UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

LEVY DE OLIVEIRA COELHO

APRENDENDO E ENSINANDO A PARTIR DOS ERROS: Contribuição para os domínios de conhecimentos para o ensino de Combinatória na formação inicial de professores de Matemática

Recife
2025

LEVY DE OLIVEIRA COELHO

APRENDENDO E ENSINANDO A PARTIR DOS ERROS: Contribuição para os domínios de conhecimentos para o ensino de Combinatória na formação inicial de professores de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.
Área de concentração: Processos de Ensino Aprendizagem em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Coelho, Levy de Oliveira.
Aprendendo e ensinando a partir dos erros: contribuição para os domínios de conhecimentos para o ensino de combinatória na formação inicial de professores de Matemática / Levy de Oliveira Coelho. - Recife, 2025.
152 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2025.
Orientação: Jaqueline Aparecida Forato Lixandrão Santos.
Inclui referências, anexos e apêndice.

1. Análise combinatória; 2. Conhecimento de professor; 3. Formação de professores; 4. Erros; 5. Educação estatística. I. Santos, Jaqueline Aparecida Forato Lixandrão. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

LEVY DE OLIVEIRA COELHO

APRENDENDO E ENSINANDO A PARTIR DOS ERROS: Contribuição para os domínios de conhecimentos para o ensino de Combinatória na formação inicial de professores de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.
Área de concentração: Processos de Ensino Aprendizagem em Educação Matemática.

Aprovado em: 27/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos
(Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Profa. Dra. Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa
(Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Profa. Dra. Cristiane de Arimatéa Rocha
(Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me deu a vida e esteve sempre comigo, sendo o meu auxílio em todos os momentos, que me abençoou e fez prosperar nessa minha empreitada, sou eternamente grato pelos seus cuidados que estão sobre mim todos os dias. Sou grato a minha família que me apoiou e esteve orando por mim enquanto estive longe para realização deste mestrado. Foi um desafio para mim e para minha mãe lhe dar com a saudade, mas com amor conseguimos superar tudo isso.

Sou imensamente grato à minha orientadora, Jaqueline Lixandrão. Ela sim pode sofrer comigo na escrita desse trabalho, pois mais que uma mãe acadêmica, também procurou se como uma mãe adotiva, preocupada como eu estava me saindo na ambientação do novo lugar onde eu estava morando e me sendo solícita em tudo. Sou grato por toda a sua experiência e como se manteve solícita a qualquer hora que eu precisasse, mesmo acarretada de muito trabalho, buscou com empenho contribuir para o sucesso da minha pesquisa me dando dicas e planejando comigo cada etapa dessa pesquisa.

Sou grato ao Geração, grupo de estudos em raciocínio combinatório e probabilístico. As discussões e as opiniões de vocês contribuíram não somente para o aprimoramento do meu trabalho, mas também para que minha formação fosse mais crítica quanto às metodologias e perspectivas acadêmicas. Sou grato a Cristiane Rocha que por várias de vezes se demonstrou solicita para se reunir comigo e me dar pitacos importantes ao meu trabalho. O seu conhecimento abrilhantou meu trabalho, obrigado também por estar na minha banca de defesa, pois sabia que podia confiar nas suas recomendações. Sou grado a Cristiane Pessoa que com muito carinho também contribuiu para o meu trabalho. É admirável sua sensibilidade para o trato com os outros e também o seu cuidado acadêmico, sempre com bons comentários carregados de conhecimentos e experiências sólidas.

Sou grato a todas as amizades que pude fazer em Recife, conheci pessoas realmente maravilhosas a qual puderam me fazer sentir em casa, me sentir acolhido nesta cidade de um povo tão caloroso. Kézia, Irakitan, e a PIB-CDU vocês moram no meu coração, sou imensamente grato a Deus por tê-los conhecido e ter vivido momentos incríveis com vocês. Kézia e Irakitan vocês me mostraram um outro

nível de amizade e companheirismo, que Deus abençoe a vida de vocês por isso. Sou grato às amizades do Monstronato, uma casa estudantil com bastante entretenimento e pessoas incríveis. Levarei essa experiência comigo onde quer que eu for porque vocês conseguiram me mostrar a parte leve da vida, pois risadas de doer a mandíbula não faltaram. Vale a pena ter boas amizades e vocês conseguem demonstram isso facilmente. Vocês são massa demais!

RESUMO

Esta pesquisa objetivou analisar os conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino, apresentados por licenciandos de Matemática em um processo de formação baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios. Para tanto, foi proposto um processo formativo de modo remoto realizado com seis estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – CAA/UFPE. O processo metodológico envolveu um questionário inicial no qual buscou-se conhecer o perfil dos estudantes, um processo formativo com cinco encontros e entrevistas antes e depois do referido processo, com três participantes da pesquisa. O processo formativo se pautou em estudos sobre erros e acertos em problemas combinatórios referenciado pelas teorias de conhecimento de professor e pela Teoria dos Campos Conceituais (TCC) caracterizado por atividades para provocação de conhecimentos de professor a partir dos domínios de conhecimento. Trabalhou-se com protocolos de estudantes analisando erros e acertos em problemas combinatórios. Os resultados indicaram evolução do conhecimento do conteúdo, aumento na confiança do ensino da Combinatória, evidências do conhecimento de aluno por meio de conhecimento de erros comuns e reconhecimento de tarefas que possam ser confusas para estudantes do ensino básico, além de fragmentos do conhecimento de ensino no sequenciamento de tarefas para ensino desse conteúdo. Também foi possível notar o desejo dos participantes por conhecer novas metodologias de ensino e se aprofundar no estudo de Combinatória.

Palavras-chaves: Análise combinatória; Conhecimento de professor; Formação de professores; Erros; Educação estatística.

ABSTRACT

This study aimed to analyze the knowledge of Combinatorics — both by students in terms of content and for teaching — demonstrated by pre-service Mathematics teachers through a training process based on the study of errors and correct responses in combinatorial problems. To this end, a remote training program was conducted with six undergraduate students from the Mathematics Teaching program at the Academic Center of Agreste of the Federal University of Pernambuco (CAA/UFPE). The methodological process involved an initial questionnaire to gather students' profiles, a training process with five meetings, and interviews conducted before and after the program with three of the participants. The training process was guided by studies on errors and correct answers in combinatorial problems, grounded in theories of teacher knowledge and the Theory of Conceptual Fields (TCF). It was characterized by activities designed to provoke teacher knowledge through different knowledge domains. Student protocols were analyzed based on errors and correct answers in combinatorial problems. The results indicated progress in content knowledge, increased confidence in teaching Combinatorics, evidence of knowledge of students through the identification of common errors and recognition of tasks that might be confusing for elementary and secondary education students, as well as elements of pedagogical content knowledge in the sequencing of tasks for teaching this subject. Additionally, participants expressed a desire to learn new teaching methodologies and to deepen their knowledge in the field of Combinatorics.

Keywords: Combinatorial analysis; Teacher knowledge; Teacher education; Errors; Statistics education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A inspiração para esta pesquisa veio por meio de minhas próprias experiências no aprendizado de Matemática, das diversas vezes em que percebi que me equivoquei em resolução de problemas da Matemática e isso me fez questionar por que determinadas estratégias não funcionavam[1]. Essa atitude me fez refletir sobre como o pensamento matemático trabalha para encontrar as soluções para os problemas.

Durante a graduação, desenvolvi uma pesquisa buscando classificar os tipos de erros cometidos por alunos do ensino médio ao resolverem problemas combinatórios. Com essa pesquisa, me questionei sobre os conhecimentos de professores para que possam compreender os erros dos alunos em problemas combinatórios e como podem provocar a superação desses erros por parte dos estudantes.

Hadamard (1945 *apud* Cury, 2019, p. 26), ao refletir sobre erros na Matemática, fez a seguinte observação: “eu faço muito mais [erros] que meus estudantes; só que eu sempre os corrijo de forma que eles não apareçam no resultado final”. Ou seja, os matemáticos aprenderam a identificar erros e incoerências em seus trabalhos e corrigi-los antes de mostrar a solução final, deixando a impressão de que nunca erram.

Aprender a lidar com os erros ainda é um grande desafio para professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Muito embora os erros façam parte desse processo, não há consenso sobre como lidar com eles, e muitas vezes o erro por parte do aluno é visto apenas sob uma perspectiva negativa, o que pode afetar seu lado emocional quando recebem notas baixas e pré-julgamentos (Spinillo *et al.*, 2014).

Segundo La Taille (1997, p. 36), “[...] o erro terá valor como fonte de enriquecimento somente se ele for observável pelo aluno”, ou seja, o aluno precisa entender onde e por que errou. Para Cury (2019, p. 82), “o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui”; portanto, (re)significá-lo demanda maior cuidado por parte do professor.

No ensino de Combinatória, algumas pesquisas, como a de Lima (2015), revelam erros e mapeiam estratégias usadas por futuros professores de um curso de

[1] Em alguns momentos será utilizada a primeira pessoa do singular, por se tratar de questões/observações específicos do autor desta dissertação.

Licenciatura em Matemática para resolverem problemas combinatórios. Nesta pesquisa, o autor percebe a existência de teoremas em ação que indicam “verdades” assumidas pelos estudantes ao resolverem esses tipos de problemas, como, por exemplo, achar que o princípio multiplicativo resolve todos os problemas combinatórios. Essas “verdades” não são necessariamente da Matemática, mas são assumidas como proposições pelos estudantes durante seu processo de aprendizagem (Moreira, 2002).

Outras dificuldades, como uso de fórmulas inadequadas para determinadas situações combinatórias ou mesmo substituições dos valores dos problemas em parâmetros errados das fórmulas, são dificuldades recorrentes apontadas em pesquisas anteriores, seja entre estudantes de graduação ou de ensino médio (Coelho; Dias, 2022; Lima, 2015; Santos-Wagner, Bortoloti; Ferreira, 2013).

Cientes das dificuldades apresentadas, entendemos que, ainda na formação inicial de professores, conhecimentos atrelados à Combinatória, aos erros e acertos, podem contribuir para a compreensão desse último como um suporte didático. Concordamos com Moreira (2012, p. 1145) quando o autor afirma que:

> Formar profissionais com potencialidade para atuar de forma diferenciada na prática docente escolar implica, antes de tudo, conhecer essa prática e fazer com que os futuros profissionais a conheçam tão bem quanto possível, incluindo seus condicionantes, seus problemas e suas soluções, seus saberes e não saberes, suas carências e suas produções, assim como os fatores limitantes de uma eventual atuação diferenciada.

Nesse sentido, a formação inicial precisa subsidiar conhecimentos na dimensão pedagógica e no conteúdo matemático. A relação entre essas duas dimensões acontece na prática docente de forma imbricada, mas, ao discutir conhecimentos de professor, Ball, Thames e Phelps (2008) percebem características que precisam ser cuidadosamente estudadas e categorizadas separadamente para compor aquilo que eles entendem como formas de conhecimento do professor. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), o conhecimento do professor de Matemática pode ser compreendido a partir de seis dimensões: **1) conhecimento comum do conteúdo; 2) conhecimento especializado do conteúdo; 3) conhecimento do conteúdo e dos alunos; 4) conhecimento do conteúdo e do ensino; 5) conhecimento do conteúdo e do currículo; e 6) conhecimento de horizonte.**

Essas dimensões do conhecimento docente têm sido pesquisadas com o objetivo de mapear a existência desses domínios e entender como se manifestam na prática (Hill; Ball; Schilling, 2008). Nesta pesquisa, trabalharemos o conhecimento comum do conteúdo — que denominaremos de conhecimento do conteúdo de Combinatória —, o conhecimento do conteúdo e dos alunos — que mescla o conhecimento do conteúdo de Combinatória e o conhecimento sobre os alunos, como erros mais comuns cometidos e a capacidade de prever como se comportarão diante de determinadas escolhas de exemplos ou atividades — e, por fim, o conhecimento do conteúdo e do ensino, que relaciona os conhecimentos matemáticos com os conhecimentos sobre o ensino, como, por exemplo, pensar na escolha e sequência das atividades mais adequadas a determinado público. Em capítulos posteriores, detalharemos melhor essas dimensões.

