
ANÁLISE DE INFLUÊNCIA PARA A DISTRIBUIÇÃO DIRICHLET

GECYNALDA SOARES DA SILVA GOMES

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
Co-orientador: Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Área de concentração: Estatística Matemática

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2005

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

14 de fevereiro de 2005

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Gecynalda Soares da Silva Gomes

intitulada

Análise de influência para a distribuição Dirichlet

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

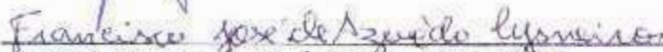


Klaus Teófilo Pinto Vasconcelos

orientador



Francisco Louzada Neto (UFSCar)



Francisco José de Azevedo Cysneiros

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Dedico este trabalho à minha filha, Larissa,
e aos meus pais, Geci e Neto.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pela minha vida; sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, pelo amor incondicional, pelo apoio, pela oportunidade que me deram para que eu pudesse estudar e por sempre terem ficado ao meu lado nos momentos de alegria e de tristeza, além de me mostrarem que trabalho duro, coragem e honestidade são as ferramentas ideais para atingirmos nossas metas.

À minha filha, Larissa, pelo amor, pela alegria e, principalmente, por fazer parte de minha vida, pois se não fosse minha baixinha eu não teria força, vontade nem determinação para concluir mais esta etapa da minha vida. Vale registrar meus pedidos de desculpas por ter tido que abdicar de muitos momentos de convivência.

À minha irmã, Tchê, e à minha sobrinha, Ariane, pelo amor, respeito, confiança, amizade e por serem pessoas imprescindíveis na minha vida.

À minha mais nova irmã, Nathália.

Ao meu namorado, André, pelo amor, apoio, pela paciência, cumplicidade, compreensão e colaboração na fase mais importante dos meus estudos até o momento atual.

Ao meu professor e orientador, Francisco Cribari Neto, pelo conhecimento transmitido em suas aulas, pelo profissionalismo, pela orientação, eficiência e por sempre ter acreditado em mim.

Ao meu professor e co-orientador, Klaus Vasconcellos, pela sabedoria, segurança, competência, paciência e pela orientação incondicional e indispensável para a conclusão deste trabalho e pela pessoa maravilhosa que é.

À Profa. Dra. Ana Marlúcia, pela confiança, competência, credibilidade e por sempre me ter dado oportunidade de crescer profissionalmente.

À família Santiago Maia, pelo carinho, respeito, acolhimento e pela sincera amizade que nasceu entre mim e essa família tão digna.

À Profa. Maria Cristina, pelos conselhos, por seus ensinamentos, por sua capacidade de compreensão e por mostrar como a vida pode ser sempre melhor.

Ao Prof. Francisco Cysneiros, pelas sugestões que fizeram este trabalho ficar cada vez mais enriquecido.

Aos Professores André Toom, Cláudia Regina e Viviana Giampaoli, por terem passado seus conhecimentos, e a todos os professores do Departamento de Estatística da UFPE que de alguma forma colaboraram para meu crescimento profissional.

Aos funcionários do Departamento de Estatística da UFPE, em especial a Adriana e a Valéria, pela amizade, alegria, competência, dedicação e boa vontade que sempre tiveram com todos.

Aos meus colegas do mestrado Fernando, Silvia e Cherubino (em memória), por terem feito parte da minha turma e, em especial,

- A Andréa, pela delicadeza, pela meiguice e por sempre ter me ajudado nos estudos.

- A Júnior, pelo bom humor que serviu para relaxar nos momentos estressantes de nossos estudos.

- A Lenaldo, pela simpatia, pelo respeito, carinho e cuidado que teve comigo e minha filha.

- A Renata, pela força, sinceridade, amizade, colaboração ao estudar análise e pelo exemplo de seriedade.

- A Sandra Rêgo, pelo apoio, respeito, pela generosidade e solidariedade em uma das situações mais difíceis durante minha estadia em Recife.

- A Sandra Pinheiro, pela amizade eterna, serenidade, tranquilidade, pelos conselhos, pelo carinho e por ser hoje a mais nova integrante da minha família.

- A Tatiane, pela amizade, cooperação, perseverança, pelos momentos em que compartilhamos juntas as alegrias e as noites em claro (estudando) e, principalmente, por seu exemplo de humildade.

Às minhas queridas amigas Gueu, D. Rose e Elma, pelo carinho, pela amizade, receptividade e hospitalidade que tiveram comigo durante minhas estadias em Salvador.

Ao meu querido amigo Fagundes e sua família, pela amizade e delicadeza com que me receberam em sua casa durante minhas estadias em Brasília.

Às minhas amigas lindas, Lana e Thaís, pelo carinho, pela cumplicidade, força e eterna amizade.

Ao Núcleo de Nutrição e Epidemiologia da Escola de Nutrição - UFBA, pois foi nele que tive a oportunidade de crescer profissionalmente, e às pessoas que ali trabalharam comigo pelo respeito e pela grande amizade que surgiu.

A todos meus amigos que direta ou indiretamente contribuíram para o meu sucesso.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística da Universidade Federal da Bahia, em especial às Professoras Rosana, Lia, Meire e Giovana, e a Nádia, pela amizade e confiança.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Ceará, em especial ao Prof. Maurício Mota, pela força e pelo apoio.

A todos os outros colegas do mestrado, pela receptividade, em particular a Tatiene, pela inquestionável disponibilidade em me ajudar nas vezes em que precisei, a Gilson, pela alegria e amizade, a Themis, pela hospitalidade e pelo carinho, e, em especial a Keila e a Moisés, pelas pessoas sensíveis e amorosas que são.

Às Universidades Federal do Ceará, Federal da Bahia e Federal de Pernambuco, por terem cedido seus espaços, seus livros e equipamentos para que eu pudesse aprender.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

Aos que esqueci, meu pedido de perdão e meus agradecimentos sinceros.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aprender é a única coisa de que a mente
nunca se cansa, nunca tem medo
e nunca se arrepende.

– Leonardo da Vinci

Resumo

Modelagem de dados restritos ao intervalo $(0, 1)$ é muito comum na prática. Para modelar dados desta natureza podemos fazer uso da distribuição beta. Contudo, quando o interesse é estudar conjuntamente variáveis que estão compreendidas no intervalo $(0, 1)$ e trabalhar com modelos multivariados, uma distribuição útil é a Dirichlet, que é uma generalização da distribuição beta.

Nesta dissertação avaliamos a influência local através da curvatura normal conforme para dados correspondentes a variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) segundo a distribuição Dirichlet. A metodologia da curvatura normal conforme foi proposta por Poon & Poon (1999) para avaliar medidas de influência segundo pequenas perturbações nos dados ou no modelo é considerada no contexto da distribuição Dirichlet. Consideramos dois esquemas de perturbação, um em que uma das componentes é modificada através das formas aditiva e multiplicativa e outro em que perturbamos a log-verossimilhança de forma multiplicativa.

Após analisarmos as observações influentes através de tais medidas, comparamos as estimativas dos parâmetros da distribuição Dirichlet quando todas as observações estão presentes nos dados com as estimativas desses parâmetros ao retirarmos uma observação influente com o intuito de verificar o impacto causado nas estimativas.

Abstract

This thesis considers the issue of assessing local influence of observations generated from a Dirichlet distribution, which is a useful multivariate generalization of the beta distribution. To that end, we employ the measure proposed by Poon & Poon (1999). Different perturbation schemes are considered. The methodology is applied to both simulated and real data.

Sumário

1. Introdução	1
1.1. Considerações iniciais	1
1.1.1. Organização da dissertação	2
1.1.2. Suporte computacional	2
2. Distribuições beta e Dirichlet	3
2.1. Distribuição beta	3
2.1.1. Definição	3
2.1.2. Propriedades	5
2.2. Distribuição Dirichlet	6
2.2.1. Definição	6
2.2.2. Propriedades	13
2.2.3. Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Dirichlet	16
3. Curvatura normal conforme e avaliação da influência	18
3.1. Introdução	18
3.2. Curvatura normal conforme	19
3.2.1. Curvatura normal	19
3.2.2. Curvatura normal conforme e suas propriedades	20
3.3. Avaliação da influência local	21
3.3.1. Influência e autovetor individual	21
3.3.2. Contribuição agregada de vetores de perturbação básicos	22
3.4. Esquemas de perturbação	23
4. Avaliação numérica	25
4.1. Introdução	25
4.2. Perturbando a componente 1	26

4.2.1. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 1	26
4.2.2. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 2	28
4.2.3. Resultados para o esquema de perturbação multiplicativa	28
4.3. Perturbando a componente 2	32
4.3.1. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 1	32
4.3.2. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 2	32
4.3.3. Resultados para o esquema de perturbação multiplicativa	32
4.4. Perturbando a componente 3	37
4.4.1. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 1	37
4.4.2. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 2	37
4.4.3. Resultados para o esquema de perturbação multiplicativa	42
4.5. Resultados da comparação das estimativas	42
5. Aplicações empíricas	44
5.1. Introdução	44
5.2. Dados de composição de <i>kongite</i>	44
5.2.1. Perturbando a variável <i>albite</i> (componente 1)	44
5.2.2. Perturbando a variável <i>blandite</i> (componente 2)	48
5.2.3. Perturbando a variável <i>cornite</i> (componente 3)	52
5.2.4. Perturbando a variável <i>daubite</i> (componente 4)	52
5.2.5. Perturbando a variável <i>endite</i> (componente 5)	56
5.2.6. Resultados da comparação das estimativas	59
5.3. Dados de padrões de atividade de um estatístico	59
5.3.1. Perturbando a variável ensino (componente 1)	63
5.3.2. Perturbando a variável consultoria (componente 2)	63
5.3.3. Perturbando a variável administração (componente 3)	64
5.3.4. Perturbando a variável pesquisa (componente 4)	64
5.3.5. Perturbando a variável outras atividades (componente 5)	64

5.3.6. Resultados da comparação das estimativas	65
5.4. Dados de composição de células brancas	65
5.4.1. Perturbando a variável <i>granulocytes</i> (componente 1)	67
5.4.2. Perturbando a variável <i>lymphocytes</i> (componente 2)	68
5.4.3. Perturbando a variável <i>monocytes</i> (componente 3)	71
5.4.4. Resultados da comparação das estimativas	78
6. Considerações finais	80
Apêndice	82
A. Funções de log-verossimilhança	82
A.1. Log-verossimilhança para o modelo sem perturbação	82
A.2. Log-verossimilhança para o esquema de perturbação aditiva 1	82
A.3. Log-verossimilhança para o esquema de perturbação aditiva 2	82
A.4. Log-verossimilhança para o esquema de perturbação multiplicativa	83
A.5. Função para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança	83
B. Cálculo das derivadas	84
B.1. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação aditiva 1	84
B.2. Segundas derivadas para o esquema de perturbação aditiva 1	85
B.3. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação aditiva 2	86
B.4. Segundas derivadas para o esquema de perturbação aditiva 2	87
B.5. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa	89
B.6. Segundas derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa	89
B.7. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança	90
B.8. Segundas derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança	91
C. Programa principal	93
D. Valores da matriz Y	111

Tabela D.1. Valores pseudo-aleatórios utilizados na avaliação numérica	111
Tabela D.2. Composição de 25 espécimes de <i>kongite</i>	112
Tabela D.3. Padrões de atividade de um estatístico durante 20 dias	113
Tabela D.4. Composição de células brancas de 28 células sanguíneas por dois métodos diferentes	114
Referências bibliográficas	115

Capítulo 1

Introdução

1.1. Considerações iniciais

Modelos estatísticos são extremamente úteis para descrever características essenciais de um conjunto de dados. Porém, esses modelos são descrições aproximadas de algum processo mais complexo. O estudo da variação dos resultados de uma análise sob modestas modificações torna-se, assim, importante. Caso exista em uma descrição aproximada uma pequena modificação que influencie severamente resultados fundamentais de uma análise, seguramente há motivos para preocupação. Por outro lado, se tais modificações não têm importância, dizemos que a amostra é insensível com respeito às perturbações induzidas; neste caso o modelo é preciso e não causa nenhum prejuízo à análise.

Um dos métodos mais modernos de diagnóstico foi introduzido por Cook (1986). Um princípio fundamental consiste em estudar o comportamento de alguma medida particular de influência que mede pequenas perturbações nos dados ou no modelo e, assim, verificar a existência de pontos que sob modestas modificações no modelo causam variações significativas nos resultados (Paula, 2004).

Para avaliar a influência local das observações no ajuste de um modelo, Cook (1986) sugere perturbar a variável resposta ou as covariáveis e utilizar alguma medida adequada para quantificar e avaliar a influência das observações. A função de deslocamento da verossimilhança pode fornecer uma medida de influência, assim como a matriz hessiana da log-verossimilhança (Pan & Bai, 2003), cujo autovetor correspondente ao maior autovalor absoluto serve para avaliar a influência local das observações nas estimativas do parâmetro (Galea, Paula & Uribe-Opazo, 2003).

O método proposto por Cook (1986) utiliza conceitos de geometria diferencial para avaliar o comportamento da função de deslocamento da verossimilhança. O método é de grande utilidade, porém várias questões foram levantadas pelo autor, tais como o fato de que a curvatura normal depende de como o modelo será perturbado, de que a curvatura normal não é invariante sob reparametrização, entre outras. Com base nisso, Poon & Poon (1999) propuseram métodos que solucionam esses e outros problemas. Eles construíram uma medida, denominada curvatura normal conforme, que é função biunívoca da curvatura normal e restrita ao intervalo $[0, 1]$.

Pesquisadores freqüentemente precisam modelar dados restritos ao intervalo $(0, 1)$, como, por exemplo, a taxa de desemprego, alguma medida de concentração de renda, proporções de pacientes infectados por alguma doença, etc. A distribuição beta fornece um aparato flexível para a modelagem de dados dessa natureza. Quando o interesse é trabalhar com modelos multivariados e estudar a distribuição conjunta de variáveis que estão compreendidas no intervalo $(0, 1)$, podemos fazer uso da distribuição Dirichlet, que é uma generalização da distribuição beta em situações em que a soma destas variáveis é sempre menor ou igual a um.

A principal contribuição da presente dissertação é avaliar a influência local através da curvatura normal conforme para dados correspondentes a variáveis independentes e idênticas-

mente distribuídas (i.i.d.) segundo a distribuição Dirichlet. A distribuição a ser estudada é multivariada com p componentes e, segundo a sugestão de Cook (1986) de perturbar variáveis respostas (ou covariáveis), iremos perturbar uma das $p - 1$ variáveis aleatórias, Y_j . O esquema de perturbação considerado é o esquema em que uma das componentes é modificada para permitir perturbações convenientes no modelo, essas perturbações sendo dos tipos aditivo e multiplicativo; outro esquema considerado foi o de perturbar a log-verossimilhança multiplicativamente.

Um outro objetivo deste trabalho é comparar as estimativas dos parâmetros da distribuição Dirichlet sem a presença de determinada observação influente com as estimativas dos parâmetros na presença de todas as observações, com a finalidade de verificar o quanto as estimativas se modificam com a retirada de qualquer observação influente, ou seja, de qualquer observação que produza mudanças bruscas nas estimativas dos parâmetros da distribuição.

1.1.1. Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta as definições e propriedades das distribuições beta e Dirichlet. O Capítulo 3 mostra a construção da curvatura normal conforme e as vantagens de utilizá-la para avaliar a influência local. No Capítulo 4 são apresentados os resultados da avaliação numérica do estudo da curvatura normal conforme como medida de influência local quando as observações são i.i.d. com distribuição Dirichlet, no Capítulo 5 apresentamos resultados de aplicações empíricas cujos dados são reproduzidos em Aitchison (2003) e no Capítulo 6 apresentamos as considerações finais do nosso trabalho. As funções de log-verossimilhança do modelo sem perturbação e dos esquemas com as perturbações aditiva e multiplicativa encontram-se no Apêndice A. No Apêndice B estão os detalhes das obtenções das primeiras e segundas derivadas dos esquemas com os dois tipos de perturbação. O Apêndice C inclui o programa de simulação utilizado neste trabalho. No Apêndice D são apresentadas as tabelas com os valores da matriz Y utilizadas na avaliação numérica e nas aplicações empíricas.

1.1.2. Suporte computacional

As avaliações numéricas realizadas nesta dissertação foram feitas através da linguagem de programação matricial `0x` em sua versão 3.30. Esta linguagem possui uma abrangente biblioteca de funções matemáticas e estatísticas. `0x` é distribuído gratuitamente para uso acadêmico e se encontra disponível no site www.doornik.com.

Os gráficos apresentados foram produzidos utilizando a ferramenta computacional `R` em sua versão 1.9.1. Esta ferramenta foi escolhida por ser uma linguagem de programação orientada a objetos, cujo ambiente é adequado à análise de dados e à produção de gráficos (Racine & Hyndman, 2002); ver <http://www.r-project.org>.

Capítulo 2

Distribuições beta e Dirichlet

2.1. Distribuição beta

2.1.1. Definição

A distribuição beta é muito utilizada para modelar experimentos aleatórios cujas variáveis assumem valores no intervalo $(0, 1)$, dada a grande flexibilidade de ajuste que seus parâmetros proporcionam.

Diz-se que uma variável aleatória contínua Y tem distribuição beta com parâmetros $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, i.e., $Y \sim \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$, se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1} \mathbf{I}_{(0,1)}(y), \quad (2.1)$$

em que Γ é a função gama e $\mathbf{I}$ representa a função indicadora.

Inicialmente, mostraremos que $f(y)$ é efetivamente uma densidade, ou seja, a função em (2.1) integra um. Seja a integral

$$I = \int_0^1 y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1} dy. \quad (2.2)$$

A expressão acima é facilmente obtida usando-se a função beta, definida por

$$\mathcal{B}(b, c) = \frac{1}{a^{b+c+1}} \int_0^a y^{b-1}(a-y)^{c-1} dy. \quad (2.3)$$

$a > 0$, sendo o valor da integral independentemente de a . Na expressão (2.2), $a = 1$, $b = \alpha_1$ e $c = \alpha_2$. Portanto, a integral (2.2) é igual a

$$I = \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Tendo em vista que

$$\mathcal{B}(b, c) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}, \quad (2.4)$$

a expressão (2.2) pode ser reescrita como

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (2.5)$$

Concluimos a partir de (2.5) que

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1} dy = 1.$$

Desta forma, $f(y)$ é, de fato, uma densidade.

Os parâmetros α_1 e α_2 são parâmetros de ajuste, pois podemos obter diferentes formas de densidade em $(0, 1)$ através da escolha de α_1 e α_2 . A distribuição beta inclui algumas distribuições conhecidas como casos particulares, tais como a distribuição uniforme ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), a distribuição poder ($\alpha_1 = 1$ ou $\alpha_2 = 1$) (Maia, Braga Junior & Cordeiro, 2003), a “distribuição arco seno” ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$) e as distribuições “arco seno generalizadas” ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) com $\alpha_1 \neq 1/2$ (Johnson, Kotz & Balakrishnan, 1995); mais geralmente, se $\alpha_1 = \alpha_2$ obtemos densidades simétricas. Assim, a distribuição beta pode ser vista como uma família de distribuições (Figura 2.1).

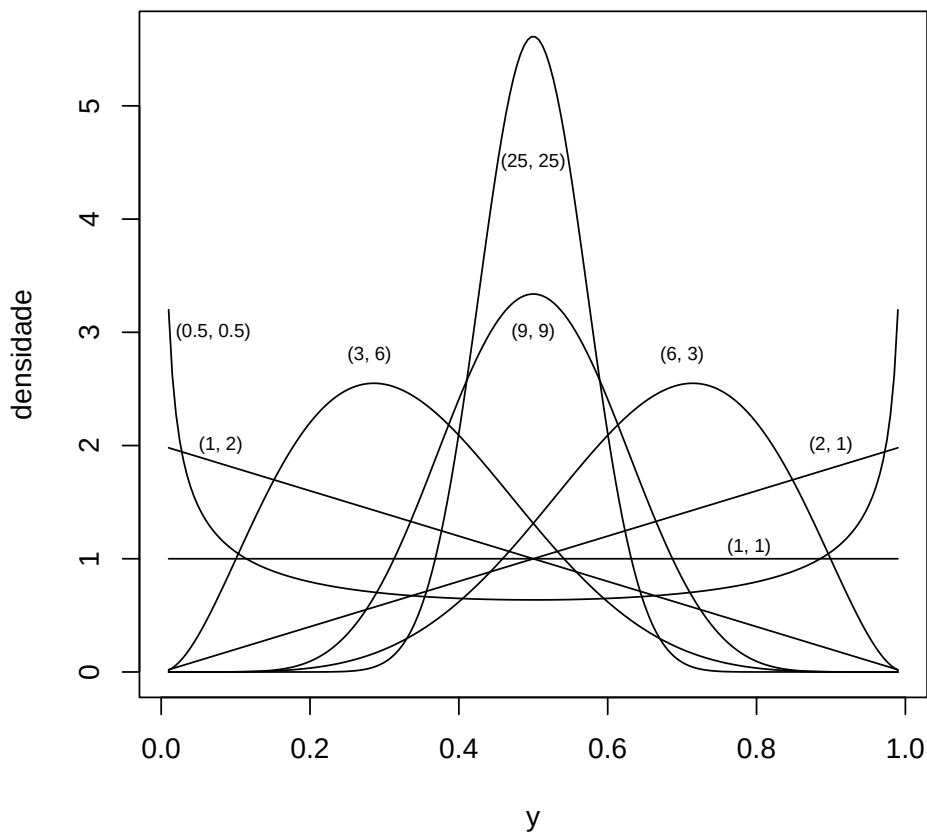


Figura 2.1. Gráfico da densidade beta para diferentes valores de α_1 e α_2 .

Quando fixamos α_2 , no lado esquerdo das Figuras 2.2 e 2.3, obtemos o gráfico de várias densidades beta geradas para diferentes escolhas de α_1 ; quando fixamos α_1 , no lado direito das Figuras 2.2 e 2.3, observamos gráficos de várias densidades beta geradas para diferentes escolhas de α_2 . Note que ao permutarmos α_1 e α_2 ocorre uma reflexão em torno da reta $y = 0.5$. Isso acontece devido à expressão da densidade como função de y e $1 - y$. Se fixarmos o parâmetro α_2 em $\alpha_2 \leq 1$ e $\alpha_1 \geq 1$ teremos uma função crescente, sendo que para $\alpha_2 < 1$ temos uma assíntota vertical em $y = 1$ e para $\alpha_2 = 1$ a função é limitada em $y = 1$ (lado

esquerdo da Figura 2.2). Quando fixamos o parâmetro α_2 em $\alpha_2 \geq 1$ e tomamos $\alpha_1 \geq 1$ a função passa a ter um máximo local em $y < 1$ (lado esquerdo da Figura 2.3).

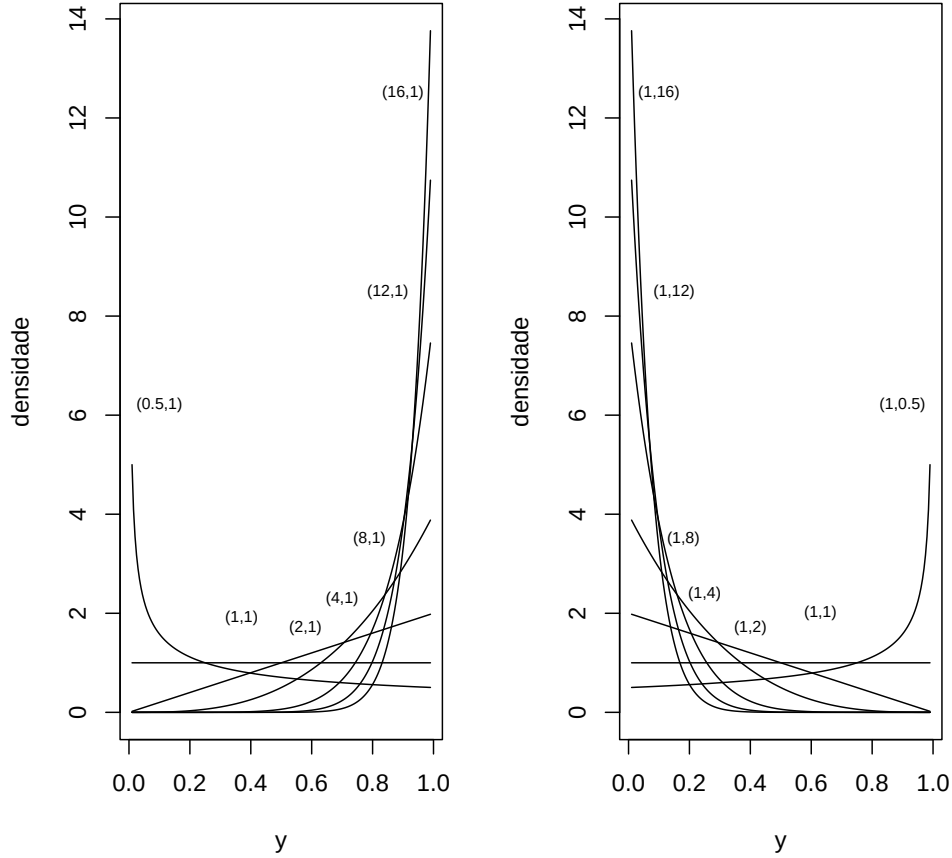


Figura 2.2. Gráfico da densidade beta para diferentes valores de α_1 e α_2 fixando $\alpha_2 = 1$ (esquerda) e $\alpha_1 = 1$ (direita).

2.1.2. Propriedades

Se Y tem distribuição beta (2.1), seu r -ésimo momento é dado por

$$E(Y^r) = \frac{\mathcal{B}(\alpha_1 + r, \alpha_2)}{\mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + r)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + r)}.$$

Em particular, a esperança de Y é dada por

$$E(Y) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

e a variância é dada por

$$\text{Var}(Y) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}.$$

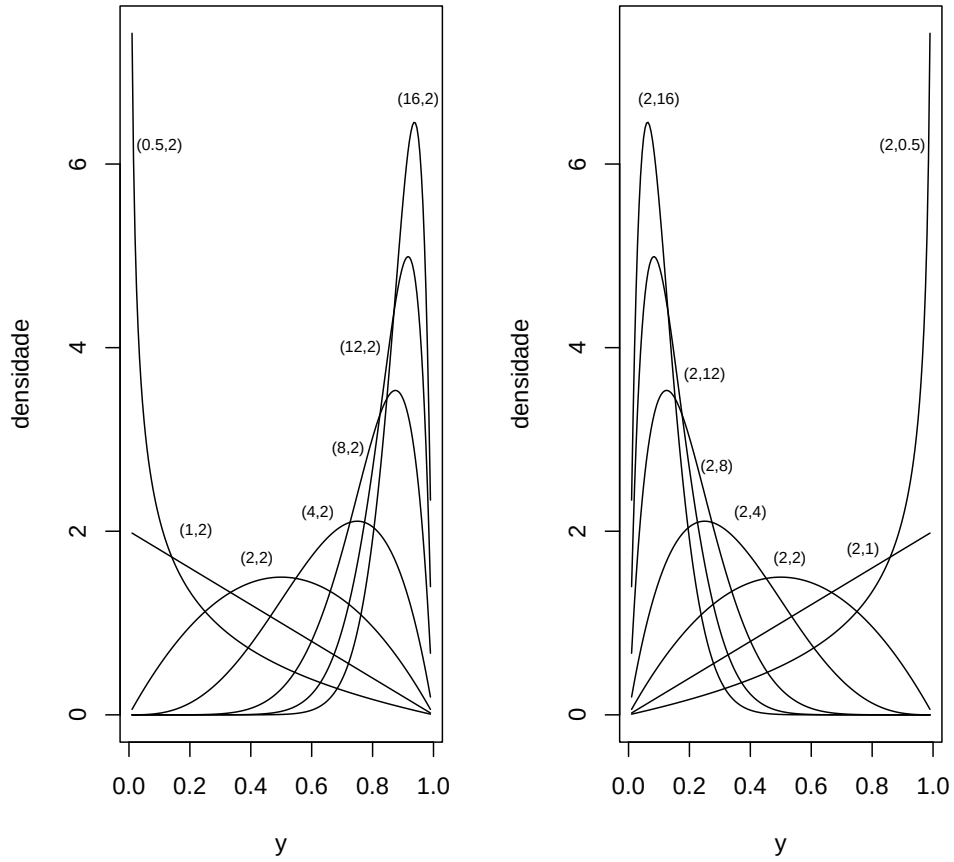


Figura 2.3. Gráfico da densidade beta para diferentes valores de α_1 e α_2 fixando $\alpha_2 = 2$ (esquerda) e $\alpha_1 = 2$ (direita).

Através da equação da variância podemos observar que variabilidade de Y diminui à medida que aumentamos os valores dos dois parâmetros; isto pode ser visto de forma mais clara na Figura 2.1 quando as distribuições são simétricas.

2.2. Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é uma generalização da distribuição beta e pode ser empregada no estudo da distribuição conjunta de variáveis que estejam compreendidas no intervalo $(0, 1)$ cuja soma é menor ou igual a um. A seguir mostraremos definições e algumas propriedades dessa distribuição.

2.2.1. Definição

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1}$ variáveis aleatórias. Essas variáveis são distribuídas de acordo com a

distribuição Dirichlet quando sua função densidade de probabilidade é definida por

$$f(\underline{y}) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j\right)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)} \left(\prod_{j=1}^{p-1} y_j^{\alpha_j-1}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j\right)^{\alpha_p-1}, & \underline{y} \in \mathfrak{R}, \\ 0, & \underline{y} \notin \mathfrak{R}, \end{cases} \quad (2.6)$$

em que $\underline{y} = (y_1, \dots, y_{p-1})$, os parâmetros α 's são estritamente positivos e a região $\mathfrak{R}$ é dada por

$$\mathfrak{R} = \left\{ (y_1, \dots, y_{p-1}) : y_j > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{p-1} y_j < 1 \right\}.$$

Sejam $X_1, \dots, X_p$, variáveis aleatórias tais que X_j tem distribuição gama com parâmetros α_j e β , ou seja, $X_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta)$, $j = 1, 2, \dots, p$; se $X_1, \dots, X_p$ são independentes, então $X_1 + \dots + X_p \sim \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_p, \beta)$. Uma forma natural para encontrarmos a função densidade de probabilidade da distribuição Dirichlet é usando o fato de que $(Y_1, \dots, Y_{p-1}) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ se

$$Y_j = \frac{X_j}{X_1 + \dots + X_p}.$$

Para provarmos este resultado, consideraremos o caso de duas variáveis aleatórias, ou seja, $p = 3$; o caso $p = 2$ pode ser encontrado em Mood, Graybill & Boes (1974, p. 208). Posteriormente, faremos a generalização para um valor finito de p . Um método útil para fazermos a transformação de variáveis é o método do jacobiano.

Defina $Y_1 = X_1/(X_1 + X_2 + X_3)$, $Y_2 = X_2/(X_1 + X_2 + X_3)$ e $Y_3 = X_3/(X_1 + X_2 + X_3)$. Assim,

$$\begin{aligned} X_1 &= h^{(1)}(Y_1) = Y_1 Y_3, \\ X_2 &= h^{(2)}(Y_2) = Y_2 Y_3, \\ X_3 &= h^{(3)}(Y_3) = Y_3(1 - Y_1 - Y_2). \end{aligned}$$

O determinante da matriz jacobiana (J) da transformação acima é

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_3}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_3}{\partial Y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_3 & 0 & Y_1 \\ 0 & Y_3 & Y_2 \\ -Y_3 & -Y_3 & 1 - Y_1 - Y_2 \end{vmatrix} \\ &= Y_3^2(1 - Y_1 - Y_2) + Y_1 Y_3^2 + Y_2 Y_3^2 \\ &= Y_3^2 - Y_1 Y_3^2 - Y_2 Y_3^2 + Y_1 Y_3^2 + Y_2 Y_3^2 \\ &= Y_3^2. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) &= y_3^2 \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{\beta^{\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_3)} (y_1 y_3)^{\alpha_1-1} (y_2 y_3)^{\alpha_2-1} [y_3(1-y_1-y_2)]^{\alpha_3-1} \times \\
&\quad e^{-\beta y_1 y_3} e^{-\beta y_2 y_3} e^{-\beta y_3(1-y_1-y_2)} \mathbb{I}_{\mathcal{D}}(y_1, y_2, y_3) \\
&= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} (1-y_1-y_2)^{\alpha_3-1} y_3^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} e^{-\beta y_3} \mathbb{I}_T(y_1, y_2) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_3) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} (1-y_1-y_2)^{\alpha_3-1} \mathbb{I}_T(y_1, y_2) \times \\
&\quad \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} y_3^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} e^{-\beta y_3} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_3),
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{D} = \{(y_1, y_2, y_3) : f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) > 0\}$ e $T = \{(u, v) : u > 0, v > 0, u + v < 1\}$. É fácil verificar que Y_1, Y_2 são independentes de Y_3 , que Y_1, Y_2 tem distribuição Dirichlet com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, e que Y_3 tem distribuição gama com parâmetros $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta)$.

