
VALORES CRÍTICOS AJUSTADOS PARA INFERÊNCIA SOB
HETEROSCEDASTICIDADE DE FORMA DESCONHECIDA

ANTONIO CARLOS RICARDO BRAGA JUNIOR

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto

Área de concentração: Estatística Matemática

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2005

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

14 de fevereiro de 2005

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Antonio Carlos Ricardo Braga Junior

intitulada

Valores críticos ajustados para inferência sob heteroscedasticidade

de forma desconhecida

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

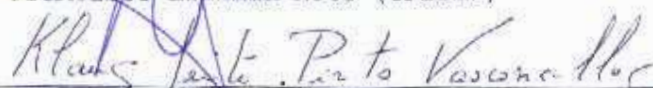
 **Francisco Cribari Neto**
Coordenador de Mestrado
em Estatística da UFPE

Banca Examinadora:



Francisco Cribari Neto

orientador


Francisco Louzada Neto (UFSCar)
Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus, por sempre iluminar meus caminhos e permitir a conclusão dessa etapa.

À minha noiva, Katya, pelo amor, compreensão e disponibilidade, que foram indispensáveis nesta fase da minha vida.

Aos meus pais, que me deram muito amor e tudo que um filho precisa para viver feliz.

Ao meu irmão, Luiz Henrique, pela alegria e confiança que sempre depositou em mim.

À minha família, pelo carinho e apoio em mais essa etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Francisco Cribari Neto, pelo profissionalismo, orientação segura e disponibilidade.

Aos professores do Programa de Mestrado em Estatística da UFPE, pela ajuda e incentivo.

Ao Professor Gauss Cordeiro, que me incentivou a fazer o mestrado na UFPE.

Ao Professor Klaus Vasconcellos, por ser um excelente professor e pela sua alegria.

À Professora Rosana Castro, da Universidade Federal da Bahia, pela amizade e por fazer-me apaixonar pela Estatística com suas aulas.

Aos Professores da Universidade Federal da Bahia, pela amizade e por me fornecerem uma ótima formação acadêmica.

A Valéria Bittencourt, pela amizade e extrema eficiência e organização.

Aos colegas Gilson e Silvia, pela acolhida em Recife no início do mestrado.

Aos colegas da minha turma de mestrado, André, Andréa, Cherubino (em memória), Fernando, Gecynalda, Sandra Rêgo e, em especial, Tatiane Melo e Sandra Pinheiro.

Aos colegas da turma 2004, Artur, Carlos Gadelha, Carlos Thomé, Daniela, Denis, Francisco, Camilo, Hernando, Milena, Polyane, Renata, Themis e Tiago.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Inferência em modelos lineares de regressão na presença de heteroscedasticidade de forma desconhecida é usualmente realizada através do uso do estimador de mínimos quadrados ordinários do vetor de parâmetros de regressão juntamente com um estimador consistente de sua matriz de covariâncias. O estimador mais comumente usado é o proposto por Halbert White e conhecido como HC0. Algumas formas alternativas deste estimador foram propostas na literatura, dentre as quais destacam-se HC1, HC2, HC3 e HC4. Tais estimadores são rotineiramente usados na construção de testes *quasi-t*, que são realizados com base em valores críticos assintóticos obtidos da distribuição normal padrão. O objetivo da presente dissertação é, através do uso de métodos numéricos, obter valores críticos ajustados para esses testes. O uso de tais valores críticos conduz a inferências mais precisas em amostras finitas.

Abstract

It is common practice to use the ordinary least squares estimators of the regression parameters coupled with a consistent estimator of their covariance matrix when estimating linear regressions under heteroskedasticity of unknown form. The most commonly used estimator is that proposed by Halbert White and referred to as HC0. Alternative estimators have been proposed, namely: HC1, HC2, HC3 and HC4. Such estimators are commonly used to perform quasi- t inference on the regression parameters. The quasi- t tests are based on standard normal asymptotic critical values. The chief goal of this thesis is to obtain, using numerical methods, improved critical values for quasi- t tests in heteroskedastic linear regression models. The use of the proposed critical values can lead to improved inference in finite samples.

Índice

1. Introdução	01
1.1. Considerações iniciais	01
1.3. Organização da dissertação	02
1.4. Suporte computacional	02
2. O Modelo de regressão linear, estimadores e testes	04
2.1. Introdução	04
2.2. O Modelo de regressão linear e seus estimadores	05
2.3. Testes Quasi- t	14
3. Valores críticos ajustados e evidência numérica	15
3.1. Introdução	15
3.2. Metodologia	16
3.3. Resultados numéricos com valores críticos assintóticos	17
3.4. Valores críticos ajustados	32
3.5. Resultados numéricos com valores críticos ajustados	39
3.6. Aplicação empírica	60
4. Conclusões	63
○ Apêndice	65
○ Referências	71

Capítulo 1

Introdução

1.1. Considerações iniciais

O modelo de regressão linear é bastante empregado nos casos em que desejamos analisar a relação de variáveis explicativas com uma variável resposta. Neste contexto, o método de estimação conhecido como mínimos quadrados ordinários (MQO) é o mais utilizado por pesquisadores e estatísticos aplicados. A utilização em grande escala deste método pode ser explicada por ele possuir propriedades interessantes, tais como não-viciosidade, consistência e eficiência, além da facilidade de seus cálculos e implementação computacional.

Comumente, utilizamos o estimador de mínimos quadrados ordinários (MQO) na estimação dos parâmetros do modelo de regressão linear. Em particular, ao se utilizar o modelo de regressão clássico, é usual assumir que os erros têm variância constante, caso em que se diz haver homoscedasticidade. Contudo, tal suposição não é verificada em muitas situações práticas. Na presença de heteroscedasticidade, a estimativa de MQO da matriz de covariâncias dos estimadores dos parâmetros de regressão torna-se imprecisa, podendo conduzir a conclusões incorretas a respeito da relação entre as variáveis dependente e explicativas do modelo. Isso ocorre porque os testes t associados requerem estimativas confiáveis das variâncias dos estimadores dos parâmetros. Uma possível solução é usar estimadores consistentes da matriz de covariâncias, HC's, que funcionam bem tanto sob homoscedaticidade quanto sob heteroscedaticidade (Long & Ervin, 2000).

Na realização de testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear do tipo $\mathcal{H}_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_i \neq \beta_i^{(0)}$, em que $\beta_i^{(0)}$ é uma dada constante, temos que a estatística de teste

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

onde $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)$ é um estimador consistente para $\text{var}(\hat{\beta}_i)$ e $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denota convergência em distribuição. Mesmo em amostras de tamanho reduzido a moderado, são utilizados os valores críticos assintóticos obtidos da distribuição limite normal padrão. Este fato pode comprometer o bom desempenho desses testes.

Outro fator que pode prejudicar a qualidade da aproximação da distribuição nula da estatística τ pela distribuição limite $\mathcal{N}(0, 1)$ é o grau máximo de alavancagem, que é definido como $h_{\max} = \max(\text{diag}\{X(X'X)^{-1}X'\})$, onde X é uma matriz $n \times p$ ($p < n$) de regressores fixos assumida ser de posto completo. Conjecturamos que quanto maior o grau máximo de alavancagem, $h_{\max}$, maior será a distorção de tamanho do teste para um dado número de observações.

No presente trabalho, nosso objetivo é propor novos valores críticos que levem em consideração o tamanho amostral e o grau máximo de alavancagem, a fim de proporcionar testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear com taxas de rejeição sob a hipótese nula mais próximas dos correspondentes níveis nominais. A obtenção destes novos valores críticos será feita de forma numérica, com base em simulações estocásticas.

1.2. Organização da dissertação

A presente dissertação de mestrado está dividida em quatro capítulos. No segundo capítulo são apresentados formalmente o modelo de regressão linear e as suposições que, em geral, são feitas a seu respeito. São discutidas, ainda, as consequências da violação da suposição de homoscedasticidade e são apresentados métodos alternativos ao MQO para estimação de estruturas de covariâncias em modelos que apresentam heteroscedasticidade de forma desconhecida. No terceiro capítulo são apresentados os resultados numéricos onde faremos uma comparação entre o desempenho dos testes baseados nos valores críticos assintóticos e nos novos valores críticos propostos por nós. Essa comparação é feita basicamente através das taxas de rejeição obtidas ao se considerar cada um dos valores críticos. Além disso, em cada uma dessas situações é feita uma comparação entre os testes baseados em HC0, HC2, HC3 e HC4, que serão discutidos posteriormente. No quarto capítulo são apresentadas as conclusões obtidas ao longo desta dissertação.

1.3. Suporte computacional

A programação necessária para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado foi realizada utilizando-se a linguagem de programação `0x`. Esta é uma linguagem bastante flexível e que permite a implementação das técnicas estatísticas com grande facilidade e eficiência. Esta linguagem foi criada em 1994 por Jurgen Doornik e é distribuída gratuitamente, para uso acadêmico, no endereço <http://www.doornik.com>. Para detalhes sobre essa linguagem de programação, ver Doornik (2001). O programa `0x` que foi utilizado na obtenção de alguns

resultados está apresentado no apêndice desta dissertação.

Utilizamos, ainda, o software **R** no trato dos dados, no que diz respeito à análise de regressão e à produção de gráficos. A plataforma **R**, que é um software livre, pode ser obtida em <http://www.r-project.org>. Para mais detalhes, ver Venables & Ripley (2002).

Capítulo 2

O Modelo de Regressão Linear, Estimadores e Testes

2.1. Introdução

Quando desejamos analisar a relação de variáveis explicativas com uma variável resposta, o modelo de regressão linear é bastante empregado. Neste contexto, o método de estimação conhecido como mínimos quadrados ordinários (MQO) é o mais utilizado por pesquisadores e estatísticos aplicados. A utilização em grande escala deste método pode ser explicada por suas propriedades, tais como não-viciosidade, consistência e eficiência, além da facilidade de seus cálculos e implementação computacional. Essas propriedades são discutidas e analisadas em muitas referências, tais como Davidson & MacKinnon (1993) e Draper & Smith (1980).

Essa técnica requer suposições fortes, que serão apresentadas neste capítulo. Algumas das suposições que são feitas sobre o modelo de regressão linear freqüentemente não são verificadas na prática. Uma delas é a suposição de que os erros do modelo seguem distribuição normal. Outra suposição comumente violada requer que a variância dos erros seja constante. Neste segundo caso dizemos que há heteroscedasticidade.

Na presença de heteroscedasticidade os estimadores de MQO dos parâmetros da regressão se mantêm não-viesados e consistentes. Todavia, os estimadores usuais das variâncias desses estimadores passam a ser inconsistentes, o que faz com que os testes t e F usuais não sejam confiáveis, sendo necessário um método de estimação alternativo para a matriz de covariâncias dos estimadores dos parâmetros de regressão.

Neste capítulo serão apresentados formalmente o modelo de regressão linear e as suposições que em geral são feitas a seu respeito. Além disso, serão discutidas as consequências da violação da suposição de homoscedasticidade e serão considerados métodos alternativos ao MQO para estimação de estruturas de covariâncias em modelos que apresentam heteroscedasticidade de forma desconhecida.

2.2. O modelo de regressão linear e seus estimadores

Nesta dissertação consideramos o modelo de regressão linear da forma

$$y = X\beta + u, \tag{2.2.1}$$

onde y é um vetor n -dimensional de observações de uma variável dependente, X é uma matriz $n \times p$ ($p < n$) de regressores fixos assumida ser de posto completo, β é um vetor p -dimensional de parâmetros desconhecidos e u é um vetor $n \times 1$ de erros aleatórios. Serão feitas as seguintes suposições :

- i) $E(u_t)=0, t = 1, \dots, n;$
- ii) $E(u_t^2) = \sigma_t^2, 0 < \sigma_t^2 < \infty, t = 1, \dots, n;$
- iii) $E(u_t u_s)=0$, para todo $t \neq s$;
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (X'X/n) = Q$, onde Q é uma matriz finita não-singular;
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} (X'\Omega X/n) = \mathcal{S}$ é uma matriz finita, $t = 1, \dots, n$.

As suposições (i)–(iii) garantem que o vetor de erros do modelo, u , tem média zero e matriz de covariâncias diagonal, que definiremos como $\Omega = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$, onde cada elemento σ_t^2 representa a variância do respectivo termo de erro $u_t, t = 1, \dots, n$. Em caso de homoscedasticidade, todos os elementos diagonais da matriz Ω são iguais, ou seja, $\sigma_t^2 = \sigma^2$, uma constante positiva, para todo t , o que implica que $\Omega = \sigma^2 I$, onde I é a matriz identidade de ordem n . A condição de regularidade assintótica sobre a matriz X na suposição (iv) implica que quando n cresce os elementos de $X'X$ não crescem a uma razão maior do que n e que, no limite, os regressores permanecem linearmente independentes.

O vetor β contém parâmetros desconhecidos que representam os efeitos dos regressores considerados sobre a média da variável dependente. O principal objetivo na modelagem de regressão é fazer inferências sobre este vetor de parâmetros.

Um método que pode ser utilizado para a estimação dos parâmetros do modelo é aquele denominado mínimos quadrados ordinários (MQO). Utilizando este método, o estimador de β é obtido minimizando-se a soma de quadrados dos erros do modelo

$$S = u'u = (y - X\beta)'(y - X\beta).$$

Desta forma, o estimador de MQO é dado por

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Outras duas quantidades de interesse podem ser calculadas a partir da estimação de β e uma dada matriz de regressores X . São elas o vetor de valores preditos e o vetor de resíduos de MQO, que são definidos, respectivamente, como

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y = Hy \tag{2.2.2}$$

e

$$\hat{u} = y - \hat{y} = y - Hy = (I - H)y = My, \tag{2.2.3}$$

onde $H = X(X'X)^{-1}X'$ e $M = I - X(X'X)^{-1}X'$. As matrizes H e M são simétricas e idempotentes. A matriz H é chamada de “matriz chapéu” por possuir a característica de, quando pós-multiplicada por y , fornecer $\hat{y}$ como em (2.2.2). Ainda, o t -ésimo elemento diagonal da matriz H é usado como uma medida de influência da t -ésima observação no respectivo valor predito, assumindo valores no intervalo $[0,1]$.

É importante ressaltar que o vetor de resíduos de MQO, $\hat{u}$, serve como uma aproximação para o vetor de erros desconhecidos e é importante tanto no cálculo de quantidades essenciais para a realização de inferências como na avaliação da adequação do modelo.

O interesse, agora, consiste em avaliar a qualidade do estimador encontrado. As propriedades amostrais de $\hat{\beta}$ podem ser derivadas aplicando as definições de esperança e variância para vetores aleatórios e conhecimentos básicos da teoria assintótica. De início, escreveremos o estimador $\hat{\beta}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'u.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

A seguir é obtida a esperança de $\hat{\beta}$, supondo que $E(u) = 0$ e que a matriz X é fixa:

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}) &= E[\beta + (X'X)^{-1}X'u] \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(u) \\ &= \beta.\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

Um estimador qualquer $\hat{\theta}$ é dito ser não-viesado para um parâmetro θ se $E(\hat{\theta}) = \theta$ para todos valores de θ (Hogg & Craig, 1995, p.263). Concluimos, então, a partir do resultado em (2.2.5), que o estimador de MQO é não-viesado para β , ou seja, em média, $\hat{\beta}$ é igual ao verdadeiro parâmetro.

Vale ressaltar que, para estabelecer a propriedade de não-viés do estimador de MQO, não foi necessário assumir homoscedasticidade. Utilizou-se apenas que os erros têm média zero, além da suposição básica de que o modelo estimado é o correto.

Demonstraremos que $\hat{\beta}$ é consistente para β , ou seja, com o aumento do tamanho amostral, n , $\hat{\beta}$ aproxima-se do parâmetro β com probabilidade crescente, denotado por $\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta$.

De (2.2.4) temos que

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\text{plim}(\hat{\beta}) &= \text{plim}[\beta + (X'X)^{-1}X'u] \\ &= \beta + \text{plim}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{X'u}{n}\right),\end{aligned}$$

onde plim denota limite em probabilidade. Utilizando o fato que o limite em probabilidade de uma seqüência não-estocástica é igual ao seu limite e aplicando o teorema de Slutsky (e.g., Rao, 1973, p.122), que garante que qualquer tipo de convergência é mantida por funções contínuas, temos que

$$\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta + \left(\lim \frac{X'X}{n}\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{X'u}{n}\right).$$

Consideremos as suposições associadas ao modelo (2.2.1). Uma vez que $E(u_t) = 0$, $\text{var}(u_t) = E(u_t^2) = \sigma_t^2$, $0 < \sigma_t^2 < \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (X'\Omega X/n) = \mathcal{S}$ é uma matriz finita, $t = 1, \dots, n$, aplicando a Lei Fraca de Chebyshev (e.g., Rao, 1973, p.112) temos que

$$\text{plim}\left(\frac{X'u}{n}\right) = 0.$$

Pois $X'u = \sum_{t=1}^n X'_t u_t$, onde X_t é a t -ésima linha da matriz X , tal que $E(X'u) = \sum_{t=1}^n X'_t E(u_t) = 0$.

Portanto,

$$\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta + Q^{-1}0 = \beta.$$

Concluimos, então, que $\hat{\beta}$ é consistente para β .

Objetivando avaliar a precisão do estimador de MQO no modelo (2.2.1), será obtida sua matriz de covariâncias:

$$\begin{aligned}\Psi &= \text{cov}[\beta + (X'X)^{-1}X'u] \\ &= \text{cov}[(X'X)^{-1}X'u] \\ &= (X'X)^{-1}X' \text{cov}(u)X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}.\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

Quando o modelo é homoscedástico, a matriz de covariâncias dos erros é da forma $\Omega = \sigma^2 I$. Neste caso, a matriz de covariâncias de $\hat{\beta}$ dada em (2.2.6) se reduz a

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}.\tag{2.2.7}$$

A seguir enunciamos o teorema de Gauss-Markov, que garante que a variância em (2.2.7) é mínima, ou seja, garante a eficiência do $\hat{\beta}$, determinando-o como o melhor estimador dentro

da classe dos estimadores lineares e não-viesados para β sob homoscedasticidade do modelo (2.2.1).

Teorema 1.1 (Gauss-Markov). Seja $\beta^* = C'y$, onde C é uma matriz $p \times n$ de constantes tal que $C'X = I$. Então, $\hat{\beta}$ é mais preciso do que β^* se $\hat{\beta} \neq \beta^*$, ou seja,

$$\text{cov}(\beta^*) = \text{cov}(\hat{\beta}) + A,$$

onde A é uma matriz não-negativa definida.

Note que $E(\beta^*) = C'E(y)$, logo, pela suposição (i), $E(\beta^*) = C'X\beta$ e, desta forma, a condição $C'X = I$ estabelece que β^* é não-viesado para β .

Uma implicação do Teorema de Gauss-Markov é que, sob homoscedasticidade, o estimador de MQO apresenta propriedades amostrais superiores a qualquer outro estimador para β que seja linear e não-viesado. Podemos questionar a validade deste resultado na presença de heteroscedasticidade. Para esclarecer este questionamento torna-se necessário definir o estimador de mínimos quadrados generalizado (MQG).

Seja o modelo (2.2.1) e as suposições para ele estabelecidas. Dado que Ω é uma matriz positiva definida, sua inversa existe. Podemos utilizar um artifício para decompor a inversa de Ω (Judge et al., 1985, p.941):

$$\Omega^{-1} = \Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}.$$

Podemos agora definir um modelo transformado:

$$\Omega^{-1/2}y = \Omega^{-1/2}X\beta + \Omega^{-1/2}u$$

ou

$$y^* = X^*\beta + u^*, \quad (2.2.8)$$

onde o vetor aleatório $u^* = \Omega^{-1/2}u$ é tal que $E(u^*) = 0$ e $\text{cov}(u^*) = I$. O modelo transformado é equivalente ao modelo (2.2.1), exceto pela estrutura homoscedástica dos erros. Utilizando o critério de mínimos quadrados, o estimador para o vetor de parâmetros β no modelo (2.2.8) é dado por

$$\hat{\beta}_G = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}y^*$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_G &= (X'\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}X)^{-1}X'\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}y \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Temos em (2.2.9) o chamado estimador de mínimos quadrados generalizado (MQG). A partir da expressão (2.2.9) e utilizando as pressuposições do modelo, verifica-se que $\hat{\beta}_G$ é um estimador não-viesado para β , ou seja,

$$E(\hat{\beta}_G) = \beta.$$

Verificamos, ainda, que

$$\Psi_G = \text{cov}(\hat{\beta}_G) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}.$$

Assumindo que a matriz de covariâncias Ω é conhecida e que X^* satisfaz as mesmas condições que X , verifica-se que $\hat{\beta}_G$ é consistente para β . Um resultado ainda mais forte é garantido pelo Teorema 1.1, estabelecendo que $\hat{\beta}_G$ é o melhor estimador linear não-viesado, i.e., BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) de β . Seja o modelo transformado equivalente ao modelo original. Como consequência, temos que $\text{cov}(\hat{\beta}_G) \leq \text{cov}(\hat{\beta})$, ou seja,

$$(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} - (X'\Omega X)^{-1} = \Delta,$$

onde Δ é uma matriz positiva semi-definida.

Concluimos, então, que o estimador de MQO, $\hat{\beta}$, sob heteroscedasticidade, apesar de não-viesado e consistente é, em geral, ineficiente, respondendo o questionamento anteriormente formulado.

Quando a matriz Ω é conhecida, ou seja, quando é possível determinar a forma exata da heteroscedasticidade, pode-se utilizar o método de mínimos quadrados generalizados para se obter um estimador não-viesado, consistente e eficiente para o vetor de parâmetros β no modelo (2.2.1). Contudo, na prática, a forma da estrutura de variância é, em geral, desconhecida, tornando o estimador de mínimos quadrados generalizado inviável. Desta dificuldade prática surge o chamado estimador de mínimos quadrados generalizado viável (MQGV), que é obtido substituindo-se a matriz de covariâncias Ω em (2.2.9) por algum estimador consistente $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\hat{\beta}} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y. \quad (2.2.10)$$

O estimador $\hat{\hat{\beta}}$ é viável, já que Ω é usualmente especificada através de uma quantidade pequena e fixa de parâmetros. Sendo assim, para os vários modelos heteroscedásticos considerados, $\hat{\Omega}$ é obtido através da estimação desses parâmetros.

Utilizar o estimador de MQGV para $\hat{\beta}$ resolve um problema de implementação prática de estimação. Contudo, suas propriedades amostrais não são facilmente estabelecidas. Isto acontece já que $\hat{\Omega}$ e y são correlacionados, dado que $\hat{\Omega}$ depende das observações amostrais. Com isso é impossível assumir que $\hat{\Omega}^{-1}$ em (2.2.10) é uma matriz de elementos fixos, ficando muito difícil até mesmo a obtenção de $E(\hat{\hat{\beta}})$. O estimador $\hat{\hat{\beta}}$ possui, contudo, o mesmo comportamento assintótico de $\hat{\beta}_G$, sob algumas condições de regularidade (Greene, 1997, p.559).

Outro aspecto indesejável é que após estimar o vetor de parâmetros β para vários modelos, considerando diferentes estruturas cedásticas, seria necessário aplicar um teste de heteroscedasticidade para determinar qual dos modelos considerados é apropriado. Pode

ocorrer, após aplicação desses testes, que todos os modelos propostos falhem, bem como não se encontrar evidências contra a hipótese nula de homoscedasticidade para mais de um dos modelos considerados. Assim, é provável que após aplicação desses testes não se saiba qual dos modelos heteroscedásticos considerados é mais adequado.

Na prática, o que tipicamente se faz é utilizar o estimador de MQO para o vetor de parâmetros da regressão, que permanece não-viesado e consistente, mesmo que nem sempre seja eficiente. Além disso, utiliza-se um estimador para a matriz de covariâncias que seja consistente com ou sem heteroscedasticidade.

