimos quadrados generalizado viável* (EMQGV):

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{y}. \quad (2.20)$$

Usualmente supõe-se que os elementos de Ω são funções de um número pequeno de parâmetros desconhecidos. Sendo assim, $\hat{\Omega}$ é obtido através da estimação desses parâmetros.

Utilizar o EMQGV para β resolve um problema de implementação prática da estimação, mas as propriedades amostrais desse estimador não são facilmente estabelecidas. Isto deve-se ao fato de que $\hat{\Omega}$ e $\mathbf{y}$ são correlacionados, dado que $\hat{\Omega}$ depende das observações amostrais, não sendo portanto possível tratar $\hat{\Omega}^{-1}$ em (2.20) como uma matriz de elementos fixos, tornando até mesmo difícil a obtenção de $E(\hat{\beta})$.

Outro aspecto é que, após estimar o vetor de parâmetros $\hat{\beta}$ para vários modelos, considerando diferentes estruturas cedásticas, torna-se necessário aplicar algum teste de heteroscedasticidade para determinar se a heteroscedasticidade foi, de fato, eliminada.

O que se faz mais comumente na prática é utilizar o EMQO para o vetor de parâmetros da regressão, que permanece não-viesado e consistente, mesmo que nem sempre seja eficiente. Além disso, utiliza-se um estimador para sua matriz de variâncias e covariâncias que possua propriedades assintóticas desejáveis.

Para a estimação da matriz de variâncias e covariâncias de $\hat{\beta}$ poderíamos pensar no seu estimador usual, dado por

$$\hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \quad (2.21)$$

com

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \hat{\varepsilon}^\top \hat{\varepsilon},$$

onde $\hat{\varepsilon}$ representa o vetor de resíduos de MQO dado em (2.6). Ainda, quando $\text{cov}(\varepsilon) = \mathbf{\Omega} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_n$, ou seja, na presença de heteroscedasticidade, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \text{E} [(n-p)\hat{\sigma}^2] &= \text{E} (\hat{\varepsilon}^\top \hat{\varepsilon}) \\ &= \text{E} (\mathbf{y}^\top \mathbf{H}^* \mathbf{y}), \quad \text{por (2.6)} \\ &= \text{E} (\mathbf{y}^\top \mathbf{H}^* \mathbf{y}), \quad \mathbf{H}^* \text{ é simétrica e idempotente,} \\ &= \text{tr} (\mathbf{H}^* \mathbf{\Omega}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{E} [\hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}] &= \text{E} \left[\frac{1}{n-p} \hat{\varepsilon}^\top \hat{\varepsilon} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \right], \quad \text{por (2.21)} \\ &= \frac{1}{n-p} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \text{tr} (\mathbf{H}^* \mathbf{\Omega}), \quad \text{por (2.22),} \end{aligned} \tag{2.23}$$

que difere da matriz de variâncias e covariâncias $\mathbf{\Psi}$ dada em (2.12). Além disso, $\mathbf{\Psi}$ não é estimada consistentemente quando (2.21) é utilizado, pois, sob alguns suposições, temos

$$\text{plim}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(\mathbf{H}^* \mathbf{\Omega});$$

com isso, $\text{plim} \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$ é diferente de (2.12).

Como o estimador usual da matriz de variâncias e covariâncias de $\hat{\beta}$ não apresenta propriedades desejáveis, nosso problema reside na estimação consistente da matriz de variâncias e covariâncias do EMQO na presença de heteroscedasticidade de forma desconhecida. Um estimador consistente muito utilizado é o proposto por Halbert White (White 1980).

Para estimar consistentemente a matriz de variâncias e covariâncias em (2.12) poderíamos tentar estimar de forma consistente $\mathbf{\Omega}$, a matriz de variâncias e covariâncias do

vetor de erros da regressão. Note que $\mathbf{\Omega}$ possui n variâncias desconhecidas, o que torna impossível sua estimação consistentemente, já que dispomos de exatamente n observações. A idéia de Halbert White foi obter um estimador para a matriz simétrica $\mathbf{X}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{X}$, já que esta contém $\frac{p(p+1)}{2}$ elementos distintos para qualquer tamanho amostral, e, assim, é possível ter

$$\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{X}\right) = \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{X}\right).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{\Psi}} &= n(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \left(\frac{1}{n}\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{X}\right) (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}\end{aligned}\tag{2.24}$$

pode ser utilizado como um estimador para a matriz de variâncias e covariâncias de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ (Greene 1997, p. 548).

O estimador de White, denominado HC0, é obtido simplesmente substituindo o i -ésimo elemento da diagonal de $\mathbf{\Omega}$ pelo quadrado do i -ésimo resíduo, ou seja, usando

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \text{diag}\{\widehat{\varepsilon}_1^2, \dots, \widehat{\varepsilon}_n^2\}.\tag{2.25}$$

O estimador resultante é consistente para a matriz de variâncias e covariâncias de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ tanto sob heteroscedasticidade como sob homoscedasticidade (White 1980), mas tende a subestimar a variância do EMQO (Judge, Griffiths, Hill, Lütkepohl & Lee 1985, p. 367), o que o torna viesado.

Isto foi verificado por Cribari-Neto & Zarkos (1999) e por MacKinnon & White (1985) através de simulações de Monte Carlo. Chester & Jewitt (1987) investigaram o viés do estimador HC0 e concluíram que este pode ser substancial, mesmo em grandes amostras

e mesmo quando os erros são homoscedásticos. Estes autores chamaram atenção para o fato de que a estrutura da matriz de regressores de $\mathbf{X}$ é importante para determinar a adequação do estimador quanto ao tamanho da amostra. Modelos que apresentam desenho contendo observações de alta alavancagem, ou seja, de influência elevada para o respectivo valor predito, podem contribuir para que HC0 apresente viés expressivo. Desta forma, o uso deste estimador pode levar à identificação de relações espúrias entre os regressores e a variável resposta.

MacKinnon & White (1985) consideram três estimadores alternativos para melhorar as propriedades de HC0 em amostras pequenas. Um ajustamento simples para HC0, sugerido por Hinkley (1977), é usar uma correção de graus de liberdade multiplicando HC0 por $\frac{n}{n-p}$; em amostras finitas este fator é um número maior que um, portanto, tudo que ele faz é inflar as estimativas fornecidas pelo estimador HC0. O estimador resultante é

$$\text{HC1} = \frac{n}{n-p} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \quad (2.26)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ é definido como em (2.25).

Um segundo estimador é o proposto por Horn, Horn & Duncan (1975), conhecido como HC2, onde o i -ésimo elemento da diagonal da matriz $\boldsymbol{\Omega}$, σ_i^2 , é estimado por

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{1 - h_i},$$

sendo h_i o i -ésimo elemento da diagonal da matriz $\mathbf{H}$. Logo,

$$\text{HC2} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}_2 \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \quad (2.27)$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_2 = \text{diag} \left\{ \frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{1 - h_1}, \dots, \frac{\hat{\varepsilon}_n^2}{1 - h_n} \right\}. \quad (2.28)$$

Note que, sob homoscedasticidade,

$$\begin{aligned}
E(\widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon}^\top) &= E[\mathbf{H}^*\mathbf{y}][\mathbf{H}^*\mathbf{y}]^\top, \quad \text{por (2.6)} \\
&= E[\mathbf{H}^*\mathbf{y}\mathbf{y}^\top\mathbf{H}^{*\top}] \\
&= \mathbf{H}^*E(\mathbf{y}\mathbf{y}^\top)\mathbf{H}^{*\top} \\
&= \sigma^2\mathbf{H}^*.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Assim,

$$E(\widehat{\varepsilon}_i^2) = \sigma^2 h_i^* = \sigma^2(1 - h_i).$$

Portanto, HC2 é não-viesado quando há homoscedasticidade.

Um terceiro estimador modificado a partir de HC0 é obtido através da técnica denominada *jackknife*. Recalculamos n vezes as estimativas de MQO para o vetor β , cada vez retirando uma observação; ao final do processo, calculamos a variabilidade das estimativas obtidas como uma estimativa da variância do EMQO original. Davidson & MacKinnon (1993) propuseram o estimador HC3, que é uma aproximação ao estimador jackknife, sendo dado por

$$\text{HC3} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_3 \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \tag{2.30}$$

onde

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_3 = \text{diag}\left\{\frac{\widehat{\varepsilon}_1^2}{(1-h_1)^2}, \dots, \frac{\widehat{\varepsilon}_n^2}{(1-h_n)^2}\right\}. \tag{2.31}$$

Cribari-Neto (2004) propôs o estimador HC4, uma modificação do estimador HC3, que leva em consideração o impacto de observações com alta alavancagem sobre a inferência resultante em amostras finitas. O estimador HC4 incorpora fatores de desconto definidos pela razão entre os graus individuais de alavancagem e o grau médio de alavancagem. A

importância de considerar o efeito de alta alavancagem é discutida em Cribari-Neto & Zarkos (2001). O estimador HC4 é definido como

$$\text{HC4} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}_4 \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \quad (2.32)$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_4 = \text{diag} \left\{ \frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{(1-h_1)^{\delta_1}}, \dots, \frac{\hat{\varepsilon}_n^2}{(1-h_n)^{\delta_n}} \right\}, \quad (2.33)$$

$$\delta_i = \min \left\{ 4, \frac{h_i}{\bar{h}} \right\} \quad \text{e} \quad \bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = \frac{1}{n} p.$$

O expoente δ_i controla o nível de desconto do quadrado do i -ésimo resíduo.

Como $0 < 1 - h_i < 1$ e $\delta_i > 0$, então $0 < (1 - h_i)^{\delta_i} < 1$. Quanto maior o grau de alavancagem individual h_i em comparação ao grau médio de alavancagem $\bar{h}$, mais fortemente o i -ésimo resíduo ao quadrado será inflacionado. Na definição do estimador HC4 existe um truncamento no expoente, no máximo igual a 4, ou equivalente ao dobro do desconto usado pelo estimador HC3.

Segundo Godfrey (2005), os testes HC's que usam os quadrados dos resíduos irrestritos conduzem a resultados similares aos obtidos por MacKinnon & White (1985): HC0 pode ser pouco confiável e superado por HC1, que é, por sua vez inferior ao HC2, que em termos da confiabilidade é dominado por HC3. Os resultados numéricos em Cribari-Neto (2004) mostraram que os testes baseados em HC4 produzem inferências mais confiáveis do que aquelas obtidas com testes que usam HC3.

2.3 Dados direcionais

2.3.1 Introdução

Em algumas áreas da investigação científica é necessária a aplicação de métodos estatísticos a conjuntos de dados em que algumas variáveis possuem características circulares. As duas principais situações em que aparecem dados circulares correspondem aos instrumentos de medida circular: o compasso e o relógio. Medidas de observações por compasso podem ser, por exemplo, a direção do vento ou direção de vôo de aves. Observações pelo relógio podem ser, por exemplo, o número de ocorrências de algum evento durante um determinado período de tempo, como é o horário de chegada (considerado sob 24 horas) de pacientes a um hospital. Se os eventos são periódicos, estes podem ser representados sobre um círculo, a circunferência correspondendo ao período, por exemplo, horas do dia, dias da semana, etc.

De maneira um pouco mais geral, há variáveis que podem ser representadas sobre a superfície de uma hiper-esfera de grau p . Estes dados são denominados direcionais (Mardia & Jupp 2000); quando $p = 2$, são dados circulares e quando $p = 3$, são dados esféricos. Em diversos textos, como Jammalamadaka & SenGupta (2001), Mardia & Jupp (2000) e Fisher (1993), são apresentadas modificações adequadas sobre as estatísticas clássicas para este tipo de dados.

2.3.2 Estatísticas descritivas de dados circulares

Dados circulares podem ser representados como ângulos ou como pontos sobre uma circunferência. A posição direcional possui representação única num sistema coordenado de

duas dimensões, isto é, qualquer ponto P sobre o plano pode ser representado como (X, Y) em termos de coordenadas retangulares ou como (r, α) em termos de coordenadas polares, onde r é a distância do ponto à origem e α é a direção. Para o ponto origem, tem-se que $r = 0$ e não há direção, i.e., α não está definido.

Direções no plano podem ser representadas como vetores unitários $\mathbf{x}$ ou, equivalentemente, como pontos no círculo unitário (i.e., círculo com centro origem de raio um). Outras duas formas de observar tais direções são como ângulos ou como números complexos de módulo um. Escolhendo uma direção inicial e uma orientação para o círculo unitário (o que equivale a escolher um sistema coordenado ortogonal no plano), cada ponto pode ser representado como um ângulo θ (ver figura 2.1) ou, equivalentemente, como um número complexo z , relacionados como

$$\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta)^\top \text{ e, } z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

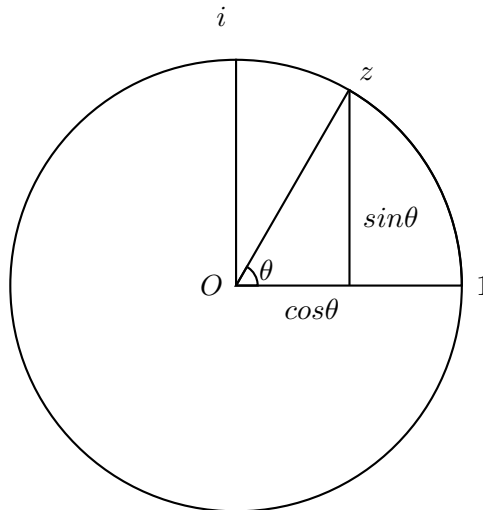


Figura 2.1: Representação da direção $\mathbf{x}$ pelo ângulo θ e pelo número complexo $z = \cos\theta + i \sin\theta$.

Observe que:

1. θ e $\theta + 2\pi$ são o mesmo ponto. Assim, a aritmética que nós faremos no círculo será de modulo 2π .
2. A representação de direções por ângulos ou por números complexos unitários depende da escolha da direção inicial e da orientação.

A média direcional

Sejam os vetores unitários $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ com os correspondentes ângulos θ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. A *média direcional* $\bar{\theta}$ de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ é a direção da resultante $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n$ de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, o que equivale à direção de centro de massa $\bar{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Como as coordenadas de $\mathbf{x}_j$ são $(\cos\theta_j, \sin\theta_j)$, para $j = 1, 2, \dots, n$, as coordenadas cartesianas do centro de massa são $(\bar{C}, \bar{S})$, onde

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \theta_j, \quad \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \theta_j. \quad (2.34)$$

Seja $\bar{\theta}$ a solução das equações

$$\bar{C} = \bar{R} \cos \bar{\theta} \quad \text{e} \quad \bar{S} = \bar{R} \sin \bar{\theta}, \quad (2.35)$$

com $\bar{R} > 0$, onde a *longitude da resultante média* $\bar{R}$ é dada por

$$\bar{R} = (\bar{C}^2 + \bar{S}^2)^{1/2}. \quad (2.36)$$

Note que $\bar{\theta}$ não está definido quando $\bar{R} = 0$.

Uma definição dada por Fisher (1993) para $\bar{\theta}$ é a seguinte:

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) & \text{se } \bar{C} > 0, \bar{S} \geq 0, \\ \pi/2 & \text{se } \bar{C} = 0, \bar{S} > 0, \\ \tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) + \pi & \text{se } \bar{C} < 0, \\ \tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) + 2\pi & \text{se } \bar{C} \geq 0, \bar{S} < 0, \\ \text{n\~ao-definida} & \text{se } \bar{C} = 0, \bar{S} = 0, \end{cases}$$

onde a função tangente inversa ($\tan^{-1}$) assume valores em $(-\pi/2, \pi/2)$. Note que $\bar{\theta}$ não é a média dos θ_i 's, ou seja, $\bar{\theta}$ não é igual a $(\theta_1 + \theta_2 + \dots, \theta_n)/n$. Além de (2.34) e (2.35), tem-se que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos (\theta_i - \bar{\theta}) = \bar{R} \quad (2.37)$$

e (para $\bar{R} > 0$)

$$\sum_{i=1}^n \sin (\theta_i - \bar{\theta}) = 0. \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é análoga a

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0, \quad (2.39)$$

para observações $x_1, x_2, \dots, x_n$ na reta com a média amostral $\bar{x}$. As equações (2.38) e (2.39) expressam que a soma dos desvios ao redor da média é zero.

A mediana direcional

Esta medida é útil para estimação robusta. A direção mediana amostral $\tilde{\theta}$ dos ângulos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ é qualquer ângulo ϕ tal que (i) metade dos dados ficam no arco $[\phi, \phi + \pi)$ e (ii) a maioria dos pontos de dados está mais próxima de ϕ do que de $\phi + \pi$.

Quando o tamanho da amostra n é ímpar, a mediana amostral é um dos dados; quando n é par, é conveniente tomar a mediana amostral como o ponto médio de dois pontos adjacentes apropriados.

Longitude da resultante média

A longitude da resultante média $\overline{R}$ está dada em (2.36) como o comprimento do centro de massa. Adicionalmente, os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são vetores unitários. Portanto,

$$0 < \overline{R} < 1. \quad (2.40)$$

Se as direções $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ estiverem aglomeradas, então $\overline{R}$ será quase igual a 1, e se $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ estiverem dispersos, então $\overline{R}$ será quase igual a zero. Porém, $\overline{R}$ é uma medida de *concentração* para o conjunto de dados. Observe que qualquer conjunto de dados da forma

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi, \dots, \theta_n + \pi$ tem $\overline{R} = 0$. Assim, $\overline{R} \simeq 0$ ($\simeq$ significando “aproximadamente igual”) não implica que as direções são distribuídas quase uniformemente ao redor do círculo. Cumpre ainda notar que $\overline{R}$ é invariante sob rotações.

Variância circular

Uma forma simples de definir a variância é $V = 1 - \overline{R}$. Note que $0 \leq V \leq 1$.