Na transformação $y_1 = g_1(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 = g_2(x_1, x_2, x_3)$ e $y_3 = g_3(x_1, x_2, x_3)$, cada ponto em $\Xi = \{(x_1, x_2, x_3) : f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) > 0\}$ corresponde a um único ponto em $\mathcal{D}$, mas um ponto em $\mathcal{D}$ pode corresponder a mais de um ponto em Ξ .

A fim de estender a prova para um valor finito de p , definamos $Y_j = g(X_j) = \frac{X_j}{X_1 + \dots + X_p}$, para $j = 1, \dots, p-1$. Fazendo a transformação das variáveis na integral, obtemos as funções

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{X_1}{X_1 + \dots + X_p}, \\
Y_2 &= \frac{X_2}{X_1 + \dots + X_p}, \\
&\vdots \\
Y_{p-1} &= \frac{X_{p-1}}{X_1 + \dots + X_p}, \\
Y_p &= X_1 + \dots + X_p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
X_1 &= h^{(1)}(Y_1) &= Y_1 Y_p, \\
X_2 &= h^{(2)}(Y_2) &= Y_2 Y_p, \\
&\vdots \\
X_{p-1} &= h^{(p-1)}(Y_{p-1}) &= Y_{p-1} Y_p, \\
X_p &= h^{(p)}(Y_p) &= Y_p(1 - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_{p-1}).
\end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz jacobiana é

$$\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial Y_p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial X_{p-1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_{p-1}}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial X_{p-1}}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial X_p}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_p}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial X_p}{\partial Y_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & Y_p & 0 & \cdots & 0 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Y_p & Y_{p-1} \\ -Y_p & -Y_p & Y_p & \cdots & Y_p & 1 - \sum_{j=1}^{p-1} Y_j \end{vmatrix} \\
&= Y_p^{p-1} (1 - Y_1 - Y_2 - \cdots - Y_{p-1}) + Y_1 Y_p^{p-1} + Y_2 Y_p^{p-1} + \cdots + Y_{p-1} Y_p^{p-1} \\
&= Y_p^{p-1} - Y_1 Y_p^{p-1} - Y_2 Y_p^{p-1} - \cdots - Y_{p-1} Y_p^{p-1} + Y_1 Y_p^{p-1} + Y_2 Y_p^{p-1} + \cdots \\
&\quad + Y_{p-1} Y_p^{p-1} \\
&= Y_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f_{Y_1, \dots, Y_p}(y_1, \dots, y_p) &= y_p^{p-1} \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdots \frac{\beta^{\alpha_p}}{\Gamma(\alpha_p)} (y_1 y_p)^{\alpha_1-1} \times \cdots \times (y_{p-1} y_p)^{\alpha_{p-1}-1} \left[y_p \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j \right) \right]^{\alpha_p-1} \times \\
&\quad e^{-\beta y_1 y_p} \times \cdots \times e^{-\beta y_{p-1} y_p} e^{-\beta y_p (1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j)} \mathbf{I}_{\mathcal{D}}(y_1, \dots, y_p) \\
&= \frac{\beta^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)} y_1^{\alpha_1-1} \times \cdots \times y_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1} (1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j)^{\alpha_p-1} y_p^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p-1} \times \\
&\quad e^{-\beta y_p} \mathbf{I}_{\mathcal{P}}(y_1, \dots, y_{p-1}) \mathbf{I}_{(0, \infty)}(y_p) \\
&= \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)} y_1^{\alpha_1-1} \times \cdots \times y_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1} (1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j)^{\alpha_p-1} y_p^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p-1} \mathbf{I}_{\mathcal{P}}(y_1, \dots, y_{p-1}) \times \\
&\quad \frac{\beta^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p}}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right)} y_p^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p-1} e^{-\beta y_p} \mathbf{I}_{(0, \infty)}(y_p),
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{P} = \{(y_1, \dots, y_{p-1}) : y_j > 0, j = 1, \dots, p-1; j = 1 + \cdots + p-1 < 1\}$. É fácil ver que $Y_1, \dots, Y_{p-1}$ são independentes de Y_p , que $Y_1, \dots, Y_{p-1}$ tem distribuição Dirichlet com parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$, e que Y_p tem distribuição gama com parâmetros $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p, \beta)$.

Na transformação $y_1 = g_1(x_1, \dots, x_p), \dots, y_{p-1} = g_{p-1}(x_1, \dots, x_p), y_p = g_p(x_1, \dots, x_p)$, cada ponto em $\Xi = \{(x_1, \dots, x_p) : f_{X_1, \dots, X_p}(x_1, \dots, x_p) > 0\}$ corresponde a um único ponto em $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \{(y_1, \dots, y_p) : f_{Y_1, \dots, Y_p}(y_1, \dots, y_p) > 0\}$, mas um ponto em $\mathcal{D}$ pode corresponder a mais de um ponto em Ξ .

□

Um fato importante é que as densidades marginais da distribuição Dirichlet são beta.

Podemos demonstrar este fato a partir de

$$Y_j = \frac{X_j}{X_1 + X_2 + \cdots + X_p}.$$

Fazendo $U_1 = X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ e $U_2 = X_2 + \cdots + X_p \sim \Gamma(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p, \beta)$, temos

$$Y_1 = \frac{U_1}{U_1 + U_2}.$$

Sejam as funções

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{U_1}{U_1 + U_2}, \\ Y_2 &= U_1 + U_2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} U_1 &= h^{(1)}(Y_1) = \frac{Y_1 Y_2}{1 - Y_1}, \\ U_2 &= h^{(2)}(Y_2) = Y_2(1 - Y_1). \end{aligned}$$

Portanto, o jacobiano é

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial U_1}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial U_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 \\ Y_2 & 1 - Y_1 \end{vmatrix} \\ &= Y_2(1 - Y_1) + Y_1 Y_2 \\ &= Y_2 - Y_1 Y_2 + Y_1 Y_2 \\ &= Y_2. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= y_2^{\beta \alpha_1} \frac{\beta^{\alpha_2 + \cdots + \alpha_p}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p)} (y_1 y_2)^{\alpha_1 - 1} [y_2(1 - y_1)]^{\alpha_2 + \cdots + \alpha_p - 1} e^{-\beta y_1 y_2} e^{-\beta y_2(1 - y_1)} \mathbf{I}_{\mathcal{D}}(y_1, y_2) \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p)} y_1^{\alpha_1 - 1} (1 - y_1)^{\alpha_2 + \cdots + \alpha_p - 1} y_2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p - 1} e^{-\beta y_2} \mathbf{I}_{(0,1)}(y_1) \mathbf{I}_{(0,\infty)}(y_2) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p)} y_1^{\alpha_1 - 1} (1 - y_1)^{\alpha_2 + \cdots + \alpha_p - 1} \mathbf{I}_{(0,1)}(y_1) \times \\ &\quad \frac{\beta^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p}}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p)} y_2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p - 1} e^{-\beta y_2} \mathbf{I}_{(0,\infty)}(y_2). \end{aligned}$$

Logo, podemos verificar que a variável Y_1 tem distribuição beta com parâmetros α_1 e $\alpha_2 + \cdots + \alpha_p$, ou seja, $Y_1 \sim \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2 + \cdots + \alpha_p)$. Com isso, mostramos que as densidades marginais da distribuição Dirichlet são beta. □

A Figura 2.4 apresenta diferentes densidades Dirichlet bivariadas com parâmetros α_1, α_2 e α_3 , onde fixamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ e variamos α_3 . Observamos que a forma da densidade muda de acordo com as diferentes escolhas de α_3 . Podemos observar ainda que a variabilidade da distribuição diminui à medida que aumentamos o valor de α_3 . Na Figura 2.5 temos diferentes densidades Dirichlet quando os parâmetros são todos iguais, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Neste

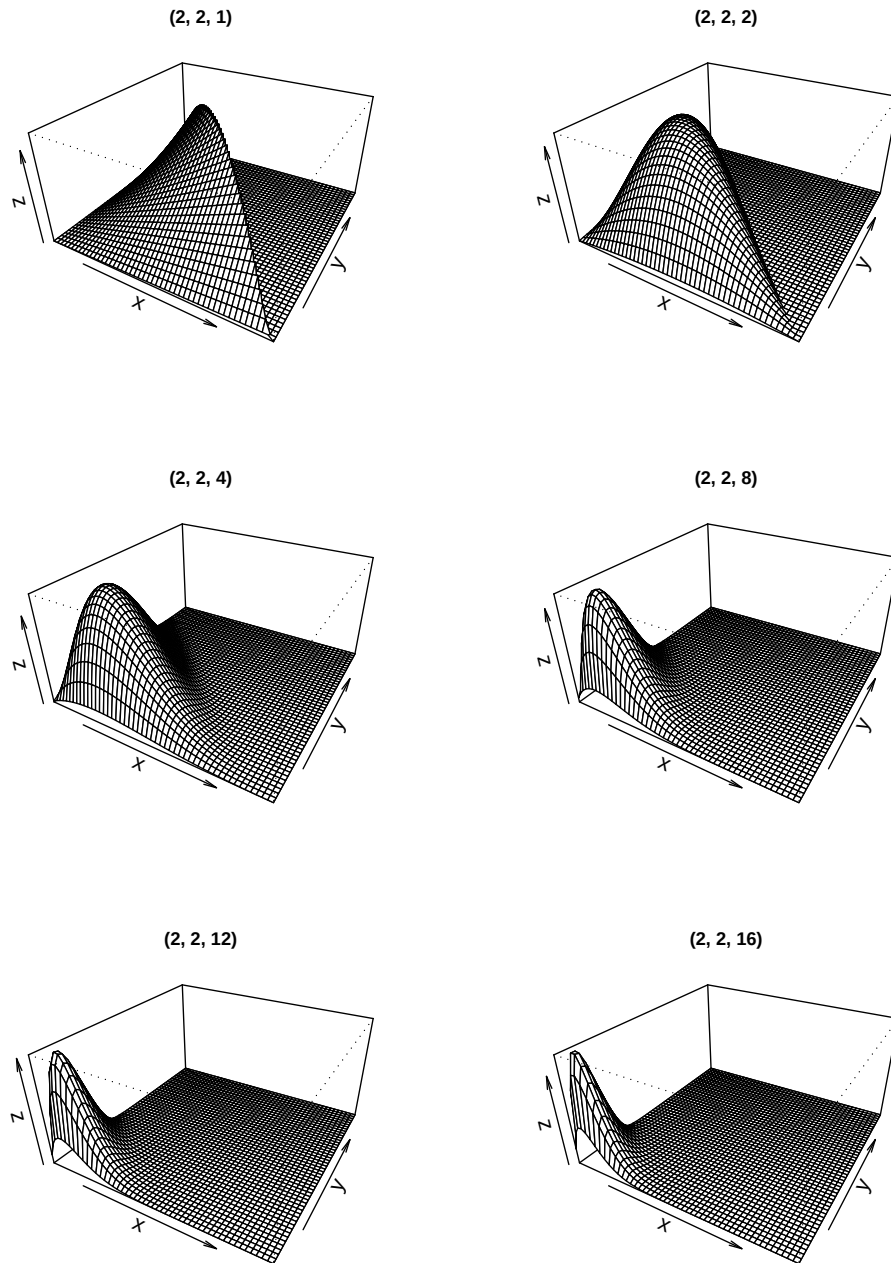


Figura 2.4 Gráfico da densidade Dirichlet bivariada no quadrado unitário para diferentes valores de α_3 fixando $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 2$.

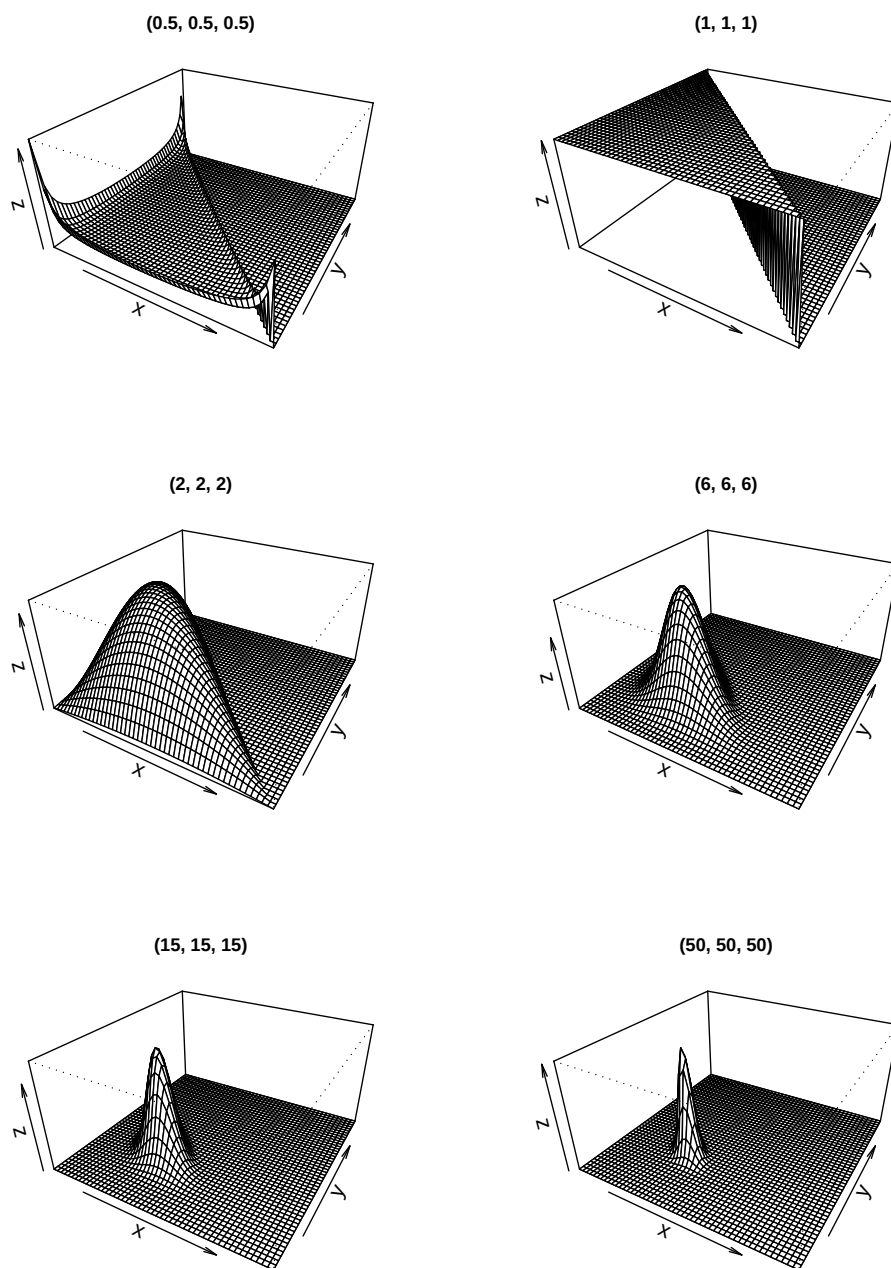


Figura 2.5 Gráfico da densidade Dirichlet bivariada no quadrado unitário para diferentes valores dos parâmetros com $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

caso, a variabilidade da distribuição diminui de acordo com o aumento dos valores dos 3 parâmetros.

2.2.2. Propriedades

Seja $\phi = \sum_{j=1}^p \alpha_j$. O valor esperado, a variância e a covariância da distribuição Dirichlet são, respectivamente,

$$E(Y_j) = \frac{\alpha_j}{\phi}, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad (2.7)$$

$$\text{Var}(Y_j) = \frac{\alpha_j(\phi - \alpha_j)}{\phi^2(\phi + 1)}, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad (2.8)$$

$$\text{Cov}(Y_j, Y_h) = -\frac{\alpha_j \alpha_h}{\phi^2(\phi + 1)}, \quad j \neq h, \quad j, h = 1, \dots, p-1. \quad (2.9)$$

Inicialmente, iremos demonstrar as propriedades acima considerando o caso de apenas três variáveis aleatórias, por simplicidade de cálculo. A generalização para um valor finito qualquer de p é imediata. Primeiramente, para provar que (2.6) é uma função densidade de probabilidade avaliaremos a integral

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-y_3} \int_0^{1-y_2-y_3} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} y_3^{\alpha_3-1} (1-y_1-y_2-y_3)^{\alpha_4-1} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Reescrevendo a expressão acima temos

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-y_3} \left[\int_0^{1-y_2-y_3} y_1^{\alpha_1-1} (1-y_1-y_2-y_3)^{\alpha_4-1} dy_1 \right] y_2^{\alpha_2-1} y_3^{\alpha_3-1} dy_2 dy_3. \quad (2.10)$$

A integral entre colchetes que aparece em (2.10) é facilmente obtida usando-se a função beta, definida em (2.3).

Na expressão (2.10), $a = 1 - y_2 - y_3$, $b = \alpha_1$ e $c = \alpha_4$. Portanto, a integral (2.10) é igual a

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-y_3} \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_4) (1-y_2-y_3)^{\alpha_1+\alpha_4-1} y_2^{\alpha_2-1} y_3^{\alpha_3-1} dy_2 dy_3.$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-y_3} \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_4) y_2^{\alpha_2-1} (1-y_2-y_3)^{\alpha_1+\alpha_4-1} dy_2 \right] y_3^{\alpha_3-1} dy_3. \quad (2.11)$$

Usando mais uma vez a função beta em (2.11), ou seja, fazendo $a = 1 - y_3$, $b = \alpha_2$ e $c = \alpha_1 + \alpha_4$, obtemos

$$I = \int_0^1 \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_4) \mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_4) y_3^{\alpha_3-1} (1-y_3)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4-1} dy_3. \quad (2.12)$$

Aplicando-se novamente a função beta a (2.12), isto é, $a = 1$, $b = \alpha_3$ e $c = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$, obtemos

$$I = \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_4) \mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_4) \mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4). \quad (2.13)$$

A partir de (2.4), a expressão (2.13) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_4)} \times \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)} \times \frac{\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Concluimos, a partir de (2.14), que

$$\int_0^1 \int_0^{1-y_3} \int_0^{1-y_2-y_3} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} y_3^{\alpha_3-1} (1-y_1-y_2-y_3)^{\alpha_4-1} dy_1 dy_2 dy_3 = 1.$$

O valor esperado de $Y_1^q Y_2^t Y_3^v$ é dado por

$$\begin{aligned} E(Y_1^q Y_2^t Y_3^v) &= \int_0^1 \int_0^{1-y_3} \int_0^{1-y_2-y_3} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} y_1^{q+\alpha_1-1} y_2^{t+\alpha_2-1} y_3^{v+\alpha_3-1} \times \\ &\quad (1-y_1-y_2-y_3)^{\alpha_4-1} dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aplicando-se a esta integral o mesmo procedimento utilizado nos resultados obtidos acima, temos que

$$E(Y_1^q Y_2^t Y_3^v) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} \times \frac{\Gamma(q + \alpha_1)\Gamma(t + \alpha_2)\Gamma(v + \alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(q + \alpha_1 + t + \alpha_2 + v + \alpha_3 + \alpha_4)}. \quad (2.16)$$

Para $q = 1$, $t = 0$ e $v = 0$, (2.16) fornece o valor esperado de Y_1 :

$$E(Y_1) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} \times \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 1)}. \quad (2.17)$$

A expressão (2.17) pode ser simplificada aplicando-se uma propriedade da função gama: $\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y)$. Assim, (2.15) se reduz a

$$E(Y_1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4},$$

que corresponde a (2.7) quando $p = 4$. Para $q = 0$, $t = 1$, $v = 0$ e $q = 0$, $t = 0$, $v = 1$ obtemos, a partir de (2.16), os valores esperados de Y_2 e Y_3 , respectivamente. Para obtermos a variância de Y_1 , por exemplo, basta fazer $q = 2$, $t = 0$ e $v = 0$ para encontrar $E(Y_1^2)$. Portanto,

$$E(Y_1^2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} \times \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2)}.$$

Seja $\phi = \sum_{j=1}^4 \alpha_j$. Temos que

$$\begin{aligned} E(Y_1^2) &= \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} \times \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{(\phi + 1)\phi\Gamma(\phi)} \\ &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)}{\phi(\phi + 1)}. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de Y_1 é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_1) &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)}{\phi(\phi + 1)} - \frac{\alpha_1^2}{\phi^2} \\ &= \frac{\phi\alpha_1(\alpha_1 + 1) - \alpha_1^2(\phi + 1)}{\phi^2(\phi + 1)} \\ &= \frac{\alpha_1(\phi - \alpha_1)}{\phi^2(\phi + 1)}, \end{aligned}$$

que corresponde a (2.8) quando $p = 4$.

Para obtermos a covariância entre Y_1 e Y_2 , por exemplo, basta tomar $q = 1$, $t = 1$ e $v = 0$ para encontrar $E(Y_1 Y_2)$, já que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$. Então,

$$\begin{aligned} E(Y_1 Y_2) &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} \times \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + 1 + \alpha_2 + 1 + \alpha_3 + \alpha_4)} \\ &= \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)} \times \frac{\alpha_1\Gamma(\alpha_1)\alpha_2\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\alpha_4)}{(\phi + 1)\phi\Gamma(\phi)} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\phi(\phi + 1)}. \end{aligned}$$

Logo, a covariância entre Y_1 e Y_2 será dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\phi(\phi + 1)} - \frac{\alpha_1}{\phi} \frac{\alpha_2}{\phi} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2\phi - \alpha_1\alpha_2(\phi + 1)}{\phi^2(\phi + 1)} \\ &= -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\phi^2(\phi + 1)}, \end{aligned}$$

que corresponde a (2.9) quando $p = 4$.

Generalizando para um valor finito p qualquer, teremos a integral escrita da seguinte forma:

$$I = \prod_{j=1}^{p-1} \mathcal{B}_j(b, c),$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(b, c) &= \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_p), \\
\mathcal{B}_2(b, c) &= \mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_p), \\
\mathcal{B}_3(b, c) &= \mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_p), \\
&\vdots \\
\mathcal{B}_{p-1}(b, c) &= \mathcal{B}(\alpha_{p-1}, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-2} + \alpha_p).
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade da função beta (2.4), a integral I pode ser reescrita como

$$I = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j\right)}. \quad (2.18)$$

Concluimos, a partir de (2.18), que

$$\int_0^1 \cdots \int_0^{1-\sum_{j=2}^{p-1} y_j} \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j\right)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)} y_1^{\alpha_1-1} \times \cdots \times y_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1} \left(1 - \sum_{j=2}^{p-1} y_j\right)^{\alpha_p-1} dy_1 \times \cdots \times dy_{p-1}$$

é igual a um. O valor esperado de $Y_1^{q_1} \times \cdots \times Y_{q-1}^{q_{p-1}}$, após algumas simplificações, é dado por

$$E(Y_1^{q_1} \times \cdots \times Y_{q-1}^{q_{p-1}}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j\right)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)} \frac{\Gamma(p_1 + \alpha_1) \times \cdots \times \Gamma(p_{p-1} + \alpha_{p-1}) \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(p_1 + \alpha_1 + \cdots + p_{p-1} + \alpha_{p-1} + \alpha_p)}.$$

Podemos, assim, obter (2.7), (2.8) e (2.9).

2.2.3. Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Dirichlet

Sejam amostras i.i.d. de tamanho n das variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1}$, as quais são distribuídas conjuntamente de acordo com a distribuição Dirichlet com função densidade de probabilidade (2.6). A função de verossimilhança desta amostra é dada por

$$L = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j\right)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)} \prod_{j=1}^{p-1} Y_{ij}^{\alpha_j-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} Y_{ij}\right)^{\alpha_p-1} \right\}. \quad (2.19)$$

As estatísticas suficientes para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ são as médias geométricas de Y_{ij} (e.g., Barbosa, 1977),

$$G_j = \left\{ \prod_{i=1}^n Y_{ij} \right\}^{1/n}, \quad j = 1, \dots, p-1,$$

$$G_p = \left\{ \prod_{i=1}^n Y_{ij} \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} Y_{ij} \right) \right\}^{1/n}.$$

Portanto, estas quantidades sintetizam toda a informação da amostra.

O logaritmo (base natural) da função de verossimilhança (2.19) pode ser escrito como

$$\ell = \log L = \sum_{i=1}^n \left\{ \log \Gamma \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j \right) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) + \sum_{j=1}^p (\alpha_j - 1) \log G_j \right\}. \quad (2.20)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Dirichlet são obtidos maximizando-se (2.20) com respeito aos parâmetros α 's. A derivada parcial de (2.20) em relação a α_j é

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log \Gamma(\phi) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log \prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j) + \sum_{j=1}^p (\alpha_j - 1) \log G_j \right\}. \quad (2.21)$$

O valor de cada α_j , $j = 1, \dots, p-1$, que torna (2.21) igual a zero é a solução da equação

$$\log \psi(\hat{\phi}) - \psi(\hat{\alpha}_j) + G_j, \quad (2.22)$$

onde $\psi(\phi) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log \Gamma(\phi)$, ψ representando a função digama.

O sistema de equações em (2.22) é não-linear nos parâmetros α 's e não pode ser solucionado analiticamente, uma vez que a solução não possui forma fechada. É necessário, portanto, maximizar a função de log-verossimilhança numericamente através de um algoritmo iterativo (e.g., Newton-Raphson, BFGS, etc.).

Capítulo 3

Curvatura normal conforme e influência local

3.1. Introdução

Cook (1986) propôs um método de diagnóstico imensamente poderoso e simples de usar para avaliar a influência local de uma determinada perturbação a partir das suposições de um modelo estatístico. A técnica de influência local proposta por Cook foi aplicada com sucesso em várias análises utilizando diferentes esquemas de perturbação. Os principais exemplos são as aplicações às análises de diagnóstico e de influência em análise de variância do modelo misto (Beckman, Nachtsheim & Cook, 1987), em transformações de regressão (Lawrance, 1988), em modelos lineares generalizados (Thomas & Cook, 1990), em regressão não-linear (St Laurent & Cook, 1993), em análise de componentes principais (Shi, 1997), em modelos lineares com restrições nos parâmetros na forma de desigualdades lineares (Paula, 1993), em modelos elípticos lineares (Liu, 2000; Galea, Paula & Bolfarine, 1997; Galea, Paula & Uribe-Opazo, 2003), em processos GARCH (Zhang, 2004), entre outros.

O método proposto por Cook consiste em avaliar o comportamento da função de deslocamento da verossimilhança. Neste sentido, a curvatura normal (C_l) proposta por Cook é calculada ao longo de diferentes direções l no ponto ótimo da função e quando valores altos de C_l são obtidos conclui-se que existe forte influência local. O maior interesse reside na direção que corresponde ao máximo de C_l , pois as direções que fornecem curvaturas normais maiores revelam a importância da perturbação (Poon & Poon, 1999).

Apesar do método ser de grande utilidade, várias questões foram levantadas em Cook (1986). Por exemplo, a escolha do esquema de perturbação (Beckman, 1986), a dependência dos possíveis valores da medida C_l das perturbações permitidas (Loynes, 1986), a não-invariância da curvatura normal sob uma mudança uniforme na escala (Loynes, 1986). Há poucos critérios para avaliar a grandeza das curvaturas normais e o tamanho relativo das componentes das direções que correspondem às curvaturas normais maiores (Prescott, 1986). Por mais que em alguns casos a falta de critérios objetivos não cause dificuldades significativas, a existência de tais critérios pode realçar a aplicabilidade do método (Poon & Poon, 1999).

Uma modificação da curvatura normal de Cook foi introduzida por Shall & Dune (1992). Estes autores demonstraram a relação entre os conceitos de colinearidade e influência local no diagnóstico de regressão. A curvatura modificada é invariante sob reparametrização do esquema de perturbação e tem limite superior em 1. Entretanto, tal curvatura não possui um embasamento geométrico claro, diferentemente da curvatura normal de Cook, e, somente em circunstâncias especiais, os diagnósticos das duas curvaturas são equivalentes (Poon & Poon, 1999).

Poon & Poon (1999) desenvolveram uma metodologia em que as limitações do método de Cook são solucionadas. Eles construíram uma medida através de uma geometria simples, denominada curvatura normal conforme, que é função biunívoca da curvatura normal e assume valores no intervalo $[0, 1]$. Uma das várias propriedades deste método é a invariância conforme (Kobayashi, 1972), ou seja, invariância sob uma transformação conforme. Com

base nesta e em outras propriedades, valores críticos podem ser obtidos para a influência local de observações. Além disso, através da curvatura normal conforme, é possível construir uma medida agregada para cada vetor básico do espaço de perturbação e diferentes autovetores podem ser usados na agregação. Quando todos os autovetores são considerados, a contribuição agregada para cada vetor de perturbação básico é equivalente à sua curvatura normal conforme (Poon & Poon, 1999). Nas seções seguintes serão apresentadas as definições de curvatura normal e de curvatura normal conforme.

3.2. Curvatura normal conforme

3.2.1. Curvatura normal

Seja $\ell(\theta)$ a log-verossimilhança para o modelo sem perturbação, onde θ é um vetor $p \times 1$ de parâmetros desconhecidos. Seja $\ell(\theta|\omega)$ a log-verossimilhança correspondente ao modelo perturbado para um dado ω , onde $\omega^\top = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ é um vetor $n \times 1$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, em que Ω representa o conjunto de perturbações relevantes. Supõe-se que há ω_0 tal que $\ell(\theta|\omega_0) = \ell(\theta)$ para todo θ . Sejam $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}_\omega$ estimadores de máxima verossimilhança de θ sob $\ell(\theta|\omega_0)$ e $\ell(\theta|\omega)$, respectivamente. A função de deslocamento da verossimilhança (Cook, 1986) é dada por

$$f(\omega) = 2\{\ell(\hat{\theta}|\omega_0) - \ell(\hat{\theta}_\omega|\omega_0)\}$$

e pode ser usada para avaliar a influência de perturbações pequenas. Seja

$$\alpha(\omega) = (\omega^\top, f(\omega))^\top$$

o gráfico da influência, formado pelos valores de um vetor $(n+1) \times 1$. Cook (1986) propôs a curvatura normal para avaliar a influência local da perturbação. A curvatura normal do gráfico α na direção de l no ponto ω_0 é

$$C_l = C(l, l) = \frac{l^\top H_f l}{l^\top (I_n + \nabla_f \nabla_f^\top) l (1 + |\nabla_f|^2)^{1/2}} \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (3.1)$$

onde ∇_f é o vetor gradiente, I_n é a matriz identidade $n \times n$ e

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \omega_i \partial \omega_t} \right)$$

é a matriz hessiana de f com relação a ω .

Seja ω_0 um ponto crítico do gráfico, então $\nabla_f(\omega_0) = 0$. A escolha de l é feita tal que $l^\top l = 1$. Portanto, a equação (3.1) se reduz a

$$C_l = l^\top H_f l \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (3.2)$$

Cook (1986) propôs usar a curvatura normal para estudar características de gráficos de influência. De acordo com a equação (3.2), deduz-se que

$$C_l = -2(l^\top \ddot{F} l) \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (3.3)$$

onde $\ddot{F}$ é uma matriz $n \times n$ com elemento típico $\partial^2 \ell(\hat{\theta}_\omega) / \partial \omega_i \partial \omega_t$. A matriz $\ddot{F}$ pode ser reescrita como

$$\ddot{F} = \Delta^\top (\ddot{L})^{-1} \Delta,$$

onde Δ é uma matriz $p \times n$ e $\ddot{L}$ é uma matriz $p \times p$ cujos elementos são dados, respectivamente, por

$$\Delta_{it} = \frac{\partial^2 \ell(\theta|\omega)}{\partial \theta_i \partial \omega_t} \quad \text{e} \quad \ddot{L}_{it} = \frac{\partial^2 \ell(\theta|\omega)}{\partial \theta_i \partial \theta_t},$$

avaliados em $\theta = \hat{\theta}$ e $\omega = \omega_0$. Então, a equação (3.3) pode ser escrita como (Cook, 1986)

$$C_l = -2\{l^\top \Delta^\top (\ddot{L})^{-1} \Delta l\} \Big|_{\theta=\hat{\theta}, \omega=\omega_0}. \quad (3.4)$$

A matriz $-\ddot{F}$ é positiva semidefinida em ω_0 devido à função de deslocamento da verossimilhança ter seu mínimo neste ponto. Quando l tem a direção do autovetor correspondente ao maior autovalor de $-\ddot{F}$, a curvatura normal C_l atinge seu máximo.