Para estimarmos a matriz de covariâncias de $\hat{\beta}$ poderíamos pensar no seu estimador usual, dado por

$$\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}, \quad (2.2.11)$$

com

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-p},$$

onde $\hat{u}$ representa o vetor de resíduos de MQO dado em (2.2.3). Todavia, quando $\text{cov}(u) = \Omega \neq \sigma^2 I$, ou seja, na presença de heteroscedasticidade, tem-se que

$$E[(n-p)\hat{\sigma}^2] = E(\hat{u}'\hat{u}) = E(u'Mu) = \text{tr}(M\Omega).$$

Assim,

$$E[\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}] = \text{tr}(M\Omega)(X'X)^{-1}/(n-p),$$

que geralmente difere da matriz de covariâncias Ψ dada em (2.2.6). Além disso, Ψ não é estimada consistentemente quando (2.2.11) é utilizado, pois, quando $n \rightarrow \infty$ e supomos $\text{var}(\hat{\sigma}^2) \rightarrow 0$, temos que

$$\text{plim}(\hat{\sigma}^2) = \lim \text{tr}(M\Omega)/n,$$

onde $M = I - X(X'X)^{-1}X'$. Com isso, $\text{plim } \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ difere de (2.2.6).

Como o estimador usual da matriz de covariâncias de $\hat{\beta}$ não apresenta propriedades razoáveis, nosso problema reside na estimação consistente da matriz de covariâncias do estimador de MQO quando há heteroscedasticidade de forma desconhecida.

Vários autores, tais como Eicker (1963, 1967), Hinkley (1977) e Rao (1970), propuseram diferentes formas de estimar consistentemente a matriz de covariâncias de $\hat{\beta}$. Contudo, foi Halbert White, em 1980, quem sugeriu o mais utilizado destes estimadores (White, 1980).

É razoável pensarmos que para se estimar consistentemente a matriz de covariâncias dada em (2.2.6) devemos estimar de forma consistente Ω , a matriz de covariâncias do vetor de erros da regressão. Note, contudo, que Ω possui n variâncias desconhecidas, o que torna impossível sua estimação consistentemente, já que dispomos de exatamente n observações.

Halbert White percebeu este problema de outra maneira e notou que para obter um estimador consistente para a matriz de covariâncias do estimador de MQO não é preciso estimar Ω de forma consistente.

A idéia de White foi obter um estimador para a matriz simétrica $X'\Omega X$. Esta matriz contém apenas $p(p+1)/2$ elementos distintos para qualquer tamanho amostral e, assim, é possível ter

$$\text{plim}(X'\hat{\Omega}X/n) = \lim(X'\Omega X/n),$$

quando $n \rightarrow \infty$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\hat{\Psi} &= n(X'X)^{-1}(X'\hat{\Omega}X/n)(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'\hat{\Omega}X(X'X)^{-1}\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

pode ser utilizado como um estimador para a matriz de covariâncias de $\hat{\beta}$ (Greene, 1997, p.548).

Na literatura, o estimador de White é denominado de HC0, denominação que usaremos nesta dissertação. Este estimador é obtido simplesmente substituindo o t -ésimo elemento da diagonal de Ω pelo quadrado do t -ésimo resíduo:

$$\hat{\Omega} = \text{diag}\{\hat{u}_1^2, \dots, \hat{u}_n^2\}.\tag{2.2.13}$$

O estimador HC0, que é obtido substituindo-se (2.2.13) em (2.2.12), é consistente tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade de forma desconhecida (White, 1980). A desvantagem deste estimador é não considerar que os resíduos de mínimos quadrados tendem a subestimar os verdadeiros erros (Judge *et al.*, 1985, p.367). Este fato pode tornar o HC0 um estimador muito viesado quando um tamanho amostral pequeno é considerado. Isto foi comprovado por Cribari-Neto & Zarkos (1999) e Mackinnon & White (1985) através de simulações. Chesher & Jewitt (1987) investigaram o viés do estimador HC0 e concluíram que este pode ser substancial, mesmo em grandes amostras e mesmo quando os erros são homoscedásticos. Estes autores chamaram atenção para o fato de que a estrutura da matriz de regressores X é muito importante para determinar a adequação deste estimador quanto ao tamanho amostral. Modelos que apresentam desenho contendo observações de alta alavancagem, ou seja, de grande influência potencial para o respectivo valor predito, podem contribuir para que HC0 apresente viés negativo expressivo. Desta forma, o uso deste estimador pode levar à identificação de relações enganosas entre os regressores e a variável resposta, situação que está bem ilustrada em trabalho realizado por Wilson (1999).

Existem outros estimadores que são assintoticamente equivalentes a HC0, mas com propriedades superiores quando consideramos amostras finitas. Apresentamos, agora, o estimador proposto por Hinkley em 1977, que será denominado HC1, e é obtido modificando

HC0 através de uma correção de graus de liberdade. Essa correção é feita multiplicando-se HC0 pela constante $n/(n-p)$; em amostras finitas este fator é um número maior que um. Portanto, tudo que HC1 faz é inflar as estimativas fornecidas pelo estimador de White. O estimador HC1 é da forma

$$\frac{n}{n-p}(X'X)^{-1}X'\widehat{\Omega}X(X'X)^{-1},$$

onde $\widehat{\Omega}$ é definido como em (2.2.13).

Uma segunda forma de estimar o t -ésimo elemento diagonal da matriz Ω , σ_t^2 , é através da expressão

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{\widehat{u}_t^2}{1-h_t},$$

onde h_t é o t -ésimo elemento diagonal da matriz de projeção $H = X(X'X)^{-1}X'$. O estimador HC2 é dado, assim, por

$$(X'X)^{-1}X'\widehat{\Omega}_2X(X'X)^{-1},$$

onde $\widehat{\Omega}_2 = \text{diag}\left(\frac{\widehat{u}_1^2}{1-h_1}, \dots, \frac{\widehat{u}_n^2}{1-h_n}\right)$. Este estimador foi proposto por Horn, Horn & Duncan (1975). Note que, sob homoscedasticidade,

$$\begin{aligned} E(\widehat{u}\widehat{u}') &= E[(y-\widehat{y})(y-\widehat{y})'] \\ &= E\{(I-H)y[(I-H)y]'\} \\ &= E[(I-H)yy'(I-H)'] \\ &= ME(yy')M' \\ &= \sigma^2 M. \end{aligned}$$

Assim, o valor esperado do t -ésimo elemento diagonal é

$$\begin{aligned} E(\widehat{u}_t^2) &= \sigma^2 m_t \\ &= \sigma^2(1-h_t), \end{aligned}$$

onde m_t e h_t são os t -ésimos elementos diagonais das matrizes M e H , respectivamente. Portanto, HC2 é não viesado quando não há heteroscedasticidade.

Um terceiro estimador modificado a partir de HC0 é obtido através da técnica denominada jackknife. Essa técnica basicamente recalcula n vezes as estimativas de MQO para o vetor β , cada vez sendo retirada uma observação diferente; ao final do processo é calculada a variabilidade das estimativas obtidas como uma estimativa da variância do estimador de MQO original.

Davidson & MacKinnon (1993) propuseram o estimador denominado HC3, que é uma aproximação do estimador jackknife. O estimador HC3 é dado por

$$(X'X)^{-1}X'\widehat{\Omega}_3X(X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega}_3 = \text{diag}\left(\frac{\hat{u}_1^2}{(1-h_1)^2}, \dots, \frac{\hat{u}_n^2}{(1-h_n)^2}\right).$$

Cribari-Neto (2004) propôs o estimador HC4. Este estimador é uma modificação de HC3 e leva em consideração o impacto de observações com alta alavancagem sobre a inferência resultante em amostras finitas. O estimador HC4 incorpora fatores de descontos definidos pela razão entre os graus individuais de alavancagem e o grau médio de alavancagem. Em Cribari-Neto & Zarkos (2001) é discutida a importância de considerar o efeito de alta alavancagem. O estimador HC4 é definido como

$$(X'X)^{-1}X'\hat{\Omega}_4X(X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega}_4 = \text{diag}\left(\frac{\hat{u}_1^2}{(1-h_1)^{\delta_1}}, \dots, \frac{\hat{u}_n^2}{(1-h_n)^{\delta_n}}\right),$$

com

$$\delta_t = \min\left(4, \frac{h_t}{\bar{h}}\right),$$

sendo $\bar{h} = \frac{\sum_{t=1}^n h_t}{n} = \frac{p}{n}$.

O expoente controla o nível de desconto do t -ésimo resíduo quadrado e é determinado pela razão entre h_t e $\bar{h}$. Como $0 < 1 - h_t < 1$ e $\delta_t > 0$, então $0 < (1 - h_t)^{\delta_t} < 1$. Quanto maior o grau de alavancagem individual, h_t , em comparação ao grau médio de alavancagem, $\bar{h}$, mais fortemente o t -ésimo resíduo será inflacionado. Na definição do estimador HC4 existe um truncamento no expoente: δ_t é, no máximo, igual a 4, o equivalente ao dobro do desconto usado pelo estimador HC3. Os resultados numéricos em Cribari-Neto (2004) mostraram que este estimador produz inferências mais confiáveis do que as obtidas com o estimador HC3, no sentido de que os tamanhos dos testes quasi- t associados so mais prximos dos correspondentes nveis nominais.

Os estimadores consistentes da matriz Ψ , explicitados nesta seção, estão implementados na plataforma R através do pacote **CAR**. Para detalhes sobre as metodologias implementadas neste pacote, ver Fox (2002).

2.3. Testes Quasi- t

O interesse aqui reside em testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \beta_k = \beta_k^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_k \neq \beta_k^{(0)}$, ou ainda, mais geralmente, $\mathcal{H}_0 : c'\beta = a$ contra $\mathcal{H}_1 : c'\beta \neq a$, onde c é um dado vetor $p \times 1$, a é uma dada constante, β_k é o k -ésimo elemento do vetor de parâmetros β e $\beta_k^{(0)}$ é uma dada constante. A estatística

$$t = \frac{c'\hat{\beta} - a}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}}, \quad (2.2.14)$$

sob as suposições (i), (ii) e (iii) e sob a suposição adicional de normalidade dos erros, i.e., $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, tem, sob a hipótese nula, distribuição t de Student com $n - p$ graus de liberdade. A estimativa da variância usada no denominador é a usual de MQO. Além de ter distribuição nula t_{n-p} , a estatística de teste em (2.2.14) possui, ainda sob $\mathcal{H}_0$, distribuição limite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Sob heteroscedasticidade e/ou não-normalidade, a estatística (2.2.14) não mais possui, sob a hipótese nula, distribuição exata t_{n-p} . Seja $\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})$ um estimador consistente para $\text{var}(c'\hat{\beta})$ tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade de forma desconhecida, i.e.,

$$\text{plim} \left(\frac{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}{\text{var}(c'\hat{\beta})} \right) = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} t &= \frac{c'\hat{\beta} - a}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}} \frac{\sqrt{\text{var}(c'\hat{\beta})}}{\sqrt{\text{var}(c'\hat{\beta})}} \\ &= \frac{c'\hat{\beta} - a}{\sqrt{\text{var}(c'\hat{\beta})}} \frac{\sqrt{\text{var}(c'\hat{\beta})}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\sqrt{\text{var}(c'\hat{\beta})}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}} \xrightarrow{p} 1,$$

pois o estimador da variância é consistente, chegamos ao resultado de que

$$\frac{c'\hat{\beta} - a}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

ou seja, $t \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$. Esta estatística de teste é dita ser ‘quasi- t ’ porque é semelhante à estatística t usual e possui a mesma distribuição limite. Aqui, $\xrightarrow{p}$ e $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotam, respectivamente, convergência em probabilidade e convergência em distribuição.

Capítulo 3

Valores Críticos Ajustados e Evidência Numérica

3.1. Introdução

Como foi visto no capítulo anterior, comumente utilizamos o estimador MQO na estimação dos parâmetros do modelo de regressão linear. Em particular, ao se utilizar o modelo de regressão clássico é comum assumir que os erros têm variância constante, caso em que se diz haver homoscedasticidade. Contudo, tal suposição não é verificada em muitas situações práticas. Na presença de heteroscedasticidade, a estimativa de MQO da matriz de covariâncias torna-se imprecisa, podendo conduzir a conclusões incorretas a respeito da relação entre as variáveis dependente e explicativas do modelo. Isso ocorre já que os testes t associados requerem estimativas confiáveis das variâncias dos estimadores dos parâmetros. Uma possível solução é usar estimadores consistentes da matriz de covariâncias, HC's, que funcionam bem mesmo sob homoscedaticidade (Long & Ervin, 2000).

Na realização de testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear do tipo $\mathcal{H}_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_i \neq \beta_i^{(0)}$, em que $\beta_i^{(0)}$ é uma dada constante, temos que

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

onde $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)$ é um estimador consistente para $\text{var}(\hat{\beta}_i)$. Mesmo em amostras de tamanho reduzido a moderado são utilizados os valores críticos assintóticos obtidos da distribuição limite normal padrão. Este fato pode comprometer o bom desempenho desses testes.

Outro fator que pode prejudicar a aproximação da distribuição nula da estatística τ pela $\mathcal{N}(0, 1)$ é o grau máximo de alavancagem. Conjecturamos, como dissemos antes, que quanto maior o grau máximo de alavancagem, $h_{\max}$, maior será a distorção de tamanho do teste para um dado número de observações.

Nosso objetivo é obter novos valores críticos que levem em consideração o tamanho amostral e o grau máximo de alavancagem a fim de proporcionar testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear com taxas de rejeição sob a hipótese nula mais próximas dos correspondentes níveis nominais.

3.2. Metodologia

Os resultados apresentados e discutidos a seguir foram baseados no seguinte modelo de regressão linear:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

em que $u_1, \dots, u_n$ são não-correlacionados e cada u_t tem média zero e variância $\sigma_t^2 = \exp(\alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t})$. Foi considerado que $\alpha_1 = \alpha_2$ e foram utilizados alguns valores para estes parâmetros a fim de se obter diferentes graus de heteroscedasticidade, $\lambda = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sigma_{\min}^2}$, iguais a 1 (homoscedasticidade), 10 (heteroscedasticidade moderada) e 100 (heteroscedasticidade muito forte). Vale salientar que quando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ há homoscedasticidade. Foram considerados seis tamanhos amostrais, sendo eles $n = 20, 40, 60, 100, 200$ e 500 . Para $n = 20$, as observações foram geradas seguindo dois critérios. Para razões de alavancagem, $h_{\max}/\bar{h}$, entre 1.5 e 3.3, x_1 e x_2 foram gerados aleatoriamente de uma distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$; para razões de alavancagem entre 3.3 e 6.6, x_1 e x_2 foram obtidos aleatoriamente de distribuições lognormal e t_2 , respectivamente. Os demais tamanhos amostrais foram obtidos simplesmente replicando-se as vinte primeiras observações tantas vezes quanto necessário. Este procedimento faz com que o grau de heteroscedasticidade se mantenha constante em todos os tamanhos amostrais considerados. Com isso é possível avaliar os efeitos isolados do grau de heteroscedasticidade e do tamanho amostral sobre o comportamento dos testes.

As simulações de Monte Carlo foram baseadas em 100,000 (cem mil) réplicas com $\beta_0 = \beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$ (já que desejamos testar $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$) e $u_t \sim \mathcal{N}(0, \exp(\alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t}))$, $t = 1, \dots, n$. Todas as simulações foram realizadas usando a linguagem matricial de programação `0x` (Doornik, 2001). O algoritmo desenvolvido está disponível em <http://www.bragajunior.com.br/downloads/>. Ao todo foram realizadas 972 simulações que combinaram 6 tamanhos amostrais, 3 graus de heteroscedasticidade e 54 razões de alavancagem. Na geração dos dados de x_1 e x_2 pela distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$ obtivemos as seguintes razões de alavancagem: 1.51, 1.57, 1.69, 1.75, 1.80, 1.94, 1.95, 2.00, 2.03, 2.20, 2.25, 2.29, 2.33, 2.38, 2.42, 2.55, 2.62, 2.63, 2.79, 2.88, 2.91, 3.01, 3.02, 3.17, 3.21 e 3.29. Ou seja, a razão $h_{\max}/\bar{h}$ assumiu valor máximo 3.29. Como nosso desejo é obter valores de $h_{\max}/\bar{h}$ ainda mais extremos, geramos também x_1 e x_2 a partir das distribuições lognormal e t_2 , obtendo os seguintes graus de alavancagem: 3.37, 3.59, 3.72, 4.08, 4.33, 4.44, 4.56, 4.68, 4.78, 4.80, 5.02, 5.04, 5.12, 5.16, 5.31, 5.42, 5.57, 5.85, 5.93, 5.98, 6.05, 6.07, 6.16, 6.19, 6.29, 6.44, 6.52 e 6.56.

Após a realização de todas as simulações, foram realizadas as modelagens estatísticas onde as variáveis respostas de interesse são os valores críticos empíricos correspondentes aos testes que utilizam HC0, HC2, HC3 e HC4, considerando três níveis nominais (10%, 5% e

1%). Portanto, há doze variáveis resposta a serem modeladas. Consideramos a dependência destes valores críticos exatos sobre o tamanho amostral (n) e sobre o grau máximo de alavancagem ($h_{\max}$). Nesta etapa foram feitas várias tentativas de modelagem que levaram em consideração as mais variadas especificações, não só das variáveis explicativas como também da variável resposta. Dentre os modelos que foram considerados estão:

- 1) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t^2 + u_t$,
- 2) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + u_t$,
- 3) $\log(y_t) = \beta_0 + \beta_1 \log m_t + \beta_2 \log m_t^2 + u_t$,
- 4) $\log(y_t) = \beta_0 + \beta_1 \log m_t + u_t$,
- 5) $\log(y_t) = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t^2 + u_t$,
- 6) $\log(y_t) = \beta_0 + \beta_1 m_t + u_t$,
- 7) $y_t^* = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t^2 + u_t$,
- 8) $y_t^* = \beta_0 + \beta_1 m_t + u_t$,
- 9) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 D_t + u_t$,
- 10) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t D_t + u_t$,
- 11) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t^2 D_t + u_t$,
- 12) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 D_t + \beta_3 m_t D_t + u_t$,
- 13) $y_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t^2 + \beta_3 D_t + \beta_4 m_t^2 D_t + u_t$,

onde $m = r/n$ sendo $r = h_{\max}/\bar{h}$, y^* é a variável resposta após a transformação de Box-Cox (Venables & Ripley, 2002), D é uma variável *dummy* que assume valor 1 quando $r > n/10$ e valor 0 caso contrário e u é um erro aleatório com média zero, variância $0 < \sigma_t^2 < \infty$ e não-correlacionado com $u_s \forall t \neq s$. Cada um dos modelos acima foi aplicado a cada uma das doze variáveis resposta.

A escolha do modelo a ser utilizado foi baseada na proximidade dos valores críticos preditos pelo modelo relativamente aos valores críticos empíricos. Boas aproximações devem conduzir a taxas de rejeição sob a hipótese nula mais próximas dos níveis nominais especificados. Após a realização de diversos exercícios numéricos, foi constatado que o segundo modelo foi aquele que forneceu, no agregado, as melhores aproximações. Este será o modelo utilizado no que se segue.

3.3. Resultados numéricos com valores críticos assintóticos

Nas Tabelas 3.1 a 3.13 são apresentadas as taxas de rejeição obtidas via simulação de Monte Carlo *com valores críticos assintóticos*. Nesta investigação inicial são consideradas treze razões de alavancagem, a saber: 1.51, 2.00, 2.33, 2.42, 2.62, 2.91, 3.02, 3.59, 4.44,

4.78, 5.16, 5.57 e 5.98, cada tabela correspondendo a uma razão. Os resultados apresentados nestas tabelas correspondem aos testes baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4. São considerados todos os tamanhos amostrais utilizados e os níveis nominais de 10%, 5% e 1%.

Observamos, em todos os casos, que o teste baseado em HC0 foi o que apresentou as maiores discrepâncias de tamanho. Esse resultado já era esperado, uma vez que trabalhos anteriores, como Long & Ervin (2000), já chamavam atenção para as grandes distorções de tamanho apresentadas pelos testes baseados nesse estimador, mais fortemente quando o tamanho amostral é pequeno. Em relação aos testes baseados nos outros HC's considerados, aquele baseado em HC2 proporcionou testes um pouco menos liberais que aquele baseado em HC0, mas ainda com distorções consideráveis, sobretudo sob condições extremas de alavancagem e heteroscedasticidade. Na maioria dos casos, os testes baseados nos estimadores HC3 e HC4 foram os que proporcionaram as menores distorções de tamanho, conduzindo a taxas de rejeição, em muitos casos, bastante próximas dos correspondentes níveis nominais. Notamos nas Tabelas 3.8 a 3.13 que o teste baseado no estimador HC4 pode ser bastante conservativo em situações onde a razão de alavancagem é superior a 3.59.

Outro resultado observado é que à medida que a razão de alavancagem aumenta, as taxas de rejeição da hipótese nula tendem a se distanciar dos respectivos níveis nominais. Por exemplo, tome os casos onde $\lambda = 10$, $\alpha = 10\%$, $n = 20$, utilizando HC0 e $r = 1.51$, $r = 2.91$ e $r = 5.98$. As taxas de rejeição nestes casos foram 15.45%, 26.76% e 74.02%, respectivamente. Outro fato que chama atenção é a tendência da distorção do tamanho empírico se agravar com o aumento do grau de heteroscedasticidade. O único caso onde isso não ocorre é quando $r = 2.42$ (Tabela 3.4), contudo as taxas de rejeição são próximas dentre os três graus de heteroscedasticidade considerados, não comprometendo, portanto, esta análise. Por fim, notamos que em todos os casos considerados, quando o tamanho amostral aumenta, as taxas de rejeição tendem aos respectivos níveis nominais.