Pautados nos estudos desses autores, muitos trabalhos têm analisado as dimensões do conhecimento docente no que se refere ao conteúdo de Combinatória, como a pesquisa de Lima (2016), que analisou os conhecimentos de dois professores do ensino médio por meio de observação de aulas e entrevistas. Essa investigação evidenciou que os professores têm dificuldade em obter feedback dos alunos antes das avaliações regulares e priorizam o ensino por meio de fórmulas.

Em questionamento sobre as dificuldades identificadas nos alunos, os professores mencionaram a importância de classificar os problemas corretamente, porém a observação de Lima (2016) indica que os "invariantes" não ficaram claros para os estudantes durante as aulas, pois não houve planejamento do professor nesse sentido. Além disso, o raciocínio combinatório é pouco explorado durante as aulas, uma vez que os problemas combinatórios normalmente são desenvolvidos de forma isolada e, muitas vezes, é apenas mencionado o tipo de problema proposto e a regra de resolução (Lima, 2016).

Pessoa e Borba (2010) indicam que a Combinatória pode ser interpretada a partir do tripé da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1986), a saber: invariantes, representação simbólica e situações. Assim, as situações nomeiam os diferentes tipos de problemas combinatórios — arranjo, permutação, combinação e produto de medidas —; os invariantes são as características que não variam para cada uma dessas situações, como, por exemplo, a ordem de disposição dos elementos gerar novas possibilidades ou não; e a representação simbólica refere-se às formas de representar as soluções dos problemas, como diagramas de árvore, listagem sistemática, entre outros.

A partir dos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008), Cunha (2015) desenvolveu uma pesquisa buscando responder à seguinte pergunta: “Como os professores elaboram problemas combinatórios a partir das situações presentes na Combinatória (permutação, arranjo, combinação e produto de medidas) e dos invariantes do conceito?” (Cunha, 2015, p. 65). O autor realizou, então, uma pesquisa com sete professores do ensino médio, com pelo menos cinco anos de experiência, e indicou que os professores têm mais facilidade para criar problemas de Combinatória a partir de situações do que a partir dos invariantes, pois a maioria criou outros tipos de problemas quando apresentados aos invariantes, demonstrando, assim, não possuir domínio sobre a conceituação apresentada por Pessoa e Borba (2010).

Observa-se, a partir do apresentado, que tanto professores quanto alunos apresentam dificuldades com a Combinatória. Por isso, fortalecer conhecimentos ainda na graduação de Matemática pode gerar melhorias que impactem a educação básica. Assim, enxergar o erro não como algo negativo que precise ser eliminado a qualquer custo, mas como um aliado para experienciar novas formas de aprendizagem — inclusive no estudo de Combinatória — é fundamental.

Diante do exposto, nos propomos a pesquisar a construção de conhecimentos de futuros professores sobre Combinatória, tendo como participantes estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, campus do Centro Acadêmico do Agreste — UFPE/CAA, localizado no município de Caruaru/PE. Assim, temos como problema de pesquisa: quais conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino são apresentados por licenciandos em Matemática em um processo formativo baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios? Para responder a essa questão, nos apropriamos dos seguintes objetivos.

Objetivo geral: Analisar conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino, apresentados por licenciandos de Matemática em um processo formativo baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios.

Objetivos específicos: a) Identificar experiências e conhecimentos prévios de licenciandos quanto à Combinatória e as compreensões sobre erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática;

b) Analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos, a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios; e

c) Identificar conhecimentos para o ensino de Combinatória de licenciandos do curso de Matemática, a partir da elaboração de plano de aula, de discussões durante o processo formativo e em entrevistas.

Apoiados nesses objetivos, propomos um questionário perfil que foi enviado previamente aos estudantes antes do início da formação, além de uma entrevista inicial com três dos seis participantes, também realizada antes da formação, visando apurar conhecimentos prévios dos licenciandos. Depois dessas duas primeiras etapas, foi realizado o processo formativo e, por fim, uma entrevista final, na qual foram identificados feedbacks sobre os conhecimentos investigados durante o processo formativo.

Nos apoiaremos nos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008) para investigar os conhecimentos de professor, no arcabouço conceitual proposto por Vergnaud (1986) sobre o princípio multiplicativo e na classificação de problemas combinatórios apresentada por Pessoa e Borba (2010). Esses estudos serão explicitados no capítulo 2, que abarca aspectos da formação de professor, do ensino de Combinatória e a revisão da literatura. No capítulo 3 é apresentada a construção metodológica desta pesquisa, incluindo todos os detalhes da formação. No capítulo 4, a análise dos dados coletados em todo o processo metodológico. Por fim, externamos nossas considerações finais como último capítulo.

Os resultados indicaram evolução do conhecimento do conteúdo, aumento na confiança para o ensino da Combinatória, evidências do conhecimento de aluno por meio do reconhecimento de erros comuns e de tarefas que possam ser confusas para estudantes do ensino básico, além de fragmentos do conhecimento de ensino no sequenciamento de tarefas para o ensino desse conteúdo. Também foi possível notar o desejo dos participantes por conhecer novas metodologias de ensino e se aprofundar no estudo de Combinatória.

Assim, esta pesquisa visa contribuir com a formação de professores, esperando que o impacto dessa formação possa favorecer o processo de ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica, além de estimular formas de fortalecimento do ensino superior e trazer subsídios à pesquisa em educação matemática.

2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES, TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E COMBINATÓRIA: PERCEPÇÕES PARA A PRÁTICA DOCENTE

Há muitos anos, a formação de professores vem sendo debatida sob diversas perspectivas. No ensino da Matemática, diversas visões têm sido levantadas para alinhar as práticas pedagógicas com as expectativas e resultados propostos pelos programas oficiais. Diante das demandas por melhores resultados na aprendizagem dos estudantes da educação básica, o “olhar” normalmente é focado no professor. Quais conhecimentos pertinentes à sala de aula podem ser mais bem analisados para contribuir para a formação de professores? Quais as características de um bom professor? Como os conhecimentos prévios podem ser aproveitados durante um processo formativo?

Formalmente, o desenvolvimento profissional docente começa a partir dos estudos e das experiências promovidas na graduação, por meio das disciplinas teóricas, práticas e estágios supervisionados. No entanto, as experiências vivenciadas no contexto escolar, mesmo como aluno, fazem parte do ideário do futuro professor. Desse modo, a formação inicial é um ambiente multifacetado para a apropriação da cultura profissional de um professor, a identidade profissional, a criticidade do ambiente de trabalho e outros aspectos da profissão.

A respeito das características que vão influenciar no que se qualifica um bom professor, Nóvoa (2009) considera que seria necessária uma lista interminável de competências, características e atribuições, e que este caminho não faria sentido. Mas aponta que a formação de professores deve assumir uma forte componente prática que tenha a aprendizagem dos alunos e os estudos de casos concretos como o cerne da discussão do trabalho escolar.

Ciente da dicotomia entre teoria e prática nas discussões sobre quem se sobrepõe a quem, Nóvoa (2009) vê na residência médica um ambiente fértil para inspiração do trabalho formativo do professor. Durante o acompanhamento de um grupo de estudantes e professores em um hospital, Nóvoa (2009, p. 4) observou cinco aspectos do trabalho realizado, a saber:

> i) o modo como a formação se realiza a partir da observação, do estudo e da análise de cada caso; ii) a identificação de aspectos a necessitarem de aprofundamentos teóricos, designadamente quanto à possibilidade de distintas abordagens de uma mesma situação; iii) a existência de uma reflexão conjunta, sem confundir os papéis de cada um (chefe da equipa, médicos, internos, estagiários etc.), mas procurando mobilizar um

> conhecimento pertinente; iv) a preocupação com questões relacionadas com o funcionamento dos serviços hospitalares e a necessidade de introduzir melhorias de diversa ordem.

Consideramos que alguns aspectos vêm de encontro com a pesquisa que pretendemos realizar, como a formação que se realiza a partir da observação, do estudo e da análise de caso (item “i”). Entendemos que, ao propor aos licenciandos que observem registros de atividade de alunos, suas respostas, seus acertos e seus erros, reflexões podem emergir, assim como maior compreensão sobre o papel do erro na aprendizagem. Os licenciandos podem também fazer pesquisa sobre o que os dados revelam sobre a compreensão do conteúdo pelos estudantes e buscar metodologias mais adequadas para o processo de ensino e aprendizagem. Tais considerações também nos remetem ao aspecto “ii)”, que aponta para a identificação de aspectos que precisam de aprofundamento teórico.

A procura pelas melhores propostas de ensino e de avaliações é uma característica de professores preocupados com a aprendizagem dos alunos. Os estágios supervisionados desenvolvidos na formação inicial são excelentes ambientes para discutir e aprofundar esse tipo de questionamento. Para além da formação inicial, estudos complementares em programas de pós-graduação ou mesmo em cursos de formação continuada podem contribuir com a qualidade do processo de ensino e de aprendizagem.

Os estágios ganham mais sentido quando, além de observar, o estagiário se propõe a investigar as falhas que consegue identificar ou que precisam de mais aprofundamento. Propostas que caminham por práticas investigativas produzem mais sentido com as ações desenvolvidas na busca de melhores resultados. Esta prática sugere uma formação com vista cooperativa, como a que propomos em nossa pesquisa, com professores que ensinam Matemática na educação básica, professor formador e licenciandos em Matemática.

Neste contexto, é preciso refletir sobre os saberes docentes. Tardif (2014) concebe que os saberes dos professores são oriundos das diversas experiências da vida, perpassando por experiências de aprendizagem no ensino básico, sendo complementadas pela continuidade dos estudos na graduação, pós-graduação, programas do livro didático, cursos de formação e também por experiências pessoais provenientes da vivência em família, ambiente de vida, história de vida e das socializações. A isso, ele classifica como saberes-experiencias. Nesse sentido, os saberes curriculares, saberes disciplinares e saberes da formação profissional, também mencionados por Tardif (2014), são completados por esse saber um tanto oculto de ser percebido no trabalho diário, mas que faz total sentido na construção do eu profissional do professor.

Nesta pesquisa, nos aprofundaremos na teoria de conhecimento de professor categorizada por Ball, Thames e Phelps (2008). Esta discussão foi iniciada por Shulman (1986) ao definir conhecimentos de professores. No entanto, depois de mais 20 anos, foi revisitada e adaptada por Ball, Thames e Phelps (2008) para o ensino de Matemática. Iniciaremos, primeiramente, descrevendo o que Shulman (1986) propôs para, então, entendermos a visão de Ball, Thames e Phelps (2008).

2.1 CONHECIMENTO DE PROFESSOR: UMA CARACTERIZAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA

Shulman (1986) comparou os exames realizados para indicar se o professor estava habilitado ou não para dar aulas em escolas estaduais americanas do século XIX com os do século XX e identificou, nos últimos testes, a não verificação do conteúdo disciplinar. Para o autor, aspectos pedagógicos e conhecimento do conteúdo disciplinar precisam "andar juntos" e é nesse ponto que ele critica tais exames.

Ao refletir sobre os conhecimentos da prática dos professores, Shulman (1986) se depara com a dicotomia do conteúdo matemático e conteúdo pedagógico, que corroboram para a formação dos professores. Não contente com a separação dessas duas classes, mas ciente de suas importâncias na formação do professor, ele tenta unir essas duas perspectivas no que tange à prática e aos desafios diários dos professores. Preocupado com a formação inicial, se questiona quanto aos conhecimentos necessários para os professores darem os primeiros passos na carreira docente: quais podem conduzir para uma boa aula? Ou mesmo, quais os conhecimentos necessários para improvisar em determinadas situações, propor novas formas, analogias e metáforas que subsidiem explicações de conteúdos de maior dificuldade para os alunos? Quais conhecimentos são necessários para intervir em conjecturas de alunos pouco formais ou mesmo parcialmente equivocadas?

Ao tentar entender esses aspectos da prática, Shulman (1986) categoriza os tipos de conhecimentos que são utilizados na prática. Inicialmente, ele propõe a seguinte categorização: conhecimento do conteúdo e da matéria, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular.

O **conhecimento do conteúdo**, na visão de Shulman (1986), é o conhecimento que os professores têm da disciplina que lecionam. O autor considera necessário que o professor domine essa categoria de forma que não só seja capaz de definir verdades conceituais da matéria, mas também saiba justificar por que determinada proposição é verdadeira e expor argumentos que provam essa afirmação. Considera, ainda, que ao dominar esse conhecimento o professor é capaz de entender as diversas maneiras de organizar o conteúdo e selecionar os que são mais importantes do ponto de vista pedagógico e curricular.