3.2.2. Curvatura normal conforme e suas propriedades

A curvatura normal conforme no ponto ω_0 do gráfico α na direção de l é

$$B_l = \frac{1}{l^\top (I_n + \nabla f \nabla f^\top) l} \frac{l^\top H_f l}{\|H_f\|} \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (3.5)$$

onde $\|H_f\| = \sqrt{\text{tr}(H_f^2)}$. Das equações (3.2) – (3.5), deduz-se que a curvatura normal conforme do gráfico na direção de l no ponto crítico ω_0 é

$$B_l = \frac{l^\top H_f l}{\|H_f\|} \Big|_{\omega=\omega_0} = - \frac{l^\top \ddot{F} l}{\sqrt{\text{tr}(\ddot{F}^2)}} \Big|_{\omega=\omega_0} = - \frac{l^\top \Delta^\top (\ddot{L})^{-1} \Delta l}{\sqrt{\text{tr}\{(\Delta^\top (\ddot{L})^{-1} \Delta)^2\}}} \Big|_{\theta=\hat{\theta}, \omega=\omega_0}. \quad (3.6)$$

A curvatura normal conforme possui muitas propriedades que estão resumidas em alguns teoremas em Poon & Poon (1999). O interesse inicial é na transformação conforme, que é uma transformação múltipla de uma transformação ortogonal. Uma matriz M de dimensão $n \times n$ é dita conforme se houver um número positivo τ tal que $M^\top M = \tau I_n$. A transformação aqui foi considerada como “modificação do esquema de perturbação” (Cook, 1986). Um exemplo de reparametrização conforme visto em Poon & Poon (1999) é $\phi(\omega) = M\omega + c$, tal que M é a matriz conforme. Por exemplo, na análise de regressão linear, quando $\omega^\top = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ é o vetor de perturbação para uma amostra n (Cook (1986), section 4), a curvatura normal conforme é invariante com respeito à reparametrização $(1 + \omega_i)/2$, isso foi estudado por Loynes (1986). Neste caso, $c = (1/2, \dots, 1/2)$ é um vetor $n \times 1$ e $M = \text{diag}(1/2, \dots, 1/2)$ uma matriz $n \times n$.

Seja Ω o conjunto das perturbações. Se a transformação de Ω é conforme no ponto crítico ω_0 no gráfico de f sobre Ω , então a curvatura normal conforme em qualquer direção é invariante sob transformação.

Para qualquer direção l , B_l satisfaz a condição de que $0 \leq |B_l| \leq 1$, ou seja, B_l é uma medida normalizada e, assim, torna-se mais fácil a interpretação do seu valor. Além disso, se $e_1, \dots, e_n$ são autovalores de $-\ddot{F}$, B_{e_i} corresponde ao autovalor normalizado $\hat{\lambda}_i$, que é dado por

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}}. \quad (3.7)$$

Note que $\sum_i B_{e_i}^2 = 1$ e, assim, se as curvaturas normais conformes para todos os autovetores forem idênticas, então todas serão iguais a $1/\sqrt{n}$. Com isso, a avaliação da influência local pode ser feita de uma forma mais objetiva e sistemática.

3.3. Avaliação da influência local

Foi visto que a curvatura normal C_l e a direção associada l são usadas para avaliar a influência local. Assim, Cook (1986) sugere examinar o autovetor $e_{\max}$ com a curvatura normal máxima $C_{\max}$ independentemente do seu tamanho.

Quando l tiver a direção do autovetor $e_{\max}$ que corresponde ao maior autovalor, a curvatura normal conforme B_l assumirá o valor máximo. A curvatura normal e a curvatura normal conforme são medidas de diagnóstico equivalentes, diferindo apenas por um fator positivo. Entretanto, é preferível utilizar a curvatura normal conforme devido à sua propriedade de invariância e à sua natureza normalizada, que facilitam sua interpretação. Além disso, Poon & Poon (1999) sugerem que um valor de referência seja calculado para comparar os efeitos de B_{e_i} e B_l em vários níveis. Portanto, faz-se necessária a seguinte definição: um autovetor e é q -influyente se $|B_e| \geq q/\sqrt{n}$.

3.3.1. Influência de autovetor individual

Nós podemos verificar de forma mais abrangente se um autovetor é influyente. Seja E_t o t -ésimo vetor de perturbação básico do espaço de perturbação, cujo t -ésimo elemento é 1 e todos os restantes são iguais a 0. Seja $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ uma seqüência de autovetores ortonormais com autovalor normalizado correspondente $\hat{\lambda}_i$ dado na equação (3.7). Seja $\{E_t : 1 \leq t \leq n\}$ uma seqüência de vetores de perturbação básicos ortonormais com relação à primeira forma fundamental (Thorpe, 1979) e o produto interno usual. Esta forma fundamental é uma matriz simétrica representada por

$$D_{it} = \delta_{it} + \frac{\partial f}{\partial \omega_i} \frac{\partial f}{\partial \omega_t},$$

onde $\delta_{it} = 1$ quando $i = t$ e para $i \neq t$, $\delta_{it} = 0$.

Quando $e_i = \sum_{t=1}^n a_{it} E_t$, temos $\sum_{t=1}^n a_{it}^2 = 1$. Isto significa que, para qualquer i fixo, se a contribuição de todos os a_{it} for uniforme, então $|a_{it}| = 1/\sqrt{n}$. Com isso, pode-se construir, inclusive, o valor de referência. Este método pode ser aplicado para estudar $e_{\max}$ ou quaisquer individuais autovetores influentes (Poon & Poon, 1999).

Os vetores de perturbação básicos próximos de e são encontrados para analisar a contribuição do vetor de perturbação básico para a influência do autovetor influente e .

3.3.2. Contribuição agregada de vetores de perturbação básicos

De forma mais geral, a análise dos vetores de perturbação básicos pode ser feita para todos os autovetores influentes. Definindo $\mu_i = |\hat{\lambda}_i|$ podemos organizar os valores absolutos dos autovalores normalizados como

$$\mu_{\max} = \mu_1 \geq \dots \geq \mu_k \geq q/\sqrt{n} > \mu_{k+1} \dots \mu_n \geq 0$$

e usar a_{it} para denotar o t -ésimo elemento do autovetor normalizado correspondente a μ_i .

A contribuição agregada do t -ésimo vetor de perturbação básico para todos os autovetores q -influentes é

$$m(q)_t = \sqrt{\sum_{i=1}^k \mu_i a_{it}^2},$$

onde $1 \leq t \leq n$. Poon & Poon (1999) sugerem comparar a contribuição agregada $m(q)_t$ com

$$\bar{m}(q) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \mu_i},$$

ou seja, se a contribuição de todos os vetores de perturbação básicos é uniforme, então cada contribuição deve ser igual a $\bar{m}(q)$. Isto significa que, ao analisarmos a contribuição $\bar{m}(q)$, determinamos a significância da contribuição individual dos vetores de perturbação básicos.

Poon & Poon (1999) consideram duas possibilidades. Uma é fazer com que q seja suficientemente grande para que a contribuição individual dos vetores de perturbação básicos seja considerada apenas para $e_{\max}$. Outra é fazer $q = 0$ de modo que todos os autovalores sejam incluídos na análise.

Quando $q = 0$, a contribuição $m(q)_t$ é chamada de contribuição total e é dada por

$$m_t = m(0)_t = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i a_{it}^2}.$$

Poon & Poon (1999) sugerem comparar a contribuição total $m(0)_t$ com

$$\bar{m} = \bar{m}(0) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} / n \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2},$$

ou seja, se a contribuição de todos os parâmetros básicos de perturbação for uniforme, então cada contribuição total deve ser igual a $\bar{m}(0)$.

A contribuição total m_t e a curvatura normal conforme B_{E_t} do vetor de perturbação básico são altamente relacionadas. Se todos os autovalores forem não-negativos, então B_{E_t}

será igual ao quadrado da contribuição total do t -ésimo vetor de perturbação básico. Resumindo, se a matriz hessiana H_f é positiva semi-definida e todos os autovalores são não-negativos, então $m_t^2 = B_{E_t} \forall t$.

Se a contribuição de todos B_{E_t} 's for uniforme, então cada contribuição é deve ser igual a

$$b = \text{tr}(\Pi)/n\sqrt{\text{tr}(\Pi^2)},$$

onde Π representa a segunda forma fundamental (Thorpe, 1979); esta forma fundamental é uma matriz simétrica dada por

$$\Pi_{it} = \frac{1}{(1 + |\nabla_f|^2)^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_i \partial \omega_t},$$

onde $|\nabla_f|$ representa a norma do vetor gradiente de f .

Sob essa condição, $b = \bar{m}^2$. Logo, b pode ser utilizado como valor crítico para as curvaturas dos vetores de perturbação básicos.

3.4. Esquemas de perturbação

Para o nosso estudo utilizamos dois esquemas de perturbação, um em que uma das componentes é modificada através das formas aditiva e multiplicativa e outro em que perturbamos a log-verossimilhança de forma multiplicativa. Vamos apresentar nesta seção a forma como cada esquema foi trabalhado. Seja Y a matriz $n \times p$ cuja i -ésima linha representa a i -ésima observação na amostra. Para o esquema em que perturbamos uma das componentes da matriz Y , apresentaremos as matrizes para cada tipo de perturbação, aditiva 1, aditiva 2 e multiplicativa. Para o esquema em que perturbamos a função de log-verossimilhança será apresentado apenas a função com perturbação multiplicativa. O modelo é perturbado para um determinado ω , onde $\omega^\top = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. As funções de log-verossimilhança e os cálculos das derivadas estão apresentadas nos Apêndices A e B, respectivamente.

▷ Matriz Y para o modelo sem perturbação:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1p-1} & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2p-1} & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{np-1} & Y_{np} \end{pmatrix}.$$

▷ Matriz Y para o esquema de perturbação aditiva 1:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} + \omega_1 & Y_{12} - \frac{\omega_1}{p-2} & \dots & Y_{1p-1} - \frac{\omega_1}{p-2} & Y_{1p} \\ Y_{21} + \omega_2 & Y_{22} - \frac{\omega_2}{p-2} & \dots & Y_{2p-1} - \frac{\omega_2}{p-2} & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} + \omega_n & Y_{n2} - \frac{\omega_n}{p-2} & \dots & Y_{np-1} - \frac{\omega_n}{p-2} & Y_{np} \end{pmatrix}.$$

▷ Matriz Y para o esquema de perturbação aditiva 2:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} + \omega_1 & Y_{12} - \frac{\omega_1}{p-1} & \dots & Y_{1p-1} - \frac{\omega_1}{p-1} & Y_{1p} - \frac{\omega_1}{p-1} \\ Y_{21} + \omega_2 & Y_{22} - \frac{\omega_2}{p-1} & \dots & Y_{2p-1} - \frac{\omega_2}{p-1} & Y_{2p} - \frac{\omega_2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} + \omega_n & Y_{n2} - \frac{\omega_n}{p-1} & \dots & Y_{np-1} - \frac{\omega_n}{p-1} & Y_{np} - \frac{\omega_n}{p-1} \end{pmatrix}.$$

- Para os esquemas de perturbação aditiva, $\omega^\top = \omega_0^\top = (0, 0, \dots, 0)$.

▷ Matriz Y para o esquema de perturbação multiplicativa:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \times \omega_1 & Y_{12} \times \frac{(1-Y_{11}\omega_1)}{1-Y_{11}} & \dots & Y_{1p-1} \times \frac{(1-Y_{11}\omega_1)}{1-Y_{11}} & Y_{1p} \\ Y_{21} \times \omega_2 & Y_{22} \times \frac{(1-Y_{21}\omega_2)}{1-Y_{21}} & \dots & Y_{2p-1} \times \frac{(1-Y_{21}\omega_2)}{1-Y_{21}} & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} \times \omega_n & Y_{n2} \times \frac{(1-Y_{n1}\omega_n)}{1-Y_{n1}} & \dots & Y_{np-1} \times \frac{(1-Y_{n1}\omega_n)}{1-Y_{n1}} & Y_{np} \end{pmatrix}.$$

▷ Esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança:

$$\ell(\alpha|\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \ell_i(\alpha).$$

- Para os esquemas de perturbação multiplicativa, $\omega^\top = \omega_0^\top = (1, 1, \dots, 1)$.

Capítulo 4

Avaliação numérica

4.1. Introdução

Para avaliar a influência local através da curvatura normal conforme no caso da distribuição Dirichlet a partir de uma amostra i.i.d., foi feita, inicialmente, a maximização da log-verossimilhança com vistas à estimação dos parâmetros desta distribuição usando o método quasi-Newton BFGS (com derivadas numéricas). Os tamanhos de amostra usados nesta análise foram $n = 10$, $n = 20$ e $n = 30$ e os valores pseudo-aleatórios das variáveis de interesse Y_j , $j = 1, \dots, p - 1$, foram gerados de uma distribuição Dirichlet empregando o gerador “multiply with carry” de George Marsaglia, que tem período aproximadamente igual a 2^{60} . A linguagem de programação que utilizamos foi `0x` em sua versão 3.30. Os resultados da avaliação numérica encontram-se apresentados a seguir.

A Tabela 4.1.1 apresenta os valores das estimativas dos parâmetros de uma distribuição Dirichlet, a partir de uma amostra i.i.d. com quatro componentes ($p = 4$).

Tabela 4.1.1. Valores estimados dos parâmetros cujos verdadeiros valores são $\alpha = (2; 2; 2; 2)$.

Tamanho da amostra	Parâmetro	Estimativas
$n = 10$	α_1	2.7141
	α_2	2.1241
	α_3	3.6393
	α_4	2.2518
$n = 20$	α_1	2.9250
	α_2	2.0335
	α_3	3.6574
	α_4	2.5190
$n = 30$	α_1	2.0207
	α_2	2.0650
	α_3	3.0013
	α_4	2.2591

Os esquemas de perturbação considerados foram dos tipos aditivo e multiplicativo. As funções de log-verossimilhança da distribuição Dirichlet sob perturbações aditiva 1, aditiva 2 e multiplicativa estão apresentadas nos apêndices A.2, A.3 e A.4, respectivamente. Uma das componentes é escolhida para ser perturbada, somando ou multiplicando ω_t com Y_{tj} , $t = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, p$.

As contribuições agregadas ($m(q)_t$) do t -ésimo componente de perturbação básico para todos os autovetores q influentes, com q variando de 0 a 3, assim como a curvatura normal conforme do vetor de perturbação básico (B_{E_t}), foram calculadas para os esquemas com os dois tipos de perturbação.

Nas tabelas são apresentados os resultados referentes às observações identificadas como influentes para um esquema de determinado tipo de perturbação, assim como os resultados das observações que foram identificadas como influentes por outro esquema, sendo que esses resultados serão apenas ilustrativos.

A contribuição total $m(0)_t$ não é apresentada porque é equivalente a B_{E_t} . Segundo a prática comum, se a contribuição individual agregada é maior que duas vezes a média, então a observação correspondente é considerada influente. Utilizamos $2b$ e $\sqrt{2}\bar{m}(q)$ como valores críticos para B_{E_t} e $m(q)_t$, respectivamente, onde b e $\bar{m}(q)$ são definidos na seção 3.3.2. Nós usamos $\sqrt{2}$ em vez de 2 nos valores críticos para $m(q)_t$ devido à relação quadrática entre $m(q)_t$ e $\bar{m}(q)$. A partir das observações verificadas como influentes, faremos uma retirada de tais observações, uma a uma, com a finalidade de comparar as novas estimativas dos parâmetros com as estimativas iniciais e verificar o impacto que cada observação causa nessas estimativas.

A avaliação da influência será definida da seguinte forma:

- se $m(1)_t$ for maior que seu valor crítico, diremos que determinada observação é influente (ou levemente influente);
- se $m(2)_t$ for maior que seu valor crítico, diremos que determinada observação é bem influente (ou moderadamente influente);
- se $m(3)_t$ for maior que seu valor crítico, diremos que a observação é extremamente influente (ou fortemente influente);
- se B_{E_t} for maior que seu valor crítico, diremos que o nível de influência da observação é muito grande, ou seja, a observação é mais influente que a média.

4.2. Perturbando a componente 1

A variável correspondente à primeira componente foi escolhida para fazer parte do esquema de perturbação; suas observações estão apresentadas na Figura 4.1 e seus valores podem ser vistos na Tabela D.1 do Apêndice D.

4.2.1. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 1

A Tabela 4.2.1 apresenta resultados para o esquema de perturbação aditiva 1. Para o tamanho de amostra $n = 10$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.90337, 0.42844 e 0.01917. Não foi encontrado nenhum autovetor influente para $q = 3$. De acordo com os valores críticos, a observação 4 foi identificada como influente para todas as outras medidas. Quando $q = 1$, a observação 3 é considerada como marginalmente influente.

Para o tamanho de amostra $n = 20$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.80568, 0.59127 e 0.03573. A partir dos resultados obtidos, verificamos que a observação 4 também foi considerada como influente por todas as medidas, inclusive para $q = 3$, indicando assim uma forte influência local. Quando $q = 1$ e $q = 2$, a observação 3 também é considerada

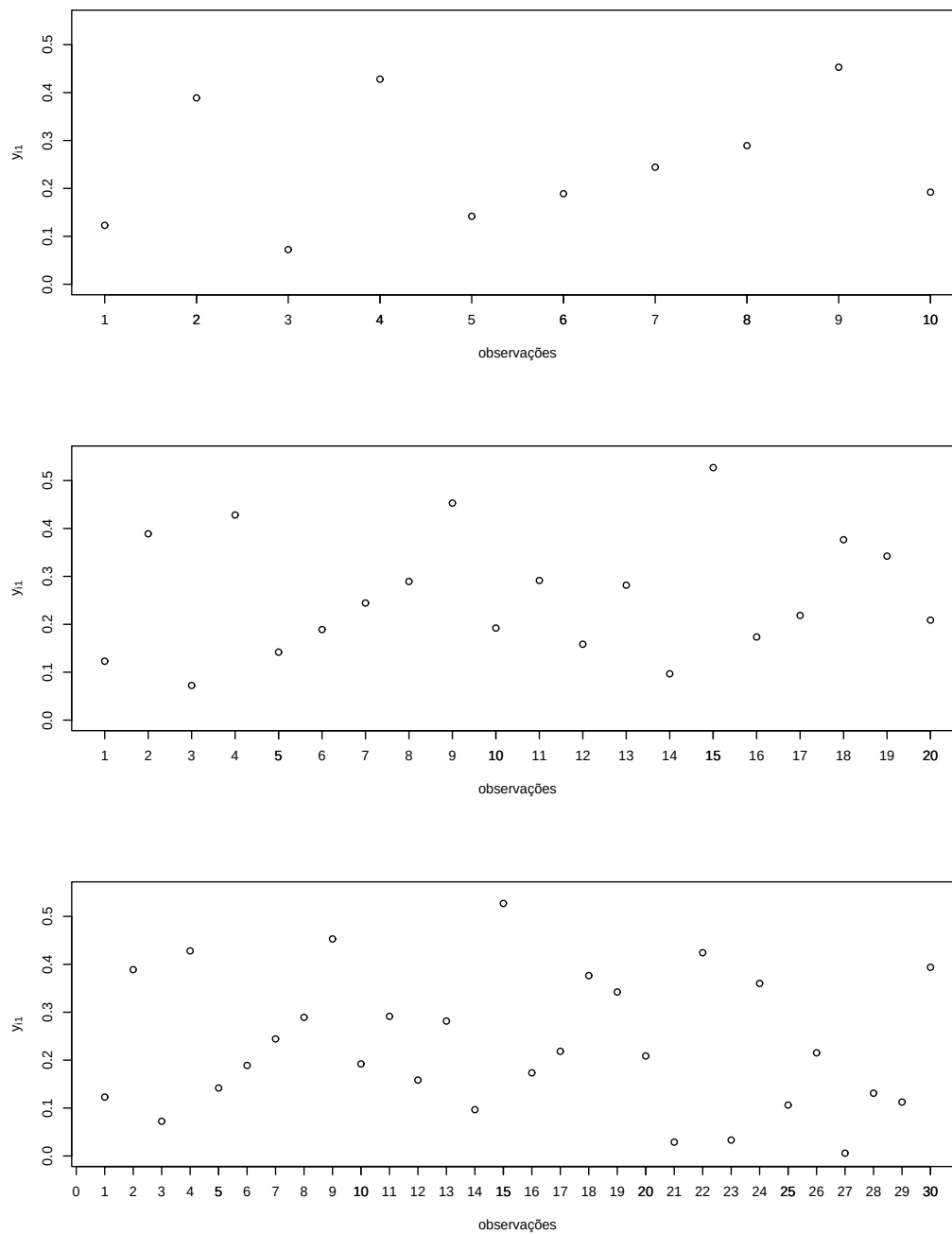


Figura 4.1. Gráfico das observações da primeira componente.

como influente (moderadamente influente). A observação 19 é considerada como fortemente influente, pois a contribuição agregada $m(3)_t$ assim indica. Porém, para $q = 1$ e $q = 2$ esta não é apontada como influente, o que significa que a observação 19 contribui apenas na direção de maior influência.

Para o tamanho de amostra $n = 30$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.99940, 0.03447 e 0.00233. A única observação que aparece como influente para todas as medidas é a observação 27, significando assim que esta observação é tão influente que chega a esconder a influência das outras observações.

4.2.2. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 2

A Tabela 4.2.2 apresenta resultados para o esquema de perturbação aditiva 2. Para o tamanho de amostra $n = 10$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.83911, 0.54290, 0.03336 e 0.00632. Assim como nos resultados para o esquema de perturbação aditiva 1, não encontramos nenhum autovetor influente para $q = 3$. Conforme os valores críticos, as observações 3 e 4 foram identificadas como bem influentes por causa da medida $m(2)_t$, sendo que a observação 4 tem um nível de influência muito grande, pois sua medida B_{E_t} assim indica.

Para o tamanho de amostra $n = 20$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.78915, 0.61127, 0.05882 e 0.01154. Com os resultados obtidos, notamos que as observações 3, 4 e 14 foram consideradas como influentes por todas as medidas $m(q)_t$, implicando que são observações extremamente influentes.

Para o tamanho de amostra $n = 30$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.99972, 0.02347, 0.00218 e 0.00050. A observação 27, novamente, é a única identificada como influente de acordo com todas as medidas.

4.2.3. Resultados para o esquema de perturbação multiplicativa

A Tabela 4.2.3 apresenta resultados para o esquema de perturbação multiplicativa. Para o tamanho de amostra $n = 10$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.90506 e 0.42529. Assim como no esquema de perturbação aditiva, não foi encontrado nenhum autovetor influente para $q = 3$. De acordo com os valores críticos, as observações 4 e 9 foram identificadas como moderadamente influentes. Entretanto, para $q = 1$, a observação 4 é considerada apenas como marginalmente influente.

Para o tamanho de amostra $n = 20$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.89455 e 0.44697. A partir dos resultados obtidos, verificamos que as observações 9 e 15 foram consideradas influentes apenas por todas as medidas, exceto para B_{E_t} . A observação 4 também foi identificada como influente, porém esta contribui apenas nas direções de maior influência.

Da mesma forma, as observações 3, 4 e 19 foram ilustradas apenas para permitir comparação com o esquema de perturbação aditiva.

Para o tamanho de amostra $n = 30$, os autovalores normalizados não-nulos são 0.94670 e 0.32211. Com esses resultados, notamos que as observações 4, 9, 15 e 22 foram consideradas como fortemente influentes, por todas as medidas $m(q)_t$. As observações 2 e 30 também

Tabela 4.2.1. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 1.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
					obs 2	obs 3	obs 4	obs 9	obs 14	obs 15	obs 19	obs 22	obs 27	obs 30
10	$m(1)_t$	2	0.3649	0.5161	0.1076	0.5137	0.8339	0.2101	-	-	-	-	-	-
	$m(2)_t$	1	0.3006	0.4251	0.0704	0.2671	0.8213	0.1956	-	-	-	-	-	-
	$m(3)_t$	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.1351	0.2702	0.0002	0.0703	0.4877	0.0021	-	-	-	-	-	-
20	$m(1)_t$	2	0.2643	0.3738	0.0911	0.4787	0.6811	0.1722	0.3360	0.1322	0.3470	-	-	-
	$m(2)_t$	2	0.2643	0.3738	0.0911	0.4787	0.6811	0.1722	0.3360	0.1322	0.3470	-	-	-
	$m(3)_t$	1	0.2007	0.2838	0.0598	0.2199	0.6786	0.1637	0.1140	0.1242	0.3380	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.0716	0.1433	8×10^{-5}	0.0532	0.2188	0.0009	0.0129	0.0003	0.0146	-	-	-
30	$m(1)_t$	1	0.1825	0.2581	0.0002	0.0638	0.0678	0.0129	0.0420	0.0094	0.0292	0.0138	0.9593	0.0009
	$m(2)_t$	1	0.1825	0.2581	0.0002	0.0638	0.0678	0.0129	0.0420	0.0094	0.0292	0.0138	0.9593	0.0009
	$m(3)_t$	1	0.1825	0.2581	0.0002	0.0638	0.0678	0.0129	0.0420	0.0094	0.0292	0.0138	0.9593	0.0009
	B_{E_t}	4	0.0345	0.0691	1×10^{-7}	2×10^{-5}	0.0004	2×10^{-6}	5×10^{-6}	6×10^{-7}	3×10^{-5}	2×10^{-6}	0.8469	1×10^{-7}

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 4.2.2. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 2.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
					obs 2	obs 3	obs 4	obs 9	obs 14	obs 15	obs 19	obs 22	obs 27	obs 30
10	$m(1)_t$	2	0.3718	0.5257	0.1876	0.6376	0.7328	0.2048	-	-	-	-	-	-
	$m(2)_t$	1	0.2897	0.4097	0.1181	0.5331	0.6235	0.1426	-	-	-	-	-	-
	$m(3)_t$	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.1422	0.2843	0.0023	0.1690	0.2941	0.0019	-	-	-	-	-	-
20	$m(1)_t$	2	0.2646	0.3742	0.1643	0.5505	0.5584	0.1622	0.3893	0.2838	0.2674	-	-	-
	$m(2)_t$	2	0.2646	0.3742	0.1643	0.5505	0.5584	0.1622	0.3893	0.2838	0.2674	-	-	-
	$m(3)_t$	1	0.1986	0.2809	0.0635	0.5358	0.3555	0.0675	0.3696	0.1805	0.1203	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.0735	0.1471	0.0012	0.0925	0.1046	0.0007	0.0232	0.0096	0.0056	-	-	-
30	$m(1)_t$	1	0.1826	0.2582	0.0100	0.0659	0.0513	0.0105	0.0450	0.0256	0.0187	0.0105	0.9608	0.0086
	$m(2)_t$	1	0.1826	0.2582	0.0100	0.0659	0.0513	0.0105	0.0450	0.0256	0.0187	0.0105	0.9608	0.0086
	$m(3)_t$	1	0.1826	0.2582	0.0100	0.0659	0.0513	0.0105	0.0450	0.0256	0.0187	0.0105	0.9608	0.0086
	B_{E_t}	4	0.0342	0.0684	1×10^{-6}	2×10^{-5}	0.0001	8×10^{-7}	5×10^{-6}	8×10^{-6}	7×10^{-6}	9×10^{-7}	0.8522	7×10^{-7}

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 4.2.3. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação multiplicativa.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
					obs 2	obs 3	obs 4	obs 9	obs 14	obs 15	obs 19	obs 22	obs 27	obs 30
10	$m(1)_t$	2	0.3647	0.5158	0.4240	0.3223	0.5125	0.5791	-	-	-	-	-	-
	$m(2)_t$	1	0.3008	0.4254	0.4204	0.0453	0.4956	0.5491	-	-	-	-	-	-
	$m(3)_t$	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.1330	0.2661	0.0323	0.0108	0.0690	0.1125	-	-	-	-	-	-
20	$m(1)_t$	2	0.2590	0.3663	0.2852	0.2330	0.3446	0.3898	0.2217	0.5617	0.2320	-	-	-
	$m(2)_t$	1	0.2115	0.2991	0.2843	0.0227	0.3368	0.3742	0.0363	0.5082	0.2299	-	-	-
	$m(3)_t$	1	0.2115	0.2991	0.2843	0.0227	0.3368	0.3742	0.0363	0.5082	0.2299	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.0671	0.1342	0.0066	0.0030	0.0141	0.0231	0.0024	0.0996	0.0029	-	-	-
30	$m(1)_t$	2	0.2056	0.2908	0.2569	0.1475	0.3097	0.3485	0.1406	0.4924	0.2060	0.3042	0.1696	0.2630
	$m(2)_t$	1	0.1776	0.2512	0.2568	0.0053	0.3073	0.3432	0.0184	0.4721	0.2045	0.3021	0.0272	0.2628
	$m(3)_t$	1	0.1776	0.2512	0.2568	0.0053	0.3073	0.3432	0.0184	0.4721	0.2045	0.3021	0.0272	0.2628
	B_{E_t}	4	0.0423	0.0846	0.0044	0.0005	0.0092	0.0148	0.0004	0.0588	0.0018	0.0086	0.0008	0.0048

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

foram identificadas como fortemente influentes, porém esta influência não é apontada pela medida $m(1)_t$. Independentemente do tamanho amostral, nenhuma observação teve seu nível de influência acima da média.

4.3. Perturbando a componente 2

A variável correspondente à segunda componente foi escolhida para fazer parte do esquema de perturbação; suas observações estão apresentadas na Figura 4.2 e seus valores podem ser vistos na Tabela D.1 do Apêndice D.

4.3.1. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 1

A Tabela 4.3.1 apresenta os resultados para o esquema de perturbação aditiva 1, quando perturbamos a segunda componente. Os autovalores normalizados não-nulos são 0.99627, 0.08628 e 0.00333, para $n = 10$; 0.98987, 0.14188 e 0.00595, para $n = 20$; 0.95942, 0.28183 e 0.00947, para $n = 30$.

A observação 4 foi identificada como influente por todas as medidas $m(q)_t$, independentemente do tamanho da amostra, quando o tamanho amostral é $n = 10$ ou $n = 20$ a observação 4 é mais influente que a média, ou seja, seu nível de influência é muito grande, o que é identificado através da medida B_{E_t} .

Através das contribuições agregadas, $m(q)_t$, podemos verificar que a observação 19 é extremamente influente, quando $n = 20$. Para $n = 30$, a observação 19 não aparece mais como influente; para este tamanho amostral além da observação 4, a observação 27 foi identificada como influente por todas as medidas $m(q)_t$ e mais, é uma observação extremamente influente e que está acima da média por ter seu nível de influência muito grande.

4.3.2. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 2

A Tabela 4.3.2 apresenta os resultados para o esquema de perturbação aditiva 2, quando perturbamos a segunda componente. Os autovalores normalizados não-nulos são 0.99754, 0.07003, 0.00363 e 0.00125, para $n = 10$; 0.99207, 0.12532, 0.00922 e 0.00242, para $n = 20$; 0.92033, 0.39042, 0.02367 e 0.00275, para $n = 30$.

A observação 4 foi identificada como influente por todas as medidas e em todos os tamanhos amostrais, significando que se trata de uma observação extremamente influente e que está acima da média. A observação 19 foi identificada como influente por todas as medidas $m(q)_t$, sendo uma observação extremamente influente, mas não está acima da média, conclusão que vale para $n = 20$ e $n = 30$. A observação 27 foi identificada como influente por todas as medidas, quando $n = 30$, implicando que é uma observação extremamente influente e que seu nível de influência é bastante grande.

