



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

GISELE JOANA RAMOS DOS SANTOS

**DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS PARA  
ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR DE LAJES DE CONCRETO ARMADO  
VIA ANALOGIA DE GRELHA**

Recife  
2025

GISELE JOANA RAMOS DOS SANTOS

**DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS PARA  
ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR DE LAJES DE CONCRETO ARMADO  
VIA ANALOGIA DE GRELHA**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Universidade Federal de  
Pernambuco, como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Bacharel em  
Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Jordlly Reidson de Barros Silva

Recife

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Santos, Gisele Joana Ramos dos .

Desenvolvimento de ferramentas computacionais para Análise Linear e Não-Linear de lajes de concreto armado via Analogia de Grelha / Gisele Joana Ramos dos Santos. - Recife, 2025.

85 p. : il., tab.

Orientador(a): Jordlly Reydson de Barros Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Engenharia Civil - Bacharelado, 2025.

Inclui referências.

1. Analogia de Grelha. 2. Não-linearidade física. 3. Lajes de concreto armado. 4. Análise estrutural. 5. Modelagem computacional. I. Silva, Jordlly Reydson de Barros . (Orientação). II. Título.

620 CDD (22.ed.)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ATA DA DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO PARA CONCESSÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL**

**CANDIDATO:** GISELE JOANA RAMOS DOS SANTOS

**BANCA EXAMINADORA:**

**Orientador:** PROF. DR. JORDLLY REYDSON DE BARROS SILVA

**Examinador 1:** PROF. DR. BERNARDO HOROWITZ

**Examinador 2:** PROF. DR. PAULO MARCELO VIEIRA RIBEIRO

**TÍTULO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO:** DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR DE LAJES DE CONCRETO ARMADO VIA ANALOGIA DE GRELHA.

**LOCAL:** Recife

**DATA:** 02 / 05 / 2025 **HORÁRIO DE INÍCIO:** 13h00min.

Em sessão pública, após exposição de cerca de 30 minutos, o candidato foi arguido oralmente pelos membros da banca com **NOTA: 9,5**.

**1) (X) aprovado (nota  $\geq 7,0$ ),** pois foi demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema da monografia e o texto do trabalho aceito.

As revisões observadas pela banca examinadora deverão ser corrigidas e verificadas pelo orientador no prazo máximo de 30 dias (o verso da folha da ata poderá ser utilizado para pontuar revisões).

O trabalho com nota no seguinte intervalo, **3,0 = < nota < 7,0**, será reapresentado, gerando-se uma nota ata; sendo o trabalho aprovado na reapresentação, o aluno será considerado **aprovado com exame final**.

**2) ( ) reprovado. (nota <3,0)**

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da banca e pelo candidato.

Recife, 02 de maio de 2025

Orientador:  **JORDLLY REYDSON DE BARROS SILVA**  
Data: 02/05/2025 14:33:43-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Avaliador 1:  **BERNARDO HOROWITZ**  
Data: 02/05/2025 17:01:57-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Avaliador 2:  **PAULO MARCELO VIEIRA RIBEIRO**  
Data: 02/05/2025 15:18:18-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Candidato:  **GISELE JOANA RAMOS DOS SANTOS**  
Data: 05/05/2025 07:43:36-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, com todo o meu carinho, à minha família, em especial aos meus pais, Janaina e Evandro Santos, por todo apoio, incentivo e por sempre acreditarem na educação como caminho para a transformação.

Ao meu orientador, professor Dr. Jordlly Reydson de Barros Silva, registro minha sincera gratidão pela orientação dedicada, pelo incentivo constante, pela paciência e generosa disponibilidade. Suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amados companheiros de quatro patas, que me ofereceram afeto, conforto e apoio emocional nos momentos em que mais precisei.

Aos meus amigos, agradeço o apoio, companheirismo e encorajamento contínuo, especialmente nos momentos mais desafiadores da jornada.

À Universidade e a todos os professores que contribuíram para a minha formação, deixo meu reconhecimento pelos valiosos ensinamentos.

E, por fim — mas não menos importante — agradeço a todos os supervisores que fizeram parte da minha trajetória profissional, pelas orientações e aprendizados que tanto contribuíram para o meu crescimento.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de duas ferramentas computacionais — GLG (General Linear Grid) e GNG (General Nonlinear Grid) — para a análise estrutural de lajes de concreto armado, utilizando a analogia de grelha, uma prática consolidada na engenharia estrutural. O GLG realiza análises lineares, enquanto o GNG, derivado do primeiro, incorpora a não-linearidade física dos materiais por meio dos diagramas constitutivos, da curvatura média e do giro axial médio. Para a resolução dos sistemas, adotou-se o método de Picard e uma estratégia de controle de carga. As rotinas foram implementadas em Python e validadas com exemplos da literatura, com os esforços internos e deslocamentos visualizados através do Paraview. O GLG apresentou precisão satisfatória, enquanto o GNG, embora não tenha se mostrado adequado na abordagem implementada, configura-se como uma ferramenta de código aberto, flexível e bem estruturada, que possibilita a incorporação de novas estratégias. Conclui-se que essas rotinas representam um ponto de partida promissor, e espera-se que, com futuros aprimoramentos, se consolidem como recursos relevantes para a análise estrutural e o dimensionamento de lajes de concreto armado.

Palavras-chave: Analogia de Grelha; Não-linearidade física; Lajes de concreto armado; Análise estrutural; Modelagem computacional.

## **ABSTRACT**

This work presents the development of two computational tools — GLG (General Linear Grid) and GNG (General Nonlinear Grid) — for the structural analysis of reinforced concrete slabs using the grid analogy, a well-established approach in structural engineering. GLG performs linear analyses, while GNG, derived from it, incorporates the physical nonlinearity of materials through constitutive diagrams, mean curvature, and mean axial rotation. To solve the systems, the Picard method and a load control strategy were adopted. The routines were implemented in Python and validated with examples from the literature, with internal forces and displacements visualized using Paraview. GLG showed satisfactory accuracy, while GNG, although not adequate under the implemented approach, stands as an open-source, flexible, and well-structured tool that enables the incorporation of new strategies. It is concluded that these routines represent a promising starting point, and it is expected that, with future improvements, they will become valuable resources for the structural analysis and design of reinforced concrete slabs.

Keywords: Grid Analogy; Physical nonlinearity; Reinforced concrete slabs; Structural analysis; Computational modeling.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra prismática isolada sem articulação	18
Figura 2 - Coeficientes de rigidez à torção de uma barra isolada	19
Figura 3 – Exemplo genérico de grelha	20
Figura 4 – Demonstração do processo de montagem da Matriz de Rigidez	20
Figura 5 – Elemento de grelha arbitrariamente orientado no plano x-y	22
Figura 6 – Reações de engastamento de barras prismáticas	23
Figura 7 – Sentido positivo dos esforços pelo Método da Rigidez	26
Figura 8 – Sentido positivo dos esforços pela Resistência dos Materiais	26
Figura 9 – Grelha Equivalente	27
Figura 10 – Momentos	32
Figura 11 – Diagramas constitutivos para o concreto armado.	36
Figura 12 – Matriz conec	43
Figura 13 – Matriz coord	44
Figura 14 – Matriz Tipo_elemento	44
Figura 15 – Módulos de Elasticidade	44
Figura 16 – Matriz Inércia	44
Figura 17 – Variáveis geométricas	45
Figura 18 – Matriz Descr_lajes	45
Figura 19 – Matriz Descr_vigas	45
Figura 20 – Vetores de definição das condições de contorno	46
Figura 21 – Variáveis auxiliares	46
Figura 22 – Vetor A	46
Figura 23 – Matriz de ações externas:	46
Figura 24 – Fluxograma do processo de definição da matriz de rigidez e do vetor de cargas	48
Figura 25 – Fluxograma do processo de cálculo dos esforços	49
Figura 26 – Fluxograma do processo de cálculo dos momentos	50
Figura 27 – Fluxograma dos procedimentos gerais do GLG	51
Figura 28 – NumIncr, Tol e Índice do nó desejado	53
Figura 29 – Diagrama Momento-Curvatura	53
Figura 30 – Diagrama Torção-Giro Axial e Divisor de Inércia	54
Figura 31 – Fluxograma do processo iterativo de cálculo da rigidez e dos deslocamentos	55
Figura 32 – Fluxograma dos procedimentos gerais do GNG	56
Figura 33 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Logan (2007) – Exemplo 1.1	58
Figura 34 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Soriano e Lima (2006) – Exemplo 1.2	59
Figura 35 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Soriano e Lima (2006) – Exemplo 1.3	60
Figura 36 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Barroso (2013) – Exemplo 1.4	61
Figura 37 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Barroso (2013) – Exemplo 1.5	62
Figura 38 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.6	63
Figura 39 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.7	64

<i>Figura 40 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.8</i>	65
<i>Figura 41 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.9</i>	66
<i>Figura 42 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.10</i>	67
<i>Figura 43– Comparação entre os resultados do GLG e os de Cass (2015) – Exemplo 1.11</i>	68
<i>Figura 44– Comparação entre os resultados do GLG e os de Cass (2015) – Exemplo 1.12</i>	69
<i>Figura 45– Comparação entre os resultados do GLG e os de Silva et al. (2003) – Exemplo 1.13</i>	70
<i>Figura 46– Comparação entre os resultados do GLG e os de Silva et al. (2003) – Exemplo 1.14</i>	71
<i>Figura 47– Barra engastada com carga concentrada</i>	73
<i>Figura 48– Diagrama Momento-Curvatura (Teste 1)</i>	74
<i>Figura 49– Trajetória Carga x Deslocamento (Teste 1)</i>	74
<i>Figura 50– Resultados gerados pelo GNG no Paraview</i>	75
<i>Figura 51– Diagrama Momento-Curvatura (Teste 2)</i>	76
<i>Figura 52– Trajetória Carga x Deslocamento (Teste 2)</i>	76
<i>Figura 53– Diagrama Momento-Curvatura (Teste 3)</i>	77
<i>Figura 54– Aviso de Extrapolação (Teste 3)</i>	78
<i>Figura 55– Diagrama Momento máximo Interpolado x Número de barras (Teste 4)</i>	79

## LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1 – Funções do GLG</i> .....	47
<i>Tabela 2 – Funções do GNG</i> .....	54
<i>Tabela 3 – Comparação dos resultados do Teste 1</i> .....	75

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1. OBJETIVOS .....	14
1.1.1. <i>Objetivo Geral</i> .....	14
1.1.2. <i>Objetivos Especificos</i> .....	14
1.2. JUSTIFICATIVAS.....	15
<b>2. REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>16</b>
2.1. LAJES .....	16
2.2. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS: MÉTODO DA RIGIDEZ .....	17
2.2.1. <i>Matriz de Rigidez</i> .....	18
2.2.2. <i>Vetor de Cargas</i> .....	22
2.2.3. <i>Aplicação das condições de contorno</i> .....	24
2.2.4. <i>Deslocamentos</i> .....	24
2.2.5. <i>Esforços internos</i> .....	25
2.3. ANALOGIA DE GRELHA COM ANÁLISE LINEAR .....	27
2.3.1. <i>Definição da malha da grelha equivalente</i> .....	28
2.3.2. <i>Características geométricas e elásticas dos elementos</i> .....	28
2.3.3. <i>Determinação do carregamento nos elementos</i> .....	30
2.3.4. <i>Simulação das Condições de apoio</i> .....	31
2.3.5. <i>Determinação dos momentos</i> .....	31
2.4. ANALOGIA DE GRELHA COM ANÁLISE NÃO-LINEAR .....	34
2.4.1. <i>Não-Linearidade Física</i> .....	35
2.4.2. <i>Diagramas Constitutivos do Material</i> .....	35
2.4.3. <i>Formulações</i> .....	37
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>42</b>
3.1. DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE LINEAR .....	42
3.1.1. <i>Instalações, Importações e Bibliotecas</i> .....	43
3.1.2. <i>Dados de Entrada</i> .....	43
3.1.3. <i>Funções</i> .....	47
3.1.4. <i>Processamento</i> .....	47
3.1.5. <i>Pós-processamento</i> .....	48
3.1.6. <i>Fluxograma do código</i> .....	51
3.2. DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR .....	52
3.2.1. <i>Instalações, Importações e Bibliotecas</i> .....	52
3.2.2. <i>Dados de Entrada</i> .....	52
3.2.3. <i>Funções</i> .....	54
3.2.4. <i>Processamento</i> .....	54
3.2.5. <i>Pós-processamento</i> .....	56

3.2.6.	<i>Fluxograma do código</i> .....	56
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	<b>57</b>
4.1.	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE LINEAR.....	57
4.1.1.	<i>Exemplo 1.1 do GLG</i> .....	58
4.1.2.	<i>Exemplo 1.2 do GLG</i> .....	59
4.1.3.	<i>Exemplo 1.3 do GLG</i> .....	60
4.1.4.	<i>Exemplo 1.4 do GLG</i> .....	61
4.1.5.	<i>Exemplo 1.5 do GLG</i> .....	62
4.1.6.	<i>Exemplo 1.6 do GLG</i> .....	63
4.1.7.	<i>Exemplo 1.7 do GLG</i> .....	64
4.1.8.	<i>Exemplo 1.8 do GLG</i> .....	65
4.1.9.	<i>Exemplo 1.9 do GLG</i> .....	66
4.1.10.	<i>Exemplo 1.10 do GLG</i> .....	67
4.1.11.	<i>Exemplo 1.11 do GLG</i> .....	68
4.1.12.	<i>Exemplo 1.12 do GLG</i> .....	69
4.1.13.	<i>Exemplo 1.13 do GLG</i> .....	70
4.1.14.	<i>Exemplo 1.14 do GLG</i> .....	71
4.2.	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR.....	73
<b>5.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>80</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>82</b>

## 1. INTRODUÇÃO

As lajes, também chamadas de placas, são elementos estruturais planos e bidimensionais cuja espessura é consideravelmente menor em relação ao comprimento e à largura. Sua principal função é suportar e distribuir as cargas aplicadas, como o peso de pessoas, móveis, máquinas, veículos, entre outras, geralmente perpendiculares ao seu plano (BASTOS, 2023). Amplamente utilizadas em edificações como pisos e tetos, as lajes também desempenham um papel essencial em estruturas como pavimentos rodoviários, pontes e reservatórios. Assim, seu dimensionamento e execução adequados são fundamentais para garantir a segurança, eficiência e durabilidade das construções.

No âmbito da teoria da elasticidade, foram desenvolvidos diversos métodos para prever o comportamento das lajes. Esses métodos variam desde abordagens que utilizam tabelas e consideram as lajes como elementos isolados, até técnicas mais sofisticadas, que consideram a interação das lajes com os demais componentes estruturais (DUARTE, 1998). Dentre os métodos integrados, destaca-se a Analogia de Grelha, tradicional na Análise Matricial de Estruturas. Com formulação simples e eficiente, é amplamente adotada em softwares de dimensionamento de concreto armado (COELHO, 2000), permitindo representar a laje por um modelo simplificado, capaz de abranger diversas geometrias e condições de contorno.

Modelos simplificados, como a Analogia de grelha, desempenham um papel essencial na engenharia estrutural, pois tornam possível representar sistemas reais complexos por meio de idealizações que preservam os aspectos essenciais do comportamento da estrutura. No contexto deste trabalho, a utilização desse método — que transforma uma laje contínua em um sistema de barras — viabiliza uma análise eficiente, segura e com menor custo computacional. Como destaca Greco *et al.* (2022), a definição de um esquema estrutural que seja ao mesmo tempo simples e confiável é uma tarefa relevante. Tais idealizações não apenas tornam o problema tratável com os recursos disponíveis, mas também mantêm a fidelidade necessária para atender às exigências de segurança e desempenho normativo.

Outro ponto relevante refere-se à definição do regime de análise — linear ou não-linear — a ser adotado. De forma geral, a análise linear é amplamente adotada devido à sua simplicidade, rapidez de processamento e eficiência computacional, sendo adequada para muitas situações práticas, especialmente quando se pode

garantir, pelo Teorema do Limite Inferior, que, se existir um campo de tensões de equilíbrio capaz de abranger todo o corpo, equilibrar as cargas aplicadas nas superfícies de contorno e satisfazer, em todos os pontos, o critério de resistência do material, então a estrutura não colapsará (CHEN; LIU, 1990).

Entretanto, embora bastante difundida, a análise linear apresenta limitações significativas, já que o concreto armado, na prática, não se comporta de forma estritamente linear, sendo afetado por fenômenos como fissuração, fluência e escoamento das armaduras — aspectos que caracterizam a não-linearidade física (PINTO, 1997). Diante disso, a análise não-linear surge como alternativa mais realista, permitindo avaliar o comportamento estrutural sob grandes deformações e tornando os projetos mais compatíveis com as condições reais de uso. No entanto, sua aplicação exige maior conhecimento técnico, uso de modelos constitutivos mais avançados, dados materiais detalhados e maior esforço computacional. Ademais, os resultados são altamente sensíveis à definição dos parâmetros adotados.

Portanto, a análise linear permanece adequada para situações rotineiras e de menor complexidade, enquanto a não-linear é fundamental quando se exige maior rigor técnico e uma representação mais precisa do comportamento estrutural. A consolidação dessas abordagens, aliado ao desenvolvimento tecnológico, resultou em softwares que otimizam os cálculos. Todavia, a falta de conhecimento técnico e a ignorância sobre os pressupostos e limites dos modelos podem comprometer a segurança das estruturas ao aplicar essas ferramentas. Por isso, é fundamental utilizá-las de forma consciente, reconhecendo que são ferramentas de apoio, e não substitutas do conhecimento técnico. Nesse contexto, o desenvolvimento de soluções computacionais baseadas em princípios claros e transparentes contribui para análises mais seguras e alinhadas às particularidades de cada projeto.

Diante desse cenário, este trabalho propõe o desenvolvimento das ferramentas GLG (General Linear Grid) e GNG (General Nonlinear Grid), destinadas, respectivamente, à análise linear e não-linear de lajes em estruturas de concreto armado, tendo a Analogia de Grelha como metodologia base. O objetivo é oferecer recursos que apoiem o processo analítico, independentemente do regime adotado, promovendo maior clareza nas diretrizes, bem como maior controle sobre os resultados, garantindo a precisão necessária.

## 1.1. OBJETIVOS

### 1.1.1. Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo principal desenvolver ferramentas computacionais para análise linear e não-linear de lajes em construções de concreto armado via analogia de grelha.

### 1.1.2. Objetivos Específicos

Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- a) Realizar uma revisão bibliográfica de métodos computacionais para análise de grelhas elásticas-lineares;
- b) Desenvolver uma rotina em Python de código aberto, executada no ambiente Google Colaboratory, para a análise linear de lajes de concreto armado com base na Analogia de Grelha, contemplando o cálculo de deslocamentos e esforços internos, além da exportação dos resultados em formato VTU para pós-processamento no software ParaView;
- c) Realizar uma revisão bibliográfica dos fundamentos da não-linearidade física do concreto armado;
- d) Aplicar os fundamentos estudados para aprimorar o código desenvolvido em uma ferramenta para análise não-linear;
- e) Validar as soluções desenvolvidas por meio de análise comparativa com dados referenciais da literatura, visando avaliar o desempenho das ferramentas propostas.

## 1.2. JUSTIFICATIVAS

O uso do Método da Grelha Equivalente, amplamente empregado no Brasil, se apresenta como uma vantagem, sendo reconhecido por sua simplicidade, facilidade de interpretação e eficácia na obtenção de resultados confiáveis (STRAMANDINOLI, 2003). Portanto, a implementação dessa metodologia no GLG e no GNG oferece uma solução acessível, alinhada à crescente demanda por métodos de análise abrangentes e eficientes.

Ademais, o desenvolvimento de uma ferramenta institucional gratuita, flexível e com precisão aceitável, capaz de incorporar a não-linearidade física ao processo de cálculo, representa uma contribuição para o ensino e a pesquisa na área de análise estrutural. Ao disponibilizar um sistema de cálculo simples e baseado em rotinas de análise matricial, ela se configura como uma alternativa viável frente aos custos de licenciamento de softwares comerciais, que, mesmo em suas versões estudantis, frequentemente impõem restrições.

Dessa forma, o desenvolvimento dessas ferramentas não só amplia as possibilidades de investigação e aprimoramento, mas também contribui significativamente para o desenvolvimento acadêmico e profissional, ao mesmo tempo em que se estabelece como um instrumento para a análise e dimensionamento de lajes.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1. LAJES

O estudo bibliográfico sobre o comportamento das lajes fundamenta-se nos materiais de Araújo (2023) e Bastos (2023), que analisam de forma abrangente as propriedades estruturais dessas estruturas e seus critérios de classificação. As lajes são caracterizadas como superfícies bidimensionais de espessura relativamente reduzida em comparação às demais dimensões, sendo predominantemente solicitadas por cargas aplicadas perpendicularmente ao seu plano médio.

Dependendo da solução adotada, as lajes podem ser executadas em concreto armado ou protendido, além de apresentarem diferentes configurações geométricas. As lajes maciças, com espessura uniforme, são indicadas para vãos pequenos, enquanto as lajes nervuradas, ao incorporarem espaços vazios entre as nervuras, reduzem o peso próprio da estrutura, sendo mais adequadas para vãos maiores. Outras tipologias incluem as lajes cogumelo, que se apoiam diretamente sobre pilares com capitéis, e as lajes lisas, também apoiadas diretamente sobre pilares, porém sem capitéis. Este estudo, entretanto, tem como foco a análise das lajes maciças.

A classificação das lajes maciças pode considerar lajes armadas em uma ou duas direções, conforme a relação entre seus lados. Além disso, a interação entre a laje e seus apoios é um fator determinante para seu comportamento estrutural. Segundo Bastos (2023), os vínculos estruturais podem ser classificados como apoio simples, engaste perfeito e engaste elástico, sendo este último uma condição intermediária, que permite certa flexibilidade na transmissão de esforços. Compreender o comportamento das lajes é fundamental para uma modelagem e dimensionamento adequados.

## 2.2. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS: MÉTODO DA RIGIDEZ

Em seus estudos, Cavalcanti (2006) e Martha (2010) abordam a aplicação do cálculo matricial na análise estrutural. Tal abordagem, amplamente difundida na engenharia, viabiliza a resolução eficiente de sistemas estruturais por meio de métodos numéricos computacionais, com base em modelos teóricos. A análise matricial automatiza o processamento das equações, reduz o tempo de cálculo e melhora a precisão dos resultados.

A essência dos métodos de análise estrutural está na conversão de um modelo contínuo em uma representação discreta, o que permite sua resolução numérica. Nesse contexto, destaca-se o método dos deslocamentos, cuja adaptação computacional deu origem ao método da rigidez direta (WHITE; GERGELY; SEXSMITH, 1976). Embora ambos se fundamentem nos mesmos princípios de equilíbrio, diferem na forma de construção das matrizes. Com isso, a formulação em álgebra matricial não apenas generaliza as equações para diferentes tipos estruturais, como também viabiliza o processamento eficiente de grandes volumes de dados.

Antes de abordar essa metodologia, é fundamental compreender alguns conceitos essenciais:

- Teoria da Elasticidade (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980): Fundamenta a maioria das análises estruturais ao estudar a relação entre as forças aplicadas e as deformações em corpos elásticos. Em sua forma linear, considera hipóteses como continuidade e isotropia para avaliar tensões, deslocamentos e deformações;
- Estruturas Reticuladas: Compostas por elementos lineares interconectados, concentram o comportamento do meio sólido nos eixos desses elementos. Abrangem diversas tipologias estruturais, como as grelhas;
- Endereçamento de nós e barras: Fundamenta-se na identificação numérica dos elementos. Os nós são posicionados por coordenadas e as barras, definidas pela conectividade entre seus nós inicial e final;
- Deslocamento e deformações associadas: Conforme Martha (2010), as deformações derivam dos deslocamentos e variam conforme a configuração da estrutura. Há uma correlação direta entre as forças aplicadas e os deslocamentos resultantes;

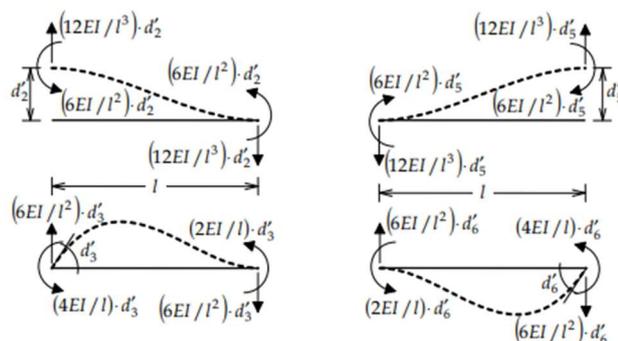
- Carregamentos: As ações aplicadas causam deslocamentos locais e globais. Podem ser estáticas ou dinâmicas, concentradas ou distribuídas, conforme a velocidade e o modo de aplicação, respectivamente;
- Princípio da superposição dos efeitos: Válido para sistemas elásticos com deslocamentos suficientemente pequenos, permite analisar ações separadamente e somar os efeitos para obter o resultado total;
- Equilíbrio e compatibilidade: Uma estrutura encontra-se em equilíbrio quando as forças e os momentos aplicados se compensam entre si. Já a compatibilidade garante que os deslocamentos obtidos estejam de acordo com as condições impostas ao sistema;
- Indeterminação cinemática: Relaciona-se aos graus de liberdade da estrutura. Assim, os deslocamentos desconhecidos determinam o número de incógnitas e a complexidade da análise.