Tabela 3.1. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 1.51$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	15.52	12.60	11.68	10.98	10.49	10.28
		5	9.64	7.02	6.380	5.80	5.28	5.32
		1	3.40	2.01	1.64	1.36	1.16	1.07
	HC2	10	12.41	11.03	10.76	10.46	10.19	10.16
		5	7.14	5.98	5.70	5.40	5.08	5.22
		1	2.29	1.55	1.35	1.21	1.08	1.04
	HC3	10	9.62	9.69	9.83	9.92	9.90	10.07
		5	5.14	5.01	5.06	5.05	4.89	5.13
		1	1.49	1.19	1.12	1.07	1.02	1.01
	HC4	10	11.96	10.82	10.61	10.39	10.15	10.15
		5	6.81	5.82	5.60	5.35	5.06	5.21
		1	2.14	1.49	1.31	1.18	1.07	1.03
10	HC0	10	15.45	12.56	11.78	11.12	10.59	10.50
		5	9.27	7.06	6.37	5.79	5.27	5.21
		1	3.15	1.88	1.63	1.32	1.14	1.09
	HC2	10	12.30	11.22	10.87	10.56	10.33	10.38
		5	7.02	6.03	5.70	5.43	5.10	5.13
		1	2.08	1.49	1.39	1.17	1.08	1.06
	HC3	10	9.50	9.95	9.95	10.07	10.08	10.27
		5	5.00	5.08	5.10	5.11	4.94	5.08
		1	1.28	1.15	1.18	1.05	1.01	1.04
	HC4	10	12.01	11.12	10.79	10.53	10.30	10.38
		5	6.78	5.95	5.67	5.41	5.09	5.13
		1	1.99	1.45	1.37	1.17	1.07	1.06
100	HC0	10	16.38	13.25	12.16	11.22	10.62	10.42
		5	9.85	7.51	6.68	6.01	5.40	5.27
		1	3.31	2.02	1.73	1.41	1.19	1.08
	HC2	10	13.17	11.84	11.23	10.69	10.38	10.32
		5	7.44	6.46	5.99	5.67	5.22	5.20
		1	2.14	1.61	1.47	1.28	1.13	1.07
	HC3	10	10.24	10.54	10.38	10.17	10.14	10.22
		5	5.41	5.52	5.44	5.30	5.05	5.13
		1	1.34	1.27	1.22	1.15	1.06	1.05
	HC4	10	12.98	11.81	11.21	10.69	10.38	10.32
		5	7.29	6.43	5.98	5.67	5.22	5.20
		1	2.06	1.60	1.46	1.28	1.13	1.07

Tabela 3.2. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 2.00$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	19.15	14.33	12.72	11.51	10.73	10.40
		5	12.80	8.48	7.31	6.28	5.59	5.23
		1	5.73	6.12	2.12	1.59	1.28	1.10
	HC2	10	14.59	12.16	11.39	10.74	10.31	10.25
		5	9.22	7.02	6.31	5.70	5.33	5.12
		1	3.72	2.10	1.71	1.39	1.19	1.07
	HC3	10	10.62	10.22	10.09	9.95	9.94	10.11
		5	6.34	5.59	5.43	5.18	5.09	5.02
		1	2.32	1.57	1.37	1.22	1.11	1.03
	HC4	10	12.12	10.94	10.56	10.22	10.06	10.16
		5	7.43	6.12	5.73	5.36	5.18	5.05
		1	2.84	1.77	1.50	1.27	1.14	1.04
10	HC0	10	21.54	15.89	13.80	12.19	11.14	10.52
		5	14.63	9.64	8.05	6.66	5.95	5.29
		1	6.59	3.34	2.50	1.82	1.37	1.15
	HC2	10	16.23	13.40	12.26	11.29	10.71	10.33
		5	10.41	7.76	6.92	6.05	5.64	5.18
		1	4.23	2.51	2.02	1.57	1.27	1.10
	HC3	10	11.73	11.18	10.83	10.39	10.31	10.15
		5	7.06	6.21	5.90	5.44	5.33	5.06
		1	2.61	1.78	1.58	1.35	1.18	1.06
	HC4	10	13.01	11.70	11.19	10.57	10.38	10.18
		5	8.07	6.64	6.16	5.56	5.41	5.08
		1	3.15	1.99	1.68	1.39	1.20	1.06
100	HC0	10	23.16	17.24	14.80	12.94	11.53	10.62
		5	15.13	10.25	8.60	7.10	6.17	5.41
		1	6.38	3.29	2.53	1.79	1.40	1.13
	HC2	10	16.55	14.22	13.00	11.92	11.05	10.46
		5	10.23	8.08	7.28	6.38	5.81	5.28
		1	3.89	2.37	1.96	1.54	1.29	1.09
	HC3	10	11.43	11.62	11.32	10.88	10.53	10.26
		5	6.62	6.18	6.07	5.67	5.46	5.14
		1	2.23	1.67	1.53	1.31	1.16	1.06
	HC4	10	12.58	12.06	11.60	11.00	10.60	10.29
		5	7.51	6.53	6.25	5.77	5.50	5.16
		1	2.74	1.84	1.61	1.35	1.17	1.06

Tabela 3.3. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 2.33$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	17.64	13.60	12.31	11.39	10.86	10.29
		5	11.34	7.85	6.82	6.09	5.58	5.34
		1	4.58	2.51	1.94	1.52	1.23	1.17
	HC2	10	13.54	11.69	11.03	10.66	10.52	10.15
		5	8.24	6.51	6.01	5.58	5.36	5.23
		1	2.96	1.94	1.57	1.31	1.16	1.14
	HC3	10	9.98	9.96	9.85	9.93	10.18	10.01
		5	5.70	5.27	5.22	5.11	5.12	5.12
		1	1.82	1.45	1.29	1.12	1.09	1.10
	HC4	10	11.31	10.64	10.34	10.20	10.29	10.06
		5	6.75	5.76	5.53	5.29	5.22	5.16
		1	2.34	1.66	1.40	1.20	1.11	1.11
10	HC0	10	22.05	16.22	14.12	12.71	11.32	10.46
		5	14.96	10.00	8.36	6.99	6.04	5.50
		1	6.61	3.48	2.63	1.87	1.46	1.24
	HC2	10	16.78	13.81	12.52	11.72	10.88	10.30
		5	10.69	8.12	7.19	6.34	5.72	5.37
		1	4.16	2.62	2.10	1.59	1.34	1.19
	HC3	10	12.13	11.56	11.08	10.80	10.47	10.14
		5	7.19	6.48	6.05	5.71	5.43	5.24
		1	2.48	1.92	1.69	1.36	1.25	1.15
	HC4	10	12.92	11.80	11.20	10.86	10.48	10.14
		5	7.98	6.73	6.21	5.77	5.44	5.24
		1	2.96	2.05	1.76	1.38	1.25	1.15
100	HC0	10	27.69	19.22	16.21	13.94	12.01	10.82
		5	19.17	12.28	9.85	7.95	6.48	5.62
		1	8.52	4.52	3.26	2.24	1.65	1.25
	HC2	10	20.27	16.10	14.24	12.81	11.48	10.60
		5	12.85	9.79	8.35	7.12	6.08	5.47
		1	4.94	3.22	2.56	1.89	1.51	1.19
	HC3	10	13.89	13.22	12.44	11.68	10.97	10.38
		5	8.15	7.53	7.03	6.31	5.69	5.32
		1	2.67	2.29	1.98	1.58	1.36	1.14
	HC4	10	14.17	13.05	12.26	11.56	10.88	10.35
		5	8.55	7.53	6.96	6.25	5.64	5.29
		1	3.08	2.33	1.99	1.57	1.34	1.13

Tabela 3.4. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 2.42$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	18.85	14.40	13.04	11.76	10.91	10.23
		5	12.47	8.51	7.32	6.32	5.70	5.20
		1	5.32	2.80	2.07	1.72	1.31	1.10
	HC2	10	14.32	12.24	11.60	10.93	10.53	10.09
		5	8.85	7.00	6.34	5.72	5.43	5.10
		1	3.42	2.08	1.70	1.53	1.21	1.07
	HC3	10	10.26	10.25	10.28	10.08	10.12	9.93
		5	6.03	5.61	5.45	5.21	5.16	5.02
		1	1.98	1.56	1.37	1.33	1.10	1.03
	HC4	10	11.18	10.71	10.58	10.27	10.20	9.95
		5	6.73	5.92	5.66	5.31	5.21	5.04
		1	2.39	1.69	1.45	1.38	1.12	1.04
10	HC0	10	17.53	13.56	12.44	11.56	10.60	10.26
		5	11.24	7.85	6.94	6.11	5.54	5.21
		1	4.37	2.32	1.79	1.58	1.24	1.06
	HC2	10	13.19	11.65	11.18	10.81	10.24	10.12
		5	7.96	6.35	6.03	5.62	5.29	5.12
		1	2.62	1.74	1.46	1.35	1.15	1.03
	HC3	10	9.53	9.81	9.95	10.04	9.92	10.00
		5	5.24	5.14	5.15	5.11	5.03	5.03
		1	1.50	1.27	1.17	1.18	1.07	1.00
	HC4	10	10.60	10.40	10.34	10.28	10.02	10.03
		5	6.14	5.55	5.43	5.27	5.11	5.05
		1	1.87	1.44	1.26	1.25	1.09	1.01
100	HC0	10	16.68	13.02	11.96	11.20	10.41	10.24
		5	10.30	7.30	6.59	5.93	5.38	5.15
		1	3.74	2.07	1.64	1.44	1.18	1.06
	HC2	10	12.52	11.22	10.82	10.52	10.09	10.11
		5	7.16	5.99	5.73	5.48	5.15	5.06
		1	2.19	1.55	1.34	1.23	1.10	1.04
	HC3	10	8.92	9.51	9.72	9.85	9.73	9.96
		5	4.69	4.79	4.99	5.05	4.95	4.96
		1	1.16	1.15	1.08	1.09	1.04	1.01
	HC4	10	10.36	10.29	10.29	10.19	9.90	10.04
		5	5.62	5.35	5.36	5.28	5.06	5.01
		1	1.58	1.31	1.21	1.16	1.08	1.03

Tabela 3.5. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 2.62$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	18.49	14.05	12.63	11.57	10.81	10.34
		5	12.07	8.28	7.14	6.33	5.66	5.27
		1	4.97	2.60	2.03	1.62	1.30	1.14
	HC2	10	14.04	11.98	11.27	10.80	10.41	10.20
		5	8.63	6.81	6.18	5.77	5.37	5.16
		1	3.12	1.96	1.66	1.42	1.21	1.10
	HC3	10	10.12	10.04	9.97	10.08	10.06	10.05
		5	5.84	5.44	5.34	5.25	5.13	5.08
		1	1.83	1.47	1.31	1.25	1.11	1.07
	HC4	10	10.76	10.39	10.19	10.20	10.11	10.07
		5	6.37	5.70	5.50	5.34	5.17	5.09
		1	2.14	1.60	1.40	1.27	1.14	1.08
10	HC0	10	19.03	14.29	12.74	11.67	10.83	10.36
		5	12.53	8.42	7.29	6.34	5.63	5.26
		1	5.25	2.73	2.05	1.62	1.32	1.17
	HC2	10	14.27	12.08	11.33	10.83	10.46	10.19
		5	8.75	6.83	6.25	5.74	5.38	5.16
		1	3.25	2.03	1.62	1.39	1.21	1.13
	HC3	10	10.10	10.05	10.02	10.08	10.06	10.01
		5	5.78	5.45	5.35	5.17	5.09	5.06
		1	1.86	1.48	1.28	1.20	1.12	1.09
	HC4	10	10.60	10.40	10.25	10.19	10.12	10.03
		5	6.22	5.68	5.49	5.27	5.14	5.08
		1	2.14	1.59	1.33	1.23	1.14	1.09
100	HC0	10	19.20	14.53	12.86	11.82	10.98	10.36
		5	12.21	8.32	7.25	6.32	5.66	5.32
		1	4.67	2.48	1.90	1.49	1.24	1.12
	HC2	10	13.81	12.14	11.39	10.89	10.55	10.21
		5	8.14	6.56	6.14	5.71	5.35	5.21
		1	2.73	1.77	1.48	1.28	1.15	1.08
	HC3	10	9.33	9.94	9.99	10.11	10.16	10.07
		5	4.98	5.06	5.13	5.12	5.07	5.12
		1	1.45	1.24	1.14	1.10	1.06	1.04
	HC4	10	9.80	10.36	10.25	10.27	10.27	10.10
		5	5.37	5.33	5.33	5.23	5.14	5.14
		1	1.67	1.33	1.22	1.13	1.09	1.04

Tabela 3.6. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 2.91$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	18.90	14.20	12.94	11.71	10.84	10.37
		5	12.53	8.55	7.27	6.32	5.65	5.24
		1	5.37	2.77	2.10	1.62	1.33	1.07
	HC2	10	14.25	12.08	11.50	10.88	10.46	10.22
		5	8.91	6.94	6.24	5.76	5.36	5.11
		1	3.35	2.08	1.70	1.40	1.22	1.03
	HC3	10	10.15	10.12	10.11	10.05	10.04	10.03
		5	5.90	5.55	5.34	5.21	5.04	5.00
		1	2.02	1.49	1.37	1.17	1.13	0.99
	HC4	10	9.79	9.94	9.98	9.95	10.00	9.99
		5	5.83	5.46	5.28	5.17	5.01	4.98
		1	2.13	1.50	1.36	1.16	1.12	0.98
10	HC0	10	26.76	18.89	16.13	13.74	11.94	10.80
		5	19.05	12.16	9.92	7.90	6.48	5.55
		1	9.22	4.82	3.49	2.38	1.69	1.27
	HC2	10	19.60	15.76	14.12	12.56	11.32	10.57
		5	12.97	9.68	8.38	6.98	6.03	5.41
		1	5.80	3.48	2.74	2.00	1.54	1.21
	HC3	10	13.35	12.72	12.22	11.38	10.77	10.33
		5	8.42	7.55	6.97	6.17	5.66	5.24
		1	3.39	2.51	2.09	1.68	1.40	1.16
	HC4	10	11.49	11.47	11.21	10.71	10.43	10.17
		5	7.44	6.76	6.35	5.75	5.43	5.13
		1	3.16	2.23	1.89	1.53	1.34	1.12
100	HC0	10	34.88	23.58	19.37	15.52	12.60	11.17
		5	24.70	15.59	12.31	9.26	7.16	5.85
		1	11.95	6.33	4.47	2.87	1.97	1.39
	HC2	10	23.13	19.08	16.57	13.97	11.85	10.87
		5	15.18	11.81	10.09	8.14	6.62	5.67
		1	6.84	4.24	3.38	2.36	1.75	1.33
	HC3	10	14.39	14.85	14.00	12.45	11.22	10.55
		5	9.07	8.75	8.12	7.00	6.13	5.48
		1	3.81	2.77	2.49	1.93	1.57	1.24
	HC4	10	11.05	12.17	12.21	11.36	10.73	10.35
		5	7.18	6.97	6.86	6.24	5.77	5.32
		1	3.26	2.17	2.01	1.65	1.43	1.17

Tabela 3.7. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 3.02$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	19.42	14.47	12.83	11.56	10.77	10.35
		5	13.10	8.65	7.34	6.35	5.67	5.30
		1	5.84	2.93	2.11	1.65	1.27	1.14
	HC2	10	14.76	12.31	11.42	10.78	10.38	10.19
		5	9.41	7.09	6.35	5.75	5.39	5.19
		1	3.79	2.23	1.73	1.43	1.18	1.10
	HC3	10	10.75	10.33	10.16	10.00	9.99	10.05
		5	6.37	5.69	5.42	5.20	5.11	5.07
		1	2.33	1.60	1.38	1.22	1.07	1.07
	HC4	10	11.54	10.84	10.51	10.22	10.11	10.09
		5	6.95	6.02	5.65	5.36	5.18	5.10
		1	2.59	1.74	1.45	1.28	1.10	1.08
10	HC0	10	21.16	15.42	14.51	12.11	11.05	10.44
		5	14.46	9.51	8.52	6.70	5.78	5.32
		1	6.58	3.34	2.67	1.77	1.40	1.15
	HC2	10	16.25	13.22	12.97	11.21	10.62	10.28
		5	10.43	7.83	7.35	6.03	5.49	5.22
		1	4.29	2.52	2.11	1.53	1.30	1.12
	HC3	10	11.88	11.13	11.42	10.46	10.24	10.12
		5	7.19	6.28	6.24	5.46	5.21	5.10
		1	2.70	1.84	1.67	1.33	1.19	1.08
	HC4	10	12.91	11.72	11.80	10.64	10.35	10.16
		5	7.99	6.74	6.53	5.63	5.28	5.13
		1	3.07	2.05	1.77	1.38	1.22	1.09
100	HC0	10	23.29	16.77	14.51	12.61	11.45	10.63
		5	15.76	10.39	8.52	7.11	6.00	5.50
		1	7.01	3.63	2.67	1.88	1.45	1.19
	HC2	10	17.59	14.28	12.97	11.70	11.00	10.42
		5	11.17	8.51	7.35	6.48	5.69	5.38
		1	4.33	2.70	2.11	1.64	1.33	1.15
	HC3	10	12.56	11.99	11.42	10.89	10.55	10.23
		5	7.48	6.76	6.24	5.83	5.38	5.26
		1	2.57	1.97	1.67	1.42	1.20	1.11
	HC4	10	13.68	12.57	11.80	11.09	10.66	10.29
		5	8.36	7.21	6.53	5.99	5.45	5.28
		1	3.01	2.16	1.77	1.49	1.24	1.12

Tabela 3.8. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 3.59$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	25.42	17.51	14.91	13.11	11.51	10.50
		5	18.55	11.27	9.01	7.56	6.15	5.45
		1	9.97	4.57	3.12	2.23	1.60	1.23
	HC2	10	17.91	14.16	12.70	11.83	10.87	10.28
		5	12.25	8.71	7.41	6.59	5.72	5.27
		1	5.83	3.24	2.37	1.83	1.45	1.17
	HC3	10	11.26	11.04	10.69	10.60	10.23	10.04
		5	7.22	6.44	5.98	5.67	5.34	5.10
		1	3.18	2.20	1.74	1.45	1.30	1.11
	HC4	10	6.14	8.36	8.77	9.45	9.57	9.78
		5	3.86	4.76	4.79	4.91	4.94	4.94
		1	1.57	1.52	1.32	1.19	1.14	1.06
10	HC0	10	38.84	25.62	20.56	16.48	13.15	11.27
		5	29.38	17.98	13.67	10.26	7.53	5.99
		1	16.41	8.32	5.66	3.63	2.17	1.40
	HC2	10	25.27	20.35	17.22	14.51	12.26	10.92
		5	17.62	13.37	10.94	8.82	6.90	5.75
		1	8.78	5.59	4.15	2.92	1.91	1.31
	HC3	10	14.55	15.37	14.21	12.75	11.44	10.59
		5	9.59	9.48	8.51	7.49	6.27	5.53
		1	4.37	3.57	2.93	2.27	1.64	1.22
	HC4	10	6.49	9.71	10.32	10.46	10.24	10.11
		5	4.23	5.64	5.84	5.85	5.43	5.21
		1	1.90	1.93	1.76	1.59	1.30	1.11
100	HC0	10	54.49	32.69	24.40	18.22	13.80	11.56
		5	38.96	23.81	17.06	11.75	8.05	6.18
		1	17.33	10.66	7.34	4.47	2.46	1.48
	HC2	10	27.01	25.66	20.43	16.08	12.85	11.19
		5	16.25	16.94	13.45	10.02	7.32	5.92
		1	6.88	5.77	4.99	3.52	2.11	1.37
	HC3	10	11.36	18.63	16.76	14.05	11.85	10.82
		5	6.93	10.65	10.25	8.40	6.65	5.67
		1	3.00	2.95	3.13	2.68	1.82	1.28
	HC4	10	3.95	9.20	11.43	11.17	10.46	10.24
		5	2.56	4.25	6.22	6.25	5.65	5.27
		1	1.12	1.09	1.41	1.71	1.42	1.15

Tabela 3.9. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 4.44$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	29.79	19.87	16.52	13.90	11.96	10.65
		5	22.44	13.25	10.38	8.21	6.56	5.52
		1	12.51	5.86	3.98	2.64	1.76	1.28
	HC2	10	19.50	15.33	13.60	12.22	11.13	10.33
		5	13.73	9.77	8.25	6.91	5.99	5.29
		1	6.70	3.96	2.93	2.08	1.52	1.21
	HC3	10	10.65	11.33	10.93	10.64	10.33	9.99
		5	6.93	6.94	6.38	5.81	5.44	5.06
		1	3.11	2.53	2.08	1.60	1.32	1.13
	HC4	10	2.96	6.23	7.21	8.15	8.97	9.45
		5	1.83	3.51	3.88	4.19	4.58	4.71
		1	0.80	1.15	1.18	1.04	1.02	1.00
10	HC0	10	43.87	26.00	20.30	15.93	12.93	11.06
		5	36.30	19.08	13.87	10.09	7.35	5.78
		1	24.75	10.23	6.41	3.76	2.17	1.42
	HC2	10	29.68	19.97	16.49	13.77	11.87	10.60
		5	22.99	14.02	10.80	8.38	6.60	5.51
		1	13.90	7.01	4.63	2.89	1.82	1.31
	HC3	10	16.65	14.66	13.06	11.80	10.84	10.15
		5	12.02	9.80	8.20	6.88	5.92	5.24
		1	6.58	4.51	3.24	2.18	1.57	1.23
	HC4	10	4.19	7.49	7.95	8.49	9.08	9.38
		5	2.82	4.60	4.59	4.58	4.76	4.79
		1	1.41	1.87	1.61	1.29	1.14	1.07
100	HC0	10	51.89	28.43	21.58	16.53	13.14	11.08
		5	44.76	21.56	15.04	10.54	7.60	5.88
		1	33.56	12.56	7.42	4.15	2.29	1.45
	HC2	10	35.80	21.73	17.37	14.16	12.01	10.65
		5	28.99	15.76	11.61	8.70	6.78	5.57
		1	19.06	8.46	5.32	3.17	1.95	1.35
	HC3	10	20.35	15.87	13.57	12.04	10.91	10.21
		5	15.08	10.95	8.69	7.03	5.99	5.30
		1	8.47	5.45	3.71	2.37	1.63	1.27
	HC4	10	4.20	7.81	8.01	8.39	9.07	9.45
		5	2.73	4.95	4.72	4.61	4.69	4.79
		1	1.32	2.10	1.75	1.34	1.12	1.07

Tabela 3.10. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 4.78$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	26.61	18.65	15.76	13.58	11.97	10.81
		5	19.34	12.22	9.74	8.00	6.55	5.53
		1	9.92	5.01	3.46	2.41	1.77	1.29
	HC2	10	17.89	14.81	13.36	12.13	11.22	10.52
		5	12.13	9.25	7.84	6.90	5.99	5.33
		1	5.56	3.52	2.63	1.99	1.55	1.21
	HC3	10	9.85	11.28	10.93	10.67	10.46	10.20
		5	6.19	6.76	6.13	5.89	5.45	5.13
		1	2.49	2.29	1.96	1.58	1.36	1.15
	HC4	10	1.96	6.39	7.35	8.47	9.23	9.68
		5	1.13	3.54	3.90	4.44	4.69	4.80
		1	0.38	1.10	1.12	1.07	1.10	1.05
10	HC0	10	47.02	28.79	22.23	17.46	13.62	11.27
		5	38.13	21.39	15.50	11.18	7.95	6.12
		1	24.09	11.47	7.22	4.42	2.52	1.52
	HC2	10	30.48	22.61	18.40	15.25	12.52	10.85
		5	22.37	15.92	12.29	9.42	7.19	5.84
		1	12.16	7.75	5.31	3.47	2.15	1.41
	HC3	10	15.25	16.74	14.73	13.02	11.53	10.43
		5	10.49	11.13	9.31	7.81	6.45	5.54
		1	5.17	4.75	3.79	2.74	1.85	1.31
	HC4	10	2.60	7.92	8.86	9.39	9.61	9.70
		5	1.64	4.58	5.20	5.25	5.09	4.99
		1	0.74	1.71	1.77	1.62	1.36	1.14
100	HC0	10	67.70	36.28	26.37	19.35	14.26	11.53
		5	58.30	28.93	19.47	12.87	8.60	6.23
		1	37.68	17.31	10.24	5.68	2.91	1.60
	HC2	10	39.04	28.85	21.68	16.69	13.09	11.05
		5	25.74	21.43	15.30	10.78	7.67	5.92
		1	12.01	10.83	7.39	4.44	2.48	1.50
	HC3	10	12.45	21.24	17.39	14.20	11.99	10.56
		5	8.10	14.35	11.63	8.86	6.83	5.61
		1	3.88	5.49	4.95	3.38	2.08	1.38
	HC4	10	1.43	7.92	10.07	9.94	9.84	9.70
		5	0.94	3.78	5.90	5.80	5.29	5.02
		1	0.45	0.97	1.79	1.87	1.50	1.38