O **conhecimento pedagógico do conteúdo** está, de certa forma, ligado ao conteúdo e à forma do seu ensino. Na prática, o professor que domina este conhecimento consegue pensar em exemplos úteis para ensinar determinado conceito, conhece representações, ilustrações e demonstrações adequadas para ensinar os alunos. Além disso, nesta categoria também é considerada a noção de conteúdos fáceis e difíceis, levando em conta o conhecimento de conjecturas errôneas dos alunos e formas de melhor aproveitá-las para esclarecimento mútuo.

A terceira categoria de conhecimento elaborada, o **conhecimento curricular**, é muito negligenciada na formação inicial dos professores, porém de suma importância no cotidiano docente (Shulman, 1986). O autor considera que os professores precisam conhecer os currículos escolares em toda sua heterogeneidade, ou seja, compreender o programa curricular e suas intencionalidades, saber selecionar os materiais — filmes, documentários, livros paradidáticos, apostilas, livros didáticos — entre outros materiais que são relevantes para determinados tópicos de estudo. Também é importante que conheça, ao menos superficialmente, o currículo de outras disciplinas que estão sendo apresentadas aos seus alunos por outros professores, tanto os que se apresentam em simultâneo com o conteúdo do ano letivo atual (conhecimento de currículo lateral), quanto aos anos seguintes ou passados (conhecimento de currículo vertical).

Ball, Thames e Phelps (2008), a partir dos estudos de Shulman (1986), refletem sobre os domínios de conhecimentos de professores e trazem uma nova roupagem voltada para a Matemática. Assim, são evidenciados por Ball, Thames e Phelps (2008) seis domínios de conhecimento voltados para a Matemática.

Quadro 1 – Comparação entre os Domínios de Conteúdo

Shulman (1986)	Ball, Thames e Phelps (2008)
Conhecimento do conteúdo	Conhecimento comum do conteúdo
	Conhecimento especializado do conteúdo
Conhecimento pedagógico do conteúdo	Conhecimento do conteúdo e dos alunos
	Conhecimento do conteúdo e do ensino
Conhecimento curricular	Conhecimento do conteúdo e do currículo
	Conhecimento de horizonte.

Fonte: Elaboração própria.

Ball, Thames e Phelps (2008) entendem a necessidade de diferenciar os conhecimentos matemáticos e os conhecimentos pedagógicos da matemática, assim definem a categoria **conhecimento comum do conteúdo** e a categoria **conhecimento especializado do conteúdo**. Nesse contexto, os autores entendem por conhecimento comum os conceitos que tanto engenheiros como físicos e bacharéis em matemática possuem acerca da matemática, como ao identificar quando um manual não traz uma definição precisa do ponto de vista matemático ou mesmo identificar erros em procedimentos de cálculos, o que são conhecimentos comuns para os profissionais que trabalham na área de exatas. No entanto, é importante que se tenha **conhecimento pedagógico especializado** da educação matemática para identificar sob qual dimensão o aluno está cometendo erros em procedimentos de cálculo, o que ele pode estar comunicando ou se representa algum padrão já conhecido.

Ainda no domínio de **conhecimento especializado do conteúdo**, existem outras preocupações que emergem da prática e que normalmente não são preocupações de outras áreas nas quais a matemática está presente, mas que fazem total sentido no processo de ensino, como quando o professor de Matemática precisa explicar por que, ao multiplicarmos por 10, “acrescentamos zero” ao final do número. Para um engenheiro, essa informação é extremamente banal, mas é relevante para o aluno que está se apropriando do conceito de números e suas operações (Ball; Thames; Phelps, 2008). Outra prática que tangencia essa categoria são as conexões entre tópicos que estão sendo estudados com os que já foram estudados ou serão estudados no futuro. Por exemplo, quando se está estudando função afim, o cálculo da inclinação da reta é uma situação interessante para se recordar os conceitos de triângulos retângulos e das relações trigonométricas, além da possibilidade de fazer conexões com o estudo de movimento e velocidade em Física e muitas outras situações semelhantes, que podem ampliar os significados para os alunos.

Outra habilidade importante sinalizada pelos referidos autores são as adaptações necessárias aos manuais ou aos materiais didáticos. Em particular, no Brasil, a disposição de materiais e os próprios ambientes de aprendizagem disponibilizados pelas instituições variam de uma escola para outra, muitas delas com recursos limitados. Assim, o professor precisa ter "jogo de cintura" para se adequar a esses contextos, perceber quando é preciso utilizar outros recursos, que conteúdos priorizar em determinado momento, entre outras coisas. Dominar tais habilidades é essencial para planejar aulas.

A terceira e a quarta categorias definidas por Ball, Thames e Phelps (2008) representam um olhar minucioso sobre o **conhecimento pedagógico do conteúdo** definido por Shulman (1986). Esse conhecimento foi dividido em **conhecimento do conteúdo e dos alunos** e **conhecimento do conteúdo e do ensino**. O **conhecimento do conteúdo e dos alunos** busca articular conhecimentos da Matemática com conhecimentos sobre os estudantes. Assim, quando os professores conseguem identificar os conteúdos que os estudantes podem ter mais dificuldades ou mais facilidade, eles estão fazendo uso do conhecimento do conteúdo e dos alunos. No caso da Combinatória, saber que os alunos nem sempre constroem um padrão para listar sistematicamente determinadas respostas e que, muitas vezes, isso corrobora para uma listagem incompleta das possibilidades caracteriza-se como uma forma do **conhecimento do conteúdo e dos alunos**, que pode colaborar para o ensino desse conteúdo. Esse conhecimento também é mobilizado quando o professor sabe quais são os erros mais comuns para determinados conteúdos.

A quarta categoria definida pelos autores é o **conhecimento do conteúdo e do ensino**. Esse conhecimento mescla o conhecimento da matéria com o de ensino e se manifesta quando os professores apresentam melhores formas de organizar e expor os conteúdos para que os alunos tenham maior compreensão do que está sendo estudado. Para além disso, na própria sala de aula, esse conhecimento é mobilizado ao propor atividades a partir de comentários dos alunos e ao decidir se determinadas reflexões podem ou não ser exploradas. Entendemos que dominar as diferentes formas de registros simbólicos da Combinatória (listagem sistemática, diagrama de árvore, princípio multiplicativo etc.) e usá-las na resolução de problemas combinatórios representa o uso desse conhecimento.

Ball, Thames e Phelps (2008) também sinalizam outras duas categorias de conhecimento que, na visão deles, ainda precisam ser mais estudadas para identificar se realmente formam uma categoria ou se estão presentes nas categorias já mencionadas de forma transversal. Muito baseados em Shulman (1986), os autores discutem o **conhecimento de horizonte** e o **conhecimento de currículo**. O **conhecimento de horizonte** refere-se à forma como os conteúdos estão organizados ao longo dos anos escolares, ou seja, como determinado conceito apresentado em um dos anos iniciais do processo de escolarização pode impactar em uma nova abordagem de forma mais profunda nos anos finais. Assim, o professor que sabe que determinados conteúdos serão retomados de forma mais aprofundada em outras etapas da escolaridade pode fornecer bases mais significativas para os alunos estarem mais preparados. Shulman (1986), ao trazer essa perspectiva de conhecimento, sinaliza para o conhecimento de currículo horizontal e vertical, sendo o vertical o conhecimento do currículo referente a toda a escolaridade dos alunos e o horizontal referente ao conhecimento curricular de outras disciplinas, no sentido de questionar a relação dos conteúdos matemáticos com os conteúdos das demais áreas.

Ball, Thames e Phelps (2008), ao tentarem categorizar os domínios de conhecimentos separando categorias, reconhecem que em muitos casos há fronteiras indissociáveis, mas ao sinalizar esta separação trazem novas perspectivas para a formação de professores.

2.2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1986) é uma teoria cognitiva que apresenta princípios para o estudo e desenvolvimento de habilidades e competências complexas. Segundo o autor, a criança desenvolve conhecimentos práticos e teóricos a partir de campos conceituais.

Para Vergnaud (1986, p. 86), um campo conceitual se dá em “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. É por meio de operações do pensamento que o sujeito conecta esses elementos de maneira complexa. Assim, é preciso que haja um processo cognitivo no qual a conduta, a representação e a atividade em situação possam gerar o desenvolvimento de competências e concepções.

O autor compreende que o conceito é formado por um tripé: **situação**, **invariantes** e **representações simbólicas** (S, I, R). Vergnaud (1996) considera a complexidade de certos conteúdos e que a aprendizagem não poderia se estabelecer de forma imediata. No entanto, é necessário entender a diversidade de situações que estão associadas a um conceito e que esta diversidade não contempla apenas um campo, mas diversos; por isso é necessário dizer campos conceituais.

A compreensão dos campos conceituais na sala de aula demanda processos que, muitas vezes, revelam um progresso lento das assimilações, mas que, associado à intencionalidade do professor nas explorações das nuances do tripé, favorece o ambiente de aprendizagem. Assim, é necessário que os alunos sejam expostos a uma diversidade de situações e representações simbólicas e que possam ainda identificar os invariantes para compreender determinado conceito.

Vergnaud (1986) considera que o saber se dá na resolução de problemas, ou seja, em **situações** a se dominar. Para o autor, as situações da vida cotidiana irão modelar as concepções dos sujeitos. Nesse sentido, há forte apelo ao observado por Vygotsky (1991) sobre a relação do indivíduo com o meio, as interações sociais e a mediação de adultos, pois estas serão necessárias às primeiras concepções. Também pode ser feita alusão ao que prega Piaget (1999) sobre a relação do sujeito com o objeto, uma vez que as primeiras situações dominadas pelo sujeito servirão de base para a compreensão de novas, podendo não ser suficiente para o domínio da nova situação. Ao que Piaget chama de estabilização na conquista da equilibração, Vygotsky (1991) reconhece como internalização. Durante o processo de resolução de várias tarefas, os sujeitos começam a criar esquemas nos quais revelam conhecimentos para aquela classe de situações (Vergnaud, 1990).

Para Vergnaud (1990, p. 2), o esquema é definido como “[...] a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações”, ou seja, os esquemas revelam o conhecimento-em-ação do sujeito no qual este exerce ações operativas. Assim, o funcionamento cognitivo, quando exposto a diversas tarefas e situações, permite que o sujeito forme um repertório de esquemas, os quais serão sempre revisitados em novas situações, podendo ser readaptados. O funcionamento dos esquemas permite que o sujeito dê sentido às situações e construa os invariantes operatórios para uma dada classe de situações.

Piaget (1999) observa que crianças abaixo de 7 anos não conseguem compreender a conservação de massa ou volume quando essas medidas sofrem alguma transformação (mudança de recipiente, por exemplo, no caso de um líquido). Ou seja, certas medidas não variam em determinadas transformações. Essas observações podem ser constatadas em outros conceitos da Matemática, como, por exemplo, a rotação de figuras geométricas no plano. Esse tipo de transformação não modifica a figura em relação à posição original, ao passo que uma projeção dessa figura pode modificá-la. Assim, Vergnaud (1986) identifica que os invariantes representam propriedades de certos objetos que o sujeito precisa observar para dominar determinado conceito.

Em um conjunto de situações, quando o estudante detém habilidade e competências para gerenciá-las, diz-se que o estudante mobiliza esquemas. Esses esquemas são conhecimentos designados pelos termos **conceitos-em-ação** e **teoremas-em-ação**, que, por sua vez, são mais conhecidos como invariantes operacionais. Conceitos-em-ação e teoremas-em-ação são duas variáveis diferentes. O teorema-em-ação é uma proposição considerada verdadeira sobre o real, dando sentido àquela situação, mas que não necessariamente é um teorema formal da Matemática. Já os conceitos-em-ação são categorias de pensamento tidas como pertinentes e relevantes, se apresentando por meio de objetos ou predicados (Moreira, 2002).

Tomemos alguns exemplos: crianças entre 5 e 7 anos já percebem que não é necessário contar os elementos do conjunto ($A \cup B$) se já tiverem contado os elementos de A e de B anteriormente; basta somar a cardinalidade de A e B, desde que A e B sejam disjuntos. Essa observação é um conhecimento expresso por um teorema-em-ação (Vergnaud, 1990), que também pode ser observado na comparação de vários itens de um mesmo produto (2, 3, 4, ..., 100, ...), no qual o preço final é obtido pela multiplicação do preço unitário pela quantidade de vezes que o item foi selecionado (2×, 3×, 4×, ..., 100×, ...).