Com a compreensão desses conceitos, procede-se à implementação do método da rigidez direta.

### 2.2.1. Matriz de Rigidez

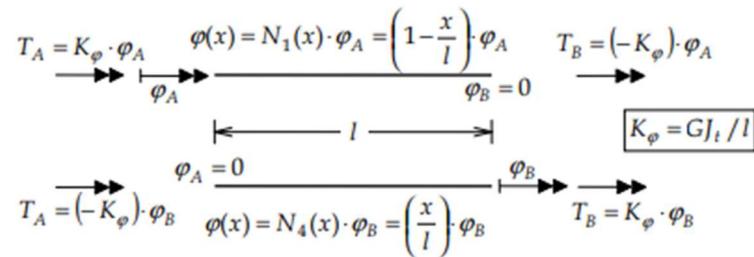
A matriz global de rigidez de uma estrutura pode ser construída por meio da superposição de casos básicos, utilizando coeficientes de rigidez previamente definidos para tipos específicos de estruturas, como ilustrado nas Figura 1 e Figura 2. Esses coeficientes são combinados para calcular os valores necessários em diferentes cenários.

Figura 1 - Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra prismática isolada sem articulação



Fonte: MARTHA (2010)

Figura 2 - Coeficientes de rigidez à torção de uma barra isolada



Fonte: MARTHA (2010)

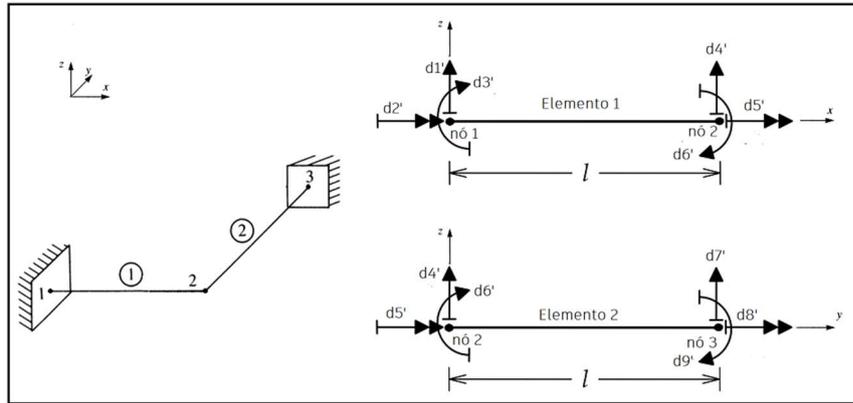
A matriz global de rigidez resulta da soma das contribuições de cada barra, onde cada coeficiente afeta exclusivamente os termos correspondentes aos nós de início e fim da barra. O processo de alocação dessas contribuições na matriz global é realizado por meio de espalhamento assistido por um vetor denominado  $gl$ , que define os índices das deslocabilidades dos nós, conforme a Equação (1):

$$gl = [ 3 * no1, 3 * no1 + 1, 3 * no1 + 2, 3 * no2, 3 * no2 + 1, 3 * no2 + 2 ] \quad (1)$$

Onde  $no1$  e  $no2$  são os índices dos nós dos elementos.

Cada barra é associada a um sistema de coordenadas local, o que facilita a construção de suas matrizes de rigidez elementares. Os coeficientes de rigidez são atribuídos aos graus de liberdade correspondentes e inseridos na matriz global por meio do processo de montagem, no qual as contribuições das barras são distribuídas e somadas nos nós compartilhados. As Figura 3 e Figura 4 ilustram esse processo em uma grelha com dois elementos e três nós, sendo consideradas nove deslocabilidades nodais ( $d1'$  a  $d9'$ ), referentes a três graus de liberdade por nó: uma translação perpendicular ao plano da grelha e duas rotações ortogonais no plano, correspondentes aos eixos  $x$  e  $y$ .

Figura 3 – Exemplo genérico de grelha



Fonte: A AUTORA (2024)

Figura 4 – Demonstração do processo de montagem da Matriz de Rigidez

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L \\ M & N & O & P & Q & R \\ S & T & U & V & W & X \\ Y & Z & AA & AB & AC & AD \\ AE & AF & AG & AH & AI & AJ \end{bmatrix} \\
 & + \\
 & \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} AK & AL & AM & AN & AO & AP \\ AQ & AR & AS & AT & AU & AV \\ AW & AX & AY & AZ & BA & BB \\ BC & BD & BE & BF & BG & BH \\ BI & BJ & BK & BL & BM & BN \\ BO & BP & BQ & BR & BS & BT \end{bmatrix} \\
 & = \\
 & \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F & 0 & 0 & 0 \\ G & H & I & J & K & L & 0 & 0 & 0 \\ M & N & O & P & Q & R & 0 & 0 & 0 \\ S & T & U & V + AK & W + AL & X + AM & AN & AO & AP \\ Y & Z & AA & AB + AQ & AC + AR & AD + AS & AT & AU & AV \\ AE & AF & AG & AH + AW & AI + AX & AJ + AY & AZ & BA & BB \\ 0 & 0 & 0 & BC & BD & BE & BF & BG & BH \\ 0 & 0 & 0 & BI & BJ & BK & BL & BM & BN \\ 0 & 0 & 0 & BO & BP & BQ & BR & BS & BT \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

Fonte: A AUTORA (2024)

Para incorporar a contribuição de uma barra, os coeficientes de rigidez definidos inicialmente no sistema local devem ser transformados para o sistema global, por meio da matriz de transformação  $[T]$ . A matriz de rigidez do elemento  $[ke]$ , em coordenadas locais, pode ser convertida para as coordenadas globais através das Equações (2) a (4), assegurando a compatibilidade interna da estrutura.

$$Ke = \begin{bmatrix} \frac{12*E*I}{L^3} & 0 & \frac{-6*E*I}{L^2} & \frac{-12*E*I}{L^3} & 0 & \frac{-6*E*I}{L^2} \\ 0 & \frac{G*J}{L} & 0 & 0 & -\frac{G*J}{L} & 0 \\ \frac{-6*E*I}{L^2} & 0 & \frac{4*E*I}{L} & \frac{6*E*I}{L^2} & 0 & \frac{2*E*I}{L} \\ \frac{-12*E*I}{L^3} & 0 & \frac{6*E*I}{L^2} & \frac{12*E*I}{L^3} & 0 & \frac{6*E*I}{L^2} \\ 0 & -\frac{G*J}{L} & 0 & 0 & \frac{G*J}{L} & 0 \\ \frac{-6*E*I}{L^2} & 0 & \frac{2*E*I}{L} & \frac{6*E*I}{L^2} & 0 & \frac{4*E*I}{L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[Ke]_{global} = [T]^T [Ke]_{local}[T] \quad (4)$$

Tal que,  $[T]^T$  é a transposta da matriz de Transformação.

Essa formulação pode ser aplicada a qualquer barra, independentemente da seção, apoio ou inclinação, o que viabiliza sua implementação padronizada em códigos computacionais. Seus coeficientes dependem de parâmetros como o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e transversal ( $G$ ), os momentos de inércia à flexão ( $I$ ) e à torção ( $J$ ), além do comprimento ( $L$ ) e da orientação do elemento. As propriedades elásticas e os momentos de inércia serão abordados posteriormente, já o comprimento e a inclinação das barras ( $\theta$ ) podem ser determinados a partir das coordenadas nodais, conforme as Equações (5) a (7):

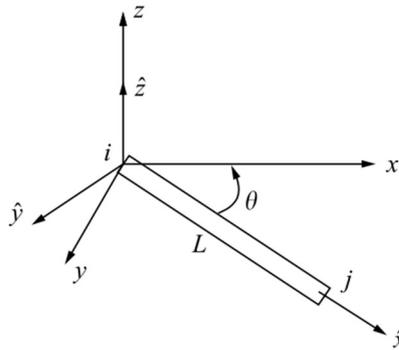
$$L = \sqrt{((x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2)} \quad (5)$$

$$\cos \theta = \frac{(x_2 - x_1)}{L} \quad (6)$$

$$\sin \theta = \frac{(y_2 - y_1)}{L} \quad (7)$$

Onde  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  são as coordenadas dos nós do elemento no plano x-y, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Elemento de grelha arbitrariamente orientado no plano x-y



Fonte: Adaptado do LOGAN (2007)

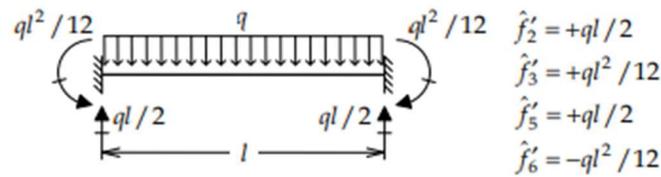
Com todos os procedimentos descritos, a matriz global de rigidez é definida, sem considerar as restrições de apoio, as quais são incorporadas em uma etapa posterior da solução.

### 2.2.2. Vetor de Cargas

No modelo discretizado, as solicitações nos elementos podem ser convertidas em cargas nodais equivalentes, que refletem os efeitos dos carregamentos internos das barras. Essas cargas são organizadas no vetor de ações externas do elemento  $\{Fel\}$ , enquanto as cargas aplicadas diretamente nos nós compõem o vetor  $\{A\}$ .

Para a implementação computacional,  $\{Fel\}$  é obtido a partir das reações de engastamento de barras isoladas, uma solução fundamental no método dos deslocamentos. Nesse caso, assume-se uma barra de seção transversal constante, submetida a carregamentos externos e com extremidades rigidamente fixas (Martha, 2010). A Figura 6 apresenta as expressões dessas reações e a Equação (8) define o vetor  $\{Fel\}$  a partir delas.

Figura 6 – Reações de engastamento de barras prismáticas



Fonte: MARTHA (2010)

$$Fel = \left[ \frac{q*L}{2}, 0, \frac{-q*L^2}{12}, \frac{q*L}{2}, 0, \frac{q*L^2}{12} \right] \quad (8)$$

Onde  $q$  representa a carga uniformemente distribuída ao longo do elemento.

Inicialmente expressas no sistema local, essas reações são convertidas para o sistema global ( $\{Fe_{aux}\}$ ) por meio da matriz de Transformação  $[T]$ , conforme a Equação (9):

$$\{Fe_{aux}\} = [T]^T \{Fel\} \quad (9)$$

O vetor transformado é então incorporado ao vetor global de ações  $\{Ap\}$  por meio do processo de espalhamento, semelhante ao utilizado na montagem da matriz de rigidez. A soma de  $\{Ap\}$  com o vetor  $\{A\}$  resulta no vetor global de cargas  $\{FG_{gl}\}$ , tal como expresso na Equação (10), que representa o efeito discretizado das solicitações externas nos nós. Destaca-se que as ações externas possuem sentido oposto às reações de engastamento, o que justifica o sinal negativo.

$$\{FG_{gl}\} = \{A\} - \{Ap\} \quad (10)$$

Vale destacar que as componentes das cargas nodais combinadas em direções restringidas pelos apoios podem ser ignoradas, pois não geram esforços internos, sendo, portanto, absorvidas.

### 2.2.3. Aplicação das condições de contorno

Os graus de liberdade restringidos na estrutura são definidos a partir das condições de contorno aplicadas a cada nó. Para isso, utiliza-se o vetor  $\{elim\}$ , que especifica os graus de liberdade bloqueados, adotando a mesma lógica empregada na construção de  $\{gl\}$ . A imposição dessas restrições ocorre por meio da modificação da matriz de rigidez global  $[KG]$  e do vetor de cargas  $\{FG_{gl}\}$ , assegurando a solução do sistema de equações. A ausência dessa consideração tornaria o problema indeterminado.

Martha (2010) apresenta três métodos para esse ajuste: (i) particionamento do sistema de equações, (ii) diagonalização das linhas e colunas associadas aos graus de liberdade restringidos e (iii) inserção de um apoio elástico fictício com coeficiente de rigidez elevado. Neste caso, emprega-se o método da diagonalização, que consiste em anular as linhas e colunas da matriz de rigidez correspondentes aos graus de liberdade bloqueados, atribuindo o valor 1 aos elementos da diagonal principal. Simultaneamente, as linhas equivalentes do vetor de cargas são zeradas.

### 2.2.4. Deslocamentos

Para calcular os deslocamentos — tanto translacionais quanto rotacionais — nos nós da grelha, emprega-se a Equação (11) abaixo, que descreve o equilíbrio de todos os nós da estrutura, incluindo aqueles restritos por apoio, em relação aos graus de liberdade. A solução dessa equação fornece os deslocamentos necessários para equilibrar as cargas aplicadas, levando em consideração a rigidez da estrutura.

$$[KG]\{desl\} = \{FG_{gl}\} \quad (11)$$

Onde  $\{desl\}$  representa o vetor das incógnitas a serem determinadas, correspondendo aos deslocamentos dos nós da grelha nas direções dos eixos globais.

### 2.2.5. Esforços internos

Após determinar os deslocamentos desconhecidos, é possível calcular os esforços internos nas extremidades das barras. Embora os deslocamentos estejam inicialmente no sistema global, a ortogonalidade da matriz de transformação por rotação permite convertê-los para o sistema local, facilitando a obtenção dos esforços internos.

De acordo com Martha (2010), além dos esforços causados pelas deformações, deve-se considerar a superposição das reações de engastamento. Portanto, o cálculo dos esforços requer tanto o vetor  $\{desl\}$ , convertido para o sistema local ( $\{desl_{local}\}$ ), quanto o vetor de ações externas do elemento  $\{Fel\}$ , previamente mencionado. Dessa maneira, a obtenção dos esforços internos  $\{esf\}$  possui um caráter generalizado e se dá tal como estabelecido nas Equações (12) e (13):

$$\{desl_{local}\} = [T] \cdot \{desl_{elemento}\} \quad (12)$$

$$\{esf\} = [ke] \cdot \{desl_{local}\} + \{Fel\} \quad (13)$$

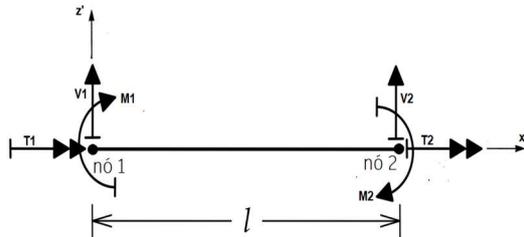
Tal que  $\{desl_{elemento}\}$  representa o vetor de deslocabilidades nodais do elemento no sistema de coordenadas global.

Os esforços internos nas extremidades das barras são determinados conforme as direções dos respectivos eixos locais, cuja orientação depende da ordem de definição dos nós da barra. Esse fator deve ser considerado para a correta interpretação dos valores obtidos no algoritmo. Os resultados englobam a força cortante, vinculada ao deslocamento na direção Z, o momento fletor, associado à rotação em Y, e o momento de torção, correspondente à rotação em X.

Para a elaboração dos diagramas de esforços internos, é fundamental converter os valores obtidos do código para a convenção normalmente adotada. Embora, inicialmente, tenha sido utilizada a convenção de sinais do Método da Rigidez, a análise estrutural e o dimensionamento costumam seguir a da Resistência dos Materiais, por ser mais intuitiva para essa aplicação. As Figura 7 e Figura 8 ilustram os sentidos positivos dos esforços em cada abordagem. Vale ressaltar que, para a convenção da Resistência dos Materiais, foi considerado que o sinal da torção

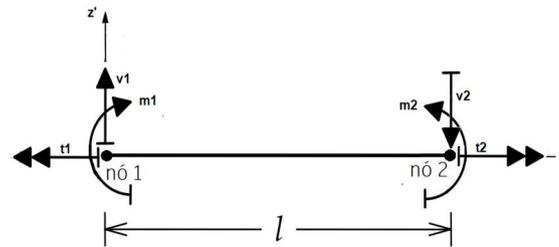
obedece à mesma lógica dos esforços normais, onde a tração é positiva e a compressão negativa.

Figura 7 – Sentido positivo dos esforços pelo Método da Rigidez



Fonte: A AUTORA (2024)

Figura 8 – Sentido positivo dos esforços pela Resistência dos Materiais



Fonte: A AUTORA (2024)

As diferenças entre essas convenções, segundo as Equações (14) a (19), possibilitam a conversão dos sinais, conforme o padrão da Resistência dos Materiais.

$$V_1 = v_1 \quad (14)$$

$$T_1 = -t_1 \quad (15)$$

$$M_1 = m_1 \quad (16)$$

$$V_2 = -v_2 \quad (17)$$

$$T_2 = t_2 \quad (18)$$

$$M_2 = -m_2 \quad (19)$$

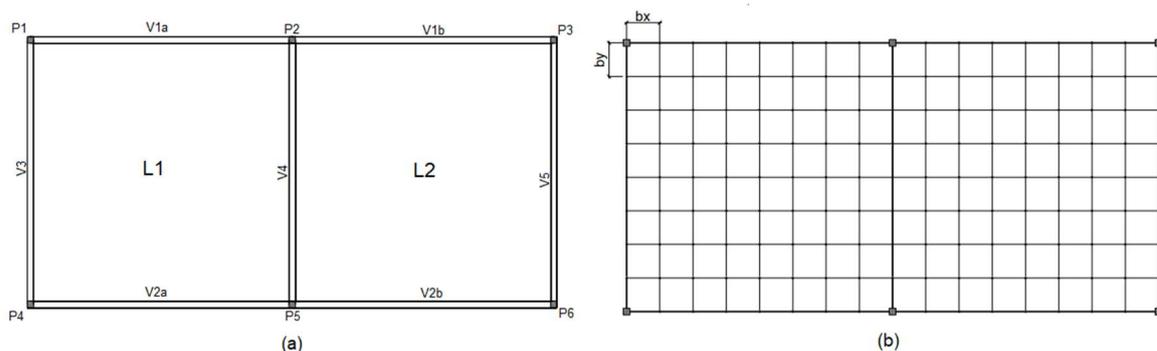
Onde  $V_1, V_2, v_1, v_2$  representam os esforços cortantes,  $T_1, T_2, t_1, t_2$  são os momentos torsores e  $M_1, M_2, m_1, m_2$  corresponde os momentos fletores, em cada nó e sistema, respectivamente.

### 2.3. ANALOGIA DE GRELHA COM ANÁLISE LINEAR

A analogia de grelha constitui um dos métodos numéricos mais relevantes para a análise estrutural integrada. Entre seus principais benefícios, destacam-se a capacidade de considerar a rotação entre lajes adjacentes, tratar vigas como elementos verticalmente deformáveis e representar de forma mais realista a interação entre lajes e vigas. Esse método proporciona um equilíbrio eficiente entre simplicidade e precisão na estimativa de esforços e deslocamentos, sendo aplicável a uma ampla variedade de configurações, incluindo lajes com aberturas, contornos irregulares e outras particularidades geométricas.

Segundo Coelho (2020), o método baseia-se na subdivisão da laje em diversas faixas de largura definida, assumindo-se que cada faixa possa ser representada por elementos de barra localizados em seus eixos centrais. Dessa maneira, forma-se uma malha, composta por vigas independentes conectadas entre si por meio de nós, conforme ilustrado na Figura 9. Essa malha concentra as rigidezes nos elementos da grelha, de modo que os valores estimados de deformações e esforços internos reproduzam, com boa precisão, os resultados esperados para a estrutura original em cada seção correspondente (CARVALHO,1994).

Figura 9 – Grelha Equivalente



Fonte: A AUTORA (2024)

A precisão da análise depende diretamente de uma modelagem criteriosa. Assim, esta seção abordará os principais aspectos que influenciam a definição da grelha, a saber: o espaçamento da discretização, as propriedades geométricas e elásticas dos elementos, as condições de contorno, os carregamentos aplicados, além do processo de cálculo dos momentos.

### **2.3.1. Definição da malha da grelha equivalente**

A definição da discretização das lajes exerce forte influência sobre a precisão dos resultados, conforme destacado na literatura. O posicionamento dos elementos da grelha depende do tipo de laje: em lajes maciças, não há critérios fixos para quantidade e localização dos elementos, sendo definidos pela malha adotada; já em lajes nervuradas, os elementos devem se alinhar aos eixos das nervuras, de modo que cada barra represente uma seção T, composta pela nervura e pela mesa (STRAMANDINOLI, 2003).

Quanto à faixa de discretização, algumas diretrizes são recomendadas, como: a distância entre os elementos não deve exceder  $\frac{1}{4}$  do vão da laje; espaçamentos menores devem ser adotados em regiões onde se deseja analisar efeitos localizados; entre outras orientações (HAMBLY, 1991). Além disso, a malha deve ser adequada à geometria da laje. Por exemplo, em lajes com grande diferença entre dimensões, espaçamentos iguais em ambas as direções podem gerar malhas grosseiras, comprometendo a qualidade dos resultados. Por outro lado, malhas muito refinadas aumentam o custo computacional. Assim, é necessário um equilíbrio entre precisão e eficiência.

A discretização também pode ser empregada de forma estratégica para representar forças concentradas ou distribuídas que atuam apenas em parte do comprimento da barra. No contexto do método da rigidez direta, essa abordagem é válida e não compromete os resultados, uma vez que o comportamento estrutural das barras é adequadamente descrito por seus parâmetros nodais, dispensando novas aproximações além das já adotadas na modelagem (MARTHA, 2010).

### **2.3.2. Características geométricas e elásticas dos elementos**

Para a análise linear, as características elásticas do material foram consideradas invariáveis com o tempo e o carregamento. Os esforços são proporcionais às rigidezes, logo, elas afetam bastante nos resultados obtidos e por isso devem ser determinadas adequadamente.

Em relação às características geométricas e elásticas das barras, é necessário considerar os elementos placa e viga-placa. As respectivas rigidezes desses

elementos correspondem à rigidez à flexão ( $E_{CS}I$ ) e à rigidez à torção ( $GJ$ ). O parâmetro  $E_{CS}I$  é determinado pelo produto entre o módulo de elasticidade longitudinal secante ( $E_{CS}$ ) e o momento de inércia à flexão ( $I$ ). Já o parâmetro  $GJ$  é composto pelo módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) e pelo momento de inércia à torção da seção transversal ( $J$ ).

O módulo de elasticidade longitudinal secante foi determinado conforme as expressões apresentadas no item 8.2.8 da norma NBR 6118:2023. O módulo de elasticidade transversal, por sua vez, é obtido a partir da Equação (20):

$$G = \frac{E_{CS}}{2*(1+\nu)} \quad (20)$$

Tal que o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) é adotado como 0.2, conforme estabelecido no item 8.2.9 da NBR 6118:2023.

Quanto as contribuições geométricas, desconsiderando-se a armadura, o momento de inércia à flexão dos elementos de laje ( $I_{laje}$ ) é calculado, tal como a Equação (21), a partir da espessura da laje ( $h_{laje}$ ) e da sua faixa de discretização (*faixa*), que corresponde à soma de metade dos espaçamentos entre os elementos vizinhos. Já a rigidez à torção ( $J_{laje}$ ), no regime linear, é assumida como o dobro da rigidez à flexão, conforme Hambly (1991) e demonstrado na Equação (22).

$$I_{laje} = \frac{faixa * h_{laje}^3}{12} \quad (21)$$

$$J_{laje} = 2 * I_{laje} \quad (22)$$

Para os elementos do tipo viga-placa, nos casos em que a grelha é composta apenas por vigas ou quando se opta por desconsiderar a largura colaborante, assume-se uma seção retangular. O momento de inércia à flexão, neste caso, é calculado através da Equação (23):

$$I_{viga} = \frac{b * h_{viga}^3}{12} \quad (23)$$

Por outro lado, na modelagem da interação entre lajes e vigas, a largura colaborante da laje pode ser considerada, resultando em seções transversais do tipo "T" ou "L". Essa consideração aumenta a precisão da análise estrutural, representando de forma mais realista os esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos, conforme o item 14.6.2.2 da NBR 6118:2023. O código implementado calcula essa largura de acordo com as recomendações da norma ou com base na malha discretizada.