Tabela 3.11. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 5.16$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	30.09	20.48	17.09	14.12	11.86	10.85
		5	22.71	13.85	10.98	8.55	6.62	5.70
		1	12.80	6.27	4.31	2.87	1.84	1.40
	HC2	10	20.67	16.34	14.36	12.57	11.04	10.56
		5	14.85	10.65	8.83	7.32	6.06	5.48
		1	7.65	4.53	3.28	2.32	1.62	1.32
	HC3	10	12.34	12.52	11.81	10.96	10.29	10.23
		5	8.47	7.86	6.98	6.19	5.50	5.26
		1	4.02	3.16	2.41	1.85	1.42	1.23
	HC4	10	4.14	7.41	8.02	8.61	8.98	9.65
		5	2.86	4.51	4.56	4.65	4.68	4.91
		1	1.43	1.71	1.49	1.28	1.12	1.10
10	HC0	10	45.33	27.70	21.56	16.73	13.19	11.31
		5	38.27	21.01	15.16	10.77	7.64	6.16
		1	27.53	12.18	7.57	4.48	2.45	1.58
	HC2	10	32.21	22.09	17.80	14.65	12.13	10.92
		5	25.89	16.19	12.12	9.13	6.91	5.85
		1	17.12	8.85	5.79	3.60	2.11	1.48
	HC3	10	19.28	17.02	14.46	12.54	11.09	10.52
		5	14.96	11.94	9.57	7.65	6.16	5.56
		1	9.52	6.15	4.25	2.85	1.81	1.38
	HC4	10	6.27	9.45	9.40	9.29	9.24	9.75
		5	4.85	6.40	5.85	5.34	5.01	5.07
		1	3.02	3.05	2.49	1.81	1.33	1.20
100	HC0	10	54.31	31.38	23.87	18.01	13.74	11.48
		5	47.51	24.69	17.25	11.92	8.09	6.26
		1	36.61	15.29	9.20	5.17	2.76	1.68
	HC2	10	38.46	25.10	19.65	15.64	12.60	11.02
		5	31.79	18.90	13.68	10.02	7.22	5.95
		1	22.71	10.95	7.00	4.08	2.35	1.55
	HC3	10	22.57	19.05	15.78	13.37	11.48	10.60
		5	18.19	13.79	10.66	8.28	6.44	5.65
		1	12.48	7.55	5.13	3.26	1.98	1.41
	HC4	10	6.96	10.17	9.87	9.61	9.52	9.82
		5	5.56	6.90	6.39	5.61	5.10	5.12
		1	3.82	3.50	2.79	1.99	1.40	1.22

Tabela 3.12. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 5.57$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	34.76	22.57	18.24	14.94	12.50	11.02
		5	26.97	15.75	12.03	9.12	7.05	5.92
		1	15.83	7.56	5.03	3.20	2.00	1.44
	HC2	10	20.76	17.30	14.88	12.87	11.44	10.61
		5	14.82	11.56	9.27	7.59	6.25	5.63
		1	7.79	5.15	3.64	2.49	1.71	1.33
	HC3	10	9.12	12.46	11.64	10.86	10.41	10.23
		5	6.20	8.06	7.00	6.25	5.54	5.34
		1	3.05	3.37	2.53	1.92	1.44	1.23
	HC4	10	1.68	6.40	7.00	7.82	8.74	9.57
		5	1.19	3.99	4.01	4.22	4.42	4.90
		1	0.59	1.54	1.41	1.20	1.05	1.07
10	HC0	10	63.04	35.52	26.16	19.17	14.36	11.71
		5	56.50	28.70	19.65	13.06	8.74	6.47
		1	44.00	18.99	11.25	6.12	3.05	1.75
	HC2	10	42.81	27.87	21.06	16.20	12.91	11.14
		5	34.18	21.91	15.42	10.73	7.60	6.10
		1	21.91	13.52	8.33	4.68	2.54	1.60
	HC3	10	17.68	20.95	16.60	13.50	11.58	10.60
		5	13.29	15.79	11.70	8.63	6.67	5.73
		1	8.02	8.98	5.96	3.57	2.11	1.45
	HC4	10	2.88	10.25	9.57	9.01	9.20	9.59
		5	2.18	7.13	6.37	5.38	4.97	5.03
		1	1.34	3.54	2.92	2.04	1.44	1.22
100	HC0	10	83.54	41.87	29.28	20.60	14.83	11.90
		5	79.96	35.79	23.09	14.50	9.16	6.63
		1	72.08	26.67	14.64	7.27	3.41	1.85
	HC2	10	65.42	33.45	23.78	17.38	13.28	11.33
		5	53.62	27.86	18.02	11.82	8.04	6.22
		1	30.95	19.93	10.96	5.62	2.86	1.69
	HC3	10	15.70	25.76	18.64	14.40	11.88	10.76
		5	11.19	20.93	13.82	9.50	7.03	5.83
		1	6.52	13.76	7.97	4.32	2.37	1.52
	HC4	10	1.93	13.04	10.72	9.45	9.29	9.67
		5	1.53	9.17	7.48	5.77	5.18	5.07
		1	0.97	4.22	3.92	2.35	1.56	1.25

Tabela 3.13. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos assintóticos, $r = 5.98$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	45.47	28.27	22.36	17.20	13.70	11.49
		5	37.83	21.44	15.85	11.26	8.05	6.24
		1	25.76	12.24	7.83	4.66	2.65	1.58
	HC2	10	24.71	21.53	17.84	14.59	12.37	10.96
		5	18.97	15.69	12.20	9.22	7.08	5.86
		1	11.48	8.37	5.66	3.63	2.22	1.44
	HC3	10	8.96	15.38	13.72	12.07	11.07	10.48
		5	6.56	10.78	8.95	7.37	6.20	5.53
		1	3.70	5.44	3.97	2.72	1.82	1.32
	HC4	10	0.93	6.98	7.47	8.00	8.79	9.54
		5	0.69	4.64	4.69	4.55	4.66	4.88
		1	0.41	2.19	1.91	1.55	1.26	1.11
10	HC0	10	74.02	39.61	28.80	20.62	15.03	11.99
		5	69.20	33.55	22.48	14.46	9.43	6.73
		1	59.92	24.48	14.02	7.33	3.58	1.82
	HC2	10	50.38	31.07	22.99	17.21	13.46	11.42
		5	43.01	25.54	17.39	11.70	8.17	6.26
		1	31.75	17.85	10.38	5.63	2.93	1.65
	HC3	10	18.60	23.19	17.79	14.10	11.99	10.76
		5	14.83	18.57	12.97	9.25	7.04	5.84
		1	10.14	12.34	7.52	4.28	2.40	1.48
	HC4	10	1.92	11.40	9.80	8.97	9.30	9.60
		5	1.54	8.50	6.90	5.60	5.13	5.04
		1	1.08	5.04	3.64	2.27	1.55	1.21
100	HC0	10	88.40	43.32	30.47	21.38	15.30	12.07
		5	86.16	37.66	24.33	15.14	9.65	6.74
		1	81.40	29.29	15.96	7.93	3.75	1.85
	HC2	10	71.67	34.37	24.37	17.76	13.68	11.45
		5	64.15	29.17	18.81	12.23	8.39	6.28
		1	48.80	21.97	11.93	6.16	3.06	1.67
	HC3	10	20.16	26.25	18.85	14.49	12.14	10.81
		5	15.83	21.82	14.17	9.72	7.27	5.83
		1	10.88	15.91	8.71	4.62	2.50	1.50
	HC4	10	1.76	13.65	10.52	9.24	9.35	9.63
		5	1.45	10.68	7.62	5.86	5.22	5.04
		1	1.02	6.78	4.27	2.46	1.61	1.21

3.4. Valores críticos ajustados

Após a realização das modelagens estatísticas onde as variáveis respostas de interesse foram os valores críticos empíricos correspondentes aos testes baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4, considerando três níveis nominais (10%, 5% e 1%), chegamos, então, aos seguintes modelos estimados:

- 1) $\hat{y}_{\alpha=10\%,HC0} = 1.6448 + 8.0340m_t$,
- 2) $\hat{y}_{\alpha=10\%,HC2} = 1.6448 + 3.9080m_t$,
- 3) $\hat{y}_{\alpha=10\%,HC3} = 1.6448 + 0.6977m_t$,
- 4) $\hat{y}_{\alpha=10\%,HC4} = 1.6448 - 1.8077m_t$,
- 5) $\hat{y}_{\alpha=5\%,HC0} = 1.9599 + 10.294m_t$,
- 6) $\hat{y}_{\alpha=5\%,HC2} = 1.9599 + 5.7381m_t$,
- 7) $\hat{y}_{\alpha=5\%,HC3} = 1.9599 + 1.8640m_t$,
- 8) $\hat{y}_{\alpha=5\%,HC4} = 1.9599 - 1.4482m_t$,
- 9) $\hat{y}_{\alpha=1\%,HC0} = 2.5758 + 16.017m_t$,
- 10) $\hat{y}_{\alpha=1\%,HC2} = 2.5758 + 10.707m_t$,
- 11) $\hat{y}_{\alpha=1\%,HC3} = 2.5758 + 5.8690m_t$,
- 12) $\hat{y}_{\alpha=1\%,HC4} = 2.5758 + 0.6021m_t$,

onde $m = r/n$, $r = h_{\max}/\bar{h}$. Os modelos de 1 a 4 correspondem a valores críticos para testes com níveis de significância $\alpha = 10\%$ baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4, respectivamente. Seguindo a mesma lógica, os modelos de 5 a 8 podem ser usados para predizer valores críticos considerando $\alpha = 5\%$ e os modelos de 9 a 12 considerando $\alpha = 1\%$. É fácil ver que estes modelos foram estimados com restrições ao parâmetro de intercepto, β_0 . Essa é uma restrição natural a ser adotada, já que é intuitivo admitirmos que assintoticamente m tende a ser nulo, situação em que estes modelos estimam valores críticos muito próximos aos respectivos valores críticos assintóticos. Neste sentido, no processo de estimação foi imposta a restrição de que o intercepto deveria ser igual ao correspondente valor crítico assintótico.

Nas Tabelas 3.14 a 3.17 são apresentados os valores críticos ajustados considerando alguns casos onde combinamos tamanho amostral, n , e razão de alavancagem, r , para cada um dos HC's e níveis de significância. Em um dos exemplos, que será mostrado na Seção 3.5, que considera $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 3.59$, $\alpha = 5\%$ e utilizamos HC0, conseguimos corrigir o teste que havia fornecido uma taxa de rejeição de 38.96% para 4.05%. Isso foi feito utilizando o valor crítico ajustado pelo modelo que propomos ao invés do valor crítico assintótico. Neste caso, o valor crítico ajustado igual a 3.808 foi utilizado no lugar do correspondente valor crítico assintótico (1.960).

Nestas mesmas tabelas percebemos que, em todos os casos onde utilizamos HC0, HC2 e HC3, à medida que aumentamos a razão de alavancagem encontramos valores críticos ajustados maiores. Observamos que acontece o oposto ao considerarmos HC4. Notamos, ainda, que ao considerarmos tamanhos amostrais cada vez maiores, os valores críticos ajustados se aproximam dos valores críticos assintóticos, independentemente da razão de alavancagem. Isto justifica os desempenhos semelhantes entre os testes baseados nos valores críticos ajustados e assintóticos quando consideramos um tamanho amostral suficientemente grande, fato este que pode ser comprovado nas Figuras 3.1 a 3.3.

Tabela 3.14. Valores críticos ajustados para $n = 20$.

		α	10%	5%	1%
$r = 2.00$	HC0		2.448	2.989	4.178
	HC2		2.036	2.534	3.647
	HC3		1.715	2.146	3.163
	HC4		1.464	1.815	2.636
$r = 3.59$	HC0		3.087	3.808	5.451
	HC2		2.346	2.990	4.498
	HC3		1.770	2.295	3.629
	HC4		1.320	1.700	2.684
$r = 4.78$	HC0		3.565	4.420	6.404
	HC2		2.579	3.331	5.135
	HC3		1.812	2.405	3.978
	HC4		1.213	1.614	2.720

Obs: valores críticos assintóticos $p/ \alpha = 0.10, 0.05$ e 0.01 são, respectivamente, 1.645, 1.960 e 2.576.

Tabela 3.15. Valores críticos ajustados para $n = 40$.

	α	10%	5%	1%
$r = 2.00$	HC0	2.046	2.475	3.377
	HC2	1.840	2.247	3.111
	HC3	1.680	2.053	2.869
	HC4	1.554	1.887	2.605
$r = 3.59$	HC0	2.366	2.884	4.013
	HC2	1.996	2.475	3.537
	HC3	1.707	2.127	3.103
	HC4	1.483	1.830	2.630
$r = 4.78$	HC0	2.605	3.190	4.490
	HC2	2.112	2.646	3.855
	HC3	1.728	2.183	3.277
	HC4	1.429	1.787	2.648

Obs: valores críticos assintóticos p/ $\alpha = 0.10, 0.05$ e 0.01 são, respectivamente, 1.645, 1.960 e 2.576.

Tabela 3.16. Valores críticos ajustados para $n = 100$.

	α	10%	5%	1%
$r = 2.00$	HC0	1.805	2.166	2.896
	HC2	1.723	2.075	2.790
	HC3	1.659	1.997	2.693
	HC4	1.609	1.931	2.588
$r = 3.59$	HC0	1.933	2.329	3.151
	HC2	1.785	2.166	2.960
	HC3	1.670	2.027	2.786
	HC4	1.580	1.908	2.597
$r = 4.78$	HC0	2.029	2.452	3.341
	HC2	2.579	2.234	3.088
	HC3	1.678	2.049	2.856
	HC4	1.558	1.891	2.604

Obs: valores críticos assintóticos p/ $\alpha = 0.10, 0.05$ e 0.01 são, respectivamente, 1.645, 1.960 e 2.576.

Tabela 3.17. Valores críticos ajustados para $n = 500$.

	α	10%	5%	1%
$r = 2.00$	HC0	1.677	2.001	2.640
	HC2	1.660	1.983	2.619
	HC3	1.648	1.967	2.599
	HC4	1.638	1.954	2.578
$r = 3.59$	HC0	1.702	2.034	2.691
	HC2	1.673	2.001	2.653
	HC3	1.650	1.973	2.618
	HC4	1.632	1.950	2.580
$r = 4.78$	HC0	1.722	2.058	2.729
	HC2	1.682	2.015	2.678
	HC3	1.651	1.978	2.632
	HC4	1.628	1.946	2.582

Obs: valores críticos assintóticos $p/\alpha = 0.10, 0.05$ e 0.01 são, respectivamente, 1.645, 1.960 e 2.576.

Nas Figuras 3.1 a 3.3 são apresentados os gráficos dos valores críticos ajustados pelo modelo de regressão condicionados aos tamanhos amostrais, $n = 40, 60, 100$ e 500 , em função apenas da razão de alavancagem, considerando os níveis de significâncias 10%, 5% e 1%. Em todos os casos, dois fatos chamam atenção mais fortemente à medida que tomamos amostras cada vez maiores. Primeiro, a diferença entre os valores ajustados considerando cada um dos HC's tende a diminuir. Segundo, em todos os casos os valores críticos ajustados se aproximam dos correspondentes valores críticos assintóticos.

Nestas mesmas figuras observamos que os valores críticos ajustados para o teste que usa HC0 são mais elevados que os correspondentes valores críticos ajustados para os testes que usam os outros HC's considerados, sobretudo em pequenas amostras. Este fato já era esperado, visto que nas simulações os testes baseados neste estimador proporcionaram as taxas de rejeição mais distantes dos níveis nominais.

Nota-se que ao considerarmos o estimador jackknife aproximado (HC3), os valores críticos ajustados para os testes baseados neste estimador não estão muito distantes dos respectivos valores críticos assintóticos, indicando que a correção do valor crítico, ao utilizarmos esse estimador, não é tão severa relativamente ao caso onde considerarmos os estimadores HC0 e HC2.

Figura 3.1. Gráficos dos valores críticos ajustados para $\alpha = 10\%$.

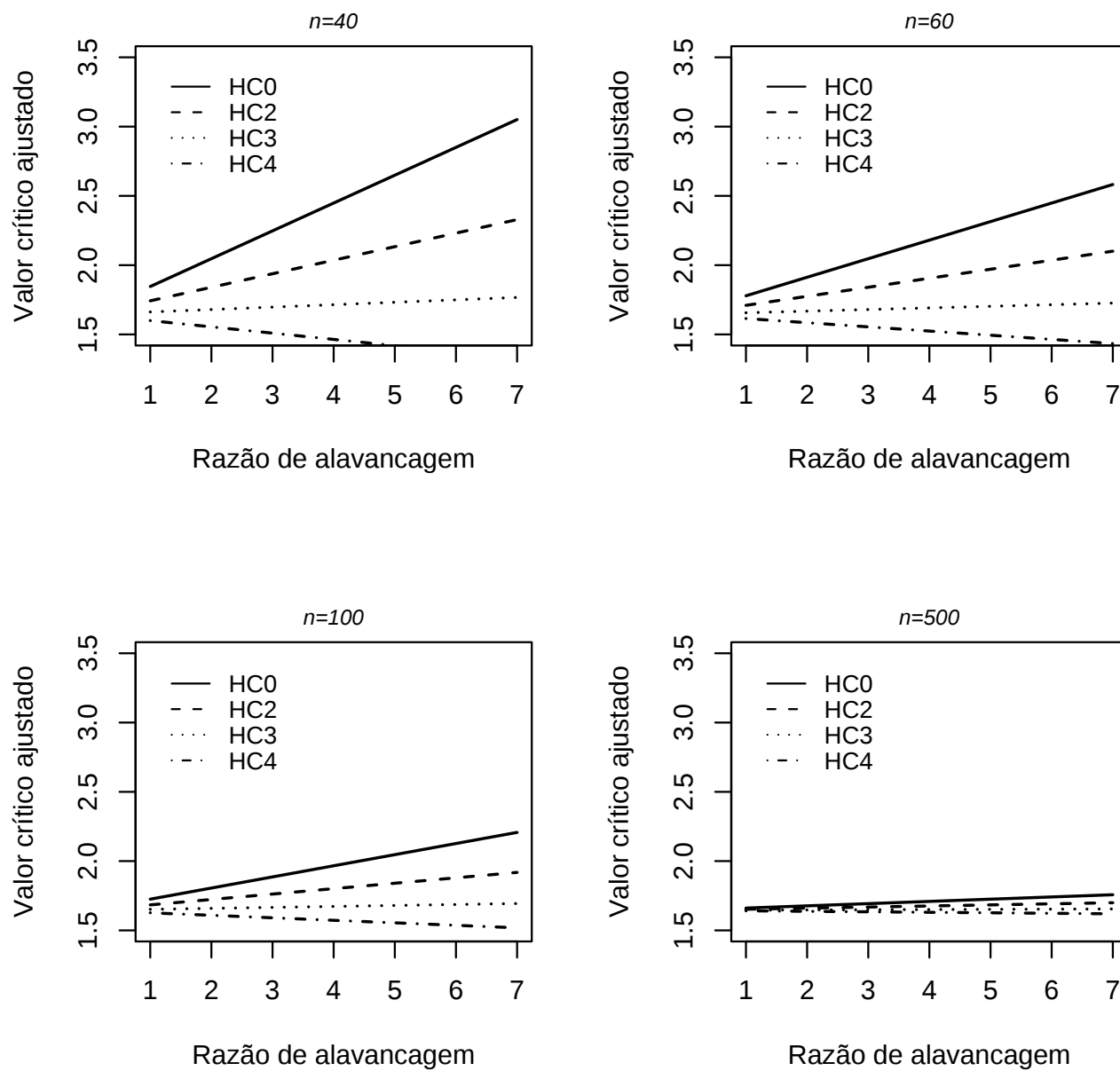
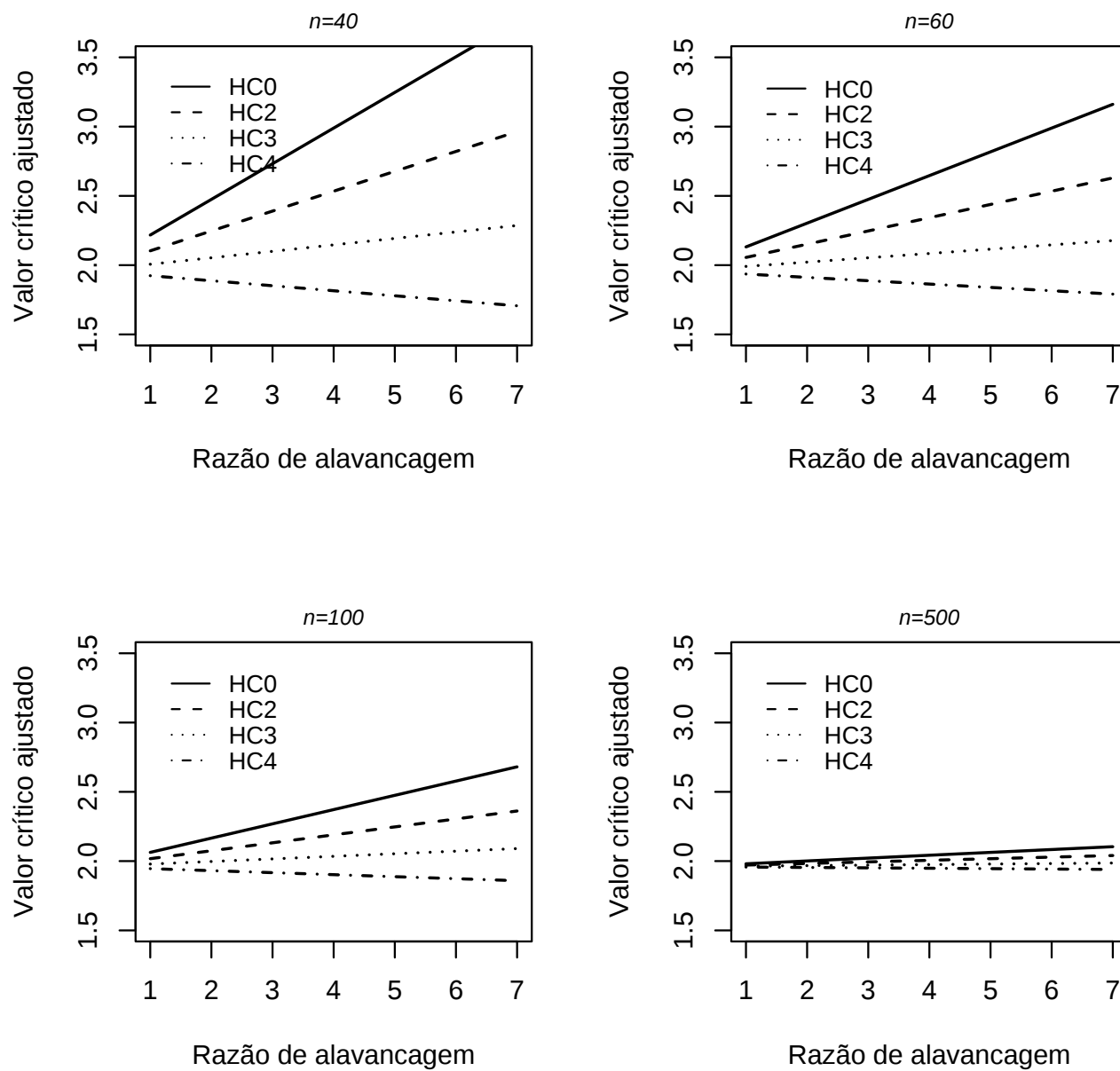
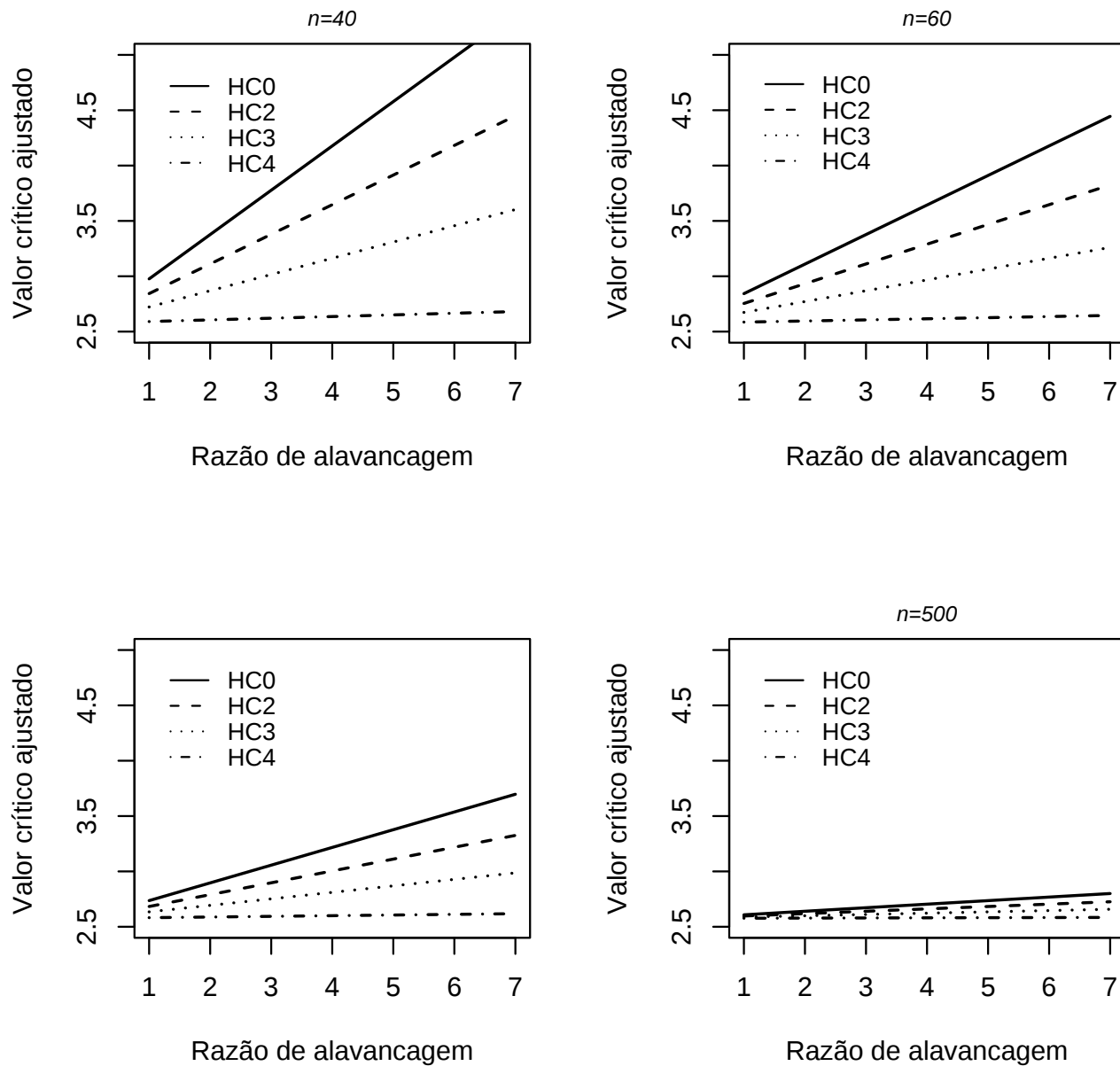


Figura 3.2. Gráficos dos valores críticos ajustados para $\alpha = 5\%$.