2.3.3 Algumas distribuições de probabilidade circulares

A seguir, apresentaremos alguns conceitos e alguns modelos de dados circulares. O modelo central para dados circulares é a distribuição von Mises. Outras distribuições no

círculo podem ser construídas por projeção radial de distribuições no plano ou envolvendo (“wrapping”) distribuições da reta no círculo.

Função de distribuição

Suponha que a direção inicial e a orientação no círculo são escolhidos, então a função de distribuição considerada para um ângulo aleatório θ é dada por

$$F(x) = \Pr(0 < \theta \leq x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

e

$$F(x + 2\pi) - F(x) = 1, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.41)$$

Esta equação nos diz que o arco de longitude 2π sobre o círculo unitário tem probabilidade 1 (já que este arco é a circunferência total do círculo).

Para $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$,

$$\Pr(\alpha < \theta \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x), \quad (2.42)$$

onde a integral é de Lebesgue-Stieltjes. A função de distribuição F é contínua à direita.

Em contraste à função de distribuição na reta, temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty. \quad (2.43)$$

Por definição,

$$F(0) = 0 \quad \text{e} \quad F(2\pi) = 1.$$

Note que, embora a função F dependa da escolha da direção zero, (2.42) mostra que $F(\beta) - F(\alpha)$ é independente da escolha. Assim, mudando a direção zero, simplesmente adicionamos uma constante a F .

Se a função de distribuição de probabilidade F for absolutamente contínua, então sua função de densidade de probabilidade f é tal que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta = F(\beta) - F(\alpha), \quad -\infty < \alpha \leq \beta < \infty.$$

A função f é uma *função de densidade de probabilidade* de uma distribuição absolutamente contínua se e só se

1. $f(\theta) \geq 0$, em quase toda parte sobre $(-\infty, \infty)$,
2. $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$, em quase toda parte sobre $(-\infty, \infty)$,
3. $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$.

Distribuição uniforme

A distribuição uniforme é a mais básica. Ela é a única distribuição que é invariante sob rotação e reflexão. Sua função de densidade de probabilidade é

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.44)$$

Assim, para $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$, temos

$$\Pr(\alpha < \theta \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi},$$

i.e., a probabilidade é proporcional ao comprimento do arco.

Distribuição cardióide

Perturbações da função de densidade de probabilidade uniforme mediante uma função cosseno produz a *distribuição cardióide* $C(\mu, \rho)$, que tem função de densidade de pro-

bilidade

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \{1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)\}, \quad |\rho| < \frac{1}{2}. \quad (2.45)$$

O nome vem do fato de que a curva dada em coordenadas polares por $r = f(\theta)$, com f como em (2.45), é a curva cardióide. A distribuição foi introduzida por Jeffreys (1948, p. 302).

A longitude resultante média de $C(\mu, \rho)$ é ρ e (se $\rho > 0$) a média direcional é μ . A distribuição é simétrica e unimodal com moda em μ (se $\rho > 0$). Para $\rho = 0$, a distribuição cardióide se reduz à distribuição uniforme. O principal uso da distribuição cardióide são as aproximações para pequenas concentrações da distribuição von Mises.

Distribuição von Mises

Do ponto de vista de inferência, a distribuição *von Mises* $M(\mu, k)$ é a distribuição mais usada no círculo, de forma análoga à distribuição normal na reta (Mardia & Jupp 2000, p.32). Sua função de densidade de probabilidade é

$$g(\theta; \mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{k \cos(\theta - \mu)}, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad (2.46)$$

onde I_0 denota a função de Bessel modificada do primeiro tipo e ordem zero, definida como

$$I_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} d\theta. \quad (2.47)$$

Sua expansão em séries de potências é

$$I_0(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^{2r}. \quad (2.48)$$

A função de Bessel de primeiro tipo e ordem p é definida como

$$I_p(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos p\theta e^{k \cos \theta} d\theta, \quad (2.49)$$

sua expansão em séries de potências sendo dada por

$$I_p(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p+r+1)\Gamma(r+1)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2r+p}. \quad (2.50)$$

O parâmetro μ é a *direção média* e o parâmetro k é o *parâmetro de concentração*. A longitude resultante média ρ é $A(k)$, definida como

$$A(k) = \frac{I_1(k)}{I_0(k)}. \quad (2.51)$$

Note que $M(\mu + \pi, k)$ e $M(\mu, -k)$ são a mesma distribuição. Para eliminar essa indeterminação dos parâmetros μ, k é usual tomar $k \geq 0$. Esta distribuição foi introduzida por von Mises (1918) para estudar os desvios dos pesos atômicos.

A distribuição é unimodal e simétrica ao redor de $\theta = \mu$. A moda está em $\theta = \mu$ e a anti-moda em $\theta = \mu + \pi$.

A função de distribuição da distribuição von Mises $M(0, k)$ é

$$F(\theta; 0, k) = \frac{1}{I_0(k)} \int_0^\theta e^{k \cos u} du. \quad (2.52)$$

Ela não é facilmente avaliada numericamente. A função de distribuição da distribuição $N(0, k^{-1})$ é uma boa aproximação à função de distribuição $M(0, k)$; para $k > 10$, esta aproximação é razoavelmente precisa (Mardia & Jupp 2000, p. 44).

Relação com outras distribuições

Quando $k = 0$ a distribuição von Mises se reduz à distribuição uniforme. A aproximação $\exp(x) \simeq 1 + x$ mostra que, para pequenos valores de k ,

$$M(\mu, k) \simeq C(\mu, k/2), \quad (2.53)$$

onde $C(\mu, k/2)$ denota a distribuição cardióide. Assim, a distribuição von Mises com parâmetro de concentração pequeno aproxima a distribuição cardióide com a mesma direção média e longitude resultante média. Quando $k \rightarrow \infty$, a distribuição se concentra ao redor do ponto $\theta = \mu$. Assuma que k é grande e seja $\xi = k^{1/2}(\theta - \mu)$. Então, de (2.46) a função de densidade de probabilidade de ξ é proporcional a

$$\exp\{-k[1 - \cos(k^{-1/2}\xi)]\}. \quad (2.54)$$

Para grandes valores de k ,

$$1 - \cos(k^{-1/2}\xi) = \frac{1}{2}k^{-1}\xi^2 + O(k^{-2}).$$

Então, de (2.54) temos que $\xi \sim N(0, 1)$ ($\sim$ significando “aproximadamente distribuído como”). Portanto,

$$\theta \sim M(\mu, k) \quad \Rightarrow \quad k^{-1/2}(\theta - \mu) \sim N(0, 1), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

2.3.4 Modelos de regressão

A maioria da aplicação destes modelos fazem referência às posições e localizações de objetos com respeito a um sistema de referência. Há vários tipos de modelos, os quais ficam dependendo do tipo de variável resposta.

1. Resposta linear

Um modelo de regressão de uma variável X sobre uma variável angular θ é

$$X \mid \theta \sim N(\alpha + \beta_1 \cos\theta + \beta_2 \sin\theta, \sigma^2) \quad (2.56)$$

introduzido por Mardia (1976) (modelo de regressão linear múltipla de X sob $(\cos\theta, \sin\theta)$).

Extensão e aplicação para estudos da poluição do ar é dado em Johnson & Wehrly (1978).

2. Resposta circular

Considere uma variável resposta Θ , a qual é medida em valores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de uma variável explicativa $\mathbf{X}$ de dimensão k .

Funções helicoidais do regressão

Se $k = 1$, a ideia é envolver “wrapping” a reta no círculo, o que conduz aos modelos de regressão de Gould (Gould 1969), no qual

$$\Theta_i \sim M(\mu + \beta x_i, k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.57)$$

os Θ_i 's são independentes e μ, β e k são parâmetros desconhecidos (veja também Laycock (1975)). Porque a curva de regressão dada por (2.57) é helicoidal, este modelo é algumas vezes conhecido como o modelo pólo do barbeiro “pole barber's”. A maior desvantagem de (2.57) é que a função de verossimilhança tem muitos máximos. Além disso, se $x_1, \dots, x_n$ são igualmente espaçados então β não é identificável.

Regressão usando a funções de ligação

A função de regressão helicoidal aplica $x \mapsto \beta x \pmod{2\pi}$, i.e., aplica a reta real infinitas vezes aoredor do círculo. Para evitar este problema, se sugere substituir esta função por uma função injectiva (sugerencia dada por Fisher & Lee (1992)). Esta função injectiva g , é tal que $g : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$, e satisfaz, $g(0) = 0$, pode ser a função *tangente inversa*

$$g(x) = 2 \tan^{-1} x, \quad (2.58)$$

ou a função *probit escalonada*

$$g(x) = 2\pi(\Phi(x) - 0.5). \quad (2.59)$$

3. Resposta esférica

Regressão usando rotação

Regressão de uma variável aleatória esférica $\mathbf{y}$ em S^{p-1} (esfera unitária em $\mathbb{R}^p$) sobre uma preditora $\mathbf{x}$ em S^{p-1} acontece em varios campos. Alguns destes exemplos são o seguintes. Um problema importante em cristalografia é de relacionar o eixo $\mathbf{y}$ de um cristal com o eixo $\mathbf{x}$ de um sistema coordenado padrão (Mackenzie 1957). Determinação da orientação de um satellite, involucra comparar direções $\mathbf{y}$ de estrelas no sistema coordenado do satélite com as correspondentes direções $\mathbf{x}$ num sistema coordenado terrestre (Wahba 1966). Avaliando “integridade geométrica” em control de qualidade industrial é conseguido comparando direções normais $\mathbf{y}$ de uma parte feita à máquina com a correspondente direção $\mathbf{x}$ num desenho especificado no computador (Chapman, Chen & Kim 1995). Muitas aplicações de visão de maquinas involucra comparações de direções $\mathbf{y}$ de objetos detectados por um sensor com as correspondentes direções $\mathbf{x}$ detectadas por outro sensor (Kanatani 1993). Um problema em geofísica é o de estimar a rotação de uma placa tectónica relativa a outra, este é dado comparando as posições $\mathbf{y}$ de pontos sobre a superficie da terra (interseções de zonas de fraturas com anomalias magnéticas) numa placa com as posições $\mathbf{x}$ das correspondentes posições de pontos em outra placa (Chang 1993).

A função de regressão mais simples para uma variável aleatória esférica $\mathbf{y}$ em S^{p-1}

sobre uma preditora esférica $\mathbf{x}$ em S^{p-1} é da forma

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.60)$$

para alguma rotação $\mathbf{A}$ em $SO(p)$ (grupo das matrizes de rotação de ordem $p \times p$). Uma classe de modelos de regressão com funções de regressão da forma (2.60) são os modelos de Chang (1986) no qual a distribuição condicional de $\mathbf{y}$ dado $\mathbf{x}$ é circular simétrica com a direção média $\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Modelos de regressão para estimar o centro

Em alguns contextos, tais como o de estimar a fonte de uma sinal $\mathbf{a}$ ou o centro de uma explosão, direções $\mathbf{y}_i$ em S^{p-1} são observadas com posições $\mathbf{x}_i$ em $\mathbb{R}^p$. Um modelo conveniente para isto é

$$\mathbf{y} \mid \mathbf{x} \sim M_p(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}), k_0 + k\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^c), \quad (2.61)$$

asim que $\mathbf{y} \mid \mathbf{x}$ tem uma distribuição von Mises-Fisher com direção média que aponta para o “centro” desconhecido $\mathbf{a}$. Varios casos particulares de (2.61) com $k_0 = 0$ são aplicados em Lenth (1981), Jupp (1987), e Jupp & Spurr (1989).

2.4 O modelo estudado e suas estimativas

Considere o seguinte modelo para os dados (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, os quais são tomados de uma circunferência:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_1 + \rho \cos \phi_i + \varepsilon_{1i}, \\ y_i &= \xi_2 + \rho \sin \phi_i + \varepsilon_{2i}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde (ξ_1, ξ_2) são as coordenadas do centro do círculo, ρ é o raio do círculo, ϕ_i é a fase ou ângulo da i -ésima observação, ε_{1i} e ε_{2i} são variáveis aleatórias independentes normais de média zero e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 , respectivamente, i.e., $\varepsilon_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2)$, e $\varepsilon_{2i} \sim N(0, \sigma_2^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Este modelo é o mesmo que foi tratado em Berman & Somlo (1986) com a diferença de que aqui assumimos que as variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são diferentes. Em muitos casos as medidas das fases ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são desconhecidas (Berman 1983), mas as mudanças $\phi_{i+1} - \phi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, são conhecidas. Neste caso, ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, pode ser expresso como $\phi_i = \theta_0 + \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, onde θ_i é conhecido e θ_0 é desconhecido. Portanto, o modelo (2.62) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_1 + \alpha_1 \cos \theta_i - \alpha_2 \sin \theta_i + \varepsilon_{1i}, \\ y_i &= \xi_2 + \alpha_1 \sin \theta_i + \alpha_2 \cos \theta_i + \varepsilon_{2i}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, onde $\alpha_1 = \rho \cos \theta_0$, $\alpha_2 = \rho \sin \theta_0$. Como os θ_i são conhecidos, o modelo (2.63) é um modelo linear com parâmetros ξ_1 , ξ_2 , α_1 e α_2 e estrutura de variância heteroscedástica.

Para simplificar a notação, introduzimos os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, & \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top, \\ \mathbf{c} &= (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \dots, \cos \theta_n)^\top, & \mathbf{s} &= (\sin \theta_1, \sin \theta_2, \dots, \sin \theta_n)^\top, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1n})^\top, & \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= (\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2n})^\top. \end{aligned}$$

Portanto, o modelo (2.63) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.64}$$

onde $\mathbf{1}_n$ denota um vetor $n \times 1$ de uns. A matriz de variâncias e covariâncias dos erros aleatórios no modelo (2.64) é dada por

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \sigma_2^2 \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \sigma_2^2 \mathbf{V}(\omega).$$

Fazendo $\omega = \sigma_1^2/\sigma_2^2$, tem-se que $\mathbf{V}(\omega) = \text{diag}\{\omega \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n\}$, $\mathbf{I}_n$ sendo a matriz identidade de ordem n . Para o modelo (2.64) com estrutura de variância heteroscedástica, se as variâncias σ_1^2 e σ_2^2 ou a razão $\omega = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ forem conhecidas, o melhor estimador linear não-viesado do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\xi_1, \xi_2, \alpha_1, \alpha_2)^\top$, denotado por $\boldsymbol{\beta}^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^\top$, pode ser obtido pelo processo de mínimos quadrados ponderados. Nós obtemos a seguintes expressões para tal estimador no modelo (2.64):

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= \bar{x} - \bar{c}\alpha_1^* + \bar{s}\alpha_2^*, \\ \xi_2^* &= \bar{y} - \bar{s}\alpha_1^* - \bar{c}\alpha_2^*, \\ \alpha_1^* &= \frac{1}{d(\omega)} \left[\left(\frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}}{\omega} + \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \right) Z_1 + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) (\mathbf{u}^\top \mathbf{v}) Z_2 \right], \\ \alpha_2^* &= \frac{1}{d(\omega)} \left[\left(\frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}}{\omega} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \right) Z_2 + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) (\mathbf{u}^\top \mathbf{v}) Z_1 \right], \end{aligned} \tag{2.65}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}, & \bar{y} &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}, \\ \bar{c} &= \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_i}{n}, & \bar{s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i}{n}, \\ d(\omega) &= \left(\frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}}{\omega} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \right) \left(\frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}}{\omega} + \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \right) - \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right)^2 (\mathbf{u}^\top \mathbf{v})^2, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{c} - \bar{c} \mathbf{1}_n, & \mathbf{v} &= \mathbf{s} - \bar{s} \mathbf{1}_n, \\ Z_1 &= \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{\omega} + \mathbf{y}^\top \mathbf{v}, & Z_2 &= -\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{v}}{\omega} + \mathbf{y}^\top \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Note que quando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, temos $\omega = 1$ e os estimadores acima se reduzem aos estimadores de mínimos quadrados ordinários, $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2)^\top$, discutidos em Berman & Somlo (1986).

Na prática, σ_1^2 e σ_2^2 são desconhecidos e, portanto, temos que substituí-los por estimativas. Estimativas úteis podem ser obtidas pelo processo de mínimos quadrados ordinários a partir dos seguintes modelos de regressão de cada coordenada:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{1}_n, \mathbf{c}, -\mathbf{s})(\xi_1, \alpha_1, \alpha_2)^\top + \varepsilon_1,$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1}_n, \mathbf{s}, \mathbf{c})(\xi_2, \alpha_1, \alpha_2)^\top + \varepsilon_2,$$

onde $\varepsilon_i \sim N(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_n)$, $i = 1, 2$, são independentes. As estimativas de σ_1^2 e σ_2^2 são dadas por

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-3} \mathbf{x}^\top [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^\top \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1] \mathbf{x},$$

$$\widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-3} \mathbf{y}^\top [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2^\top \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2] \mathbf{y},$$

onde $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{1}_n, \mathbf{c}, -\mathbf{s})$ e $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{1}_n, \mathbf{s}, \mathbf{c})$.

Assim, uma estimativa de ω é dada por $\widehat{\omega} = \widehat{\sigma}_1^2 / \widehat{\sigma}_2^2$. O estimador em duas etapas, denotado por $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)^\top$, é obtido substituindo ω em (2.65) por $\widehat{\omega}$.

Para o cálculo da matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores do vetor de parâmetros precisamos do seguinte lema.

Lema 1. Suponha que a matriz $\mathbf{A}$ é não-singular e é particionada como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ existe, então

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{A}_{22.1}^{-1} (\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \quad | \quad -\mathbf{I}),$$

onde $\mathbf{A}_{22.1} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}$. A prova deste lema pode ser obtida diretamente da aplicação do Teorema 8.5.11 de Harville (1997, p. 99).