Quanto à rigidez à torção, no regime linear, desconsidera-se a contribuição da laje adjacente, sendo o momento de inércia torcional calculado pela Equação (24):

$$J_{viga} = \frac{h*b^3}{3*divisor\_inércia\_torcao} \quad (24)$$

Onde o *divisor\_inércia\_torcao* é um fator ajustável pelo usuário para reduzir a rigidez teórica das vigas, segundo as diretrizes do item 14.6.6.2 da NBR 6118:2023.

### 2.3.3. Determinação do carregamento nos elementos

Para a distribuição dos carregamentos, priorizou-se a aplicação de cargas concentradas nos nós, equivalentes à carga distribuída na laje, evitando esforços localizados irreais. A conversão da carga distribuída na área da laje para cargas concentradas está expressa na Equação (25):

$$Carga_{concentrada} = (g + q) * (faixa_x * faixa_y) \quad (25)$$

Onde  $g$  e  $q$  correspondem, respectivamente, às cargas permanente e acidental distribuídas na laje, enquanto  $faixa_x$  e  $faixa_y$  representam as faixas de discretização da laje nos eixos  $x$  e  $y$ .

No entanto, diversos exemplos na literatura adotam cargas distribuídas linearmente nos elementos de barra. Para garantir a consistência da análise e viabilizar comparações, essa abordagem também foi empregada sempre que necessário. A conversão da carga distribuída na área da laje para uma carga linear nos elementos estruturais segue a Equação (26):

$$Carga_{linear} = \frac{(g+q)*(faixa_x* faixa_y)}{(faixa_x+ faixa_y)} \quad (26)$$

Com essa carga linear, determina-se o vetor de ações externas, considerando as reações de engastamento perfeito nos nós das barras isoladas, conforme detalhado no Item 2.2.2. No caso das cargas concentradas nos nós, elas são incorporadas diretamente ao vetor de ações  $\{A\}$ .

Vale ressaltar que a distribuição das cargas pode variar em função da malha adotada. Em particular, barras e nós localizados nas extremidades podem apresentar valores distintos dos centrais, pois a carga atribuída depende diretamente da área de influência correspondente.

#### **2.3.4. Simulação das Condições de apoio**

Com base nas condições de contorno idealizadas, foram simuladas as restrições às deslocabilidades, conforme detalhado a seguir:

- Apoio engastado: Todas as deslocabilidades são bloqueadas;
- Apoio simplesmente apoiado: Restringe-se a translação na direção Z e a rotação em torno do eixo perpendicular ao bordo;
- Bordos livres: Permitem deslocamentos translacionais e rotacionais, uma vez que não há restrição imposta.

Adicionalmente, nos apoios sobre pilares, restringiu-se apenas a translação vertical. Dessa forma, esses elementos não foram modelados diretamente, sendo representados por apoios indeformáveis.

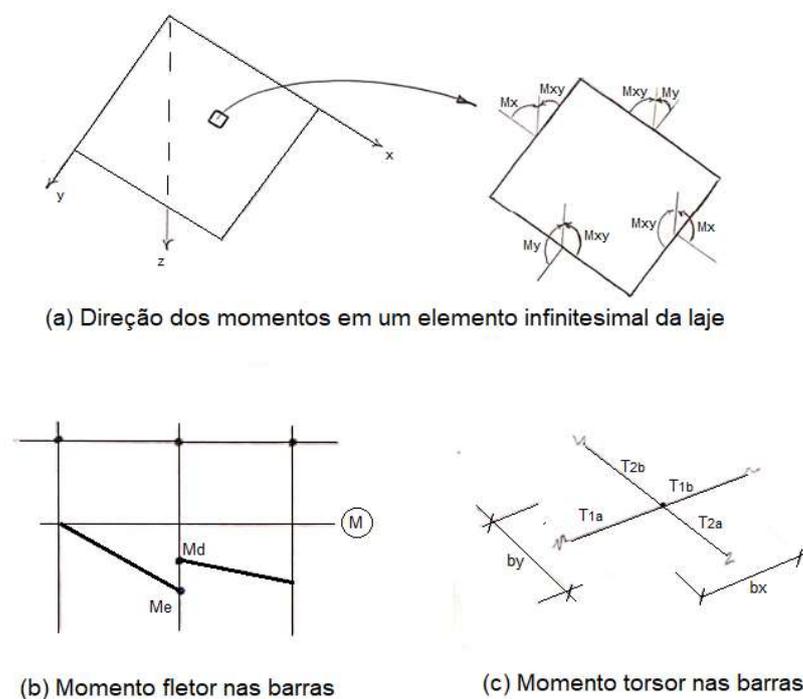
#### **2.3.5. Determinação dos momentos**

Ao resolver uma laje pela analogia de grelha, surgem descontinuidades nos diagramas de momentos fletores, causadas pela torção das barras na direção ortogonal (ARAÚJO, 2023). Essas descontinuidades podem fazer com que os momentos fletores máximos não se localizem no centro do vão, contudo, a utilização

de uma rigidez à torção reduzida e a diminuição do espaçamento entre as barras atenuam essas discrepâncias (STRAMANDINOLI, 2003).

Para melhorar os resultados, o diagrama pode ser suavizado pela média dos momentos nos nós, considerando dois componentes para os momentos fletores (nas direções  $x$  e  $y$ ) e um momento torsor combinado, que integra as contribuições de ambas as direções. A Figura 10 abaixo apresenta ilustrações que auxiliam na compreensão das formulações dos momentos.

Figura 10 – Momentos



Fonte: Adaptado de HOROWITZ (2016)

A Figura 10(a) ilustra as direções dos momentos fletores e torsões em uma parcela infinitesimal de uma laje genérica, mostrando que esses momentos não têm natureza vetorial, sendo definidos nas direções das armaduras projetadas. Já as Figura 10(b) e Figura 10(c) ilustram as formulações para o cálculo dos momentos, tal que, na Figura 10(b), duas barras conectadas por um nó exibem momentos fletores distintos à esquerda ( $M_e$ ) e à direita ( $M_d$ ), enquanto na Figura 10(c), quatro barras conectadas por um nó apresentam valores diferentes de momento torsor ( $T_{1a}$ ,  $T_{1b}$ ,  $T_{2a}$  e  $T_{2b}$ ).

Das considerações anteriores decorrem as Equações (27) a (29), que resultam do cálculo da média dos momentos e da divisão pelos valores de largura da faixa associada a cada barra, que é essencial para converter os resultados obtidos nos elementos da malha — originalmente concentrados nos nós — em esforços característicos da laje, expressos por unidade de comprimento.

$$m_x = \frac{\frac{M_{xe} + M_{xd}}{2}}{b_y} \quad (27)$$

$$m_y = \frac{\frac{M_{ye} + M_{yd}}{2}}{b_x} \quad (28)$$

$$m_{xy} = \frac{\frac{\frac{|T_{1a}| + |T_{1b}|}{2}}{b_y} + \frac{\frac{|T_{2a}| + |T_{2b}|}{2}}{b_x}}{2} \quad (29)$$

## 2.4. ANALOGIA DE GRELHA COM ANÁLISE NÃO-LINEAR

A análise não-linear caracteriza-se pela perda de proporcionalidade entre os carregamentos aplicados e os deslocamentos estruturais correspondentes. No caso de estruturas de concreto armado, essa resposta estrutural é influenciada simultaneamente por duas naturezas distintas de não-linearidade: a física, relacionada à evolução das propriedades dos materiais ao longo da solicitação e a geométrica, que considera o equilíbrio da estrutura em sua configuração deformada.

Segundo Kimura (2018), a adoção da análise não-linear na modelagem de estruturas de concreto armado é justificada por diversos fatores relevantes, entre os quais destacam-se: (i) o concreto armado apresenta comportamento essencialmente não-linear; (ii) essa abordagem proporciona uma representação mais realista do desempenho estrutural ao longo da vida útil da edificação; (iii) as não-linearidades física e geométrica influenciam significativamente os esforços internos e os deslocamentos; (iv) com o desenvolvimento de soluções cada vez mais esbeltas na engenharia estrutural moderna, os efeitos não-lineares assumem papel cada vez mais preponderante.

Dentre os principais fenômenos que conferem esse comportamento não-linear ao concreto armado, especialmente no âmbito da não-linearidade física, destacam-se a fissuração do concreto, a fluência, o escoamento das armaduras e outros efeitos dependentes do tempo ou da história de carregamento (PINTO, 1997). A consideração apropriada desses mecanismos permite obter estimativas mais fidedignas dos deslocamentos e redistribuições de esforços internos, resultando em uma resposta estrutural global mais compatível com as condições operacionais.

No contexto das metodologias contemporâneas de análise, a modelagem da não-linearidade física por meio de diagramas momento-curvatura tem se consolidado como uma prática recorrente, especialmente em análises refinadas de deformações em pavimentos de concreto armado (KIMURA, 2018). Esta será a abordagem adotada neste trabalho. Assim, será utilizado um procedimento iterativo, no qual os diagramas constitutivos Momento-Curvatura e Torção-Rotação são empregados na atualização da matriz de rigidez secante dos elementos. Dessa forma, a rigidez da estrutura torna-se uma função dos deslocamentos.

Nesta seção, serão discutidos a não-linearidade física, os diagramas constitutivos e as formulações implementadas no código computacional GNG.

Ressalta-se, por fim, que a não-linearidade geométrica não será abordada neste estudo, sendo o foco restrito à representação dos efeitos físicos.

#### 2.4.1. Não-Linearidade Física

O concreto armado é amplamente empregado na construção civil brasileira, o que torna essencial a compreensão da complexidade do seu comportamento. Embora possua elevada resistência à compressão, sua limitada capacidade de resistir à tração leva à formação de fissuras nas regiões tracionadas. Essas fissuras reduzem a rigidez da estrutura e caracterizam um comportamento não-linear físico. Com o avanço das fissuras, a rigidez global do sistema estrutural sofre variações contínuas, provocando aumento das deformações e redistribuição dos esforços internos.

Contudo, a fissuração é apenas uma entre várias fontes desse fenômeno. A não-linearidade física também decorre de fatores, como: a heterogeneidade do concreto armado, composto pela interação entre o concreto e aço; a presença e a distribuição das armaduras longitudinais e transversais; os efeitos diferidos no tempo, como fluência e a retração; entre outros fenômenos que influenciam diretamente a resposta da estrutura.

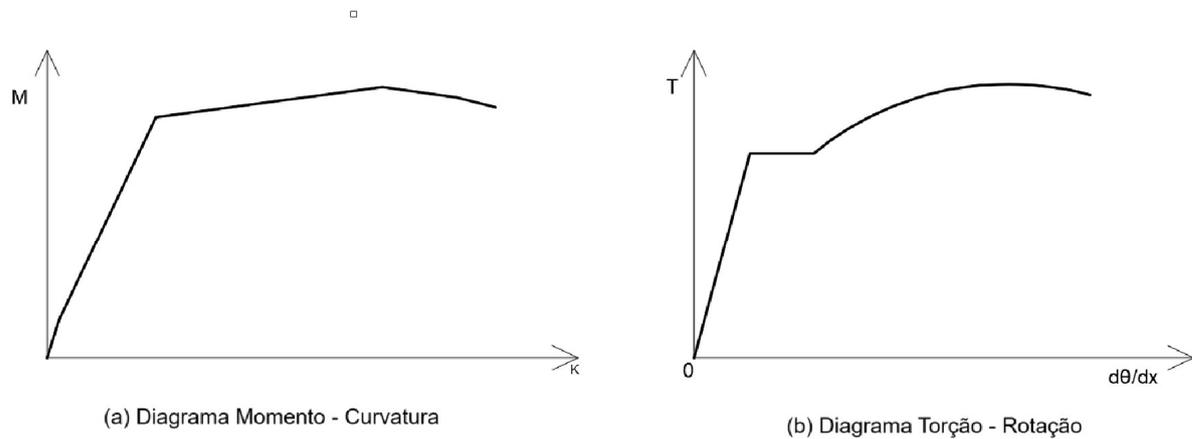
Neste trabalho, a não-linearidade física será considerada por meio de um procedimento incremental-iterativo baseado na atualização da rigidez secante. A cada passo incremental, a rigidez dos elementos estruturais é recalculada em função das relações constitutivas dos materiais, refletindo a evolução do estado de tensão-deformação da estrutura.

#### 2.4.2. Diagramas Constitutivos do Material

O comportamento macroscópico dos materiais é descrito por leis constitutivas, que relacionam tensões aplicadas e deformações resultantes por meio de modelos matemáticos parametrizados conforme as propriedades específicas de cada material (MARTHA, 2010). Para o presente estudo, essas leis são empregadas para representar a não-linearidade física em elementos de concreto armado, por meio dos diagramas Momento-Curvatura e Torção-Rotação.

Esses diagramas substituem a necessidade de integração das tensões na seção transversal, permitindo a obtenção direta de esforços internos e deslocamentos. A Figura 11 apresenta as etapas dos diagramas constitutivos para o concreto armado.

Figura 11 – Diagramas constitutivos para o concreto armado.



Fonte: Adaptado de Melo (2010) e Silva (2014).

O comportamento não-linear do concreto armado pode ser representado pelos diagramas Momento–Curvatura e Torção–Rotação, ambos divididos em estágios. No caso da flexão, três fases principais são identificadas: comportamento elástico inicial, com participação do concreto e do aço; redução de rigidez após a fissuração do concreto; e aumento acentuado da curvatura com plastificação da armadura até o colapso. No caso torção, observa-se resposta elástica até a fissuração torcional, seguida por perda gradual de rigidez e evolução não-linear marcada pela contribuição da armadura transversal.

Este trabalho não tem como objetivo, inicialmente, o desenvolvimento das relações constitutivas. Para os testes propostos, considera-se que tais diagramas serão fornecidos pelo usuário como dados de entrada ao GNG. No entanto, reconhece-se que a obtenção dessas informações, especialmente no caso do diagrama Torção–Rotação, pode ser complexa. Por isso, em estudos futuros, pretende-se implementar técnicas de Inteligência Artificial para a sua geração automática, tornando os dados de entrada mais acessíveis e alinhados com a realidade prática dos usuários.

### 2.4.3. Formulações

As formulações apresentadas nesta seção são fundamentais para a implementação da não-linearidade física no GNG. A partir delas, definem-se os valores médios da curvatura e da rotação/giro axial, bem como os procedimentos para atualização da rigidez e determinação dos deslocamentos da estrutura no regime não-linear.

O modelo constitutivo utilizado para a flexão fundamenta-se na relação Momento-Curvatura, cuja formulação decorre diretamente da equação diferencial da linha elástica para vigas em regime de pequenos deslocamentos, dada pela Equação (30):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (30)$$

A curvatura, definida como  $\frac{1}{\rho}$ , é, portanto, aproximada por  $\frac{d^2v}{dx^2}$ , resultando na Equação (31):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (31)$$

De forma análoga, para a torção, obtém-se a Equação (32):

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T(x)}{GJ(x)} \quad (32)$$

Onde  $\frac{d\theta}{dx}$  é a taxa de variação do ângulo de torção ao longo do comprimento do elemento, que será doravante denotada por  $\phi(x)$ .

Observa-se que tanto o giro axial quanto a curvatura variam ao longo do comprimento do elemento de barra. Dada essa variabilidade, adota-se o valor médio desses parâmetros como representativo para a determinação dos momentos fletores e torsores por interpolação nas curvas constitutivas, e, posteriormente, para a atualização da rigidez.

Neste estudo, adota-se como parâmetro de análise a rigidez secante, a qual difere da rigidez elástica por ser consideravelmente inferior. Essa rigidez corresponde à inclinação da reta secante que liga a origem ao ponto de interesse nos respectivos diagramas, representando, assim, um valor médio de rigidez ao longo da aplicação da carga. As rigidezes são determinadas pelas Equações (33) e (34):

$$EI_{sec} = \frac{M}{\frac{1}{\rho_{média}}} \quad (33)$$

$$GJ_{sec} = \frac{T}{\phi_{médio}} \quad (34)$$

A dedução das expressões de  $\frac{1}{\rho_{média}}$  e  $\phi_{médio}$  fundamenta-se nas configurações deformadas elementares de barras prismáticas isoladas, conforme descrito por Martha (2010). Tais deformações resultam da aplicação de deslocabilidades unitárias nas extremidades dos elementos, nas direções dos eixos locais, sendo representadas pelas funções de forma associadas. O campo de deslocamentos de um elemento de barra submetido à flexão é, então, expresso de acordo com a Equação (35):

$$v(x) = N_1(x) * d_1 + N_3(x) * d_3 + N_4(x) * d_4 + N_6(x) * d_6 \quad (35)$$

Em que  $N_i(x)$  representam as funções de forma associadas aos graus de liberdade relativos à flexão no elemento de barra isolado, cujas formulações analíticas são apresentadas nas Equações (36) a (39):

$$N_1(x) = 1 - 3 * \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 * \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (36)$$

$$N_3(x) = x - \frac{2*x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (37)$$

$$N_4(x) = 3 * \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 * \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (38)$$

$$N_6(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (39)$$

A curvatura pode ser aproximada pela segunda derivada da linha elástica, conforme indicado na Equação (40):

$$\frac{1}{\rho} = N_1''(x) * d_1 + N_3''(x) * d_3 + N_4''(x) * d_4 + N_6''(x) * d_6 \quad (40)$$

Onde as derivadas das funções de forma são definidas pelas Equações (41) a (44):

$$N_1''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12*x}{L^3} \quad (41)$$

$$N_3''(x) = -\frac{4}{L} + \frac{6*x}{L^2} \quad (42)$$

$$N_4''(x) = \frac{6}{L^2} - \frac{12*x}{L^3} \quad (43)$$

$$N_6''(x) = \frac{6*x}{L^2} - \frac{2}{L} \quad (44)$$

Logo, a curvatura média ao longo do comprimento do elemento é determinada pela Equação (45):

$$\frac{1}{\rho_{m\u00e9dia}} = \frac{1}{L} * \int_0^L \frac{1}{\rho} dx \quad (45)$$

A avaliação anal\u00edtica da integral revela que as componentes associadas \u00e0s fun\u00e7\u00f5es sim\u00e9tricas em rela\u00e7\u00e3o ao centro do elemento se anulam, permanecendo apenas aquelas ligadas aos graus de liberdade de rota\u00e7\u00e3o  $d_3$  e  $d_6$ . Isso resulta na formula\u00e7\u00e3o da Equa\u00e7\u00e3o (46):

$$\frac{1}{\rho_{m\u00e9dia}} = \frac{(d_6 - d_3)}{L} \quad (46)$$

A priori, não se fará distinção entre a perda de rigidez para momentos fletores positivos ou negativos, sendo utilizado o valor absoluto, o que também será feito para o giro axial posteriormente.

Para o giro, cuja lógica segue a mesma abordagem, considera-se a deformação axial rotacional expressa segundo a Equação (47):

$$\phi(x) = N_2(x) * d_2 + N_5(x) * d_5 \quad (47)$$

Onde  $N_2(x)$  e  $N_5(x)$  são as funções de forma axiais da barra, dadas pelas Equações (48) e (49):

$$N_2(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (48)$$

$$N_5(x) = \frac{x}{L} \quad (49)$$

Logo, a média da rotação/giro axial ao longo do elemento é obtida pela integração mostrada na Equação (50):

$$\Phi_{medio} = \frac{1}{L} * \int_0^L \left( \left(1 - \frac{x}{L}\right) * d_2 + \frac{x}{L} * d_5 \right) dx = \frac{(d_5 + d_2)}{2} \quad (50)$$

No que tange a resolução do sistema não-linear, utilizou-se o método de Picard, no qual a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração com base nas propriedades secantes recalculadas. Assim, os deslocamentos são obtidos pela resolução do sistema da Equação (51):

$$[KG(desl^{i-1})]\{desl^i\} = \frac{\{FGgl\}}{NumIncr} (Incr^i) \quad (51)$$

Em que  $[KG(desl^{i-1})]$  é a matriz de rigidez secante corrente calculada com os deslocamentos da iteração anterior;  $\{desl^i\}$  é o vetor de deslocamentos atual e incógnita do sistema;  $NumIncr$  é o número total de incrementos da carga; e  $Incr^i$  é o incremento corrente.

Esse processo se repete a cada incremento até que a diferença entre os deslocamentos de duas iterações consecutivas seja menor que a tolerância adotada. A convergência é verificada pelo critério da Equação (52):

$$erro = \frac{|dest^{i-1}| - |dest^i|}{|dest^{i-1}|} \leq Tol \quad (52)$$

Com esse procedimento, a convergência ocorre de forma eficiente e o cálculo dos esforços internos é realizado apenas uma vez, após a solução convergir.

### 3. METODOLOGIA

O presente estudo tem como objetivo principal o desenvolvimento de rotinas de cálculo para a análise linear e não-linear de lajes utilizando o Método da Analogia de Grelha. As ferramentas desenvolvidas permitem a definição de grelhas simples ou equivalentes de lajes, gerando resultados de deslocamentos (translacionais e rotacionais) e esforços solicitantes (cortante, momento fletor e torsor) conforme as tipologias de análise incorporadas.

O procedimento adotado foi estruturado em etapas interdependentes, integrando o estudo teórico à implementação computacional. A revisão da literatura abrangeu temas como análise linear e não-linear de estruturas, comportamento de lajes, Método da Analogia de Grelha e métodos computacionais, entre outros.

A implementação, por sua vez, foi conduzida por revisões contínuas orientadas pela compreensão gradual dos conceitos abordados e pela análise dos resultados obtidos, com o objetivo de atender às necessidades identificadas ao longo do desenvolvimento. A validação da ferramenta foi realizada por meio da comparação com exemplos consolidados na literatura técnica.

Nos tópicos seguintes, apresentam-se os detalhes da estrutura dos códigos desenvolvidos, com ênfase na organização interna e funcionamento.

#### 3.1. DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE LINEAR

O desenvolvimento do código numérico de análise linear baseou-se em um exemplo extraído do livro de Logan (2007), que apresenta as equações para o cálculo dos deslocamentos e esforços em uma grelha simples. Essas formulações foram adaptadas para a linguagem Python e implementadas no ambiente Google Colaboratory. Como resultado, foi estruturada uma rotina de análise linear organizada em cinco seções principais: Instalações, Importações e Bibliotecas; Dados de Entrada; Funções; Processamento; e Pós-processamento, que serão detalhadas nos tópicos subsequentes.

### 3.1.1. Instalações, Importações e Bibliotecas

Esta seção prepara o ambiente de desenvolvimento, assegurando a instalação e importação das dependências necessárias. Foram utilizados o módulo *vtkLine* do pacote *EVTK* (HERRERA, 2016) para manipulação de linhas 3D, além das bibliotecas *numpy*, para cálculos numéricos, e *math*, para operações matemáticas essenciais à execução do código.

### 3.1.2. Dados de Entrada

O código foi estruturado para atender a dois tipos de exemplos, controlados pela variável *cálculo* que pode assumir as *strings* "simplificado" ou "completo". O modo "simplificado" é indicado para modelos básicos de grelha com poucos elementos e com todas as propriedades previamente definidas, ideal para as validações iniciais. Já o modo "completo" é destinado à análise de lajes por grelha equivalente, incluindo cálculos adicionais como a inércia dos elementos de laje e vigas.

Assim, os dados de entrada variam conforme o tipo de problema, mas geralmente incluem os componentes listados a seguir. As Figura 12 a Figura 23, apresentadas nesta seção, têm caráter ilustrativo e genérico, servindo para facilitar a compreensão dos dados, sem estarem vinculadas a um exemplo específico.

A matriz de conectividades (Figura 12) é definida pela incidência nodal dos elementos, sendo que a ordem dos índices dos nós determina o sentido do eixo local *x*, direcionado do nó inicial ao nó final. O eixo local *z* é perpendicular ao plano, e o eixo *y* resulta do produto vetorial entre *x* e *z*.