Para ilustrar conceitos-em-ação, podemos tomar os seguintes exemplos:

i) “Paulo tinha 12 bolinhas de gude. Ele jogou e perdeu 5 bolinhas. Quantas bolinhas ele tem agora?” (Moreira, 2002, p. 15).

ii) “Rute jogou bolinhas de gude com Hans e perdeu 5 bolinhas. Ele agora tem 7 bolinhas de gude. Quantas ela tinha antes de jogar?” (Moreira, 2002, p. 15).

Nas situações anteriores, existem vários conceitos-em-ação que podem ser invocados, como cardinalidade e estado inicial conhecido no caso do primeiro problema. A situação oferecida no enunciado é de decréscimo, e a solução pode ser encontrada por meio de uma subtração. O segundo problema é menos elementar, por exigir um raciocínio reverso. Aqui, o estado inicial é desconhecido e a situação é de perda, mas a solução pode ser encontrada por meio de uma soma das quantidades, por exemplo. Cabe destacar que os conceitos-em-ação não são necessariamente conceitos formais da Matemática, assim como os teoremas-em-ação também não são, necessariamente, teoremas da Matemática.

A representação simbólica é definida por Vergnaud (1986) como responsável por representar as situações e os invariantes por meio da linguagem natural, simbólica, gráfica ou diagramas. A forma como o sujeito domina a representação na resolução de problemas pode revelar o quanto ele compreende determinado conceito. Representar simbolicamente determinadas situações facilita a resolução, muito embora certas representações ajudem na resolução, mas não sejam necessariamente de fácil assimilação pelos estudantes (Vergnaud, 1986). Certas formas de representação utilizadas na álgebra, por exemplo, são facilitadoras para quem domina a álgebra, porém podem não ser tão congruentes com o que se evidencia no enunciado.

2.3 A COMBINATÓRIA

A Combinatória, segundo Morgado *et al.* (1991, p. 1), é a “parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”. Ela é utilizada em várias aplicações, como, por exemplo, no cálculo de probabilidade, biologia molecular, estatística, economia, lógica, entre outras (Pessoa; Borba, 2010). Segundo recomendação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ela é introduzida ainda nos anos iniciais do ensino fundamental I, nos 4º e 5º anos, seguida de aprofundamento ao longo dos anos de estudo, sendo que, no 8º ano, explora-se principalmente o princípio multiplicativo da contagem e, depois, no ensino médio, os diferentes problemas e raciocínios combinatórios por meio de estratégias diversas (Brasil, 2018).

A Combinatória trabalha com estratégias de contagem sem que seja necessário listar todas as possibilidades para se chegar ao resultado. Na Educação Básica são tratados problemas mais simples de permutações, arranjos e combinações, com uma grande gama de aplicações (Morgado *et al*., 1991). Duas estratégias bastante úteis para resolução de problemas combinatórios são o princípio aditivo e o princípio multiplicativo, que são:

Quadro 2 – Estratégias de contagem

Estratégia de contagem	**Definição**
Princípio aditivo	Se A e B são dois conjuntos distintos e disjuntos com p e q elementos, respectivamente, então A ∪ B possui p + q elementos
Generalização do Princípio aditivo	Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos distintos e disjuntos dois a dois, e se A_i possui a_i elementos, então a quantidade de elementos da união de todos esses conjuntos é dada pela soma da quantidade de elementos de cada um deles. Ou seja, $\cup^{n}{}_{i=1} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos
Princípio multiplicativo	Se uma decisão d_1 pode ser tomada de a maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder sempre ser tomada de b maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $a \cdot b$
Generalização do princípio multiplicativo	Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes
Fatorial de um número	Seja m um número inteiro não negativo ($m \in N$). Definimos o fatorial de m (e indicamos por $m!$) por meio da seguinte relação: $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $m \geq 2$ $1! = 1$ $0! = 1$

Fonte: Elaboração própria.

Como foi mencionado anteriormente, os conceitos matemáticos podem ser aprendidos por meio de campos conceituais. A Combinatória, por sua vez, é um conceito que se encontra atrelado às estruturas multiplicativas, tal como indicado por Vergnaud (1986). Nas estruturas multiplicativas são exploradas as relações do tipo quaternária e ternária. As relações quaternárias envolvem os eixos de proporção simples e múltipla, porém, a que nos interessa são as relações ternárias, que, por sua vez, envolvem os eixos de comparação multiplicativa e produto de medidas. Na parte de produto de medidas, estão associadas a situações retangulares e ao produto de medida; esta última se dá por uma quantidade discreta (Margina; Merlini; Santos, 2012).

Pessoa e Borba (2010) classificaram os invariantes dos problemas combinatórios a partir do tripé de Vergnaud (1986). Os problemas combinatórios trabalhados na educação básica são geralmente produto de medidas (Vergnaud, 1983, 1991, *apud* Pessoa; Borba, 2010), permutação, arranjo e combinação.

Produto de medidas: Os problemas de produto de medidas têm como característica apresentar dois ou mais conjuntos, como no seguinte exemplo: Isabela possui 5 blusas e 6 saias. Quantos looks ela pode formar usando uma blusa e uma saia?

Observa-se no problema anterior que as blusas representam um determinado conjunto, enquanto as saias representam outro, e ambos são combinados para formar um look. Nota-se que são dados dois ou mais conjuntos distintos que são combinados para formar um novo conjunto, o que Vergnaud (1986) classifica como invariantes. Segundo Assis e Pessoa (2015, p. 669), “dois (ou mais) conjuntos diferentes serão combinados para construir um novo grupo; diferentemente dos demais tipos de problema, a ordem dos elementos poderá ou não gerar novas possibilidades”.

Uma estratégia para resolver esse tipo de problema é fazer a listagem sistemática das possibilidades e contá-las. Também pode ser usado o princípio multiplicativo, calculando o produto dos conjuntos. No exemplo anterior, o problema poderia ser resolvido multiplicando 5 por 6 (blusas e saias), o que resulta em 30 modos diferentes.

Permutação: A característica fundamental da permutação é que todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez, e a ordem dos elementos gera novas possibilidades. A situação-problema “de quantos modos 5 pessoas podem formar uma fila?” é um exemplo de permutação, pois todas as pessoas são usadas para formar a fila e, sempre que uma pessoa troca de lugar com outra, obtém-se uma nova fila, ou seja, diferente da anterior. Neste exemplo, os invariantes tratam de todos os elementos que “são utilizados, cada um, apenas uma vez; a ordem dos elementos do conjunto gera novas possibilidades” (Assis; Pessoa, 2015, p. 669).

Pensando de maneira ordenada, a primeira pessoa da fila pode ser escolhida de 5 modos, a segunda de 4 modos, a terceira de 3 modos, a quarta de 2 modos e a quinta de 1 modo. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos 5×4×3×2×1 = 120 modos de obter uma fila com cinco pessoas.

Arranjo simples: Os problemas de arranjo são categorizados quando um grupo maior gerará novas possibilidades ao subgrupo e não serão utilizados todos os elementos do grupo maior. A ordem de escolha dos elementos gera novas possibilidades. Um problema que exemplifica essa definição pode ser: um grupo de 6 amigos se junta para fazer um campeonato de videogame. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

Neste problema, o primeiro lugar no campeonato pode ser escolhido de 6 modos diferentes, o segundo lugar de 5 modos e o terceiro lugar de 4 modos, totalizando, pelo princípio multiplicativo, 120 possibilidades.

Também neste problema, os invariantes envolvem “um grupo maior gerará novas possibilidades ao subgrupo e não são utilizados todos os elementos do grupo maior; a ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades” (Assis; Pessoa, 2015, p. 669).

Combinação: Os problemas de combinação são aqueles em que, de um conjunto maior, serão selecionados objetos ou situações que constituirão subgrupos. A ordem dos objetos escolhidos não gerará novas possibilidades. Um exemplo desse tipo de problema é: de um grupo de 8 pessoas deseja-se formar uma comissão com 3 membros. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Neste exemplo de combinação, o conjunto maior é formado pelo grupo de 8 pessoas e o subconjunto é formado pela escolha de três pessoas. Como uma comissão não expressa ordem classificatória, a ordem de escolha das pessoas não gera novas possibilidades. Essa contagem pode ser feita de forma ordenada, mas no final devem ser retiradas as possibilidades repetidas.

Pelo princípio multiplicativo, temos 8 modos de escolher um primeiro membro, 7 modos de escolher um segundo membro e 6 modos de escolher um terceiro membro, totalizando 336 possibilidades (8×7×6 = 336). Porém, nessa contagem, cada comissão foi contada seis vezes, logo, divide-se 336 por 6, resultando em 56 possibilidades (336÷6 = 56).

Nos problemas de combinação, os invariantes envolvem um conjunto maior em que “serão selecionados objetos ou situações que constituirão subgrupos; a ordem dos objetos escolhidos não gerará novas possibilidades” (Assis; Pessoa, 2015, p. 669).

Problemas de restrição em Combinatória: O trabalho de Borba e Braz (2012) apresenta critérios cognitivos atrelados às relações combinatórias que precisam ser percebidas por quem irá resolver problemas combinatórios. Em sua pesquisa, as autoras apresentam elementos de problemas combinatórios que influenciam as escolhas dos objetos a serem agrupados, como, por exemplo, a explicitação (ou não) de objetos que devem pertencer às possibilidades levantadas, a ordem de objetos, o posicionamento e/ou a proximidade dos mesmos.

O quadro a seguir expõe a classificação de problemas de arranjo expostos na pesquisa de Borba e Braz (2012).

Quadro 3 – Categorização de problemas de arranjo

Categorias de problemas condicionais	**Exemplos**
1. Um elemento explicitado é fixo	André quer criar uma nova senha para seu e-mail utilizando apenas quatro das cinco letras do seu nome. Quantas senhas com quatro letras diferentes ele pode obter a partir das letras A N D R E, que tenham a letra A, em qualquer posição?
2. Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo	Marcela foi ao parque de diversões com seu irmão Jorginho e três primas: Marina, Andréa e Tati. Em um banco da roda gigante só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco, desde que uma das primas tenha sempre lugar?
3. Mais de um elemento explicitado fixo	Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 2, 4, 5 e 6 em que os algarismos 2 e 5 sempre apareçam?
4. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo	Placas de automóveis possuem quatro algarismos. De quantas maneiras diferentes podemos completar com os algarismos 1, 3, 6 e 9, a placa iniciada com KLM 4, que tenha apenas dois algarismos ímpares?
5. Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica, fixo	Quantos números de três algarismos podemos formar a partir dos algarismos 2, 3, 4 e 5, que tenham pelo menos um algarismo par?
6. Um elemento fixo explicitado em determinada posição	O Brasil será o país da Copa do Mundo de 2014! Considere que, assim como a seleção brasileira, também participarão a Argentina, a Alemanha, a França e a Itália. Imaginando que o Brasil será o campeão, de quantas maneiras diferentes podem se organizar os quatro primeiros colocados?

7. Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo em determinada posição	César só lembra dos cinco primeiros algarismos do telefone de Ana e precisa muito falar com ela. Os cinco primeiros algarismos são: 3491-0_ _ _. Pelo que César se lembra o último algarismo do telefone de Ana é ímpar e nenhum algarismo se repete. Quantos números telefônicos César encontrará sob essas condições?
8. Mais de um elemento explicitado em determinadas posições	Na praça em que Marina está tem um banco no qual cabem quatro pessoas. De quantas maneiras diferentes Marina e as amigas (Aninha, Amanda, Júlia, Gabi e Maria) podem ocupar os quatro lugares do banco, desde que Marina fique em uma ponta e Gabi na outra?
9. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições	Quero criar uma senha de quatro algarismos para meu celular usando alguns destes algarismos: 2, 3, 4, 5 e 7. Quantas senhas de quatro algarismos diferentes eu posso formar em que o primeiro e o terceiro algarismos sejam pares?
10. Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade	Júlio quer criar uma bandeira para o time de vôlei da escola, do qual faz parte. A bandeira conterá quatro cores, dispostas em linha horizontais. Dispondo das cores azul, verde, branca, amarela e vermelha, quantas bandeiras diferentes Júlio pode formar, desde que as cores azul e vermelha fiquem sempre juntas?
11. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, numa determinada proximidade	De quantas maneiras diferentes minha tia Joana, meus primos João e Ana e minha mãe, podem se sentar em um banco de cinco lugares sendo que os filhos da minha tia querem ficar sempre juntos?
12. Mais de um elemento explicitado com determinada ordem	Diego, Mário, João e Carlos estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes podem-se obter os três primeiros lugares se Carlos sempre ficar à frente de Mário?
13. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, numa determinada ordem	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que algarismos pares sempre apareçam do maior para o menor, em qualquer posição?
14. Mais de um elemento explicitado com determinadas posições e ordem	De seis opções de lanche (sorvete, coxinha, pizza, hambúrguer, bolo e misto), Thiago pode escolher três para fazer sua refeição. Se ele começar comendo primeiro a coxinha e por último o sorvete, nesta ordem, de quantas maneiras diferentes Thiago poderá fazer esta refeição?
15. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinada posição e ordem	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, sendo o 1º algarismo par e 3º algarismo ímpar?

16. Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e proximidade	Beto, Pedro, João, André e Paulo estão disputando uma corrida de cavalos. De quantas maneiras diferentes podemos ter os quatro primeiros colocados desde que Pedro e João estejam juntos no 1º e no 2º lugar?
17. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e proximidade	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 3, 4, 7 e 8, sendo os dois últimos algarismos pares?
18. Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem	Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Maria e Raquel fiquem sempre juntas e nessa ordem?
19. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, proximidade e ordem	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que números pares sempre apareçam juntos, do maior para o menor?
20. Mais de um elemento explicitado em determinada posição, proximidade e ordem	Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Ana e Raquel sejam as primeiras, juntas e nessa ordem?
21. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições, proximidade e ordem	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que algarismos pares sempre apareçam juntos, no início e do maior para o menor?

Fonte: Adaptado de Borba e Braz (2012, p. 6-9).

Diferente de outras categorizações de problemas combinatórios normalmente associados a elementos puramente matemáticos, esta pesquisa buscou classificar problemas combinatórios a partir de critérios cognitivos, como, por exemplo, o que os resolvedores precisam identificar para conseguir resolver problemas combinatórios. Assim, as pesquisadoras identificaram que a forma como pode ser feita a escolha de elementos isolados ou de subconjuntos de elementos; a explicitação (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas; a ordem em que os elementos podem ser dispostos; o posicionamento e/ou a proximidade dos mesmos influenciam numa estratégia de resolução dos problemas (Borba; Braz, 2012).

A pesquisa de Silva (2015) utilizou a classificação de Borba e Braz (2012) para classificar problemas de restrição em livros didáticos. Diferente de Borba e Braz

(2012), que classificam apenas problemas condicionais de arranjo, Silva (2015) classifica problemas de combinação, arranjo, permutação e produto de medidas, mostrando, assim, que a classificação proposta pelas autoras também pode ser adaptada a outros tipos de problemas.

2.4 O QUE AS PESQUISAS DIZEM SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DA COMBINATÓRIA

Para que pudéssemos compreender o cenário das pesquisas voltadas para a formação de professores e o ensino de Combinatória, realizamos buscas em bancos de teses e dissertações que abordassem ambas as perspectivas produzidas no período de 2013 a 2023. Assim, por ser uma pesquisa de aspecto inventariante e descritivo, entendemos que se classifica como um mapeamento próximo ao Estado da Arte. Segundo Ferreira (2002, p. 258), a natureza dessas pesquisas traz consigo “o desafio de mapear e discutir uma certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares”.

Ferreira (2002) discute que, em uma investigação desse porte, dois momentos são principais. O primeiro é aquele em que o pesquisador interage com a produção acadêmica, ou seja, seu objetivo é mapear; portanto, é delimitado um período em anos, locais e áreas de produção. Num segundo momento, o pesquisador analisa as características dos trabalhos, observando tendências, escolhas metodológicas e teóricas, buscando diferenças e similitudes. Além disso, esse também é o momento em que o pesquisador faz perguntas como “quando”, “onde” e “quem” produz pesquisas num determinado período e lugar, àquelas questões que se referem ao “o quê” e “o como” dos trabalhos (Ferreira, 2002, p. 265).

Os dados desta pesquisa foram coletados em três bibliotecas digitais, a saber: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e Repositório Digital da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), no Programa de Pós-Graduação de Educação Matemática e Tecnologia (EDUMATEC), programa no qual estamos inseridos.

Em nossas buscas, utilizamos em todas as bibliotecas os seguintes descritores: formação de professores e Análise Combinatória; formação de professores em educação matemática no ensino de Combinatória; formação de professores e Combinatória; Combinatória e formação de professores.

Na plataforma da BDTD, obtivemos 39 resultados distintos. Destes, foram analisados os títulos, resumos e palavras-chave para identificar as pesquisas que se aproximavam dos nossos estudos. Após essa triagem, selecionamos 9 pesquisas, pois algumas delas foram excluídas por não abordarem a temática de formação de professores ou serem anteriores ao ano de 2013.

No catálogo da Capes, seguindo a sequência descrita anteriormente, encontramos 22 resultados, dos quais, após a referida filtragem, descartamos 4 pesquisas, pois também estavam nas outras bases. Além disso, havia pesquisas com publicação anterior ao ano de 2013 e que, apesar de trabalharem com Análise Combinatória, não tinham a perspectiva de formação de professores. Por isso, descartamos 15 delas. Por fim, ficamos com 3 trabalhos.

Utilizamos o mesmo procedimento de busca para encontrar trabalhos no Repositório Digital da UFPE. Após analisar cerca de 292 dissertações e 75 teses, selecionamos apenas 2 trabalhos, excluindo interseções com as bases de dados anteriores e respeitando o intervalo de tempo anteposto. A seguir, (Quadro 4) o quantitativo e algumas informações sobre os dados obtidos.

Quadro 4 – Teses e dissertações publicadas sobre Formação de Professores em Combinatória entre 2014 e 2022

Ano	**Quantidade de Teses**	**Quantidade de Dissertações**		**Total de Produções**
		Mestrado Acadêmico	**Mestrado Profissional**	
2014	2	2	1	5
2015	-	2	-	2
2016	-	1	-	1
2017	-	1	1	2
2018	-	2	-	2
2019	1	-	-	1
2022	-	1	-	1
Total	**3**	**9**	**2**	**14**

Fonte: Dados da pesquisa.

A fim de encontrar semelhanças e diferenças que pudessem nos guiar para uma classificação dos trabalhos, nos atentamos para os objetivos e processos metodológicos de cada uma das pesquisas selecionadas. Sendo assim, identificamos três categorias de pesquisas, grupo 1**: pesquisas que analisam o conhecimento do**

professor; grupo 2: **pesquisas que visam a construção do conhecimento pelo professor;** e grupo 3: **proposta de material para professor**.

2.4.1 Grupo 1: Pesquisas que analisam o conhecimento do professor

Nesta categoria — pesquisas que analisam o conhecimento do professor — encontramos 11 produções, sendo uma de mestrado profissional, sete de mestrado acadêmico e três de doutorado. De maneira geral, essas pesquisas tinham o objetivo de identificar como os professores mobilizam os conhecimentos docentes para o ensino de Combinatória. Grande parte das pesquisas tinha como principal base teórica Shulman (1996) e Ball, Thames e Phelps (2008).

As pesquisas de Oliveira (2014), Bifi (2014) e Carvalho (2018) adotaram o estudo de caso como forma de analisar como os professores mobilizam conhecimentos. A pesquisa de Oliveira (2014) investigou esses conhecimentos em 5 professores que atuavam nos anos iniciais e procurou saber se esses professores mobilizavam os invariantes operatórios (Vergnaud, 1996) de forma estável na resolução de problemas combinatórios. Bifi (2014) procurou observar o trabalho formativo de um grupo de professores regido por uma professora de Matemática (com mestrado em Educação Matemática e Ciências) e investigou os conhecimentos didáticos específicos da Estatística e da Combinatória em situação de concepção e de gestão de aula por um grupo de professores em suas práticas. Suas análises estão referenciadas a partir de Robert (1998) para o ensino de Estatística, Shulman (1996) e Ball, Thames e Phelps (2008) para análise de conhecimento de professor. Já Carvalho (2018) investigou o trabalho de uma professora da rede estadual do Acre desenvolvido no Programa de Aceleração da Aprendizagem do Ensino Médio – PEEM, procurando identificar como ela manifesta o saber pedagógico do conteúdo para aprender e ensinar questões de Combinatória.

Lima (2016), Lima (2015), Cunha (2015) e Martins (2018) investigaram os conhecimentos dos professores sobre o ensino de Combinatória no Ensino Médio. Lima (2016) analisou como os professores do 2º ano do Ensino Médio fazem uso das situações e representações simbólicas (Vergnaud, 1996) e como mobilizam conhecimentos pedagógicos do conteúdo à luz das categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008). Nessa mesma linha, Lima (2015) analisou como os professores do Ensino Médio e dos anos finais do Ensino Fundamental exercem conhecimentos de professor a partir do trabalho com o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), usando a teoria de Ball, Thames e Phelps (2008). Cunha (2015) analisou o domínio conceitual de professores sobre os invariantes de problemas combinatórios. A pesquisa foi feita com sete professores da rede estadual de Pernambuco e teve como objetivo identificar dificuldades e possibilidades de professores ao elaborarem problemas envolvendo o raciocínio combinatório e se aplicavam os invariantes. Suas análises foram feitas a partir de Vergnaud (1996) e Ball, Thames e Phelps (2008), principalmente. Martins (2018) se propôs a investigar quais são as representações, a partir de Roger Chartier (2002), do professor de Matemática sobre a Combinatória e como elas repercutem em sua prática pedagógica. O autor investigou a partir de Chartier (2002) conceitos de representação, prática e apropriação, as estratégias e táticas a partir de De Certeau (1994) e cultura escolar a partir de Julia (2001). Esta pesquisa se distancia um pouco das demais por usar como referencial teórico a História Cultural, mas se iguala por trazer análises sobre o conhecimento da prática do professor.

Uma importante contribuição para o ensino de Matemática está na perspectiva de jogos. Por isso, a pesquisa de Silva (2014b) buscou investigar os diferentes tipos de conhecimentos do professor ao construir, discutir, aplicar e validar um jogo matemático sobre a Combinatória. Esta análise foi feita com três estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, a partir do proposto por Shulman (2005). Silva (2014a) analisou dois percursos formativos: o primeiro, chamado Estudo da Aula Simulada (EAS), feito com alunos do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina Estágio Supervisionado II; e o segundo, feito em uma disciplina da especialização em Educação Matemática, utilizando a Teoria Antropológica do Didático, assumindo o Percurso de Estudo e Pesquisa (PER). A autora investigou a relação do professor com o saber matemático e procurou identificar os conhecimentos mobilizados na prática. Mais uma vez, Shulman (1996) e Ball, Thames e Phelps (2008) deram suporte para essa análise. Outro estudo realizado no Ensino Superior foi o de Holanda (2017), no qual a autora procurou analisar como são mobilizados conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória em um curso de Licenciatura em Matemática. A investigação teve como foco o trabalho da professora regente da disciplina, onde foi observada a construção de situações de aprendizado e conhecimentos de professor durante 15 aulas. Por meio dessa análise, a pesquisadora pôde listar os domínios do conhecimento caracterizados por Ball, Thames e Phelps (2008).

A última pesquisa nesta categoria foi a de Zanon (2019), que buscou investigar as imagens conceituais evocadas por estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem problemas combinatórios. Assim, à luz das perspectivas teóricas de Tall e Vinner (1981), Hershkowitz (1994) e Skemp (1976), a autora buscou conhecer como os estudantes percebem os conceitos, definições, exemplos e associações pertinentes à Combinatória.

2.4.2 Grupo 2: Pesquisas que visam a construção do conhecimento pelo professor

Nesta categoria identificamos dois trabalhos de mestrado acadêmico que se propuseram a desenvolver processos formativos para a construção de habilidades e conhecimentos. O primeiro foi feito por Assis (2014) com uma professora do ensino fundamental I, por meio de um processo formativo no qual se buscou construir conhecimentos especializados do conteúdo de Combinatória e conhecimentos didáticos. Os resultados mostram que, a partir da proposta interventiva de formação, a participante da pesquisa pôde construir novos conhecimentos especializados do conteúdo e da didática do conteúdo.