4.3.3. Resultados para o esquema de perturbação multiplicativa

A Tabela 4.3.3 apresenta os resultados para o esquema de perturbação multiplicativa, quan-

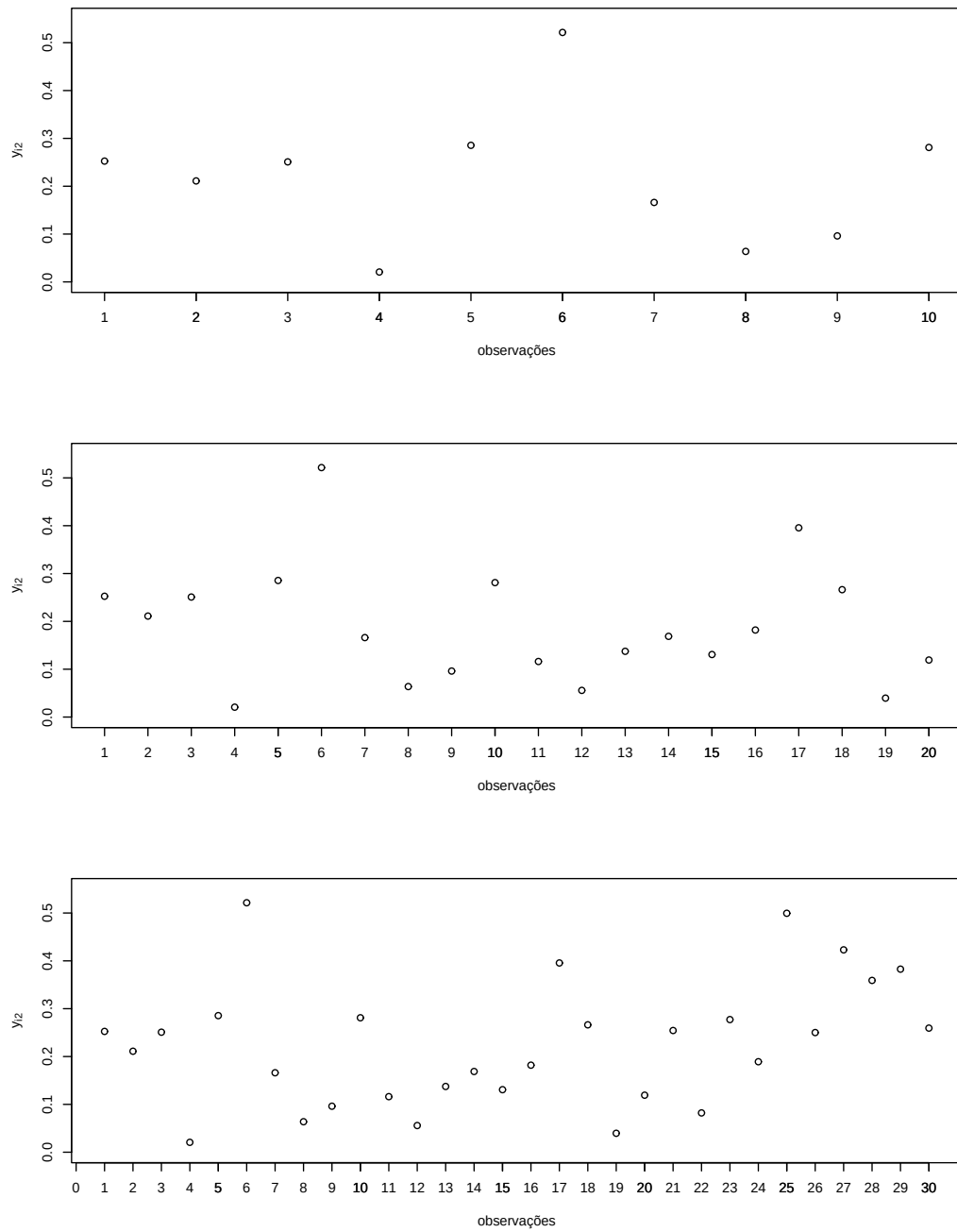


Figura 4.2. Gráfico das observações da segunda componente.

Tabela 4.3.1. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 1.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações							
					obs 4	obs 6	obs 17	obs 19	obs 25	obs 27	obs 29	
10	$m(1)_t$	1	0.3156	0.4464	0.9492	0.0535	-	-	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.3156	0.4464	0.9492	0.0535	-	-	-	-	-	
	$m(3)_t$	1	0.3156	0.4464	0.9492	0.0535	-	-	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.1086	0.2172	0.8128	0.0003	-	-	-	-	-	
20	$m(1)_t$	1	0.2225	0.3146	0.8102	0.0462	0.0511	0.4004	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.2225	0.3146	0.8102	0.0462	0.0511	0.4004	-	-	-	
	$m(3)_t$	1	0.2225	0.3146	0.8102	0.0462	0.0511	0.4004	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.0569	0.1138	0.4344	0.0002	0.0004	0.0257	-	-	-	
30	$m(1)_t$	2	0.2034	0.2877	0.4866	0.0436	0.0482	0.2441	0.0691	0.8818	0.0458	
	$m(2)_t$	1	0.1788	0.2529	0.3283	0.0410	0.0452	0.1556	0.0665	0.8636	0.0377	
	$m(3)_t$	1	0.1788	0.2529	0.3283	0.0410	0.0452	0.1556	0.0665	0.8636	0.0377	
	B_{E_t}	4	0.0417	0.0834	0.0564	7×10^{-6}	2×10^{-5}	0.0036	3×10^{-5}	0.6053	5×10^{-6}	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 4.3.2. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 2.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações							
					obs 4	obs 6	obs 17	obs 19	obs 25	obs 27	obs 29	
10	$m(1)_t$	1	0.3158	0.4467	0.9458	0.0531	-	-	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.3158	0.4467	0.9458	0.0531	-	-	-	-	-	
	$m(3)_t$	1	0.3158	0.4467	0.9458	0.0531	-	-	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.1072	0.2145	0.8012	0.0003	-	-	-	-	-	
20	$m(1)_t$	1	0.2227	0.3150	0.8049	0.0484	0.0312	0.4074	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.2227	0.3150	0.8049	0.0484	0.0312	0.4074	-	-	-	
	$m(3)_t$	1	0.2227	0.3150	0.8049	0.0484	0.0312	0.4074	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.0564	0.1129	0.4228	0.0003	0.0002	0.0276	-	-	-	
30	$m(1)_t$	2	0.2090	0.2956	0.6223	0.0602	0.0493	0.3177	0.0686	0.7729	0.0637	
	$m(2)_t$	2	0.2090	0.2956	0.6223	0.0602	0.0493	0.3177	0.0686	0.7729	0.0637	
	$m(3)_t$	1	0.1752	0.2477	0.5314	0.0504	0.0358	0.2662	0.0559	0.6762	0.0466	
	B_{E_t}	4	0.0446	0.0891	0.1509	3×10^{-5}	2×10^{-5}	0.0102	3×10^{-5}	0.3589	3×10^{-5}	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 4.3.3. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação multiplicativa.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações							
					obs 4	obs 6	obs 17	obs 19	obs 25	obs 27	obs 29	
10	$m(1)_t$	1	0.3093	0.4375	0.0771	0.8512	-	-	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.3093	0.4375	0.0771	0.8512	-	-	-	-	-	
	$m(3)_t$	1	0.3093	0.4375	0.0771	0.8512	-	-	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.1248	0.2495	0.0042	0.5514	-	-	-	-	-	
20	$m(1)_t$	2	0.2539	0.3590	0.1933	0.7384	0.4078	0.1838	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.2163	0.3058	0.0484	0.7205	0.4074	0.0340	-	-	-	
	$m(3)_t$	1	0.2163	0.3058	0.0484	0.7205	0.4074	0.0340	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.0644	0.1289	0.0014	0.2972	0.0277	0.0011	-	-	-	
30	$m(1)_t$	2	0.2090	0.2956	0.1771	0.4993	0.2757	0.1703	0.4505	0.3142	0.2592	
	$m(2)_t$	2	0.2090	0.2956	0.1771	0.4993	0.2757	0.1703	0.4505	0.3142	0.2592	
	$m(3)_t$	1	0.1752	0.2478	0.0120	0.4714	0.2745	0.0029	0.4297	0.3101	0.2588	
	B_{E_t}	4	0.0437	0.0874	0.0010	0.0621	0.0058	0.0008	0.0412	0.0097	0.0045	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

do perturbamos a segunda componente. Os autovalores normalizados não-nulos são 0.95684 e 0.29062, para $n = 10$; 0.93536 e 0.35369, para $n = 20$; 0.92101 e 0.38953, para $n = 30$.

A observação 6, foi identificada como influente por todas as medidas, independentemente do tamanho da amostra, porém seu nível de influência está acima da média apenas para os tamanhos amostrais $n = 10$ e $n = 20$. Para $n = 20$, a observação 17 foi identificada como extremamente influente, pois a medida $m(3)_t$ assim indica. Para $n = 30$, as observações 25, 27 e 29 foram identificadas como extremamente influentes, porém a observação 29 é identificada como influente apenas pela medida $m(3)_t$, ou seja, esta observação contribui apenas na direção de maior influência.

4.4. Perturbando a componente 3

A variável correspondente à terceira componente foi escolhida para fazer parte do esquema de perturbação; suas observações estão apresentadas na Figura 4.3 e seus valores podem ser vistos na Tabela D.1 do Apêndice D.

4.4.1. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 1

A Tabela 4.4.1 apresenta os resultados para o esquema de perturbação aditiva 1, quando perturbamos a terceira componente. Os autovalores normalizados não-nulos são 0.96211, 0.26438 e 0.06662, para $n = 10$; 0.90169, 0.42593 e 0.07439, para $n = 20$; 0.99432, 0.08461 e 0.06464, para $n = 30$.

Perturbando a terceira componente, notamos que a observação 4 aparece como influente para todas as medidas, apenas para os tamanhos amostrais $n = 10$ e $n = 20$. Quando $n = 20$, além da observação 4, as observações 12, 17 e 19 também são influentes, sendo que as observações 12 e 19 são consideradas fortemente influentes de acordo com a medida $m(3)_t$, a observação 17 é considerada como levemente influente, pois a medida $m(1)_t$ assim indica. Quando $n = 30$, apenas a observação 27 é identificada como influente, da mesma forma como ocorreu ao perturbarmos a primeira ou a segunda componente.

4.4.2. Resultados para o esquema de perturbação aditiva 2

A Tabela 4.4.2 apresenta os resultados para o esquema de perturbação aditiva 2, quando perturbamos a terceira componente. Os autovalores normalizados não-nulos são 0.90583, 0.41772, 0.06653 e 0.02349, para $n = 10$; 0.81438, 0.57439, 0.07417 e 0.03695, para $n = 20$; 0.98513, 0.14334, 0.09374 e 0.01363, para $n = 30$.

Para $n = 10$, não detectamos nenhum autovetor influente quando $q = 3$ e através das outras medidas observamos que apenas a observação 4 foi indentificada como bem influente; seu nível de influência encontra-se bem acima da média. Para $n = 20$, a observação 4 aparece como extremamente influente e é tão influente que sua influência está acima da média. Quando $q = 1$ ou $q = 2$, temos que a observação 17 foi detectada como uma observação moderadamente influente e quando $q = 3$ a observação 19 foi identificada como extremamente influente. Para $n = 30$, apenas a observação 27 é identificada como influente, da mesma forma como ocorreu para o esquema de perturbação aditiva 1.

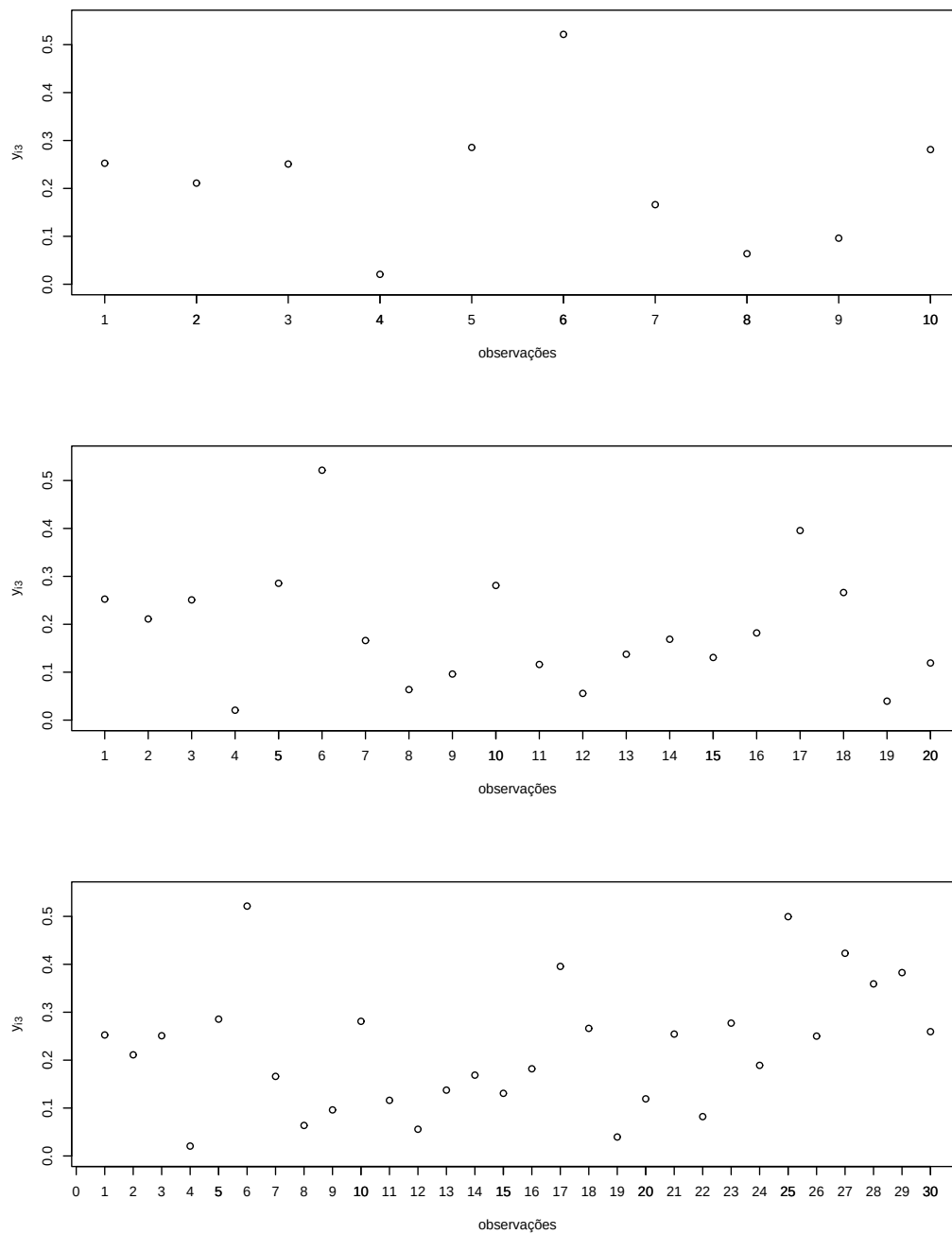


Figura 4.3. Gráfico das observações da terceira componente.

Tabela 4.4.1.1. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 1.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
					obs 1	obs 4	obs 11	obs 12	obs 17	obs 19	obs 27
10	$m(1)_t$	1	0.3102	0.4387	0.1410	0.9142	-	-	-	-	-
	$m(2)_t$	1	0.3102	0.4387	0.1410	0.9142	-	-	-	-	-
	$m(3)_t$	1	0.3102	0.4387	0.1410	0.9142	-	-	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.1293	0.2586	0.0013	0.7274	-	-	-	-	-
20	$m(1)_t$	2	0.2576	0.3644	0.1333	0.7193	0.1372	0.3041	0.3675	0.3604	-
	$m(2)_t$	1	0.2123	0.3003	0.1289	0.7068	0.1312	0.3041	0.0801	0.3604	-
	$m(3)_t$	1	0.2123	0.3003	0.1289	0.7068	0.1312	0.3041	0.0801	0.3604	-
	B_{E_t}	4	0.0701	0.1402	0.0007	0.2746	0.0004	0.0088	0.0190	0.0172	-
30	$m(1)_t$	1	0.1820	0.2575	0.0419	0.1573	0.0303	0.0755	0.0390	0.0787	0.9373
	$m(2)_t$	1	0.1820	0.2575	0.0419	0.1573	0.0303	0.0755	0.0390	0.0787	0.9373
	$m(3)_t$	1	0.1820	0.2575	0.0419	0.1573	0.0303	0.0755	0.0390	0.0787	0.9373
	B_{E_t}	4	0.0381	0.0762	5×10^{-6}	0.0054	5×10^{-6}	0.0001	0.0002	0.0003	0.7783

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 4.4.2. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 2.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações							
					obs 1	obs 4	obs 11	obs 12	obs 17	obs 19	obs 27	
10	$m(1)_t$	2	0.3638	0.5145	0.2042	0.8791	-	-	-	-	-	
	$m(2)_t$	1	0.3010	0.4256	0.8791	0.8562	-	-	-	-	-	
	$m(3)_t$	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	B_{E_t}	4	0.1414	0.2827	0.0034	0.6019	-	-	-	-	-	
20	$m(1)_t$	2	0.2635	0.3727	0.1730	0.6413	0.1885	0.2467	0.4469	0.3002	-	
	$m(2)_t$	2	0.2635	0.3727	0.1730	0.6413	0.1885	0.2467	0.4469	0.3002	-	
	$m(3)_t$	1	0.2018	0.2854	0.1730	0.6030	0.1884	0.2461	0.0398	0.2988	-	
	B_{E_t}	4	0.0750	0.1500	0.0015	0.1783	0.0015	0.0040	0.0411	0.0090	-	
30	$m(1)_t$	1	0.1812	0.2563	0.0621	0.1835	0.0569	0.0765	0.0563	0.0844	0.9166	
	$m(2)_t$	1	0.1812	0.2563	0.0621	0.1835	0.0569	0.0765	0.0563	0.0844	0.9166	
	$m(3)_t$	1	0.1812	0.2563	0.0621	0.1835	0.0569	0.0765	0.0563	0.0844	0.9166	
	B_{E_t}	4	0.0412	0.0824	3×10^{-5}	0.0076	5×10^{-5}	0.0001	0.0009	0.0004	0.7186	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 4.4.3. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação multiplicativa.

n	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
					obs 1	obs 4	obs 11	obs 12	obs 17	obs 19	obs 27
10	$m(1)_t$	2	0.3593	0.5082	0.4974	0.3948	-	-	-	-	-
	$m(2)_t$	1	0.3056	0.4322	0.4113	0.3654	-	-	-	-	-
	$m(3)_t$	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	B_{E_t}	4	0.1291	0.2582	0.0612	0.0243	-	-	-	-	-
20	$m(1)_t$	2	0.2544	0.3598	0.3733	0.2932	0.3575	0.2646	0.2624	0.2316	-
	$m(2)_t$	1	0.2158	0.3053	0.3052	0.2680	0.2983	0.2525	0.1351	0.2306	-
	$m(3)_t$	1	0.2158	0.3053	0.3052	0.2680	0.2983	0.2525	0.1351	0.2306	-
	B_{E_t}	4	0.0647	0.1295	0.0194	0.0074	0.0163	0.0049	0.0047	0.0029	-
30	$m(1)_t$	2	0.2060	0.2913	0.3095	0.2460	0.2970	0.2231	0.2076	0.1960	0.1912
	$m(2)_t$	1	0.1775	0.2510	0.2411	0.2168	0.2365	0.2067	0.1299	0.1923	0.1397
	$m(3)_t$	1	0.1775	0.2510	0.2411	0.2168	0.2365	0.2067	0.1299	0.1923	0.1397
	B_{E_t}	4	0.0424	0.0848	0.0092	0.0037	0.0078	0.0025	0.0019	0.0015	0.0013

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

4.4.3. Resultados para o esquema de perturbação multiplicativa

A Tabela 4.4.3 apresenta os resultados para o esquema de perturbação multiplicativa, quando perturbamos a terceira componente. Os autovalores normalizados não-nulos são 0.93404 e 0.35716, para $n = 10$; 0.93185 e 0.36283, para $n = 20$; 0.94474 e 0.32781, para $n = 30$.

Para $n = 10$, não identificamos nenhuma observação influente. Para $n = 20$, a observação 1 aparece como influente apenas para $q = 1$, para $q = 2$ e $q = 3$ consideramos apenas como uma influência marginal. Para $n = 30$, as observação 1 e 11 também foram identificadas como influentes apenas pela medida $m(1)_t$.

4.5. Resultados da comparação das estimativas

Depois de analisar as observações influentes através das medidas estudadas nesta dissertação, fizemos uma comparação das estimativas em que todas as observações são utilizadas com as estimativas retirando as observações influentes uma a uma. A partir da Tabela 4.5, observamos que, com a retirada da observação 3, houve grande impacto nas estimativas de α_1 quando $n = 10$; a estimativa que era de 2.7141 passou a ser 3.2090, com uma variação percentual de 18%, aproximadamente. Outra observação que teve bastante impacto nas estimativas de α_1 foi a observação 27; a estimativa que era de 2.0207 passou a ser 2.4336, apresentando uma variação percentual de 20.43%. Notamos que, de modo geral, os valores das estimativas diminuem com a retirada das observações identificadas como influentes através do esquema de perturbação multiplicativa, as observações são 2, 9, 15, 22 e 30.

Com a retirada da observação 6, houve uma redução na estimativa de α_2 , essa redução foi detectada para todos os tamanhos amostrais e a influência dessa observação foi detectada apenas no esquema de perturbação multiplicativa. Duas observações, 4 e a 27 tiveram bastante impacto nas estimativas de α_2 , tenderam a se afastar do verdadeiro valor do parâmetro, sendo que o impacto maior foi com a retirada da observação 4, principalmente para $n = 10$ cuja variação percentual foi de 40% aproximadamente.

Observamos que, com a retirada da observação 4, houve um aumento de 13.90, aproximadamente, na estimativa de α_3 , quando $n = 10$. A estimativa de α_3 também aumentou em 12%, aproximadamente, com a retirada da observação 27. Com a retirada das observações 1 e 11, observamos que os valores das estimativas diminuem, vale ressaltar que essas observações foram identificadas apenas pelo esquema de perturbação multiplicativa. A retirada das outras observações não causou impacto substancial nas estimativas dos parâmetros.

Tabela 4.5. Comparação (e variação percentual) das estimativas dos parâmetros com a retirada de algumas observações influentes.

n	Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações								
			obs 1	obs 2	obs 3	obs 4	obs 6	obs 9			
10	α_1	2.7141	2.7981 (3.09%)	2.5136 (−7.39%)	3.2090 (18.23%)	2.9850 (9.98%)	4.1715 (9.55%)	2.9850 (−8.43%)			
	α_2	2.1241	2.0001 (−5.84%)	2.0281 (−4.52%)	2.1703 (2.18%)	2.9845 (40.51%)	2.0628 (−2.89%)	2.9845 (2.50%)			
	α_3	3.6393	3.3967 (−6.67%)	3.5343 (−2.89%)	3.9462 (8.43%)	4.1448 (13.89%)	2.9734 (14.62%)	4.1448 (−0.60%)			
	α_4	2.2518	2.2611 (0.41%)	2.3602 (4.81%)	2.2178 (−1.51%)	2.7404 (21.70%)	2.5211 (11.96%)	2.7404 (−2.90%)			
20	α_1	2.9250	3.0001 (2.57%)	2.8378 (−2.98%)	3.1733 (8.49%)	3.0121 (2.98%)	3.0843 (5.45%)	3.0121 (−4.56%)			
	α_2	2.0335	1.9845 (−2.41%)	1.9904 (−2.12%)	2.0450 (0.57%)	2.3275 (14.46%)	2.0111 (−1.10%)	2.3275 (0.17%)			
	α_3	3.6574	3.5650 (−2.53%)	3.6184 (−1.07%)	3.7920 (3.68%)	3.8097 (4.16%)	3.9237 (7.28%)	3.8097 (−1.10%)			
	α_4	2.5190	2.5558 (1.46%)	2.5996 (3.20%)	2.5098 (−0.37%)	2.7301 (8.38%)	2.6902 (6.80%)	2.7301 (−1.62%)			
30	α_1	2.0207	2.0163 (−0.22%)	1.9745 (−2.29%)	2.0594 (1.92%)	2.0665 (2.27%)	2.0352 (0.72%)	2.0665 (−2.76%)			
	α_2	2.0650	2.0225 (−2.06%)	2.0524 (−0.61%)	2.0369 (−1.36%)	2.2964 (11.21%)	2.0253 (−1.92%)	2.2964 (1.44%)			
	α_3	3.0013	2.9165 (−2.83%)	2.9849 (−0.55%)	2.9917 (−0.32%)	3.1161 (3.83%)	3.0744 (2.44%)	3.1161 (−0.01%)			
	α_4	2.2591	2.2594 (0.01%)	2.3141 (2.43%)	2.2047 (−2.41%)	2.4112 (6.73%)	2.3167 (2.55%)	2.4112 (−0.13%)			
n	Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações								
			obs 11	obs 12	obs 14	obs 15	obs 17	obs 19			
20	α_1	2.9250	2.8462 (−2.69%)	2.9833 (1.99%)	3.0643 (4.76%)	2.9236 (−0.05%)	3.0131 (3.01%)	2.8699 (−1.88%)			
	α_2	2.0335	2.0212 (−0.60%)	2.1225 (4.38%)	2.0370 (0.17%)	2.1132 (3.92%)	2.0026 (−1.52%)	2.1435 (5.41%)			
	α_3	3.6574	3.5150 (−3.89%)	3.6133 (−1.21%)	3.6841 (0.73%)	3.8014 (3.94%)	3.9199 (7.18%)	3.6121 (−1.24%)			
	α_4	2.5190	2.5415 (0.89%)	2.4575 (−2.44%)	2.4526 (−2.64%)	2.7661 (9.81%)	2.5520 (1.31%)	2.4919 (−1.08%)			
30	α_1	2.0207	1.9825 (−1.89%)	2.0275 (0.34%)	2.0331 (0.61%)	2.0147 (−0.30%)	2.0115 (−0.46%)	2.0018 (−0.94%)			
	α_2	2.0650	2.0781 (0.63%)	2.1330 (3.29%)	2.0484 (−0.80%)	2.1396 (3.61%)	2.0246 (−1.96%)	2.1703 (5.10%)			
	α_3	3.0013	2.9376 (−2.12%)	2.9701 (−1.04%)	2.9636 (−1.26%)	3.0872 (2.86%)	3.0805 (2.64%)	3.0042 (0.10%)			
	α_4	2.2591	2.2862 (1.20%)	2.2236 (−1.57%)	2.1907 (−3.03%)	2.4131 (6.82%)	2.2458 (−0.59%)	2.2684 (0.41%)			
n	Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações								
			obs 22	obs 25	obs 27	obs 29	obs 30	-			
30	α_1	2.0207	1.9670 (−2.66%)	2.0684 (2.36%)	2.4336 (20.43%)	2.0414 (1.02%)	1.9724 (−2.39%)	-			
	α_2	2.0650	2.1023 (1.81%)	2.0291 (−1.74%)	2.2123 (7.13%)	2.0202 (−2.17%)	2.0396 (−1.23%)	-			
	α_3	3.0013	2.9880 (−0.44%)	3.0929 (3.05%)	3.3626 (12.04%)	2.9648 (−1.22%)	3.0023 (0.03%)	-			
	α_4	2.2591	2.2520 (−0.31%)	2.2692 (0.45%)	2.4360 (7.83%)	2.3013 (1.87%)	2.3034 (1.96%)	-			

Capítulo 5

Aplicações empíricas

5.1. Introdução

Neste capítulo utilizaremos, como exemplo, três conjuntos de dados retirados de Aitchison (2003). Os dados são sobre composição de rochas do tipo *kongite*, padrões de atividade de um estatístico e composição de células brancas.

Os dados Y_{tj} , $t = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, p$, estão disponíveis como p amostras i.i.d. de tamanho n tais que $(Y_{t1}, \dots, Y_{tp-1})$ tem distribuição Dirichlet e $\sum_{j=1}^p y_j = 1$, para todo t fixo. Temos, porém, que trabalhar numericamente com $p - 1$ variáveis, por isso é necessário retirar uma das p variáveis na análise numérica. Optamos por fazer uma permutação nessas retiradas, ora fixando a primeira, depois a segunda, e assim por diante, para poder analisar a influência das observações. Com isso, estaremos analisando a influência em várias direções.

Para cada conjunto de dados, foram calculados os autovalores normalizados em cada esquema de perturbação, a curvatura normal conforme do vetor de perturbação básico B_{E_t} e a contribuição agregada $m(q)_t$, com q variando de 0 a 3.

Os esquemas de perturbação que serão apresentados são os esquemas de perturbação aditiva e multiplicativa nas variáveis, o esquema de perturbação multiplicativa na verossimilhança não será mostrado porque não foi identificada nenhuma observação influente segundo esse esquema; isso significa que, de fato, as observações têm características da distribuição Dirichlet.

5.2. Dados de composição de kongite

5.2.1. Perturbando a variável albite (componente 1)

Considere os dados reproduzidos em Aitchison (2003, p. 356) sobre composição de 25 espécimes de rochas do tipo *kongite*. Cada composição consiste do percentual por peso de cinco minerais, que são *albite* (Y_{t1}), *blandite* (Y_{t2}), *cornite* (Y_{t3}), *daubite* (Y_{t4}) e *endite* (Y_{t5}), $t = 1, \dots, n$, onde n representa o número de observações. Estes dados encontram-se na Tabela D.2 do Apêndice D.

Neste caso, há cinco componentes ($p = 5$) de uma distribuição que modelamos como Dirichlet, porém precisamos trabalhar com apenas $p - 1$ variáveis aleatórias, por isso temos que escolher uma das variáveis para ser retirada da análise. O procedimento que seguimos foi o seguinte: a variável Y_{t1} , que representa a primeira componente, será perturbada segundo os esquemas definidos anteriormente e essa será a variável fixa; a variável a ser retirada pode ser qualquer uma das que restaram; optamos por fazer uma permutação entre essas variáveis com o intuito de verificar a influência em várias direções.

Na Tabela 5.2.1.1 apresentamos os autovalores normalizados não-nulos para os esquemas de perturbação trabalhados com as diferentes direções utilizadas. Podemos observar que, no caso da perturbação aditiva 1, quando retiramos o mineral *blandite* obtivemos o maior

autovalor entre os autovalores máximos com a retirada de cada mineral; com isso concluímos que a maior direção ocorre com a retirada de *blandite*. Entretanto, vamos apresentar a influência em várias direções. Nota-se que, através dos esquemas de perturbações aditiva 2, multiplicativa ou multiplicativa na log-verossimilhança, os autovalores normalizados são iguais com a retirada de qualquer mineral, ou seja, a inferência é invariante em relação à escolha de variáveis a serem retiradas do modelo Dirichlet.

Tabela 5.2.1.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para a retirada dos seguintes minerais			
	<i>Endite</i>	<i>Daubite</i>	<i>Cornite</i>	<i>Blandite</i>
Aditiva 1	0.98750	0.98620	0.98769	0.98945
	0.15458	0.16257	0.15365	0.14482
	0.03071	0.03121	0.02568	0.00443
	0.00203	0.00325	0.01419	0.00203
Aditiva 2	0.97704	0.97704	0.97704	0.97704
	0.21118	0.21118	0.21118	0.21118
	0.02811	0.02811	0.02811	0.02811
	0.00325	0.00325	0.00325	0.00325
	0.00106	0.00106	0.00106	0.00106
Multiplicativa	0.99024	0.99024	0.99024	0.99024
	0.13938	0.13938	0.13938	0.13938
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	0.00354	0.00354	0.00354	0.00354
	0.00023	0.00023	0.00023	0.00023
	0.00012	0.00012	0.00012	0.00012
	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

Nas Tabelas 5.2.1.2 e 5.2.1.3 apresentamos os resultados para o esquema de perturbação aditiva 1 e para o esquema de perturbação aditiva 2, respectivamente. Para este conjunto de dados foi encontrado apenas um autovetor influente para as medidas $m(q)_t$, por isso os resultados das contribuições agregadas são iguais, ou seja, $m(1)_t = m(2)_t = m(3)_t$.

Para o esquema de perturbação aditiva 1 notamos que com a retirada dos minerais *endite*, *daubite* e *blandite*, as observações 5 e 16 são fortemente influentes, sendo a observação 5 é apontada como influente pela medida B_{E_t} , ou seja, seu nível de influência está acima da média; com a retirada do mineral *cornite* encontramos as observações 9 e 24 como fortemente influentes e a observação 9 é apontada como influente pela medida B_{E_t} (Tabela 5.2.1.2).

Para o esquema de perturbação aditiva 2 observamos que, com a retirada de qualquer mineral, as observações 5 e 16 são extremamente influentes, entretanto apenas a observação 5 tem seu nível de influência acima da média (Tabela 5.2.1.3).

Para o esquema de perturbação multiplicativa não iremos apresentar os resultados, pois não encontramos nenhuma observação influente.

Tabela 5.2.1.1.2. Medidas de observações influentes para esquema de perturbação aditiva 1.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações			
					obs 5	obs 9	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	1	0.1987	0.2811	0.8588	0.1120	0.3113	0.0522
	$m(2)_t$	1	0.1987	0.2811	0.8588	0.1120	0.3113	0.0522
	$m(3)_t$	1	0.1987	0.2811	0.8588	0.1120	0.3113	0.0522
	B_{E_t}	5	0.0470	0.0940	0.5597	0.0056	0.0095	0.0004
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	1	0.1986	0.2809	0.8550	0.1018	0.3074	0.0606
	$m(2)_t$	1	0.1986	0.2809	0.8550	0.1018	0.3074	0.0606
	$m(3)_t$	1	0.1986	0.2809	0.8550	0.1018	0.3074	0.0606
	B_{E_t}	5	0.0473	0.0947	0.5516	0.0054	0.0091	0.0005
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	1	0.1988	0.2811	0.2184	0.5323	0.1677	0.3064
	$m(2)_t$	1	0.1988	0.2811	0.2184	0.5323	0.1677	0.3064
	$m(3)_t$	1	0.1988	0.2811	0.2184	0.5323	0.1677	0.3064
	B_{E_t}	5	0.0472	0.0945	0.0045	0.1219	0.0014	0.0109
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	1	0.1989	0.2813	0.8576	0.0549	0.3193	0.0187
	$m(2)_t$	1	0.1989	0.2813	0.8576	0.0549	0.3193	0.0187
	$m(3)_t$	1	0.1989	0.2813	0.8576	0.0549	0.3193	0.0187
	B_{E_t}	5	0.0456	0.0913	0.5472	0.0012	0.0106	0.0001

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.1.3. Medidas de observações influentes para esquema de perturbação aditiva 2.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações			
					obs 5	obs 9	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	2	0.2180	0.3083	0.8485	0.2521	0.3115	0.1495
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	B_{E_t}	5	0.0488	0.0977	0.5193	0.0059	0.0095	0.0006
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	2	0.2180	0.3083	0.8485	0.2521	0.3115	0.1495
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	B_{E_t}	5	0.0488	0.0977	0.5193	0.0059	0.0095	0.0006
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2180	0.3083	0.8485	0.2521	0.3115	0.1495
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	B_{E_t}	5	0.0488	0.0977	0.5193	0.0059	0.0095	0.0006
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	2	0.2180	0.3083	0.8485	0.2521	0.3115	0.1495
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2796	0.8376	0.1067	0.3114	0.0611
	B_{E_t}	5	0.0488	0.0977	0.5193	0.0059	0.0095	0.0006

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

5.2.2. Perturbando a variável blandite (componente 2)

Outro procedimento seguido foi o seguinte: a variável Y_{t2} , que representa a segunda componente, foi perturbada segundo os esquemas de perturbação, anteriormente definidos; a variável a ser retirada pode ser qualquer uma das que restaram, da mesma forma como foi feito ao perturbar a primeira componente.