Seja

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} & \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_n & \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

Aplicando o Lema 1 à matriz $\mathbf{X}^\top \mathbf{V}^{-1}(\omega) \mathbf{X}$, obtemos as seguintes expressões para as matrizes de variâncias e covariâncias dos estimadores BLUE, MQO e TSE:

$$\text{Cov}(\beta^*) = \mathbf{M} + \sigma_2^2 \frac{\mathbf{B} \mathbf{A}(\omega) \mathbf{B}^\top}{d(\omega)}, \quad (2.66)$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \mathbf{M} + \sigma_2^2 \frac{\mathbf{B} \mathbf{C}(\omega) \mathbf{B}^\top}{d(1)}, \quad (2.67)$$

$$\text{Cov}(\tilde{\beta}) = \mathbf{M} + \sigma_2^2 \text{E} \left[\frac{\mathbf{B} \mathbf{A}(\hat{\omega}) \mathbf{C}(\omega/\hat{\omega}^2) \mathbf{A}(\hat{\omega}) \mathbf{B}^\top}{d^2(\hat{\omega})} \right], \quad (2.68)$$

respectivamente, onde

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left\{ \frac{\sigma_1^2}{n}, \frac{\sigma_2^2}{n}, 0, 0 \right\},$$

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \mathbf{v}^\top \mathbf{v} + \mathbf{u}^\top \mathbf{u} & \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \mathbf{u}^\top \mathbf{v} \\ \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \mathbf{u}^\top \mathbf{v} & \frac{1}{\omega} \mathbf{u}^\top \mathbf{u} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\omega) = \begin{pmatrix} -\bar{c} & \bar{s} \\ -\bar{s} & -\bar{c} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \mathbf{u}^\top \mathbf{u} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} & (1 - \omega) \mathbf{u}^\top \mathbf{v} \\ (1 - \omega) \mathbf{u}^\top \mathbf{v} & \omega \mathbf{v}^\top \mathbf{v} + \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{V}^\top(\omega) \mathbf{X} \mathbf{B}.$$

3.1 Introdução

O Estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (EMQO) é rotineiramente utilizado para estimar os parâmetros do modelo de regressão linear. Ao se utilizar o modelo de regressão clássico é comum assumir que os erros têm variância constante. Contudo, tal suposição não é verificada muitas vezes na prática. Na presença de heteroscedasticidade, o EMQO da matriz de variâncias e covariâncias torna-se impreciso, podendo conduzir a conclusões incorretas a respeito da relação entre as variáveis resposta e explicativas do modelo. Isto acontece porque os testes t associados requerem estimativas confiáveis das variâncias dos estimadores dos parâmetros. Uma possível solução neste caso é usar estimadores consistentes da matriz de variâncias e covariâncias, i.e., utilizar os HC's (estimadores consistentes

na presença de heteroscedasticidade – “heteroskedasticity consistent”) que funcionam bem mesmo sob homoscedasticidade (Long & Ervin, 2000).

Na realização dos testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear do tipo $H_0 : \beta_i = \beta^{(0)}$ contra $H_1 : \beta_i \neq \beta^{(0)}$, em que $\beta^{(0)}$ é uma constante conhecida, tem-se que

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_i - \beta^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

onde $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)$ é um estimador consistente para $\text{var}(\hat{\beta}_i)$. Mesmo em amostras de tamanho pequeno ou moderado, são freqüentemente utilizados valores críticos assintóticos obtidos da distribuição normal padrão, o que pode ser uma fonte de imprecisão. Além disso, os graus de alavancagem das diferentes observações também podem influir na qualidade da aproximação da distribuição nula de τ pela distribuição normal padrão.

3.2 Metodologia

Apresentaremos a seguir resultados numéricos baseados no modelo:

$$x_i = \xi_1 + \alpha_1 \cos \theta_i - \alpha_2 \sin \theta_i + \varepsilon_{1i},$$

$$y_i = \xi_2 + \alpha_1 \sin \theta_i + \alpha_2 \cos \theta_i + \varepsilon_{2i},$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, em que $\alpha_1 = \rho \cos \theta_0$, $\alpha_2 = \rho \sin \theta_0$, ρ representa o raio do círculo, os θ_i 's, são conhecidos, o vetor de parâmetros é $\boldsymbol{\beta} = (\xi_1, \xi_2, \alpha_1, \alpha_2)^\top = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^\top$, ε_{1i} e ε_{2i} são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal de média zero e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 , respectivamente, i.e., $\varepsilon_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2)$ e $\varepsilon_{2i} \sim N(0, \sigma_2^2)$, $\varepsilon_{ji}, j = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, n$, sendo não-correlacionados (maiores detalhes Seção 2.4).

Consideramos $\omega = \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1/10000, 1/100, 1, 100$ e 10000 , com a finalidade de obter diferentes graus de heteroscedasticidade. Consideramos ainda quatro tamanhos amostrais: $n = 20, 40, 60$ e 100 . Para $n = 20$, as covariadas (os θ 's) foram geradas a partir da distribuição von Mises ($M(\mu, k)$) veja seção 2.3; neste caso usamos a direção média zero ($\mu = 0$) e parâmetro de concentração com valores $k = 0.5, 2$ e 4 . Os demais tamanhos amostrais foram obtidos replicando-se as vinte primeiras observações tantas vezes quanto necessário para atingir o tamanho desejado, de modo que o grau de heteroscedasticidade fosse mantido constante com o aumento do tamanho amostral.

Para cada tamanho de amostra há dois valores correspondentes às variáveis explicativas que são pré-determinados na simulação. O primeiro deles é θ_0 ; lembre que as diferenças angulares entre pontos é conhecida, i.e., $\phi_{i+1} - \phi_i$ é conhecido; temos que $\phi_i = \theta_0 - \theta_i$, com θ_0 desconhecido e θ_i conhecido; o segundo valor corresponde a θ_n , que é a direção associada ao n -ésimo ponto. A direção para o primeiro valor é zero i.e., ($\theta_0 = 0$), com a finalidade de realizar testes para o parâmetro α_2 ; lembre que $\alpha_2 = \rho \sin \theta_0$. O último ponto (θ_n) foi fixado no ângulo de 180° , com o objetivo de se avaliar as taxas de rejeição dos testes quando são usados diferentes estimadores da matriz de variâncias e covariâncias do estimador do vetor de parâmetros tendo conhecimento da presença de um ponto de alavanca.

Intuitivamente, um ponto de alavanca tem sua medida de influência aumentada quando sua direção se afasta da média direcional (considerando todos os pontos). Assim, um ponto alcança seu maior grau de influência no caso em que se encontra do lado oposto da média direcional.

Quando geramos os dados a partir de uma distribuição $M(0, k)$, temos que, à medida

que o tamanho amostral aumenta, a direção média dos dados tende a zero.

Um critério de qualidade para um estimador da matriz de covariâncias é o desempenho do teste *quasi-t*, com relação ao tamanho, associado em amostras finitas. Nas tabelas da seção 3.3 apresentamos resultados numéricos ao desempenho dos diferentes testes aqui estudados.

Em algumas tabelas usamos notações como “ $HCj = HCi$ ”, $i \neq j, i = 0, 2, 3$ e 4 , $j = 0, 2, 3$ e 4 , indicando com isso que as taxas de rejeição empíricas obtidas nos testes baseados nesses estimadores para a matriz de variâncias e covariâncias são iguais, além de serem as mais próximas de 5% (tamanho nominal); ou a notação “ HCj / HCi ”, indicando que a diferença (em módulo) entre as taxas de rejeição do teste baseado em HCj e o tamanho nominal (5%) é menor do que a correspondente diferença para HCi ($|HCj - 5| < |HCi - 5|$) e, adicionalmente, que a diferença destas diferenças, em módulo, é menor ou igual a 0.01 ($||HCj - 5| - |HCi - 5|| \leq 0.01$); esta mesma notação é empregada para o caso em que o melhor estimador é o EMQO (substituindo algum dos HCi 's por EMQO).

Outro caso que consideramos é o de hipóteses restritas, no qual levamos em conta que um parâmetro é conhecido e igual a zero. Para identificar o parâmetro que foi “retirado” empregaremos a notação R_{ξ_1}, R_{ξ_2} e R_{α_2} quando é retirado o parâmetro ξ_1, ξ_2 e α_2 , respectivamente. O caso de retirar o parâmetro α_1 implicaria que $\theta_0 = 90^\circ$ ou 270° , caso que não trataremos neste trabalho.

Os efeitos de usar o quadrado do resíduo restrito, i.e., os resíduos de MQO do modelo nulo, são explorados em Davidson & MacKinnon (1985). As duas estratégias são assintoticamente equivalentes sob a hipótese nula (Godfrey 2005).

Nossas simulações de Monte Carlo foram baseadas em dez mil (10,000) réplicas com $\xi_1 = \xi_2 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \rho$. Deseja-se testar $H_0 : \beta_i = 0$ contra $H_1 : \beta_i \neq 0$, $i = 1, 2$ e 4 (lembramos que $\beta = (\xi_1, \xi_2, \alpha_1, \alpha_2)^\top$), com $\varepsilon_{ji} \sim N(0, \sigma_j^2)$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Todas as simulações foram realizadas usando a linguagem de programação matricial Ox (Doornik 2001).

Ao todo, foram realizadas 600 simulações que combinam quatro tamanhos amostrais, cinco graus de heteroscedasticidade, três parâmetros de concentração, um ângulo de ponto influente de duas formas, a saber: garantindo ou não um único ponto influente e a restrição imposta por cada um dos parâmetros .

Após a realização de todas as simulações, foi realizada a modelagem estatística onde as quantidades de interesse são as taxas de rejeição empíricas correspondentes aos testes que utilizam EMQO, HC0, HC2, HC3, HC4 e os HCR's considerando como tamanho do teste $\alpha = 5\%$.

3.3 Resultados numéricos

Quando $\omega \neq 1$, há heteroscedasticidade, o que significa que o componente em y para cada uma das observações tem maior variabilidade em comparação com o componente em x (caso em que $\omega < 1$), ou que o componente em x para cada um dos dados tem maior variabilidade em comparação com o componente em y (caso no que $\omega > 1$). No caso em que $\omega = 1$, há homoscedasticidade, i.e., os dois componentes têm a mesma variabilidade.

Em algumas tabelas não é possível garantir que θ_n seja o único ponto de alavanca (os dados foram gerados da distribuição von Mises), já que a probabilidade de que algum

Tabela 3.1: Quantis (em graus) da $M(0, k)$ ao nível de 5%.

k	$\alpha = 0.05$
0.5	15.7
1	29.6
2	77.3
3	103.3
4	118.3
5	126.2

dos primeiros $n - 1$ pontos tenha direção mais afastada (comparado com o n -ésimo ponto), com respeito à direção média, é maior que zero. Este fato pode ser notado a partir dos quantis δ (tabela 3.1) da distribuição von Mises, em especial da distribuição $M(0, k)$, em que $\Pr(-180^\circ < \theta < -180^\circ + \delta) = \alpha/2$ (área que fica acima da direção de 180°) e $\Pr(180^\circ - \delta < \theta < 180^\circ) = \alpha/2$ (área abaixo da direção de 180°).

Nas tabelas 3.2 a 3.6, em que não se garante a existência de um único ponto de alavanca, são apresentadas as probabilidades de rejeição empíricas de $H_0 : \xi_1 = 0$ correspondentes aos diferentes estimadores da matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros do modelo de regressão. Adicionalmente, são apresentadas as taxas de rejeição quando são estimados os modelos completo e restritos. Os modelos restritos para este caso são o modelo com a restrição $\xi_2 = 0$, que denotaremos por (R_{ξ_2}) e o modelo com a restrição $\alpha_2 = 0$ denotado por (R_{α_2}) . Na tabela 3.7 é apresentado um resumo das tabelas 3.2 até 3.6; naquela tabela são listados os estimadores da matriz de variâncias e covariâncias que se revelaram mais confiáveis no que diz respeito às distorções de tamanho dos testes associados. Estes resultados são obtidos para diferentes graus de heteroscedasticidade (ω), valores do parâmetro de concentração, tamanhos de amostras e ângulo correspondente ao ponto influente (que neste caso é de 180°).

Tabela 3.2: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_1 , $\omega = 10^{-4}$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.27	1.39	0.74	0.78	0.00	1.80	1.09	0.61	0.50	0.01	0.14	0.00	0.00	0.00
	60	0.00	3.27	2.83	2.37	2.45	0.00	3.03	2.40	1.99	2.03	0.03	1.27	0.54	0.07	0.00
	100	0.00	3.78	3.46	3.24	3.34	0.00	3.62	3.42	3.20	3.26	0.01	2.58	2.10	1.69	1.16
R_{ξ_2}	20	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.07	1.36	0.82	0.61	0.00	1.59	1.03	0.65	0.27	0.01	0.10	0.00	0.00	0.00
	60	0.00	3.19	2.86	2.45	2.37	0.00	2.87	2.52	2.07	1.87	0.03	1.17	0.44	0.07	0.00
	100	0.00	3.69	3.52	3.34	3.37	0.00	3.57	3.40	3.15	3.15	0.01	2.50	2.07	1.63	1.16
R_{α_2}	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	1.52	0.89	0.41	0.17	0.00	1.66	0.98	0.54	0.21	0.02	0.12	0.00	0.00	0.00
	60	0.01	2.72	2.15	1.74	1.64	0.00	3.00	2.50	2.01	1.76	0.03	1.13	0.44	0.05	0.00
	100	0.01	3.51	3.30	2.93	2.93	0.00	3.80	3.50	3.21	3.14	0.01	2.54	2.05	1.72	1.11

Tabela 3.3: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_1 , $\omega = 10^{-2}$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.00	0.87	0.14	0.02	0.04	0.00	0.70	0.13	0.01	0.01	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.55	1.82	1.12	1.22	0.00	2.01	1.21	0.79	0.76	0.03	0.53	0.05	0.01	0.00
	60	0.00	3.59	3.04	2.58	2.73	0.00	3.36	2.85	2.25	2.31	0.03	1.69	0.85	0.30	0.00
	100	0.00	4.06	3.87	3.54	3.69	0.01	3.68	3.39	3.24	3.30	0.02	2.61	2.19	1.74	1.20
R_{ξ_2}	20	0.00	0.73	0.15	0.02	0.01	0.00	0.58	0.18	0.02	0.01	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.34	1.94	1.32	1.13	0.00	1.78	1.27	0.84	0.69	0.03	0.49	0.05	0.01	0.00
	60	0.00	3.43	3.04	2.73	2.68	0.00	3.25	2.80	2.45	2.33	0.03	1.56	0.79	0.30	0.00
	100	0.00	3.94	3.70	3.55	3.62	0.01	3.64	3.41	3.27	3.25	0.02	2.60	2.12	1.78	1.23
R_{α_2}	20	0.00	1.18	0.44	0.12	0.08	0.00	1.49	0.61	0.17	0.09	0.03	0.04	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.40	1.91	1.48	1.45	0.00	2.22	1.74	1.33	1.26	0.03	1.02	0.25	0.00	0.00
	60	0.01	2.90	2.55	2.16	2.12	0.00	3.21	2.92	2.54	2.48	0.03	1.95	1.47	0.99	0.28
	100	0.00	3.31	3.14	2.92	2.95	0.01	3.54	3.26	2.95	2.97	0.02	2.71	2.45	2.11	1.81

Tabela 3.4: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_1 , $\omega = 1$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.73	9.83	7.57	5.85	6.22	0.57	9.73	7.42	5.58	5.76	0.76	14.59	10.21	7.17	3.62
	40	0.58	7.13	6.16	5.17	5.37	0.55	7.05	6.23	5.32	5.35	0.62	9.32	7.70	6.09	4.22
	60	0.60	6.27	5.65	5.10	5.18	0.49	6.27	5.70	5.07	5.13	0.64	7.89	6.80	5.81	4.26
	100	0.52	5.63	5.21	4.86	4.94	0.53	5.67	5.34	4.99	4.99	0.48	7.11	6.46	5.74	4.66
R_{ξ_2}	20	0.73	9.42	7.66	5.93	5.75	0.57	9.52	7.53	5.80	4.99	0.76	14.15	10.27	7.32	3.90
	40	0.58	6.98	6.10	5.26	5.12	0.55	6.95	6.19	5.45	4.98	0.62	9.18	7.67	6.11	4.18
	60	0.60	6.20	5.66	5.18	5.00	0.49	6.21	5.63	5.16	4.81	0.64	7.80	6.82	5.87	4.26
	100	0.52	5.58	5.19	4.92	4.80	0.53	5.63	5.35	5.03	4.79	0.48	7.09	6.45	5.71	4.66
R_{α_2}	20	0.92	1.88	1.39	0.93	0.79	0.59	2.32	1.71	1.25	0.95	0.79	5.32	3.74	2.53	1.23
	40	0.76	1.24	0.93	0.71	0.59	0.55	1.22	0.91	0.70	0.59	0.68	2.30	1.75	1.22	0.65
	60	0.75	1.06	0.92	0.84	0.78	0.52	1.03	0.86	0.72	0.56	0.69	1.47	1.17	0.93	0.56
	100	0.70	0.84	0.74	0.67	0.64	0.56	0.75	0.68	0.60	0.52	0.52	0.90	0.69	0.60	0.39