Notamos, ainda, que os valores críticos ajustados para o teste baseado em HC4 são menores que os valores críticos assintóticos e, como observado nas Tabelas 3.18 a 3.23, adiante, não obtivemos testes onde as taxas de rejeição fossem corrigidas para valores mais próximos dos níveis nominais.

Figura 3.3. Gráficos dos valores críticos ajustados para $\alpha = 1\%$.



3.5. Resultados numéricos com valores críticos ajustados

Nesta seção nós fazemos uma comparação entre as taxas de rejeição obtidas com valores críticos assintóticos, apresentadas na seção anterior, e as taxas de rejeição obtidas através do uso de valores críticos ajustados. Os resultados aqui apresentados referem-se a um subconjunto dos casos considerados na seção anterior. Consideramos situações onde a razão de alavancagem, r , é igual a 2.00, 2.33, 3.02, 3.59, 4.78 e 5.98. São apresentados os valores críticos ajustados utilizados em alguns desses casos, objetivando uma comparação com os valores críticos assintóticos, que são comumente usados na prática.

Inicialmente, dois aspectos gerais chamam atenção nas Tabelas 3.18 a 3.23, que apresentam os resultados das novas simulações. Primeiramente, notamos que os testes baseados nos valores críticos ajustados tendem a melhorar de desempenho com o aumento do tamanho amostral. Isso é visto pela aproximação gradual das taxas de rejeição dos correspondentes níveis nominais à medida que consideramos tamanhos amostrais cada vez maiores. Segundo, esses testes têm desempenhos semelhantes aos que utilizam o valor crítico assintótico quando o tamanho amostral é grande. Este segundo fato já era esperado, visto que quando n é grande os novos valores críticos são aproximadamente iguais aos valores críticos assintóticos correspondentes.

Podemos observar, ainda, que apesar dos testes baseados nos estimadores HC0 e HC2 com base nos valores críticos ajustados serem muitas vezes conservadores, os mesmos conduzem a taxas de rejeição mais próximas dos respectivos níveis nominais do que aqueles baseados em valores críticos assintóticos. Tomemos como exemplo o caso onde $\lambda = 10$, $n = 20$, $r = 2.00$, $\alpha = 10\%$ e utilizamos HC0. Neste caso tínhamos uma taxa de rejeição de 21.54% (Tabela 3.2) ao utilizar o valor crítico assintótico; ao utilizarmos o valor crítico ajustado, reduzimos essa taxa de rejeição para 7.81%, que está bem mais próxima do nível nominal especificado do que a obtida com o uso do valor crítico assintótico. Tomemos outro exemplo: $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 3.59$, $\alpha = 5\%$ e teste HC2. A taxa de rejeição que era de 16.25% (Tabela 3.8) foi reduzida para 4.21% (Tabela 3.21), que é bem mais próxima do nível nominal (5%). Ainda para esse mesmo exemplo, só que considerando o teste que utiliza HC0, a taxa de rejeição foi reduzida de 38.96% (Tabela 3.8) para 4.05% (Tabela 3.21), que está muito mais próxima de 5%.

Comparando alguns dos resultados apresentados na seção anterior, Tabelas 3.2, 3.3, 3.7, 3.8, 3.10 e 3.13, onde os testes de hipótese são realizados com base em valores críticos assintóticos, com os resultados das Tabelas 3.18 a 3.23, percebemos que os ganhos mais expressivos são obtidos para os testes baseados nos estimadores HC0 e HC2. O ganho

Tabela 3.18. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos ajustados, $r = 2.00$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	6.76	7.39	8.00	8.45	9.14	9.78
		5	3.31	3.43	3.78	4.10	4.48	4.77
		1	0.68	0.59	0.67	0.71	0.85	0.93
	HC2	10	8.22	8.62	9.01	9.19	9.57	9.97
		5	3.97	4.06	4.32	4.50	4.72	4.88
		1	0.77	0.70	0.77	0.79	0.92	0.95
	HC3	10	9.48	9.55	9.65	9.68	9.80	10.06
		5	4.70	4.66	4.80	4.76	4.87	4.94
		1	0.88	0.82	0.87	0.87	0.95	0.98
	HC4	10	15.99	12.87	11.81	11.00	10.45	10.30
		5	9.26	7.05	6.34	5.70	5.33	5.12
		1	2.60	1.66	1.44	1.24	1.12	1.04
10	HC0	10	7.81	8.35	8.77	9.00	9.58	9.78
		5	3.81	3.98	4.25	4.37	4.72	4.84
		1	0.84	0.77	0.82	0.85	0.91	0.95
	HC2	10	9.33	9.62	9.80	9.68	9.94	9.97
		5	4.52	4.61	4.76	4.72	4.93	4.95
		1	0.91	0.87	0.92	0.92	0.95	0.97
	HC3	10	10.51	10.51	10.38	10.10	10.17	10.09
		5	5.20	5.20	5.19	5.00	5.08	5.01
		1	1.03	0.97	1.03	1.00	0.99	0.98
	HC4	10	17.06	13.73	12.42	11.38	10.74	10.34
		5	10.08	7.55	6.74	5.95	5.57	5.15
		1	2.89	1.87	1.61	1.36	1.18	1.05
100	HC0	10	7.67	8.80	9.29	9.52	9.90	9.97
		5	3.51	3.98	4.45	4.58	4.92	4.93
		1	0.67	0.70	0.76	0.86	0.91	0.93
	HC2	10	9.12	10.08	10.27	10.17	10.22	10.12
		5	4.14	4.58	4.94	4.91	5.11	5.00
		1	0.72	0.78	0.85	0.92	0.96	0.96
	HC3	10	10.12	10.88	10.86	10.57	10.40	10.21
		5	4.76	5.11	5.32	5.16	5.23	5.06
		1	0.82	0.88	0.94	0.98	0.98	0.98
	HC4	10	16.81	14.21	12.94	11.85	10.98	10.44
		5	9.50	7.57	6.91	6.17	5.69	5.23
		1	2.46	1.71	1.54	1.31	1.16	1.05

Tabela 3.19. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos ajustados, $r = 2.33$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	4.54	5.94	6.87	7.89	9.01	9.54
		5	1.87	2.59	3.09	3.63	4.31	4.76
		1	0.24	0.39	0.46	0.56	0.77	0.94
	HC2	10	6.59	7.66	8.22	8.86	9.61	9.77
		5	2.71	3.37	3.82	4.18	4.62	4.90
		1	0.33	0.53	0.57	0.67	0.84	0.97
	HC3	10	8.68	9.18	9.31	9.58	10.02	9.94
		5	3.81	4.23	4.44	4.62	4.89	5.01
		1	0.46	0.69	0.71	0.78	0.90	1.01
	HC4	10	16.04	12.92	11.79	11.11	10.72	10.23
		5	8.95	6.82	6.22	5.69	5.40	5.25
		1	2.03	1.56	1.33	1.15	1.10	1.10
10	HC0	10	6.56	7.78	8.40	8.98	9.52	9.71
		5	2.89	3.60	3.96	4.34	4.72	4.97
		1	0.44	0.64	0.71	0.76	0.91	1.01
	HC2	10	8.70	9.44	9.64	9.88	10.01	9.93
		5	3.84	4.45	4.65	4.84	4.98	5.07
		1	0.57	0.79	0.85	0.86	0.99	1.04
	HC3	10	10.61	10.73	10.54	10.45	10.31	10.06
		5	5.00	5.28	5.26	5.21	5.20	5.15
		1	0.74	0.95	0.99	0.97	1.04	1.06
	HC4	10	17.79	14.07	12.69	11.75	10.89	10.29
		5	10.37	7.82	6.94	6.17	5.63	5.33
		1	2.65	1.92	1.68	1.33	1.23	1.14
100	HC0	10	8.45	9.74	9.90	10.07	10.09	10.05
		5	3.63	4.64	4.91	5.03	4.99	5.05
		1	0.51	0.78	0.94	0.95	1.03	0.99
	HC2	10	10.47	11.28	11.09	10.88	10.54	10.23
		5	4.54	5.44	5.54	5.49	5.23	5.15
		1	0.60	0.95	1.09	1.04	1.09	1.02
	HC3	10	12.12	12.35	11.81	11.34	10.78	10.32
		5	5.56	6.14	6.05	5.80	5.41	5.22
		1	0.76	1.09	1.23	1.11	1.14	1.03
	HC4	10	19.50	15.55	13.81	12.51	11.32	10.51
		5	11.24	8.73	7.71	6.69	5.86	5.38
		1	2.70	2.18	1.90	1.52	1.32	1.11

Tabela 3.20. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos ajustados, $r = 3.02$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	3.99	5.28	6.20	7.29	8.52	9.38
		5	1.69	2.21	2.62	3.29	3.95	4.59
		1	0.28	0.31	0.34	0.49	0.67	0.84
	HC2	10	6.31	7.33	7.96	8.62	9.26	9.74
		5	2.63	3.15	3.53	3.96	4.37	4.78
		1	0.41	0.43	0.48	0.62	0.75	0.90
	HC3	10	9.04	9.31	9.50	9.63	9.80	9.97
		5	3.98	4.28	4.41	4.60	4.78	4.95
		1	0.58	0.64	0.66	0.77	0.85	0.95
	HC4	10	17.60	13.83	12.40	11.33	10.66	10.32
		5	9.91	7.41	6.59	5.89	5.47	5.21
		1	2.25	1.60	1.36	1.22	1.08	1.07
10	HC0	10	4.55	5.88	6.71	7.70	8.79	9.48
		5	1.97	2.49	2.92	3.49	4.08	4.65
		1	0.30	0.36	0.42	0.56	0.71	0.88
	HC2	10	7.07	8.10	8.58	9.03	9.54	9.78
		5	3.02	3.59	3.88	4.22	4.51	4.83
		1	0.44	0.53	0.58	0.72	0.82	0.93
	HC3	10	10.05	10.20	10.10	10.01	10.04	10.04
		5	4.54	4.82	4.88	4.87	4.87	4.98
		1	0.68	0.75	0.79	0.86	0.94	0.97
	HC4	10	19.37	14.73	13.12	11.80	10.91	10.39
		5	11.17	8.22	7.06	6.18	5.55	5.24
		1	2.68	1.85	1.56	1.33	1.19	1.08
100	HC0	10	4.70	6.47	7.27	8.12	9.02	9.61
		5	1.88	2.68	3.26	3.78	4.25	4.79
		1	0.26	0.36	0.47	0.60	0.78	0.90
	HC2	10	7.43	8.77	9.12	9.46	9.78	9.94
		5	2.95	3.87	4.20	4.47	4.67	4.97
		1	0.37	0.53	0.62	0.74	0.87	0.96
	HC3	10	10.59	10.96	10.66	10.48	10.35	10.14
		5	4.57	5.21	5.18	5.16	5.04	5.13
		1	0.58	0.77	0.81	0.90	0.96	1.00
	HC4	10	20.97	15.82	13.91	12.23	11.27	10.53
		5	11.84	8.81	7.53	6.59	5.74	5.39
		1	2.60	1.97	1.67	1.42	1.20	1.11

Tabela 3.21. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos ajustados, $r = 3.59$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	5.87	6.26	6.84	7.95	8.66	9.36
		5	2.90	2.92	3.12	3.71	4.21	4.60
		1	0.59	0.54	0.51	0.61	0.79	0.90
	HC2	10	7.75	8.22	8.50	9.20	9.43	9.70
		5	3.68	3.81	3.96	4.38	4.60	4.81
		1	0.69	0.69	0.67	0.75	0.89	0.96
	HC3	10	9.45	9.92	9.90	10.11	9.95	9.94
		5	4.56	4.87	4.84	4.94	4.96	4.95
		1	0.80	0.89	0.83	0.89	0.97	1.01
	HC4	10	10.31	11.22	10.81	10.67	10.27	10.05
		5	5.66	5.99	5.68	5.49	5.24	5.05
		1	1.32	1.39	1.22	1.14	1.12	1.05
10	HC0	10	10.02	10.88	10.89	10.68	10.27	10.12
		5	4.95	5.56	5.66	5.64	5.31	5.15
		1	1.05	1.13	1.19	1.23	1.16	1.03
	HC2	10	11.34	12.77	12.39	11.68	10.87	10.35
		5	5.54	6.46	6.44	6.23	5.63	5.30
		1	1.14	1.28	1.35	1.35	1.21	1.07
	HC3	10	12.21	13.98	13.32	12.25	11.20	10.47
		5	6.20	7.25	7.10	6.66	5.86	5.39
		1	1.25	1.48	1.52	1.47	1.26	1.10
	HC4	10	10.43	12.85	12.52	11.73	10.88	10.36
		5	6.02	7.03	6.84	6.44	5.73	5.33
		1	1.66	1.77	1.65	1.52	1.27	1.09
100	HC0	10	9.16	14.53	13.81	12.19	10.83	10.36
		5	4.05	6.34	7.34	6.67	5.76	5.29
		1	0.70	0.90	1.23	1.51	1.32	1.11
	HC2	10	9.36	16.12	15.11	13.09	11.32	10.59
		5	4.21	7.03	8.01	7.14	6.07	5.43
		1	0.73	0.96	1.31	1.63	1.38	1.14
	HC3	10	9.20	16.88	15.76	13.51	11.58	10.72
		5	4.35	7.52	8.52	7.48	6.25	5.52
		1	0.78	1.02	1.40	1.72	1.43	1.15
	HC4	10	6.52	13.46	13.86	12.49	11.09	10.51
		5	3.67	5.81	7.40	6.89	5.97	5.39
		1	0.97	0.98	1.28	1.61	1.38	1.14

Tabela 3.22. Taxas de rejeição (%) obtidas com valores críticos ajustados, $r = 4.78$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	3.15	4.80	5.67	7.05	8.37	9.23
		5	1.15	1.90	2.45	3.17	3.93	4.43
		1	0.09	0.21	0.34	0.49	0.69	0.87
	HC2	10	5.54	7.39	7.88	8.74	9.38	9.71
		5	2.05	3.15	3.47	4.10	4.47	4.71
		1	0.18	0.38	0.53	0.65	0.84	0.94
	HC3	10	7.68	9.83	9.92	10.06	10.11	10.06
		5	3.24	4.65	4.65	4.96	4.96	4.92
		1	0.30	0.64	0.77	0.84	0.98	1.01
	HC4	10	4.32	9.44	9.76	10.00	10.08	10.06
		5	2.06	4.93	4.90	5.15	5.05	4.95
		1	0.31	0.96	1.02	1.00	1.07	1.04
10	HC0	10	10.59	11.13	10.43	10.18	9.90	9.77
		5	5.11	5.83	5.56	5.36	5.08	4.95
		1	0.92	1.18	1.30	1.28	1.19	1.06
	HC2	10	12.12	13.31	12.34	11.46	10.75	10.09
		5	5.87	7.12	6.56	6.11	5.55	5.18
		1	1.02	1.45	1.58	1.47	1.30	1.10
	HC3	10	12.51	15.08	13.60	12.36	11.21	10.31
		5	6.26	8.24	7.50	6.70	5.90	5.34
		1	1.08	1.76	1.82	1.65	1.39	1.15
	HC4	10	5.07	11.47	11.34	10.98	10.51	10.02
		5	2.72	6.19	6.29	5.96	5.48	5.16
		1	0.62	1.52	1.63	1.54	1.32	1.12
100	HC0	10	14.54	16.88	13.94	11.74	10.52	9.91
		5	6.41	9.25	8.22	6.73	5.58	5.09
		1	1.25	1.60	2.12	1.87	1.44	1.14
	HC2	10	11.97	18.38	15.37	12.86	11.29	10.25
		5	5.44	9.88	8.96	7.30	5.99	5.28
		1	1.08	1.59	2.22	2.01	1.53	1.18
	HC3	10	9.84	19.23	16.18	13.51	11.66	10.43
		5	4.70	10.48	9.58	7.78	6.25	5.40
		1	0.91	1.57	2.34	2.11	1.60	1.22
	HC4	10	2.95	12.51	12.71	11.50	10.64	10.03
		5	1.48	5.69	7.24	6.55	5.66	5.16
		1	0.37	0.84	1.64	1.77	1.46	1.16

Tabela 3.23. Taxas de rejeição obtidas com valores críticos ajustados, $r = 5.98$.

λ	teste	α	n					
			20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	9.52	9.47	9.11	8.96	9.23	9.63
		5	4.61	5.05	4.84	4.66	4.66	4.85
		1	0.85	1.22	1.19	1.16	1.09	1.03
	HC2	10	9.46	11.97	11.14	10.35	10.07	10.03
		5	4.69	6.51	5.95	5.51	5.15	5.11
		1	0.85	1.64	1.50	1.36	1.19	1.08
	HC3	10	7.27	13.69	12.49	11.27	10.67	10.29
		5	3.90	7.91	6.96	6.18	5.53	5.29
		1	0.77	2.10	1.83	1.56	1.28	1.12
	HC4	10	1.71	10.09	9.89	9.75	9.77	9.91
		5	1.06	6.12	5.79	5.32	5.07	5.08
		1	0.35	1.99	1.74	1.45	1.22	1.09
10	HC0	10	40.31	21.48	15.49	12.02	10.52	10.05
		5	29.69	15.61	10.48	7.33	5.82	5.24
		1	13.34	7.81	4.73	2.62	1.61	1.20
	HC2	10	28.20	21.79	16.30	12.89	11.22	10.42
		5	18.92	15.57	10.78	7.73	6.18	5.45
		1	7.53	7.53	4.67	2.67	1.68	1.24
	HC3	10	15.97	21.54	16.58	13.32	11.59	10.59
		5	10.50	15.37	10.95	7.99	6.43	5.56
		1	4.19	7.15	4.62	2.72	1.71	1.27
	HC4	10	3.03	14.79	12.16	10.65	10.18	10.02
		5	2.09	10.33	8.09	6.33	5.59	5.22
		1	1.00	4.69	3.41	2.15	1.50	1.19
100	HC0	10	69.22	26.54	17.38	12.69	10.84	10.11
		5	59.97	21.11	12.43	7.94	6.05	5.30
		1	36.45	13.35	6.53	3.13	1.75	1.21
	HC2	10	43.23	25.73	17.75	13.45	11.42	10.45
		5	27.86	19.87	12.29	8.25	6.39	5.49
		1	11.71	11.74	6.08	3.11	1.81	1.24
	HC3	10	17.12	24.68	17.66	13.75	11.74	10.62
		5	11.22	18.84	12.13	8.44	6.58	5.59
		1	5.09	10.47	5.79	3.09	1.87	1.27
	HC4	10	2.70	17.06	12.88	10.90	10.31	10.03
		5	1.90	12.63	8.79	6.63	5.66	5.25
		1	0.94	6.35	4.08	2.34	1.57	1.19

oriundo da utilização dos novos valores críticos é ainda mais significativa em pequenas amostras. Tome, por exemplo, o caso em que $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 2.33$ e $\alpha = 10\%$. Nas simulações o teste de hipóteses baseado em HC0 forneceu taxa de rejeição de 27.69% quando utilizado o valor crítico assintótico contra 8.45% ao utilizarmos o valor crítico ajustado. Quando utilizamos o teste HC2 baseado no valor crítico assintótico observamos uma taxa de rejeição de 20.27% contra 10.47% quando o teste foi baseado no valor crítico ajustado. No que diz respeito ao teste baseado no estimador HC3, notamos que a taxa de rejeição foi reduzida de 13.89% para 12.12% utilizando-se os valores crítico assintótico e ajustado, respectivamente. Observamos, portanto, que os testes baseados em HC3 tiveram uma melhora moderada em relação aos baseados em HC0 e HC2, já que os primeiros produziram taxas de rejeição não muito distantes dos níveis nominais quando foram utilizados valores críticos assintóticos. Podemos observar ainda que, na maioria dos casos, a correção do valor crítico parece não ter sido muito útil quando utilizamos testes baseados em HC4. A utilização de valores críticos ajustados, aqui, forneceu taxas de rejeição mais distantes dos respectivos níveis nominais.

A Tabela 3.24 apresenta os vieses relativos totais dos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4. O viés relativo total é definido como a soma dos valores absolutos dos vieses relativos para as variâncias estimadas de $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$. São considerados os casos sob homoscedasticidade ($\lambda = 1$) e heteroscedasticidade ($\lambda = 100$), razões de alavancagem, r , iguais a 2.00, 3.59, 4.78 e 5.98, além dos tamanhos amostrais, n , iguais a 20, 40, 60, 100 e 500. Os resultados nesta tabela permitem várias conclusões interessantes. Primeiramente, o estimador HC2 é o que funciona melhor na maioria dos casos, no que se refere ao viés, mesmo sob forte heteroscedasticidade e alta alavancagem. Para exemplificar, tome como exemplo a situação onde $\lambda = 100$, $n = 40$ e $r = 5.98$. Neste caso, HC2 foi o único estimador cujo viés relativo total não excedeu 100%, com um viés de aproximadamente 13%. Este estimador, sob homoscedasticidade, em todos os casos ficou muito próximo da não-viciosidade, apresentando vieses inferiores a 1%.