Figura 12 – Matriz *conec*

```
### Matriz de conectividades (elemento, nó 1, nó 2)
conec = np.array([[1, 1, 2],
                 [2, 2, 3]])
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A matriz de coordenadas (Figura 13) define a geometria global do modelo em um sistema de eixos globais, atribuindo a cada nó um índice e suas coordenadas.

Figura 13 – Matriz *coord*

```
### Matriz de coordenadas (nó, x, y, z)
coord = np.array([[1, 0, 0, 0],
                  [2, 0, -4, 0],
                  [3, 6, -4, 0]])
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A matriz de descrição do tipo de elemento, como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Matriz *Tipo\_elemento*

```
### Descrição do tipo de elemento (elemento, tipo)
Tipo_elemento = np.array([
    *[i, "V1"] for i in range(1, 11)], # Elementos 1-10: "V1"
    *[i, "L1x"] for i in range(11, 101)], # Elementos 11-100: "L1x"
    *[i, "V2"] for i in range(101, 111)], # Elementos 101-110: "V2"
    *[i, "V3"] for i in range(111, 121)], # Elementos 111-120: "V3"
    *[i, "L1y"] for i in range(121, 211)], # Elementos 121-210: "L1y"
    *[i, "V4"] for i in range(211, 221)], # Elementos 211-220: "V4"
])
```

Fonte: A AUTORA (2024)

Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, como ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Módulos de Elasticidade

```
### Definição das Elasticidades:
# módulo de elasticidade longitudinal:
E = 30*10**6 # segundo NBR 6118:2023, item 8.2.8 (KN/m²)
### Módulo de elasticidade transversal (KN/m²):
v = 0.25 # coeficiente de poisson, segundo NBR 6118:2023, item 8.2.9
G = E/(2*(1+v)) # módulo de elasticidade transversal
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A matriz de inércia para os casos de cálculo simplificado, como apresentado na Figura 16.

Figura 16 – Matriz *Inércia*

```
### Matriz de Inercia (elemento, Momento de Inércia à flexão(m^4), Momento de Inércia à Torção (m^4)):
Inercia = np.array([[ 1, 1, 1],
                    [ 2, 1, 1]])
```

Fonte: A AUTORA (2024).

A definição das variáveis geométricas dos elementos estruturais (Figura 17), como largura da faixa de discretização, espessura das lajes e dimensões das vigas.

Figura 17 – Variáveis geométricas

```
# Informações da Laje 1
# Largura da faixa de discretização nas duas direções :
faixa1_x= 0.5 # (m)
faixa1_y= 0.5 # (m)
# Espessura da laje :
h_laje1 = 0.1 # (m)

# Informações da viga 1
b_viga1 = 0.12 # (m)
h_viga1 = 0.50 # (m)

# Informações da Viga 2
b_viga2 = 0.12 # (m)
h_viga2 = 0.50 # (m)

# Informações da Viga 3
b_viga3 = 0.12 # (m)
h_viga3 = 0.50 # (m)

# Informações da Viga 4
b_viga4 = 0.12 # (m)
h_viga4 = 0.50 # (m)
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A matriz de descrição das lajes, como demonstrado na Figura 18.

Figura 18 – Matriz *Descr\_lajes*

```
### Descrição das lajes (Identificação da laje, espessura da laje, faixa de discretização)
# identificação da laje adjacente, menor_vao, a1, a2, condicao de apoio da viga).
Descr_lajes = np.array([[ "L1x", h_laje1, faixa1_x],
                        [ "L1y", h_laje1, faixa1_y]])
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A matriz de descrição das vigas, ilustrada pela Figura 19.

Figura 19 – Matriz *Descr\_vigas*

```
### Descrição das vigas (Identificação da viga, tipo da viga (Retangular, L_TipoI, T_TipoI, L_TipoII, T_TipoII), comprimento interno da viga, altura da viga, base da viga,
# identificação da laje adjacente, menor_vao, a1, a2, condicao de apoio da viga).
Descr_vigas = np.array([[ "V1a", "Retangular", 0, h_viga1, b_viga1, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V1b", "Retangular", 0, h_viga1, b_viga1, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V2a", "Retangular", 0, h_viga2, b_viga2, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V2b", "Retangular", 0, h_viga2, b_viga2, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V3a", "Retangular", 0, h_viga3, b_viga3, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V3b", "Retangular", 0, h_viga3, b_viga3, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V4a", "Retangular", 0, h_viga4, b_viga4, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V4b", "Retangular", 0, h_viga4, b_viga4, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V5a", "Retangular", 0, h_viga5, b_viga5, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V5b", "Retangular", 0, h_viga5, b_viga5, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V6a", "Retangular", 0, h_viga6, b_viga6, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"],
                        [ "V6b", "Retangular", 0, h_viga6, b_viga6, "faixa1_borda", 0, 0, 0, "Condição não definida"]
                        ]])
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A definição das condições de contorno para cada nó, onde o valor 1 no vetor *contorno* indica engastamento, 0 corresponde ao bloqueio da translação, e 2 restringe tanto a translação quanto a rotação normal ao bordo. Para o bloqueio da rotação

nesse último caso, são utilizados os vetores auxiliares *no\_elim\_aux1* e *no\_elim\_aux2*, conforme a Figura 20.

Figura 20 – Vetores de definição das condições de contorno

```
### Aplicação das condições de contorno:
no_elim = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 19, 20, 26, 27, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45] # nós com restrição
contorno= [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] # Condição aplicada por nó,
no_elim_aux1 = [1, 2, 3, 4, 5, 41, 42, 43, 44, 45] # nós com restrição em ry
no_elim_aux2 = [6, 12, 13, 19, 20, 26, 27, 33, 34, 40] # nós com restrição em rx
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A definição das variáveis auxiliares, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Variáveis auxiliares

```
### Definindo variáveis de auxílio:
tem_viga = "Não" # indica se no modelo existem elementos de viga
tem_laje = "Sim" # indica se no modelo existem elementos de laje
nel = conec.shape[0] # número de elementos
nn = coord.shape[0] # número de nós
ngl = nn * 3 # número de graus de liberdade (incógnitas nodais)
nelim = len(no_elim) # número de nós com GL restringido
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A definição das ações aplicadas diretamente nos nós (Figura 22), orientadas de acordo com as direções dos eixos globais.

Figura 22 – Vetor A

```
### Definição das ações conhecidas nas estrutura real (a estrutura a seguir deve ser repetida para cada carga de
# valor diferente a ser aplicada: F1, F2, F3, etc.):
P1 = -22 # valor da carga concentrada (KN): o sinal negativo indica o sentido para baixo
A = np.zeros(ngl) # Vetor A ( para armazenar as ações)
no_P1_carga_aplicada = [2] # nós de aplicação da carga
# estrutura de repetição para aplicação das cargas nos nós respectivos
for i, val in enumerate(no_P1_carga_aplicada):
    A[3*(val-1)] = P1
```

Fonte: A AUTORA (2024)

A aplicação das ações distribuídas nos elementos (Figura 23), estabelecidas conforme as direções dos eixos globais.

Figura 23 – Matriz de ações externas:

```
### Aplicação das Ações Externas (a estrutura a seguir deve ser repetida para cada carga de valor
# diferente a ser aplicada: q1, q2, q3, etc.):
q1_L1 = 0 # valor da carga distribuída (kN/m²): o sinal negativo indica o sentido para baixo
q1_L1_linear = ((faixa1_x*faixa1_y)*q1_L1)/ (faixa1_x+faixa1_y) # cálculo da carga linear (kN/m)
elemento_q1_L1_carga_aplicada = [] # elementos de aplicação da carga linear
q_aplic = np.zeros((nel,2)) # matriz para armazenamento do carregamento linear por elemento
q_aplic[:, 0] = np.arange(1, nel + 1) # insere a numeração dos elementos na primeira coluna
# estrutura de repetição para aplicação das cargas lineares nos elementos respectivos
# q_aplic = [elemento, Carga aplicada(KN/m)]
for i, val in enumerate(elemento_q1_L1_carga_aplicada):
    q_aplic[(val-1),1] = q1_L1_linear
```

Fonte: A AUTORA (2024)

Além das informações descritas, o usuário também deve definir o Coeficiente Redutor da Inércia à Torção das vigas, atribuindo seu valor à variável *divisor\_inercia\_torca* nos casos que envolvem vigas. Também é necessário especificar o tipo de cálculo a ser executado ("Simplificado" ou "Completo") e indicar o nome do arquivo a ser gerado para o Paraview, atribuindo-o à variável *filename*. Com essas configurações definidas, a análise pode ser iniciada.

### 3.1.3. Funções

Com o objetivo de otimizar os cálculos e aprimorar a eficiência das rotinas, especialmente considerando que diversas operações são repetidas ao longo da execução do código, foram desenvolvidas algumas funções. A

Tabela 1 apresenta essas funções e suas respectivas aplicações.

Tabela 1– Funções do GLG

Função	Aplicação
<i>ObterNo</i>	Retorna os índices dos nós do elemento.
<i>ObterCoordNo</i>	Retorna as coordenadas dos nós do elemento.
<i>ObterInercia</i>	Retorna as inércias do elemento, previamente definidas.
<i>ObterComprBarra</i>	Calcula o comprimento da barra a partir das coordenadas dos nós do elemento.
<i>ObterSenCos</i>	Retorna o $\sin\theta$ e o $\cos\theta$ que indicam a orientação da barra.
<i>ObterMatrizRigidez</i>	Calcula os coeficientes de rigidez e retorna a matriz de rigidez do elemento.
<i>ObterMatrizTransf</i>	Retorna a matriz de transformação.
<i>ObterGrauLiberd</i>	Retorna o vetor de grau de liberdade, que auxilia no cálculo dos índices dos graus de liberdade de cada nó de um elemento.
<i>AplicarCondicoesContorno</i>	Aplica as condições de contorno na matriz de rigidez e no vetor de cargas.
<i>ObterAcoesExternas</i>	Retorna o vetor de ações externas.
<i>ObterEsforcos</i>	Retorna os esforços internos dos elementos.
<i>ObterInerciaViga</i>	Retorna os momentos de inércia à flexão e à torção das vigas.
<i>ObterInerciaLaje</i>	Retorna os momentos de inércia à flexão e à torção das lajes.
<i>ObterArquivoPV</i>	Prepara o arquivo para o Paraview, adaptada de PreParaview - Silva (2022).
<i>ObterFaixa</i>	Retorna a faixa de discretização correspondente à barra.

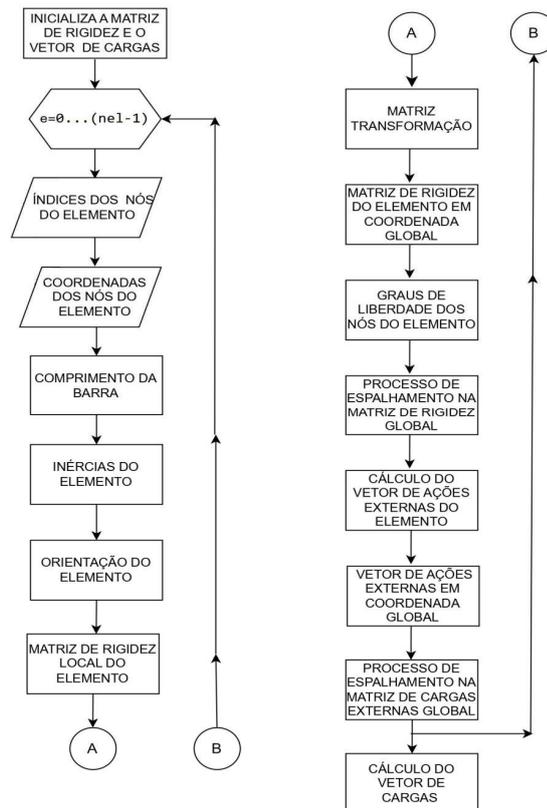
Fonte: A AUTORA (2024)

### 3.1.4. Processamento

A seção de processamento está dividida em três etapas principais. A primeira trata do cálculo das inércias à flexão e à torção dos elementos de barra, além da definição e montagem da matriz de rigidez global e do vetor de cargas, conforme ilustrado no

fluxograma da Figura 24. Na segunda, aplicam-se as condições de contorno à matriz de rigidez e ao vetor de cargas, por meio da função *AplicarCondiçõesContorno*, que utiliza o vetor *elim* para identificar os graus de liberdade bloqueados. Por fim, a terceira parte resolve a equação de equilíbrio para determinar os deslocamentos, empregando a função *numpy.linalg.solve*, do pacote *NumPy*, que soluciona sistemas de equações lineares na forma  $Ax = B$ .

Figura 24 – Fluxograma do processo de definição da matriz de rigidez e do vetor de cargas

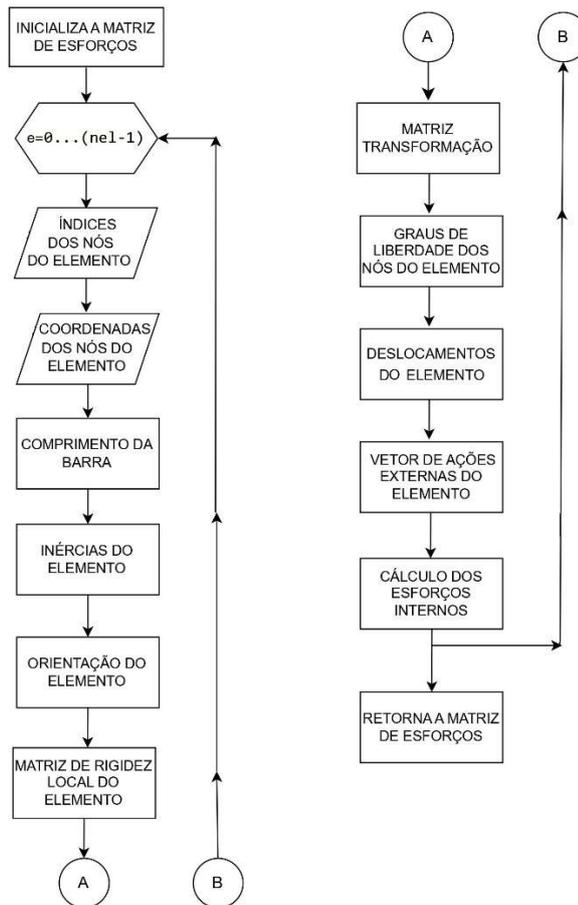


Fonte: A AUTORA (2024)

### 3.1.5. Pós-processamento

A seção de pós-processamento é organizada em quatro etapas centrais: cálculo dos esforços, determinação dos momentos fletores, determinação dos momentos torsores e geração do arquivo para visualização no ParaView. Os esforços internos da grelha (cortante e momentos fletor e torsor) são calculados pela função *ObterEsforços* a partir dos deslocamentos previamente obtidos, conforme ilustrado no fluxograma da Figura 25.

Figura 25 – Fluxograma do processo de cálculo dos esforços

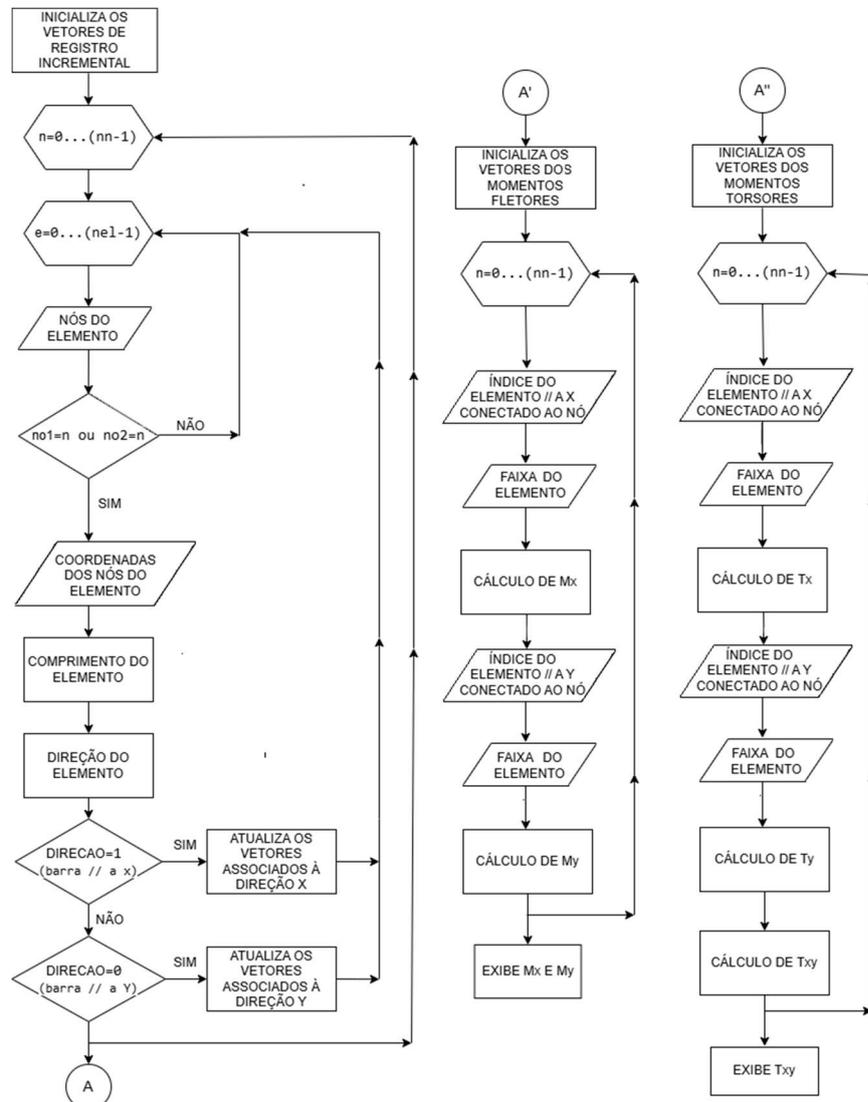


Fonte: A AUTORA (2024)

Após o cálculo dos esforços e o ajuste dos sinais para a convenção da Resistência dos Materiais (Item 2.2.5), procede-se ao cálculo dos momentos, conforme ilustrado no fluxograma da

Figura 26. Neste fluxograma, a continuidade A' refere-se ao momento fletor, enquanto A'' corresponde ao momento torsor. O processo gera os vetores  $M_x$  e  $M_y$ , representando os momentos fletores nas respectivas direções, e o vetor  $T_{xy}$ , que representa o momento torsor resultante.

Figura 26 – Fluxograma do processo de cálculo dos momentos



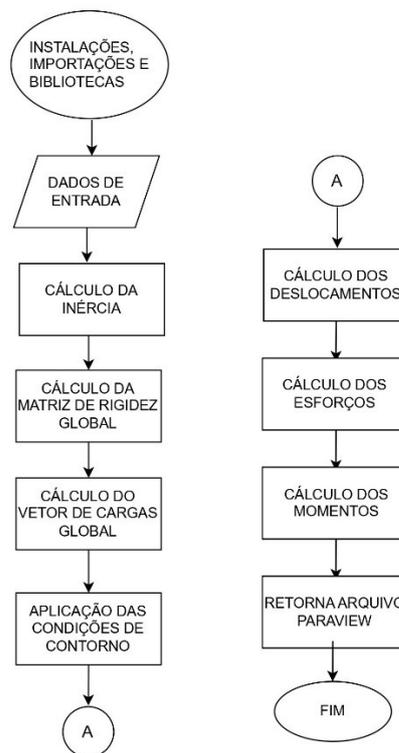
Fonte: A AUTORA (2024)

Por fim, a função *ObterArquivoPV* organiza os dados da grelha e os resultados da análise para gerar dois arquivos *VTK* compatíveis com o *ParaView*, por meio da biblioteca *EVTK*. Um arquivo representa a estrutura deformada, com as coordenadas ajustadas pelos deslocamentos translacionais, além das rotações e esforços internos; o outro, a estrutura indeformada, com as coordenadas originais. Esses arquivos permitem a análise gráfica detalhada dos resultados no *ParaView*, que é um software livre voltado à visualização de dados científicos, facilitando sua interpretação e apresentação (PARAVIEW, 2020).

### 3.1.6. Fluxograma do código

A Figura 27 apresenta o fluxograma geral do algoritmo desenvolvido, sintetizando a sequência das principais etapas descritas nos itens anteriores. Após as devidas implementações e revisões, o código final foi nomeado GLG (*General Linear Grid*).

Figura 27 – Fluxograma dos procedimentos gerais do GLG



Fonte: A AUTORA (2024)

## 3.2. DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

O código numérico para a análise não-linear foi desenvolvido a partir da rotina linear GLG e posteriormente ampliado com os elementos necessários à incorporação dos efeitos não-lineares. As formulações necessárias à consideração da não-linearidade (Item 2.4.3) foram adaptadas para a linguagem Python e implementadas no ambiente Google Colaboratory. O resultado foi a criação da rotina GNG (*General Nonlinear Grid*), estruturada de forma análoga ao GLG. Este tópico, portanto, tem como foco apresentar exclusivamente as adaptações realizadas e os aspectos que distinguem os dois algoritmos.

### 3.2.1. Instalações, Importações e Bibliotecas

Para a preparação do ambiente de desenvolvimento da análise não-linear, foram empregadas bibliotecas específicas voltadas à interpolação e visualização gráfica dos resultados. A função *interp1d*, do módulo *interpolate* da biblioteca *SciPy*, foi utilizada na criação de funções de interpolação baseadas nos Diagramas Momento-Curvatura e Torção-Giro Axial. Para a representação gráfica, recorreu-se ao módulo *pyplot*, da biblioteca *matplotlib*, que forneceu a interface para a geração de gráficos.

### 3.2.2. Dados de Entrada

Para incorporar os efeitos da não-linearidade do material, foi necessário incluir novos parâmetros de entrada, além daqueles já utilizados no GLG. Esses dados adicionais são detalhados a seguir.

O Número de incrementos de carregamento, o critério de tolerância para convergência das iterações e a identificação do nó para o qual se deseja visualizar a trajetória Carga × Deslocamento Translacional, como mostra a Figura 28.

Figura 28 – NumIncr, Tol e Índice do nó desejado

```

### Número de etapas de carregamento
NumIncr =10

### Tolerância para convergência das iterações
Tol=10e-6

### Indique o nó que deseja visualizar a trajetória: Carga x Deslocamento.
no_traj = 2
no_traj = no_traj-1

```

Fonte: A AUTORA (2025)

A definição das coordenadas dos diagramas Momento–Curvatura para fins de interpolação, bem como da matriz auxiliar *Tipo\_MC*, responsável por associar os elementos da malha à respectiva curva constitutiva, como apresentado na Figura 29.

Figura 29 – Diagrama Momento-Curvatura

```

### Coordenadas do gráfico Momento-Curvatura para interpolação Não Linear - Elementos do Centro
# As coordenadas x e y de um ponto no diagrama devem ocupar a mesma posição nos vetores abaixo.
Momento_Ord_TipoI = [0, 0.3314, 0.8267, 1.4882, 2.315, 3.3051, 4.4534, 5.7406, 7.176, 8.715, 10.3455, 12.005, 13.6544, 14.3154, 14.3773, 14.4149, 14.4286, 14.4198, 14.3878, 14.3317]
Curvatura_Abs_TipoI = [0, 0.001294, 0.003234, 0.005822, 0.009056, 0.01294, 0.01747, 0.02264, 0.02846, 0.03493, 0.04205, 0.04981, 0.05822, 0.06728, 0.07698, 0.08733, 0.09833, 0.11, 0.1223, 0.1352]

### Coordenadas do gráfico Momento-Curvatura para interpolação Não Linear - Elementos da borda
# As coordenadas x e y de um ponto no diagrama devem ocupar a mesma posição nos vetores abaixo.
Momento_Ord_TipoII = [0.0, 3.6626, 9.135, 16.4448, 25.5614, 36.329, 48.7308, 58.7903, 59.391, 59.8197, 60.1535, 60.3992, 60.5792, 60.7045, 60.7816, 60.8161, 60.8126, 60.7727, 60.7059, 60.6098]
Curvatura_Abs_TipoII = [0.0, 0.0007923, 0.001981, 0.003566, 0.005546, 0.007923, 0.0107, 0.01387, 0.01743, 0.02139, 0.02575, 0.03051, 0.03566, 0.0412, 0.04714, 0.05348, 0.06022, 0.06735, 0.07488, 0.0828]

Tipo_MC = np.array([
["L1x", Momento_Ord_TipoI, Curvatura_Abs_TipoI],
["L1y", Momento_Ord_TipoI, Curvatura_Abs_TipoI],
["V1a", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V1b", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V2", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V3a", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V3b", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V4", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V5a", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V5b", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V6a", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII],
["V6b", Momento_Ord_TipoII, Curvatura_Abs_TipoII]
], dtype=object)

```

Fonte: A AUTORA (2025)

A variável TR define o modo de consideração da rigidez à torção — por meio de um diagrama Torção-Rotação ou da aplicação de um coeficiente redutor de inércia. Na primeira abordagem, o usuário deve fornecer os pares de coordenadas da curva e a matriz auxiliar *Tipo\_TR*. Na segunda, são exigidos os valores dos divisores de inércia à torção para lajes (*divisor\_inercia\_torca\_laje*) e vigas (*divisor\_inercia\_torca\_viga*), conforme detalhado na

Figura 30.