A pesquisa de Rangel (2022) buscou compreender como a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da resolução de problemas pode ajudar no desenvolvimento do raciocínio combinatório de futuros professores e contribuir para a reflexão sobre suas ações pedagógicas. As análises da investigação foram realizadas durante os sete encontros e foi constatado que a metodologia e a proposta da resolução de problemas se mostram aliadas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, porém aspectos como a interpretação dos enunciados dos problemas ainda são desafios para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

2.4.3 Grupo 3: Proposta de material para professor

Nesta categoria identificamos apenas uma dissertação de mestrado profissional com essa perspectiva, a de Santos (2017), que teve por objetivo apresentar uma abordagem da Combinatória que auxiliasse o professor no conhecimento do conteúdo. O autor apresentou uma abordagem rigorosa da Combinatória com teoremas, demonstrações de propriedades e exemplos de exercícios, visando ao fortalecimento da compreensão dos problemas combinatórios baseados nos propostos por Klein (2010) e Muniz Neto (2012). Santos (2017) vê nesta proposta a oportunidade de trazer um material de consulta para professores de Matemática.

2.4.4 Síntese da Revisão de Literatura

Por meio da leitura dos resumos, identificamos similaridades nos objetivos, processos metodológicos e referencial teórico dos trabalhos e, desse modo, sintetizamos uma classificação que pudesse abarcar os resultados. Nota-se, nesta busca, a diversidade de ambientes e formas de analisar conhecimentos de professor. Percebemos tendências em analisar a prática do professor a partir dos conhecimentos categorizados por Shulman (1996) e Ball, Thames e Phelps (2008), alguns com observação no seu ambiente laboral (Martins, 2018; Bifi, 2014; Carvalho, 2018; Lima, 2016), outros por meio de entrevista com esses profissionais, identificando a partir de suas falas como esses conhecimentos são externados em suas práticas (Lima, 2015; Oliveira, 2014; Cunha, 2015).

Também houve investigações dos conhecimentos de professor no Ensino Superior, como a pesquisa de Holanda (2017), que observou como o professor formador promove situações de aprendizagem e destaca os conhecimentos de professor durante suas aulas. As pesquisas de Silva (2014a) e Zanon (2019) foram feitas com alunos da graduação e da pós-graduação. Silva (2014a) descreveu dois processos formativos, aplicando metodologias com alunos de graduação e pós-graduação, enquanto Zanon (2019) buscou verificar imagens conceituais de estudantes de graduação ao resolverem problemas combinatórios.

As pesquisas de Assis (2014) e Rangel (2022) mostram que os conhecimentos especializados do conteúdo podem ser trabalhados em processos formativos ou por meio de metodologias. Os dados apresentados por Assis (2014) demonstram avanços no conhecimento especializado da professora pesquisada. Assim como, por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática e da resolução de problemas, Rangel (2022) identificou aprendizagem do raciocínio combinatório por meio de falas transcritas e de registros de alunos. A pesquisa de Santos (2017) apresentou uma proposta de aprofundamento matemático de problemas combinatórios que pode ser trabalhada no Ensino Superior em disciplinas específicas de Combinatória.

Os dados indicam que a temática de formação de professores restrita ao conteúdo de Combinatória apresenta variedades de focos de pesquisa, mostrando a elasticidade da temática. Os resultados de algumas pesquisas (Cunha, 2015; Lima, 2015; Martins, 2018; Oliveira, 2014) mostram que os professores carecem de mais conhecimentos especializados e de ensino sobre o ensino de Combinatória. Portanto, é necessário o desenvolvimento de pesquisas que investiguem processos formativos acompanhados de metodologias que subsidiem práticas de ensino e conhecimento especializado, em que a intenção seja a superação de dificuldades e a construção, pelo próprio professor, do conhecimento especializado.

Por outro lado, há pesquisas que focam no desenvolvimento do conhecimento de conteúdo com estudantes de graduação (Rangel, 2022) e professores que atuam no Ensino Básico (Assis, 2014). Porém, mais do que ter conhecimento do conteúdo, é preciso ter conhecimentos pedagógicos do conteúdo. Assim, esta pesquisa em desenvolvimento busca investigar, tendo como hipótese que conhecimentos de “Combinatória e de alunos” e de “Combinatória e seu ensino” podem contribuir com a formação de licenciandos em Matemática.

3 METODOLOGIA

Nesta seção apresentamos os aspectos metodológicos que caracterizam essa pesquisa. Buscamos analisar de forma qualitativa conhecimentos docentes a partir de um processo formativo à luz de teóricos, como Ball, Thames e Phelps (2008) e Vergnaud (1996), com o objetivo de analisar conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino apresentados por licenciandos de Matemática em um processo formativo baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios. A partir desta seção, chamaremos de participantes ou licenciandos os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática que participaram do processo formativo, e a palavra aluno(a) terá aspecto genérico para se referir a qualquer estudante, seja na educação básica ou superior, não sendo, portanto, qualquer dos sujeitos pesquisados.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Consideramos esta pesquisa como qualitativa por buscarmos compreender uma realidade que não pode ser quantificada. Pretende-se analisar como certos tipos de conhecimentos são apresentados pelos participantes da pesquisa a partir de uma dinâmica construída para reflexão em torno dos conhecimentos de professor enfatizados por Ball, Thames e Phelps (2008).

Entendemos por pesquisa qualitativa aquela que se caracteriza pela

> [...] observação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos pesquisadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (Gerhard; Silveira, 2009, p. 32).

Assim, com o propósito de descobrir respostas a respeito da temática abordada, nos propusemos a realizar uma pesquisa com vista para o método exploratório, com a finalidade de "[...] desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias [...]" (Gil, 2008, p. 27).

3.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Como esta pesquisa visa contribuir com a formação inicial de professores de Matemática, buscamos licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática, a saber, alunos do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, localizado no campus da UFPE, no município de Caruaru/PE. A escolha desse campus se deu porque é o local de atuação como professora da graduação da orientadora deste trabalho e, também, na época da pesquisa, exercia o cargo de coordenadora do curso.

Adotamos como critério de seleção dos participantes ter cursado a disciplina de Matemática II, cuja ementa aborda conceitos de Combinatória. Além disso, os participantes já cursaram disciplinas como Didática, Psicologia da Educação, entre outros cursos voltados para Educação Matemática. Acreditamos que, por estarem mais familiarizados com questões do ensino da Matemática e próximos de finalizarem o curso, esses participantes poderão contribuir de forma crítica e reflexiva com a pesquisa.

3.3 O CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

O Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA/UFPE) foi criado no ano de 2006 em Caruaru, por meio de incentivos do governo federal a partir do plano de interiorização do Ensino Superior e do Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais (Reuni).

O CAA é o primeiro centro da UFPE instalado no interior de Pernambuco, no município de Caruaru. O curso de Licenciatura em Matemática do CAA possui carga horária de 3.150 horas, distribuída em nove períodos, com 49 disciplinas relacionadas ao ensino de Matemática, Matemática pura, disciplinas pedagógicas, estágios supervisionados e atividades complementares. Dentre as disciplinas obrigatórias, não há disciplina específica de Combinatória, porém há as eletivas “Ensinos de Combinatória: Perspectivas Teórico-Práticas” e “Princípios de Contagem”, que raramente são oferecidas.

A disciplina “Matemática II” é obrigatória e traz em seu conteúdo programático temas como Trigonometria, Combinatória e Probabilidade, difundidos na Educação Básica, e tem por objetivo contribuir para o amadurecimento do futuro professor de

Matemática e proporcionar uma experiência mais profunda sobre os temas mencionados da Educação Básica. Dentro da componente Combinatória, são destacados tópicos como Princípio Fundamental da Contagem, Agrupamentos, Cálculo de Arranjos, Cálculo de Combinações, Cálculo de Permutações e Resolução de Exercícios Gerais. Nesta disciplina, os participantes têm a oportunidade de revisitar conteúdos do ensino básico, ainda que de maneira superficial (ver Anexo C).

3.4 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada a partir de quatro etapas, a saber: questionário perfil, entrevista inicial, processo formativo e entrevista final.

3.4.1 Questionário perfil

Segundo Gil (2008, p. 121), o questionário é:

> “[...] a técnica de investigação composta por conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado.

O questionário perfil foi composto por questões abertas e fechadas, sendo as abertas aquelas que visam a que os participantes elaborem suas próprias respostas, enquanto as fechadas trazem consigo alternativas de respostas já fixadas para que os respondentes possam escolher dentre as opções (Gil, 2008). Como nosso objetivo visava identificar experiências e conhecimentos prévios de licenciandos quanto à Combinatória e as compreensões sobre erros no processo de ensino e aprendizagem Matemática, buscamos conhecer o perfil dos participantes quanto à sua trajetória na graduação, sua experiência com a Educação Básica e com o ensino de Matemática, em particular, e com o ensino de Combinatória. Nele, foram colocadas questões fechadas e abertas para coletar informações visando analisar aprendizagens e as mudanças de postura e pensamento durante o processo formativo.

3.4.2 Entrevistas

As entrevistas são técnicas em que o investigador cria perguntas para o investigado a fim de coletar informações que sejam interessantes para a pesquisa (Gil, 2008). A entrevista semiestruturada tem por característica ser semiaberta, isto significa que o pesquisador deve ter um roteiro que será o guia da entrevista, mas existe abertura para fazer outras provocações fora da estrutura base. De outro modo, o roteiro base é firmado a partir dos objetivos da pesquisa, sendo este próprio para esse modelo de coleta de dados, mas, ao perceber a necessidade de explorar certos aspectos das falas do entrevistado, pode-se alterar aquilo que foi proposto inicialmente.

A entrevista inicial teve como objetivo identificar experiências e conhecimentos prévios de licenciados quanto à Combinatória e as compreensões sobre erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Também questionamos se os mesmos dão atenção aos seus próprios erros, além de procurar entender a visão deles sobre o uso dos erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Esta entrevista foi baseada nas respostas ao questionário enviado na primeira etapa e, para cada entrevistado, buscamos questionar um pouco mais aquilo que já havia sido mencionado ou deixado de ser respondido no questionário perfil.

A princípio, os participantes da entrevista inicial seriam selecionados por meio do histórico escolar. Inicialmente, nos propusemos a entrevistar dois participantes com o seguinte critério: maior carga horária completa no curso (maior quantidade de horas finalizadas no curso) e menor carga horária completa no curso (menor quantidade de horas finalizadas no curso). Porém, devido a desistências desses participantes, fomos obrigados a fazer novas escolhas. O primeiro participante selecionado foi um licenciando a quem a orientadora deste projeto já conhecia. A razão para sua indicação foi porque ela imaginava ser um estudante dedicado e que provavelmente ficaria até o final do processo formativo, podendo assim participar dos dois momentos de entrevista. Este participante, de pronto, aceitou participar das entrevistas e ficou no lugar do critério maior carga horária. O critério de menor carga horária foi usado para selecionar o segundo entrevistado, porém, desta vez, chamamos duas pessoas para o caso de uma delas desistir, de modo que tivéssemos uma segunda opção. Por isso, ficamos com três entrevistados.

Na entrevista final buscamos analisar aspectos de conhecimentos de Combinatória, conhecimento de alunos, além de conhecimentos para o ensino segundo Ball, Thames e Phelps (2008), que puderam ser adquiridos ou reforçados durante o processo formativo. Ressaltamos que os participantes da entrevista final são os mesmos da entrevista inicial.

3.4.3 Processo formativo

No processo formativo, trabalhamos com questões de ensino voltadas para o ensino e conhecimento de alunos, tendo o uso de protocolos de alunos como estratégia para refletir sobre os erros e acertos e, desse modo, questionar estratégias de ensino. Os protocolos contidos nesta pesquisa trazem respostas de alunos que foram apresentadas em três pesquisas (Coelho; Dias, 2022; Lima, 2015; Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013) e aqui iremos usá-los em forma de figuras, nomeando de protocolo, acompanhado de numeração para ajudar na sua identificação nos diversos momentos em que eles aparecerem.