Segundo, o estimador HC4 é bastante viesado quando consideramos tamanhos amostrais pequenos ($n = 20$ ou $n = 40$, por exemplo). Este fato é agravado quando a razão de alavancagem aumenta. Por exemplo, tome o caso onde $n = 40$ e $\lambda = 100$; quando incrementamos a razão de alavancagem de $r = 4.78$ para $r = 5.98$, o viés relativo total salta de 5.69 para 10.75. Notamos, ainda, que este estimador apresenta menor viés relativo total em relação aos estimadores HC0 e HC3 nos casos de baixa razão de alavancagem, tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade muito forte.

Terceiro, todos os estimadores considerados (HC0, HC2, HC3 e HC4), na maioria dos casos, tendem a tornar-se mais viesados à medida que aumentamos a razão de alavancagem. Em termos do aumento no viés, o estimador HC4 é o mais sensível ao aumento da razão de

alavancagem. Para exemplificar, considere o caso onde $\lambda = 100$ e $n = 40$. Quando aumentamos r de 3.59 para 4.78 observamos um aumento mais expressivo no viés do estimador HC4 do que nos vieses dos demais estimadores.

Nas Tabelas 3.25 a 3.28 são apresentadas a média, mediana, desvio-padrão, assimetria e curtose das distribuições empíricas das estatísticas de teste baseadas nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4. São considerados fatores tais como grau de heteroscedasticidade, λ , razão de alavancagem, r , e tamanho amostral, n . A estatística de teste baseada no estimador HC4, em todos os casos, apresenta a menor dispersão, dentre os estimadores considerados, para razões de alavancagem a partir de 3.59, sob homoscedasticidade e sob heteroscedasticidade. Em situações de baixa alavancagem, a estatística de teste baseada em HC3 tem menor dispersão, contudo não muito distante quando comparada com HC4. Para ilustrar, tome dois exemplos. Primeiro, o caso em que $n = 40$, $\lambda = 100$ e $r = 4.78$ onde observamos que o desvio-padrão da estatística de teste baseada em HC4 é 0.926. O segundo menor desvio-padrão é o da estatística baseada em HC3, sendo 1.32, que é aproximadamente 42% maior que o primeiro. Segundo, para uma razão de alavancagem mais baixa, tomemos as mesmas condições do exemplo anterior mas agora com $r = 2.00$. Neste caso temos o desvio-padrão da estatística baseada em HC3 igual a 1.064 contra 1.078 da estatística baseada em HC4. A estatística de teste baseada em HC0, sob quaisquer condições apresenta as maiores dispersões. Observamos que todas as estatísticas de teste (baseadas em HC0, HC2, HC3 e HC4) têm seus desvios-padrão convergindo para o desvio-padrão da distribuição assintótica normal (1) à medida que o tamanho amostral aumenta.

Em relação ao coeficiente de assimetria, notamos que em aproximadamente metade dos casos há uma leve assimetria (coeficiente positivo próximo de zero) à direita e na outra metade há leve assimetria (coeficiente negativo próximo de zero) à esquerda. A respeito da curtose, verificamos que a distribuição da estatística de teste baseada em HC4 é mais leptocúrtica que as outras, principalmente sob forte heteroscedasticidade e extrema alavancagem. Por exemplo, para $\lambda = 100$, $n = 40$ e $r = 5.98$, o grau de achatamento é 6.07, que é mais do dobro que o coeficiente de curtose da distribuição limite normal padrão. Nota-se, ainda, que este coeficiente tende a 3, que é o coeficiente de curtose da distribuição limite normal padrão, à medida que consideramos tamanhos amostrais cada vez maiores.

A fim de ilustrar algumas conclusões anteriores, nas Figuras 3.4 a 3.9 apresentamos os gráficos das funções de distribuição empírica e assintótica considerando alguns tamanhos amostrais, graus de heteroscedasticidade e razões de alavancagem. Estes gráficos foram construídos para todas as distribuições empíricas das estatísticas de teste baseadas em HC0, HC2, HC3 e HC4, contudo são apresentados apenas para as distribuições baseadas em HC0 e HC4. Os gráficos fornecem uma noção do quão necessária é a utilização dos novos valores

críticos ao invés dos valores críticos assintóticos a fim de obter testes com taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais. A linha tracejada representa a distribuição limite das estatísticas de teste. Portanto, é intuitivo concluirmos que à medida que observamos maiores discrepâncias entre a curva teórica e a empírica, maior será a necessidade de buscarmos valores críticos alternativos ao assintótico. Ou seja, podemos fazer uma associação positiva entre a discrepância entre essas duas curvas e quão distantes as taxas de rejeição ficarão ao se utilizar testes baseados em quantis assintóticos. Para tanto, basta relacionar essas figuras com os resultados obtidos na Seção 3.3. Vale, também, ressaltar que discrepâncias aparentemente insignificantes podem, ainda assim, justificar a utilização de novos valores críticos na realização de testes de hipóteses sobre os parâmetros da regressão. Por exemplo, considere o caso da Figura 3.4 onde $\lambda = 100$, $r = 2.33$ e $n = 100$ utilizando HC0. Visualmente poderíamos concluir que não há necessidade de utilizarmos outros valores críticos, senão o da distribuição assintótica $\mathcal{N}(0,1)$. Contudo, se observarmos as taxas de rejeição em cada caso, vemos que ao utilizarmos os novos valores críticos por nós propostos obtivemos taxas de rejeição mais próximas dos respectivos níveis nominais. Considerando os níveis nominais 10%, 5% e 1% obtivemos taxas de rejeição iguais a 13.94%, 7.95% e 2.24% (Tabela 3.3), respectivamente, ao realizarmos os testes com valores críticos assintóticos; já utilizando os novos valores críticos obtivemos 10.07%, 5.03% e 0.95% (Tabela 3.19), que estão consideravelmente mais próximos dos correspondentes níveis nominais.

Verificamos que as discrepâncias entre as funções de distribuição empíricas e assintótica dependem de alguns fatores, tais como, a razão de alavancagem, r , grau de heteroscedasticidade, λ , e tamanho amostral, n . Estes dois primeiros fatores afetam positivamente a discrepância entre essas distribuições. Já ao considerarmos tamanhos de amostra maiores, como esperado, diminuimos as discrepâncias entre tais distribuições.

Como mencionado anteriormente, esses gráficos foram construídos considerando-se todos os HC's, porém mostramos apenas os gráficos correspondentes aos testes HC0 e HC4. Sob as mesmas condições, percebemos que as discrepâncias entre as funções de distribuição empírica e limite diminuem à medida que avançamos do HC0 até HC4, concordando com as distorções nos tamanhos dos testes baseados em valores críticos assintóticos apresentados na Seção 3.3.

Tabela 3.24 Vieses relativos totais dos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4.

n	λ	1					100				
	estimador	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$		
20	HC0	0.5647	0.8718	1.1498	1.2825	0.7617	1.4662	2.1078	2.4252		
	HC2	0.0048	0.0092	0.0058	0.0020	0.1537	0.6033	1.2013	1.9021		
	HC3	0.7335	1.6352	3.4458	8.5185	0.7118	1.1108	1.6763	1.1031		
	HC4	0.3298	6.6581	50.9929	717.8593	0.4307	7.3641	42.6881	237.1076		
40	HC0	0.2821	0.4339	0.5778	0.6428	0.3793	0.7324	1.0587	1.2083		
	HC2	0.0028	0.0058	0.0063	0.0078	0.0593	0.1515	0.2399	0.1333		
	HC3	0.3212	0.5681	0.8332	1.0362	0.3319	0.6381	1.0028	1.7565		
	HC4	0.1397	1.3824	3.6701	5.1343	0.2102	2.2597	5.6917	10.7524		
60	HC0	0.1859	0.2902	0.3840	0.4275	0.2498	0.4904	0.7042	0.8018		
	HC2	0.0039	0.0038	0.0033	0.0067	0.0322	0.0921	0.1311	0.0689		
	HC3	0.2083	0.3440	0.4815	0.5706	0.219	0.4102	0.6246	0.9855		
	HC4	0.0911	0.7453	1.6979	2.0572	0.1414	1.2889	2.8029	4.3735		
100	HC0	0.1106	0.1739	0.2313	0.2563	0.1507	0.2941	0.4242	0.4814		
	HC2	0.0032	0.0032	0.0022	0.0027	0.0188	0.0508	0.0736	0.0373		
	HC3	0.1222	0.1936	0.2596	0.3013	0.1273	0.2394	0.3504	0.5205		
	HC4	0.0536	0.3863	0.7945	0.9010	0.0823	0.6914	1.3615	1.9143		
500	HC0	0.0216	0.0359	0.0477	0.0509	0.0297	0.0600	0.0878	0.0952		
	HC2	0.0012	0.0008	0.0019	0.0017	0.0024	0.0099	0.0148	0.0054		
	HC3	0.0241	0.0349	0.0451	0.0533	0.0252	0.0449	0.0622	0.0924		
	HC4	0.0108	0.0648	0.1217	0.1336	0.0165	0.1208	0.2157	0.2825		

Tabela 3.25 Estatísticas descritivas das estatísticas de teste τ , $n = 40$.

	λ	1				100			
	estimador	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$
Média	HC0	-0.0017	-0.0027	0.0019	-0.0017	-0.0070	-0.0013	0.0052	0.0006
	HC2	-0.0016	-0.0024	0.0018	-0.0016	-0.0065	-0.0012	0.0044	0.0004
	HC3	-0.0015	-0.0021	0.0016	-0.0014	-0.0061	-0.0011	0.0036	0.0002
	HC4	-0.0016	-0.0018	0.0013	-0.0012	-0.0062	-0.0011	0.0025	-0.0002
Mediana	HC0	0.0032	-0.0020	0.0013	0.0010	-0.0069	0.0042	0.0083	0.0075
	HC2	0.0030	-0.0018	0.0012	0.0009	-0.0065	0.0037	0.0068	0.0060
	HC3	0.0028	-0.0016	0.0010	0.0008	-0.0061	0.0032	0.0056	0.0050
	HC4	0.0029	-0.0014	0.0008	0.0007	-0.0062	0.0026	0.0038	0.0033
Desvio-Padrão	HC0	1.1415	1.2591	1.2831	1.2426	1.2180	1.6090	1.8585	1.5254
	HC2	1.0766	1.1518	1.1670	1.1374	1.1387	1.4086	1.5719	1.3141
	HC3	1.0148	1.0499	1.0512	1.0331	1.0641	1.2298	1.3206	1.1214
	HC4	1.0381	0.9548	0.8612	0.9192	1.0780	1.0013	0.9260	0.8578
Assimetria	HC0	0.0110	-0.0088	0.0089	-0.0219	-0.0010	0.0029	0.0045	-0.0312
	HC2	0.0107	-0.0072	0.0088	-0.0232	-0.0014	0.0040	0.0057	-0.0331
	HC3	0.0103	-0.0055	0.0086	-0.0249	-0.0018	0.0052	0.0068	-0.0355
	HC4	0.0099	-0.0010	0.0076	-0.0287	-0.0023	0.0089	0.0088	-0.0451
Curtose	HC0	3.4531	3.9760	3.6866	3.8186	3.1350	2.8476	3.2190	4.2289
	HC2	3.4679	4.0625	3.8414	3.8949	3.1684	2.9638	3.3768	4.5532
	HC3	3.4837	4.1634	4.0379	3.9841	3.2032	3.0932	3.5531	4.9343
	HC4	3.4981	4.4877	4.7473	4.1855	3.2377	3.4773	4.0737	6.0797

Tabela 3.26 Estatísticas descritivas das estatísticas de teste τ , $n = 60$.

	λ	1					100				
		$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$		
Média	estimador										
	HC0	-0.0060	-0.0017	-0.0005	-0.0011	-0.0083	0.0030	0.0024	0.0023		
	HC2	-0.0058	-0.0016	-0.0004	-0.0009	-0.0079	0.0028	0.0022	0.0020		
	HC3	-0.0055	-0.0014	-0.0003	-0.0008	-0.0076	0.0025	0.0020	0.0018		
Mediana	HC4	-0.0056	-0.0011	-0.0002	-0.0006	-0.0076	0.0022	0.0016	0.0013		
	HC0	-0.0032	-0.0007	-0.0038	0.0015	-0.0051	0.0038	-0.0029	-0.0005		
	HC2	-0.0031	-0.0007	-0.0035	0.0014	-0.0048	0.0034	-0.0025	-0.0004		
	HC3	-0.0030	-0.0007	-0.0032	0.0013	-0.0046	0.0031	-0.0022	-0.0004		
Desvio-Padrão	HC4	-0.0030	-0.0006	-0.0028	0.0012	-0.0046	0.0027	-0.0017	-0.0003		
	HC0	1.0904	1.1618	1.1863	1.1522	1.1462	1.4146	1.5553	1.3154		
	HC2	1.0490	1.0946	1.1108	1.0861	1.0957	1.2939	1.3913	1.1832		
	HC3	1.0089	1.0295	1.0358	1.0208	1.0471	1.1824	1.2420	1.0599		
Assimetria	HC4	1.0237	0.9678	0.9129	0.9579	1.0548	1.0301	0.9896	0.8776		
	HC0	-0.0014	-0.0087	0.0088	-0.0091	-0.0035	-0.0036	0.0140	-0.0077		
	HC2	-0.0016	-0.0080	0.0095	-0.0084	-0.0035	-0.0036	0.0153	-0.0083		
	HC3	-0.0018	-0.0072	0.0105	-0.0077	-0.0035	-0.0037	0.0167	-0.0090		
Curtose	HC4	-0.0019	-0.0045	0.0140	-0.0068	-0.0034	-0.0041	0.0210	-0.0102		
	HC0	3.3498	3.5158	3.5651	3.5526	3.1195	3.0733	3.6636	3.8949		
	HC2	3.3574	3.5526	3.6468	3.5807	3.1340	3.1183	3.7415	4.0317		
	HC3	3.3652	3.5932	3.7407	3.6093	3.1488	3.1631	3.8172	4.1870		
	HC4	3.3724	3.7175	4.0397	3.6441	3.1638	3.2780	4.0043	4.6919		

Tabela 3.27 Estatísticas descritivas das estatísticas de teste τ , $n = 100$.

	λ	1				100			
		$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$
Média	estimador								
	HC0	-0.0062	-0.0004	-0.0021	0.0008	-0.0061	0.0052	-0.0002	0.0020
	HC2	-0.0060	-0.0004	-0.0020	0.0008	-0.0059	0.0050	-0.0002	0.0018
	HC3	-0.0059	-0.0004	-0.0019	0.0007	-0.0058	0.0047	-0.0002	0.0017
	HC4	-0.0060	-0.0004	-0.0017	0.0007	-0.0058	0.0043	-0.0001	0.0016
Mediana	HC0	-0.0056	0.0027	-0.0078	0.0008	-0.0044	0.0096	-0.0075	0.0000
	HC2	-0.0055	0.0026	-0.0075	0.0007	-0.0043	0.0091	-0.0070	0.0000
	HC3	-0.0054	0.0025	-0.0071	0.0007	-0.0041	0.0086	-0.0065	0.0000
	HC4	-0.0054	0.0025	-0.0065	0.0007	-0.0041	0.0078	-0.0056	0.0000
Desvio-Padrão	HC0	1.0493	1.0983	1.1169	1.0857	1.0874	1.2500	1.3150	1.1729
	HC2	1.0254	1.0593	1.0719	1.0479	1.0581	1.1847	1.2299	1.0983
	HC3	1.0019	1.0211	1.0272	1.0105	1.0296	1.1225	1.1497	1.0268
	HC4	1.0104	0.9840	0.9536	0.9780	1.0335	1.0328	1.0057	0.9142
Assimetria	HC0	0.0112	-0.0092	0.0152	-0.0026	0.0036	-0.0061	0.0318	-0.0037
	HC2	0.0112	-0.0093	0.0157	-0.0026	0.0035	-0.0058	0.0323	-0.0032
	HC3	0.0112	-0.0094	0.0161	-0.0026	0.0034	-0.0056	0.0327	-0.0026
	HC4	0.0112	-0.0096	0.0174	-0.0026	0.0034	-0.0051	0.0338	-0.0009
Curtose	HC0	3.1893	3.3122	3.3283	3.2999	3.0651	3.2831	3.7667	3.5420
	HC2	3.1918	3.3255	3.3595	3.3074	3.0703	3.2994	3.7956	3.5869
	HC3	3.1943	3.3396	3.3932	3.3147	3.0755	3.3150	3.8226	3.6352
	HC4	3.1966	3.3816	3.4916	3.3194	3.0810	3.3546	3.8864	3.7845

Tabela 3.28 Estatísticas descritivas das estatísticas de teste τ , $n = 500$.

	λ	1					100				
		$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$	$r = 2.00$	$r = 3.59$	$r = 4.78$	$r = 5.98$		
Média	estimator										
	HC0	-0.0047	-0.0059	-0.0012	0.0013	-0.0009	-0.0018	-0.0012	0.0003		
	HC2	-0.0047	-0.0059	-0.0012	0.0013	-0.0009	-0.0018	-0.0012	0.0003		
	HC3	-0.0046	-0.0058	-0.0012	0.0013	-0.0009	-0.0018	-0.0011	0.0002		
Mediana	HC4	-0.0046	-0.0058	-0.0012	0.0013	-0.0009	-0.0017	-0.0011	0.0002		
	HC0	-0.0042	-0.0073	-0.0004	0.0038	0.0014	-0.0064	0.0010	-0.0042		
	HC2	-0.0042	-0.0072	-0.0004	0.0038	0.0014	-0.0064	0.0010	-0.0041		
	HC3	-0.0041	-0.0072	-0.0004	0.0037	0.0014	-0.0063	0.0010	-0.0041		
Desvio- Padrão	HC4	-0.0042	-0.0071	-0.0004	0.0037	0.0014	-0.0062	0.0009	-0.0040		
	HC0	1.0098	1.0180	1.0235	1.0134	1.0174	1.0462	1.0511	1.0284		
	HC2	1.0052	1.0105	1.0146	1.0063	1.0118	1.0351	1.0373	1.0146		
	HC3	1.0006	1.0031	1.0057	0.9992	1.0062	1.0241	1.0237	1.0010		
Assimetria	HC4	1.0022	0.9957	0.9910	0.9936	1.0068	1.0072	0.9973	0.9782		
	HC0	0.0107	0.0041	0.0019	0.0033	0.0020	0.0184	-0.0058	0.0104		
	HC2	0.0107	0.0041	0.0019	0.0033	0.0020	0.0184	-0.0058	0.0104		
	HC3	0.0107	0.0041	0.0018	0.0033	0.0020	0.0184	-0.0058	0.0104		
Curtose	HC4	0.0107	0.0041	0.0018	0.0033	0.0020	0.0184	-0.0058	0.0105		
	HC0	3.0188	3.0637	3.1014	3.0369	2.9834	3.1165	3.1859	3.1018		
	HC2	3.0189	3.0643	3.1030	3.0372	2.9835	3.1169	3.1865	3.1032		
	HC3	3.0190	3.0648	3.1045	3.0374	2.9837	3.1174	3.1870	3.1046		
	HC4	3.0191	3.0663	3.1086	3.0376	2.9839	3.1186	3.1884	3.1086		

Figura 3.4. Gráficos das funções de distribuição empíricas e assintótica para $r = 2.33$, HC0.

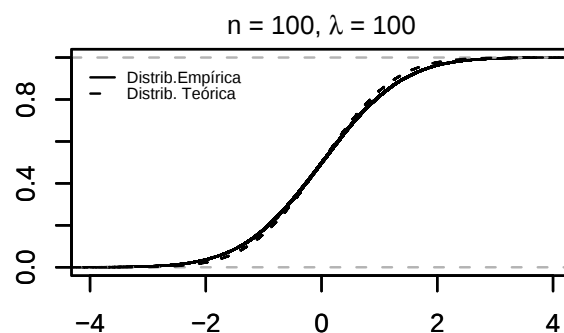
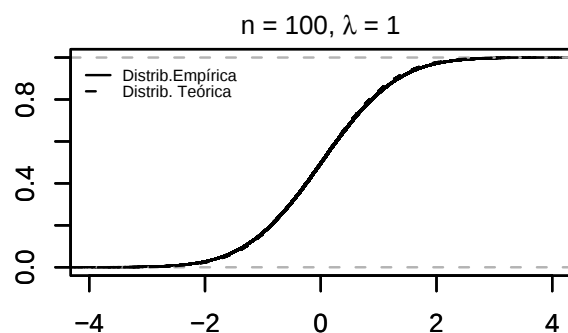
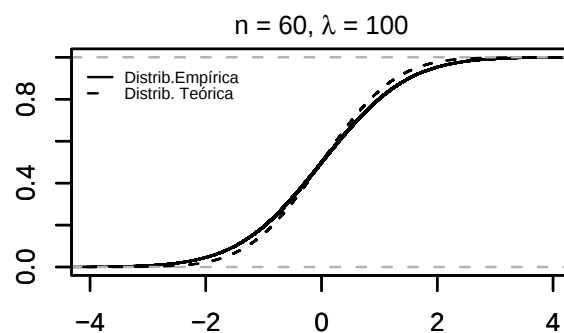
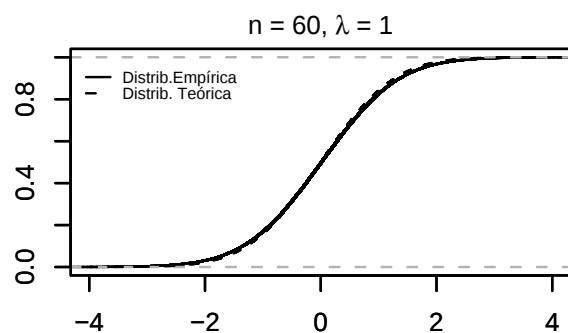
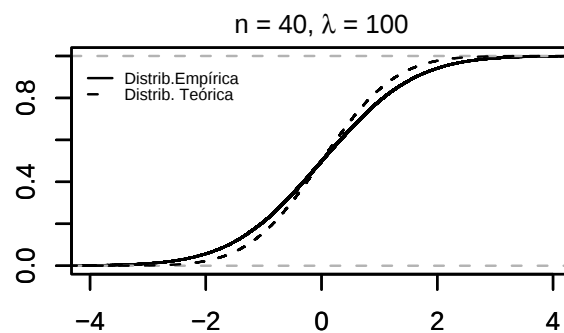
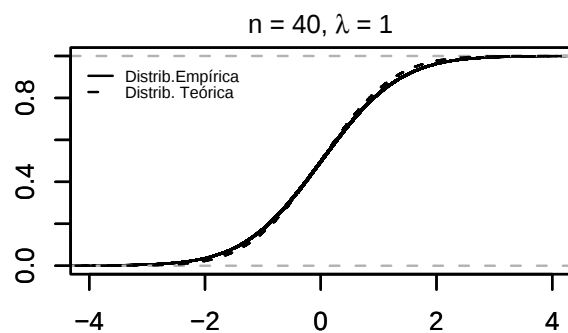


Figura 3.5. Gráficos das funções de distribuição empíricas e assintótica para $r = 3.59$, HC0.