Figura 30 – Diagrama Torção-Giro Axial e Divisor de Inércia

```

### Coordenadas do gráfico Momento-Curvatura para interpolação ou Redutor
# Quanto à torção, é possível fornecer o diagrama Torção-Rotação ou aplicar um redutor.
# A variável TR deve ser preenchida com "Diagrama" ou "Divisor", conforme a opção escolhida.
TR = "Diagrama"

### Coeficiente redutor da Inércia à torção de vigas:
divisor_inercia_torcaoviga = 1 # Item 17.5.1.2 da NBR 6118:2023

### Para que o usuário também seja capaz de definir um redutor para as lajes:
divisor_inercia_torcaolaje = 1

### Coordenadas do gráfico Torção-Rotação para interpolação - Teste 1
# As coordenadas x e y de um ponto no diagrama devem ocupar a mesma posição nos vetores abaixo.
Torcao_Ord_TipoI = [0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75, 3.00]
Rotacao_Abs_TipoI = [0, 3.283e-05, 6.566e-05, 9.848e-05, 1.313e-04, 1.641e-04, 1.970e-04, 2.298e-04, 2.626e-04, 2.955e-04, 3.283e-04, 3.611e-04, 3.939e-04]

Tipo_TR = np.array([[ "V1", Torcao_Ord_TipoI, Rotacao_Abs_TipoI ]
], dtype=object)

```

Fonte: A AUTORA (2025)

### 3.2.3. Funções

Com o intuito de aprimorar a eficiência do algoritmo, especialmente diante do caráter iterativo da análise não-linear, foram implementadas duas novas funções para o processamento da rigidez, além da adaptação de uma função já existente. A aplicação dessas funções está organizada na Tabela 2.

Tabela 2 – Funções do GNG

Função	Aplicação
<i>ObterKG_FG</i>	Calcula a Matriz de Rigidez Global e o Vetor de Cargas Global correspondente ao primeiro incremento de carga, considerando o regime linear.
<i>ObterKG_NL</i>	Atualiza a Matriz de Rigidez Global a partir do segundo incremento de carga, utilizando as rigidezes secantes extraídas dos diagramas constitutivos.
<i>ObterEsforcos</i>	Função existente que foi modificada para que o cálculo dos esforços passe a considerar a última matriz de rigidez atualizada, em substituição à matriz elástica originalmente utilizada.

Fonte: A AUTORA (2025)

### 3.2.4. Processamento

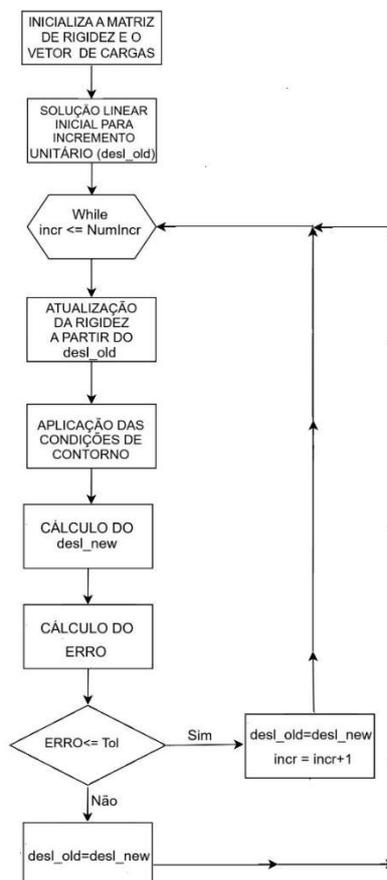
A etapa de processamento está estruturada em duas partes principais. A primeira corresponde ao cálculo das inércias dos elementos de barra, bem como à definição do vetor *elim*, que reúne os graus de liberdade restringidos. A segunda parte abrange a obtenção dos deslocamentos nodais, organizada em dois blocos: linear e não-linear.

No bloco linear, assume-se o comportamento elástico-linear do material, sendo determinados os deslocamentos relativos ao primeiro incremento de carga. Esses valores servem como estimativa inicial para o processo iterativo da análise não-linear.

Já no bloco não-linear, a matriz de rigidez é atualizada iterativamente pelo método de Picard, partindo inicialmente dos deslocamentos calculados no bloco linear. As rigidezes secantes são determinadas por meio da interpolação dos diagramas constitutivos, combinada com as expressões de curvatura e giro médio previamente deduzidas. Essa nova matriz é então utilizada para recalcular os deslocamentos, repetindo-se o procedimento até que o critério de convergência seja satisfeito.

Uma vez atingida a convergência para o incremento de carga corrente, o carregamento é progressivamente elevado conforme o número de etapas definido previamente. A solução obtida no incremento anterior serve como estimativa inicial para o próximo ciclo iterativo. Esse procedimento se repete até que toda a carga aplicada seja considerada e a resposta global do sistema esteja estabilizada. O fluxograma da Figura 31 detalha esse processo.

Figura 31 – Fluxograma do processo iterativo de cálculo da rigidez e dos deslocamentos



Fonte: A AUTORA (2025)

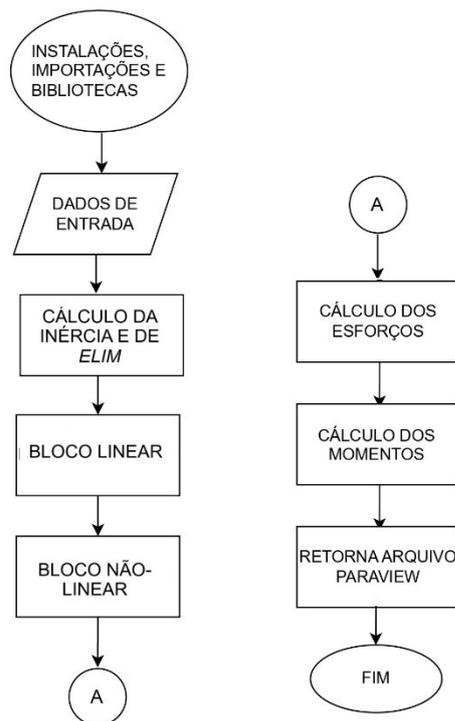
### 3.2.5. Pós-processamento

A etapa de pós-processamento foi preservada com a mesma estrutura adotada no código GLG, contemplando a determinação dos esforços internos e o cálculo dos momentos fletores e torsões na estrutura, seguido da exportação dos dados em arquivo compatível com o ParaView.

### 3.2.6. Fluxograma do código

A Figura 32 apresenta o fluxograma que sintetiza o funcionamento da rotina não-linear desenvolvida, destacando a ordem das principais etapas discutidas nos tópicos anteriores.

Figura 32 – Fluxograma dos procedimentos gerais do GNG



Fonte: A AUTORA (2025)

## 4. RESULTADOS

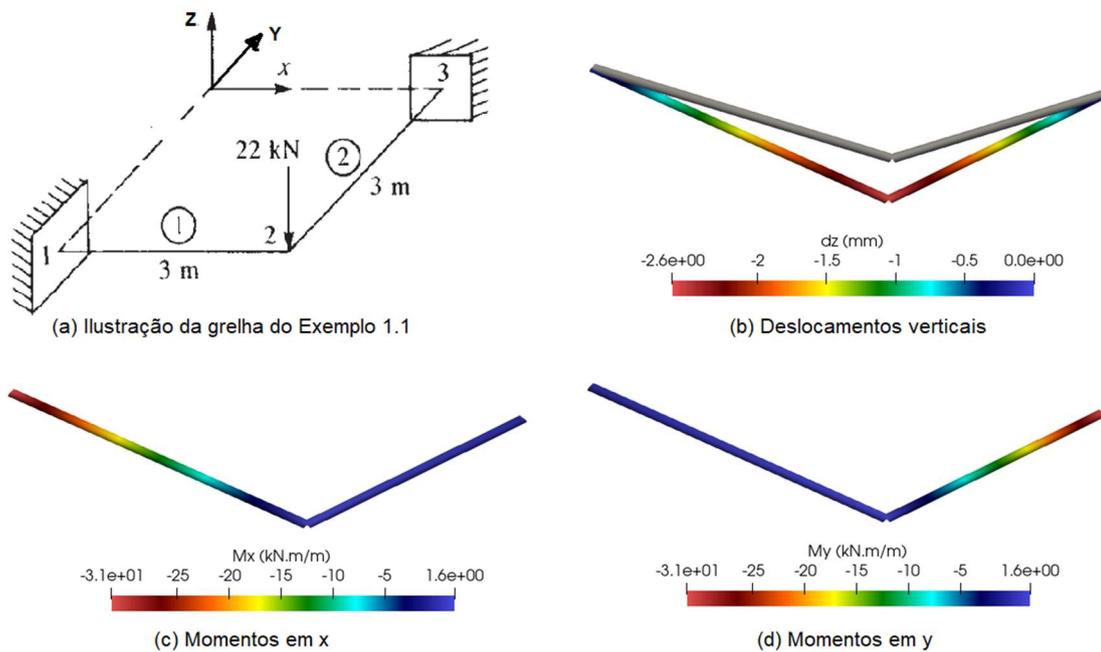
### 4.1. VALIDAÇÃO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE LINEAR

A validação do código de análise linear foi realizada com exemplos da literatura especializada, abrangendo diferentes configurações de lajes, com o objetivo de verificar a confiabilidade do algoritmo em diversos cenários. Os torsos calculados pelo GLG foram apresentados em módulo, exceto nos casos iniciais, com grelhas simples, onde os esforços foram avaliados nó a nó, preservando-se o sinal. Por essa razão, não se geraram gráficos de torsião no ParaView, sobretudo porque grande parte das referências consultadas não disponibiliza os valores dos momentos torsos. Quanto aos demais esforços, convém destacar que seus sinais podem variar conforme a convenção adotada.

#### 4.1.1. Exemplo 1.1 do GLG

Este caso corresponde ao exemplo 5.6, extraído de Logan (2007), que apresenta uma grelha composta por dois segmentos. Foram adotados os seguintes parâmetros:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $G = 84 \text{ GPa}$ ,  $I = 16,6 * 10^{-5} \text{ m}^4$  e  $J = 4,6 * 10^{-5} \text{ m}^4$ . As condições de contorno, o carregamento e os resultados estão dispostos na Figura 33.

Figura 33 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Logan (2007) – Exemplo 1.1



-----	LOGAN	GLG	δ(%)
Deslocamentos e Rotações no nó 2			
$v_2$ (m)	-0,00259	-0,00263	1,54
$\varphi_{2x}$ (rad)	0,00126	0,00128	1,59
$\varphi_{2y}$ (rad)	-0,00126	0,00128	1,59
Momentos Fletores e Torsões			
Elemento 1			
$M_{x1}$ (kN.m/m)	31,0	-31,354	1,14
$M_{x2}$ (kN.m/m)	1,5	1,646	9,73
$T_{x1}$ (kN.m/m)	-1,5	1,646	9,73
$T_{x2}$ (kN.m/m)	1,5	1,646	9,73
Elemento 2			
$M_{y2}$ (kN.m/m)	-1,5	1,646	9,73
$M_{y3}$ (kN.m/m)	-31,0	-31,354	1,14
$T_{y2}$ (kN.m/m)	1,5	1,646	9,73
$T_{y3}$ (kN.m/m)	-1,5	1,646	9,73

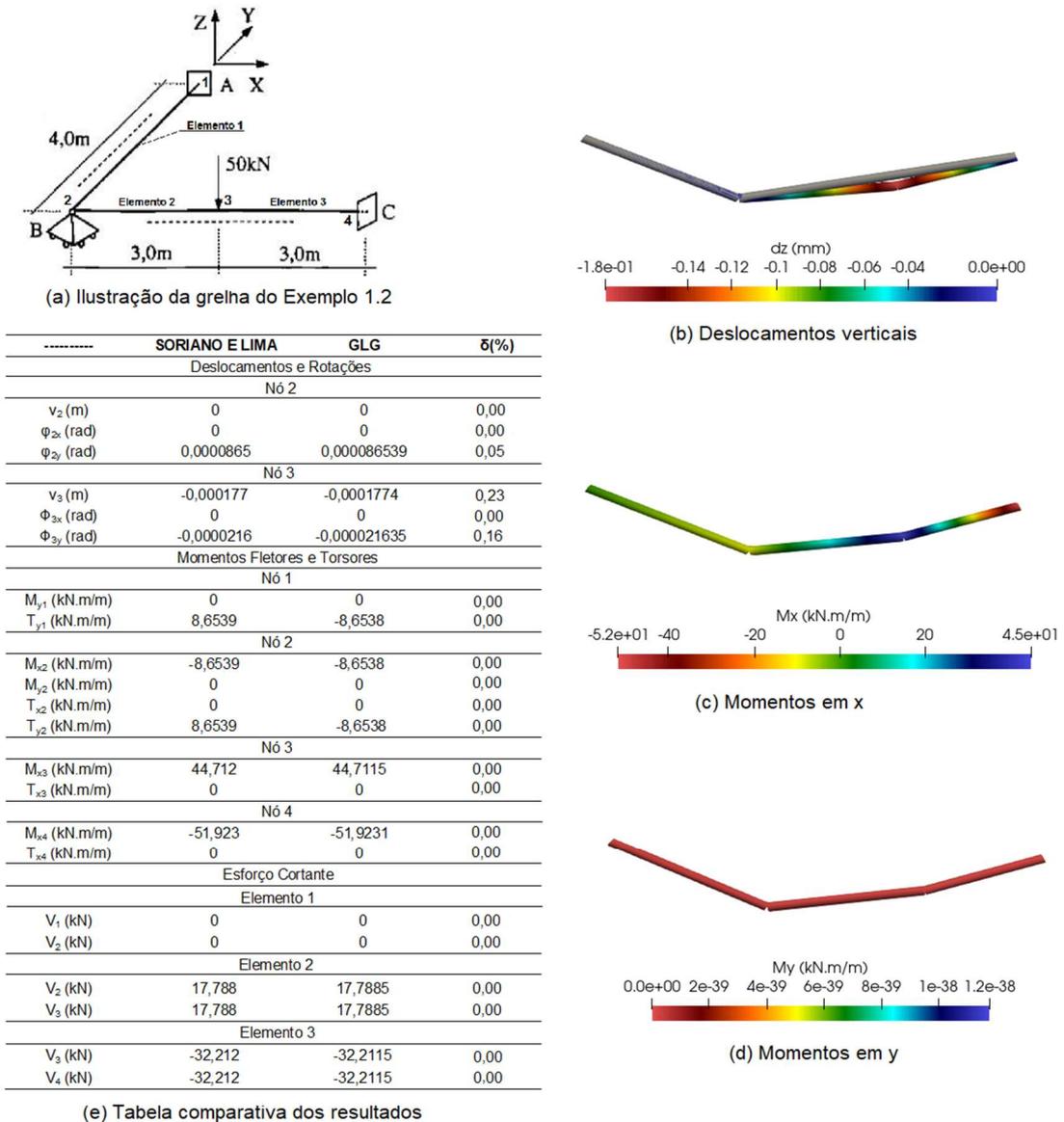
(e) Tabela comparativa dos resultados

Fonte: A AUTORA (2024)

### 4.1.2. Exemplo 1.2 do GLG

O exemplo 3.5 de Soriano e Lima (2006) descreve uma grelha com rigidezes  $EI = 5,0 * 10^5 kN.m^2$  e  $GJ = 4,0 * 10^5 kN.m^2$ . Com o objetivo de aprimorar a visualização no Paraview, adotou-se um fator de escala superior ao utilizado nos demais exemplos. As restrições, o carregamento e os resultados podem ser visualizados na Figura 34.

Figura 34 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Soriano e Lima (2006) – Exemplo 1.2

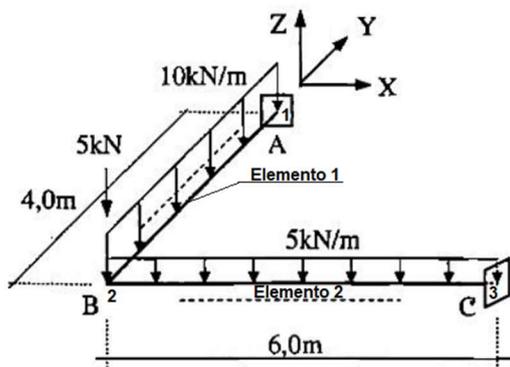


Fonte: A AUTORA (2024)

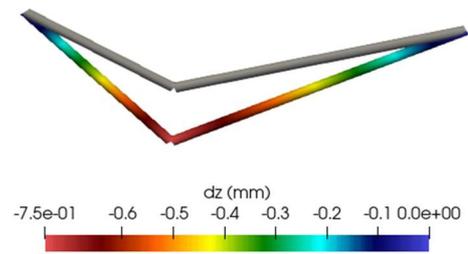
### 4.1.3. Exemplo 1.3 do GLG

O exemplo 3.6 de Soriano e Lima (2006) apresenta uma grelha com os mesmos parâmetros do exemplo anterior, porém submetida a condições distintas de carregamento e restrição. As definições do modelo e os respectivos resultados estão ilustrados na Figura 35.

Figura 35 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Soriano e Lima (2006) – Exemplo 1.3



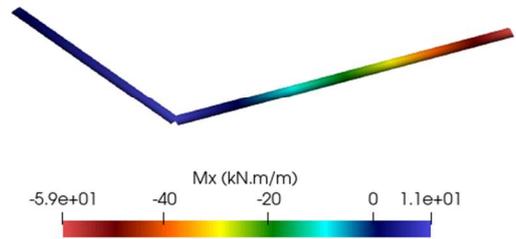
(a) Ilustração da grelha do Exemplo 1.3



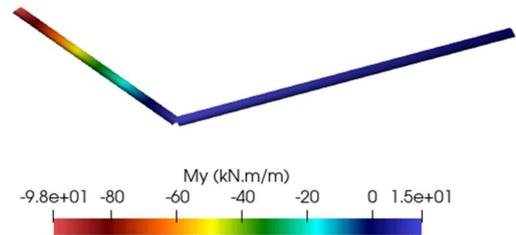
(b) Deslocamentos verticais

	SORIANO E LIMA	GLG	$\delta(\%)$
Deslocamentos e Rotações no nó 2			
$v_2$ (m)	-0,000752	-0,00075247	0,06
$\varphi_{2x}$ (rad)	0,000225	0,00022545	0,20
$\varphi_{2y}$ (rad)	-0,00011	-0,00011	0,00
Momentos Fletores e Torsões			
Elemento 1			
$M_{y1}$ (kN.m/m)	-98,184	-98,059	0,13
$M_{z2}$ (kN.m/m)	15,058	15,02997	0,19
$T_{y1}$ (kN.m/m)	-11,032	11,009	0,21
$T_{z2}$ (kN.m/m)	-11,032	11,009	0,21
Elemento 2			
$M_{x2}$ (kN.m/m)	11,032	11,009	0,21
$M_{x3}$ (kN.m/m)	-59,418	-59,3574	0,10
$T_{x2}$ (kN.m/m)	15,056	-15,02997	0,17
$T_{x3}$ (kN.m/m)	15,056	-15,02997	0,17
Esforço Cortante			
Elemento 1			
$V_1$ (kN)	48,258	48,272	0,03
$V_2$ (kN)	8,258	8,272	0,17
Elemento 2			
$V_2$ (kN)	3,258	3,272	0,43
$V_3$ (kN)	-26,742	-26,728	0,05

(e) Tabela comparativa dos resultados



(c) Momentos em x



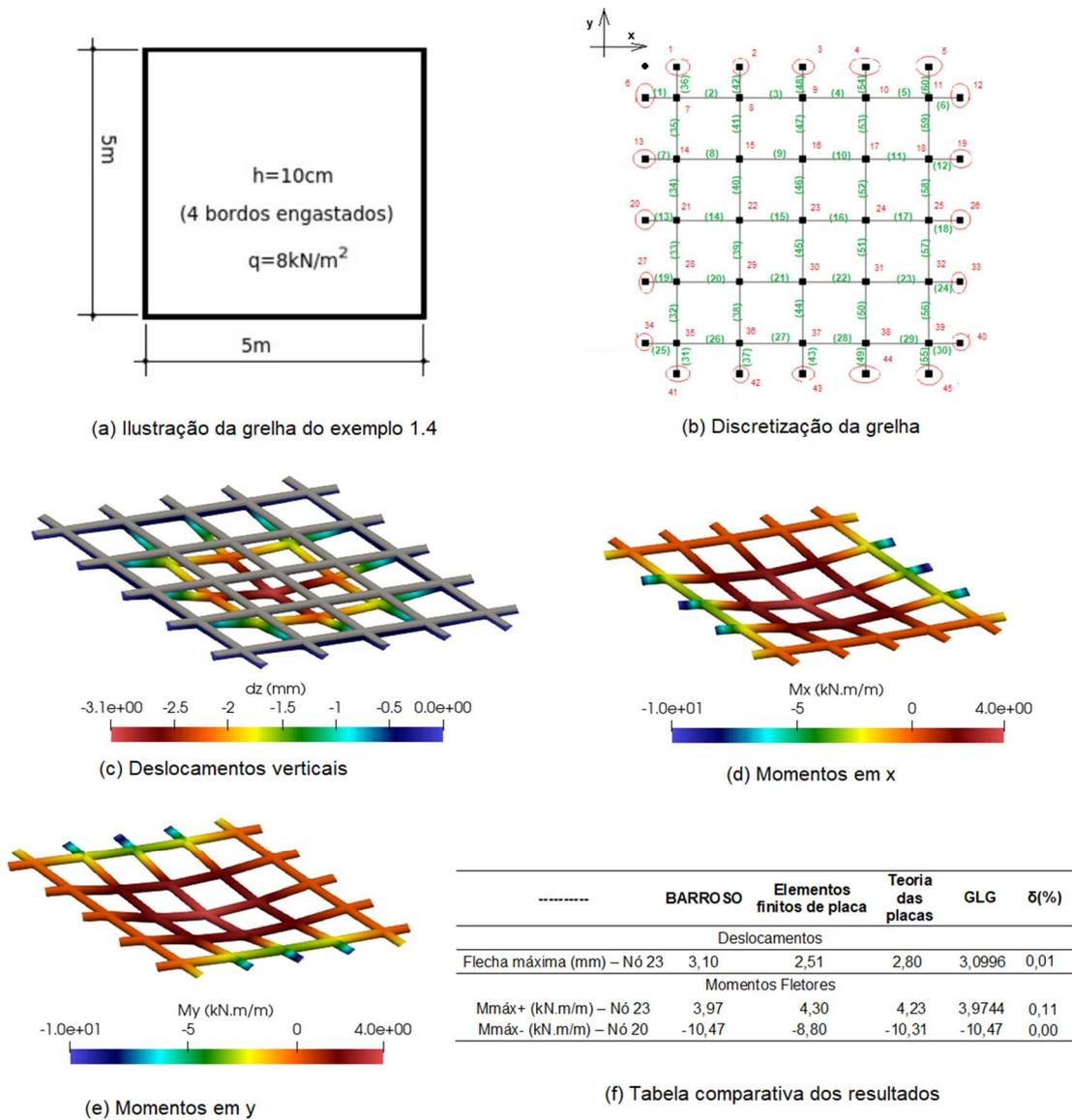
(d) Momentos em y

Fonte: A AUTORA (2024)

### 4.1.4. Exemplo 1.4 do GLG

Este exemplo refere-se a uma laje de concreto armado com  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 10 \text{ cm}$  e carregamento  $g + q = 8 \text{ kN/m}^2$ . Na análise de Barroso (2013), diferentes discretizações foram avaliadas com o objetivo de verificar a convergência dos resultados. Entretanto, para a validação do GLG, adotou-se apenas a malha com espaçamento unitário. As informações geradas pelo modelo estão sintetizadas na Figura 36.