Tabela 5.2.2.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para a retirada dos seguintes minerais			
	<i>Endite</i>	<i>Daubite</i>	<i>Cornite</i>	<i>Albite</i>
Aditiva 1	0.91784	0.91923	0.99266	0.92146
	0.39686	0.39351	0.12090	0.38827
	0.00872	0.01285	0.00298	0.01286
	0.00020	0.00020	0.00020	0.00156
Aditiva 2	0.94072	0.94072	0.94072	0.94072
	0.33897	0.33897	0.33897	0.33897
	0.01189	0.01189	0.01189	0.01189
	0.00110	0.00110	0.00110	0.00110
	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003
Multiplicativa	0.91452	0.91452	0.91452	0.91452
	0.40454	0.40454	0.40454	0.40454
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	0.00354	0.00354	0.00354	0.00354
	0.00023	0.00023	0.00023	0.00023
	0.00012	0.00012	0.00012	0.00012
	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

Na Tabela 5.2.2.1 apresentamos os autovalores normalizados não-nulos. Percebemos que, para o esquema de perturbação aditiva 1, o maior autovalor, entre os máximos autovalores, foi encontrado com a retirada da variável *cornite*, ou seja, a maior direção ocorre com a retirada deste mineral.

Através dos resultados para a perturbação aditiva 1, com a retirada de qualquer mineral, observamos que as observações 9 e 24 são extremamente influentes e a observação 9 está com seu nível de influência acima da média. Além dessas duas observações identificadas como influentes, verificamos que a observação 5 também é extremamente influente, com seu nível de influência muito grande, porém isso ocorre apenas quando retiramos os minerais *endite*, *daubite* e *albite* (Tabela 5.2.2.2).

Na Tabela 5.2.2.3 apresentamos os resultados para o esquema de perturbação aditiva 2. Verificamos que, com a retirada de qualquer mineral, as observações identificadas como extremamente influentes foram 5, 9 e 24, sendo que a observação 9 é a única que está com nível de influência acima da média.

Para os resultados da perturbação multiplicativa, podemos perceber que as observações 5 e 16 apresentam forte influência, com a retirada de qualquer mineral, porém nenhuma observação apresentou nível de influência muito grande (Tabela 5.2.2.4).

Tabela 5.2.2.2. Medidas de observações influentes para esquema de perturbação aditiva 1.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações			
					obs 5	obs 9	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	2	0.2293	0.3243	0.6595	0.6680	0.2618	0.3336
	$m(2)_t$	1	0.1916	0.2710	0.5354	0.6078	0.2050	0.2997
	$m(3)_t$	1	0.1916	0.2710	0.5354	0.6078	0.2050	0.2997
	B_{E_t}	5	0.0529	0.1059	0.1904	0.2000	0.0047	0.0124
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	2	0.2291	0.3241	0.6464	0.6762	0.2548	0.3308
	$m(2)_t$	1	0.1918	0.2712	0.5152	0.6224	0.1951	0.2976
	$m(3)_t$	1	0.1918	0.2712	0.5152	0.6224	0.1951	0.2976
	B_{E_t}	5	0.0530	0.1061	0.1764	0.2102	0.0042	0.0120
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	1	0.1993	0.2818	0.0404	0.7939	0.0190	0.3904
	$m(2)_t$	1	0.1993	0.2818	0.0404	0.7939	0.0190	0.3904
	$m(3)_t$	1	0.1993	0.2818	0.0404	0.7939	0.0190	0.3904
	B_{E_t}	5	0.0447	0.0893	0.0005	0.4030	0.0002	0.0233
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2289	0.3237	0.6514	0.6665	0.2604	0.3286
	$m(2)_t$	1	0.1920	0.2715	0.5348	0.6084	0.2053	0.2936
	$m(3)_t$	1	0.1920	0.2715	0.5348	0.6084	0.2053	0.2936
	B_{E_t}	5	0.0530	0.1059	0.1822	0.1987	0.0046	0.0117

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.2.3. Medidas de observações influentes para esquema de perturbação aditiva 2.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações			
					obs 5	obs 9	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	2	0.2262	0.3200	0.5540	0.7245	0.2280	0.3568
	$m(2)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	$m(3)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	B_{E_t}	5	0.0517	0.1034	0.0958	0.2770	0.0027	0.0162
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	2	0.2262	0.3200	0.5540	0.7245	0.2280	0.3568
	$m(2)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	$m(3)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	B_{E_t}	5	0.0517	0.1034	0.0958	0.2770	0.0027	0.0162
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2262	0.3200	0.5540	0.7245	0.2280	0.3568
	$m(2)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	$m(3)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	B_{E_t}	5	0.0517	0.1034	0.0958	0.2770	0.0027	0.0162
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2262	0.3200	0.5540	0.7245	0.2280	0.3568
	$m(2)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	$m(3)_t$	1	0.1940	0.2743	0.3764	0.7080	0.1450	0.3452
	B_{E_t}	5	0.0517	0.1034	0.0958	0.2770	0.0027	0.0162

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.2.4. Medidas de observações influentes para esquema de perturbação multiplicativa.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações			
					obs 5	obs 9	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(2)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(3)_t$	1	0.1913	0.2705	0.5104	0.0179	0.4240	0.0038
	B_{E_t}	5	0.0528	0.1055	0.0930	0.0021	0.0399	0.0017
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(2)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(3)_t$	1	0.1913	0.2705	0.5104	0.0179	0.4240	0.0038
	B_{E_t}	5	0.0528	0.1055	0.0930	0.0021	0.0399	0.0017
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(2)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(3)_t$	1	0.1913	0.2705	0.5104	0.0179	0.4240	0.0038
	B_{E_t}	5	0.0528	0.1055	0.0930	0.0021	0.0399	0.0017
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(2)_t$	2	0.2297	0.3248	0.5522	0.2146	0.4469	0.2026
	$m(3)_t$	1	0.1913	0.2705	0.5104	0.0179	0.4240	0.0038
	B_{E_t}	5	0.0528	0.1055	0.0930	0.0021	0.0399	0.0017

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

5.2.3. Perturbando a variável cornite (componente 3)

Aqui, a variável Y_{t3} , que representa a terceira componente, foi perturbada; essa é a variável fixa. Para o esquema de perturbação aditiva 1, percebemos que a maior direção ocorre com a retirada do mineral *blandite*.

Tabela 5.2.3.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para a retirada dos seguintes minerais			
	<i>Endite</i>	<i>Daubite</i>	<i>Blandite</i>	<i>Albite</i>
Aditiva 1	0.99907	0.99911	0.99971	0.99905
	0.04319	0.04213	0.02418	0.04353
	0.00109	0.00164	0.00047	0.00183
	0.00004	0.00004	0.00004	0.00039
Aditiva 2	0.99942	0.99942	0.99942	0.99942
	0.03409	0.03409	0.03409	0.03409
	0.00108	0.00108	0.00108	0.00108
	0.00022	0.00022	0.00022	0.00022
	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
Multiplicativa	0.99692	0.99692	0.99692	0.99692
	0.07841	0.07841	0.07841	0.07841
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	0.00354	0.00354	0.00354	0.00354
	0.00023	0.00023	0.00023	0.00023
	0.00012	0.00012	0.00012	0.00012
	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

Nas Tabelas 5.2.3.2 e 5.2.3.3, apresentamos os resultados para os esquemas de perturbação aditiva 1 e aditiva 2, respectivamente. Verificamos que, para os dois esquemas, as observações 5 e 16 são extremamente influentes e que o nível de influência da observação 5 está acima da média, o que ocorre independentemente do mineral retirado.

Na Tabela 5.2.3.4 apresentamos os resultados para o esquema de perturbação multiplicativa. Observamos que as observações 9, 11 e 24 foram identificadas como fortemente influentes e que a observação 9 tem seu nível de influência muito grande, independentemente do mineral retirado.

5.2.4. Perturbando a variável daubite (componente 4)

Neste caso, a variável Y_{t4} , que representa a quarta componente, será perturbada; essa é a variável fixa.

Na Tabela 5.2.4.1 apresentamos os autovalores normalizados não-nulos. Observamos que as maiores direções ocorrem com a retirada dos minerais *endite*.

Com os resultados obtidos para o esquema de perturbação aditiva 1 (Tabela 5.2.4.2), percebemos que a observação 5 foi identificada como extremamente influente, com a retirada

Tabela 5.2.3.2. Medidas de observações influentes para esquema de perturbação aditiva 1.

Sem o mineral	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações				
					obs 5	obs 9	obs 11	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8768	0.0840	0.0312	0.3160	0.0382
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8768	0.0840	0.0312	0.3160	0.0382
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8768	0.0840	0.0312	0.3160	0.0382
	B_{E_t}	5	0.0417	0.0835	0.5912	0.0006	2×10^{-5}	0.0100	4×10^{-5}
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8781	0.0816	0.0249	0.3172	0.0405
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8781	0.0816	0.0249	0.3172	0.0405
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8781	0.0816	0.0249	0.3172	0.0405
	B_{E_t}	5	0.0417	0.0834	0.5949	0.0005	1×10^{-5}	0.0102	5×10^{-5}
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	1	0.2000	0.2828	0.8829	0.0301	0.0137	0.3161	0.0146
	$m(2)_t$	1	0.2000	0.2828	0.8829	0.0301	0.0137	0.3161	0.0146
	$m(3)_t$	1	0.2000	0.2828	0.8829	0.0301	0.0137	0.3161	0.0146
	B_{E_t}	5	0.0410	0.0820	0.6091	2×10^{-5}	4×10^{-6}	0.0100	4×10^{-6}
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8785	0.0750	0.0243	0.3170	0.0358
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8785	0.0750	0.0243	0.3170	0.0358
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2827	0.8785	0.0750	0.0243	0.3170	0.0358
	B_{E_t}	5	0.0418	0.0836	0.5962	0.0005	1×10^{-5}	0.0101	4×10^{-5}

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.3.3. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 2.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações				
					obs 5	obs 9	obs 11	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	B_{E_t}	5	0.0414	0.0828	0.5993	0.0003	9.8×10^{-6}	0.0101	2.4×10^{-5}
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	B_{E_t}	5	0.0414	0.0828	0.5993	0.0003	9.8×10^{-6}	0.0101	2.4×10^{-5}
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	B_{E_t}	5	0.0414	0.0828	0.5993	0.0003	9.8×10^{-6}	0.0101	2.4×10^{-5}
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(2)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	$m(3)_t$	1	0.1999	0.2828	0.8797	0.0679	0.0238	0.3166	0.0325
	B_{E_t}	5	0.0414	0.0828	0.5993	0.0003	9.8×10^{-6}	0.0101	2.4×10^{-5}

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.3.4. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação multiplicativa.

Sem o mineral	Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações				
					obs 5	obs 9	obs 11	obs 16	obs 24
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(2)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(3)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	B_{E_t}	5	0.0430	0.0860	4×10^{-5}	0.4497	0.0076	3×10^{-5}	0.0157
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(2)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(3)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	B_{E_t}	5	0.0430	0.0860	4×10^{-5}	0.4497	0.0076	3×10^{-5}	0.0157
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(2)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(3)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	B_{E_t}	5	0.0430	0.0860	4×10^{-5}	0.4497	0.0076	3×10^{-5}	0.0157
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(2)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	$m(3)_t$	1	0.1997	0.2824	0.0412	0.8181	0.2941	0.0366	0.3534
	B_{E_t}	5	0.0430	0.0860	4×10^{-5}	0.4497	0.0076	3×10^{-5}	0.0157

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.4.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para a retirada dos seguintes minerais			
	<i>Endite</i>	<i>Cornite</i>	<i>Blandite</i>	<i>Albite</i>
Aditiva 1	0.97664	0.95786	0.97350	0.97579
	0.20219	0.28663	0.22824	0.20943
	0.07279	0.01844	0.01412	0.06249
	0.00058	0.00045	0.00046	0.00795
Aditiva 2	0.97674	0.97674	0.97674	0.97674
	0.20426	0.20426	0.20426	0.20426
	0.06489	0.06489	0.06489	0.06489
	0.00723	0.00723	0.00723	0.00723
	0.00007	0.00007	0.00007	0.00007
Multiplicativa	0.99675	0.99675	0.99675	0.99675
	0.08059	0.08059	0.08059	0.08059
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	0.00354	0.00354	0.00354	0.00354
	0.00023	0.00023	0.00023	0.00023
	0.00012	0.00012	0.00012	0.00012
	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

de qualquer mineral, porém seu nível de influência está acima da média apenas com a retirada dos minerais *endite*, *blandite* e *albite*. A observação 9 foi identificada como fortemente influente apenas com a retirada do mineral *cornite* e a observação 16 só não foi identificada como influente com a retirada deste mineral. Com a retirada do mineral *albite*, a observação 16 contribui apenas nas direções de maiores influências.

Na Tabela 5.2.4.3 apresentamos os resultados para o esquema de perturbação aditiva 2. Observamos que apenas a observação 5 foi identificada como influente (extremamente influente), apresentando nível de influência muito elevado.

Não apresentamos os resultados para o esquema de perturbação multiplicativa pois não identificamos nenhuma observação influente.

5.2.5. Perturbando a variável *endite* (componente 5)

Aqui, a variável Y_{t5} , que representa a quinta componente, foi perturbada segundo os esquemas de perturbação; essa é a variável fixa.

Com os resultados da Tabela 5.2.5.1, podemos observar que a maior direção é dada pela retirada do mineral *albite*, independentemente do tipo de perturbação estudado. Através dos resultados para o esquema de perturbação aditiva 1 (Tabela 5.2.5.2), percebemos que as observações 5 e 16 são extremamente influentes, sendo que o nível de influência da observação 5 está acima da média, o que é detectado apenas com a retirada dos minerais *daubite*, *blandite* e *albite*. Com a retirada do mineral *cornite*, verificamos que a observação 9 é influente (fortemente influente), porém seu nível de influência não está acima da média.

Na Tabela 5.2.5.3 apresentamos os resultados para o esquema de perturbação aditiva 2. Observamos que as observações 5 e 16 foram identificadas como extremamente influentes, a

Tabela 5.2.4.2. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 1.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações		
					obs 5	obs 9	obs 16
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	2	0.2171	0.3071	0.7787	0.2809	0.3088
	$m(2)_t$	1	0.1976	0.2795	0.7432	0.2186	0.3084
	$m(3)_t$	1	0.1976	0.2795	0.7432	0.2186	0.3084
	B_{E_t}	5	0.0501	0.1002	0.3686	0.0128	0.0095
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2231	0.3155	0.4113	0.4948	0.2770
	$m(2)_t$	1	0.1957	0.2768	0.3413	0.3578	0.2436
	$m(3)_t$	1	0.1957	0.2768	0.3413	0.3578	0.2436
	B_{E_t}	5	0.0505	0.1011	0.0288	0.0610	0.0059
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	2	0.2192	0.3101	0.7951	0.1959	0.3225
	$m(2)_t$	1	0.1973	0.2791	0.7667	0.0931	0.3224
	$m(3)_t$	1	0.1973	0.2791	0.7667	0.0931	0.3224
	B_{E_t}	5	0.0487	0.0973	0.4001	0.0015	0.0108
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2177	0.3079	0.7755	0.2634	0.3086
	$m(2)_t$	1	0.1976	0.2794	0.7389	0.2031	0.3084
	$m(3)_t$	1	0.1976	0.2794	0.7389	0.2031	0.3084
	B_{E_t}	5	0.0502	0.1005	0.3624	0.0098	0.0094

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.4.3. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 2.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações		
					obs 5	obs 9	obs 16
<i>Endite</i>	$m(1)_t$	2	0.2173	0.3074	0.7064	0.2756	0.3051
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	B_{E_t}	5	0.0501	0.1003	0.2493	0.0113	0.0090
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2173	0.3074	0.7064	0.2756	0.3051
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	B_{E_t}	5	0.0501	0.1003	0.2493	0.0113	0.0090
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	2	0.2173	0.3074	0.7064	0.2756	0.3051
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	B_{E_t}	5	0.0501	0.1003	0.2493	0.0113	0.0090
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2173	0.3074	0.7064	0.2756	0.3051
	$m(2)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	$m(3)_t$	1	0.1977	0.2795	0.6466	0.2433	0.3038
	B_{E_t}	5	0.0501	0.1003	0.2493	0.0113	0.0090

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.5.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para a retirada dos seguintes minerais			
	<i>Daubite</i>	<i>Cornite</i>	<i>Blandite</i>	<i>Albite</i>
Aditiva 1	0.96298	0.94814	0.96119	0.96367
	0.25093	0.31749	0.27556	0.25326
	0.09854	0.01522	0.01306	0.08479
	0.00046	0.00048	0.00034	0.00395
Aditiva 2	0.95473	0.95473	0.95473	0.95473
	0.28437	0.28437	0.28437	0.28437
	0.08721	0.08721	0.08721	0.08721
	0.00364	0.00364	0.00364	0.00364
	0.00007	0.00007	0.00007	0.00007
Multiplicativa	0.99893	0.99893	0.99893	0.99893
	0.04630	0.04630	0.04630	0.04630
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	0.00354	0.00354	0.00354	0.00354
	0.00023	0.00023	0.00023	0.00023
	0.00012	0.00012	0.00012	0.00012
	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

observação 5 tem nível de influência acima da média e a observação 16 contribui apenas nas direções de maiores influências.

Não apresentamos os resultados para o esquema de perturbação multiplicativa pois não detectamos nenhuma observação influente.

5.2.6. Resultados da comparação das estimativas

A Tabela 5.2.6 apresenta os resultados de comparação das estimativas dos parâmetros da distribuição Dirichlet usando todas as observações com as estimativas após a retirada de algumas observações influentes. Como já foi visto, a observação 5 foi a mais influente quando retiramos os minerais *endite*, *daubite* e *blandite*, neste sentido notamos que essa observação foi a que causou maior impacto nas estimativas de todos os parâmetros. Quando retiramos o mineral *cornite*, as observações 9 e 24 causaram bastante impacto nas estimativas dos parâmetros, sendo que a retirada da observação 9 causou impacto maior ainda. A retirada da observação 11 não causa uma mudança muito grande nas estimativas dos parâmetros.

5.3. Dados de padrões de atividade de um estatístico

Considere os dados reproduzidos em Aitchison (2003, p. 365) sobre os padrões de atividade acadêmica de um estatístico durante 20 dias. Esses dados consistem em proporções de horas, dentre as 24 horas no dia, dedicadas a cada atividade. As atividades são: ensino (Y_{t1}), consultoria (Y_{t2}), administração (Y_{t3}), pesquisa (Y_{t4}), outras (Y_{t5}) e sono (Y_{t6}), $t = 1, \dots, n$, onde n representa o número de observações. Estes dados podem ser vistos na Tabela D.3 do

Tabela 5.2.5.2. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 1.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações		
					obs 5	obs 9	obs 16
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	2	0.2204	0.3116	0.7903	0.2388	0.3035
	$m(2)_t$	1	0.1963	0.2776	0.7471	0.2191	0.3028
	$m(3)_t$	1	0.1963	0.2776	0.7471	0.2191	0.3028
	B_{E_t}	5	0.0525	0.1050	0.3903	0.0131	0.0087
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2250	0.3182	0.2827	0.5214	0.2184
	$m(2)_t$	1	0.1947	0.2754	0.2626	0.3464	0.2054
	$m(3)_t$	1	0.1947	0.2754	0.2626	0.3464	0.2054
	B_{E_t}	5	0.0513	0.1025	0.0068	0.0743	0.0024
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	2	0.2224	0.3145	0.8146	0.1528	0.3230
	$m(2)_t$	1	0.1961	0.2773	0.7826	0.0866	0.3228
	$m(3)_t$	1	0.1961	0.2773	0.7826	0.0866	0.3228
	B_{E_t}	5	0.0500	0.1000	0.4404	0.0006	0.0109
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2206	0.3120	0.7930	0.2293	0.3077
	$m(2)_t$	1	0.1963	0.2777	0.7532	0.2089	0.3072
	$m(3)_t$	1	0.1963	0.2777	0.7532	0.2089	0.3072
	B_{E_t}	5	0.0522	0.1045	0.3961	0.0101	0.0091

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.5.3. Medidas de observações influentes para o esquema de perturbação aditiva 2.

Sem o mineral	Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações		
					obs 5	obs 9	obs 16
<i>Daubite</i>	$m(1)_t$	2	0.2226	0.3148	0.7232	0.2436	0.2980
	$m(2)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	$m(3)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	B_{E_t}	5	0.0532	0.1064	0.2754	0.0117	0.0081
<i>Cornite</i>	$m(1)_t$	2	0.2226	0.3148	0.7232	0.2436	0.2980
	$m(2)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	$m(3)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	B_{E_t}	5	0.0532	0.1064	0.2754	0.0117	0.0081
<i>Blandite</i>	$m(1)_t$	2	0.2226	0.3148	0.7232	0.2436	0.2980
	$m(2)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	$m(3)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	B_{E_t}	5	0.0532	0.1064	0.2754	0.0117	0.0081
<i>Albite</i>	$m(1)_t$	2	0.2226	0.3148	0.7232	0.2436	0.2980
	$m(2)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	$m(3)_t$	1	0.1954	0.2764	0.6440	0.2406	0.2945
	B_{E_t}	5	0.0532	0.1064	0.2754	0.0117	0.0081

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.2.6. Comparação (e variação percentual) das estimativas dos parâmetros com a retirada de algumas observações influentes.

Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações				
		obs 5	obs 9	obs 11	obs 16	obs 24
α_1	7.4833	8.2206 (9.85%)	9.8127 (31.13%)	8.0808 (7.98%)	7.7719 (3.86%)	8.2776 (10.61%)
α_2	3.3723	3.5468 (5.17%)	4.5422 (34.69%)	3.7042 (9.84%)	3.3799 (0.23%)	3.8460 (14.05%)
α_3	2.1194	2.5228 (19.03%)	2.4396 (15.11%)	2.1319 (0.59%)	2.3252 (9.71%)	2.1704 (2.41%)
α_4	1.9798	2.1981 (11.03%)	2.4599 (24.25%)	2.1136 (6.76%)	2.0721 (4.66%)	2.1242 (7.29%)
α_5	1.8285	2.0011 (9.44%)	2.2427 (22.65%)	1.8966 (3.72%)	1.8961 (3.70%)	1.9753 (8.03%)

Apêndice D sem a variável sono, pois esta foi escolhida para ser retirada da análise.

5.3.1. Perturbando a variável ensino (componente 1)

Para o esquema de perturbação aditiva 1, os autovalores normalizados não-nulos são 0.94803, 0.31817, 0.00139, 0.00089 e 0.00051; para o esquema de perturbação aditiva 2, os autovalores normalizados não-nulos são 0.93427, 0.35655, 0.00099, 0.00068, 0.00058 e 0.00031; para o esquema de perturbação multiplicativa os autovalores normalizados não-nulos são 0.94742 e 0.31998; e para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança os autovalores normalizados não-nulos são 0.9999999, 0.0000037, 0.0000013, 0.0000009, 0.0000006 e 0.0000002.

Tabela 5.3.1.1. Medidas de observações influentes.

Esquema de perturbação aditiva 1						
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações		
				obs 13	obs 18	obs 20
$m(1)_t$	2	0.2516	0.3558	0.3601	0.3756	0.3358
$m(2)_t$	1	0.2177	0.3079	0.3021	0.3109	0.3008
$m(3)_t$	1	0.2177	0.3079	0.3021	0.3109	0.3008
B_{E_t}	6	0.0634	0.1269	0.0168	0.0200	0.0128
Esquema de perturbação aditiva 2						
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações		
				obs 13	obs 18	obs 20
$m(1)_t$	2	0.2540	0.3593	0.3790	0.3847	0.3662
$m(2)_t$	1	0.2161	0.3057	0.3147	0.3214	0.3145
$m(3)_t$	1	0.2161	0.3057	0.3147	0.3214	0.3145
B_{E_t}	6	0.0647	0.1293	0.0206	0.0219	0.0180

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Na Tabela 5.3.1.1 apresentamos os resultados para os esquemas de perturbação aditiva 1 e aditiva 2, os resultados para o esquema de perturbação multiplicativa não serão apresentados, pois não foi detectada nenhuma observação influente quando perturbamos a primeira componente. Podemos observar que, para o esquema de perturbação aditiva 1, as observações 13 e 18 foram identificadas como fortemente influentes, através das medidas $m(q)_t$, $q = 1, 2, 3$. Para o esquema de perturbação aditiva 2, além das observações 13 e 18, a observação 20 também foi detectada com forte influência local. Nos dois esquemas observamos que, a medida B_{E_t} não detectou nenhuma observação mais influente que a média.

5.3.2. Perturbando a variável consultoria (componente 2)

Para o esquema de perturbação aditiva 1, os autovalores normalizados não-nulos são 0.98172, 0.19031, 0.00151, 0.00080 e 0.00027; para o esquema de perturbação aditiva 2, os autovalores normalizados não-nulos são 0.98307, 0.18325, 0.00122, 0.00054, 0.00052 e 0.00017; para o

esquema de perturbação multiplicativa os autovalores normalizados não-nulos são 0.97487 e 0.22279; e para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança os autovalores normalizados não-nulos são 0.9999999, 0.0000037, 0.0000013, 0.0000009, 0.0000006 e 0.0000002. Ao perturbarmos a componente 2, notamos que não foi detectada nenhuma observação influente para nenhum dos esquemas estudados.

5.3.3. Perturbando a variável administração (componente 3)

Para o esquema de perturbação aditiva 1, os autovalores normalizados não-nulos são 0.95982, 0.28060, 0.00160, 0.00082 e 0.00037; para o esquema de perturbação aditiva 2, os autovalores normalizados não-nulos são 0.97103, 0.23895, 0.00114, 0.0008, 0.00055 e 0.00025; para o esquema de perturbação multiplicativa os autovalores normalizados não-nulos são 0.96736 e 0.25341; e para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança os autovalores normalizados não-nulos são 0.9999999, 0.0000037, 0.0000013, 0.0000009, 0.0000006 e 0.0000002. Ao perturbarmos a componente 3, para nenhum dos esquemas estudados, não identificamos nenhuma observação influente.

5.3.4. Perturbando a variável pesquisa (componente 4)

Para o esquema de perturbação aditiva 1, os autovalores normalizados não-nulos são 0.99120, 0.13234, 0.00184, 0.00098 e 0.00042; para o esquema de perturbação aditiva 2, os autovalores normalizados não-nulos são 0.98957, 0.14403, 0.00125, 0.00078, 0.00056 e 0.00025; para o esquema de perturbação multiplicativa os autovalores normalizados não-nulos são 0.98350 e 0.18090; e para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança os autovalores normalizados não-nulos são 0.9999999, 0.0000037, 0.0000013, 0.0000009, 0.0000006 e 0.0000002. Ao perturbarmos a componente 4, para nenhum dos esquemas estudados, não detectamos nenhuma observação influente.

5.3.5. Perturbando a variável outras atividades (componente 5)

Para o esquema de perturbação aditiva 1, os autovalores normalizados não-nulos são 0.93738, 0.34829, 0.00304, 0.00176 e 0.00053; para o esquema de perturbação aditiva 2, os autovalores normalizados não-nulos são 0.90981, 0.41501, 0.00216, 0.00123, 0.00092 e 0.00034; para o esquema de perturbação multiplicativa os autovalores normalizados não-nulos são 0.91062 e 0.41325; e para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança os autovalores normalizados não-nulos são 0.9999999, 0.0000037, 0.0000013, 0.0000009, 0.0000006 e 0.0000002.

Na Tabela 5.3.5.1 apresentamos os resultados para os esquemas com os três tipos de perturbação. Para o esquema de perturbação aditiva 1, notamos que apenas a observação 4 foi identificada como extremamente influente. Para o esquema de perturbação aditiva 2, verificamos que as observações identificadas como influentes foram as observações 4 e 20 (note que a vigésima observação já tinha sido detectada como influente quando a primeira componente foi perturbada); a observação 20 foi identificada apenas como levemente influente, e a observação 4 como extremamente influente, assim como no esquema de perturbação

Tabela 5.3.5.1. Medidas de observações influentes.

Esquema de perturbação aditiva 1					
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações	
				obs 4	obs 20
$m(1)_t$	2	0.2535	0.3586	0.4912	0.3346
$m(2)_t$	1	0.2165	0.3062	0.3118	0.2861
$m(3)_t$	1	0.2165	0.3062	0.3118	0.2861
B_{E_t}	6	0.0645	0.1291	0.0583	0.0126
Esquema de perturbação aditiva 2					
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações	
				obs 4	obs 20
$m(1)_t$	2	0.2574	0.3640	0.5063	0.3732
$m(2)_t$	1	0.2133	0.3016	0.3363	0.3012
$m(3)_t$	1	0.2133	0.3016	0.3363	0.3012
B_{E_t}	6	0.0665	0.1329	0.0658	0.0195
Esquema de perturbação multiplicativa					
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações	
				obs 4	obs 20
$m(1)_t$	2	0.2573	0.3639	0.3652	0.3268
$m(2)_t$	1	0.2134	0.3018	0.1638	0.1713
$m(3)_t$	1	0.2134	0.3018	0.1638	0.1713
B_{E_t}	6	0.0662	0.1324	0.0178	0.0114

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

aditiva 1. Para o esquema de perturbação multiplicativa, apenas a observação 4 foi detectada como influente, porém essa influência foi detectada apenas pela medida $m(1)_t$. Nenhuma observação foi identificada com nível de influência acima da média.

5.3.6. Resultados da comparação das estimativas

A Tabela 5.3.6 apresenta os resultados da comparação das estimativas dos parâmetros da distribuição Dirichlet usando todas as observações com as estimativas após a retirada de algumas observações influentes. Podemos observar que, dentre as observações influentes, a que causa maior impacto nas estimativas dos parâmetros após sua retirada é a observação 20. A retirada da observação 4, notamos que houve um aumento nas estimativas dos α 's, porém esse aumento não é tão grande quanto na retirada da observação 20. A retirada das outras observações não causa um impacto substancial nas estimativas desses parâmetros.

5.4. Dados de composição de células brancas

Consideraremos agora os dados reproduzidos em Aitchison (2003, p. 366). Esses dados foram coletados por um citologista interessado na possibilidade de introduzir em seu laboratório um novo método para determinar a composição de células brancas de uma amostra de sangue,

Tabela 5.3.6. Comparação (e variação percentual) das estimativas dos parâmetros com a retirada de algumas observações influentes.

Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações			
		obs 4	obs 13	obs 18	obs 20
α_1	28.7295	29.8958 (4.06%)	29.5650 (2.91%)	29.6810 (3.31%)	32.3223 (12.51%)
α_2	19.9477	21.1145 (5.85%)	20.0776 (0.65%)	20.3292 (1.91%)	22.1725 (11.15%)
α_3	24.6256	25.7250 (4.46%)	24.8235 (0.80%)	24.7784 (0.62%)	27.1178 (10.12%)
α_4	21.9652	22.8750 (4.14%)	22.3061 (1.55%)	22.5383 (2.61%)	24.2155 (10.24%)
α_5	44.8084	48.0778 (7.30%)	45.6211 (1.81%)	45.1132 (0.68%)	50.3967 (12.47%)
α_6	54.2163	56.6896 (4.56%)	54.3234 (0.20%)	54.8624 (1.19%)	58.9975 (8.82%)

definindo-se como composição as proporções de três tipos de células brancas, que são *granulocytes* (Y_{t1}), *lymphocytes* (Y_{t2}) e *monocytes* (Y_{t3}), $t = 1, \dots, n$, onde n representa o número de observações, entre o total de células brancas observadas. O método mais comum envolve uma inspeção microscópica muito demorada, além de requerer uma precisão de quem está realizando a análise. O método proposto é uma análise de imagem automática rápida cuja precisão ainda é largamente indeterminada. O experimento para avaliar a efetividade do método proposto é baseado em duas amostras sanguíneas de 30 observações cada. Porém, retiramos duas observações cuja soma foi maior que 1 e trabalhamos com tamanhos de amostra iguais a 28. Estes dados encontram-se na Tabela D.4 do Apêndice D.