Tabela 3.5: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_1 , $\omega = 100$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	3.40	11.19	8.63	6.67	7.05	3.40	11.42	8.88	6.57	6.56	2.27	21.41	13.47	7.65	3.18
	40	2.91	7.77	6.77	5.79	5.97	3.03	7.98	6.90	5.91	5.83	1.74	13.73	10.79	8.11	4.60
	60	3.22	6.75	6.05	5.49	5.54	2.91	6.68	6.06	5.38	5.27	1.66	10.37	8.54	7.07	4.87
	100	3.09	5.95	5.63	5.31	5.36	3.05	6.16	5.82	5.44	5.40	1.74	8.62	7.51	6.57	5.03
R_{ξ_2}	20	3.40	10.85	8.58	6.80	6.25	3.40	11.14	8.87	6.84	5.60	2.27	20.65	13.15	7.59	3.30
	40	2.91	7.72	6.80	5.87	5.49	3.03	7.91	6.85	5.84	5.34	1.74	13.47	10.84	8.18	4.54
	60	3.22	6.66	6.08	5.52	5.32	2.91	6.61	6.06	5.34	4.96	1.66	10.26	8.55	7.06	4.85
	100	3.09	5.93	5.61	5.33	5.19	3.05	6.15	5.82	5.43	5.14	1.74	8.60	7.50	6.59	5.03
R_{α_2}	20	4.05	9.69	7.95	6.45	6.03	3.45	10.48	8.30	6.51	5.49	2.40	19.35	12.68	7.64	3.32
	40	3.57	6.95	6.30	5.53	5.39	3.07	7.53	6.59	5.79	5.25	1.80	12.71	9.91	7.50	4.12
	60	3.73	6.15	5.63	5.13	5.01	2.98	6.42	5.77	5.26	4.90	1.79	9.67	8.05	6.56	4.56
	100	3.74	5.72	5.35	5.04	4.93	3.10	5.94	5.59	5.35	5.06	1.84	7.97	7.01	6.09	4.69

Tabela 3.6: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_1 , $\omega = 10^4$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	3.44	11.24	8.74	6.75	7.14	3.39	11.41	8.84	6.49	6.64	2.27	21.24	13.23	7.45	2.92
	40	3.02	7.80	6.71	5.81	6.00	3.05	8.18	6.87	5.91	5.80	1.76	13.69	10.88	8.25	4.56
	60	3.28	6.76	6.11	5.52	5.63	2.98	6.71	6.14	5.37	5.33	1.77	10.43	8.58	7.07	4.91
	100	3.12	5.99	5.65	5.28	5.32	3.07	6.21	5.87	5.43	5.40	1.79	8.63	7.50	6.62	5.15
R_{ξ_2}	20	3.44	10.93	8.64	6.92	6.21	3.39	11.13	8.86	6.71	5.57	2.27	20.51	13.05	7.34	3.07
	40	3.02	7.76	6.71	5.87	5.52	3.05	8.05	6.88	5.89	5.43	1.76	13.46	10.78	8.28	4.56
	60	3.28	6.73	6.16	5.56	5.37	2.98	6.65	6.12	5.40	4.90	1.77	10.29	8.62	7.15	4.88
	100	3.12	5.91	5.63	5.30	5.17	3.07	6.17	5.87	5.47	5.22	1.79	8.61	7.48	6.62	5.13
R_{α_2}	20	4.08	9.89	8.16	6.72	6.16	3.48	10.72	8.63	6.82	5.78	2.35	20.01	13.31	7.86	3.25
	40	3.65	7.19	6.42	5.72	5.56	3.12	7.78	6.86	5.95	5.46	1.85	13.20	10.47	8.07	4.48
	60	3.80	6.36	5.87	5.40	5.33	3.05	6.47	5.97	5.39	5.00	1.82	10.15	8.42	7.03	4.94
	100	3.77	5.86	5.59	5.23	5.12	3.12	6.09	5.82	5.46	5.22	1.87	8.43	7.47	6.61	5.12

Tabela 3.7: “Melhores” estimadores segundo taxa de rejeição empírica. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_1 .

	ω		10^{-4}			10^{-2}			10^0			10^2			10^4		
Modelo	n	k	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4
Completo	20		HC0	HC0	MQO	HC0	HC0	MQO=HC0	HC3	HC3	HC4	MQO	HC4	HC4	MQO	HC3	HC4
	40		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC3	HC3	HC4	HC3	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4
	60		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC3	HC3	HC4	HC3	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4
	100		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC4	HC3=HC4	HC4	HC3	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4
R_{ξ_2}	20		HC0	HC0	MQO	HC0	HC0	MQO=HC0	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4
	40		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4
	60		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC4	HC3	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4
	100		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC3	HC3	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4
R_{α_2}	20		MQO	HC0	MQO	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	MQO	HC4	HC4	MQO	HC4	HC4
	40		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4
	60		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4
	100		HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC3	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4

Tabela 3.8: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 , $\omega = 10^{-4}$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	3.54	11.29	9.09	6.83	7.31	3.33	12.12	9.43	7.13	7.21	2.06	21.47	13.37	7.66	3.15
	40	3.04	7.71	6.62	5.75	5.93	2.97	8.17	7.00	5.85	5.84	1.79	14.32	11.17	8.61	5.01
	60	3.01	6.48	5.85	5.29	5.34	3.16	7.11	6.29	5.56	5.56	1.76	11.76	9.94	7.99	5.22
	100	2.92	5.49	5.17	4.76	4.81	2.89	6.07	5.67	5.29	5.26	1.75	8.57	7.63	6.65	5.10
R_{ξ_1}	20	3.54	10.99	8.90	6.94	6.40	3.33	11.92	9.38	7.17	6.14	2.06	20.82	13.29	7.69	3.37
	40	3.04	7.64	6.59	5.82	5.51	2.97	8.10	7.01	5.90	5.47	1.79	14.13	11.15	8.61	5.00
	60	3.01	6.41	5.89	5.34	5.14	3.16	7.03	6.29	5.61	5.28	1.76	11.62	9.85	8.10	5.22
	100	2.92	5.47	5.15	4.79	4.65	2.89	6.01	5.65	5.30	5.01	1.75	8.46	7.62	6.63	5.12
R_{α_2}	20	7.12	7.65	6.57	5.70	6.37	8.57	7.52	6.53	5.79	6.45	16.18	7.36	6.46	5.63	5.34
	40	6.64	5.84	5.30	4.84	5.17	8.53	5.70	5.30	4.90	5.26	16.81	5.66	5.28	4.92	5.24
	60	6.49	5.92	5.54	5.16	5.45	8.48	5.66	5.33	5.08	5.33	16.67	5.69	5.41	5.09	5.34
	100	6.16	5.26	4.97	4.81	4.90	8.25	5.15	4.95	4.79	4.93	16.09	5.00	4.91	4.76	4.91

Tabela 3.9: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 , $\omega = 10^{-2}$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	3.47	11.07	8.96	6.88	7.28	3.30	12.08	9.36	7.08	7.17	1.96	21.32	13.66	7.89	3.30
	40	2.95	7.52	6.58	5.75	5.86	3.01	8.23	7.01	5.99	5.84	1.75	14.15	11.22	8.55	5.14
	60	2.96	6.52	5.91	5.33	5.40	3.08	7.10	6.28	5.62	5.53	1.73	11.74	9.86	8.19	5.22
	100	2.88	5.63	5.21	4.79	4.86	2.89	6.11	5.70	5.26	5.20	1.70	8.79	7.62	6.75	5.14
R_{ξ_1}	20	3.47	10.79	8.93	6.97	6.29	3.30	11.82	9.31	7.14	6.31	1.96	20.70	13.35	7.82	3.48
	40	2.95	7.43	6.58	5.77	5.44	3.01	8.12	6.95	6.09	5.45	1.75	13.95	11.17	8.51	5.03
	60	2.96	6.47	5.88	5.34	5.18	3.08	7.05	6.31	5.67	5.17	1.73	11.57	9.81	8.23	5.17
	100	2.88	5.60	5.21	4.83	4.70	2.89	6.07	5.71	5.31	5.08	1.70	8.70	7.60	6.74	5.15
R_{α_2}	20	6.88	7.56	6.60	5.57	6.25	8.58	7.49	6.55	5.75	6.45	15.92	7.38	6.43	5.57	5.36
	40	6.60	5.70	5.16	4.74	5.02	8.28	5.64	5.25	4.89	5.18	16.56	5.67	5.26	4.93	5.20
	60	6.39	5.79	5.43	5.05	5.30	8.25	5.55	5.29	5.01	5.27	16.54	5.61	5.38	5.03	5.34
	100	6.08	5.11	4.94	4.69	4.86	8.24	5.12	4.92	4.78	4.91	15.83	5.04	4.90	4.69	4.88

Tabela 3.10: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 , $\omega = 1$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.61	9.29	7.40	5.65	6.13	0.61	9.86	7.90	5.94	6.17	0.53	13.85	9.83	6.59	3.33
	40	0.49	6.79	5.77	4.78	4.96	0.68	7.41	6.39	5.46	5.48	0.71	10.31	8.28	6.52	4.57
	60	0.61	6.36	5.76	5.20	5.33	0.69	6.46	5.82	5.28	5.28	0.59	8.49	7.21	6.07	4.74
	100	0.48	5.65	5.30	4.96	5.05	0.63	5.74	5.30	4.90	4.88	0.57	7.28	6.41	5.85	4.78
R_{ξ_1}	20	0.61	8.93	7.30	5.83	5.36	0.61	9.62	7.94	6.22	5.52	0.53	13.62	9.95	6.71	3.52
	40	0.49	6.63	5.69	4.88	4.66	0.68	7.29	6.46	5.63	5.16	0.71	10.19	8.24	6.57	4.66
	60	0.61	6.28	5.72	5.28	5.15	0.69	6.47	5.82	5.32	5.10	0.59	8.43	7.19	6.11	4.67
	100	0.48	5.59	5.30	5.03	4.91	0.63	5.67	5.33	4.94	4.75	0.57	7.23	6.47	5.88	4.73
R_{α_2}	20	1.95	2.64	2.02	1.45	1.54	2.64	3.68	3.02	2.31	2.78	9.59	4.94	3.86	2.69	1.31
	40	1.73	1.66	1.52	1.32	1.37	2.93	2.74	2.45	2.16	2.32	10.31	3.63	3.15	2.75	2.37
	60	1.81	1.63	1.46	1.34	1.38	2.75	2.64	2.44	2.26	2.37	9.97	3.53	3.22	2.87	2.76
	100	1.68	1.53	1.38	1.31	1.33	2.72	2.11	2.00	1.93	1.98	10.20	2.85	2.70	2.52	2.48

Tabela 3.11: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 , $\omega = 100$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.00	1.05	0.28	0.08	0.09	0.00	0.57	0.10	0.01	0.01	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.75	2.07	1.37	1.45	0.00	2.45	1.63	1.01	1.02	0.02	0.39	0.02	0.00	0.00
	60	0.00	3.34	2.77	2.32	2.42	0.00	3.12	2.63	2.11	2.23	0.02	1.43	0.68	0.24	0.01
	100	0.00	4.09	3.72	3.47	3.59	0.00	4.04	3.66	3.44	3.53	0.02	2.68	2.28	1.92	1.30
R_{ξ_1}	20	0.00	0.86	0.32	0.11	0.08	0.00	0.44	0.12	0.02	0.01	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.56	2.04	1.39	1.30	0.00	2.27	1.64	1.15	0.92	0.02	0.33	0.03	0.00	0.00
	60	0.00	3.13	2.82	2.46	2.39	0.00	2.98	2.66	2.19	2.08	0.02	1.42	0.60	0.25	0.01
	100	0.00	3.99	3.77	3.55	3.59	0.00	3.93	3.68	3.51	3.53	0.02	2.65	2.24	1.84	1.23
R_{α_2}	20	0.00	2.40	1.44	0.79	0.74	0.01	2.59	1.87	1.45	1.47	3.55	6.54	4.60	2.84	1.54
	40	0.00	3.12	2.55	2.04	1.94	0.04	2.70	2.26	1.92	1.85	3.87	5.57	4.36	3.36	2.23
	60	0.01	3.35	2.91	2.56	2.42	0.00	2.73	2.33	2.13	2.12	4.07	5.36	4.37	3.48	2.55
	100	0.00	3.54	3.36	3.09	2.96	0.03	2.84	2.64	2.41	2.40	4.10	5.26	4.55	3.91	3.11

Tabela 3.12: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 , $\omega = 10^4$.

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.00	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.34	1.59	0.94	0.98	0.00	1.68	1.00	0.56	0.52	0.01	0.06	0.00	0.00	0.00
	60	0.00	3.07	2.52	2.12	2.23	0.00	2.63	2.12	1.71	1.74	0.02	1.04	0.42	0.04	0.00
	100	0.00	4.00	3.67	3.28	3.41	0.00	3.82	3.48	3.13	3.19	0.03	2.37	1.86	1.44	0.93
R_{ξ_1}	20	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	2.15	1.55	1.04	0.92	0.00	1.42	1.01	0.62	0.39	0.01	0.06	0.00	0.00	0.00
	60	0.00	2.87	2.53	2.27	2.20	0.00	2.53	2.15	1.75	1.62	0.02	0.99	0.38	0.04	0.00
	100	0.00	3.88	3.63	3.43	3.50	0.00	3.74	3.49	3.22	3.23	0.03	2.25	1.84	1.44	0.85
R_{α_2}	20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	3.37	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.01	1.09	0.55	0.21	0.20	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	3.66	0.06	0.03	0.02	0.01
	60	0.00	2.33	1.85	1.36	1.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.72	1.87	1.06	0.61	0.22
	100	0.00	3.46	3.19	2.89	2.71	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	3.77	4.53	3.58	2.80	1.87

Tabela 3.13: “Melhores” estimadores segundo taxa de rejeição empírica. Dados de $M(0, k)$.

Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 .

	ω		10^{-4}			10^{-2}			10^0			10^2			10^4		
Modelo	n	k	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4
Completo	20		MQO	MQO	HC4	MQO	MQO	HC4	HC3	HC3	HC3	HC0	HC0	MQO	HC0	HC0	MQO
	40		HC3	HC4/HC3	HC4	HC3	HC4	HC4	HC4	HC3	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
	60		HC3	HC3=HC4	HC4	HC3	HC4	HC4	HC3	HC3=HC4	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
	100		HC2	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3/HC4	HC3	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
R_{ξ_1}	20		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC0	HC0	MQO	HC0	HC0	MQO
	40		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
	60		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
	100		HC2	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4	HC3	HC3	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
R_{α_2}	20		HC3	HC3	HC4	HC3	HC3	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC2	MQO	MQO	MQO
	40		HC3	HC3	HC3	HC4	HC3	HC3	MQO	MQO	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	MQO	MQO
	60		HC3/HC4	HC3	HC3	HC3	HC3	HC3	MQO	MQO	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	MQO	MQO
	100		HC2	HC2	HC0	HC2	HC2/HC4	HC0	MQO	MQO	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	MQO	HC0

Na tabela 3.7 observa-se que para o parâmetro ξ_1 , no caso em que $\omega < 1$, as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC0 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias; este mesmo comportamento é verificado para os modelos R_{ξ_2} e R_{α_2} . Quando $\omega > 1$, as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas do teste que usa o estimador HC4 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias, exceto no caso em que o parâmetro de concentração k é igual a 0.5, quando as melhores taxas são aquelas do teste HC3. Para os modelos R_{ξ_2} e R_{α_2} , o melhor teste é o que se baseia em HC4. No caso de homoscedasticidade ($\omega = 1$), observa-se que para o modelo completo as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são as do teste HC3 quando os parâmetros de concentração são $k = 0.5$ e 2; para $k = 4$, o melhor teste é o que se baseia em HC4. Para o modelo R_{ξ_2} as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são as do teste HC4, exceto para $k = 2$ e tamanhos de amostra $n = 60$ e 100, quando são as do teste HC3 e para o modelo R_{α_2} são as do teste HC0.

Nas tabelas 3.8 a 3.12 são apresentadas as probabilidades de rejeição empíricas de $H_0 : \xi_2 = 0$ correspondentes aos testes baseados nos diferentes estimadores da matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros do modelo de regressão. Além disso, são apresentadas as taxas de rejeição quando são estimados os modelos completo e restritos, R_{ξ_1} e R_{α_2} . Na tabela 3.13 é apresentado um resumo das tabelas 3.8 até 3.12; naquela tabela são listados os estimadores da matriz de variâncias e covariâncias que se revelaram mais confiáveis no que diz respeito às distorções de tamanho dos testes associados. Estes resultados foram obtidos para diferentes graus de heteroscedasticidade (ω), valores do parâmetro de concentração, tamanhos de amostras e ângulo correspondente ao ponto

influyente.

No caso do modelo completo e quando $\omega = 1/10000$, observa-se que quando $k = 4$ as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC4 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias; quando $k = 0.5$ e 2 não é possível identificar um estimador como o melhor. Um fato muito similar acontece quando $\omega = 1/100$, só que aqui o melhor teste é o baseado no estimador HC4 quando $k = 2$ e 4; para $k = 0.5$, é difícil identificar um único estimador como o melhor. Para o modelo R_{ξ_1} , quando $\omega < 1$ observa-se que as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC4 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias, enquanto que para o modelo R_{α_2} o teste baseado no estimador HC3 é o melhor, com poucas exceções (já que não há uma “uniformidade” na escolha do melhor teste). Para o caso em que $\omega > 1$, observa-se que as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são as do teste HC0; este comportamento é verificado para quase todos os modelos, exceto o modelo R_{α_2} quando $\omega = 10000$, caso em que, para $k = 2$ e 4, o teste baseado no EMQO é o melhor. Quando há homoscedasticidade, observa-se que para o modelo completo e no caso em que $k = 0.5$ e 2, as melhores taxas de rejeição são as do teste HC3 e no caso em que $k = 4$ o teste baseado no estimador HC4 é o melhor. Para o modelo R_{ξ_1} , quando $k = 2$ e 4, as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC4 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias, enquanto que para $k = 0.5$ não é possível identificar um só estimador como sendo o melhor. Para o modelo R_{α_2} e quando $k = 0.5$ e 2, o teste mais confiável é aquele que usa EMQO e para $k = 4$ o teste baseado no estimador HC0 é o melhor.