Figura 36 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Barroso (2013) – Exemplo 1.4

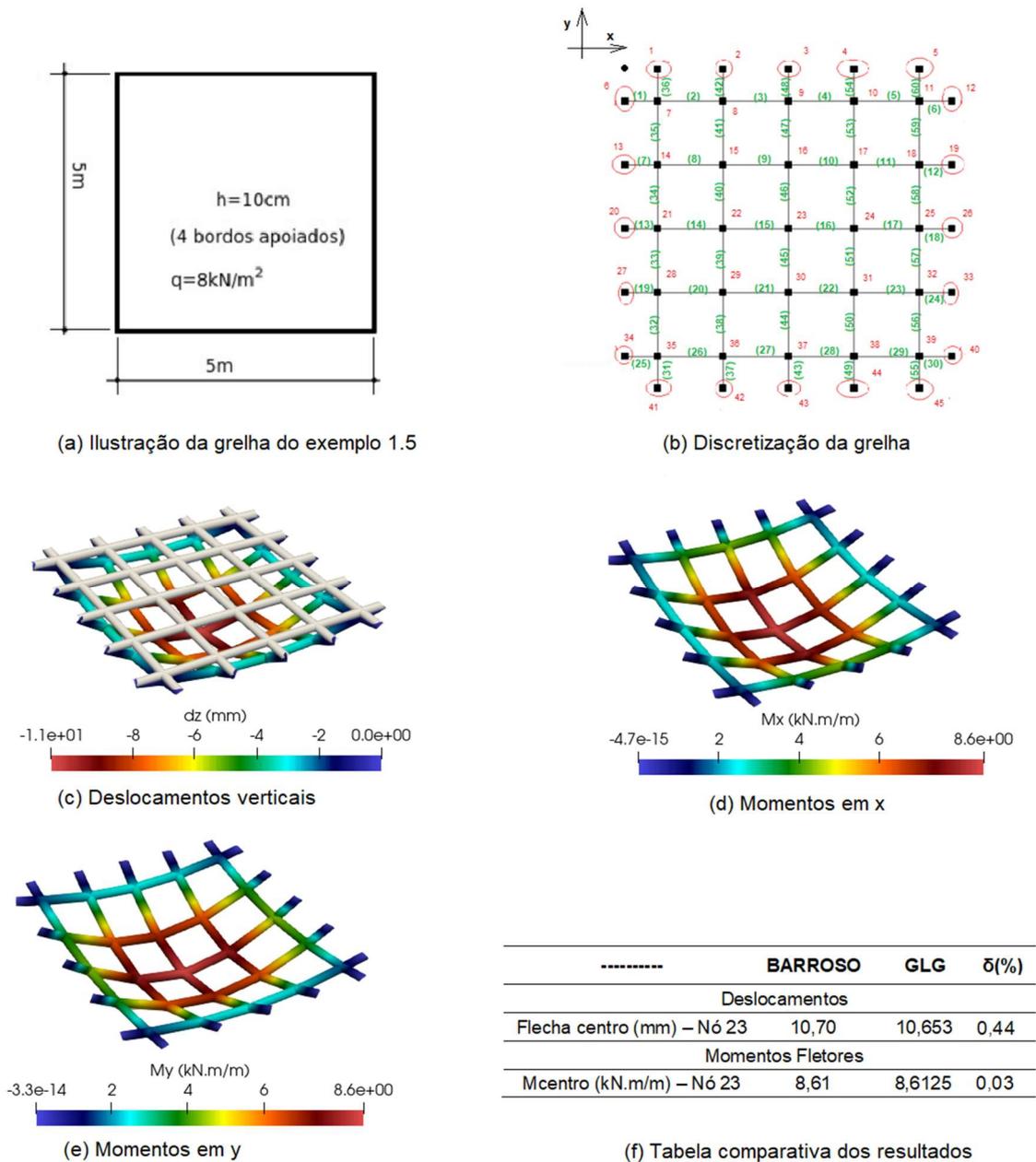


Fonte: A AUTORA (2024)

### 4.1.5. Exemplo 1.5 do GLG

Este caso tem como referência o exemplo anterior, preservando as características da laje, porém com alterações nas condições de contorno. Na configuração anterior, todas as bordas estavam engastadas; nesta, conforme Barroso (2013), as extremidades foram ajustadas para restringir a translação no eixo Z e impedir as rotações associadas à torção. Os resultados estão apresentados na Figura 37.

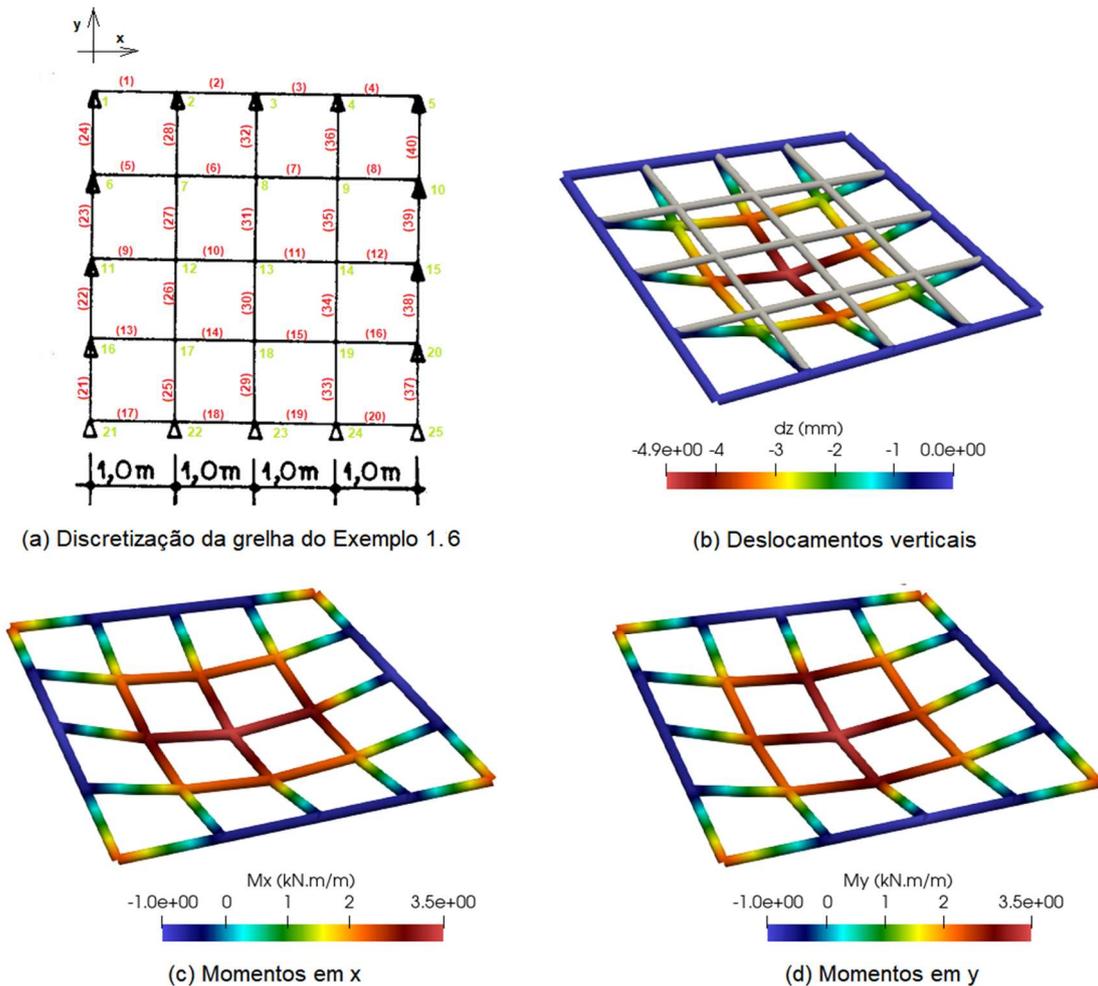
Figura 37 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Barroso (2013) – Exemplo 1.5



#### 4.1.6. Exemplo 1.6 do GLG

O caso estudado baseia-se no exemplo 2.1 de Carvalho (1994), com os seguintes parâmetros:  $E = 28559 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 8 \text{ cm}$  e  $g + q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ . A placa foi definida como simplesmente apoiada, submetida a cargas uniformemente distribuídas sobre os elementos da grelha. Os resultados calculados coincidiram com os valores apresentados pelo autor, de acordo com a Figura 38.

Figura 38 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.6



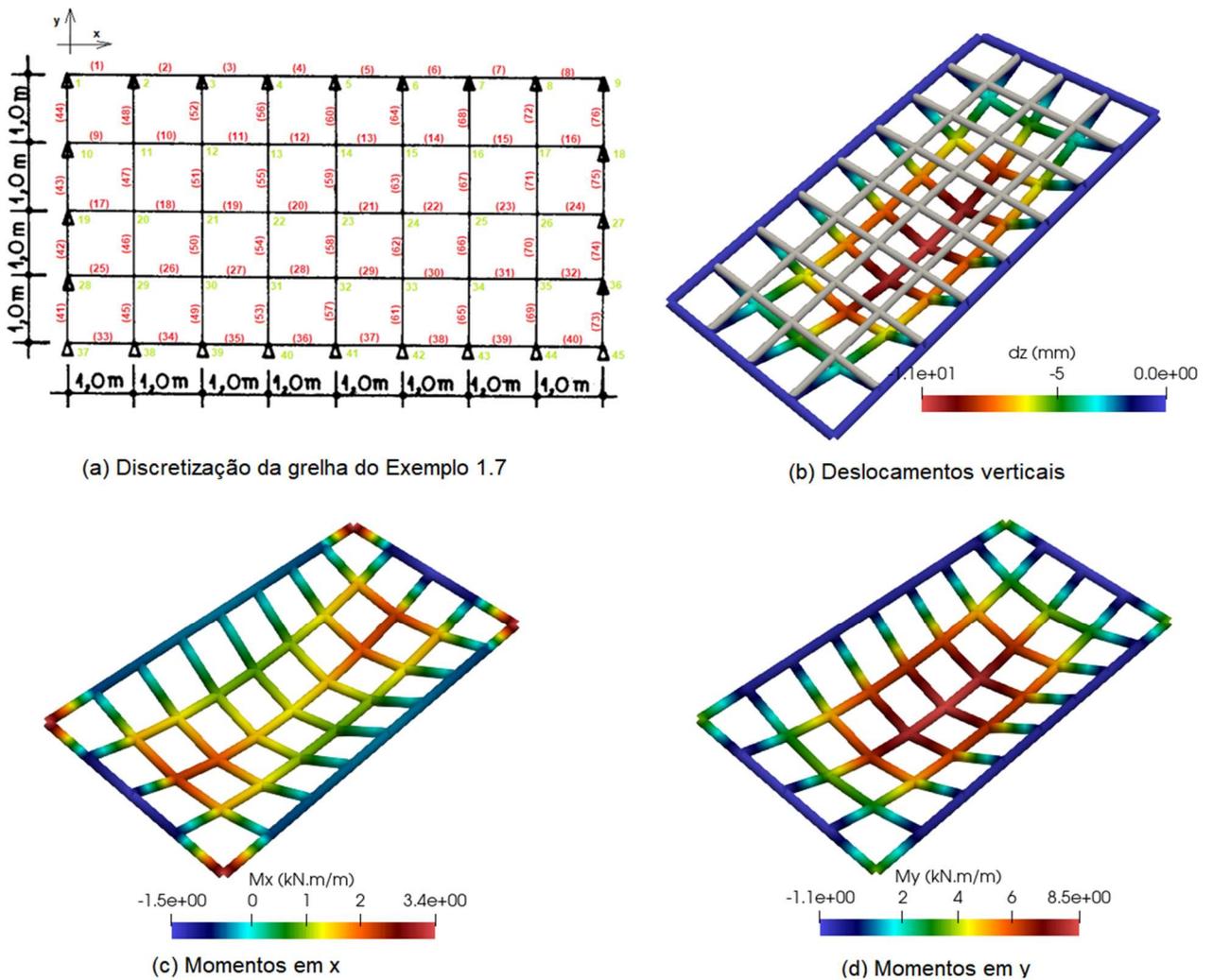
Deslocamentos e Momentos	CHUST	GLG	$\delta(\%)$
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 13	4,86	4,86	0,00
Mx <sub>centro</sub> (kN.m/m) – Nó 13	3,52	3,52	0,00

(e) Tabela comparativa dos resultados

#### 4.1.7. Exemplo 1.7 do GLG

Este exemplo corresponde ao 2.2 de Carvalho (1994), mantendo os parâmetros do caso anterior, com a única diferença na geometria da laje. Conforme observado na Figura 39, os dados gerados mostraram-se consistentes com os valores de referência.

Figura 39 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.7



Deslocamentos e Momentos Máximos	CHUST	GLG	$\delta$ (%)
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 23	11,32	11,29	0,27
$m_{x_{centro}}$ (kN.m/m) – Nó 23	1,28	1,28	0,00
$m_{y_{centro}}$ (kN.m/m) – Nó 23	8,49	8,49	0,00

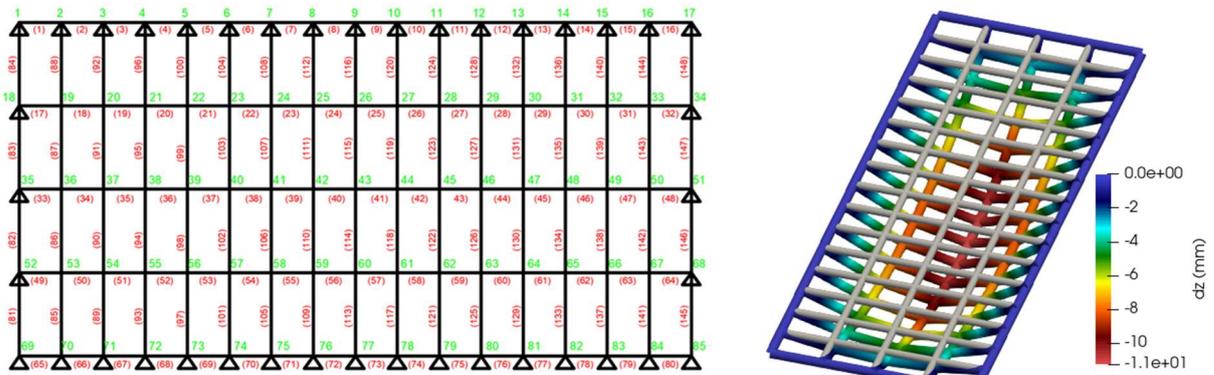
(e) Tabela comparativa dos resultados

Fonte: A AUTORA (2024)

### 4.1.8. Exemplo 1.8 do GLG

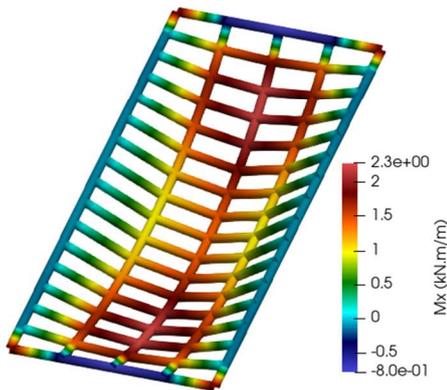
Esta análise avança a partir da configuração anterior, adotando uma malha mais refinada na menor dimensão da placa retangular, onde se concentram os maiores esforços. Essa estratégia possibilita avaliar o desempenho do GLG quanto à convergência dos resultados e à influência das diferentes faixas de discretização nas direções x e y. Os resultados obtidos, ilustrados na Figura 40, mostraram boa concordância com os dados de Carvalho (1994).

Figura 40 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.8

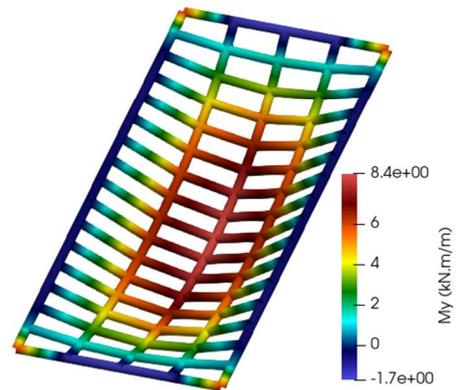


(a) Discretização da grelha do Exemplo 1.8

(b) Deslocamentos verticais



(c) Momentos em x



(d) Momentos em y

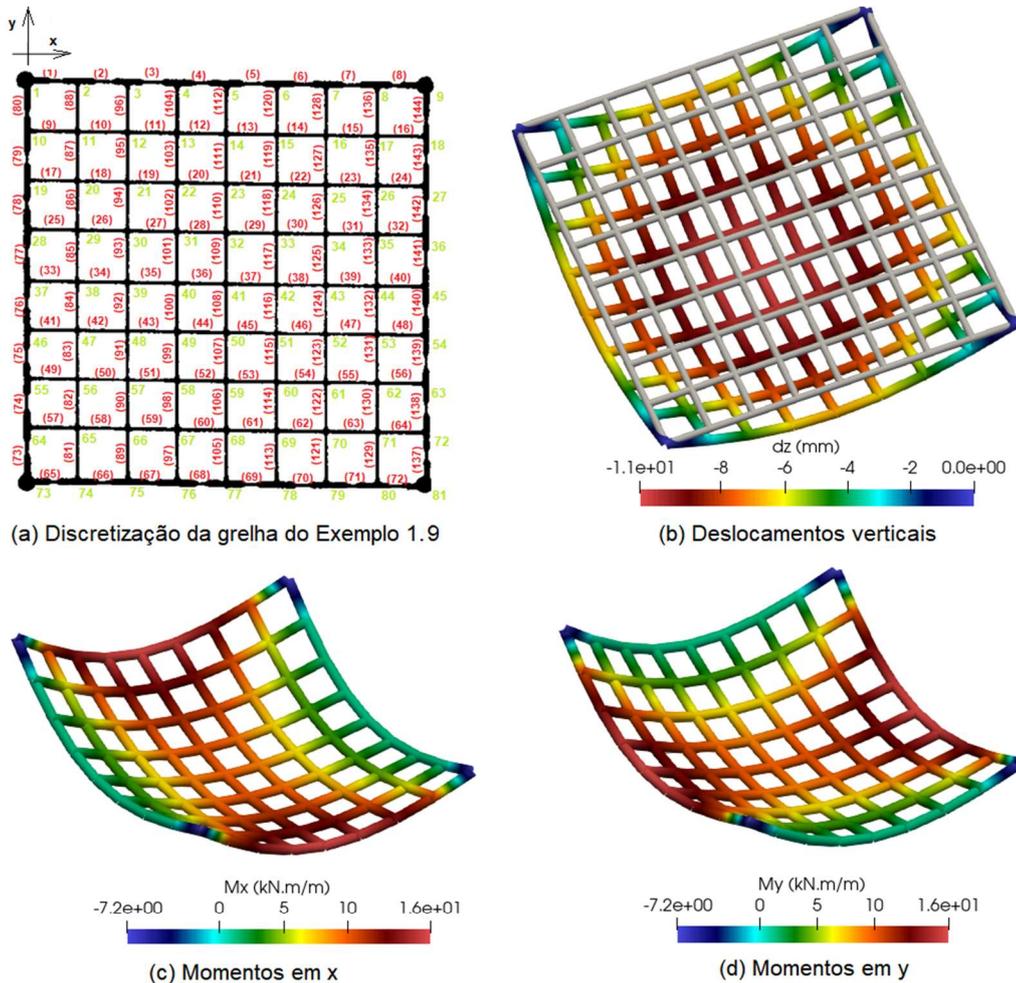
Deslocamentos e Momentos Máximos	CHUST	GLG	$\delta$ (%)
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 43	11,49	11,31	1,57
My <sub>centro</sub> (kN.m/m) – Nó 43	8,39	8,42	0,36

(e) Tabela comparativa dos resultados

### 4.1.9. Exemplo 1.9 do GLG

Com base no exemplo 2.3 de Carvalho (1994), este modelo se distingue dos anteriores por apresentar bordas livres, com a placa apoiada diretamente sobre quatro pilares. Foram adotados os seguintes parâmetros:  $E = 28500 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 12 \text{ cm}$ ,  $L_x = L_y = 4 \text{ m}$  e  $g + q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ . Além disso, a discretização da estrutura foi definida com espaçamento de 50 cm em ambas as direções. Os dados da análise no GLG demonstraram boa proximidade com os valores de referência, conforme a Figura 41.

Figura 41 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.9



Deslocamentos e Momentos Máximos	CHUST	GLG	$\delta(\%)$
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 41	10,57	10,59	0,19
Mx <sub>centro</sub> (kN.m/m) – Nó 41	9,602	9,602	0,00

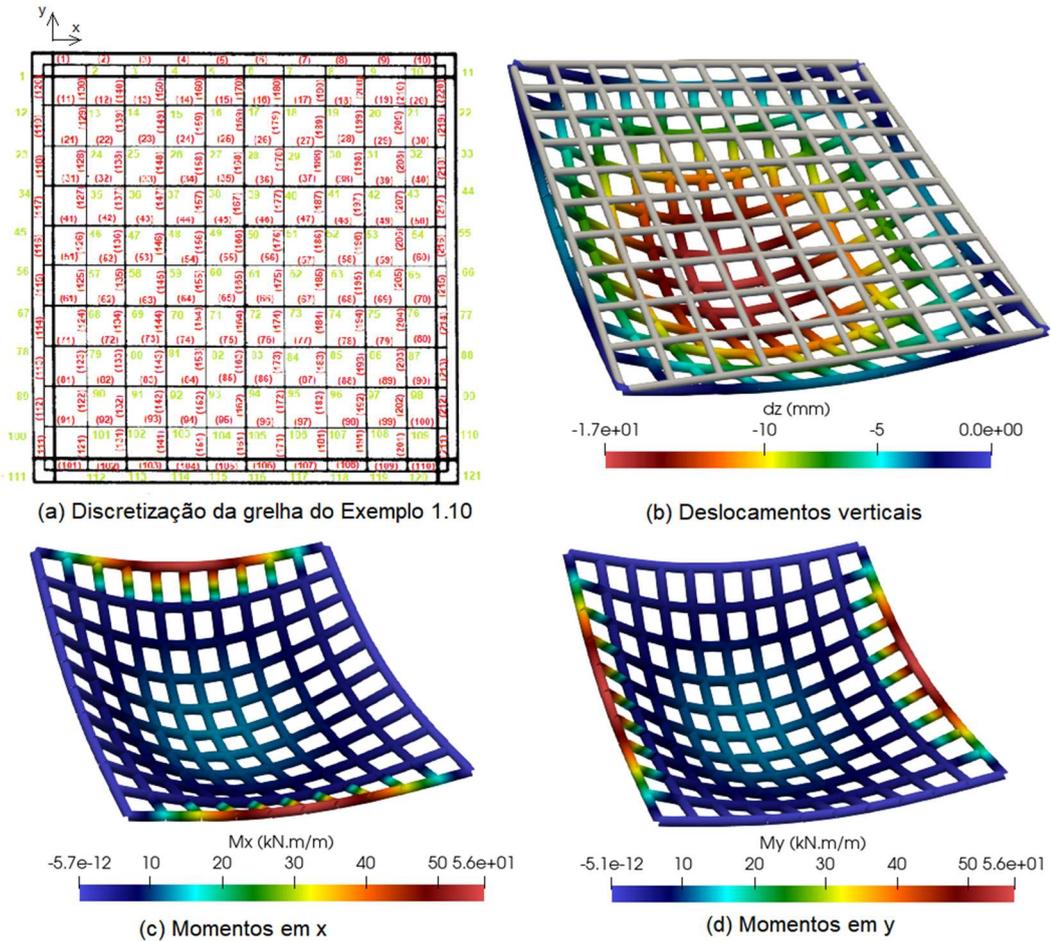
(e) Tabela comparativa dos resultados

Fonte: A AUTORA (2024)

**4.1.10. Exemplo 1.10 do GLG**

A presente análise corresponde ao exemplo 2.5 de Carvalho (1994), que, por sua vez, tem como referência o estudo de Barboza (1992). O modelo consiste em uma laje apoiada sobre vigas deformáveis na direção vertical. Foram empregados os seguintes parâmetros:  $E_c = 30000 \text{ MPa}$ ,  $G = 12000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $L_x = L_y = 5 \text{ m}$ ,  $h = 10 \text{ cm}$ , malha  $50 \times 50 \text{ cm}$ ,  $g + q = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$  e vigas com seção transversal de  $12 \times 50 \text{ cm}$ . Os resultados estão apresentados na Figura 42.