Analizamos a influência nas duas amostras separadamente para depois compararmos os resultados e verificar se encontramos as mesmas observações influentes nos dois métodos. Para cada método, temos três componentes ($p = 3$) de uma distribuição Dirichlet; como temos que trabalhar com apenas $p - 1$ variáveis aleatórias, é necessário escolher uma das variáveis para ser retirada da análise. Assim como nas seções anteriores, iremos perturbar as três componentes uma a uma.

5.4.1. Perturbando a variável granulocytes (componente 1)

Neste caso, a variável Y_{t1} será perturbada segundo os esquemas de perturbação considerados; logo, essa é a variável fixa, a variável a ser retirada podendo ser qualquer uma das que restaram. Entretanto, optamos por fazer uma permutação entre essas variáveis e verificar qual delas tem a maior direção para que pudéssemos identificar as observações influentes.

Tabela 5.4.1.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para os seguintes métodos			
	Inspeção microscópica		Análise de imagem	
	<i>sem monocytes</i>	<i>sem lymphocytes</i>	<i>sem monocytes</i>	<i>sem lymphocytes</i>
Aditiva 1	0.98631	0.99870	0.99228	0.99890
	0.16488	0.05096	0.12399	0.04696
Aditiva 2	0.98578	0.98578	0.98986	0.98986
	0.16544	0.16544	0.13917	0.13917
	0.02949	0.02949	0.02829	0.02829
Multiplicativa	0.99938	0.99938	0.99950	0.99950
	0.03527	0.03527	0.03146	0.03146
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99961	0.99961	0.99974	0.99974
	0.02591	0.02591	0.02115	0.02113
	0.01002	0.01002	0.00816	0.00816

Na Tabela 5.4.1.1 apresentamos os autovalores normalizados não-nulos para os dois esquemas de perturbação considerados com as diferentes direções utilizadas. Verificamos que a maior direção ocorre quando retiramos a célula do tipo *lymphocytes*, à qual corresponde o maior autovalor normalizado entre os autovalores máximos, independentemente do tipo de perturbação adotado, pois para o esquema de perturbação aditiva 2 e para os esquemas

de perturbações multiplicativas podemos escolher trabalhar com qualquer direção. Logo, perturbando a componente 1, iremos trabalhar com a retirada da variável *lymphocytes*.

Nas Tabelas 5.4.1.2 e 5.4.1.3 apresentamos os resultados para os métodos de inspeção microscópica e análise de imagem, respectivamente, segundo os esquemas de perturbação considerados. Esses resultados mostram que as observações 6, 9, e 27 foram identificadas como fortemente influentes; essas observações influentes foram detectadas através dos três tipos de perturbação, aditiva 1, aditiva 2 e multiplicativa; as observações 1 e 10 foram identificadas como fortemente influentes, porém essa influência foi identificada apenas no esquema de perturbação aditiva 1; a observação 7 também foi identificada como fortemente influente através do esquema de perturbação multiplicativa; esses resultados foram observados independentemente do método em estudo, sugerindo assim que o método de análise de imagem é tão robusto quanto o de inspeção microscópica, quando perturbamos a componente correspondente à célula branca do tipo *granulocytes*. Porém, para o esquema de perturbação aditiva 2, essa robustez não é tão evidente, pois para o método de inspeção microscópica foram detectadas como influentes as observações 1, 6, 9 e 27, ao passo que, para o método de análise de imagem, as observações detectadas como influentes foram 6, 7, 9 e 27.

5.4.2. Perturbando a variável *lymphocytes* (componente 2)

Os autovalores normalizados não-nulos para os esquemas de perturbação na segunda componente estão apresentados na Tabela 5.4.2.1. Neste caso, já existe uma contradição em relação aos dois métodos, pois para o método de inspeção microscópica o maior autovalor entre os autovalores máximos é dado ao retirarmos a variável *granulocytes* e para o método de análise de imagem é dado ao retirarmos a variável *monocytes*, o que é verificado para o esquema de perturbação aditiva 1. Logo, perturbando a componente 2, iremos trabalhar nas duas direções, ou seja, primeiro trabalhamos com a retirada da variável *monocytes* e depois com a retirada da variável *granulocytes*.

Na Tabela 5.4.2.2 apresentamos os resultados para o método de inspeção microscópica sem a variável *monocytes*. Para o esquema de perturbação aditiva 1, percebemos que as observações 6, 7, 9 e 27 são extremamente influentes, sendo que a observação 6 tem seu nível de influência acima da média. Para o esquema de perturbação aditiva 2, as mesmas observações detectadas como extremamente influentes para o tipo de perturbação aditiva 1 foram detectadas. Para o esquema de perturbação multiplicativa, encontramos as observações 11, 13, 24 e 25 apresentando forte influência; a observação 24 é mais influente do que a média.

Para o método de análise de imagem, com a retirada da variável *monocytes*, notamos que, para os esquemas de perturbação aditiva 1 e de perturbação aditiva 2, obtivemos as mesmas observações influentes identificadas no método de inspeção microscópica. Para o esquema de perturbação multiplicativa, os resultados mudam um pouco; a observação 25 não é influente para este método e, em vez da observação 24, a observação 11 é que apresenta nível de influência acima da média (Tabela 5.4.2.3).

Nas Tabelas 5.4.2.4 e 5.4.2.5 são apresentados os resultados para os métodos de inspeção microscópica e de análise de imagem, respectivamente, sem a variável *granulocytes*. Para o esquema de perturbação aditiva 1, verificamos que as observações identificadas como influentes (fortemente influentes) para os dois métodos foram 1, 6, 9 e 27; a observação 10 foi detectada como extremamente influente apenas para o método de inspeção microscópica.

Tabela 5.4.1.2. Medidas de observações influentes para método de inspeção microscópica.

Esquema de perturbação aditiva 1										
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2671	0.3502	0.3250	0.2080	0.4730	0.2800	0.3855	
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2671	0.3502	0.3250	0.2080	0.4730	0.2800	0.3855	
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2671	0.3502	0.3250	0.2080	0.4730	0.2800	0.3855	
B_{E_t}	3	0.0375	0.0750	0.0152	0.0113	0.0019	0.0510	0.0062	0.0224	
Esquema de perturbação aditiva 2										
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1876	0.2654	0.2819	0.4402	0.2614	0.4679	0.2578	0.4196	
$m(2)_t$	1	0.1876	0.2654	0.2819	0.4402	0.2614	0.4679	0.2578	0.4196	
$m(3)_t$	1	0.1876	0.2654	0.2819	0.4402	0.2614	0.4679	0.2578	0.4196	
B_{E_t}	3	0.0375	0.0750	0.0152	0.0113	0.0051	0.0510	0.0062	0.0224	
Esquema de perturbação multiplicativa										
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2672	0.0449	0.6174	0.3372	0.3936	0.1628	0.4500	
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2672	0.0449	0.6174	0.3372	0.3936	0.1628	0.4500	
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2672	0.0449	0.6174	0.3372	0.3936	0.1628	0.4500	
B_{E_t}	3	0.0370	0.0739	1×10^{-5}	0.1458	0.0129	0.0240	0.0007	0.0410	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.1.3. Medidas de observações influentes para método de análise de imagem.

Esquema de perturbação aditiva 1										
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2671	0.2963	0.3827	0.2300	0.4695	0.2774	0.3825	
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2671	0.2963	0.3827	0.2300	0.4695	0.2774	0.3825	
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2671	0.2963	0.3827	0.2300	0.4695	0.2774	0.3825	
B_{E_t}	3	0.0374	0.0747	0.0077	0.0217	0.0028	0.0494	0.0060	0.0217	
Esquema de perturbação aditiva 2										
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1880	0.2659	0.2265	0.5060	0.2712	0.4485	0.2466	0.4025	
$m(2)_t$	1	0.1880	0.2659	0.2265	0.5060	0.2712	0.4485	0.2466	0.4025	
$m(3)_t$	1	0.1880	0.2659	0.2265	0.5060	0.2712	0.4485	0.2466	0.4025	
B_{E_t}	3	0.0413	0.0827	0.0034	0.0740	0.0056	0.0413	0.0039	0.0265	
Esquema de perturbação multiplicativa										
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações						
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2672	0.0454	0.6566	0.3163	0.3686	0.1596	0.4096	
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2672	0.0454	0.6566	0.3163	0.3686	0.1596	0.4096	
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2672	0.0454	0.6566	0.3163	0.3686	0.1596	0.4096	
B_{E_t}	3	0.0368	0.0736	1×10^{-5}	0.1866	0.0100	0.0185	0.0007	0.0281	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.2.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para os seguintes métodos			
	Inspeção microscópica		Análise de imagem	
	<i>sem monocytes</i>	<i>sem granulocytes</i>	<i>sem monocytes</i>	<i>sem granulocytes</i>
Aditiva 1	0.98631	0.99165	0.99228	0.99127
	0.16488	0.12895	0.12399	0.13185
Aditiva 2	0.94994	0.94994	0.96826	0.96826
	0.31205	0.31205	0.24963	0.24963
	0.01571	0.01571	0.01292	0.01292
Multiplicativa	0.99749	0.99749	0.99719	0.99720
	0.07084	0.07084	0.07489	0.07483
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99961	0.99961	0.99974	0.99974
	0.02591	0.02591	0.02115	0.02108
	0.01002	0.01002	0.00816	0.00815

Para o esquema de perturbação aditiva 2, quase todas as observações detectadas como extremamente influentes para o tipo de perturbação aditiva 1 foram detectadas também para este esquema, exceto a observação 10. Para o esquema de perturbação multiplicativa, a análise é a mesma para os dois métodos sem a variável *monocytes*.

5.4.3. Perturbando a variável *monocytes* (componente 3)

Tabela 5.4.3.1. Autovalores normalizados.

Tipo de perturbação	Valores para os seguintes métodos			
	Inspeção microscópica		Análise de imagem	
	<i>sem granulocytes</i>	<i>sem lymphocytes</i>	<i>sem granulocytes</i>	<i>sem lymphocytes</i>
Aditiva 1	0.99165	0.99870	0.99127	0.99890
	0.12895	0.05096	0.13185	0.04696
Aditiva 2	0.99928	0.99928	0.99923	0.99923
	0.03730	0.03730	0.03872	0.03872
	0.00693	0.00693	0.00687	0.00687
Multiplicativa	0.98364	0.98364	0.98072	0.98070
	0.18015	0.18015	0.19543	0.19551
Multiplicativa na log-verossimilhança	0.99961	0.99961	0.99974	0.99974
	0.02591	0.02591	0.02108	0.02113
	0.01002	0.01002	0.00815	0.00816

Perturbando a variável *monocytes*, temos que os maiores autovalores normalizados não-nulos, entre os máximos autovalores, são obtidos com a retirada da variável *lymphocytes*, quando o modelo tem o tipo de perturbação aditiva 1. Para os outros esquemas podemos trabalhar em qualquer direção, ou seja, podemos trabalhar com a retirada de qualquer tipo de célula branca (Tabela 5.4.3.1). Logo, perturbando a componente 3, iremos trabalhar com a retirada

Tabela 5.4.2.2. Medidas de observações influentes para método de inspeção microscópica sem a variável *monocytes*.

Esquema de perturbação aditiva 1												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 6	obs 7	obs 9	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1877	0.2654	0.6338	0.3448	0.3314	0.0928	0.0604	0.1396	0.0560	0.4025	
$m(2)_t$	1	0.1877	0.2654	0.6338	0.3448	0.3314	0.0928	0.0604	0.1396	0.0560	0.4025	
$m(3)_t$	1	0.1877	0.2654	0.6338	0.3448	0.3314	0.0928	0.0604	0.1396	0.0560	0.4025	
B_{E_t}	3	0.0411	0.0822	0.1614	0.0142	0.0121	0.0010	0.0003	0.0040	0.0002	0.0263	
Esquema de perturbação aditiva 2												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 6	obs 7	obs 9	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	2	0.2123	0.3002	0.5510	0.3109	0.4094	0.1927	0.2170	0.2219	0.1064	0.1554	
$m(2)_t$	1	0.1842	0.2605	0.4927	0.2900	0.4012	0.0826	0.1084	0.0804	0.0507	0.3991	
$m(3)_t$	1	0.1842	0.2605	0.4927	0.2900	0.4012	0.0826	0.1084	0.0804	0.0507	0.3991	
B_{E_t}	3	0.0456	0.0913	0.0922	0.0094	0.0286	0.0014	0.0022	0.0026	0.0001	0.0258	
Esquema de perturbação multiplicativa												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 6	obs 7	obs 9	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0371	0.0324	0.0320	0.4787	0.3252	0.7150	0.2716	0.0338	
$m(2)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0371	0.0324	0.0320	0.4787	0.3252	0.7150	0.2716	0.0338	
$m(3)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0371	0.0324	0.0320	0.4787	0.3252	0.7150	0.2716	0.0338	
B_{E_t}	3	0.0382	0.0763	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	0.0525	0.0112	0.2623	0.0055	2×10^{-5}	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.2.3. Medidas de observações influentes para método de análise de imagem sem a variável *monocytes*.

Esquema de perturbação aditiva 1												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 6	obs 7	obs 9	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1883	0.2662	0.6738	0.3152	0.3083	0.0934	0.0722	0.0760	0.0367	0.3658	
$m(2)_t$	1	0.1883	0.2662	0.6738	0.3152	0.3083	0.0934	0.0722	0.0760	0.0367	0.3658	
$m(3)_t$	1	0.1883	0.2662	0.6738	0.3152	0.3083	0.0934	0.0722	0.0760	0.0367	0.3658	
B_{E_t}	3	0.0399	0.0797	0.2065	0.0099	0.0091	0.0011	0.0005	0.0006	0.0001	0.0179	
Esquema de perturbação aditiva 2												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 6	obs 7	obs 9	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	2	0.2086	0.2949	0.6073	0.2994	0.3870	0.1673	0.1884	0.1542	0.0960	0.3774	
$m(2)_t$	1	0.1860	0.2630	0.5719	0.2936	0.3704	0.0468	0.0651	0.0484	0.0406	0.3772	
$m(3)_t$	1	0.1860	0.2630	0.5719	0.2936	0.3704	0.0468	0.0651	0.0484	0.0406	0.3772	
B_{E_t}	3	0.0440	0.0879	0.1360	0.0080	0.0228	0.0009	0.0013	0.0006	0.0001	0.0204	
Esquema de perturbação multiplicativa												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 6	obs 7	obs 9	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0367	0.0311	0.0308	0.6059	0.4850	0.4927	0.2385	0.0325	
$m(2)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0367	0.0311	0.0308	0.6059	0.4850	0.4927	0.2385	0.0325	
$m(3)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0367	0.0311	0.0308	0.6059	0.4850	0.4927	0.2385	0.0325	
B_{E_t}	3	0.0383	0.0766	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	0.1351	0.0553	0.0589	0.0033	2×10^{-5}	

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.2.4. Medidas de observações influentes para método de inspeção microscópica sem a variável *granulocytes*.

Esquema de perturbação aditiva 1														
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações										
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1882	0.2661	0.3299	0.3329	0.2137	0.4523	0.2693	0.1644	0.2075	0.1714	0.0885	0.3766	
$m(2)_t$	1	0.1882	0.2661	0.3299	0.3329	0.2137	0.4523	0.2693	0.1644	0.2075	0.1714	0.0885	0.3766	
$m(3)_t$	1	0.1882	0.2661	0.3299	0.3329	0.2137	0.4523	0.2693	0.1644	0.2075	0.1714	0.0885	0.3766	
B_{E_t}	3	0.0400	0.0800	0.0157	0.0238	0.0032	0.0422	0.0055	0.0010	0.0026	0.0012	0.0001	0.0209	
Esquema de perturbação aditiva 2														
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações										
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	2	0.2123	0.3002	0.2926	0.5510	0.3109	0.4094	0.2346	0.1927	0.2170	0.2219	0.1064	0.1554	
$m(2)_t$	1	0.1842	0.2605	0.1980	0.4927	0.2900	0.4012	0.2170	0.0826	0.1084	0.0804	0.0507	0.3991	
$m(3)_t$	1	0.1842	0.2605	0.1980	0.4927	0.2900	0.4012	0.2170	0.0826	0.1084	0.0804	0.0507	0.3991	
B_{E_t}	3	0.0456	0.0913	0.0075	0.0922	0.0094	0.0286	0.0031	0.0014	0.0022	0.0026	0.0001	0.0258	
Esquema de perturbação multiplicativa														
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações										
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27	
$m(1)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0215	0.0371	0.0324	0.0320	0.0188	0.4787	0.3252	0.7150	0.2716	0.0338	
$m(2)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0215	0.0371	0.0324	0.0320	0.0188	0.4787	0.3252	0.7150	0.2716	0.0338	
$m(3)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0215	0.0371	0.0324	0.0320	0.0188	0.4787	0.3252	0.7150	0.2716	0.0338	
B_{E_t}	3	0.0382	0.0763	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	1×10^{-5}	0.0525	0.0112	0.2623	0.0055	2×10^{-5}	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.2.5. Medidas de observações influentes para método de análise de imagem sem a variável *granulocytes*.

Esquema de perturbação aditiva 1													
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27
$m(1)_t$	1	0.1882	0.2661	0.2693	0.4081	0.2402	0.4429	0.2620	0.1331	0.1689	0.1332	0.0882	0.3751
$m(2)_t$	1	0.1882	0.2661	0.2693	0.4081	0.2402	0.4429	0.2620	0.1331	0.1689	0.1332	0.0882	0.3751
$m(3)_t$	1	0.1882	0.2661	0.2693	0.4081	0.2402	0.4429	0.2620	0.1331	0.1689	0.1332	0.0882	0.3751
B_{E_t}	3	0.0401	0.0802	0.0077	0.0441	0.0040	0.0398	0.0051	0.0005	0.0014	0.0005	0.0001	0.0200

Esquema de perturbação aditiva 2													
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27
$m(1)_t$	2	0.2086	0.2949	0.2329	0.6073	0.2994	0.3870	0.2215	0.1673	0.1884	0.1542	0.0960	0.3774
$m(2)_t$	1	0.1860	0.2630	0.1446	0.5719	0.2936	0.3704	0.1978	0.0468	0.0651	0.0484	0.0406	0.3772
$m(3)_t$	1	0.1860	0.2630	0.1446	0.5719	0.2936	0.3704	0.1978	0.0468	0.0651	0.0484	0.0406	0.3772
B_{E_t}	3	0.0440	0.0879	0.0030	0.1360	0.0080	0.0228	0.0024	0.0009	0.0013	0.0006	0.0001	0.0204

Esquema de perturbação multiplicativa													
Medidas	Q_e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
				obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13	obs 24	obs 25	obs 27
$m(1)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0211	0.0367	0.0311	0.0308	0.0183	0.6059	0.4850	0.4927	0.2385	0.0325
$m(2)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0211	0.0367	0.0311	0.0308	0.0183	0.6059	0.4850	0.4927	0.2385	0.0325
$m(3)_t$	1	0.1887	0.2669	0.0211	0.0367	0.0311	0.0308	0.0183	0.6059	0.4850	0.4927	0.2385	0.0325
B_{E_t}	3	0.0383	0.0766	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	1×10^{-5}	0.1351	0.0553	0.0589	0.0033	2×10^{-5}

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.3.2. Medidas de observações influentes para método de inspeção microscópica sem a variável *lymphocytes*.

Esquema de perturbação aditiva 1													
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
				obs 1	obs 6	obs 9	obs 10	obs 15	obs 16	obs 18	obs 23		
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2671	0.3502	0.3250	0.4730	0.2797	0.0098	0.0048	0.0102	0.0124		
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2671	0.3502	0.3250	0.4730	0.2797	0.0098	0.0048	0.0102	0.0124		
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2671	0.3502	0.3250	0.4730	0.2797	0.0098	0.0048	0.0102	0.0124		
B_{E_t}	3	0.0375	0.0750	0.0152	0.0113	0.0510	0.0062	1×10^{-5}	8×10^{-6}	1×10^{-5}	1×10^{-5}		
Esquema de perturbação aditiva 2													
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
				obs 1	obs 6	obs 9	obs 10	obs 15	obs 16	obs 18	obs 23		
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2672	0.3528	0.3071	0.4644	0.2784	0.0006	0.0036	0.0018	0.0031		
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2672	0.3528	0.3071	0.4644	0.2784	0.0006	0.0036	0.0018	0.0031		
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2672	0.3528	0.3071	0.4644	0.2784	0.0006	0.0036	0.0018	0.0031		
B_{E_t}	3	0.0373	0.0745	0.0168	0.0109	0.0470	0.0061	5×10^{-6}	4×10^{-6}	1×10^{-5}	1×10^{-5}		
Esquema de perturbação multiplicativa													
Medidas	Qe	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações									
				obs 1	obs 6	obs 9	obs 10	obs 15	obs 16	obs 18	obs 23		
$m(1)_t$	2	0.1874	0.2651	0.0206	0.0198	0.0228	0.0183	0.4064	0.3168	0.5301	0.6074		
$m(2)_t$	2	0.1874	0.2651	0.0206	0.0198	0.0228	0.0183	0.4064	0.3168	0.5301	0.6074		
$m(3)_t$	1	0.1874	0.2651	0.0206	0.0198	0.0228	0.0183	0.4064	0.3168	0.5301	0.6074		
B_{E_t}	3	0.0416	0.0831	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0273	0.0102	0.0790	0.1365		

Qe representa a quantidade de autovetores influentes

Tabela 5.4.3.3. Medidas de observações influentes para método de análise de imagem sem a variável *lymphocytes*.

Esquema de perturbação aditiva 1												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 1	obs 6	obs 9	obs 10	obs 15	obs 16	obs 18	obs 23	
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2671	0.2963	0.3827	0.4695	0.2774	0.0130	0.0043	0.0063	0.0130	
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2671	0.2963	0.3827	0.4695	0.2774	0.0130	0.0043	0.0063	0.0130	
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2671	0.2963	0.3827	0.4695	0.2774	0.0130	0.0043	0.0063	0.0130	
B_{E_t}	3	0.0374	0.0747	0.0077	0.0217	0.0494	0.0060	2×10^{-5}	6×10^{-6}	6×10^{-6}	2×10^{-5}	
Esquema de perturbação aditiva 2												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 1	obs 6	obs 9	obs 10	obs 15	obs 16	obs 18	obs 23	
$m(1)_t$	1	0.1889	0.2672	0.2980	0.3673	0.4616	0.2762	0.0007	0.0047	0.0016	0.0010	
$m(2)_t$	1	0.1889	0.2672	0.2980	0.3673	0.4616	0.2762	0.0007	0.0047	0.0016	0.0010	
$m(3)_t$	1	0.1889	0.2672	0.2980	0.3673	0.4616	0.2762	0.0007	0.0047	0.0016	0.0010	
B_{E_t}	3	0.0373	0.0746	0.0087	0.0212	0.0462	0.0060	6×10^{-6}	4×10^{-6}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	
Esquema de perturbação multiplicativa												
Medidas	Q _e	Média	Valores críticos	Valores para as seguintes observações								
				obs 1	obs 6	obs 9	obs 10	obs 15	obs 16	obs 18	obs 23	
$m(1)_t$	2	0.2050	0.2899	0.0964	0.0973	0.0979	0.0960	0.4662	0.3414	0.4518	0.6079	
$m(2)_t$	1	0.1871	0.2647	0.0190	0.0213	0.0229	0.0182	0.4662	0.3404	0.4518	0.6074	
$m(3)_t$	1	0.1871	0.2647	0.0190	0.0213	0.0229	0.0182	0.4662	0.3404	0.4518	0.6074	
B_{E_t}	3	0.0420	0.0840	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0472	0.0136	0.0417	0.1366	

Q_e representa a quantidade de autovetores influentes

da variável *lymphocytes*.

Nas Tabelas 5.4.3.2 e 5.4.3.3 apresentamos os resultados para os métodos de inspeção microscópica e de análise de imagem, respectivamente, sem a variável *lymphocytes*. Para os esquemas de perturbação aditiva 1 e aditiva 2, verificamos que as observações identificadas como influentes são as mesmas para os dois métodos, essas sendo 1, 6, 9, 10 e 27, vale ressaltar que nenhuma observação teve seu nível de influência acima da média, para esses dois esquemas. Para o esquema de perturbação multiplicativa, verificamos que as observações 15, 16, 18 e 23 foram identificadas como extremamente influentes e a observação 23 tem nível de influência muito grande; esses resultados são similares para os dois métodos.

5.4.4. Resultados da comparação das estimativas

Através da Tabela 5.4.4 notamos que, para os dois métodos, o impacto nas estimativas da retirada das observações influentes não é muito grande em relação a nenhuma observação específica. Com a retirada da observação 24, notamos que entre todas é a que causa um maior impacto nas estimativas de α_1 e α_2 , para o método de inspeção microscópica, e para o outro método, o de análise de imagem, a observação que causou maior impacto na estimativa de α_1 e α_2 foi a observação 11. A observação 6, ao ser retirada, é a que causa maior impacto na estimativa de α_3 , independentemente do método avaliado.

Tabela 5.4.4. Comparação das estimativas dos parâmetros para os métodos em estudo.

Método	Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações									
			obs 1	obs 6	obs 7	obs 9	obs 10	obs 11	obs 13			
Inspeção microscópica	α_1	3.0910	2.9993 (−2.97%)	3.1577 (2.16%)	3.0781 (−0.42%)	3.0975 (0.21%)	3.0167 (−2.40%)	3.3605 (8.72%)	3.2412 (4.86%)			
	α_2	0.5804	0.5860 (0.96%)	0.6044 (4.14%)	0.5915 (1.91%)	0.6017 (3.67%)	0.5874 (1.21%)	0.6041 (4.08%)	0.5977 (2.98%)			
	α_3	1.3781	1.3450 (−2.40%)	1.4938 (8.40%)	1.4395 (4.46%)	1.4460 (4.93%)	1.3857 (0.55%)	1.3952 (1.24%)	1.3685 (−0.70%)			
Análise de imagem	α_1	3.2288	3.1298 (−3.07%)	3.3007 (2.23%)	3.2064 (−0.69%)	3.2259 (−0.09%)	3.1511 (−2.41%)	3.6004 (11.51%)	3.5061 (8.59%)			
	α_2	0.5811	0.5848 (0.64%)	0.6066 (4.39%)	0.5919 (1.86%)	0.6009 (3.41%)	0.5878 (1.15%)	0.6100 (4.97%)	0.6059 (4.27%)			
	α_3	1.2557	1.2244 (−2.49%)	1.3598 (8.29%)	1.3037 (3.82%)	1.3096 (4.29%)	1.2612 (0.44%)	1.2857 (2.39%)	1.2672 (0.92%)			
Método	Parâmetro	Estimativas	Estimativas com a retirada das seguintes observações									
			obs 15	obs 16	obs 18	obs 23	obs 24	obs 25	obs 27			
Inspeção microscópica	α_1	3.0910	3.1810 (2.91%)	3.1193 (0.92%)	3.2014 (3.57%)	3.2380 (4.76%)	3.5233 (13.99%)	3.2013 (3.57%)	3.1110 (0.65%)			
	α_2	0.5804	0.5649 (−2.67%)	0.5620 (−3.17%)	0.5659 (−2.50%)	0.5679 (−2.15%)	0.6167 (6.25%)	0.5856 (0.90%)	0.6011 (3.57%)			
	α_3	1.3781	1.3877 (0.70%)	1.3729 (−0.38%)	1.4115 (2.42%)	1.4226 (3.23%)	1.4348 (4.11%)	1.3579 (−1.47%)	1.4583 (5.82%)			
Análise de imagem	α_1	3.2288	3.3624 (4.14%)	3.2470 (0.56%)	3.2917 (1.95%)	3.3778 (4.61%)	3.5147 (8.85%)	3.3026 (2.29%)	3.2353 (0.20%)			
	α_2	0.5811	0.5684 (−2.19%)	0.5629 (−3.13%)	0.5653 (−2.72%)	0.5690 (−2.08%)	0.6038 (3.91%)	0.5841 (0.52%)	0.5999 (3.24%)			
	α_3	1.2557	1.2687 (1.04%)	1.2537 (−0.16%)	1.2816 (2.06%)	1.2892 (2.67%)	1.2684 (1.01%)	1.2280 (−2.21%)	1.3181 (4.97%)			

Capítulo 6

Considerações finais

Nesta dissertação avaliamos a influência local através da curvatura normal conforme, metodologia proposta por Poon & Poon (1999), de observações correspondentes a variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) segundo a distribuição Dirichlet. Utilizamos essa metodologia para avaliar a medida de influência segundo pequenas perturbações nos dados ou no modelo. Dois esquemas de perturbação foram considerados, um em que uma das componentes é modificada através das formas aditiva e multiplicativa e outro em que perturbamos a log-verossimilhança multiplicativamente. Porém, este último esquema só foi avaliado para os conjuntos de dados reais

Em relação aos esquemas de perturbação, podemos dizer que o tipo de perturbação aditivo é o mais adequado para a metodologia adotada neste estudo, no caso em que uma das componentes é modificada, pois a idéia da curvatura normal conforme (ou da curvatura normal) é trabalhar com derivadas e a derivada é uma medida aditiva de sensibilidade. Destes, o esquema de perturbação aditiva 2 é o mais recomendado, pois todas as p componentes da distribuição serão alteradas e não apenas as $p - 1$ componentes como no esquema de perturbação aditiva 1. Para um conjunto de dados reais, não há dificuldades de escolher qual variável será a p -ésima componente, já que o resultado é invariante a essa escolha.

O outro esquema considerado foi o de multiplicar o vetor de perturbação com a função de log-verossimilhança, porém para o esquema com este tipo de perturbação não foi identificada nenhuma observação influente em nenhum dos conjuntos de dados reais estudados; o que se deve ao fato de que as observações realmente têm características Dirichlet, ou seja, não encontramos nenhuma observação com padrão distinto do esperado para esta distribuição.

A variável Y_j , $j = 1, \dots, p$, foi escolhida para ser perturbada segundo os diversos esquemas de perturbação, ou seja, trabalhamos de forma que pudéssemos perturbar qualquer componente do modelo. Como $\sum_{j=1}^p Y_j = 1$, é necessário retirar uma das p variáveis, e trabalhar com apenas $p - 1$ variáveis aleatórias. Optamos por fazer uma permutação entre essas variáveis e verificar qual delas tem a direção de maior influência, ou seja, a direção obtida através do maior autovalor normalizado entre os autovalores máximos.

Na avaliação numérica, trabalhamos com diferentes tamanhos de amostra ($n = 10, 20, 30$) e com valores pseudo-aleatórios da variável de interesse Y_j , $j = 1, \dots, p - 1$, gerados de uma distribuição Dirichlet, fixando a semente do gerador. Verificamos que, à medida que aumentamos o tamanho da amostra, surgem observações influentes de formas diferenciadas, sendo que quando o número de observações alcançou 30, apenas uma observação foi identificada como fortemente influente (observação 27); concluímos que esta observação é tão influente que chega a mascarar as influências das outras observações. As observações 4 (para $n = 10$ ou $n = 20$) e 27 (para $n = 30$) foram as mais identificadas como influentes para os dois tipos de perturbação aditiva, independentemente da componente perturbada. Para o esquema de perturbação multiplicativa não houve uma concordância nos resultados, ou seja, as observações detectadas como influentes ao perturbar a componente 1 foram bem diferentes das detectadas ao perturbar as outras componentes.

Para diferentes esquemas de perturbação e/ou para perturbações em diferentes componentes detectamos observações influentes de formas diferenciadas. E mais, através das medidas $m(q)_t$, $q = 1, 2, 3$, vimos que nem sempre determinada observação identificada como influente segundo $m(3)_t$ também será identificada pelas outras medidas, $m(1)_t$ ou $m(2)_t$, significando que essa observação contribui apenas na direção de maior influência.

Por fim, ao analisarmos as observações influentes através das medidas estudadas, retiramos essas observações uma a uma e calculamos novas estimativas dos parâmetros da distribuição Dirichlet, comparando-as com as estimativas na presença de todas as observações. De modo geral, ao retirarmos uma observação detectada como influente através do esquema de perturbação multiplicativa, as estimativas dos parâmetros sofreram um decréscimo. Através dos outros esquemas, verificamos que a retirada de observações influentes teve impacto nas estimativas, este impacto sendo maior após a retirada da observação identificada como a mais influente. Entretanto, não podemos afirmar que a retirada de tais observações melhora as estimativas dos parâmetros.