Tabela 3.14: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: $\alpha_2, \omega = 10^{-4}$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.50	11.14	8.01	5.17	5.32	0.58	12.84	8.87	5.74	5.41	0.65	27.07	10.76	4.47	1.14
	40	0.72	8.55	7.36	5.95	5.92	0.66	9.31	7.62	6.36	6.06	0.81	18.62	13.57	9.13	3.38
	60	0.71	6.99	6.16	5.40	5.39	0.85	8.09	7.20	6.22	6.08	0.81	14.16	11.40	8.65	5.05
	100	0.66	6.24	5.83	5.37	5.37	0.77	6.92	6.49	5.90	5.81	0.95	10.60	8.94	7.63	5.30
R_{ξ_1}	20	0.64	11.01	8.00	5.54	4.36	0.61	12.78	9.37	6.02	4.22	0.69	27.21	9.13	3.30	1.32
	40	0.91	8.56	7.33	6.16	5.43	0.66	9.06	7.65	6.49	5.39	0.86	19.41	13.94	8.85	2.56
	60	0.89	7.14	6.30	5.60	5.03	0.88	8.14	7.17	6.33	5.60	0.87	14.58	11.58	8.95	4.83
	100	0.85	6.54	6.07	5.44	5.13	0.81	6.88	6.42	5.97	5.42	0.99	10.73	9.18	7.84	5.43
R_{ξ_2}	20	1.63	7.08	6.24	5.46	6.22	2.94	6.87	6.02	5.46	6.15	11.18	7.48	6.55	5.58	5.17
	40	2.24	5.85	5.45	5.18	5.51	3.36	5.77	5.38	5.02	5.44	12.09	5.61	5.15	4.81	5.10
	60	2.07	5.35	5.18	4.95	5.21	3.43	5.82	5.61	5.36	5.66	12.02	5.46	5.22	4.99	5.23
	100	1.96	4.98	4.85	4.68	4.86	3.39	5.00	4.92	4.82	4.94	11.92	5.06	4.88	4.78	4.88

Tabela 3.15: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: $\alpha_2, \omega = 10^{-2}$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.50	10.88	7.72	4.95	5.10	0.60	12.67	9.02	6.01	5.83	0.6	26.12	11.92	5.07	1.41
	40	0.68	8.49	7.12	6.00	5.95	0.72	9.25	7.63	6.53	6.24	0.86	18.31	13.45	9.07	3.51
	60	0.71	7.07	6.16	5.38	5.31	0.85	8.12	7.19	6.20	6.00	0.80	14.10	11.37	8.82	5.03
	100	0.66	6.29	5.92	5.45	5.39	0.81	6.86	6.36	5.89	5.75	0.98	10.30	8.91	7.58	5.35
R_{ξ_1}	20	0.67	10.89	7.70	5.40	4.23	0.64	12.45	9.14	6.37	4.53	0.64	26.48	10.56	4.36	1.39
	40	0.91	8.53	7.14	6.03	5.34	0.73	9.03	7.57	6.53	5.51	0.90	18.94	13.53	9.11	2.95
	60	0.90	7.04	6.36	5.69	5.21	0.86	8.06	7.21	6.32	5.53	0.83	14.54	11.59	9.00	4.90
	100	0.86	6.29	5.94	5.59	5.30	0.86	6.82	6.39	5.94	5.43	1.00	10.57	9.06	7.78	5.48
R_{ξ_2}	20	1.65	6.98	6.18	5.40	6.21	2.89	6.89	6.04	5.38	6.25	11.41	7.54	6.46	5.49	5.20
	40	2.29	5.90	5.44	5.13	5.48	3.41	5.57	5.15	4.87	5.26	11.99	5.48	5.07	4.66	5.02
	60	2.01	5.33	5.08	4.85	5.10	3.31	5.89	5.68	5.43	5.71	11.94	5.39	5.22	4.97	5.20
	100	2.02	5.04	4.91	4.71	4.91	3.43	5.09	4.94	4.82	4.95	11.77	5.03	4.93	4.82	4.93

Tabela 3.16: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: $\alpha_2, \omega = 1$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.59	9.53	7.37	5.55	5.98	0.56	9.97	7.85	5.88	6.06	0.48	14.41	10.33	6.93	3.61
	40	0.59	7.24	6.20	5.30	5.52	0.69	7.50	6.33	5.51	5.55	0.53	10.09	8.15	6.72	4.50
	60	0.67	6.14	5.63	4.94	5.04	0.57	6.72	6.02	5.43	5.50	0.50	8.67	7.45	6.35	4.75
	100	0.59	5.62	5.26	4.92	5.00	0.69	6.31	5.89	5.56	5.57	0.62	7.16	6.43	5.76	4.86
R_{ξ_1}	20	0.72	8.47	6.86	5.50	5.09	0.57	9.37	7.64	6.03	5.40	0.55	14.28	10.56	7.23	3.74
	40	0.77	6.64	5.74	5.04	4.93	0.70	7.29	6.44	5.64	5.15	0.59	10.11	8.24	6.67	4.49
	60	0.82	5.82	5.43	4.94	4.79	0.59	6.56	5.95	5.41	5.15	0.51	8.40	7.33	6.25	4.78
	100	0.81	5.71	5.42	5.08	5.07	0.72	6.32	5.99	5.62	5.51	0.67	7.19	6.63	5.92	4.99
R_{ξ_2}	20	1.50	7.12	6.18	5.10	5.80	2.79	7.27	6.31	5.41	6.24	9.45	7.15	6.18	5.27	4.73
	40	1.57	5.92	5.38	4.91	5.22	2.82	5.56	5.20	4.76	5.16	10.19	5.35	4.89	4.52	4.57
	60	1.77	5.41	5.14	4.83	5.03	2.78	5.44	5.26	4.93	5.21	10.34	5.39	5.11	4.79	4.90
	100	1.85	4.95	4.74	4.56	4.70	3.17	5.13	4.96	4.83	4.94	10.17	5.03	4.76	4.57	4.64

Tabela 3.17: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: α_2 , $\omega = 100$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.36	5.49	3.31	1.71	1.94	0.24	4.46	2.35	0.98	0.79	0.18	0.13	0.00	0.00	0.00
	40	0.46	5.39	4.55	3.75	4.08	0.27	5.11	4.13	3.48	3.69	0.24	1.33	0.25	0.02	0.00
	60	0.50	5.35	4.78	4.39	4.59	0.38	4.83	4.38	3.84	4.06	0.31	2.43	1.61	0.92	0.17
	100	0.47	5.02	4.68	4.44	4.58	0.40	5.15	4.85	4.60	4.78	0.26	3.68	3.32	2.87	2.21
R_{ξ_1}	20	0.52	4.84	3.29	2.05	1.58	0.25	3.93	2.40	1.21	0.33	0.21	0.12	0.00	0.00	0.00
	40	0.65	5.30	4.78	4.20	4.36	0.28	4.72	4.17	3.70	3.65	0.25	1.34	0.28	0.01	0.00
	60	0.67	4.86	4.61	4.30	4.46	0.38	4.89	4.54	4.19	4.29	0.33	2.51	1.66	1.02	0.16
	100	0.62	4.74	4.61	4.44	4.55	0.42	5.29	5.11	4.93	5.00	0.26	3.72	3.29	2.87	2.32
R_{ξ_2}	20	1.34	6.75	5.23	4.07	4.38	1.92	5.83	4.57	3.50	4.19	7.67	5.02	3.67	2.36	1.57
	40	1.48	5.87	5.22	4.51	4.79	2.03	5.56	4.85	4.20	4.60	8.05	4.89	4.22	3.55	3.15
	60	1.59	5.89	5.49	4.83	4.97	1.99	5.23	4.86	4.44	4.70	8.26	5.10	4.73	4.36	3.98
	100	1.50	5.16	4.88	4.68	4.75	2.32	5.28	5.06	4.88	4.96	8.30	4.88	4.57	4.27	4.13

Tabela 3.18: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: $\alpha_2, \omega = 10^4$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.39	5.43	3.19	1.49	1.59	0.22	4.14	1.92	0.67	0.46	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.46	5.48	4.56	3.80	4.09	0.26	5.13	4.14	3.29	3.58	0.25	1.10	0.10	0.00	0.00
	60	0.50	5.40	4.83	4.21	4.63	0.38	4.84	4.33	3.76	3.94	0.32	2.22	1.46	0.71	0.02
	100	0.48	5.06	4.75	4.50	4.67	0.42	4.94	4.71	4.47	4.61	0.23	3.25	2.89	2.51	2.11
R_{ξ_1}	20	0.53	4.89	3.38	1.92	1.41	0.24	3.66	2.06	0.88	0.07	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.58	5.35	4.77	4.29	4.38	0.28	4.75	4.10	3.51	3.44	0.30	1.16	0.11	0.00	0.00
	60	0.59	4.98	4.64	4.34	4.44	0.38	4.77	4.38	4.11	4.20	0.32	2.22	1.49	0.79	0.02
	100	0.63	4.52	4.39	4.22	4.29	0.47	5.01	4.83	4.67	4.79	0.24	3.42	2.96	2.65	2.09
R_{ξ_2}	20	1.31	6.78	5.25	4.01	4.31	1.86	5.52	4.19	3.15	3.72	7.62	4.35	2.89	1.80	1.04
	40	1.38	5.95	5.29	4.63	4.74	2.05	5.56	5.14	4.42	4.91	7.92	4.87	4.25	3.43	3.01
	60	1.57	5.81	5.29	4.86	4.93	2.09	5.17	4.82	4.35	4.69	8.12	5.18	4.63	4.19	3.69
	100	1.50	5.04	4.77	4.54	4.62	2.25	5.23	4.98	4.76	4.93	8.33	4.98	4.77	4.47	4.15

Tabela 3.19: “Melhores” estimadores segundo taxa de rejeição empírica. Dados de $M(0, k)$.Não se garante que há apenas um único ponto influente. Parâmetro: α_2 .

	ω		10^{-4}			10^{-2}			10^0			10^2			10^4		
Modelo	n	k	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4	0.5	2	4
Completo	20		HC3	HC4	HC3	HC3	HC4	HC3	HC3	HC3	HC4	HC0	HC0	MQO	HC0	HC0	MQO
	40		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3	HC3	HC4	HC0	HC0	HC0	HC2	HC0	HC0
	60		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3	HC4	HC2	HC0	HC0	HC2	HC0	HC0
	100		HC3	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3	HC4	HC0	HC0=HC2	HC0	HC0	HC0	HC0
R_{ξ_1}	20		HC3	HC4	HC3	HC3	HC4	HC3	HC4	HC4	HC4	HC0	HC0	MQO	HC0	HC0	MQO
	40		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4	HC2	HC0	HC0	HC2	HC0	HC0
	60		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC3	HC4	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0	HC0
	100		HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4	HC4/HC3	HC4	HC4	HC0	HC4	HC0	HC0	HC0	HC0
R_{ξ_2}	20		HC3	HC3	HC4	HC3	HC3	HC4	HC3	HC3	HC3=HC4	HC2	HC2	HC0	HC2	HC0	HC0
	40		HC3	HC3	HC4	HC3	HC3	HC4	HC3	HC4	HC2	HC4/HC2	HC2	HC0	HC4	HC4	HC0
	60		HC3	HC3	HC3	HC2	HC3	HC3	HC4	HC3	HC4	HC4	HC2	HC0	HC4	HC0/HC2	HC0
	100		HC0	HC0	HC0	HC0	HC4/HC2	HC0	HC0	HC2	HC0	HC2	HC4	HC0	HC0	HC2	HC0

Tabela 3.20: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Garantindo que há um único ponto influente. Parâmetro: $\xi_1, \omega = 10^{-4}$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.00	2.23	0.39	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	3.97	2.81	1.98	1.91	0.00	1.80	1.09	0.61	0.50	0.01	0.14	0.00	0.00	0.00
	60	0.01	4.42	3.91	3.18	3.22	0.00	3.03	2.40	1.99	2.03	0.03	1.27	0.54	0.07	0.00
	100	0.01	4.60	4.26	3.96	4.00	0.00	3.62	3.42	3.20	3.26	0.01	2.58	2.10	1.69	1.16
R_{ξ_2}	20	0.00	1.86	0.37	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	3.68	2.82	2.17	1.71	0.00	1.59	1.03	0.65	0.27	0.01	0.10	0.00	0.00	0.00
	60	0.01	4.24	3.84	3.40	3.29	0.00	2.87	2.52	2.07	1.87	0.03	1.17	0.44	0.07	0.00
	100	0.01	4.48	4.26	4.04	4.11	0.00	3.57	3.40	3.15	3.15	0.01	2.50	2.07	1.63	1.16
R_{α_2}	20	0.00	1.11	0.04	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	40	0.00	3.18	2.24	1.56	1.02	0.00	1.66	0.98	0.54	0.21	0.02	0.12	0.00	0.00	0.00
	60	0.03	3.90	3.41	2.74	2.50	0.00	3.00	2.50	2.01	1.76	0.03	1.13	0.44	0.05	0.00
	100	0.02	4.44	4.16	3.79	3.74	0.00	3.80	3.50	3.21	3.14	0.01	2.54	2.05	1.72	1.11

Tabela 3.21: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Garantindo que há um único ponto influente. Parâmetro: ξ_2 , $\omega = 10^{-4}$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	2.53	11.01	8.50	6.50	6.59	3.33	12.12	9.43	7.13	7.21	2.06	21.47	13.37	7.66	3.15
	40	2.01	7.69	6.59	5.67	5.72	2.97	8.17	7.00	5.85	5.84	1.79	14.32	11.17	8.61	5.01
	60	2.02	6.75	6.16	5.41	5.39	3.16	7.11	6.29	5.56	5.56	1.76	11.76	9.94	7.99	5.22
	100	2.03	5.88	5.43	5.04	5.02	2.89	6.07	5.67	5.29	5.26	1.75	8.57	7.63	6.65	5.10
R_{ξ_1}	20	2.53	10.56	8.46	6.66	6.07	3.33	11.92	9.38	7.17	6.14	2.06	20.82	13.29	7.69	3.37
	40	2.01	7.46	6.62	5.73	5.43	2.97	8.10	7.01	5.90	5.47	1.79	14.13	11.15	8.61	5.00
	60	2.02	6.69	6.15	5.49	5.21	3.16	7.03	6.29	5.61	5.28	1.76	11.62	9.85	8.10	5.22
	100	2.03	5.80	5.45	5.07	4.95	2.89	6.01	5.65	5.30	5.01	1.75	8.46	7.62	6.63	5.12
R_{α_2}	20	6.29	8.24	6.83	5.80	6.15	8.57	7.52	6.53	5.79	6.45	16.18	7.36	6.46	5.63	5.34
	40	6.06	6.05	5.48	4.93	5.18	8.53	5.70	5.30	4.90	5.26	16.81	5.66	5.28	4.92	5.24
	60	5.93	5.91	5.48	5.00	5.27	8.48	5.66	5.33	5.08	5.33	16.67	5.69	5.41	5.09	5.34
	100	5.83	5.46	5.22	4.91	5.02	8.25	5.15	4.95	4.79	4.93	16.09	5.00	4.91	4.76	4.91

Tabela 3.22: Taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t , $\alpha = 5\%$. Dados de $M(0, k)$.Garantindo que há um único ponto influente. Parâmetro: $\alpha_2, \omega = 10^{-4}$

	k	0.5					2					4				
Modelo	n	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4	MQO	HC0	HC2	HC3	HC4
Completo	20	0.07	8.64	5.45	3.03	3.02	0.58	12.84	8.87	5.74	5.41	0.65	27.07	10.76	4.47	1.14
	40	0.15	8.03	6.59	5.41	5.14	0.66	9.31	7.62	6.36	6.06	0.81	18.62	13.57	9.13	3.38
	60	0.21	6.77	6.02	5.27	5.03	0.85	8.09	7.20	6.22	6.08	0.81	14.16	11.40	8.65	5.05
	100	0.23	6.65	6.19	5.52	5.35	0.77	6.92	6.49	5.90	5.81	0.95	10.60	8.94	7.63	5.30
R_{ξ_1}	20	0.18	7.90	5.29	3.27	2.65	0.61	12.78	9.37	6.02	4.22	0.69	27.21	9.13	3.30	1.32
	40	0.22	7.71	6.51	5.41	4.46	0.66	9.06	7.65	6.49	5.39	0.86	19.41	13.94	8.85	2.56
	60	0.35	6.93	6.15	5.45	4.61	0.88	8.14	7.17	6.33	5.60	0.87	14.58	11.58	8.95	4.83
	100	0.33	6.41	5.90	5.55	5.10	0.81	6.88	6.42	5.97	5.42	0.99	10.73	9.18	7.84	5.43
R_{ξ_2}	20	0.91	6.90	5.99	5.01	5.80	2.94	6.87	6.02	5.46	6.15	11.18	7.48	6.55	5.58	5.17
	40	1.14	5.68	5.18	4.69	5.18	3.36	5.77	5.38	5.02	5.44	12.09	5.61	5.15	4.81	5.10
	60	1.16	5.34	5.03	4.65	5.03	3.43	5.82	5.61	5.36	5.66	12.02	5.46	5.22	4.99	5.23
	100	1.24	5.03	4.88	4.74	4.92	3.39	5.00	4.92	4.82	4.94	11.92	5.06	4.88	4.78	4.88

Nas tabelas 3.14 a 3.18 são apresentadas as probabilidades de rejeição empíricas de $H_0 : \alpha_2 = 0$ correspondentes aos testes baseados nos diferentes estimadores da matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros do modelo de regressão. São ainda apresentadas as taxas de rejeição quando são estimados os modelos completo e restritos, R_{ξ_1} e R_{ξ_2} . Na tabela 3.19 é apresentado um resumo das tabelas 3.14 até 3.18; nesta tabela são listados os estimadores da matriz de variâncias e covariâncias que se revelaram mais confiáveis no que diz respeito às distorções de tamanho dos testes associados. Estes resultados foram obtidos para diferentes graus de heteroscedasticidade (ω), valores do parâmetro de concentração e tamanhos de amostras.