O processo teve cinco encontros, realizados entre os dias 26 de outubro a 23 de novembro de 2024, de modo síncrono e assíncrono. Os encontros síncronos foram realizados de modo remoto, pelo Google Meet, sendo que o primeiro encontro teve como temática os diferentes tipos de problemas combinatórios; o segundo foi dedicado ao estudo de protocolos de alunos advindos das pesquisas de Lima (2015) e Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013); o terceiro, para a classificação de erros de uma atividade envolvendo problemas combinatórios advinda de um teste diagnóstico de uma pesquisa feita por Coelho e Dias (2022), que buscou classificar erros em problemas combinatórios; o quarto foi de modo assíncrono, pois os participantes, em grupo (trio), criaram um plano de aula como forma de intervenção para os erros encontrados no encontro anterior; e o último encontro foi uma socialização da atividade realizada. Além do exposto, realizamos com três participantes duas entrevistas semiestruturadas, nomeadas de entrevista inicial e entrevista final.

3.5 DESCRIÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO

A seguir, descreveremos os planejamentos/descrições dos encontros do processo formativo. Salientamos que os objetivos nomeados como “da pesquisa” se referem aos objetivos estabelecidos na introdução desta pesquisa; já os objetivos nomeados como “do encontro” representam aquilo que esperamos dos participantes.

3.5.1 Encontro 1: Estudo sobre problemas combinatórios

Duração: 180 min.

Tema: Diferentes tipos de problemas combinatórios e suas características (Borba; Pessoa, 2010).

Objetivos: (Do encontro) Identificar as diferentes características dos problemas combinatórios; (Da pesquisa) Analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios.

Recursos: quadro virtual, slides de apresentação.

Desenvolvimento: O primeiro momento desse encontro foi dedicado à apresentação dos participantes e do formador/pesquisador, ou seja, cada um falou seu nome, período de curso e qualquer outra coisa relevante sobre si.

No segundo momento, foi trabalhado o conhecimento do conteúdo de Combinatória. Para isso, foram selecionadas questões que são desenvolvidas a nível de ensino médio de Combinatória da coleção Prisma da Matemática: matemática e suas tecnologias (Bonjorno, Júnior e Souza, 2020), que foram trabalhadas de forma introdutória na apresentação dos quatro tipos de problemas (Produto de Medidas, Arranjo, Combinação e Permutação). Inicialmente, o pesquisador apresentou exemplos de problemas combinatórios, verificou se os participantes reconheciam os diferentes tipos de problemas combinatórios, pediu para que eles os resolvessem individualmente e apresentassem suas respostas, caso desejassem. Por fim, o pesquisador apresentou a solução e a classificação de Pessoa e Borba (2010) para problemas combinatórios. Esse procedimento foi repetido em cada uma das questões discutidas.

Um conjunto de três questões também foi discutido no terceiro momento do encontro. Essas questões foram selecionadas da pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) e possuem protocolos de alunos, os quais foram discutidos e analisados no encontro seguinte. Neste encontro, os participantes apenas resolveram essas questões. Cada uma dessas questões foi apresentada em slides para que todos pudessem acompanhar, e cada licenciando deveria fazer inicialmente de modo individual e, em seguida, discutir com a turma. Foi feita uma questão por vez, com tempo definido para a resolução. As questões foram feitas na seguinte ordem:

Problemas introdutórios: 1) Uma fábrica de móveis tem dez modelos para mesas e quatro modelos para cadeiras. Quantos pares de modelos de mesa e cadeira a fábrica tem disponíveis? (Bonjorno, 2020, p. 87) (Produto de Medidas);

2) Oito cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares? (Bonjorno, 2020, p. 87) (Arranjo Simples);

3) Quantas comissões de três participantes podem ser formadas com cinco pessoas? (Bonjorno, 2020, p. 96) (Combinação Simples);

4) Considere a palavra LIVRO. Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra? (problema adaptado) (Bonjorno, 2020, p. 95) (Permutação Simples)

Problemas da pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013): 1) Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto A = {a, b, c};

2) Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras?

3) Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, sabendo-se que cada placa é uma sequência de três letras e quatro dígitos?

3.5.2 Encontro 2: Registros de aluno em problemas combinatórios

Duração: 90 min.

Tema: Estratégia de alunos na resolução de problemas combinatórios.

Objetivos (Do encontro) Analisar protocolo de aluno ao resolver problemas combinatórios, identificar padrões em estratégias de alunos, identificar raciocínio combinatório e erros em registro de alunos; (Da pesquisa) Analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios.

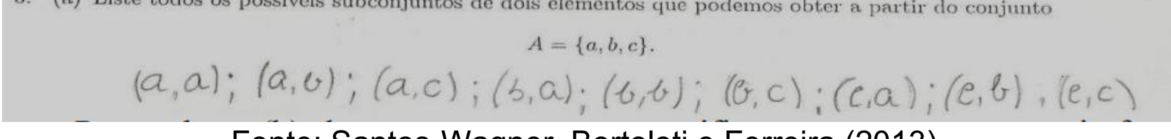
Desenvolvimento: Neste encontro, foram trabalhados os protocolos de alunos em problemas de Combinatória. Foram propostos seis problemas combinatórios, sendo que três deles já haviam sido discutidos na aula anterior e três não haviam sido trabalhados com os participantes. Para o melhor aproveitamento deste encontro, começamos a discutir os três problemas que os participantes ainda não haviam visto, oriundos de Lima (2015), pois a segunda parte do encontro ficou dedicada à análise dos protocolos de alunos nos seis problemas. Assim, pedimos que os participantes resolvessem os problemas para, em seguida, discutirmos as estratégias de solução apresentadas por eles.

Isso foi feito do seguinte modo: apresentamos um problema por vez e só progredimos para o próximo após finalizarmos as discussões sobre a solução daquele problema. Logo após as discussões dos três problemas iniciais, demos início ao segundo momento da aula, com a apresentação dos protocolos de estudantes para cada um dos três problemas, e pedimos que os participantes analisassem as respostas, identificando coerências e incoerências.

Foram questionados os tipos de resposta encontradas, se havia algum padrão nas soluções dos alunos, o que os alunos queriam dizer com suas respostas, quais as possíveis justificativas para aquela estratégia, se o raciocínio combinatório poderia ser identificado por meio dos registros e como poderíamos ajudar o aluno. A discussão foi feita protocolo por protocolo e só passamos para outro problema após esgotarem-se todas as problemáticas sobre o problema atual.

Problemas do segundo encontro: 1) Liste todos os subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto A = {a, b, c}.

Figura 1 – Protocolo 1



3. (a) Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto $A = \{a, b, c\}$.

(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c); (c,a); (c,b), (c,c)

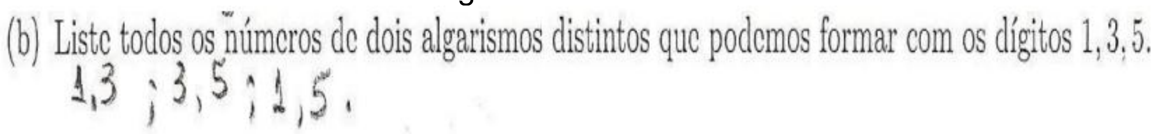
Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013).

Classificação do problema: Esta situação combinatória é uma Combinação simples e possui estratégia pré-determinada – listagem –, contendo poucos elementos a serem usados (Braz; Borba, 2012).

Observações sobre o protocolo: A resposta apresenta um padrão de listagem, porém a representação matemática está incorreta, pois o registro indica par ordenado e não conjuntos, como pede o enunciado. Houve um equívoco em relação à representação, que deveria ser sinalizada por chaves "{ }". Além disso, no caso de troca dos parênteses por chaves, alguns conjuntos não fariam sentido por haver só um elemento, exemplo: {a, a}; {b, b} e {c, c}. Vale ressaltar que, na definição de conjuntos iguais, as notações {a, b} e {b, a} representam o mesmo conjunto, logo, não podem ser contadas como diferentes.

2) Liste todos os números de dois algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 1, 3 e 5.

Figura 2 – Protocolo 2


(b) Liste todos os números de dois algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 1, 3, 5.

1,3 ; 3,5 ; 1,5 .

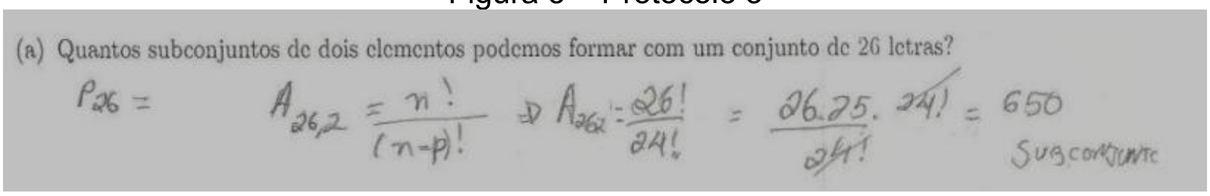
Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013).

Classificação do problema: Esta é uma situação de Arranjo simples e possui poucos elementos a serem usados e estratégia pré-determinada – listagem – (Braz; Borba, 2012).

Observações sobre o problema: Listagem com uso incorreto da forma de registro. A estratégia do registro apresenta números separados por vírgula, enquanto deveriam ser números de dois algarismos. Não foram esgotadas todas as possibilidades de combinação de números e a falta de padrão coerente com a situação pode indicar uso aleatório de dígitos.

3) Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras?

Figura 3 – Protocolo 3


(a) Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras?

$P_{26} =$ $A_{26,2} = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{26,2} = \frac{26!}{24!} = \frac{26.25.\cancel{24!}}{\cancel{24!}} = 650$ Subconjunto

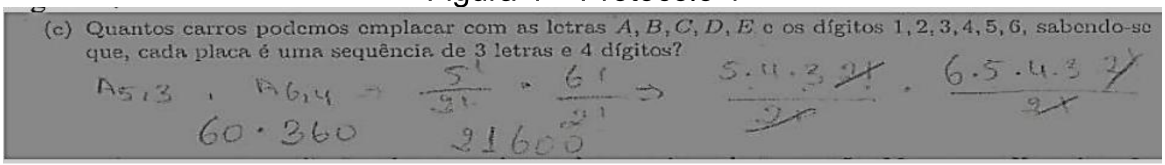
Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013).

Classificação do problema: Esta situação é uma Combinação simples com dois termos, grande quantidade de elementos à disposição para o uso nas possibilidades.

Observações sobre o protocolo: Indica o uso de arranjo para contagem, o que contabiliza elementos repetidos, uma vez que {a, b} e {b, a} são contados como diferentes. Porém, na definição de conjunto, esses conjuntos são iguais.

4) Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, sabendo-se que cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos?

Figura 4 – Protocolo 4



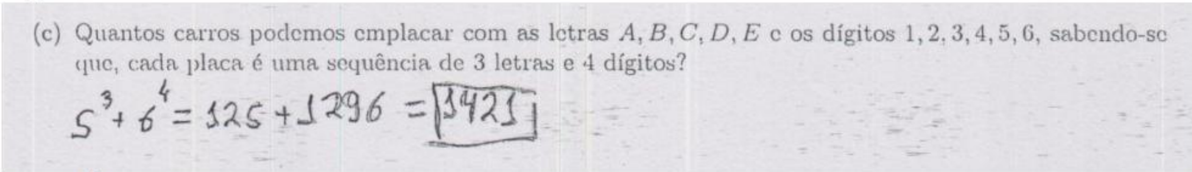
(c) Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, sabendo-se que, cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos?

$A_{5,3} \cdot A_{6,4} \rightarrow \frac{5!}{2!} \cdot \frac{6!}{2!} \Rightarrow \frac{5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} \cdot \frac{6.5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}}$

$60 \cdot 360 \quad 21600$

Fonte: Lima (2015).

Figura 5 – Protocolo 5



(c) Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, sabendo-se que, cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos?

$5^3 + 6^4 = 125 + 1296 = \boxed{1421}$

Fonte: Lima (2015).

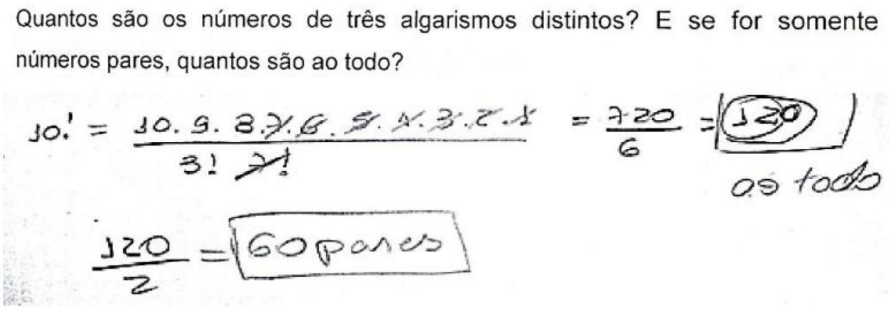
Classificação do problema: Esta é uma situação de Produto de medidas e pode ser resolvida utilizando dois arranjos com repetição.