Apêndice

A. Funções de log-verossimilhança

A.1. Log-verossimilhança para o modelo sem perturbação

Dadas n observações independentes com mesma distribuição Dirichlet com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, temos que a função de log-verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_j) = n & \left\{ \log \Gamma(\phi) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} (\alpha_j - 1) \log y_{ij} \right. \\ & \left. + (\alpha_p - 1) \log \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_{ij} \right) \right\}. \end{aligned}$$

A.2. Log-verossimilhança para o esquema de perturbação aditiva 1

A função de log-verossimilhança para o modelo sem perturbação $\ell(\alpha_j|\omega_0) = \ell(\alpha_j)$. A função de log-verossimilhança para o esquema de perturbação aditiva 1 considerada $\ell(\alpha_j|\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_j|\omega) = n & \left\{ \log \Gamma(\phi) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ (\alpha_1 - 1) \log(y_{i1} + \omega_i) \right. \\ & + \sum_{j=2}^{p-1} (\alpha_j - 1) \log \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-2} \right) \\ & \left. + (\alpha_p - 1) \log \left(1 - (y_{i1} + \omega_i) - \sum_{j=2}^{p-1} \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-2} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

A.3. Log-verossimilhança para o esquema de perturbação aditiva 2

A função de log-verossimilhança para o modelo sem perturbação $\ell(\alpha_j|\omega_0) = \ell(\alpha_j)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_j) = n & \left\{ \log \Gamma(\phi) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} (\alpha_j - 1) \log y_{ij} \right. \\ & \left. + (\alpha_p - 1) \log y_{ip} \right\}, \end{aligned}$$

onde $y_{ip} = 1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_{ij}$. Logo, a função de log-verossimilhança para o esquema de perturbação aditiva 2 considerada $\ell(\alpha_j|\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_j|\omega) = n & \left\{ \log \Gamma(\phi) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ (\alpha_1 - 1) \log(y_{i1} + \omega_i) \right. \\ & \left. + \sum_{j=2}^p (\alpha_j - 1) \log \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

A.4. Log-verossimilhança para o esquema de perturbação multiplicativa

A função de log-verossimilhança para o modelo sem perturbação é $\ell(\alpha_j|\omega_0) = \ell(\alpha_j)$. A função de verossimilhança para o esquema de perturbação multiplicativa considerada $\ell(\alpha_j|\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_j|\omega) = n & \left\{ \log \Gamma(\phi) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ (\alpha_1 - 1) \log(y_{i1}\omega_i) \right. \\ & + \sum_{j=2}^{p-1} (\alpha_j - 1) \log \left(y_{ij} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right) \\ & \left. + (\alpha_p - 1) \log \left(1 - y_{i1}\omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} y_{ij} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

A.5. Função para o esquema de perturbação multiplicativa log-verossimilhança

A função de verossimilhança para o esquema de perturbação multiplicativa na log-verossimilhança considerada $\ell(\alpha_j|\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_j|\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \ell_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n \omega_i & \left\{ \log \Gamma(\phi) - \sum_{j=1}^p \log \Gamma(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{p-1} (\alpha_j - 1) \log y_{ij} \right. \\ & \left. + (\alpha_p - 1) \log \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_{ij} \right) \right\}. \end{aligned}$$

B. Cálculo das derivadas

Para o cálculo da curvatura normal conforme, precisamos obter as derivadas da log-verossimilhança para o modelo sem perturbação e para os esquemas das perturbações aqui consideradas.

B.1. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação aditiva 1

A seguir serão apresentados os cálculos das primeiras derivadas de $\ell(\alpha_j|\omega)$ em relação a α_j para o esquema de perturbação aditiva 1. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right\} + \sum_{i=1}^n \log(y_{i1} + \omega_i) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_1) \right\} + \sum_{i=1}^n \log(y_{i1} + \omega_i), \\
\\
\frac{\partial \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{i2} - \frac{\omega_i}{p-2} \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_2) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{i2} - \frac{\omega_i}{p-2} \right), \\
\\
&\vdots \\
\frac{\partial \ell(\alpha_{p-1}|\omega)}{\partial \alpha_{p-1}} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_{p-1}} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_{p-1})}{\partial \alpha_{p-1}} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{ip-1} - \frac{\omega_i}{p-2} \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_{p-1}) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{ip-1} - \frac{\omega_i}{p-2} \right), \\
\\
\frac{\partial \ell(\alpha_p|\omega)}{\partial \alpha_p} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_p} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_p)}{\partial \alpha_p} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - (y_{i1} + \omega_i) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=2}^{p-1} \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-2} \right) \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_p) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - (y_{i1} + \omega_i) - \sum_{j=2}^{p-1} \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-2} \right) \right).
\end{aligned}$$

B.2. Segundas derivadas para o esquema de perturbação aditiva 1

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial\ell(\alpha_j|\omega)/\partial\alpha_j$ em relação a α_k (segundas derivadas), onde $1 \leq k \leq p$, para o esquema de perturbação aditiva 1, para que possamos obter os elementos da matriz $\ddot{L}$. Temos que

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_1|\omega)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1} = n\left\{\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_1)\right\},$$

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_1|\omega)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = n\psi'(\phi),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_1|\omega)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_p} = n\psi'(\phi);$$

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_2|\omega)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_1} = n\psi'(\phi),$$

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_2|\omega)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2} = n\left\{\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_2)\right\},$$

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_2|\omega)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3} = n\psi'(\phi),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2\ell(\alpha_2|\omega)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_p} = n\psi'(\phi);$$

e assim, sucessivamente. Portanto, a matriz $\ddot{L}$ será composta dos seguintes elementos:

$$\ddot{L}_{jk} = \frac{\partial^2\ell(\alpha_j|\omega)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} = \begin{cases} n\left(\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_j)\right), j = k, \\ n\psi'(\phi), j \neq k. \end{cases}$$

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial\ell(\alpha_j|\omega)/\partial\alpha_j$ em relação ao vetor de perturbação ω_i (segundas derivadas) para o esquema de perturbação aditiva 1, para que possamos obter os elementos da matriz Δ . Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1 | \omega)}{\partial \alpha_1 \partial \omega_i} &= \frac{1}{y_{i1} + \omega_i}, \\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2 | \omega)}{\partial \alpha_2 \partial \omega_i} &= -\frac{1}{(p-2)(y_{i2} - \frac{\omega_i}{p-2})}, \\
&\vdots \\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_{p-1} | \omega)}{\partial \alpha_{p-1} \partial \omega_i} &= -\frac{1}{(p-2)(y_{ip-1} - \frac{\omega_i}{p-2})}, \\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_p | \omega)}{\partial \alpha_p \partial \omega_i} &= \left(-1 + \sum_{j=2}^{p-1} \frac{1}{p-2} \right) \times \frac{1}{1 - y_{i1} - \omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-2} \right)} \\
&= \left(-1 + \frac{p-2}{p-2} \right) \times \frac{1}{1 - y_{i1} - \omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} \left(y_{ij} - \frac{\omega_i}{p-2} \right)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz Δ será composta dos seguintes elementos:

$$\Delta_{ji} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j | \omega)}{\partial \alpha_j \partial \omega_i} = \begin{cases} \frac{1}{y_{ij} + \omega_i}, j = 1, \\ \frac{-1}{(p-2)(y_{ij} - (\omega_i/p-2))}, j = 2, \dots, p-1, \\ 0, j = p. \end{cases}$$

B.3. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação aditiva 2

A seguir serão apresentados os cálculos das primeiras derivadas de $\ell(\alpha_j | \omega)$ em relação a α_j para o esquema de perturbação aditiva 2. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right\} + \sum_{i=1}^n \log(y_{i1} + \omega_i) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_1) \right\} + \sum_{i=1}^n \log(y_{i1} + \omega_i), \\
\\
\frac{\partial \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{i2} - \frac{\omega_i}{p-1} \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_2) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{i2} - \frac{\omega_i}{p-1} \right), \\
\\
&\vdots \\
\frac{\partial \ell(\alpha_p|\omega)}{\partial \alpha_p} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_p} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_p)}{\partial \alpha_p} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{ip} - \frac{\omega_i}{p-1} \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_p) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{ip} - \frac{\omega_i}{p-1} \right).
\end{aligned}$$

B.4. Segundas derivadas para o esquema de perturbação aditiva 2

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial \ell(\alpha_j|\omega)/\partial \alpha_j$ em relação a α_k (segundas derivadas), onde $1 \leq k \leq p$, para o esquema de perturbação aditiva 2, para que possamos obter os elementos da matriz $\ddot{L}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} &= n \left\{ \psi'(\phi) - \psi'(\alpha_1) \right\}, \\
\\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= n \psi'(\phi), \\
&\vdots \\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_p} &= n \psi'(\phi);
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = n\psi'(\phi),$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2} = n\left\{\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_2)\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = n\psi'(\phi),$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_p} = n\psi'(\phi);$$

e assim, sucessivamente. Note que, esses cálculos são iguais aos cálculos para o esquema de perturbação aditiva 2. Portanto, a matriz $\ddot{L}$ será composta dos seguintes elementos:

$$\ddot{L}_{jk} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j|\omega)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \begin{cases} n\left(\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_j)\right), j = k, \\ n\psi'(\phi), j \neq k. \end{cases}$$

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial \ell(\alpha_j|\omega)/\partial \alpha_j$ em relação ao vetor de perturbação ω_i (segundas derivadas) para o esquema de perturbação aditiva 2, para que possamos obter os elementos da matriz Δ . Temos que

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \omega_i} = \frac{1}{y_{i1} + \omega_i},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \omega_i} = -\frac{1}{(p-1)(y_{i2} - \frac{\omega_i}{p-1})},$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_p|\omega)}{\partial \alpha_p \partial \omega_i} = -\frac{1}{(p-1)(y_{ip} - \frac{\omega_i}{p-1})}.$$

Portanto, a matriz Δ será composta dos seguintes elementos

$$\Delta_{ji} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j|\omega)}{\partial \alpha_j \partial \omega_i} = \begin{cases} \frac{1}{y_{ij} + \omega_i}, j = 1, \\ \frac{-1}{(p-1)(y_{ij} - (\omega_i/p-1))}, j = 2, \dots, p. \end{cases}$$

B.5. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa

A seguir serão apresentados os cálculos das primeiras derivadas de $\ell(\alpha_j|\omega)$ em relação a α_j para o esquema de perturbação multiplicativa. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right\} + \sum_{i=1}^n \log(y_{i1}\omega_i) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_1) \right\} + \sum_{i=1}^n \log(y_{i1}\omega_i), \\
\\
\frac{\partial \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{i2} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_2) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{i2} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right), \\
\\
&\vdots \\
\frac{\partial \ell(\alpha_{p-1}|\omega)}{\partial \alpha_{p-1}} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_{p-1}} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_{p-1})}{\partial \alpha_{p-1}} \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{ip-1} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_{p-1}) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(y_{ip-1} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right), \\
\\
\frac{\partial \ell(\alpha_p|\omega)}{\partial \alpha_p} &= n \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_p} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_p)}{\partial \alpha_p} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - y_{i1}\omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} y_{ij} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right) \\
&= n \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_p) \right\} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - y_{i1}\omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} y_{ij} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right) \right).
\end{aligned}$$

B.6. Segundas derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial \ell(\alpha_j|\omega)/\partial \alpha_j$ em relação ao vetor de perturbação ω_i (segundas derivadas) para o esquema de perturbação multiplicativa, para que possamos obter os elementos da matriz Δ .

A matriz $\tilde{L}$ para o esquema de perturbação multiplicativa é igual à matriz $\tilde{L}$ para o

esquema de perturbação aditiva, ou seja, será composta dos seguintes elementos:

$$\ddot{L}_{jk} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j | \omega)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \begin{cases} n \left(\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_k) \right), j = k, \\ n \psi'(\phi), j \neq k. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1 | \omega)}{\partial \alpha_1 \partial \omega_i} = \frac{1}{\omega_i},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2 | \omega)}{\partial \alpha_2 \partial \omega_i} = -\frac{y_{i1}}{1 - y_{i1}\omega_i},$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_{p-1} | \omega)}{\partial \alpha_{p-1} \partial \omega_i} = -\frac{y_{i1}}{1 - y_{i1}\omega_i},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_p | \omega)}{\partial \alpha_p \partial \omega_i} = -\frac{y_{i1} - \sum_{j=2}^{p-1} (y_{ij}y_{i1})/(1 - y_{i1})}{1 - y_{i1}\omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} y_{ij} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right)}.$$

Portanto, a matriz Δ_{ji} será composta dos seguintes elementos:

$$\Delta_{ji} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j | \omega)}{\partial \alpha_j \partial \omega_i} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_i}, j = 1, \\ -\frac{y_{i1}}{1 - y_{i1}\omega_i}, j = 2, \dots, p-1, \\ -\frac{y_{i1} - \sum_{j=2}^{p-1} (y_{ij}y_{i1})/(1 - y_{i1})}{1 - y_{i1}\omega_i - \sum_{j=2}^{p-1} y_{ij} \left(\frac{1 - y_{i1}\omega_i}{1 - y_{i1}} \right)}, j = p. \end{cases}$$

B.7. Primeiras derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança

A seguir serão apresentados os cálculos das primeiras derivadas de $\ell(\alpha_j | \omega)$ em relação a α_j para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1} &= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \log y_{i1} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_1) + \log y_{i1} \right\}, \\
\\
\frac{\partial \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2} &= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} + \log y_{i2} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_2) + \log y_{i2} \right\}, \\
\\
&\vdots \\
\frac{\partial \ell(\alpha_p|\omega)}{\partial \alpha_p} &= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \frac{\partial \log \Gamma(\phi)}{\partial \alpha_p} - \frac{\partial \log \Gamma(\alpha_p)}{\partial \alpha_p} + \log y_{ip} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \psi(\phi) - \psi(\alpha_p) + \log y_{ip} \right\}.
\end{aligned}$$

B.8. Segundas derivadas para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial \ell(\alpha_j|\omega)/\partial \alpha_j$ em relação a α_k (segundas derivadas), onde $1 \leq k \leq p$, para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança, para que possamos obter os elementos da matriz $\ddot{L}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} &= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \psi'(\phi) - \psi'(\alpha_1) \right\}, \\
\\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= \sum_{i=1}^n \omega_i \psi'(\phi), \\
\\
&\vdots \\
\\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_p} &= \sum_{i=1}^n \omega_i \psi'(\phi);
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^n \omega_i \psi'(\phi),$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2} = \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \psi'(\phi) - \psi'(\alpha_2) \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = \sum_{i=1}^n \omega_i \psi'(\phi),$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_p} = \sum_{i=1}^n \omega_i \psi'(\phi);$$

e assim sucessivamente. Portanto, a matriz $\ddot{L}$ será composta dos seguintes elementos:

$$\ddot{L}_{jk} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j|\omega)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\psi'(\phi) - \psi'(\alpha_j) \right), j = k, \\ \sum_{i=1}^n \omega_i \psi'(\phi), j \neq k. \end{cases}$$

A seguir serão apresentados os cálculos das derivadas de $\partial \ell(\alpha_j|\omega)/\partial \alpha_j$ em relação ao vetor de perturbação ω_i (segundas derivadas) para o esquema de perturbação multiplicativa na função de log-verossimilhança, para que possamos obter os elementos da matriz Δ , segue que

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_1|\omega)}{\partial \alpha_1 \partial \omega_i} = \psi(\phi) - \psi(\alpha_1) + \log y_{i1},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_2|\omega)}{\partial \alpha_2 \partial \omega_i} = \psi(\phi) - \psi(\alpha_2) + \log y_{i2},$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha_p|\omega)}{\partial \alpha_p \partial \omega_i} = \psi(\phi) - \psi(\alpha_p) + \log y_{ip}.$$

Portanto, a matriz Δ será composta dos seguintes elementos:

$$\Delta_{ji} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j|\omega)}{\partial \omega_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha_j|\omega)}{\partial \alpha_j \partial \omega_i} = \psi(\phi) - \psi(\alpha_j) + \log y_{ij},$$

onde $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, p$.

C. Programa principal

```
/******  
* PROGRAMA: influencia.ox  
*  
* USO: Estimacao de maxima verossimilhanca  
*      dos parametros da distribuicao Dirichlet a partir  
*      de uma amostra i.i.d.  
*      Avaliacao da influencia local desta distribuicao,  
*      atraves da curvatura normal conforme.  
*  
* Autora: Gecynalda Soares da Silva Gomes  
*  
* DATA: 15 de julho de 2004  
*  
* ULTIMA MODIFICACAO: 05 de setembro de 2004  
*  
*****/  
  
#include <oxstd.h>  
#include <oxprob.h>  
#import <maximize>  
  
/*parametros para a simulacao*/  
const decl NREP = 1;  
static decl n = <10;20;30>;//vetor do numero de observacoes  
//  
//static decl q = <1;2;3>;//vetor para escolha de q observacoes influentes  
  
/* metodo de otimizacao: 1 para BFGS com derivadas numericas, 2 para Newton e 3  
para BFGS com derivadas analiticas*/  
const decl METODO = 1;  
  
/* modelo a ser utilizado: 1 para modelo aditivo_1, 2 para para modelo aditivo_2,  
3 para o modelo multiplicativo e 4 para o esquema de perturbacao multiplicativa  
na verossimilhanca*/  
const decl MODELO = 1;  
  
/*variaveis globais*/  
static decl s_my;//matriz de y  
static decl s_mlogy;//matriz de log(y)  
static decl s_mlog1menosy;  
static decl s_vwa;//vetor de ponderacao w aditivo  
static decl s_vwm;//vetor de ponderacao w multiplicativo  
  
/*funcao da log-verossimilhanca*/  
floglik (const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)  
{  
    decl p, phi, soma1, m_soma2, soma2, soma2a, m_soma3a, soma3a, soma3,  
    soma4a, alphajmenos1, alphajmenos1_2, j, i, termo1, s_vlogtermo1,  
    termo2, s_vlogtermo2, termo3, s_vlogtermo3, psialpha0, psialpha1, soma3aderi,  
    somatermo2, t, valphan, A, B, k;
```

```

p = rows(vP);

phi=0.0;
soma1 = 0.0;
psialpha0 = 0.0;
psialpha1 = 0.0;

/*variaveis para o modelo sem perturbacao*/
for (j=0; j < p; j++)
{
    soma1 += loggamma(vP[j]);
    phi += vP[j];
    psialpha0 += polygamma(vP[j],0);
    psialpha1 += polygamma(vP[j],1);
}
alphajmenos1 = vP[0:p-2]-1.0;
m_soma2 = sumc(s_mlogy);
soma2 = alphajmenos1'*m_soma2';
soma3 = sumc(s_mlog1menosy);

/*variaveis para o esquema de perturbacao aditiva*/
termo1 = s_my[][0] + s_vwa;
s_vlogtermo1 = log(termo1);
termo2 = s_my[][1:p-2] - (s_vwa./(p-2));
s_vlogtermo2 = log(termo2);
termo3 = 1.0 - termo1 - sumr(termo2);
s_vlogtermo3 = log(termo3);
soma2a = sumc(s_vlogtermo1);
m_soma3a = sumc(s_vlogtermo2);
alphajmenos1_2 = vP[1:p-2] - 1.0;
soma3a = alphajmenos1_2' * m_soma3a';
soma4a = sumc(s_vlogtermo3);
soma3aderi = sumr(m_soma3a);

/*Funcao de verossimilhanca*/
adFunc[0] = double((rows(s_my)*(loggamma(phi)-soma1)) + soma2 +
    (vP[p-1]-1.0)*soma3);

if(isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
    return 0;

else
    return 1;//1 indica sucesso
}

/*inicio do programa*/
main()
{
    /*declaracao de variaveis usadas*/
    decl cn, dExecTime, vp, np, valpha, vphi, vTheta, valpha1, vStart,
    cr, t, s_vlog1menosy, s_my1, s_my2, dfunc1, ir1, mhess, cfailure,
    cfailure2, memv, valphap, mEstMedia, mEstVar, w, k, alphahat1,
    alphahat2, alphahat3, alphahat4, phihat, dtrial1, dtrial2, dtrial3,

```

```

dtria4, dtriphi, mones, mDiag, m_L, m_Lv, m_LInv, m_LInvv, termo1,
termo2, termo3, mdelta, mDLD, traDLD, meval, mevec, sqrttraDLD, B,
eigenB, Bl, somameval, v_mui, mu_i, v_Bl, pc1lambda, pc2lambda,
pc3lambda, k1, k2, k3, cp;

/*Inicia o cronometro*/
dExecTime = timer();

oxwarning(0);

/*Seleciona o gerador de numeros aleatorios*/
ranseed("GM");

/*Verdadeiros valores dos parametros da distribuicao Dirichlet*/
valpha = <2;2;2;2>;

vStart = (1*valpha);

/*Numero de componentes*/
np = rows(valpha);

if (MODELO == 1)
{println("\n*****");
println("*****");
println("          ANALISES PARA O esquema de PERTURBACAO ADITIVA_1          ");
println("*****");
println("*****");}
else if (MODELO == 2)
{println("\n*****");
println("*****");
println("          ANALISES PARA O esquema de PERTURBACAO ADITIVA_2          ");
println("*****");
println("*****");}
else if (MODELO == 3)
{println("\n*****");
println("*****");
println("          ANALISES PARA O esquema de PERTURBACAO MULTIPLICATIVA          ");
println("*****");
println("*****");}
else if (MODELO == 4)
{println("\n*****");
println("*****");
println("ANALISES PARA O esquema de PERTURBACAO MULTIPLICATIVA NA
          VEROSSIMILHANCA");
println("*****");
println("*****");}
print("\n\n\t\t\t PROGRAMA OX: ", oxfilename(0));
print("\n\n\t\t\t VERSAO OX: ", oxversion());
print("\n\n\t\t\t ESTIMACAO: Estimacao de MV, Parametros da distribuicao
Dirichlet a partir de uma amostra i.i.d.");
print("\n\n\t\t\t TIPO DE MODELO: ", MODELO);
print("\n\n\t\t\t QUANT. DE PARAMETROS: ", np);
print("\n\n\t\t\t NUM. MINIMO DE OBS.: ", n[0]);

```

```

print("\n\t\t NUM. MAXIMO DE OBS.: ", n[rows(n)-1]);
print("\n\t\t DATA: ", date());
print("\n\t\t HORA: ", time(), "\n");

memv = zeros(np,NREP);
mEstMedia = zeros(np,1);
mEstVar = zeros(np,1);

/*loop para diferentes tamanho de amostra*/
for (t= 0; t < rows(n); ++t)
{
    cn = n[t];

    decl in, vetor=zeros(cn,1);
    for (in=0; in < cn; ++in)
    {
        vetor[in][0] = in+1;
    }

    ranseed({1965, 2001});

    /*design da matriz y*/
    s_my = randirichlet(cn,alpha);
    s_mlogy = log(s_my);
    s_mlog1menosy = log(1.0 - sumr(s_my));

    /*vetores de ponderacao*/
    s_vwa = zeros(cn,1);
    s_vwm = ones(cn,1);

    /*inialize o contador de falha da convergencia*/
    cfailure = 0;

    ranseed(-1);
    /*loop de Monte Carlo*/
    for(cr = 0; cr < NREP; ++cr)
    {
        valpha1 = vStart;

//        MaxControl(-1,1);
        /*Estimacao de maxima verossimilhanca*/
        if (METODO == 1)
            ir1 = MaxBFGS(floglik, &valpha1, &dfunc1, 0, TRUE);

        else if (METODO == 2)
            ir1 = MaxNewton(floglik, &valpha1, &dfunc1, &mhess, TRUE);

        else if (METODO == 3)
            ir1 = MaxBFGS(floglik, &valpha1, &dfunc1, 0, FALSE);

        /*Checar a convergencia*/
        if(ir1 == MAX_CONV || ir1 == MAX_WEAK_CONV)
        {

```

```

        memv[] [cr] = valpha1;

    }/*fim do "if" da convergencia*/
    else
    {
        ++cfailure;
        --cr;
    }

}/*fim do loop de Monte Carlo*/
mEstMedia[] [0] = meanr(memv);
mEstVar[0] [] = varr(memv);

decl alphahat=zeros(np,1), dtria=zeros(np,1);
for(cp=0; cp < np; cp++)
{
    alphahat[cp] = mEstMedia[cp] [0];
    dtria[cp] = polygamma(alphahat[cp],1);
}

phihat = sumc(mEstMedia[] [0]);
dtriplhi = polygamma(phihat,1);
mones = ones(np, np);
mDiag = diag(dtria);

m_L = cn * (dtriplhi - mDiag);/*matriz L..*/
m_Lv = sumc(s_vwm) * (dtriplhi - mDiag);/*matriz L.. perturbando a
verossimilhanca*/
m_LInv = -invertsym(-m_L);/*inversa da matriz L..*/
m_LInvv = -invertsym(-m_Lv);/*inversa da matriz L.. perturbando a
verossimilhanca*/

/*Analises para o esquema de perturbacao aditiva_1*/
if (MODELO == 1)
{termo1 = (s_my[] [0] + s_vwa).^(-1);
termo2 = -((np-2).^(-1))*((s_my[] [1:np-2] - (s_vwa./(np-2))).^(-1));
termo3 = -(1-(np-2)/(np-2))*((1.0 - termo1 - sumr(termo2)).^(-1));
mdelta = (termo1~termo2~termo3)'; /*matriz Delta*/

mDLD = mdelta'*m_LInv*mdelta;/*matriz delta'*inversa de L..*delta*/
traDLD = trace(mDLD.^2);
sqrttraDLD = sqrt(traDLD);
B = -(mDLD)/sqrttraDLD;/*matriz da curvatura*/
eigenB = eigensym(B, &meval, &mevec);

sosomeval = sqrt(sumr(meval.^2));

v_mui = zeros(cn,1);
Bl = zeros(cn,1);
mu_i = zeros(cn,1);
v_Bl = zeros(cn,1);

for (w = 0; w < cn; w++)

```

```

{
    B1[w] = -(mevec[] [w] *(mDLD)*mevec[] [w])/sqrttraDLD;
    mu_i[w] = fabs(meval[] [w]/somameval);
}

v_mui[] [0] = mu_i;
v_B1[] [0] = B1;

pc1lambda = 1/sqrt(cn);
pc2lambda = 2/sqrt(cn);
pc3lambda = 3/sqrt(cn);
k1 = sumc(v_mui.>=pc1lambda);
k2 = sumc(v_mui.>=pc2lambda);
k3 = sumc(v_mui.>=pc3lambda);
decl v_quant = k1|k2|k3;
decl v_qvalcri = pc1lambda|pc2lambda|pc3lambda;
decl quant, v_muk1=zeros(k1,1), v_muk2=zeros(k2,1), v_muk3=zeros(k3,1),
v_mq1i=zeros(k1,1), v_mq2i=zeros(k2,1), v_mq3i=zeros(k3,1), square_m_ei,
casos1=zeros(cn,np-1), casos2=zeros(cn,np-1), casos3=zeros(cn,np-1);

square_m_ei = mevec.^2;

for(quant=0; quant < k1; quant++)
{
    if (v_mui[quant] >= pc1lambda) v_muk1[quant]= v_mui[quant];
    else v_muk1[quant]= 0;
}
for(quant=0; quant < k2; quant++)
{
    if (v_mui[quant] >= pc2lambda) v_muk2[quant]= v_mui[quant];
    else v_muk2[quant]= 0;
}
for(quant=0; quant < k3; quant++)
{
    if (v_mui[quant] >= pc3lambda) v_muk3[quant]= v_mui[quant];
    else v_muk3[quant]= 0;
}

if(k1==0) v_mq1i=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq1i = sqrt(square_m_ei[] [0:k1-1]*v_muk1);
}

if(k2==0) v_mq2i=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq2i = sqrt(square_m_ei[] [0:k2-1]*v_muk2);
}

if(k3==0) v_mq3i=" nao existe pontos influentes ";
else
{

```

```

v_mq3i = sqrt(square_m_ei[] [0:k3-1]*v_muk3);
}

decl mq0, mq0barra, mq0barra2, mq1barra, mq2barra, mq3barra, BEi, b, b2;
mq1barra = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk1));
mq2barra = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk2));
mq3barra = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk3));
decl v_mqbarra = mq1barra|mq2barra|mq3barra;
decl v_mqbarra2 = sqrt(2)*mq1barra|sqrt(2)*mq2barra|sqrt(2)*mq3barra;
decl v_comp_BEi=zeros(cn,1);

mq0 = sqrt(square_m_ei*v_mui);
mq0barra = sqrt(sumc(v_mui)/cn);
mq0barra2 = sqrt(2)*mq0barra;
decl mi = (square_m_ei*v_mui);
BEi = (square_m_ei*v_mui).^2;
b = mq0barra^2;
b2 = b*2;

for(quant=0; quant < cn; quant++)
{
    if (BEi[quant] >= b2) v_comp_BEi[quant]= BEi[quant];
    else v_comp_BEi[quant]= 0;
}

decl v_comp_mq1i=zeros(cn,1), v_comp_mq2i=zeros(cn,1),
v_comp_mq3i=zeros(cn,1);

for(quant=0; quant < cn; quant++)
{
    if(k1==0) print("\n Para q=1, nao existe pontos influentes \n ");
    else
    {
        if (v_mq1i[quant] >= sqrt(2)*mq1barra)
            v_comp_mq1i[quant]=v_mq1i[quant];
        else v_comp_mq1i[quant]= 0;
    }

    if(k2==0) print("\n Para q=2, nao existe pontos influentes \n ");
    else
    {
        if (v_mq2i[quant] >= sqrt(2)*mq2barra)
            v_comp_mq2i[quant]= v_mq2i[quant];
        else v_comp_mq2i[quant]= 0;
    }

    if(k3==0) print("\n Para q=3, nao existe pontos influentes \n ");
    else
    {
        if (v_mq3i[quant] >= sqrt(2)*mq3barra)
            v_comp_mq3i[quant]= v_mq3i[quant];
        else v_comp_mq3i[quant]= 0;
    }
}

```

```

    }

println("\n*****");
println("\n Num. de observacoes: ", cn, "\n");
println("\n Valores verdadeiros de alpha: ", valpha);
println("\n Matriz das observacoes: ", vetor~s_my, "\n");
println("\n Estimativas: ", "%6.4f", "%r", {"alpha1: ", "alpha2: ",
    "alpha3: ", "alpha4: "}, "%c", {"EMV"}, mEstMedia);
println("\n Valores de referencia para ", "%6.4f", "%r", {"q=1: ", "q=2: ",
    "q=3: "}, v_qvalcri);
println("\n Quantidade de autovetores influentes: ", "%3.1f", "%r",
    {"q=1: ", "q=2: ", "q=3: "}, v_quant);
println("\n Contribuicao agregada individual para q=1: ", v_mq1i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=2: ", v_mq2i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=3: ", v_mq3i, "\n");
println("\n Valores medios para a contribuicao agregada total: ", "%3.5f",
    "%r", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra);
println("\n Valores de referencia para a contribuicao agregada total: ",
    "%3.5f", "%r", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra2);
println("\n Vetor de casos pouco influentes (q=1): ",
    vetor~v_comp_mq1i, "\n");
println("\n Vetor de casos moderadamente influentes (q=2): ",
    vetor~v_comp_mq2i, "\n");
println("\n Vetor de casos fortemente influentes (q=3): ",
    vetor~v_comp_mq3i, "\n");
println("\n Autovetores: ", mevec, "\n");
println("\n Autovalores: ", meval, "\n");
println("\n Autovalores normalizados: ", v_mui, "\n");
println("\n Valores da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
    basico: ", vetor~BEi, "\n");
println("\n Valor medio da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
    basico: ", "%3.5f", b, "\n");
println("\n Valor de referencia da curvatura normal conforme do vetor de
    perturbacao basico: ", "%3.5f", b2, "\n");
println("\n Valores influentes pela curvatura normal conforme do vetor de
    perturbacao basico: ", vetor~v_comp_BEi, "\n"); }

/*Analises para o esquema de perturbacao aditiva_2*/
else if (MODELO == 2)
{termo1 = (s_my[][0] + s_vwa).^(-1);
termo2 = -((np-2).^(-1))*((s_my[][1:np-2] - (s_vwa./(np-2))).^(-1));
termo3 = -(1-(np-2).^(-1))*(((1.0 - termo1) - sumr(termo2)).^(-1));
mdelta = (termo1~termo2~termo3)'; /*matriz Delta*/

mDLD = mdelta'*m_LInv*mdelta; /*matriz delta'*inversa de L...delta*/
traDLD = trace(mDLD.^2);
sqrttraDLD = sqrt(traDLD);
B = -(mDLD)/sqrttraDLD; /*matriz da curvatura*/
eigenB = eigensym(B, &meval, &mevec);

sosomeval = sqrt(sumr(meval.^2));