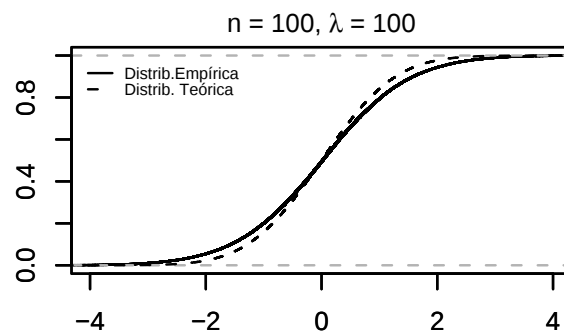
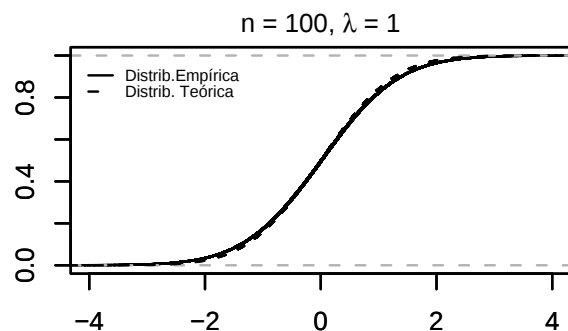
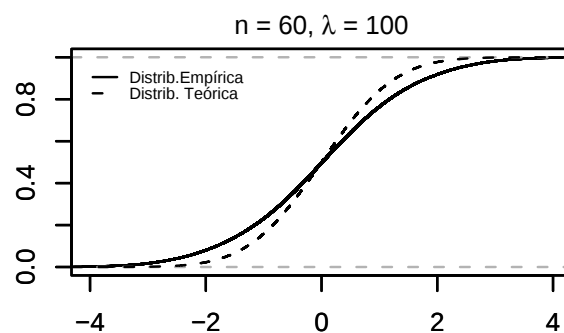
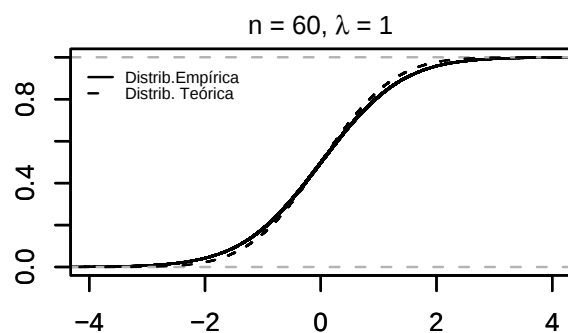
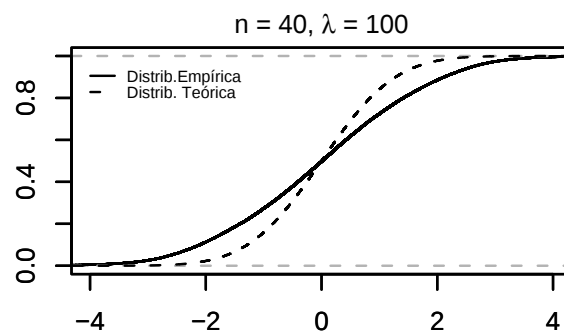
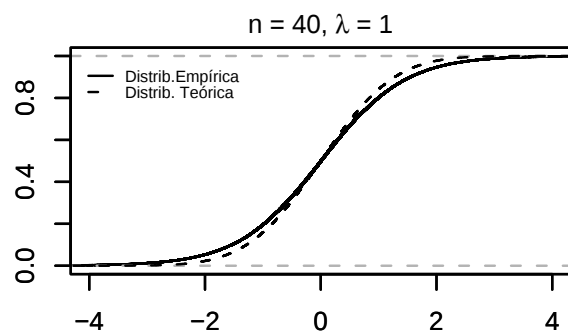


Figura 3.6. Gráficos das funções de distribuição empíricas e assintótica para $r = 4.78$, HC0.

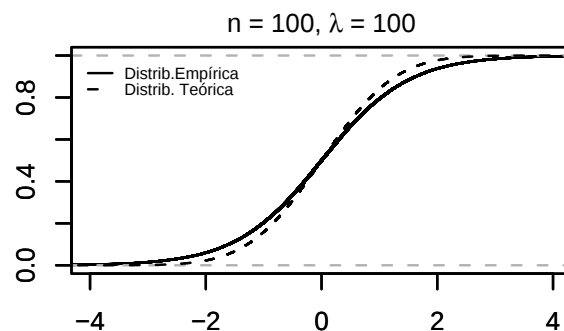
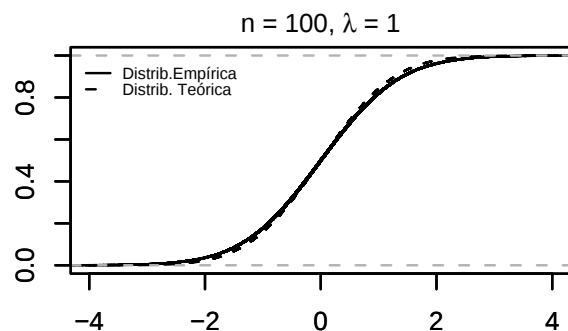
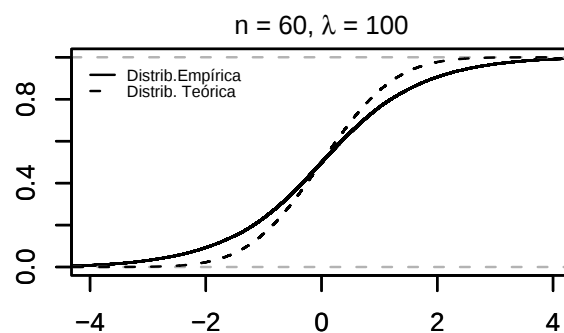
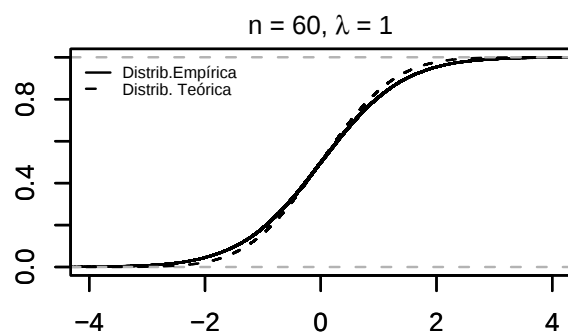
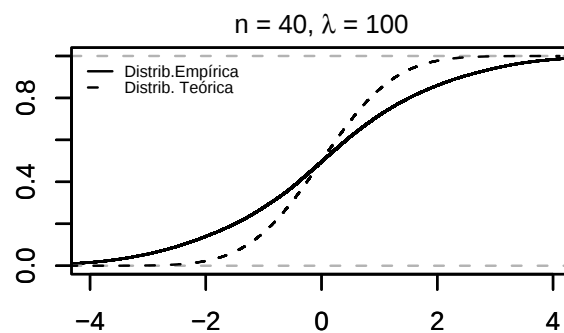
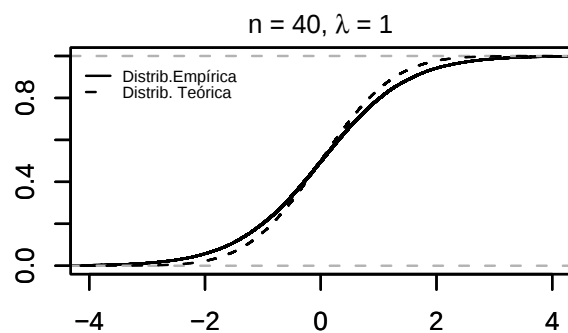


Figura 3.7. Gráficos das funções de distribuição empíricas e assintótica para $r = 2.33$, HC4.

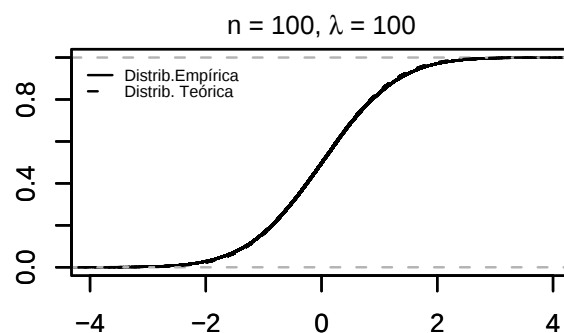
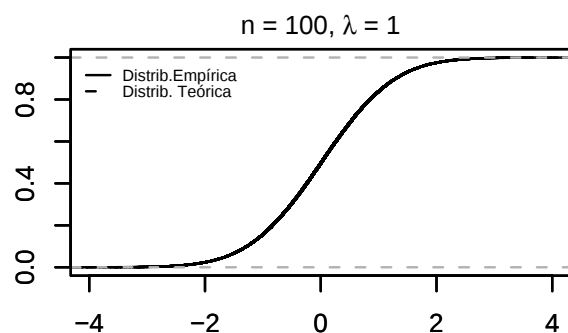
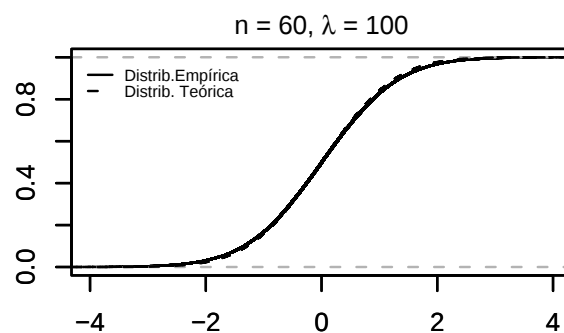
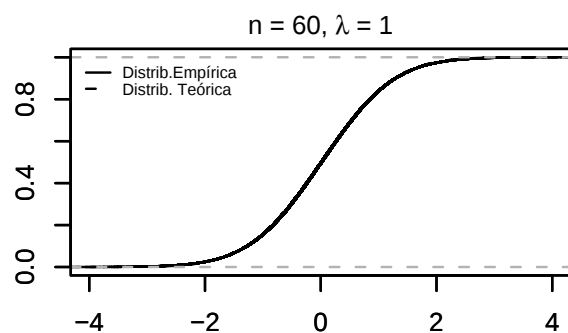
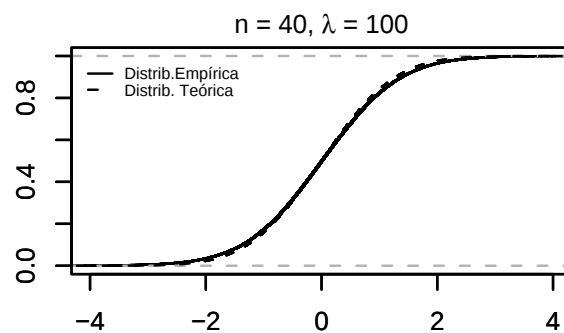
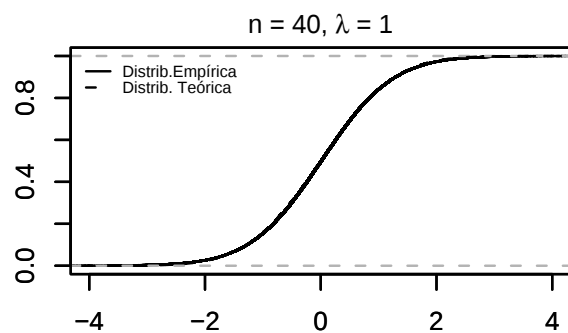


Figura 3.8. Gráficos das funções de distribuição empíricas e assintótica para $r = 3.59$, HC4.

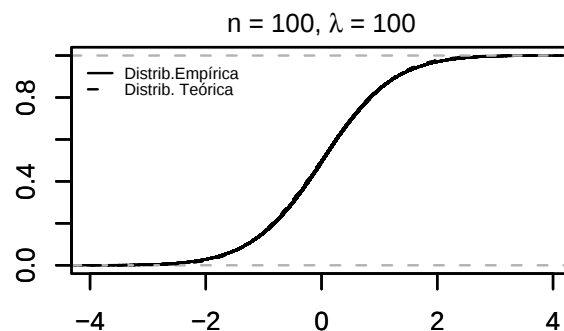
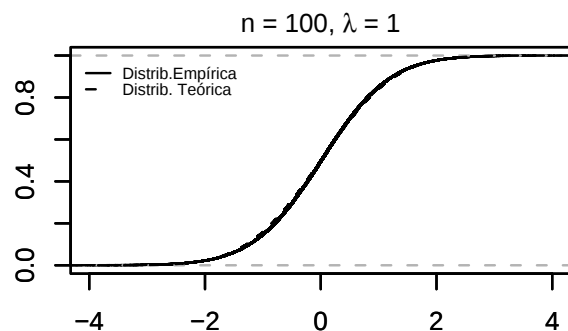
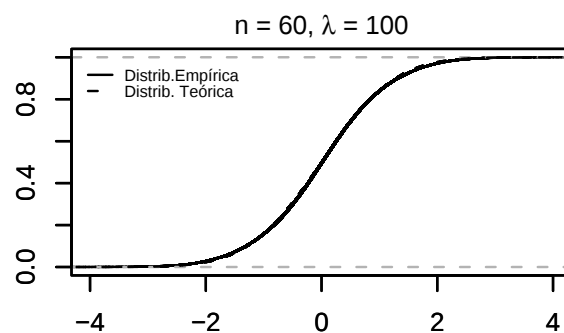
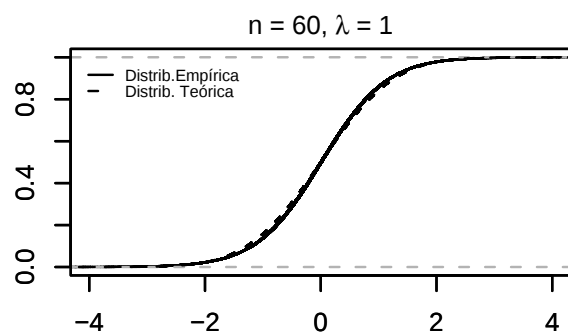
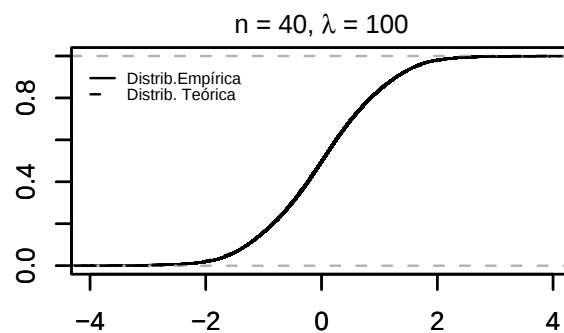
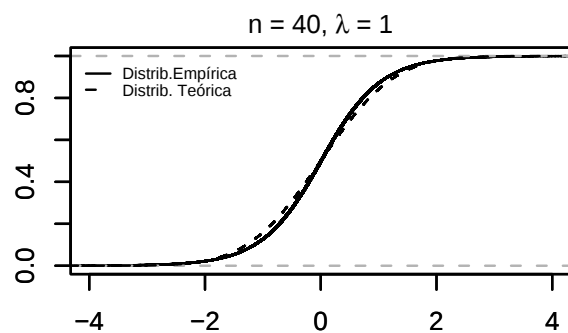
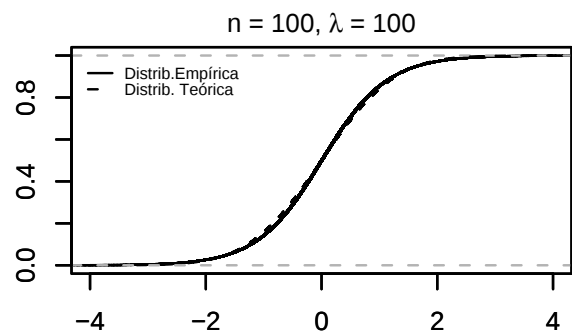
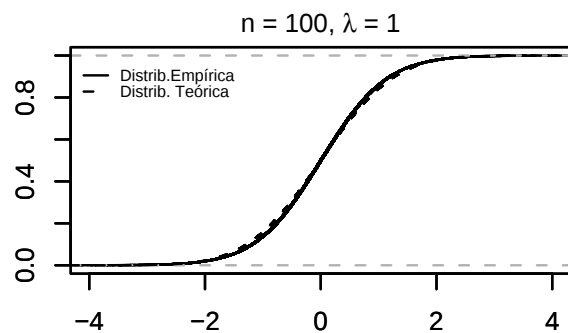
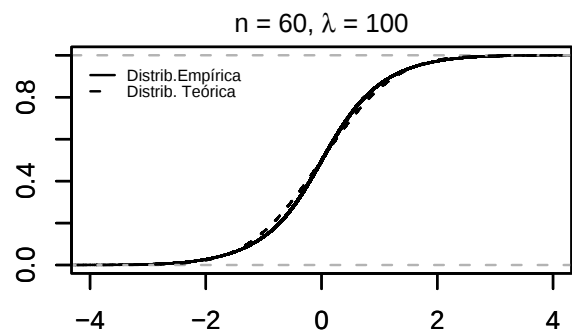
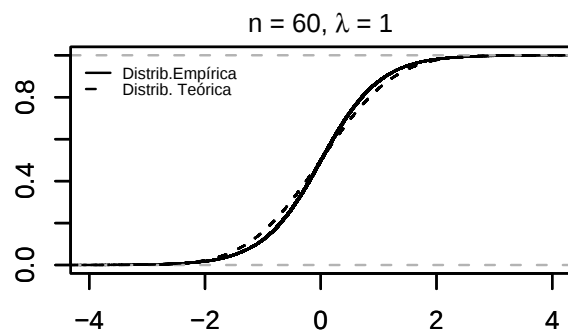
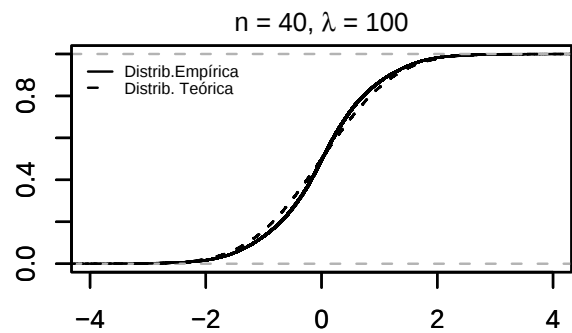
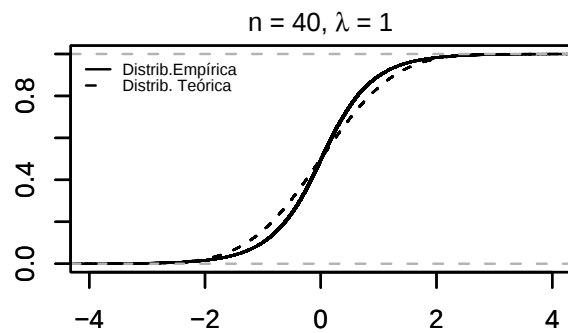


Figura 3.9. Gráficos das funções de distribuição empíricas e assintótica para $r = 4.78$, HC4.



3.6. Aplicação empírica

Nesta seção apresentaremos um exemplo empírico onde as variâncias dos estimadores de MQO para os coeficientes de um modelo de regressão linear são estimadas a partir dos diversos estimadores consistentes que consideramos na presente dissertação. Realizaremos, ainda, testes quasi- t utilizando valores críticos assintóticos e ajustados. Os dados utilizados foram obtidos de Greene (1997, Tabela 12.1, p.541) e sua fonte original é o Departamento de Comércio dos Estados Unidos da América. A variável dependente (y) é o gasto per capita em escolas públicas e as variáveis independentes (x, x^2) correspondem à renda per capita por estado em 1979 nos Estados Unidos e seus valores quadrados. Os valores da covariável ‘renda’ estão reescalados por 10^{-4} . A Tabela 3.29 apresenta os dados. O estado de Wisconsin foi retirado da amostra por apresentar informação incompleta; assim, a amostra final é de tamanho 50. Os dados utilizados nesta aplicação estão disponíveis em <http://www.bragajunior.com.br/downloads/>.

O modelo proposto para descrever a relação entre a variável dependente e as variáveis independentes é da forma

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + u_t, \quad (3.1)$$

para $t = 1, \dots, 50$. As estimativas pontuais de β_0, β_1 e β_2 foram obtidas pelo método de MQO: $\hat{\beta}_0 = 832.91$, $\hat{\beta}_1 = -1834.20$ e $\hat{\beta}_2 = 1587.04$. Os testes de Breusch-Pagan (Breusch & Pagan, 1979) e Koenker (Koenker, 1981) indicam a presença de heteroscedasticidade ao nível nominal de 1%.

Na Tabela 3.30 apresentamos os erros-padrão das estimativas dos parâmetros obtidos a partir dos estimadores consistentes HC0, HC2, HC3 e HC4. Notamos que o estimador HC0 fornece as menores estimativas. Percebemos, ainda, que ao evoluirmos de HC0 a HC4 os erros-padrão tornam-se cada vez maiores.

Consideramos agora o teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$. Note que β_2 é o coeficiente do termo quadrático do modelo (3.1), portanto, estamos avaliando a forma funcional que melhor explica a relação entre a variável dependente ‘gasto’ e a variável independente ‘renda’. Em particular, estamos testando uma especificação linear contra uma forma quadrática. Com base nos modelos 1 a 4 da Seção 3.4, calculamos os valores críticos ajustados sabendo que nesta aplicação $n = 50$, considerando o modelo (3.1): $r = \frac{h_{\max}}{p} \times n = 10.84$ e, portanto, $m = 0.2168$. Com isso, considerando $\alpha = 10\%$, obtivemos os seguintes valores críticos ajustados: 3.387, 2.492, 1.796 e 1.253, com base em HC0, HC2, HC3 e HC4, respectivamente. Lembre que o valor crítico assintótico para este nível nominal é 1.645. Note que o valor crítico ajustado para o teste HC0 é mais de duas vezes maior que o correspondente valor crítico assintótico. As estatísticas quasi- t foram calculadas e apresentaram os seguintes

valores: 1.912, 1.269, 0.795 e 0.289 referentes a HC0, HC2, HC3 e HC4, respectivamente.

Tabela 3.29. Dados sobre gasto per capita em escolas públicas e a renda per capita por estado em 1979 nos Estados Unidos.

Estado	Gasto	Renda	Estado	Gasto	Renda	Estado	Gasto	Renda
Ala.	275	6247	Alasca	821	10851	Ariz.	339	7374
Ark.	275	6183	Cal.	387	8850	Colo.	452	8001
Ct.	531	8914	Del.	424	8640	D.C.	428	10022
Fla.	316	7505	Ga.	265	6700	Hawaii	403	8380
Idaho	304	6813	Ill.	437	8745	Ind.	345	7696
Iowa	431	7873	Kans.	355	8001	Ky.	260	6615
La.	316	6640	Maine	327	6333	Md.	427	8306
Mass.	427	8063	Mich.	466	8442	Minn.	477	7847
Miss.	259	5736	Mo.	274	7342	Mont.	433	7051
Nebr.	294	7391	Nev.	359	9032	N.H.	279	7277
N.J.	423	8818	N.Mex.	388	6505	N.Y.	447	8264
N.C.	335	6607	N.Dak.	311	7478	Ohio	322	7812
Okla.	320	6951	Oreg.	397	7839	Pa.	412	7733
R.I.	342	7526	S.C.	315	6242	S.Dak.	321	6841
Tenn.	268	6489	Texas	315	7697	Utah	417	6622
Vt.	353	6541	Va.	356	7624	Wash.	415	8450
W.Va.	320	6456	Wisc.	★	7597	Wyo	500	9096

★ Dado faltante.

Ao utilizarmos o valor crítico assintótico notamos que a hipótese nula é rejeitada, ao nível de 10%, apenas no caso em que empregamos o teste HC0, ou seja, neste cenário encontramos que há uma relação quadrática entre o gasto médio per capita em escolas públicas e a renda per capita do estado. Entretanto, ao utilizarmos os valores críticos ajustados concluímos, em todos os casos, que a relação entre tais variáveis é linear. Através de uma inspeção visual na Figura 3.4 nota-se que a especificação linear parece representar adequadamente a relação entre as variáveis ‘gasto’ e ‘renda’. Portanto, a utilização de valores críticos ajustados proporcionou conclusões mais coerentes com a análise visual dos dados, mesmo quando consideramos a observação referente ao estado do Alasca. Nota-se que essa observação encontra-se destacada das demais. Uma análise de sua medida de influência indica ser este um ponto de alta alavancagem, já que o elemento diagonal da “matriz chapéu” correspondente à observação do Alasca, igual a 0.651, é maior que o valor de referência $3p/n$, que é igual a 0.180. Quando essa observação é retirada dos dados e realizamos o teste da hipótese $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ ao nível nominal de 10%, verificamos que essa hipótese não é rejeitada considerando todos os testes, tanto com valores críticos assintóticos como ajustados.