Quando $\omega < 1$ nos modelos completo e R_{ξ_1} observa-se que as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC4 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias, havendo poucas exceções, por exemplo, quando o tamanho de amostra é $n = 20$, onde o teste HC3 é superior aos demais. Para $\omega > 1$ nos modelos completo e R_{ξ_1} observa-se que as taxas de rejeição empíricas mais próximas de 5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC0 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias (com poucas exceções) e para o modelo R_{ξ_2} observa-se que, para $k = 4$, o teste baseado no estimador HC0 é o melhor, enquanto que para $k = 0.5$ e 2, é difícil apontar um só estimador como sendo o melhor. No caso de homoscedasticidade, observa-se que os melhores testes são os baseados nos estimadores HC3 e HC4 para os diferentes modelos. Para o modelo completo, quando $k = 0.5$ e 2 o teste baseado no estimador HC3 é o melhor enquanto que para $k = 4$ o teste mais confiável é aquele que usa HC4; para o modelo R_{ξ_1} quando $k = 2$ e 4 as taxas de rejeição empíricas mais próximas de

5% são aquelas obtidas quando se emprega o estimador HC4 como estimador da matriz de variâncias e covariâncias, enquanto que para $k = 0.5$, da mesma forma que no modelo R_{ξ_2} , é difícil apontar um só estimador.

Nesta segunda parte, consideramos o caso em que o n -ésimo ponto (θ_n) está numa região afastada da direção média dos $n - 1$ pontos, de tal forma que se pode garantir que este ponto é o único ponto influente. O processo é realizado da seguinte forma: ao gerar os $n - 1$ pontos (lembre que sempre há dois valores que são fixados, $\theta_0 = 0$ e θ_n), calcula-se h_{ii} (i -ésimo elemento diagonal da matriz $\mathbf{H}$), este valor é comparado com $\frac{8}{n}$, $\left(\frac{2p}{n}\right)$, de tal forma que para os h_{ii} , $i = 2, \dots, n - 1$, valham:

1. $h_{ii} < \frac{8}{n}$;

2. $h_{ii} < h_{nn}$;

e, para $i = 1, 2, \dots, n$,

3. $h_{ii} = h_{(i+n)(i+n)}$;

4. $h_{ii} = \frac{2(1-\bar{s}^2-c_i\bar{c})}{n(1-\bar{s}^2-\bar{c}^2)}$;

onde $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos\theta_i$ e $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$. Caso exista algum θ_i que não satisfaça as condições (1) e (2), este é desprezado e se gera um novo θ_i a partir da distribuição von Mises. Assim, garantimos que o único valor que não cumpre a condição (1) é o n -ésimo (θ_n), que é o ponto que está fixado (na direção 180°).

Nas tabelas 3.20 a 3.22 apresentamos resultados que foram obtidos usando o mesmo ângulo do ponto influente, os mesmos parâmetros de concentração e grau de heteroscedasticidade ($\omega = 1/10000$) das tabelas anteriores, com a diferença do ângulo do ponto influente

já explicado, i.e., garantindo-se que há um único ponto influente.

Os resultados de simulação mostraram que só foi necessário fazer três mudanças de pontos quando o tamanho de amostra é $n = 20$; para os outros tamanhos de amostra não houve mudanças de valores. Este fato possivelmente explica o resultado de que quando o parâmetro de concentração é $k = 0.5$, as taxas de rejeição empíricas são diferentes das obtidas no caso em que não se tem garantia de que há um único ponto influente. Para os parâmetros de concentração $k = 2$ e 4 , as taxas de rejeição são iguais às obtidas anteriormente.

Podemos comparar a tabela 3.2 com a tabela 3.20, que fornece as taxas de rejeição empíricas de testes quasi- t para o parâmetro ξ_1 , a tabela 3.8 com a tabela 3.21, para o parâmetro ξ_2 , e a tabela 3.14 com a tabela 3.22, para o parâmetro α_2 . Como mencionado anteriormente, para $k = 0.5$ as taxas de rejeição são diferentes, mas não podemos afirmar que tais valores ficaram mais perto do nível nominal (5%) ou, ao contrário, que são valores mais afastados.

3.4 Medidas descritivas da distribuição empírica das estatísticas de teste

Nas tabelas 3.23 a 3.37 são apresentadas a média, a mediana, o desvio-padrão, a assimetria e a curtose das distribuições empíricas das estatísticas de teste (τ) baseadas nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4. São considerados fatores tais como tamanho de amostra, parâmetro de concentração (k) e grau de heteroscedasticidade (ω), através dos diferentes modelos, ou seja, o modelo completo e os modelos restritos (R_{ξ_1} , R_{ξ_2} e R_{α_2}).

Tabela 3.23: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 0.5$ e $n = 40$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	-0.095	-0.094	-0.044	-0.095	-0.095	-0.008	-0.061	-0.061	-0.052
	HC2	-0.091	-0.092	-0.042	-0.091	-0.091	-0.007	-0.059	-0.059	-0.05
	HC3	-0.088	-0.089	-0.04	-0.088	-0.088	-0.006	-0.056	-0.057	-0.049
	HC4	-0.089	-0.09	-0.04	-0.089	-0.087	-0.004	-0.057	-0.056	-0.048
Mediana	HC0	-0.104	-0.103	-0.068	-0.099	-0.098	-0.046	-0.041	-0.041	-0.038
	HC2	-0.101	0.000	-0.066	-0.095	-0.095	-0.044	-0.039	-0.039	-0.037
	HC3	-0.098	-0.099	-0.064	-0.091	-0.092	-0.042	-0.038	-0.038	-0.035
	HC4	-0.100	-0.101	-0.064	-0.092	-0.091	-0.041	-0.038	-0.037	-0.035
Desvio— padrão	HC0	0.932	0.922	0.921	1.081	1.075	0.752	1.11	1.106	1.093
	HC2	0.898	0.899	0.891	1.040	1.040	0.721	1.068	1.067	1.061
	HC3	0.866	0.875	0.862	1.001	1.006	0.692	1.027	1.029	1.028
	HC4	0.876	0.876	0.858	1.010	0.996	0.672	1.033	1.014	1.017
Assimetria	HC0	0.038	0.037	0.074	-0.021	-0.018	0.337	-0.032	-0.032	-0.011
	HC2	0.040	0.039	0.075	-0.021	-0.019	0.346	-0.032	-0.031	-0.011
	HC3	0.041	0.041	0.077	-0.021	-0.019	0.355	-0.032	-0.031	-0.01
	HC4	0.044	0.046	0.081	-0.022	-0.020	0.370	-0.031	-0.030	-0.009
Curtose	HC0	2.379	2.386	2.324	3.208	3.201	3.278	3.231	3.228	3.193
	HC2	2.361	2.358	2.302	3.223	3.217	3.294	3.245	3.243	3.206
	HC3	2.342	2.330	2.280	3.238	3.234	3.311	3.261	3.259	3.220
	HC4	2.316	2.276	2.229	3.257	3.271	3.344	3.279	3.294	3.249

Tabela 3.24: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 2$ e $n = 40$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	0.026	0.026	0.021	-0.032	-0.031	0.022	-0.05	-0.05	-0.048
	HC2	0.025	0.025	0.020	-0.03	-0.03	0.022	-0.048	-0.048	-0.046
	HC3	0.024	0.025	0.020	-0.029	-0.029	0.022	-0.046	-0.046	-0.044
	HC4	0.024	0.025	0.021	-0.029	-0.028	0.023	-0.046	-0.045	-0.043
Mediana	HC0	0.022	0.021	0.017	-0.027	-0.027	-0.026	-0.044	-0.044	-0.037
	HC2	0.021	0.021	0.016	-0.026	-0.026	-0.024	-0.042	-0.042	-0.036
	HC3	0.021	0.021	0.016	-0.025	-0.025	-0.023	-0.04	-0.04	-0.035
	HC4	0.021	0.021	0.016	-0.025	-0.025	-0.022	-0.04	-0.039	-0.034
Desvio- padrão	HC0	0.913	0.905	0.917	1.079	1.073	0.745	1.124	1.12	1.112
	HC2	0.881	0.881	0.887	1.037	1.037	0.712	1.078	1.077	1.074
	HC3	0.848	0.857	0.857	0.996	1.000	0.679	1.033	1.036	1.037
	HC4	0.855	0.852	0.849	0.998	0.981	0.648	1.032	1.008	1.011
Assimetria	HC0	-0.015	-0.013	0.014	-0.002	0.000	0.409	-0.032	-0.033	-0.024
	HC2	-0.015	-0.013	0.015	-0.002	0.000	0.421	-0.033	-0.033	-0.024
	HC3	-0.015	-0.013	0.015	-0.002	-0.001	0.434	-0.033	-0.034	-0.024
	HC4	-0.015	-0.013	0.017	-0.002	-0.001	0.462	-0.034	-0.035	-0.025
Curtose	HC0	2.399	2.400	2.360	3.221	3.219	3.411	3.255	3.256	3.248
	HC2	2.372	2.365	2.330	3.237	3.236	3.442	3.273	3.274	3.265
	HC3	2.345	2.329	2.299	3.254	3.256	3.475	3.291	3.293	3.285
	HC4	2.306	2.252	2.222	3.278	3.304	3.551	3.316	3.340	3.331

Tabela 3.25: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 4$ e $n = 40$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	0.039	0.04	0.037	-0.008	-0.008	0.099	-0.05	-0.05	-0.042
	HC2	0.037	0.037	0.035	-0.007	-0.007	0.095	-0.046	-0.046	-0.038
	HC3	0.034	0.035	0.034	-0.006	-0.006	0.089	-0.042	-0.042	-0.034
	HC4	0.030	0.030	0.033	-0.005	-0.005	0.078	-0.034	-0.034	-0.027
Mediana	HC0	0.038	0.038	0.035	-0.009	-0.009	-0.004	-0.042	-0.041	-0.036
	HC2	0.037	0.037	0.035	-0.008	-0.008	-0.004	-0.038	-0.038	-0.033
	HC3	0.036	0.036	0.034	-0.008	-0.008	-0.003	-0.034	-0.034	-0.030
	HC4	0.037	0.037	0.034	-0.007	-0.007	-0.003	-0.028	-0.028	-0.024
Desvio— padrão	HC0	0.864	0.86	0.862	1.177	1.172	0.757	1.321	1.312	1.303
	HC2	0.808	0.807	0.807	1.102	1.102	0.682	1.215	1.212	1.207
	HC3	0.751	0.753	0.75	1.028	1.031	0.611	1.112	1.113	1.112
	HC4	0.662	0.661	0.659	0.914	0.917	0.489	0.944	0.945	0.946
Assimetria	HC0	-0.022	-0.021	0.002	-0.016	-0.017	1.009	-0.051	-0.051	-0.031
	HC2	-0.026	-0.025	-0.001	-0.016	-0.017	1.125	-0.058	-0.057	-0.036
	HC3	-0.031	-0.029	-0.004	-0.016	-0.017	1.250	-0.065	-0.064	-0.040
	HC4	-0.039	-0.038	-0.011	-0.014	-0.016	1.595	-0.082	-0.081	-0.049
Curtose	HC0	2.166	2.16	2.140	3.591	3.593	4.973	3.129	3.119	3.134
	HC2	2.063	2.053	2.035	3.704	3.710	5.508	3.216	3.207	3.222
	HC3	1.964	1.95	1.934	3.842	3.856	6.171	3.328	3.324	3.339
	HC4	1.736	1.724	1.708	4.332	4.349	8.461	3.757	3.747	3.753

Tabela 3.26: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 0.5$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	-0.085	-0.085	-0.041	-0.08	-0.08	-0.011	-0.05	-0.05	-0.045
	HC2	-0.083	-0.083	-0.04	-0.078	-0.078	-0.01	-0.049	-0.049	-0.044
	HC3	-0.081	-0.082	-0.039	-0.076	-0.077	-0.009	-0.048	-0.048	-0.043
	HC4	-0.082	-0.083	-0.039	-0.077	-0.076	-0.008	-0.048	-0.047	-0.043
Mediana	HC0	-0.083	-0.082	-0.059	-0.083	-0.083	-0.041	-0.053	-0.053	-0.043
	HC2	-0.081	0.000	-0.058	-0.081	-0.081	-0.04	-0.052	-0.052	-0.042
	HC3	-0.08	-0.08	-0.057	-0.079	-0.08	-0.039	-0.05	-0.051	-0.041
	HC4	-0.081	-0.081	-0.057	-0.079	-0.079	-0.039	-0.051	-0.05	-0.04
Desvio— padrão	HC0	0.953	0.946	0.943	1.049	1.046	0.739	1.071	1.069	1.057
	HC2	0.932	0.932	0.924	1.023	1.023	0.719	1.043	1.043	1.036
	HC3	0.910	0.917	0.905	0.997	1.000	0.700	1.016	1.018	1.015
	HC4	0.919	0.921	0.905	1.002	0.993	0.687	1.020	1.008	1.007
Assimetria	HC0	0.027	0.026	0.049	0.050	0.050	0.304	0.021	0.021	0.026
	HC2	0.028	0.027	0.050	0.050	0.050	0.308	0.021	0.021	0.026
	HC3	0.028	0.028	0.051	0.051	0.050	0.312	0.021	0.021	0.027
	HC4	0.030	0.030	0.054	0.051	0.051	0.320	0.021	0.022	0.027
Curtose	HC0	2.540	2.543	2.455	3.187	3.186	3.270	3.280	3.277	3.219
	HC2	2.528	2.526	2.442	3.193	3.193	3.278	3.287	3.285	3.227
	HC3	2.517	2.509	2.429	3.199	3.199	3.287	3.295	3.293	3.234
	HC4	2.500	2.474	2.399	3.206	3.214	3.303	3.305	3.313	3.249

Tabela 3.27: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 2$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	0.019	0.019	0.014	-0.034	-0.034	0.011	-0.049	-0.048	-0.046
	HC2	0.018	0.019	0.014	-0.033	-0.033	0.012	-0.047	-0.047	-0.045
	HC3	0.018	0.019	0.014	-0.033	-0.033	0.012	-0.046	-0.046	-0.044
	HC4	0.018	0.019	0.015	-0.033	-0.032	0.012	-0.046	-0.045	-0.044
Mediana	HC0	0.036	0.036	0.025	-0.041	-0.041	-0.029	-0.047	-0.047	-0.043
	HC2	0.035	0.035	0.024	-0.04	-0.04	-0.028	-0.045	-0.045	-0.043
	HC3	0.034	0.035	0.024	-0.038	-0.039	-0.027	-0.044	-0.044	-0.042
	HC4	0.035	0.035	0.024	-0.039	-0.039	-0.026	-0.044	-0.043	-0.041
Desvio— padrão	HC0	0.949	0.943	0.95	1.054	1.05	0.731	1.077	1.074	1.070
	HC2	0.928	0.928	0.931	1.026	1.026	0.709	1.047	1.047	1.045
	HC3	0.907	0.913	0.912	0.999	1.002	0.687	1.018	1.019	1.020
	HC4	0.913	0.914	0.91	0.999	0.988	0.667	1.016	1.001	1.003
Assimetria	HC0	-0.034	-0.032	-0.001	0.011	0.012	0.332	-0.015	-0.015	-0.013
	HC2	-0.034	-0.031	-0.001	0.012	0.012	0.339	-0.014	-0.015	-0.013
	HC3	-0.034	-0.031	0.000	0.012	0.012	0.345	-0.014	-0.014	-0.012
	HC4	-0.033	-0.03	0.003	0.012	0.011	0.357	-0.014	-0.014	-0.011
Curtose	HC0	2.525	2.525	2.484	3.243	3.245	3.339	3.177	3.176	3.169
	HC2	2.509	2.504	2.467	3.252	3.254	3.353	3.185	3.184	3.179
	HC3	2.493	2.483	2.45	3.261	3.264	3.368	3.194	3.194	3.189
	HC4	2.470	2.436	2.404	3.274	3.288	3.398	3.206	3.216	3.211

Tabela 3.28: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 4$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	0.032	0.033	0.030	-0.014	-0.014	0.070	-0.048	-0.048	-0.041
	HC2	0.031	0.031	0.030	-0.014	-0.014	0.068	-0.046	-0.046	-0.039
	HC3	0.03	0.03	0.029	-0.013	-0.013	0.066	-0.043	-0.043	-0.037
	HC4	0.028	0.029	0.03	-0.013	-0.013	0.061	-0.038	-0.038	-0.032
Mediana	HC0	0.034	0.034	0.036	-0.023	-0.023	-0.018	-0.048	-0.048	-0.048
	HC2	0.034	0.034	0.035	-0.021	-0.021	-0.016	-0.045	-0.045	-0.046
	HC3	0.033	0.033	0.035	-0.02	-0.02	-0.015	-0.042	-0.042	-0.043
	HC4	0.034	0.034	0.035	-0.019	-0.019	-0.013	-0.037	-0.037	-0.038
Desvio— padrão	HC0	0.903	0.900	0.901	1.123	1.12	0.716	1.22	1.215	1.208
	HC2	0.871	0.870	0.869	1.072	1.072	0.667	1.150	1.148	1.144
	HC3	0.838	0.839	0.836	1.022	1.024	0.619	1.082	1.083	1.081
	HC4	0.795	0.794	0.791	0.944	0.945	0.534	0.967	0.967	0.967
Assimetria	HC0	-0.006	-0.006	0.017	0.004	0.002	0.783	-0.029	-0.029	-0.015
	HC2	-0.009	-0.009	0.016	0.002	0.000	0.826	-0.032	-0.032	-0.017
	HC3	-0.013	-0.013	0.014	0.000	-0.002	0.869	-0.035	-0.035	-0.019
	HC4	-0.021	-0.02	0.010	-0.003	-0.007	0.970	-0.042	-0.041	-0.022
Curtose	HC0	2.325	2.317	2.301	3.367	3.365	4.320	3.204	3.197	3.194
	HC2	2.260	2.25	2.236	3.422	3.422	4.486	3.258	3.252	3.251
	HC3	2.195	2.182	2.171	3.486	3.489	4.663	3.320	3.316	3.317
	HC4	2.030	2.019	2.008	3.686	3.689	5.122	3.512	3.503	3.508