```



```

v_mui = zeros(cn,1);
Bl = zeros(cn,1);
mu_i = zeros(cn,1);
v_Bl = zeros(cn,1);

for (w = 0; w < cn; w++)
{
    Bl[w] = -(mevec[] [w] *(mDLD)*mevec[] [w])/sqrttraDLD;
    mu_i[w] = fabs(meval[] [w]/somameval);
}

v_mui[] [0] = mu_i;
v_Bl[] [0] = Bl;

pc1lambda = 1/sqrt(cn);
pc2lambda = 2/sqrt(cn);
pc3lambda = 3/sqrt(cn);
k1 = sumc(v_mui.>=pc1lambda);
k2 = sumc(v_mui.>=pc2lambda);
k3 = sumc(v_mui.>=pc3lambda);
decl v_quant = k1|k2|k3;
decl v_qvalcri = pc1lambda|pc2lambda|pc3lambda;
decl quant, v_muk1=zeros(k1,1), v_muk2=zeros(k2,1), v_muk3=zeros(k3,1),
v_mq1i=zeros(k1,1), v_mq2i=zeros(k2,1), v_mq3i=zeros(k3,1), square_m_ei,
casos1=zeros(cn,np-1), casos2=zeros(cn,np-1), casos3=zeros(cn,np-1);

square_m_ei = mevec.^2;

for(quant=0; quant < k1; quant++)
{
    if (v_mui[quant] >= pc1lambda) v_muk1[quant]= v_mui[quant];
    else v_muk1[quant]= 0;
}
for(quant=0; quant < k2; quant++)
{
    if (v_mui[quant] >= pc2lambda) v_muk2[quant]= v_mui[quant];
    else v_muk2[quant]= 0;
}
for(quant=0; quant < k3; quant++)
{
    if (v_mui[quant] >= pc3lambda) v_muk3[quant]= v_mui[quant];
    else v_muk3[quant]= 0;
}

if(k1==0) v_mq1i=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq1i = sqrt(square_m_ei[] [0:k1-1]*v_muk1);
}

if(k2==0) v_mq2i=" nao existe pontos influentes ";
else
{

```

```

v_mq2i = sqrt(square_m_ei[] [0:k2-1]*v_muk2);
}

if(k3==0) v_mq3i=" nao existe pontos influentes ";
else
{
v_mq3i = sqrt(square_m_ei[] [0:k3-1]*v_muk3);
}

decl mq0, mq0barra, mq0barra2, mq1barra, mq2barra, mq3barra, BEi, b, b2;
mq1barra = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk1));
mq2barra = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk2));
mq3barra = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk3));
decl v_mqbarra = mq1barra|mq2barra|mq3barra;
decl v_mqbarra2 = sqrt(2)*mq1barra|sqrt(2)*mq2barra|sqrt(2)*mq3barra;
decl v_comp_BEi=zeros(cn,1);

mq0 = sqrt(square_m_ei*v_mui);
mq0barra = sqrt(sumc(v_mui)/cn);
mq0barra2 = sqrt(2)*mq0barra;
decl mi = (square_m_ei*v_mui);
BEi = (square_m_ei*v_mui).^2;
b = mq0barra^2;
b2 = b*2;

for(quant=0; quant < cn; quant++)
{
    if (BEi[quant] >= b2) v_comp_BEi[quant]= BEi[quant];
    else v_comp_BEi[quant]= 0;
}

decl v_comp_mq1i=zeros(cn,1), v_comp_mq2i=zeros(cn,1),
v_comp_mq3i=zeros(cn,1);

for(quant=0; quant < cn; quant++)
{
if(k1==0) print("\n Para q=1, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
    if (v_mq1i[quant] >= sqrt(2)*mq1barra)
        v_comp_mq1i[quant]=v_mq1i[quant];
    else v_comp_mq1i[quant]= 0;
}

if(k2==0) print("\n Para q=2, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
    if (v_mq2i[quant] >= sqrt(2)*mq2barra)
        v_comp_mq2i[quant]= v_mq2i[quant];
    else v_comp_mq2i[quant]= 0;
}

if(k3==0) print("\n Para q=3, nao existe pontos influentes \n ");

```

```

else
{
    if (v_mq3i[quant] >= sqrt(2)*mq3barra)
        v_comp_mq3i[quant]= v_mq3i[quant];
    else v_comp_mq3i[quant]= 0;
}
}

println("\n*****");
println("\n Num. de observacoes: ", cn, "\n");
println("\n Valores verdadeiros de alpha: ", valpha);
println("\n Matriz das observacoes: ", vetor~s_my, "\n");
println("\n Estimativas: ", "%6.4f", "%r", {"alpha1: ", "alpha2: ",
    "alpha3: ", "alpha4: "}, "%c", {"EMV"}, mEstMedia);
println("\n Valores de referencia para ", "%6.4f", "%r", {"q=1: ", "q=2: ",
    "q=3: "}, v_qvalcri);
println("\n Quantidade de autovetores influentes: ", "%3.1f", "%r",
    {"q=1: ", "q=2: ", "q=3: "}, v_quant);
println("\n Contribuicao agregada individual para q=1: ", v_mq1i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=2: ", v_mq2i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=3: ", v_mq3i, "\n");
println("\n Valores medios para a contribuicao agregada total: ", "%3.5f",
    "%r", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra);
println("\n Valores de referencia para a contribuicao agregada total: ",
    "%3.5f", "%r", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra2);
println("\n Vetor de casos pouco influentes (q=1): ",
    vetor~v_comp_mq1i, "\n");
println("\n Vetor de casos moderadamente influentes (q=2): ",
    vetor~v_comp_mq2i, "\n");
println("\n Vetor de casos fortemente influentes (q=3): ",
    vetor~v_comp_mq3i, "\n");
println("\n Autovetores: ", mevec, "\n");
println("\n Autovalores: ", meval, "\n");
println("\n Autovalores normalizados: ", v_mui, "\n");
println("\n Valores da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
    basico: ", vetor~BEi, "\n");
println("\n Valor medio da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
    basico: ", "%3.5f", b, "\n");
println("\n Valor de referencia da curvatura normal conforme do vetor de
    perturbacao basico: ", "%3.5f", b2, "\n");
println("\n Valores influentes pela curvatura normal conforme do vetor de
    perturbacao basico: ", vetor~v_comp_BEi, "\n"); }

/*Analises para o esquema de perturbacao multiplicativa*/
else if (MODELO == 3)
{decl termo1_m = (s_vwm).^(-1);

    decl termo2_m=zeros(cn,np-2), v_termo2_m=zeros(cn,np-2),
    i_m, termo3_m=zeros(cn,1), v_termo3_m=zeros(cn,1);
    for(i_m = 0; i_m < cn; i_m++)
    {

```

```

termo2_m[i_m] [] = -(s_my[i_m][0])*((1 - s_my[i_m][0]*s_vwm[i_m]).^(-1));
termo3_m[i_m] = -(s_my[i_m][0]-(sumr((s_my[i_m][1:np-2]*s_my[i_m][0])/
((1-s_my[i_m][0]))))/
((1-s_my[i_m][0]*s_vwm[i_m]-
(sumr((s_my[i_m][1:np-2]*((1-s_my[i_m][0]*s_vwm[i_m])/
((1-s_my[i_m][0]))))))));
}
v_termo2_m[] [] = termo2_m;
v_termo3_m[] [0] = termo3_m;

decl mdelta_m = (termo1_m~v_termo2_m~v_termo3_m)'; /*matriz Delta*/
decl meval_m, mevec_m;
decl mDLD_m = mdelta_m'*m_LInv*mdelta_m; /*matriz delta'*inversa de
L...*delta*/

decl traDLD_m = trace(mDLD_m.^2);
decl sqrttraDLD_m = sqrt(traDLD_m);
decl B_m = -(mDLD_m)/sqrttraDLD_m; /*matriz da curvatura*/
decl eigenB_m = eigensym(B_m, &meval_m, &mevec_m);

decl somameval_m = sqrt(sumr(meval_m.^2));

decl v_mui_m = zeros(cn,1);
decl Bl_m = zeros(cn,1);
decl mu_i_m = zeros(cn,1);
decl v_Bl_m = zeros(cn,1);

for (w = 0; w < cn; w++)
{
    Bl_m[w] = -(mevec_m[] [w] *(mDLD_m)*mevec_m[] [w])/sqrttraDLD_m;
    mu_i_m[w] = fabs(meval_m[] [w]/somameval_m);
}

v_mui_m[] [0] = mu_i_m;
v_Bl_m[] [0] = Bl_m;

decl pc1lambda_m = 1/sqrt(cn);
decl pc2lambda_m = 2/sqrt(cn);
decl pc3lambda_m = 3/sqrt(cn);
decl k1_m = sumc(v_mui_m.>=pc1lambda_m);
decl k2_m = sumc(v_mui_m.>=pc2lambda_m);
decl k3_m = sumc(v_mui_m.>=pc3lambda_m);
decl v_quant_m = k1_m|k2_m|k3_m;
decl v_qvalcri_m = pc1lambda_m|pc2lambda_m|pc3lambda_m;
decl quant_m, v_muk1_m=zeros(k1_m,1), v_muk2_m=zeros(k2_m,1),
v_muk3_m=zeros(k3_m,1), v_mq1i_m=zeros(k1_m,1), v_mq2i_m=zeros(k2_m,1),
v_mq3i_m=zeros(k3_m,1), square_m_ei_m, casos1_m=zeros(cn,np-1),
casos2_m=zeros(cn,np-1), casos3_m=zeros(cn,np-1);

square_m_ei_m = mevec_m.^2;

for(quant_m=0; quant_m < k1_m; quant_m++)

```

```

{
    if (v_mui_m[quant_m] >= pc1lambda_m)
        v_muk1_m[quant_m]= v_mui_m[quant_m];
    else v_muk1_m[quant_m]= 0;
}
for(quant_m=0; quant_m < k2_m; quant_m++)
{
    if (v_mui_m[quant_m] >= pc2lambda_m)
        v_muk2_m[quant_m]= v_mui_m[quant_m];
    else v_muk2_m[quant_m]= 0;
}
for(quant_m=0; quant_m < k3_m; quant_m++)
{
    if (v_mui_m[quant_m] >= pc3lambda_m)
        v_muk3_m[quant_m]= v_mui_m[quant_m];
    else v_muk3_m[quant_m]= 0;
}

if(k1_m==0) v_mq1i_m=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq1i_m = sqrt(square_m_ei_m[] [0:k1_m-1]*v_muk1_m);
}

if(k2_m==0) v_mq2i_m=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq2i_m = sqrt(square_m_ei_m[] [0:k2_m-1]*v_muk2_m);
}

if(k3_m==0) v_mq3i_m=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq3i_m = sqrt(square_m_ei_m[] [0:k3_m-1]*v_muk3_m);
}

decl mq1barra_m = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk1_m));
decl mq2barra_m = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk2_m));
decl mq3barra_m = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk3_m));
decl v_mqbarra_m = mq1barra_m|mq2barra_m|mq3barra_m;
decl v_mqbarra2_m = sqrt(2)*mq1barra_m|sqrt(2)*mq2barra_m|sqrt(2)*
    mq3barra_m;
decl v_comp_BEi_m=zeros(cn,1);

decl mq0_m = sqrt(square_m_ei_m*v_mui_m);
decl mq0barra_m = sqrt(sumc(v_mui_m)/cn);
decl mq0barra2_m = sqrt(2)*mq0barra_m;
decl mi_m = (square_m_ei_m*v_mui_m);
decl BEi_m = (square_m_ei_m*v_mui_m).^2;
decl b_m = mq0barra_m^2;
decl b2_m = b_m*2;

decl v_comp_mq1i_m=zeros(cn,1), v_comp_mq2i_m=zeros(cn,1),

```

```

v_comp_mq3i_m=zeros(cn,1);

for(quant_m=0; quant_m < cn; quant_m++)
{
if(k1_m==0) print("\n Para q=1, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
    if (v_mq1i_m[quant_m] >= sqrt(2)*mq1barra_m)
        v_comp_mq1i_m[quant_m]= v_mq1i_m[quant_m];
    else v_comp_mq1i_m[quant_m]= 0;
}

if(k2_m==0) print("\n Para q=2, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
    if (v_mq2i_m[quant_m] >= sqrt(2)*mq2barra_m)
        v_comp_mq2i_m[quant_m]= v_mq2i_m[quant_m];
    else v_comp_mq2i_m[quant_m]= 0;
}

if(k3_m==0) print("\n Para q=3, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
    if (v_mq3i_m[quant_m] >= sqrt(2)*mq3barra_m)
        v_comp_mq3i_m[quant_m]= v_mq3i_m[quant_m];
    else v_comp_mq3i_m[quant_m]= 0;
}
}

println("\n*****");
println("\n Num. de observacoes: ", cn, "\n");
println("\n Valores verdadeiros de alpha: ", valpha);
println("\n Matriz das observacoes: ", vetor~s_my, "\n");
println("\n Estimativas: ", "%6.4f", "%r", {"alpha1: ", "alpha2: ",
    "alpha3: ", "alpha4: "}, "%c", {"EMV"}, mEstMedia);
println("\n Valores de referencia para ", "%6.4f", "%r", {"q=1: ", "q=2: ",
    "q=3: "}, v_qvalcri);
println("\n Quantidade de autovetores influentes: ", "%3.1f", "%r",
    {"q=1: ", "q=2: ", "q=3: "}, v_quant);
println("\n Contribuicao agregada individual para q=1: ", v_mq1i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=2: ", v_mq2i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=3: ", v_mq3i, "\n");
println("\n Valores medios para a contribuicao agregada total: ", "%3.5f",
    "%r", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra);
println("\n Valores de referencia para a contribuicao agregada total: ",
    "%3.5f", "%r", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra2);
println("\n Vetor de casos pouco influentes (q=1): ",
    vetor~v_comp_mq1i, "\n");
println("\n Vetor de casos moderadamente influentes (q=2): ",
    vetor~v_comp_mq2i, "\n");
println("\n Vetor de casos fortemente influentes (q=3): ",
    vetor~v_comp_mq3i, "\n");
println("\n Autovetores: ", mevec, "\n");

```

```

println("\n Autovalores: ", meval, "\n");
println("\n Autovalores normalizados: ", v_mui, "\n");
println("\n Valores da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
        basico: ", vetor~BEi, "\n");
println("\n Valor medio da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
        basico: ", "%3.5f", b, "\n");
println("\n Valor de referencia da curvatura normal conforme do vetor de
        perturbacao basico: ", "%3.5f", b2, "\n");
println("\n Valores influentes pela curvatura normal conforme do vetor de
        perturbacao basico: ", vetor~v_comp_BEi, "\n");
}

/*Analises para o esquema de perturbacao multiplicativa na
verossimilhanca*/
else if (MODELO == 4)
{
decl cd, termodiag=zeros(cn,np-1);
for(cd=0; cd < np-1; cd++)
{
    termodiag[][cd] = (polygamma(phi_hat,0) + polygamma(alpha_hat[cd],0))
                    + s_mlogy[][cd];
}
decl termop = (polygamma(phi_hat,0) + polygamma(alpha_hat[np-1],0))
            + s_mlog1menosy;

decl mdelta_m = (termodiag~termop)'; /*matriz Delta*/

decl meval_m, mevec_m;
decl mDLD_m = mdelta_m'*m_LInvv*mdelta_m; /*matriz delta'*inversa de
                                           L...delta*/

decl traDLD_m = trace(mDLD_m.^2);
decl sqrttraDLD_m = sqrt(traDLD_m);
decl B_m = -(mDLD_m)/sqrttraDLD_m; /*matriz da curvatura*/
decl eigenB_m = eigensym(B_m, &meval_m, &mevec_m);
decl somameval_m = sqrt(sumr(meval_m.^2));

decl v_mui_m = zeros(cn,1);
decl Bl_m = zeros(cn,1);
decl mu_i_m = zeros(cn,1);
decl v_Bl_m = zeros(cn,1);

for (w = 0; w < cn; w++)
{
    Bl_m[w] = -(mevec_m[][w] *(mDLD_m)*mevec_m[][w])/sqrttraDLD_m;
    mu_i_m[w] = fabs(meval_m[][w]/somameval_m);
}

v_mui_m[][0] = mu_i_m;
v_Bl_m[][0] = Bl_m;

decl pc1lambda_m = 1/sqrt(cn);
decl pc2lambda_m = 2/sqrt(cn);

```

```

decl pc3lambda_m = 3/sqrt(cn);
decl k1_m = sumc(v_mui_m.>=pc1lambda_m);
decl k2_m = sumc(v_mui_m.>=pc2lambda_m);
decl k3_m = sumc(v_mui_m.>=pc3lambda_m);
decl v_quant_m = k1_m|k2_m|k3_m;
decl v_qvalcri_m = pc1lambda_m|pc2lambda_m|pc3lambda_m;
decl quant_m, v_muk1_m=zeros(k1_m,1), v_muk2_m=zeros(k2_m,1),
v_muk3_m=zeros(k3_m,1), v_mq1i_m=zeros(k1_m,1), v_mq2i_m=zeros(k2_m,1),
v_mq3i_m=zeros(k3_m,1), square_m_ei_m, casos1_m=zeros(cn,np-1),
casos2_m=zeros(cn,np-1), casos3_m=zeros(cn,np-1);

square_m_ei_m = mevec_m.^2;

for(quant_m=0; quant_m < k1_m; quant_m++)
{
    if (v_mui_m[quant_m] >= pc1lambda_m)
        v_muk1_m[quant_m]= v_mui_m[quant_m];
    else v_muk1_m[quant_m]= 0;
}
for(quant_m=0; quant_m < k2_m; quant_m++)
{
    if (v_mui_m[quant_m] >= pc2lambda_m)
        v_muk2_m[quant_m]= v_mui_m[quant_m];
    else v_muk2_m[quant_m]= 0;
}
for(quant_m=0; quant_m < k3_m; quant_m++)
{
    if (v_mui_m[quant_m] >= pc3lambda_m)
        v_muk3_m[quant_m]= v_mui_m[quant_m];
    else v_muk3_m[quant_m]= 0;
}

if(k1_m==0) v_mq1i_m=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq1i_m = sqrt(square_m_ei_m[] [0:k1_m-1]*v_muk1_m);
}

if(k2_m==0) v_mq2i_m=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq2i_m = sqrt(square_m_ei_m[] [0:k2_m-1]*v_muk2_m);
}

if(k3_m==0) v_mq3i_m=" nao existe pontos influentes ";
else
{
    v_mq3i_m = sqrt(square_m_ei_m[] [0:k3_m-1]*v_muk3_m);
}

decl mq1barra_m = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk1_m));
decl mq2barra_m = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk2_m));
decl mq3barra_m = sqrt((1/cn)*sumc(v_muk3_m));

```



```

decl v_mqbarra_m = mq1barra_m|mq2barra_m|mq3barra_m;
decl v_mqbarra2_m = sqrt(2)*mq1barra_m|sqrt(2)*mq2barra_m|
                    sqrt(2)*mq3barra_m;
decl v_comp_BEi_m=zeros(cn,1);

decl mq0_m = sqrt(square_m_ei_m*v_mui_m);
decl mq0barra_m = sqrt(sumc(v_mui_m)/cn);
decl mq0barra2_m = sqrt(2)*mq0barra_m;
decl mi_m = (square_m_ei_m*v_mui_m);
decl BEi_m = (square_m_ei_m*v_mui_m).^2;
decl b_m = mq0barra_m^2;
decl b2_m = b_m*2;

decl v_comp_mq1i_m=zeros(cn,1), v_comp_mq2i_m=zeros(cn,1),
v_comp_mq3i_m=zeros(cn,1);

for(quant_m=0; quant_m < cn; quant_m++)
{
if(k1_m==0) print("\n Para q=1, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
if (v_mq1i_m[quant_m] >= sqrt(2)*mq1barra_m)
v_comp_mq1i_m[quant_m]= v_mq1i_m[quant_m];
else v_comp_mq1i_m[quant_m]= 0;
}

if(k2_m==0) print("\n Para q=2, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
if (v_mq2i_m[quant_m] >= sqrt(2)*mq2barra_m)
v_comp_mq2i_m[quant_m]= v_mq2i_m[quant_m];
else v_comp_mq2i_m[quant_m]= 0;
}

if(k3_m==0) print("\n Para q=3, nao existe pontos influentes \n ");
else
{
if (v_mq3i_m[quant_m] >= sqrt(2)*mq3barra_m)
v_comp_mq3i_m[quant_m]= v_mq3i_m[quant_m];
else v_comp_mq3i_m[quant_m]= 0;
}
}

println("\n*****");
println("\n Num. de observacoes: ", cn, "\n");
println("\n Valores verdadeiros de alpha: ", valpha);
println("\n Matriz das observacoes: ", vetor~s_my, "\n");
println("\n Estimativas: ", "%6.4f", "%r", {"alpha1: ", "alpha2: ",
"alpha3: ", "alpha4: "}, "%c", {"EMV"}, mEstMedia);
println("\n Valores de referencia para ", "%6.4f", "%r", {"q=1: ", "q=2: ",
"q=3: "}, v_qvalcri);
println("\n Quantidade de autovetores influentes: ", "%3.1f", "%r",
{"q=1: ", "q=2: ", "q=3: "}, v_quant);

```

```

println("\n Contribuicao agregada individual para q=1: ", v_mq1i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=2: ", v_mq2i, "\n");
println("\n Contribuicao agregada individual para q=3: ", v_mq3i, "\n");
println("\n Valores medios para a contribuicao agregada total: ", "%3.5f",
"%x", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra);
println("\n Valores de referencia para a contribuicao agregada total: ",
"%3.5f", "%x", {"m(1)= ", "m(2)= ", "m(3)= "}, v_mqbarra2);
println("\n Vetor de casos pouco influentes (q=1): ",
vetor~v_comp_mq1i, "\n");
println("\n Vetor de casos moderadamente influentes (q=2): ",
vetor~v_comp_mq2i, "\n");
println("\n Vetor de casos fortemente influentes (q=3): ",
vetor~v_comp_mq3i, "\n");
println("\n Autovetores: ", mevec, "\n");
println("\n Autovalores: ", meval, "\n");
println("\n Autovalores normalizados: ", v_mui, "\n");
println("\n Valores da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
basico: ", vetor~BEi, "\n");
println("\n Valor medio da curvatura normal conforme do vetor de perturbacao
basico: ", "%3.5f", b, "\n");
println("\n Valor de referencia da curvatura normal conforme do vetor de
perturbacao basico: ", "%3.5f", b2, "\n");
println("\n Valores influentes pela curvatura normal conforme do vetor de
perturbacao basico: ", vetor~v_comp_BEi, "\n");
}

}/*fim do loop para diferentes tamanho de amostra*/

println("*****");
print("\n\t\t DATA: ", date());
print("\n\t\t HORA: ", time(), "\n");
print("\n\t\t TEMPO TOTAL DE EXECUCAO: ", timespan(dExecTime));
print("\n");

}/*fim do main*/

```

D. Valores da matriz Y

Tabela D.1. Valores pseudo-aleatórios utilizados na avaliação numérica.

Obs	Y_1	Y_2	Y_3
1	0.12294	0.25250	0.49479
2	0.38884	0.21107	0.32130
3	0.07240	0.25088	0.26658
4	0.42801	0.02067	0.44319
5	0.14184	0.28549	0.32806
6	0.18893	0.52146	0.17575
7	0.24432	0.16608	0.47081
8	0.28928	0.06374	0.16685
9	0.45292	0.09614	0.25947
10	0.19210	0.28102	0.34858
11	0.29138	0.11613	0.48593
12	0.15835	0.05576	0.41849
13	0.28155	0.13744	0.40488
14	0.09667	0.16874	0.30548
15	0.52695	0.13072	0.29196
16	0.17352	0.18193	0.15549
17	0.21844	0.39560	0.12282
18	0.37642	0.26625	0.25187
19	0.34216	0.03958	0.37938
20	0.20866	0.11921	0.29596
21	0.02888	0.25437	0.42944
22	0.42424	0.08214	0.29358
23	0.03313	0.27723	0.41897
24	0.36018	0.18912	0.22699
25	0.10620	0.49942	0.14685
26	0.21522	0.25013	0.24583
27	0.00586	0.42300	0.17633
28	0.13100	0.35910	0.17126
29	0.11253	0.38268	0.40796
30	0.39374	0.25940	0.25617

Tabela D.2. Composição de 25 espécimes de kongite (Aitchison, 2003, p. 356).

Espécimes	Percentagens por peso				
	Albite (Y_1)	Blandite (Y_2)	Cornite (Y_3)	Daubite (Y_4)	Endite (Y_5)
1	33.5	6.1	41.3	7.1	12.0
2	47.6	14.9	16.1	14.8	6.6
3	52.7	23.9	6.0	8.7	8.7
4	44.5	24.2	10.7	11.9	8.7
5	42.3	47.6	0.6	4.1	5.4
6	51.8	33.2	1.9	7.0	6.1
7	47.9	21.5	10.7	9.5	10.4
8	51.2	23.6	6.2	13.3	5.7
9	19.3	2.3	65.8	5.8	6.8
10	46.1	23.4	10.4	11.5	8.6
11	30.6	6.7	43.0	6.3	13.4
12	49.7	28.1	5.1	8.0	9.1
13	49.4	24.3	7.6	8.5	10.2
14	38.4	9.5	30.6	14.8	6.7
15	41.6	19.0	17.3	13.8	8.3
16	42.3	43.3	1.6	5.9	6.9
17	45.7	23.9	10.3	11.6	8.5
18	45.5	20.3	13.6	10.9	9.7
19	52.1	17.9	10.7	7.9	11.4
20	46.2	14.3	18.5	12.2	8.8
21	47.2	30.9	4.6	6.3	11.0
22	45.4	33.3	4.0	11.9	5.4
23	48.6	23.4	8.7	10.7	8.6
24	31.2	4.5	47.0	10.2	7.1
25	44.3	15.0	19.4	10.5	10.8

Tabela D.3. Padrões de atividade de um estatístico durante 20 dias (Aitchison, 2003, p. 365).

Nº de dias	Proporção de dias na atividade					
	Ensino (Y ₁)	Consultoria (Y ₂)	Administração (Y ₃)	Pesquisa (Y ₄)	Outras atividades (Y ₅)	Sono (Y ₆)
1	14.4	9.1	17.9	10.7	26.3	21.7
2	16.2	7.9	10.7	13.2	26.5	25.4
3	15.3	10.1	13.1	13.8	20.9	26.7
4	17.7	8.7	14.0	13.2	15.5	31.0
5	15.8	11.0	13.9	11.6	25.8	21.9
6	16.5	7.9	11.3	11.3	27.5	25.5
7	15.9	8.4	11.7	9.4	22.5	32.1
8	16.1	10.5	12.3	11.0	26.7	23.4
9	16.3	12.6	10.5	10.6	22.7	27.3
10	16.9	10.2	10.4	10.4	23.5	28.6
11	14.9	11.3	12.3	11.5	25.6	24.4
12	11.8	10.0	14.5	9.6	19.2	34.9
13	10.6	11.2	13.5	10.4	20.5	33.8
14	16.3	14.2	10.9	11.5	26.0	21.1
15	15.1	12.2	12.6	12.1	23.5	24.5
16	16.3	10.1	12.6	14.2	23.2	23.7
17	17.6	8.4	9.4	9.8	21.3	33.5
18	10.4	9.3	14.8	9.0	26.9	29.5
19	11.1	11.1	11.8	8.6	21.6	35.8
20	10.5	9.0	13.5	11.7	16.8	38.5

Tabela D.4. Composição de células brancas de 28 células sanguíneas por dois métodos diferentes (Aitchison, 2003, p. 366).

N ^o da amostra	Inspeção microscópica			Análise de imagem		
	<i>Granulocytes</i> (Y ₁)	<i>Lymphocytes</i> (Y ₂)	<i>Monocytes</i> (Y ₃)	<i>Granulocytes</i> (Y ₁)	<i>Lymphocytes</i> (Y ₂)	<i>Monocytes</i> (Y ₃)
1	0.732	0.256	0.012	0.763	0.223	0.014
2	0.664	0.280	0.056	0.681	0.262	0.057
3	0.806	0.175	0.019	0.867	0.116	0.017
4	0.620	0.351	0.029	0.565	0.408	0.026
5	0.856	0.113	0.031	0.885	0.086	0.029
6	0.957	0.030	0.013	0.966	0.023	0.011
7	0.927	0.053	0.020	0.935	0.047	0.018
8	0.903	0.072	0.025	0.921	0.055	0.024
9	0.936	0.055	0.009	0.943	0.048	0.009
10	0.871	0.114	0.015	0.888	0.097	0.015
11	0.240	0.736	0.024	0.225	0.747	0.028
12	0.475	0.472	0.053	0.577	0.370	0.054
13	0.318	0.663	0.019	0.272	0.706	0.022
14	0.462	0.516	0.022	0.544	0.432	0.025
15	0.376	0.252	0.372	0.364	0.245	0.391
16	0.440	0.240	0.320	0.496	0.180	0.324
17	0.583	0.142	0.275	0.629	0.099	0.272
18	0.399	0.169	0.432	0.500	0.115	0.384
19	0.804	0.152	0.044	0.805	0.155	0.040
20	0.655	0.263	0.082	0.659	0.247	0.094
21	0.725	0.218	0.057	0.769	0.179	0.052
22	0.650	0.298	0.052	0.665	0.283	0.052
23	0.370	0.166	0.464	0.388	0.159	0.452
24	0.175	0.802	0.023	0.262	0.709	0.028
25	0.328	0.627	0.045	0.395	0.561	0.043
26	0.427	0.511	0.062	0.388	0.542	0.070
27	0.943	0.046	0.011	0.948	0.041	0.011
28	0.860	0.108	0.032	0.886	0.086	0.027

Referências bibliográficas

- [1] Aitchison, J. (2003). *The Statistical Analysis of Compositional Data*. New Jersey: Blackburn Press.
- [2] Barbosa, F. B. (1977). Estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição de Dirichlet. *Revista Brasileira de Estatística*, **38**, 203–219.
- [3] Beckman, R. (1986). Discussion on ‘Assessment of local influence’ (by R. D. Cook). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**, 161–162.
- [4] Beckman, R. J., Nachtsheim, C. J. & Cook, R. D. (1987). Diagnostics for mixed-model analysis of variance. *Technometrics*, **29**, 413–426.
- [5] Cook, R. D. (1986). Assessment of local influence (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**, 133–169.
- [6] Galea, M., Paula, G. A. & Bolfarine, H. (1997). Local influence in elliptical linear regression models. *The Statistician*, **46**, 71–79.
- [7] Galea, M., Paula, G. A. & Uribe-Opazo, M. (2003). On influence diagnostics in univariate elliptical linear regression models. *Statistical Papers*, **44**, 23–45.
- [8] Johnson, N., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, 2^a ed. New York: John Wiley and Sons.
- [9] Kobayashi, S. (1972). *Transformation Groups in Differential Geometry*. New York: Springer-Verlag.
- [10] Lawrance, A. J. (1988). Regression transformation diagnostics using local influence. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 1067–1072.
- [11] Liu, S. Z. (2000). On local influence for elliptical linear models. *Statistical Papers*, **41**, 211–224.
- [12] Loynes, R. M. (1986). Discussion on ‘Assessment of local influence’ (by R. D. Cook). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**, 156–157.
- [13] Maia, A. L. S, Braga Junior, A. C. R. & Cordeiro, G. M. (2003). Corrected likelihood ratio and score tests for the beta distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 585–596.
- [14] Mood, A.M., Graybill, F.A. & Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, 3^a ed. New York: McGraw-Hill.
- [15] Pan, J. X. & Bai, P. (2003). Local influence analysis in the growth curve model with Rao’s simple covariance structure. *Journal of Applied of Statistics*, **30**, 771–782.
- [16] Paula, G. A. (1993). Assessing local influence in restricted regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **16**, 63–79.
- [17] Paula, G. A. (2004). *Modelos de Regressão com Apoio Computacional*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística - USP.
- [18] Poon, W. Y. & Poon, Y. S. (1999). Conformal normal curvature and assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **61**, 51–61.

- [19] Prescott, P. (1986). Discussion on ‘Assessment of local influence’ (by R. D. Cook). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**, 161.
- [20] Racine, J. & Hyndman, R. J. (2002). Using R to teach econometrics. *Journal of Applied Econometrics*, **17**, 175–189.
- [21] Shall, R. & Dune, T. T. (1992). A note on the relationship between parameter collinearity and local influence. *Biometrika*, **79**, 399–404.
- [22] Shi, L. (1997). Local influence in principal component analysis. *Biometrika*, **84**, 175–186.
- [23] St Laurent, R. Y. & Cook, R. D. (1993). Leverage, local influence and curvature in nonlinear regression. *Biometrika*, **80**, 99–106.
- [24] Thomas, W. & Cook, R. D. (1990). Assessing influence on predictions in generalized linear models. *Technometrics*, **32**, 59–65.
- [25] Thorpe, J. A. (1979). *Elementary Topics in Differential Geometry*. New York: Springer-Verlag.
- [26] Zhang, X. (2004). Assessment of local influence in GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, **25**, 301.