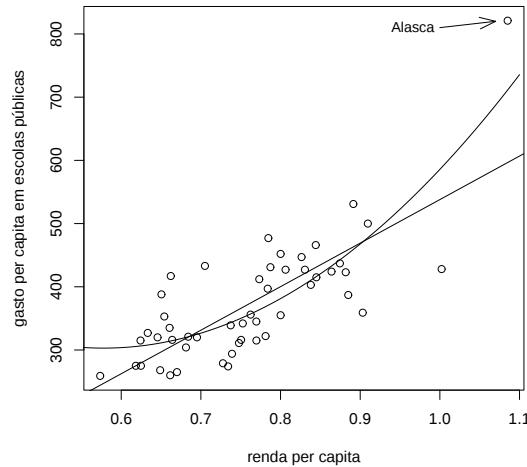
Se reajustarmos o modelo sem o termo quadrático, ou seja, $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$, obtemos as seguintes estimativas dos parâmetros lineares: $\hat{\beta}_0 = -151.26$ e $\hat{\beta}_1 = 689.39$. Calculando as estatísticas quasi- t baseadas nos diversos estimadores consistentes da variância de $\hat{\beta}_1$ avaliamos a significância do coeficiente angular do modelo. Empregando-se valores críticos assintóticos ou ajustados, em todos os casos, concluímos que a relação linear entre as variáveis é estatisticamente significativa aos níveis usuais de significância.

Tabela 3.30. Erros-padrão para $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ em um modelo de regressão linear da forma $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + u_t$, $t = 1, \dots, 50$.

Estimador	HC0	HC2	HC3	HC4
$\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_0)}$	460.89	688.48	1095.00	3008.00
$\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_1)}$	1243.04	1866.41	2975.41	8183.20
$\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_2)}$	829.99	1250.15	1995.24	5488.90

Com isso, através desse exemplo empírico verificamos que o teste que utiliza o estimador HC0 pode levar a conclusões enganosas sobre a relação entre variáveis dependente e independentes quando valores críticos assintóticos são utilizados. Vimos, ainda, que o uso de valores críticos ajustados pode conduzir a inferências mais confiáveis, especialmente quando a estatística de teste é construída a partir do estimador HC0.

Figura 3.4. Gasto per capita em escolas públicas e renda per capita.



Capítulo 4

Conclusões

Ao longo do Capítulo 3 foram apresentados resultados referentes aos tamanhos dos testes quasi- t baseados em *valores críticos assintóticos* e em *valores críticos ajustados* associados a diferentes estimadores consistentes da matriz de covariâncias, HC's, considerados. Além disso, foram avaliados os vieses relativos totais desses estimadores. Foram considerados diferentes níveis de heteroscedasticidade, razões de alavancagem e tamanhos amostrais. Uma vez que construímos as distribuições empíricas das estatísticas de teste baseadas em cada HC, foram apresentadas, também, algumas medidas tais como, média, mediana, desvio-padrão, além de medidas de assimetria e curtose dessas estatísticas para alguns casos.

Em relação aos tamanhos dos testes quasi- t baseados nos diversos HC's, foram apresentados resultados para os testes realizados utilizando os usuais *valores críticos assintóticos* e os *novos valores críticos* por nós propostos. Primeiramente, utilizando valores críticos assintóticos, vimos que os testes que se baseiam no estimador HC0 apresentam as maiores discrepâncias de tamanho, principalmente em pequenas amostras. Em seguida foi visto que os testes baseados no estimador HC2 são um pouco menos liberais quando comparados aos baseados em HC0, mas ainda com distorções consideráveis, sobretudo sob condições extremas de alavancagem e heteroscedasticidade. Na maioria dos casos, os testes baseados nos estimadores HC3 e HC4, utilizando valores críticos assintóticos, foram os que proporcionaram as menores distorções de tamanho. Foi visto, também, que à medida que a razão de alavancagem aumenta, as taxas de rejeição da hipótese nula tendem a se distanciar dos respectivos níveis nominais para um tamanho amostral fixo.

A fim de compararmos os ganhos obtidos ao se utilizar os valores críticos ajustados, foram apresentadas as taxas de rejeição para os testes baseados nestes valores críticos, considerando os vários estimadores, HC's. Os testes que utilizam valores críticos ajustados têm desempenhos semelhantes aos que utilizam os valores críticos assintóticos quando o tamanho amostral é grande. Apesar dos testes baseados nos estimadores HC0 e HC2, utilizando valores críticos ajustados, serem muitas vezes conservadores, os mesmos proporcionam taxas de rejeição mais próximas dos respectivos níveis nominais que aqueles baseados em valores críticos assintóticos. Os ganhos mais expressivos são obtidos para os testes baseados nos estimadores HC0 e HC2, sendo ainda mais significantes em pequenas amostras. Foi visto, ainda, que testes baseados em HC3 apresentaram desempenho superior àqueles baseados em HC0 e HC2, já que os primeiros produziram taxas de rejeição não muito distantes dos níveis nominais quando foram utilizados valores críticos assintóticos. Na maioria dos casos,

a correção do valor crítico pareceu não ter sido muito útil quando utilizamos testes baseados em HC4. A utilização de valores críticos, aqui, forneceu taxas de rejeição mais distantes dos respectivos níveis nominais.

No que se diz respeito aos vieses dos estimadores, vimos que o estimador HC4 mostrou-se bastante viesado, principalmente em amostras de tamanho pequeno a moderado. Em geral, foi observado que esse fato é agravado com o aumento do grau de heteroscedasticidade e da razão de alavancagem. Por outro lado, o estimador HC2 o que funcionou melhor em termos de viés, na maioria dos casos, até mesmo sob forte heteroscedasticidade e alta alavancagem.

No que se refere às distribuições empíricas das estatísticas de teste baseadas nos diversos estimadores consistentes da matriz de covariâncias, foi mostrado que a estatística baseada em HC4, em todos os casos, apresentou a menor dispersão nas situações onde a razão de alavancagem foi igual ou superior a 3.59.

Por fim, recomendamos o uso de *valores críticos ajustados* quando da realização de testes de hipótese baseados nos estimadores HC0, HC2 e, até mesmo, HC3. Para testes baseados em HC4 recomenda-se a utilização de *valores críticos assintóticos*, já que não houve melhoria de desempenho ao utilizarmos *valores críticos ajustados*.

Apêndice

Este apêndice apresenta o programa escrito na linguagem de programação Ox que foi utilizado para calcular, via simulação de Monte Carlo, os valores críticos empíricos para um determinado grau de heteroscedasticidade, razão de alavancagem e tamanho amostral.

```

/*****
*
* PROGRAMA: vc_empirico.ox
*
*
* AUTORES: Antonio Carlos R. Braga Junior;
*          Francisco Cribari-Neto.
*
*
*****/

// Inclusao de bibliotecas
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <oxfloat.h>

//Parametros para simulacao
const decl N = 20;      //Tamanho da amostra INICIAL
const decl NREP = 100000; //Numero de replicas Monte Carlo
const decl alpha_1 = 0, alpha_2 = 0; //Controla o grau de heteroscedasticidade

main()
{

    //Declaracao de variaveis
    decl tempo,mu,i,beta,Y,MU;

    decl vbhat,mxtxin,xtX,tau,VC10,VC5,VC1,VC1_HC2,VC5_HC2,VC10_HC2,VC10_HC3,VC5_HC3,
    VC1_HC3,VC10_HC4,VC5_HC4,VC1_HC4;

    decl P,Pt,H,resid2,var_white,var_HC2,var_HC3,var_HC4,whitevector=zeros(3,1),
    HC2vector=zeros(3,1),HC3vector=zeros(3,1),HC4vector=zeros(3,1),tau_abs;

    decl M,w,nvar,g,gnew,weight2,weight3,weight4,tau_abs_white,tau_abs_HC2,tau_abs_HC3,
    tau_abs_HC4,hmax,hbarra,lambda,gama;

    decl white=zeros(3,NREP),HC2=zeros(3,NREP),HC3=zeros(3,NREP),HC4=zeros(3,NREP),
    mbhat=zeros(3,NREP);

    decl txrej10white=0,txrej5white=0,txrej1white=0,txrej10HC2=0,txrej5HC2=0,txrej1HC2=0,
    txrej10HC3=0,txrej5HC3=0,txrej1HC3=0;

    decl txrej10HC4=0,txrej5HC4=0,txrej1HC4=0,sigma,x1 = zeros(N,1),x2 = zeros(N,1),X,
    omega,varbetas,covbetas;

```

```

decl viesrelbetawhite,viesrelbetaHC2,viesrelbetaHC3,viesrelbetaHC4,teste,p,n;

decl stat_tau_white,stat_tau_HC2,stat_tau_HC3,stat_tau_HC4,median_tau;

//Registrando o tempo de inicio do programa
tempo = timer();

// valores criticos assintoticos
decl vc10 = quann(0.950);
decl vc5 = quann(0.975);
decl vc1 = quann(0.995);

//Selecao do gerador de numeros aleatorios
ranseed("GM"); // gerador Multiply-with-Carry de GM
ranseed({1111,1000});

print("*****\n");
print("Nome do programa: braga_tese.ox\n");
print("Autor: Antonio Carlos R. Braga Junior\n");
print("Data: ", date());
print("\nHora: ", time());
print("\n*****\n");
print("Modelo considerado:  $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \text{erro}_t$ \n");
print("Funcao cedastica considerada:  $\sigma^2 = \exp\{\alpha_1 X_2 + \alpha_2 X_3\}$ \n");
print("Alpha_1 e Alpha_2 considerados iguais a : ",alpha_1," e ",alpha_2.\n");
print("Hipotese considerada:  $H_0: \beta_3 = 0$ \n");
print("Modelo sob  $H_0$ :  $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \text{erro}_t$ \n");
print("Numero de replicacoes Monte Carlo = ",NREP);
print("\nGerador de numeros pseudo-aleatorios utilizado: George Marsaglia");
print("\nSemente do gerador: ",ranseed(0));

//*****
x1 = ranu(N,1); //Gerando regressores da distribuicao Uniforme
x2 = ranu(N,1);
//*****
// x1 = ranlogn(N,1); //Gerando regressor da distribuicao LogNormal
// x2 = rant(N,1,2); //Gerando regressor da distrib. t-Student com 2 graus de liberdade.
//*****
// DEFININDO O TAMANHO AMOSTRAL. Replicar de 20 em 20
//(i.e. para N=60 fazer x1=x1|x1|x1 e x2=x2|x2|x2)
x1 = x1;
x2 = x2;
X = 1~x1~x2; //Criando a matriz do modelo incluindo o intercepto
n = rows(X);
nvar = columns(X);
print("\nTAMANHO AMOSTRAL: ", n);
print("\n");

beta = ones(nvar-1,1)|0; // Valores verdadeiros dos betas
MU = X*beta; //para testar a hipotese de beta3=0.

```

```

XtX = X'*X;
mxtxin = invsym(XtX);

P = mxtxin*X';
Pt = P';

M = X*P;
H = unit(n) - M;
//retorna a diagonal do produto como um vetor linha
w = diagonal(M);

hmax = max(w); //Grau maximo de alavancagem
hbarra = meanr(w); //Grau medio de alavancagem
gama = hmax/hbarra; // Razao entre os graus maximo e medio de alavancagem

print("\n");
println("GRAUS DE ALAVANCAGEM:", "%c", {"Maximo", "Medio", "Razao"}, "%12.5f",
hmax~hbarra~gama);

g = (n*w) ./ nvar; //usado no HC4
gnew = g .> 4 .? 4 .: g; //minimo entre 4 e g (HC4)

weight2 = (1.0 ./ (1.0-w')) ); // usado para o HC2
weight3 = (1.0 ./ ((1.0-w') .^ 2) ); // usado para o HC3
weight4 = (1.0 ./ ((1.0-w') .^ gnew')) ); // usado para o HC4

tau = zeros(NREP,4); //Definindo a dimensao da matriz que armazena os valores
//das estatisticas de teste. Cada coluna representa um HC
//e cada linha representa uma replica.

sigma = sqrt(exp(alpha_1*x1 + alpha_2*x2)); //Funcao Cedastica
omega = diag(sigma.^2); //matriz omega n X n utilizada no calculo do vies da
//variancia dos betas.
covbetas = mxtxin*X'*omega*X*mxtxin; //matriz de covariancias esperadas(VERDADEIRAS)
//dos betas.
varbetas = diagonal(covbetas); //matriz de variancias esperadas(VERDADEIRAS)
//dos betas.

//Inicio do laço Monte Carlo
for (i = 0; i < NREP; ++i)
{
// resposta simulada
Y = MU + sigma.*rann(n,1); //geracao dos dados

// estimativa de MQO
vbhat=P*Y; //obtencao das estimativas dos parametros
mbhat[i] = vbhat;

// residuos ao quadrado
resid2 = (H*Y) .^ 2;

```

```

// calculo da variancia estimada de betachapeu via HC0
var_white = P * (resid2 .* Pt);
whitevector = diagonal(var_white); //usado em cada repeticao Monte Carlo
white[] [i] = whitevector'; //armazenando os valores da variancia para
                        //tomarmos a media posteriormente.

// calculo da variancia estimada de betachapeu via HC2
var_HC2 = P * ( (resid2 .* weight2) .* Pt);
HC2vector = diagonal(var_HC2); //usado em cada repeticao Monte Carlo
HC2[] [i] = HC2vector'; //armazenando os valores da variancia para
                        //tomarmos a media posteriormente.

// calculo da variancia estimada de betachapeu via HC3
var_HC3 = P * ( (resid2 .* weight3) .* Pt);
HC3vector = diagonal(var_HC3); //usado em cada repeticao Monte Carlo
HC3[] [i] = HC3vector'; //armazenando os valores da variancia para
                        //tomarmos a media posteriormente.

// calculo da variancia estimada de betachapeu via HC4
var_HC4 = P * ( (resid2 .* weight4) .* Pt);
HC4vector = diagonal(var_HC4); //usado em cada repeticao Monte Carlo
HC4[] [i] = HC4vector'; //armazenando os valores da variancia para
                        //tomarmos a media posteriormente.

//ESTATISTICAS DE TESTE
//testa beta3=0 -> modelo com intercepto VIA HC0.
tau[i] [0]=vbhat[2]/sqrt(whitevector[2]);
//testa beta3=0 -> modelo com intercepto VIA HC2.
tau[i] [1]=vbhat[2]/sqrt(HC2vector[2]);
//testa beta3=0 -> modelo com intercepto VIA HC3.
tau[i] [2]=vbhat[2]/sqrt(HC3vector[2]);
//testa beta3=0 -> modelo com intercepto VIA HC4 .
tau[i] [3]=vbhat[2]/sqrt(HC4vector[2]);

} //Final do laço de Monte Carlo

// taxas de rejeicao
txrej10white = double(sumc(fabs(tau[] [0]) .> vc10));
txrej5white  = double(sumc(fabs(tau[] [0]) .> vc5));
txrej1white  = double(sumc(fabs(tau[] [0]) .> vc1));

txrej10HC2 = double(sumc(fabs(tau[] [1]) .> vc10));
txrej5HC2  = double(sumc(fabs(tau[] [1]) .> vc5));
txrej1HC2  = double(sumc(fabs(tau[] [1]) .> vc1));

txrej10HC3 = double(sumc(fabs(tau[] [2]) .> vc10));
txrej5HC3  = double(sumc(fabs(tau[] [2]) .> vc5));
txrej1HC3  = double(sumc(fabs(tau[] [2]) .> vc1));

txrej10HC4 = double(sumc(fabs(tau[] [3]) .> vc10));
txrej5HC4  = double(sumc(fabs(tau[] [3]) .> vc5));
txrej1HC4  = double(sumc(fabs(tau[] [3]) .> vc1));

```

```

//calculo do vies
viesrelbetawhite = (meanr(white)-varbetas')./varbetas';
viesrelbetaHC2   = (meanr(HC2)-varbetas')./varbetas';
viesrelbetaHC3   = (meanr(HC3)-varbetas')./varbetas';
viesrelbetaHC4   = (meanr(HC4)-varbetas')./varbetas';

print("\n");
print("VALORES VERDADEIROS DE BETA1, BETA2 e BETA3:", "%c",
{"Beta1", "Beta2", "Beta3"}, "%15.4f", beta');
print("\nESTIMATIVAS MEDIAS DE BETA1, BETA2 e BETA3:", "%c",
{"Beta1", "Beta2", "Beta3"}, "%15.4f", (meanr(mbhat))');

print("\n");
print("MEDIAS DAS VARIANCIAS ESTIMADAS:");
print("%12.5f", "%c", {"HC0", "HC2", "HC3", "HC4"},
meanr(white)~meanr(HC2)~meanr(HC3)~meanr(HC4));

println("\nVARIANCIAS VERDADEIRAS:", "%12.5f", varbetas');

print("\nVIESES RELATIVOS:");
print("%12.4f", "%c", {"HC0", "HC2", "HC3", "HC4"},
viesrelbetawhite~viesrelbetaHC2~viesrelbetaHC3~viesrelbetaHC4);

print("\nVIESES RELATIVOS TOTAIS:");
print("%12.4f", "%c", {"HC0", "HC2", "HC3", "HC4"}, sumc(fabs(viesrelbetawhite))~
sumc(fabs(viesrelbetaHC2))~sumc(fabs(viesrelbetaHC3))~sumc(fabs(viesrelbetaHC4)));

// valores absolutos das estatisticas de teste
tau_abs = fabs(tau); //forcando simetria
tau_abs_white = tau_abs[] [0];
tau_abs_HC2 = tau_abs[] [1];
tau_abs_HC3 = tau_abs[] [2];
tau_abs_HC4 = tau_abs[] [3];

// valores criticos empiricos
VC1      = quantilec(tau_abs_white, 0.99);
VC5      = quantilec(tau_abs_white, 0.95);
VC10     = quantilec(tau_abs_white, 0.90);
VC1_HC2  = quantilec(tau_abs_HC2, 0.99);
VC5_HC2  = quantilec(tau_abs_HC2, 0.95);
VC10_HC2 = quantilec(tau_abs_HC2, 0.90);
VC1_HC3  = quantilec(tau_abs_HC3, 0.99);
VC5_HC3  = quantilec(tau_abs_HC3, 0.95);
VC10_HC3 = quantilec(tau_abs_HC3, 0.90);
VC1_HC4  = quantilec(tau_abs_HC4, 0.99);
VC5_HC4  = quantilec(tau_abs_HC4, 0.95);
VC10_HC4 = quantilec(tau_abs_HC4, 0.90);

// grau de heteroscedasticidade
lambda = double(maxc(sigma.^2)/minc(sigma.^2)); //Grau de heteroscedasticidade

print("\n");

```

```

print("VALORES CRITICOS ESTIMADOS E ASSINTOTICOS:");
println("%11.4f", "%r", {"10%", " 5%", " 1%"}, "%c",
{"HC0", "HC2", "HC3", "HC4", "ASSINT."}, (VC10|VC5|VC1)~(VC10_HC2|VC5_HC2|VC1_HC2)~
(VC10_HC3|VC5_HC3|VC1_HC3)~(VC10_HC4|VC5_HC4|VC1_HC4)~(vc10|vc5|vc1) );

println(" ");
print("TAXAS DE REJEICAO OBTIDAS VIA SIMULACAO MONTE DE CARLO");
println("%11.2", "%r", {"10%", " 5%", " 1%"}, "%c", {"HC0", "HC2", "HC3", "HC4"},
((txrej10white|txrej5white|txrej1white)~(txrej10HC2|txrej5HC2|txrej1HC2)~
(txrej10HC3|txrej5HC3|txrej1HC3)~(txrej10HC4|txrej5HC4|txrej1HC4))/NREP*100 );

//estatisticas da estatistica de teste, TAU
stat_tau_white=moments(tau[] [0]);
stat_tau_HC2=moments(tau[] [1]);
stat_tau_HC3=moments(tau[] [2]);
stat_tau_HC4=moments(tau[] [3]);
median_tau=quantilec(tau,0.5);
print("\n");
print("ESTATISTICAS DA ESTATISTICA DE TESTE, TAU:");
println("%14.4f", "%r", {"# Replicas", " Media", " Desvio Padrao", " Assimetria",
" Curtose", " Mediana"}, "%c", {"HC0", "HC2", "HC3", "HC4"}, (stat_tau_white)~
(stat_tau_HC2)~(stat_tau_HC3)~(stat_tau_HC4)|(median_tau));

println("");
println("\nGRAU DE HETEROSCEDASTICIDADE:", "%10.4f", double(lambda));

print("\nTEMPO DE EXECUCAO: ", timespan(tempo));
print("\n");

print("\n*****\n");
}

```

Referências

- [1] Breusch, T.S. & Pagan, A.R. (1979). A simple test for heteroskedasticity and random coefficient variation. *Econometrica*, 47, 1287-1294.
- [2] Chesher, A. & Jewitt, I. (1987). The bias of a heteroskedasticity consistent covariance matrix estimator. *Econometrica*, 55, 1217-1222.
- [3] Cribari-Neto, F (2004). Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form. *Computational Statistics and Data Analysis*, 45, 215-233.
- [4] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S.G. (1999). Bootstrap methods for heteroskedastic regression models: evidence on estimation and testing. *Econometrics Reviews*, 18, 211-228.
- [5] Cribari-Neto, F. & Zarkos, S.G. (2001). Heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimation: White's estimator and bootstrap. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 68, 391-411.
- [6] Davidson, R. & MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*. New York: Oxford University Press.
- [7] Doornik, J.A. (2001). *Ox: an Object-oriented Matrix Programming Language*, 4^a ed. Londres: Timberlake Consultants.
- [8] Draper, N. & Smith, H. (1980). *Applied Regression Analysis*, 2^a ed. New York: Wiley.
- [9] Eicker, F. (1963). Asymptotic normality and consistency of the least squares estimators for families of linear regressions. *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 447-456.
- [10] Eicker, F. (1967). Limit theorems for regressions with unequal and dependent errors. Em *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1, 59-82. Berkeley: University of California Press.
- [11] Fox, J. (2002). *An R and S-PLUS Companion to Applied Regression*, London: Sage.
- [12] Greene, W. H. (1997). *Econometric Analysis*, 3^a ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall.
- [13] Hinkley, D.V. (1977). Jackknifing in unbalanced situations. *Technometrics*, 19, 285-292.
- [14] Hogg, R. V. & Craig, A. T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics*, 5^a ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

- [15] Horn, S.D., Horn, R.A. & Duncan, D.B. (1975). Estimating heteroskedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, 70, 380-385.
- [16] Judge, G.C., Hill, R.C., Griffiths, W.E., Lutkepohl, H. & Lee, T.C. (1985). *The Theory and Practice of Econometrics*, 2^a ed. New York: Wiley.
- [17] Koenker, R. (1981). A note on studentizing a test for heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 17, 107-112.
- [18] Long, J.S. & Ervin, L.H. (2000). Using heteroskedasticity-consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, 54, 217-224.
- [19] MacKinnon, J.G. & White, H. (1985). Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite-sample properties. *Journal of Econometrics*, 29, 305-325.
- [20] Rao, C.R. (1970). Estimation of heteroskedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, 65, 161-172.
- [21] Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, 2^a ed. New York: Wiley.
- [22] Venables, W.N. & Ripley, B.D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*, 4^a ed. New York: Springer-Verlag.
- [23] White, H.(1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48, 817-838
- [24] Wilson, B.(1999). Stock markets and growth in a stochastic open economy. Working Paper, Department of Economics, University of Illinois.