Figura 42 – Comparação entre os resultados do GLG e os de Carvalho (1994) – Exemplo 1.10



(a) Discretização da grelha do Exemplo 1.10

(b) Deslocamentos verticais

(c) Momentos em x

(d) Momentos em y

Deslocamentos e Momentos Máximos	CHUST	GNG	$\delta(\%)$
<b>Grelha 1 (<math>I_x = 2.44 \times 10^{-4}</math>)</b>			
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 61	14,4	14,4	0,0
$Mx_{centro}$ (kN.m/m) – Nó 61	10,24	10,16	0,8
<b>Grelha 2 (<math>I_x = 1.58 \times 10^{-4}</math>)</b>			
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 61	15,0	15,0	0,0
$Mx_{centro}$ (kN.m/m) – Nó 61	10,68	10,62	0,6
<b>Grelha 3 (<math>I_x = 0</math>)</b>			
Flecha <sub>centro</sub> (mm) – Nó 61	17,0	17,0	0,0
$Mx_{centro}$ (kN.m/m) – Nó 61	12,24	12,18	0,5

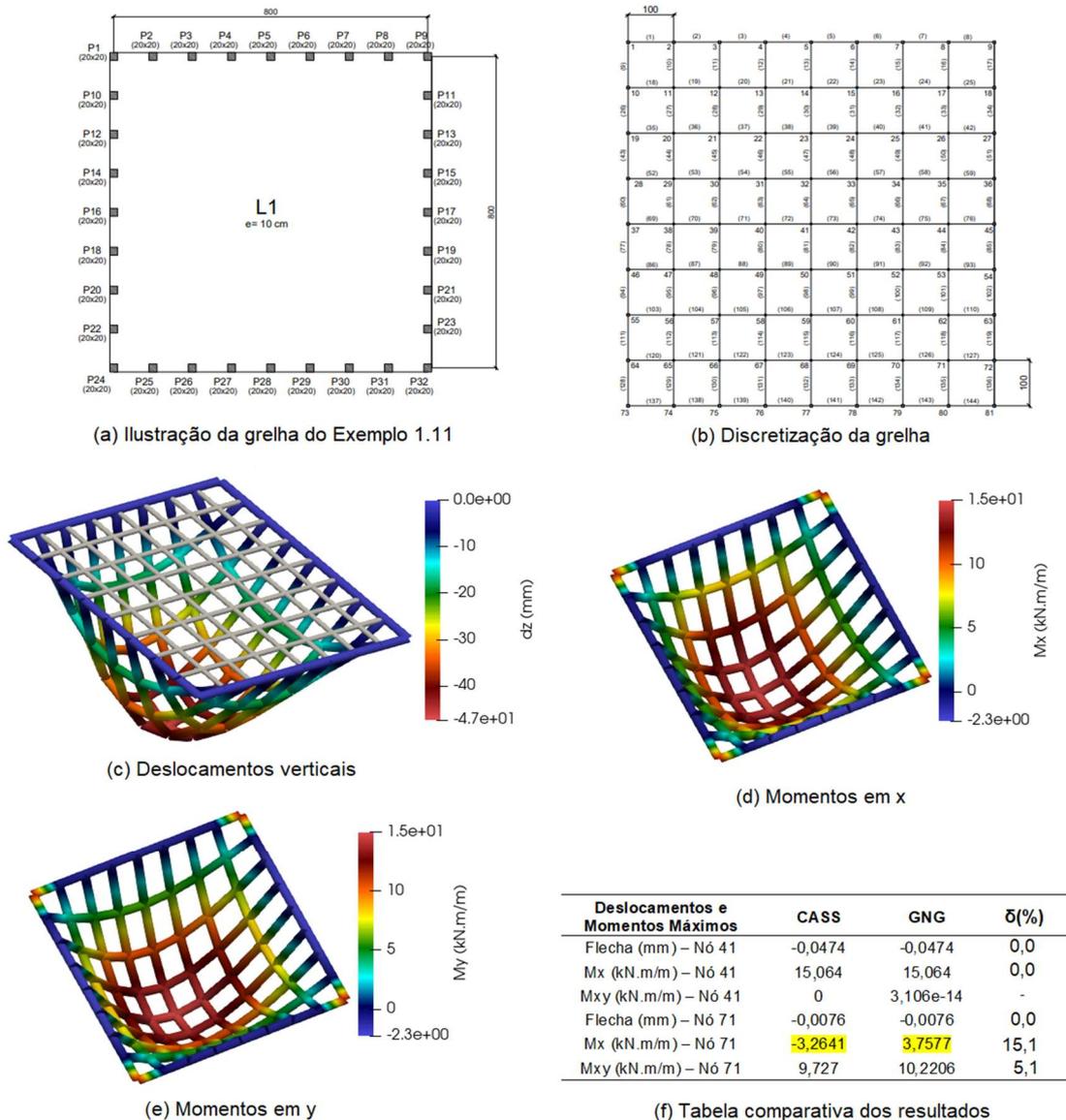
(e) Tabela comparativa dos resultados

Fonte: A AUTORA (2024)

### 4.1.11. Exemplo 1.11 do GLG

Este caso faz referência ao exemplo 1 de Cass (2015), que considera os seguintes parâmetros:  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 10 \text{ cm}$ ,  $L_x=L_y=8 \text{ m}$  e  $g + q = 5.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ . O modelo representa uma laje isolada, apoiada diretamente sobre pilares e discretizada com espaçamentos unitários. Os dados de saída do GLG apresentaram boa concordância com os valores do autor, com exceção do momento fletor no nó 71, como mostra a Figura 43.

Figura 43– Comparação entre os resultados do GLG e os de Cass (2015) – Exemplo 1.11

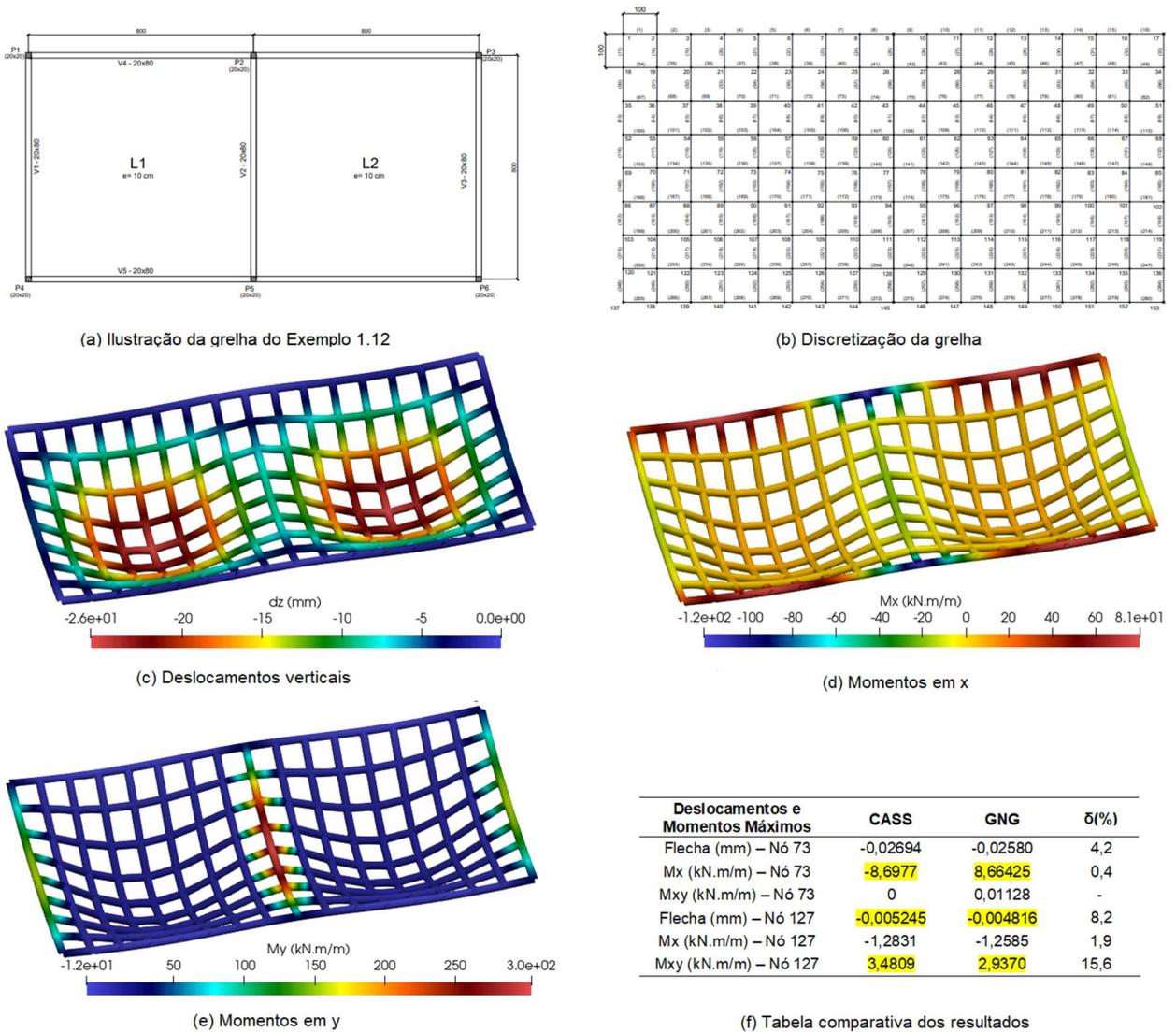


Fonte: A AUTORA (2024).

### 4.1.12. Exemplo 1.12 do GLG

Neste modelo, baseado no caso 2 de Cass (2015), que contempla duas lajes apoiadas sobre vigas, foram adotados os mesmos parâmetros do item anterior. Observa-se a ocorrência de algumas variações relevantes nos resultados, especialmente no momento torsor do nó 127, conforme indicado na Figura 44.

Figura 44– Comparação entre os resultados do GLG e os de Cass (2015) – Exemplo 1.12

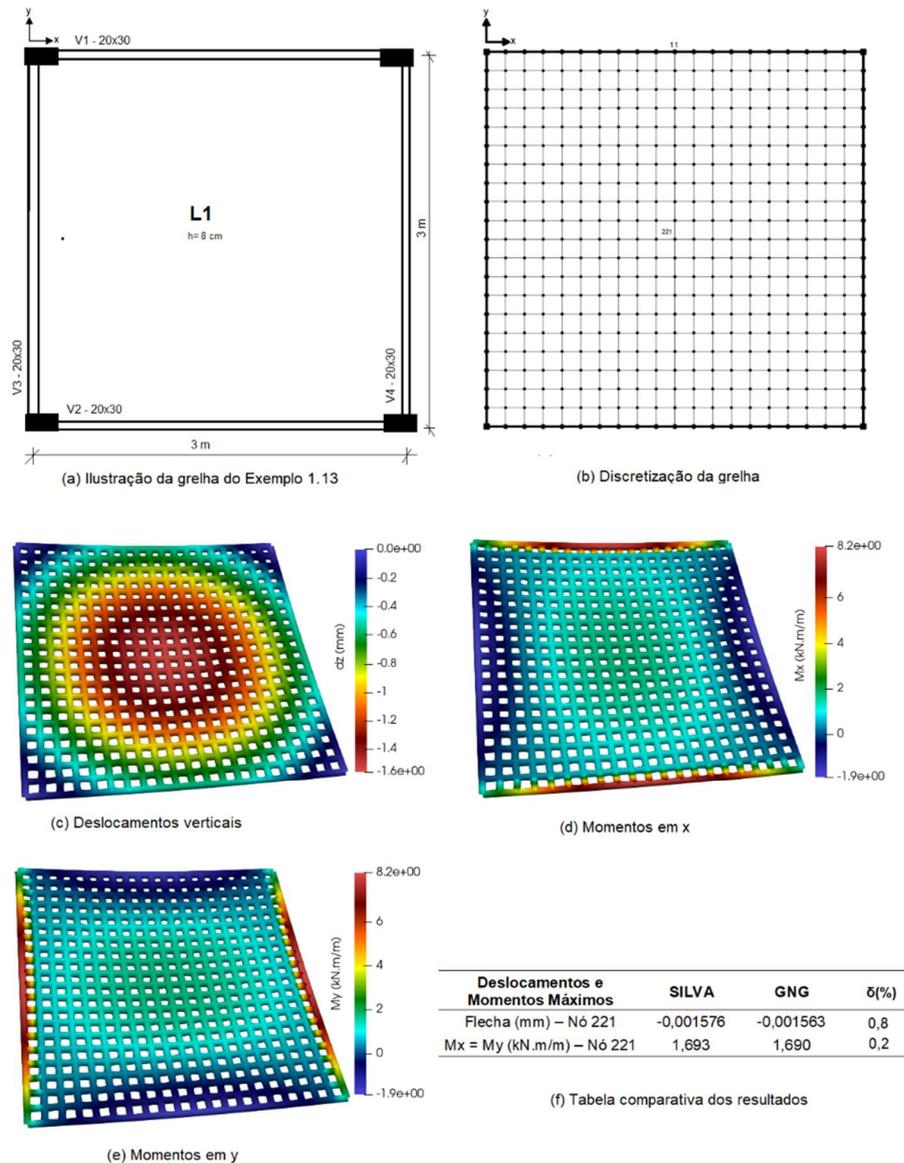


Fonte: A AUTORA (2024).

#### 4.1.13. Exemplo 1.13 do GLG

Esta análise corresponde ao exemplo apresentado por Silva *et al.* (2003), considerando os seguintes parâmetros:  $E_{CS} = 32 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 8 \text{ cm}$ ,  $L_x=L_y=3 \text{ m}$ , e  $g + q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ . O modelo representa uma laje quadrada, discretizada com espaçamento de 15 cm, apoiada sobre vigas deslocáveis com seção transversal de 20×30 cm, as quais, por sua vez, estão apoiadas em pilares. Conforme ilustrado na Figura 45, os dados gerados pelo algoritmo se mostraram consistentes com os valores de referência.

Figura 45– Comparação entre os resultados do GLG e os de Silva *et al.* (2003) – Exemplo 1.13

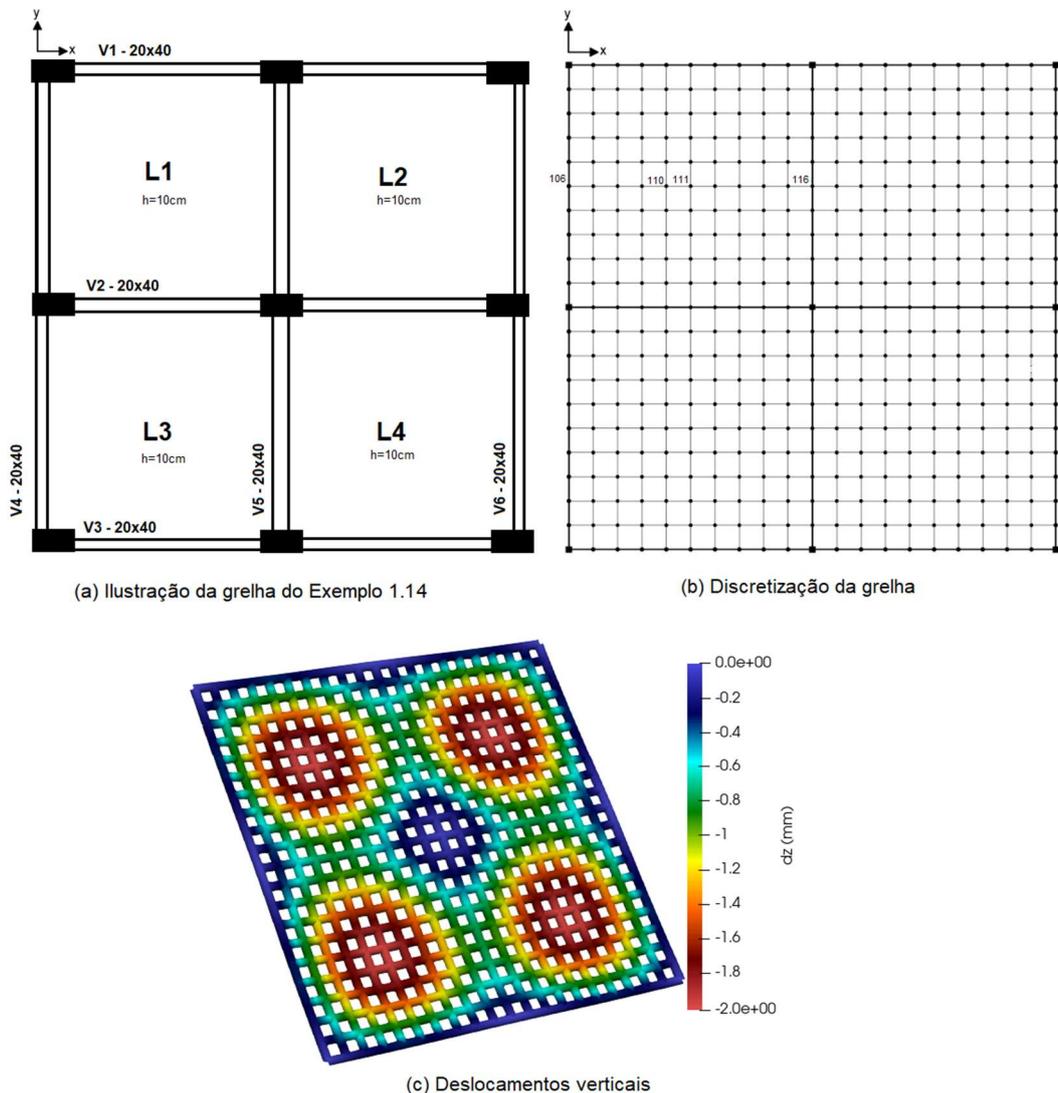


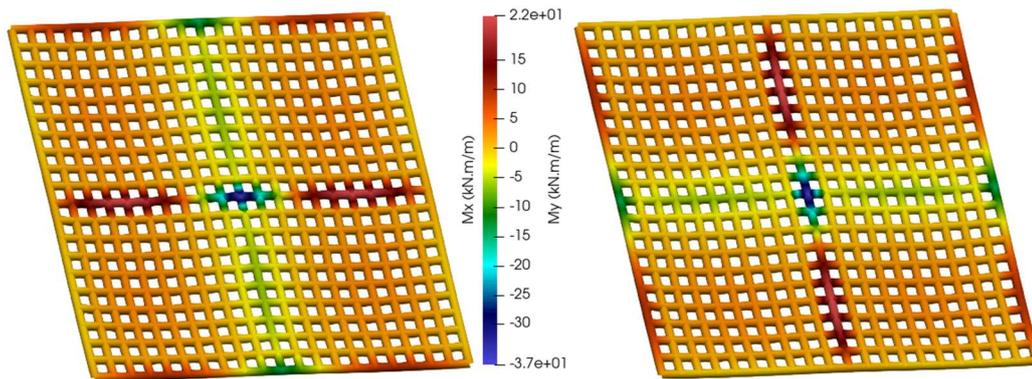
Fonte: A AUTORA (2024).

#### 4.1.14. Exemplo 1.14 do GLG

Por fim, a última etapa da validação do GLG utilizou outro exemplo de Silva *et al.* (2003), com as seguintes propriedades:  $E_{cs} = 32 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 10 \text{ cm}$  e  $g + q = 6,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ . A configuração analisada representa um pavimento composto por quatro lajes quadradas, com 4 m de lado, apoiadas sobre vigas deslocáveis com seção transversal de 20 x 40 cm, que, por sua vez, se apoiam em pilares. A malha foi definida com espaçamento de 40 cm, e a rigidez à torção das vigas foi considerada reduzida em 90%, conforme indicado pelo autor. Os resultados obtidos apresentaram boa aproximação em relação aos valores de Silva *et al.* (2003), como mostra a Figura 46.

Figura 46– Comparação entre os resultados do GLG e os de Silva *et al.* (2003) – Exemplo 1.14





(d) Momentos em x

(e) Momentos em y

Deslocamentos e Momentos Máximos	SILVA (A)	GLG (B)	B / A (%)
Flecha <sub>laje</sub> (mm) – Nó 111	2,043	2,0198	98.9
$Mx_{max+}$ (kN.m/m) – Nó 110	3,123	3,1277	100.2
$Mx_{max-}$ (kN.m/m) – Nó 116	-6,325	-6,2345	98.6
$Mx_{bords}$ (kN.m/m) – Nó 106	-0,86	-0,8745	101.7
Flecha <sub>viga</sub> (mm) – Nó 106	0,31	0,32	103.2

(f) Tabela comparativa dos resultados

Fonte: A AUTORA (2024).

## 4.2. VALIDAÇÃO DO CÓDIGO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

Para validar o código desenvolvido para análise não-linear, pretendia-se, a princípio, realizar testes com exemplos simplificados para avaliar de forma independente o comportamento dos diagramas Momento–Curvatura e Torção–Rotação, estratégia que permitiria maior controle das variáveis e uma melhor avaliação do desempenho numérico da rotina.

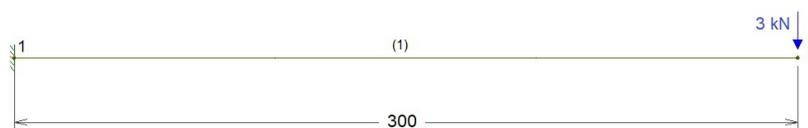
Entretanto, durante a análise do diagrama Momento–Curvatura — adotando coeficiente redutor de torção igual a 1 em todos os testes — foram identificados comportamentos que comprometeram a efetividade da abordagem, tornando pouco pertinente, neste estágio, prosseguir com o estudo do diagrama constitutivo associado à torção. Ainda assim, os testes realizados foram relevantes para o entendimento da rotina e forneceram subsídios importantes para futuras implementações, como será discutido adiante.

O caso analisado corresponde a um exemplo clássico de viga em balanço submetida a uma carga concentrada na extremidade, considerando os seguintes parâmetros:  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 30 \text{ cm}$ ,  $P = 3 \text{ kN}$ ,  $\text{NumIncr} = 10$  e  $\text{Tol} = 10^{-6}$ . As expressões utilizadas para o cálculo do deslocamento e do momento máximos são apresentadas abaixo, seguidas da representação da viga na Figura 47.

$$\delta = \frac{P * L^3}{3 * E * I} = 2,52 * 10^{-3} \text{ m} \quad (53)$$

$$M = P * L = 9 \text{ kN} * \text{m} \quad (54)$$

Figura 47– Barra engastada com carga concentrada

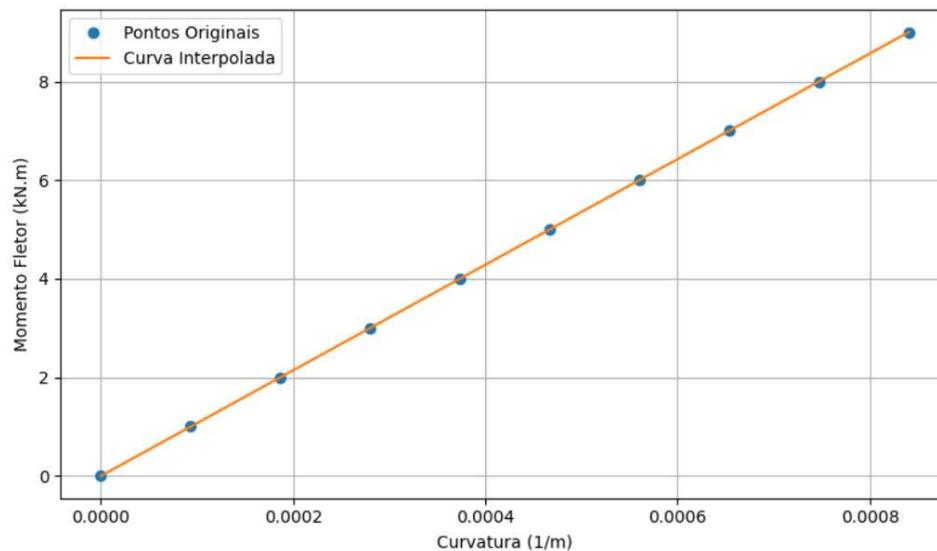


Fonte: A AUTORA (2025)

O primeiro teste teve como finalidade avaliar o solver não-linear a partir de um problema linear. Como a não-linearidade do modelo é introduzida pelo diagrama constitutivo fornecido pelo usuário, adotou-se, neste caso, um diagrama linear,

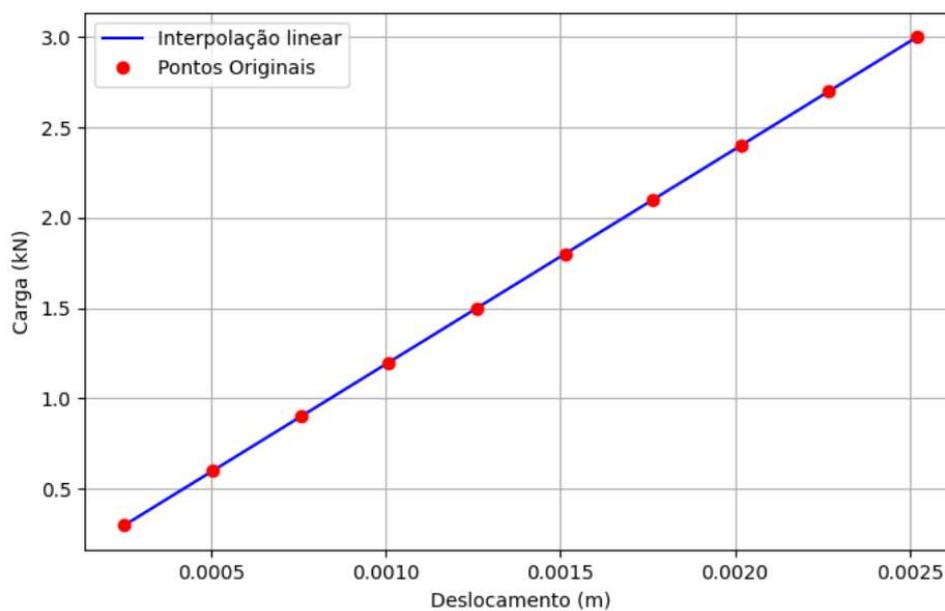
construído a partir da rigidez teórica da seção, sem considerar armadura. As Figura 48, Figura 49 e Figura 50 e a Tabela 3 apresentam, respectivamente, o diagrama Momento-Curvatura empregado, o gráfico da trajetória CargaxDeslocamento, os resultados do GNG no Paraview e a comparação entre os resultados obtidos e os valores teóricos, os quais indicam bom grau de precisão na resposta do código.