Tabela 3.29: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 0.5$ e $n = 100$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	-0.069	-0.069	-0.04	-0.062	-0.061	-0.01	-0.037	-0.037	-0.033
	HC2	-0.068	-0.068	-0.039	-0.061	-0.061	-0.01	-0.037	-0.037	-0.033
	HC3	-0.067	-0.068	-0.039	-0.06	-0.06	-0.009	-0.036	-0.036	-0.033
	HC4	-0.068	-0.068	-0.038	-0.06	-0.06	-0.009	-0.036	-0.036	-0.032
Mediana	HC0	-0.078	-0.077	-0.051	-0.067	-0.067	-0.033	-0.052	-0.052	-0.047
	HC2	-0.077	0.000	-0.050	-0.066	-0.066	-0.033	-0.052	-0.052	-0.046
	HC3	-0.076	-0.076	-0.050	-0.064	-0.065	-0.032	-0.051	-0.051	-0.046
	HC4	-0.077	-0.076	-0.05	-0.065	-0.064	-0.032	-0.051	-0.051	-0.045
Desvio— padrão	HC0	0.966	0.962	0.960	1.024	1.021	0.728	1.038	1.036	1.033
	HC2	0.953	0.954	0.949	1.008	1.008	0.716	1.021	1.021	1.02
	HC3	0.941	0.946	0.938	0.993	0.994	0.704	1.005	1.006	1.008
	HC4	0.947	0.95	0.939	0.996	0.990	0.697	1.007	1.000	1.003
Assimetria	HC0	0.027	0.025	0.037	-0.005	-0.005	0.202	0.005	0.005	0.011
	HC2	0.027	0.026	0.038	-0.005	-0.006	0.204	0.005	0.005	0.011
	HC3	0.027	0.026	0.039	-0.006	-0.006	0.206	0.005	0.005	0.011
	HC4	0.028	0.027	0.04	-0.006	-0.006	0.209	0.004	0.004	0.011
Curtose	HC0	2.674	2.676	2.626	3.068	3.065	3.100	3.116	3.115	3.134
	HC2	2.669	2.669	2.62	3.070	3.067	3.103	3.118	3.117	3.137
	HC3	2.664	2.661	2.614	3.073	3.070	3.106	3.121	3.12	3.14
	HC4	2.656	2.646	2.599	3.075	3.075	3.112	3.125	3.127	3.146

Tabela 3.30: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 2$ e $n = 100$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	0.014	0.014	0.011	-0.024	-0.024	0.009	-0.034	-0.034	-0.033
	HC2	0.014	0.014	0.011	-0.023	-0.023	0.009	-0.034	-0.034	-0.032
	HC3	0.013	0.013	0.011	-0.023	-0.023	0.009	-0.033	-0.033	-0.032
	HC4	0.013	0.014	0.011	-0.023	-0.023	0.009	-0.033	-0.033	-0.031
Mediana	HC0	0.009	0.009	0.003	-0.016	-0.015	-0.013	-0.041	-0.041	-0.038
	HC2	0.009	0.009	0.003	-0.015	-0.015	-0.013	-0.041	-0.041	-0.037
	HC3	0.009	0.009	0.003	-0.015	-0.015	-0.013	-0.04	-0.04	-0.037
	HC4	0.009	0.009	0.003	-0.015	-0.015	-0.013	-0.04	-0.039	-0.036
Desvio- padrão	HC0	0.973	0.969	0.975	1.021	1.019	0.714	1.044	1.042	1.04
	HC2	0.96	0.961	0.963	1.005	1.005	0.701	1.026	1.026	1.025
	HC3	0.948	0.953	0.952	0.989	0.99	0.688	1.009	1.01	1.011
	HC4	0.953	0.955	0.954	0.989	0.982	0.676	1.008	0.999	1.000
Assimetria	HC0	-0.008	-0.007	0.018	0.009	0.009	0.247	-0.001	-0.002	-0.002
	HC2	-0.008	-0.007	0.018	0.009	0.009	0.25	-0.001	-0.002	-0.002
	HC3	-0.009	-0.007	0.018	0.01	0.009	0.252	-0.001	-0.001	-0.002
	HC4	-0.009	-0.007	0.019	0.01	0.01	0.258	-0.001	-0.001	-0.002
Curtose	HC0	2.645	2.646	2.639	3.207	3.205	3.263	3.158	3.157	3.163
	HC2	2.638	2.637	2.631	3.211	3.21	3.268	3.162	3.161	3.168
	HC3	2.63	2.627	2.623	3.215	3.214	3.272	3.166	3.165	3.172
	HC4	2.619	2.605	2.601	3.22	3.224	3.283	3.171	3.175	3.183

Tabela 3.31: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_1 , com $k = 4$ e $n = 100$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_2}	R_{α_2}
Média	HC0	0.027	0.027	0.026	-0.010	-0.010	0.051	-0.035	-0.034	-0.030
	HC2	0.026	0.026	0.026	-0.010	-0.010	0.049	-0.033	-0.033	-0.029
	HC3	0.026	0.026	0.026	-0.010	-0.01	0.048	-0.032	-0.032	-0.028
	HC4	0.025	0.025	0.027	-0.009	-0.009	0.046	-0.03	-0.03	-0.026
Mediana	HC0	0.032	0.032	0.027	-0.007	-0.007	-0.011	-0.038	-0.038	-0.036
	HC2	0.032	0.032	0.027	-0.006	-0.006	-0.01	-0.037	-0.037	-0.035
	HC3	0.032	0.032	0.027	-0.006	-0.006	-0.01	-0.035	-0.035	-0.034
	HC4	0.032	0.032	0.027	-0.006	-0.006	-0.009	-0.032	-0.032	-0.031
Desvio— padrão	HC0	0.938	0.936	0.935	1.07	1.069	0.683	1.137	1.135	1.132
	HC2	0.921	0.921	0.919	1.04	1.04	0.655	1.096	1.095	1.093
	HC3	0.904	0.905	0.903	1.009	1.011	0.626	1.054	1.055	1.054
	HC4	0.89	0.89	0.887	0.962	0.963	0.575	0.984	0.983	0.984
Assimetria	HC0	-0.011	-0.01	0.011	0.014	0.014	0.575	0.004	0.004	0.013
	HC2	-0.011	-0.011	0.011	0.014	0.014	0.590	0.003	0.003	0.013
	HC3	-0.012	-0.012	0.012	0.013	0.013	0.604	0.002	0.003	0.012
	HC4	-0.014	-0.013	0.013	0.011	0.011	0.636	0.000	0.000	0.011
Curtose	HC0	2.481	2.476	2.463	3.272	3.27	3.835	3.271	3.263	3.272
	HC2	2.449	2.442	2.431	3.293	3.292	3.878	3.300	3.293	3.303
	HC3	2.416	2.408	2.397	3.317	3.317	3.922	3.331	3.326	3.336
	HC4	2.327	2.320	2.310	3.385	3.384	4.028	3.419	3.411	3.422

Tabela 3.32: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_2 , com $k = 0.5$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}
Média	HC0	-0.067	-0.067	-0.118	-0.047	-0.047	-0.073	0.029	0.029	0.035
	HC2	-0.065	-0.065	-0.116	-0.046	-0.046	-0.071	0.029	0.029	0.034
	HC3	-0.063	0.000	-0.115	-0.045	-0.045	-0.07	0.028	0.028	0.033
	HC4	-0.064	-0.063	-0.116	-0.045	-0.045	-0.07	0.028	0.028	0.032
Mediana	HC0	-0.073	-0.073	-0.131	-0.047	-0.047	-0.086	0.026	0.026	0.034
	HC2	-0.071	-0.072	-0.129	-0.046	-0.046	-0.085	0.026	0.026	0.032
	HC3	-0.07	-0.07	-0.127	-0.045	-0.045	-0.083	0.025	0.026	0.031
	HC4	-0.07	-0.07	-0.128	-0.045	-0.045	-0.083	0.026	0.026	0.031
Desvio- padrão	HC0	1.068	1.066	1.020	1.056	1.052	0.820	0.952	0.945	0.944
	HC2	1.040	1.040	1.006	1.029	1.029	0.806	0.93	0.93	0.919
	HC3	1.013	1.015	0.992	1.003	1.006	0.792	0.909	0.916	0.895
	HC4	1.017	1.004	1.002	1.008	0.999	0.795	0.917	0.92	0.881
Assimetria	HC0	-0.025	-0.025	-0.014	-0.036	-0.037	0.091	-0.012	-0.011	0.026
	HC2	-0.025	-0.025	-0.014	-0.035	-0.037	0.092	-0.012	-0.011	0.026
	HC3	-0.024	-0.025	-0.014	-0.035	-0.036	0.093	-0.013	-0.011	0.026
	HC4	-0.024	-0.024	-0.014	-0.035	-0.036	0.094	-0.013	-0.012	0.027
Curtose	HC0	3.118	3.115	3.023	3.128	3.128	3.063	2.561	2.565	2.377
	HC2	3.123	3.12	3.023	3.132	3.133	3.065	2.549	2.547	2.387
	HC3	3.128	3.126	3.024	3.137	3.138	3.067	2.537	2.529	2.398
	HC4	3.134	3.138	3.024	3.142	3.148	3.069	2.521	2.494	2.426

Tabela 3.33: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_2 , com $k = 2$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}
Média	HC0	-0.057	-0.057	-0.109	-0.061	-0.061	-0.097	-0.02	-0.02	-0.049
	HC2	-0.056	-0.056	-0.108	-0.059	-0.059	-0.096	-0.019	-0.02	-0.048
	HC3	-0.054	-0.054	-0.106	-0.057	-0.058	-0.094	-0.019	-0.019	-0.046
	HC4	-0.054	-0.053	-0.107	-0.057	-0.057	-0.095	-0.019	-0.019	-0.045
Mediana	HC0	-0.078	-0.077	-0.118	-0.065	-0.065	-0.103	-0.011	-0.011	-0.059
	HC2	-0.075	-0.075	-0.117	-0.064	-0.063	-0.101	-0.011	-0.011	-0.057
	HC3	-0.073	-0.073	-0.115	-0.062	-0.062	-0.100	-0.011	-0.011	-0.055
	HC4	-0.072	-0.071	-0.116	-0.062	-0.062	-0.101	-0.011	-0.011	-0.052
Desvio— padrão	HC0	1.087	1.084	1.018	1.060	1.056	0.867	0.939	0.933	0.687
	HC2	1.057	1.056	1.006	1.032	1.032	0.855	0.918	0.918	0.670
	HC3	1.027	1.028	0.993	1.004	1.007	0.843	0.897	0.903	0.654
	HC4	1.026	1.010	1.004	1.005	0.994	0.852	0.904	0.904	0.646
Assimetria	HC0	0.015	0.016	0.010	-0.018	-0.018	-0.003	-0.005	-0.006	-0.019
	HC2	0.015	0.016	0.01	-0.018	-0.018	-0.003	-0.005	-0.006	-0.02
	HC3	0.015	0.016	0.01	-0.018	-0.017	-0.004	-0.005	-0.006	-0.02
	HC4	0.014	0.016	0.01	-0.017	-0.016	-0.004	-0.004	-0.006	-0.022
Curtose	HC0	3.216	3.213	3.071	3.253	3.252	3.027	2.511	2.514	1.691
	HC2	3.225	3.221	3.071	3.260	3.259	3.028	2.496	2.495	1.700
	HC3	3.233	3.23	3.072	3.267	3.267	3.028	2.481	2.475	1.709
	HC4	3.245	3.252	3.072	3.276	3.285	3.028	2.459	2.431	1.736

Tabela 3.34: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro ξ_2 , com $k = 4$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{α_2}
Média	HC0	-0.039	-0.039	-0.112	-0.05	-0.05	-0.107	-0.026	-0.027	-0.037
	HC2	-0.037	-0.037	-0.11	-0.048	-0.048	-0.106	-0.025	-0.026	-0.034
	HC3	-0.034	-0.035	-0.109	-0.046	-0.046	-0.104	-0.024	-0.025	-0.032
	HC4	-0.03	-0.03	-0.11	-0.042	-0.042	-0.104	-0.023	-0.024	-0.027
Mediana	HC0	-0.055	-0.055	-0.12	-0.043	-0.043	-0.111	-0.025	-0.025	-0.017
	HC2	-0.051	-0.051	-0.119	-0.041	-0.041	-0.109	-0.025	-0.025	-0.016
	HC3	-0.047	-0.048	-0.117	-0.039	-0.039	-0.107	-0.025	-0.025	-0.014
	HC4	-0.041	-0.041	-0.118	-0.035	-0.035	-0.106	-0.025	-0.025	-0.012
Desvio— padrão	HC0	1.242	1.236	1.016	1.129	1.126	0.912	0.896	0.894	1.025
	HC2	1.171	1.169	1.004	1.078	1.079	0.896	0.864	0.864	0.969
	HC3	1.102	1.102	0.992	1.028	1.03	0.879	0.832	0.833	0.913
	HC4	0.986	0.985	1.003	0.951	0.952	0.871	0.790	0.790	0.817
Assimetria	HC0	-0.006	-0.007	0.013	-0.035	-0.035	-0.019	0.015	0.015	-0.031
	HC2	-0.007	-0.008	0.013	-0.036	-0.037	-0.021	0.017	0.017	-0.033
	HC3	-0.007	-0.008	0.013	-0.037	-0.038	-0.023	0.019	0.019	-0.035
	HC4	-0.008	-0.01	0.013	-0.041	-0.042	-0.028	0.024	0.024	-0.041
Curtose	HC0	3.236	3.216	3.065	3.409	3.409	3.039	2.306	2.302	2.033
	HC2	3.297	3.278	3.066	3.469	3.470	3.040	2.243	2.237	2.091
	HC3	3.366	3.348	3.066	3.537	3.541	3.041	2.181	2.172	2.155
	HC4	3.579	3.554	3.066	3.762	3.761	3.043	2.021	2.014	2.333

Tabela 3.35: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro α_2 , com $k = 0.5$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}
Média	HC0	-0.107	-0.099	-0.151	-0.087	-0.068	-0.129	-0.021	-0.004	-0.016
	HC2	-0.104	-0.097	-0.15	-0.084	-0.066	-0.127	-0.02	-0.004	-0.016
	HC3	-0.101	0	-0.148	-0.082	-0.065	-0.125	-0.02	-0.004	-0.015
	HC4	-0.101	-0.092	-0.15	-0.083	-0.065	-0.127	-0.02	-0.004	-0.015
Mediana	HC0	-0.094	-0.087	-0.153	-0.085	-0.059	-0.122	-0.023	-0.004	-0.017
	HC2	-0.092	-0.084	0.000	-0.083	-0.058	-0.12	-0.022	-0.004	-0.017
	HC3	-0.089	-0.081	-0.15	-0.081	-0.057	-0.119	-0.022	-0.004	-0.016
	HC4	-0.088	-0.079	-0.151	-0.081	-0.056	-0.12	-0.022	-0.004	-0.016
Desvio— padrão	HC0	1.080	1.081	1.007	1.058	1.047	1.012	1.017	1.005	1.028
	HC2	1.048	1.050	0.997	1.032	1.026	0.999	0.996	0.992	1.009
	HC3	1.017	1.019	0.987	1.005	1.006	0.986	0.976	0.98	0.991
	HC4	1.014	0.997	0.998	1.010	1.000	0.995	0.988	0.988	0.995
Assimetria	HC0	-0.045	-0.048	-0.008	-0.023	-0.032	-0.026	0.022	0.009	0.020
	HC2	-0.046	-0.049	-0.008	-0.023	-0.033	-0.026	0.022	0.009	0.020
	HC3	-0.047	-0.051	-0.008	-0.024	-0.033	-0.026	0.022	0.009	0.02
	HC4	-0.049	-0.053	-0.008	-0.024	-0.034	-0.026	0.022	0.009	0.019
Curtose	HC0	3.012	2.998	3.024	3.29	3.236	3.126	2.867	2.876	2.971
	HC2	3.019	3.008	3.023	3.296	3.242	3.126	2.86	2.865	2.973
	HC3	3.026	3.018	3.021	3.302	3.248	3.126	2.853	2.854	2.976
	HC4	3.037	3.040	3.021	3.308	3.260	3.126	2.841	2.832	2.979

Tabela 3.36: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro α_2 , com $k = 2$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}
Média	HC0	-0.090	-0.090	-0.135	-0.048	-0.051	-0.104	0.017	0.011	0.014
	HC2	-0.087	-0.087	-0.134	-0.047	-0.05	-0.103	0.016	0.011	0.014
	HC3	-0.084	-0.084	-0.133	-0.046	-0.049	-0.102	0.016	0.011	0.013
	HC4	-0.084	-0.082	-0.134	-0.046	-0.048	-0.103	0.016	0.011	0.014
Mediana	HC0	-0.086	-0.088	-0.142	-0.043	-0.046	-0.105	0.000	0.000	0.001
	HC2	-0.083	-0.085	-0.141	-0.042	-0.045	-0.104	0.000	0.000	0.001
	HC3	-0.08	-0.082	-0.139	-0.04	-0.044	-0.103	0.000	0.000	0.001
	HC4	-0.079	-0.079	-0.141	-0.04	-0.044	-0.104	0.000	0.000	0.001
Desvio— padrão	HC0	1.122	1.120	1.017	1.070	1.066	1.020	1.001	0.995	1.013
	HC2	1.086	1.085	1.007	1.042	1.042	1.009	0.98	0.982	0.997
	HC3	1.050	1.051	0.998	1.014	1.019	0.998	0.96	0.968	0.982
	HC4	1.041	1.018	1.010	1.015	1.006	1.008	0.971	0.975	0.990
Assimetria	HC0	-0.006	-0.006	-0.029	-0.007	-0.008	-0.016	0.009	0.004	0.009
	HC2	-0.006	-0.007	-0.028	-0.007	-0.009	-0.016	0.008	0.004	0.008
	HC3	-0.006	-0.007	-0.028	-0.008	-0.01	-0.016	0.008	0.004	0.008
	HC4	-0.007	-0.009	-0.028	-0.009	-0.012	-0.016	0.008	0.004	0.008
Curtose	HC0	3.036	3.022	3.056	3.225	3.242	3.103	2.768	2.784	2.840
	HC2	3.049	3.038	3.055	3.233	3.250	3.103	2.758	2.771	2.841
	HC3	3.063	3.054	3.054	3.242	3.259	3.103	2.748	2.758	2.843
	HC4	3.083	3.092	3.054	3.253	3.281	3.103	2.732	2.726	2.844

Tabela 3.37: Medidas descritivas das estatísticas de teste τ , para o parâmetro α_2 , com $k = 4$ e $n = 60$.