Figura 48– Diagrama Momento-Curvatura (Teste 1)



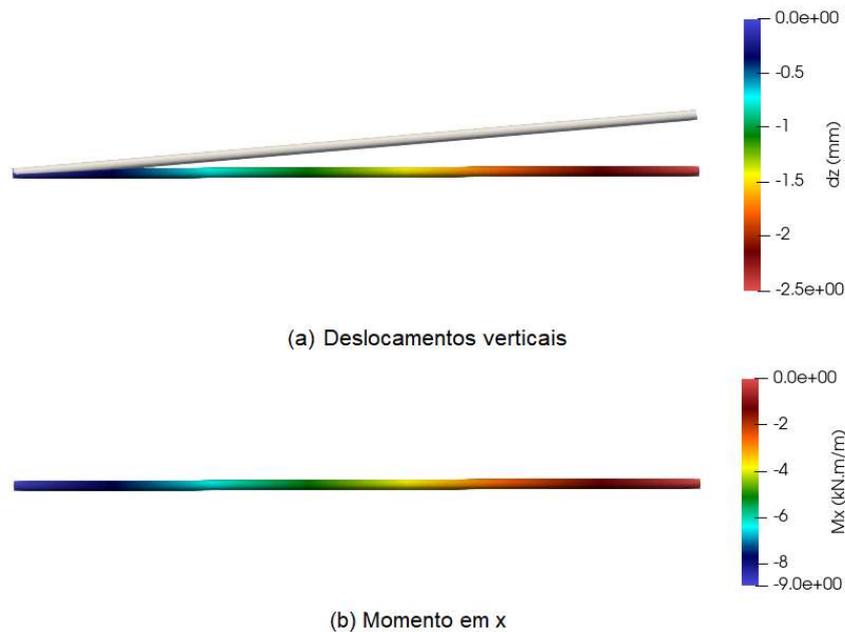
Fonte: A AUTORA (2025)

Figura 49– Trajetória CargaxDeslocamento (Teste 1)



Fonte: A AUTORA (2025)

Figura 50– Resultados gerados pelo GNG no Paraview



Fonte: A AUTORA (2025)

Tabela 3 – Comparação dos resultados do Teste 1

<b>Deslocamentos e Momentos Máximos</b>	<b>TEÓRICO (A)</b>	<b>GNG (B)</b>	<b><math>\delta</math> (%)</b>
Flecha (mm)	2,52	2,52	0.0
Momento (kN.m)	9,0	9,0	0.0

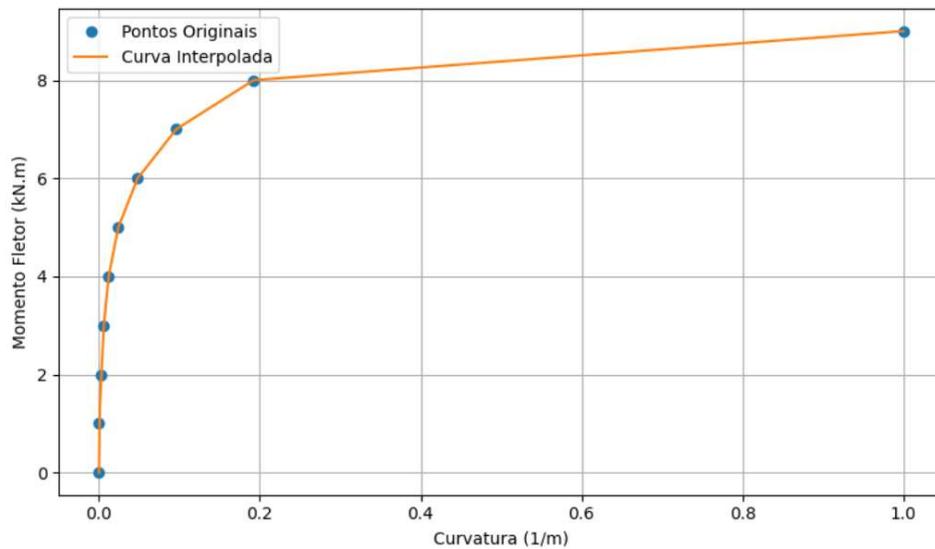
Fonte: A AUTORA (2025)

O teste subsequente teve como objetivo avaliar a capacidade do código em capturar o comportamento não-linear da estrutura a partir da definição de um Diagrama Momento-Curvatura com relação não-linear entre as variáveis. Buscou-se verificar se essa não-linearidade seria adequadamente refletida na resposta do modelo, tanto no processo de convergência numérica quanto na trajetória CargaxDeslocamento, ou se o sistema, mesmo convergindo, ainda responderia de forma linear. Para isso, manteve-se a ordem de grandeza dos momentos, mas as curvaturas foram atribuídas de forma arbitrária, com o intuito de induzir uma redução progressiva da rigidez secante e avaliar a sensibilidade do algoritmo frente ao modelo constitutivo adotado.

Como previsto, registrou-se um aumento significativo nos deslocamentos — atingindo 10,8 cm — enquanto o momento máximo permaneceu em 9 kN·m. Dado

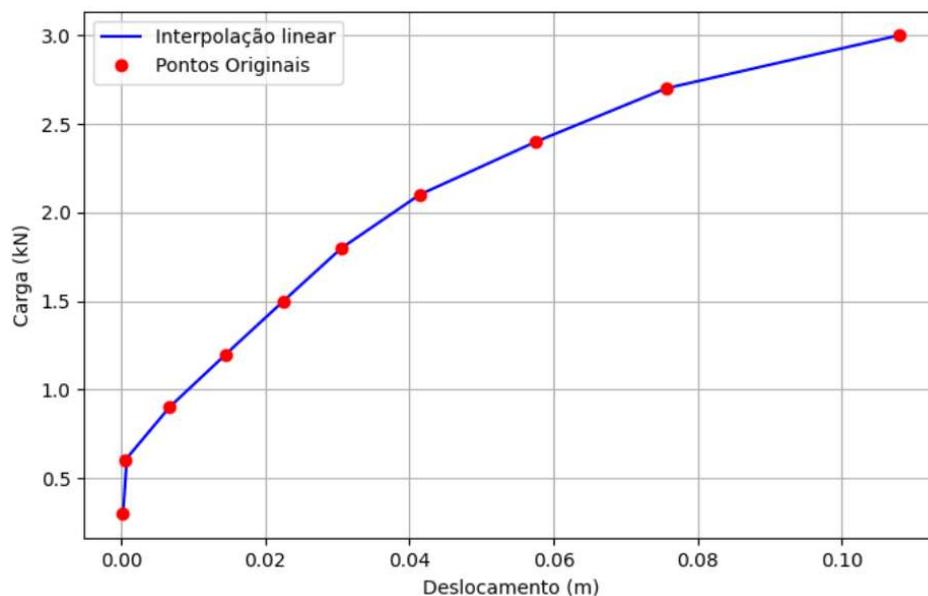
que o diagrama constitutivo foi intencionalmente definido de forma arbitrária apenas para induzir a não-linearidade estrutural, esses resultados não serviram para comparação, mas sim para demonstrar a capacidade do algoritmo em reproduzir tal comportamento. Conforme ilustrado na Figura 52, a trajetória CargaDeslocamento exibe a resposta não-linear esperada, em conformidade com o diagrama constitutivo representado na Figura 51.

Figura 51– Diagrama Momento-Curvatura (Teste 2)



Fonte: GNG (2025)

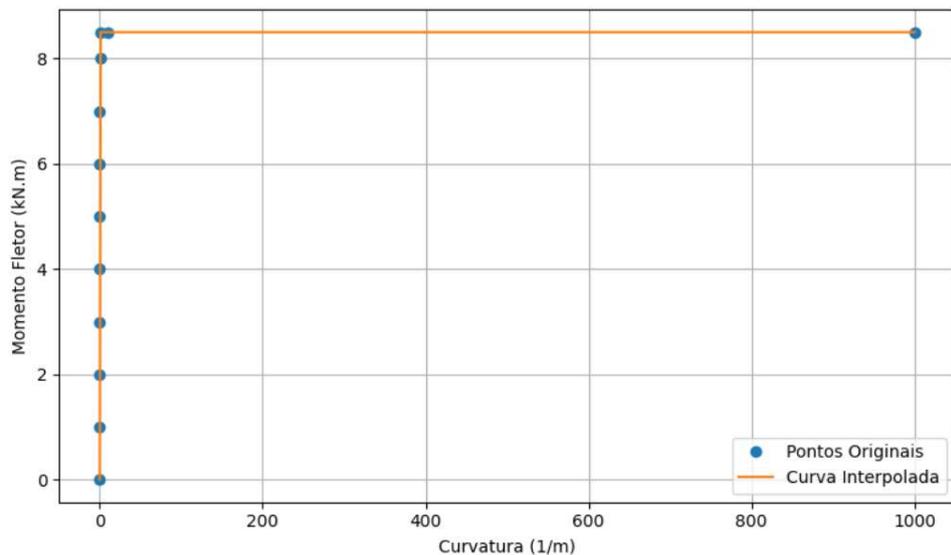
Figura 52– Trajetória Carga x Deslocamento (Teste 2)



Fonte: GNG (2025)

Dando continuidade à validação, o teste seguinte teve como objetivo avaliar o comportamento do modelo quando o momento limite definido pelo diagrama constitutivo é inferior ao momento teórico correspondente ao carregamento aplicado. Para isso, manteve-se a carga concentrada de 3 kN — que, teoricamente, resultaria em um momento de 9 kN·m no engaste, conforme previamente demonstrado. No entanto, no diagrama Momento-Curvatura, adotou-se um valor limite de 8,5 kN·m, com a introdução de um patamar que manteve o momento constante, mesmo diante de um aumento expressivo da curvatura, conforme ilustrado na Figura 53.

Figura 53– Diagrama Momento-Curvatura (Teste 3)



Fonte: GNG (2025)

A princípio, supunha-se que o modelo não apresentaria convergência ao atingir valores de curvatura correspondentes a momentos superiores ao limite estabelecido pelo diagrama Momento–Curvatura. Ressalta-se que a rotina de interpolação implementada não admite extrapolações, de modo que, uma vez ultrapassado o domínio do modelo constitutivo, o algoritmo deveria interromper o processamento por ausência de valores associados à curvatura solicitada. No entanto, a análise prosseguiu com convergência regular, indicando que as curvaturas obtidas ao longo do processo permaneceram dentro dos limites de definição da curva constitutiva adotada.

Para investigar esse comportamento, a carga concentrada aplicada ao problema foi aumentada progressivamente, mantendo-se a relação constitutiva, a fim de identificar o ponto a partir do qual a análise ultrapassaria seu intervalo de validade.

Verificou-se que, apenas a partir de uma carga de 6 kN, a curvatura extrapolou os limites da curva adotada, como pode ser visto na Figura 54, impedindo a convergência do algoritmo. Destaca-se que, enquanto não ocorreu extrapolação, o valor final do momento obtido pelo modelo convergiu para o valor teórico — o que é coerente com o comportamento esperado de sistemas isostáticos, cujos esforços internos são determinados unicamente pela estática.

Figura 54– Aviso de Extrapolação (Teste 3)

A value (1052.298908991039) in x\_new is above the interpolation range's maximum value (1000.0).

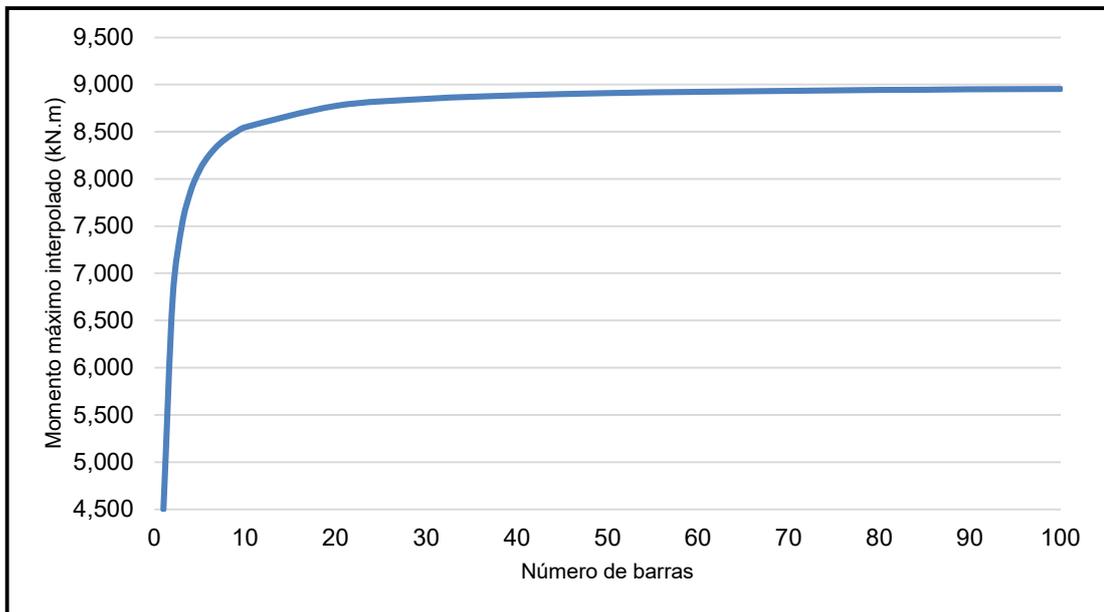
Fonte: GNG (2025)

Ao analisar o funcionamento interno do código para o carregamento de  $P = 3 \text{ kN}$ , observou-se que o momento extraído da curva para ajuste da rigidez no último incremento foi de aproximadamente  $4,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , valor que corresponde à metade do momento teórico de  $9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Esse resultado se explica pelo fato de que a rigidez da seção é calculada com base na curvatura média ao longo da barra, assim, como a curvatura se concentra na região do engaste — onde o momento é máximo —, as demais regiões da barra contribuem para reduzir a curvatura média utilizada na interpolação.

O momento fletor, neste caso, apresentou convergência em razão da isostaticidade do problema, ainda que o valor obtido por meio da interpolação do diagrama Momento-Curvatura tenha sido inferior ao esperado. Para aprofundar essa análise, foi realizada uma discretização progressiva da estrutura, variando de um único elemento até um total de 100 barras, a fim de conduzir um teste de convergência (Teste 4). Esse processo permitiu a obtenção de curvaturas médias mais localizadas e, portanto, representativas desses elementos estruturais.

Em cada etapa, foi avaliado o momento resultante da interpolação. Conforme ilustrado na Figura 55 — que apresenta o diagrama do Momento Máximo Interpolado em função do número de barras —, observa-se que os resultados convergiram progressivamente para o valor teórico à medida que a discretização foi refinada.

Figura 55– Diagrama Momento máximo Interpolado x Número de barras (Teste 4)



Fonte: A AUTORA (2025)

Dessa forma, constatou-se que o nível de discretização da estrutura — inclusive em um segmento de barra da grelha — exerce influência significativa nos resultados fornecidos pelo GNG, sendo necessária uma discretização elevada para garantir a convergência dos momentos. Tal condição compromete a viabilidade prática da abordagem testada. Entretanto, ainda que os resultados não tenham sido plenamente satisfatórios, a estratégia adotada apresentou relevante caráter exploratório.

Considerando a abrangência do presente trabalho e as limitações de tempo, a reformulação da abordagem não foi viável no momento. Ainda assim, obteve-se como produto um código aberto, com base sólida, bem estruturado e flexível, apto à implementação de novas metodologias em estudos futuros. Portanto, a ferramenta desenvolvida demonstra potencial para evolução contínua e adaptação a diferentes estratégias de análise.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo o desenvolvimento e a implementação de rotinas computacionais para a análise linear e não-linear de lajes em concreto armado através do Método da Analogia de Grelha. Foram elaborados dois algoritmos: o GLG, voltado à análise linear, e o GNG, direcionado à análise não-linear, que incorpora os efeitos físicos não-lineares dos materiais por meio de relações constitutivas. Ambos fornecem, como resultados, os deslocamentos e os esforços atuantes nos elementos da estrutura.

A formulação não-linear adotada demandou a dedução de expressões para curvatura e rotação médias, bem como a aplicação dos métodos incremental e iterativo, com solução obtida pelo método de Picard. O desenvolvimento das rotinas foi embasado em estudos teóricos e validado por meio de exemplos extraídos da literatura. O GLG foi submetido a avaliações constantes e ajustes sucessivos, com a análise de diversos casos, de modo a garantir sua confiabilidade.

Com os resultados satisfatórios do GLG, deu-se início à implementação do GNG. Seus testes foram conduzidos a partir de um exemplo de viga em balanço submetida a carga concentrada na extremidade, com foco no diagrama Momento–Curvatura. Essa configuração permitiu analisar o desempenho da abordagem implementada e identificar sua limitação.

Das análises realizadas, destacam-se as seguintes conclusões:

- O GLG apresentou precisão adequada nos casos analisados;
- O GNG reproduziu de forma satisfatória os efeitos não-lineares, a partir de curvas representativas, mostrando-se adaptável a diferentes modelos;
- Embora a solução de curvatura e giro axial médios tenha se mostrado limitada, o GNG constitui uma ferramenta de código aberto e flexível, o que favorece a incorporação de novas estratégias;
- O tempo de processamento não se apresentou como fator limitante no uso das rotinas desenvolvidas.

Como desenvolvimento futuro, pretende-se aprofundar a investigação do GNG, incorporando novas soluções ao código com vistas ao aprimoramento da análise não-linear. Sugere-se também a ampliação do algoritmo para contemplar outros efeitos físicos não-lineares, como a fluência. Em relação aos diagramas constitutivos, uma perspectiva promissora é a utilização de inteligência artificial treinada para gerar os

diagramas Momento-Curvatura e Torção-Giro Axial. Adicionalmente, é necessário considerar a dependência do modelo não-linear em relação ao conhecimento prévio da armadura.

Outro fator importante é a consideração dos sentidos das curvaturas e rotações, que não foi incorporada à abordagem atual, mas que deve ser contemplada em futuras implementações. Em estruturas com armaduras positivas e negativas assimétricas, essa simplificação compromete a análise, pois diferentes sentidos de momento geram diagramas distintos.

Diante do exposto, conclui-se que as rotinas desenvolvidas para a análise linear e não-linear de lajes de concreto armado representam um ponto de partida promissor. Trata-se de ferramentas de código aberto, simples, flexíveis e com fundamentação teórica clara, o que favorece sua evolução e a implementação de novas soluções. Espera-se que, com os aprimoramentos futuros, essas ferramentas se consolidem como recursos relevantes de apoio à análise estrutural e ao dimensionamento de lajes de concreto armado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAÚJO, José Milton de. Curso de concreto armado. 5. ed. Rio Grande, RS: Editora Dunas, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2023.
- BARBOZA, Aline da Silva Ramos. Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes-vigas de concreto armado mediante analogia de grelha. 1992.
- BARBOZA, A. S. R.; EL DEBS, Mounir Khalil. Analise da interacao laje-viga em pavimentos de concreto usando o processo da analogia de grelha. Anais, 1993.
- BARROSO, Elias Saraiva. Análise computacional de grelhas. 2013.
- BASTOS, Paulo Sérgio. Lajes de concreto armado. Departamento de Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista, Campus de Bauru, São Paulo, 2023.
- CARVALHO, Roberto Chust. Análise não-linear de pavimentos de edificios de concreto através da analogia de grelha. 1994.
- CASS, Andrew John Richter. Programa gráfico livre para a análise de lajes de edificações de concreto armado usando o modelo de grelha equivalente. 2015.
- CASTRO, Luis Manuel Santos. Modelação de Lajes com elementos de Grelha. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2002.
- CAVALCANTI, Marcus Vinícius Silva. Análise matricial de estruturas reticuladas: um curso para acadêmicos de Engenharia Civil. Anápolis, 2006.
- CHEN, W. F.; LIU, X. L. *Limit analysis in soil mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1990.
- COELHO, Jano D'Araujo *et al.* Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha. 2000.
- COL DEBELLA, Leticia Barizon. Estudo da analogia de grelha no cálculo de lajes maciças de concreto armado. 2015.
- COTTA, Igor Frederico Stoianov. Desenvolvimento de programa livre automático para determinação de esforços solicitantes, deslocamentos e armadura de pavimentos em concreto armado usando a analogia de grelha não-linear. Iniciação Científica FAPESP, São Carlos, 2003.
- DE ALMEIDA, Erica Damasceno; FONSACA, Michele. Criação de código computacional didático para cálculo de estruturas reticuladas espaciais via método dos deslocamentos em formulação matricial (CERBERUS). 2018.

- DE OLIVEIRA RODRIGUES, Rogério; VENTURINI, Wilson Sergio. Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado. 1997.
- DOS REIS, Eduardo Martins. Análise de pavimentos de edifícios utilizando a analogia de grelha. 2007.
- DUARTE, Heraldo. Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado. 1998.
- ELOY, Luiz. Métodos dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas. Elsevier Brasil, 2010.
- FERNANDES, Beatriz da Costa. Contribuição ao estudo numérico de lajes maciças utilizando o método de analogia de grelha. 2020.
- FREIRE, Ricardo Gomes Duarte. Análise estrutural de tabuleiros de ponte em laje usando o método de analogia de grelha. 2013.
- GRECO, Annalisa *et al.* A Review of Simplified Numerical Beam-like Models of Multi-Storey Framed Buildings. Buildings, v. 12, n. 9, p. 1397, 2022.
- HAMBLY, E. C. Bridge deck behaviour. 2nd ed. London: Chapman & Hall, 1991.
- HOROWITZ, Bernardo. Notas de aula de Concreto II. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2016.
- HUYBRECHTS, Steven; TSAI, Stephen W. Analysis and behavior of grid structures. Composites science and technology, v. 56, n. 9, p. 1001-1015, 1996.
- KIMURA, Alio. Informática aplicada a estruturas de concreto armado. Oficina de Textos, 2018.
- LEITE, Gabriela Borim *et al.* Estudo dos critérios de parametrização do modelo de grelha para o cálculo de lajes maciças de concreto armado. 2017.
- LOGAN, Daryl L. A first course in the finite element method. Thomson, 2007.
- MACHADO, Gabriel Martinez; MOURA, Márcio Wrague. Método de analogia de grelha: análise numérica de lajes maciças de concreto armado. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 8, n. 2, p. 43-51, 2022.
- MARTHA, Luiz Fernando Campos Ramos. Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MELO, Anthony Matheus Cavalcante de *et al.* Estudo comparativo entre o método de cálculo simplificado, analogia de grelhas e método dos elementos finitos, na análise estrutural de lajes maciças de concreto armado. 2022.

MELO, Gabriel Figueiredo de *et al.* Análise não-linear de vigas de concreto armado com método secante. 2019.

NAVA, G. A.; COL DEBELLA, L. B.; FREISLEBEN, P. L. M.; SANTOS, R. V. Análise de lajes maciças de concreto armado pela analogia de grelha. CONGRESSO TÉCNICO CIENTÍFICO DA ENGENHARIA E DA AGRONOMIA, Foz do Iguaçu, 2016.

PARAVIEW. ParaView Documentation - User's Guide. Disponível em: <https://docs.paraview.org/en/latest/UsersGuide/introduction.html>. Acesso em: 4 dez. 2024.

PINTO, Rivelli da Silva. Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado. 1997.

RAGUZZONI, Luciano Mello. Análise de uma laje maciça utilizando-se o método das tabelas e o método de analogia de grelha equivalente. 2019.

SILVA, Jordlly Reydson de Barros. Rigidez à torção efetiva em vigas de concreto armado. 2014.

SILVA, Jordlly Reydson de Barros. Notas de aula de Análise de Estruturas de Concreto. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2024.

SILVA, Lucas Marques Teles da. Análise não-linear de estruturas de concreto armado submetido ao estado plano de tensões. 2019.

SORIANO, Humberto Lima; DE SOUZA LIMA, Silvio. Análise de estruturas: método das forças e método dos deslocamentos. Ciencia Moderna, 2004.

STRAMANDINOLI, Juliana Sá Brito. Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha. 2003.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. Teoria da elasticidade 3ª edição. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

VTK. VTK Documentation. Disponível em: <https://vtk.org/doc/nightly/html/>. Acesso em: 4 dez. 2024.

WHITE, Richard N.; GERGELY, Peter; SEXSMITH, Robert G. Ingeniería estructural. Limusa, 1976.