	ω	10^{-4}			1			10^4		
	Estimador	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}	Completo	R_{ξ_1}	R_{ξ_2}
Média	HC0	-0.085	-0.082	-0.127	-0.028	-0.029	-0.105	0.026	0.02	0.022
	HC2	-0.079	-0.076	-0.126	-0.026	-0.028	-0.104	0.025	0.02	0.021
	HC3	-0.073	-0.07	-0.124	-0.025	-0.026	-0.103	0.024	0.019	0.021
	HC4	-0.063	-0.06	-0.126	-0.023	-0.024	-0.103	0.023	0.018	0.02
Mediana	HC0	-0.077	-0.078	-0.121	-0.027	-0.027	-0.099	0.029	0.022	0.029
	HC2	-0.07	-0.071	-0.12	-0.026	-0.026	-0.097	0.029	0.021	0.028
	HC3	-0.064	-0.065	-0.118	-0.024	-0.024	-0.096	0.028	0.021	0.028
	HC4	-0.054	-0.055	-0.12	-0.022	-0.022	-0.097	0.029	0.021	0.027
Desvio— padrão	HC0	1.322	1.326	1.012	1.133	1.133	1.012	0.930	0.932	1.005
	HC2	1.226	1.228	1.001	1.082	1.084	1.000	0.901	0.905	0.985
	HC3	1.135	1.134	0.990	1.031	1.035	0.987	0.871	0.877	0.964
	HC4	0.974	0.969	1.001	0.953	0.955	0.992	0.837	0.842	0.947
Assimetria	HC0	-0.020	-0.006	0.006	0.004	0.006	0.014	-0.016	-0.016	-0.001
	HC2	-0.023	-0.008	0.006	0.004	0.007	0.014	-0.018	-0.018	0.000
	HC3	-0.026	-0.011	0.006	0.005	0.007	0.013	-0.02	-0.02	0.000
	HC4	-0.032	-0.016	0.006	0.005	0.008	0.013	-0.024	-0.024	0.002
Curtose	HC0	2.985	2.878	3.065	3.376	3.385	3.052	2.441	2.439	2.774
	HC2	3.032	2.920	3.065	3.429	3.437	3.051	2.381	2.378	2.78
	HC3	3.083	2.964	3.065	3.491	3.498	3.051	2.320	2.315	2.788
	HC4	3.224	3.080	3.064	3.688	3.686	3.050	2.158	2.156	2.814

Nas tabelas 3.23 a 3.31 apresentamos as medidas descritivas das estatísticas de teste τ para os tamanhos de amostra $n = 40, 60$ e 100 , correspondentes ao parâmetro ξ_1 , que é o componente sob o eixo x das coordenadas do centro do círculo, com diferentes graus de heteroscedasticidade, i.e., heteroscedasticidade “baixa” ($\omega = 10^{-4}$), e heteroscedasticidade “alta” ($\omega = 10^4$), os quais estão relacionados com as componentes x e y para cada um dos pontos ($\omega > 1$ implica maior variabilidade na componente x , $\omega < 1$ implica maior variabilidade na componente y , o caso de homoscedasticidade correspondendo a $\omega = 1$), além dos parâmetros de concentração da distribuição von Mises, que são usados para a geração dos dados, sendo estes $k = 0.5, 2$ e 4 (para mais detalhes sobre k , ver tabela 3.1).

Observa-se que as médias para heteroscedasticidade baixa têm maior variabilidade comparado aos de heteroscedasticidade alta quando $k = 0.5$, este fato pode-se observar através dos diferentes tamanhos de amostra, como por exemplo para $n = 40$ (tabela 3.23) o caso do estimador HC0, que através dos diferentes modelos com $\omega = 10^{-4}$ as médias estão entre -0.095 e -0.044 e para o caso em que $\omega = 10^4$ as médias estão entre -0.061 e -0.052 , nos dois casos obtidas pelos modelos completo e R_{α_2} respectivamente; para o caso de tamanho de amostra 60 (tabela 3.26) quando $\omega = 10^{-4}$ as médias ao se usar o estimador HC0 estão entre -0.085 e -0.041 e no caso em que $\omega = 10^4$ as médias estão entre -0.050 e -0.045 , nestas duas situações são os obtidos pelos modelos completo e R_{α_2} ; para o tamanho de amostra 100 (tabela 3.29) as médias estão entre -0.069 e -0.040 quando $\omega = 10^{-4}$ e de -0.037 a -0.033 para $\omega = 10^4$, as duas situações com os modelos completo e R_{α_2} .

No caso em que os dados estão mais dispersos ($k = 0.5$), as médias das estatísticas para cada modelo são menores do que zero, ao igual nos casos em que $k = 2$ e 4 , para

$\omega = 10^4$, além disso, quando $\omega = 1$ com os modelos completo e R_{ξ_2} . À medida que aumenta o valor de k , as médias se aproximam a zero. A mediana tem o mesmo comportamento que a média. O desvio-padrão no caso em que $\omega = 10^{-4}$ e $\omega = 1$ para o modelo R_{α_2} é menor do que um; observa-se que à medida que aumenta o parâmetro de concentração, a variabilidade diminui para cada um dos estimadores em cada modelo. Nos casos em que $\omega = 1$ e 10^4 , estes valores são maiores do que um com algumas exceções, como, por exemplo, sob homoscedasticidade para os modelos R_{ξ_2} e R_{α_2} utilizando o estimador HC4.

A assimetria é quase sempre menor do que zero, em especial nos casos de heteroscedasticidade. Além, esta medida muda de comportamento quando variamos o tamanho da amostra, passando de negativa a positiva, como ocorre no caso dos modelos completo e R_{ξ_2} , quando $k = 0.5$ e $\omega = 1$ ao se aumentar tamanho de amostra de 40 para 60.

A curtose é menor do que três sob heteroscedasticidade baixa e sob heteroscedasticidade alta é maior do que três; no caso de heteroscedasticidade baixa, estes valores diminuem à medida que o parâmetro de concentração aumenta; para o caso homoscedasticidade estes valores aumentam à medida que k aumenta. Quando o tamanho de amostra aumenta, observa-se que a média, mediana e assimetria vão para zero e a curtose tende para três

Agora, apresentamos as medidas descritivas das estatísticas de teste τ para os parâmetros ξ_2 e α_2 no caso em que o tamanho da amostra é 60, estes valores são mostrados nas tabelas 3.32 a 3.37, os outros casos (tamanhos de amostra 40 e 100), tem comportamento similar às apresentadas para o parâmetro ξ_1 .

No caso das estatísticas de teste para o parâmetro ξ_2 (tabelas 3.32 a 3.34), os valores são mais “estáveis” quando há heteroscedasticidade baixa comparados aos de heteroscedas-

tidade alta. Observa-se que as médias são quase sempre menores do que zero, exceto no caso em que $\omega = 10^4$ com $k = 0.5$. As medianas têm o mesmo comportamento. Os desvios-padrão para os casos em que $\omega = 10^{-4}$ e 1 são maiores do que um; quando $\omega = 10^4$ eles são menores do que um. O sinal da assimetria muda através dos diferentes valores de k ; observa-se que esta medida é negativa para os modelos completo e R_{ξ_1} no caso de homoscedasticidade. As curtoses são maiores do que três no caso em que $\omega = 10^{-4}$ e 1 e são menores do que três no caso em que $\omega = 10^4$.

Para as estatísticas de teste para o parâmetro α_2 (tabelas 3.35 a 3.37) com tamanho de amostra 60, observa-se que as médias para os casos em que $\omega = 10^{-4}$ e 1 são menores do que zero para os diferentes valores de k ; para o caso em que $\omega = 10^4$ as médias são menores do que zero quando $k = 0.5$ e, para $k = 2$ e 4, são maiores do que zero. As medianas têm comportamento similar. Os desvios-padrão são menores do que um quando $\omega = 10^4$ e maiores do que um nos outros casos ($\omega = 10^{-4}$ e 1), exceto para o estimador HC4 nos modelos restritos com $\omega = 10^{-4}$ e $k = 0.5$. As assimetrias são menores do que zero para os modelos completo e R_{ξ_1} , quando $\omega = 10^{-4}$; para os outros casos elas variam através dos diferentes valores de k . As curtoses, no caso em que $\omega = 10^4$, são menores do que três e maiores do que três quando $\omega = 10^{-4}$ e 1.

Em geral, a estatística de teste baseada no estimador HC4 em quase todos os casos apresenta desvio-padrão mais perto de 1, tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade. Observamos que todas as estatísticas de teste (baseadas nos HC's) apresentam média, mediana, desvio-padrão, assimetria e curtose convergindo para as respectivas medidas da distribuição assintótica normal padrão à medida que o tamanho amostral aumenta.

CAPÍTULO 4

Conclusões

Os desempenhos dos diferentes HC's estão mais relacionados com o nível de heteroscedasticidade do que com o valor do parâmetro de concentração da distribuição von Mises. Por exemplo, no caso de ω pequeno existe mais precisão no eixo x do que no eixo y . Então, para o teste $H_0 : \xi_1 = 0$, as taxas de rejeição são muito pequenas, já que ξ_1 é uma quantidade ligada ao eixo dos x 's, a escolha do estimador HC's não tendo muita importância. Por outro lado, ω grande sob heteroscedasticidade “alta”, espera-se imprecisão no eixo dos x 's, o que significa que o uso de HC's alternativos tem maior impacto. Para o teste de ξ_2 , a situação se inverte, pois ξ_2 é uma quantidade relacionada ao eixo y . Para o teste de α_2 , ocorre algo análogo ao que ocorre com ξ_2 , porque α_2 é uma quantidade relacionada ao eixo y ($\alpha_2 = \rho \sin(\theta_0)$).

Recomenda-se de forma geral, como estimador da matriz de variâncias e covariâncias do estimador do vetor de parâmetros o estimador HC4 no casos em que os parâmetros tenham maior imprecisão, i.e., para o parâmetro ξ_1 no caso em que $\omega = 1, 10^2$ ou 10^4 e para o parâmetros ξ_2 e α_2 nos casos em que $\omega = 10^{-4}, 10^{-2}$ ou 1; para os parâmetros nos casos dos outros ω 's recomenda-se o estimador HC0.

No que se refere às distribuições empíricas das estatísticas de teste baseadas nos diferentes estimadores consistentes da matriz de variâncias e covariâncias, foi mostrado que a estatística baseada em HC4 apresentou (para as situações estudadas) na maioria dos casos o desvio-padrão mais perto de um, especialmente nos casos em que $\omega \neq 1$.

Referências Bibliográficas

- Anderson, D. (1981), The Circular Structural Model, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **43**, 131–141.
- Berman, M. (1983), Estimating the Parameters of a Circle when Angular Differences are Known, *Applied Statistics* **32**, 1–6.
- Berman, M. & Culpin, D. (1986), The Statistical Behavior of Some Least Squares Estimators of the Center and Radius of a Circle, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**, 183–196.
- Berman, M. & Somlo, P. (1986), Efficient Procedures for Fitting Circles and Ellipses with Application to Sliding Termination Measurements, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **35**, 31–35.

- Chan, N. (1965), On Circular Functional Relationships, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **27**, 45–56.
- Chang, T. (1993), Spherical regression and the statistics of tectonic plate reconstruction, *International Statistical Review* **61**, 299–316.
- Chapman, G. R., Chen, G. & Kim, P. T. (1995), Assessing Geometric Integrity Through Spherical Regression Techniques, *Statist. Sinica* **5**, 173–220.
- Chester, A. & Jewitt, I. (1987), The Bias of a Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator, *Econometrica* **55**, 1217–1222.
- Cribari-Neto, F. (2004), Asymptotic Inference under Heteroskedasticity of Unknown Form, *Computational Statistics and Data Analysis* **45**, 215–233.
- Cribari-Neto, F. & Zarkos, S. G. (1999), Bootstrap Methods for Heteroskedastic Regression Models: Evidence on Estimation and Testing, *Econometric Reviews* **18**, 211–228.
- Cribari-Neto, F. & Zarkos, S. G. (2001), Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimation: White’s Estimator and the Bootstrap, *Journal of Statistical Computation and Simulation* **68**, 391–411.
- Davidson, R. & MacKinnon, J. G. (1985), Heteroskedasticity-Robust Tests in Regression Directions, *Ann. de l’INSEE* **59**, 183–218.
- Davidson, R. & MacKinnon, J. G. (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press, New York.

- Doornik, J. A. (2001), *Ox: An Object-oriented Matrix Programming Language*, 4th ed., Londres, Londres: Timberlake Consultants e Oxford: <http://www.doornik.com> .
- Fisher, N. (1993), *Statistical Analysis of Circular Data*, University Press, Cambridge.
- Fisher, N. I. & Lee, A. (1992), Regression Models for Angular Response, *Biometrics* **48**, 665–677.
- Godfrey, L. G. (2005), Tests for Regression Models with Heteroskedasticity of Unknown Form, *Computational Statistics and Data Analysis*, *In press*.
- Gould, A. L. (1969), A regression technique for angular variates, *Biometrics* **25**, 683–700.
- Greene, W. (1997), *Econometric Analysis*, 4th ed., Macmillan, New York.
- Harville, D. A. (1997), *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer, New York.
- Hinkley, D. V. (1977), Jackknifing in Unbalanced Situations, *Techometrics* **19**, 285–292.
- Hoaglin, D. & Welsch, R. (1978), The Hat Matrix in Regression and ANOVA, *Journal of the American Statistical Association* **32**, 17–22.
- Hogg, R. V. & Craig, A. T. (1995), *Introduction to Mathematical Statistics*, 5th ed., Macmillan, New York.
- Horn, S., Horn, R. & Duncan, D. (1975), Estimating Heteroskedastic Variances in Linear Models, *Journal of the American Statistical Association* **70**, 380–385.
- Jammalamadaka, S. R. & SenGupta, A. (2001), *Topics in Circular Statistics*, World Scientific, New York.

- Jeffreys, H. (1948), *Theory of Probability*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford.
- Johnson, J. L. & Wehrly, T. (1978), Some Angular-linear Distributions and Related Regression Models, *Journal of the American Statistical Association* **73**, 602–606.
- Judge, G., Griffiths, W., Hill, R. C., Lütkepohl, H. & Lee, T. (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, 2nd ed., Wiley, New York.
- Jupp, P. E. (1987), A Non-parametric Correlation Coefficient and Two-sample Test for Random Vectors or Directions, *Biometrika* **74**, 887–890.
- Jupp, P. E. & Spurr, B. D. (1989), Statistical Estimation of a Shock Centre: Slate Islands Astrobleme, *Mathematical Geology* **21**, 191–198.
- Kanatani, K. (1993), *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford, Clarendon Press.
- Kasa, I. (1976), A Circle Fitting Procedure and its Error Analysis, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **25**, 8–14.
- Laycock, P. J. (1975), Optimal Design: Regression Models for Directions, *Biometrika* **62**, 305–311.
- Lenth, R. V. (1981), On Finding the Source of a Signal, *Technometrics* **23**, 149–154.
- Long, J. S. & Ervin, L. H. (2000), Using Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors in the Linear Regression Model, *The American Statistician* **54**, 217–224.
- Mackenzie, J. K. (1957), The Estimation of an Orientation Relationship, *Acta. Crystallog.* **10**, 61–62.

- MacKinnon, J. G. & White, H. (1985), Some Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimators with Improved Finite Sample Properties, *Journal of Econometrics* **29**, 305–25.
- Mardia, K. V. (1976), Linear-circular Correlation Coefficients and Rhythmometry, *Biometrika* **63**, 403–405.
- Mardia, K. V. & Jupp, P. (2000), *Directional Statistics*, 2nd ed., John Wiley and Sons, London.
- Rao, C. R. (1973), *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed., John Wiley and Sons, London.
- Somlo, P. & Hunter, J. D. (1982), A six-port Reflectometer and its Complete Characterization by Convenient Calibration Procedures, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **30**, 186–192.
- Wahba, G. (1966), Section on Problems and Solutions: A Least Squares Estimate of Satellite Attitude, *SIAM Rev.* **8**, 384–385.
- White, H. (1980), A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, *Econometrica* **48**, 817–838.
- Wu, H. (1997), Optimal Exact Designs on a Circle or a Circular Arc, *Annals of Statistics* **25**, 2027–2043.
- Yin, S. & Wang, S. (2004), Estimating the Parameters of a Circle by Heteroscedastic Regression Models, *Journal of Statistical Planning and Inference* **124**, 439–451.