Observações sobre os protocolos: O protocolo 4 indica uso da fórmula de arranjo simples, mas, por ser uma situação de arranjo com repetição, a estratégia utilizada não determina o número total de possibilidades. No protocolo 5, o registro aponta o uso de arranjo com repetição, que é uma estratégia apropriada, porém o estudante faz somas das possibilidades e não determina o total de possibilidades.

5) “Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?” (Lima, 2015, p. 129).

Classificação do problema: A primeira parte do problema é uma situação de Arranjo, possui poucas etapas de escolhas, porém com um ou dois elementos de escolha exigindo restrição (Braz; Borba, 2012). A segunda parte do problema pode ser resolvida utilizando o princípio multiplicativo e o princípio aditivo por dois caminhos: calculando a quantidade de números ímpares e retirando do total a quantidade de pares, ou calculando diretamente os números pares, levando em conta as restrições necessárias, dividindo em casos e somando essas possibilidades.

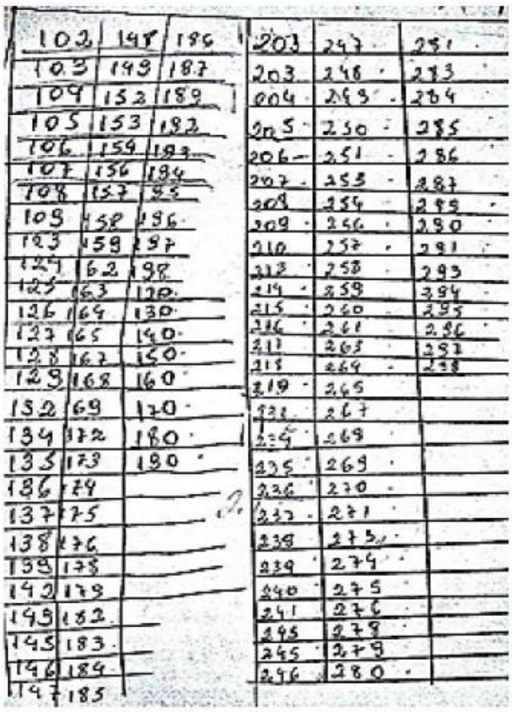
Figura 6 – Protocolo 6



Fonte: Lima (2015).

Observação sobre o protocolo: este problema pode ser utilizando o princípio multiplicativo, sendo preciso levar em consideração que um número de três algarismos não começa com o algarismo 0. Essa restrição não foi observada pelo estudante. Além disso, ele utilizou a fórmula da combinação para fazer a contagem, o que deixa vários casos de fora.

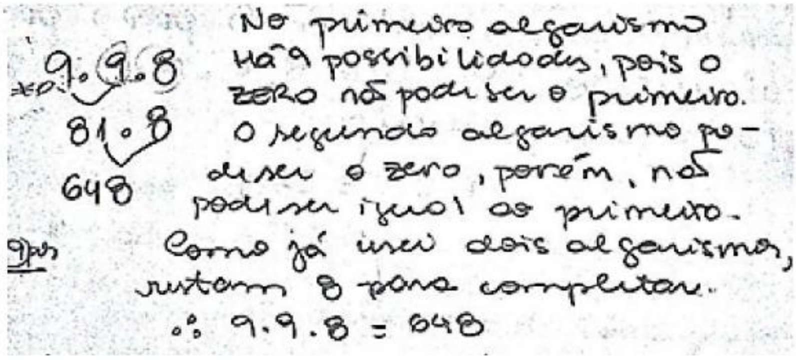
Figura 7 – Protocolo 7



Fonte: Lima (2015).

Observação sobre o protocolo: o aluno optou por fazer uma listagem das possibilidades, mas provavelmente percebeu que seria uma tarefa muito árdua para continuar e desistiu.

Figura 8 – Protocolo 8


9.9.8
81.8
648

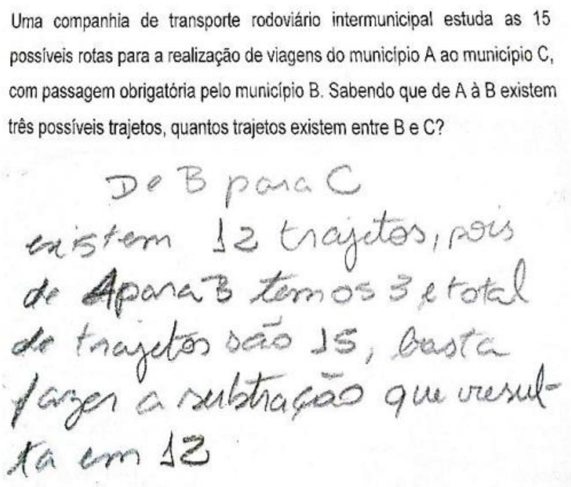
No primeiro algarismo há 9 possibilidades, pois o zero não pode ser o primeiro. O segundo algarismo pode ser o zero, porém, não pode ser igual ao primeiro. Como já usei dois algarismos, restam 8 para completar.
∴ 9.9.8 = 648

Fonte: Lima (2015).

Observação sobre o protocolo: A resposta do protocolo 8 é coerente com a primeira parte do enunciado, pois considera a restrição que o primeiro algarismo impõe e apresenta argumentos condizentes com cada etapa de escolha. Neste protocolo não se observa a resposta para a segunda pergunta.

> [6] Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A a B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C? (Lima, 2015, p. 147).

Figura 9 – Protocolo 9


Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?

De B para C existem 12 trajetos, pois de A para B temos 3 e total de trajetos são 15, basta fazer a subtração que resulta em 12

Fonte: Lima (2015).

Classificação do problema: esta situação Combinatória é de Produto de medidas e exige pensamento invertido da situação.

Observações sobre o protocolo: aparentemente, esta estratégia consistiu em somar a quantidade de trajetos que faltavam para completar 15 possibilidades às 3 possíveis rotas mencionadas no enunciado. O estudante deveria ter identificado que, para cada rota entre as cidades B e C, existem 3 possibilidades de caminhos entre A e B.

3.5.3 Encontro 3: Os erros em problemas de Combinatória

Duração: 180 min.

Tema: Identificando, analisando e classificando tipos de erros.

Objetivos: (Do encontro) Resolver diferentes tipos de problemas combinatórios; identificar, analisar e classificar erros em problemas combinatórios; (Da pesquisa) Identificar conhecimentos para o ensino de Combinatória de licenciandos do curso de Matemática a partir da elaboração de plano de aula, de discussões durante o processo formativo e em entrevistas; analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios.

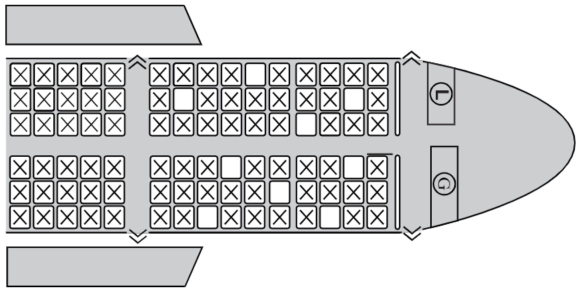
Recursos: quadro branco (virtual), slides de apresentação.

Desenvolvimento: Neste encontro foi trabalhada a classificação das respostas dos problemas de Combinatória, a partir de protocolos de três estudantes do ensino médio (Coelho; Dias, 2022). Para isso, compartilhamos com os participantes um arquivo com um conjunto de 4 questões de edições passadas do Enem, nas quais os participantes deveriam, primeiramente, analisá-las e resolvê-las em grupo. Em um segundo momento, depois de terem elaborado suas respostas, pedimos aos participantes que apresentassem algum tipo de erro que julgassem pertinente para aquele problema, ou seja, que imaginavam que os estudantes poderiam cometer. Por fim, foram apresentados os protocolos de estudantes do conjunto de questões (ver problemas: terceiro encontro).

Em grupo, os participantes analisaram os protocolos, identificaram estratégias, erros e acertos similares e apresentaram comentários sobre as respostas; o professor regente estimulou as discussões dos grupos. Ao final, foi proposta uma atividade na qual os licenciandos deveriam montar um plano de aula com a finalidade de utilizar os erros como estratégias de ensino, a partir daqueles protocolos estudados. Foi explicado que, no próximo encontro síncrono, os participantes fariam a apresentação desse plano de aula (ver Anexos A e B).

Problemas: terceiro encontro: 1) [Adaptado ENEM, 2015] Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

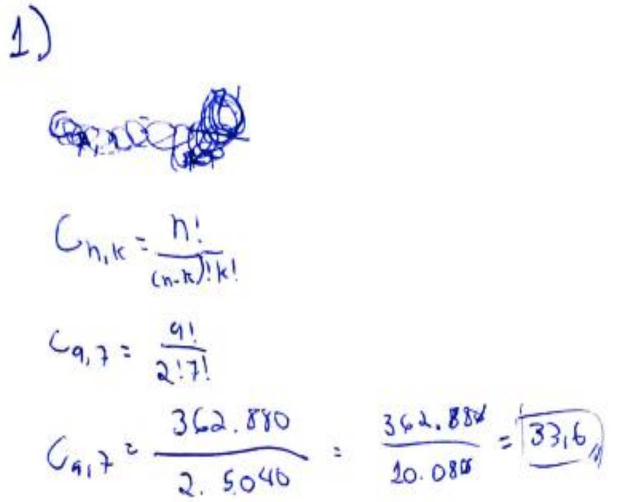
Figura 10 – Ilustração do Problema 1 do Terceiro Encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Determine o número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo.

Figura 11 – Protocolo 10

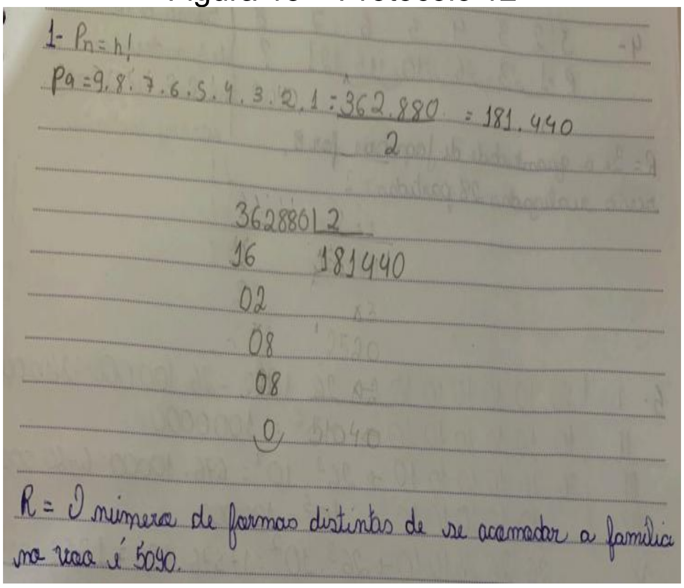


Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 12 – Protocolo 11

Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 13 – Protocolo 12



1- $P_n = n!$

$P_9 = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = \frac{362.880}{2} = 181.440$

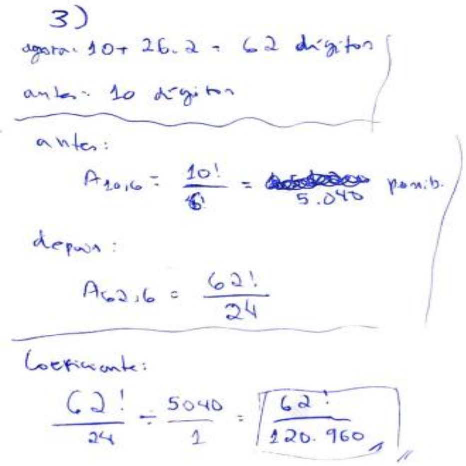
```
362880 | 2
16       181440
02
08
08
0
```

R = O número de formas distintas de se acomodar a família no roda é 5040.

Fonte: Coelho e Dias (2021).

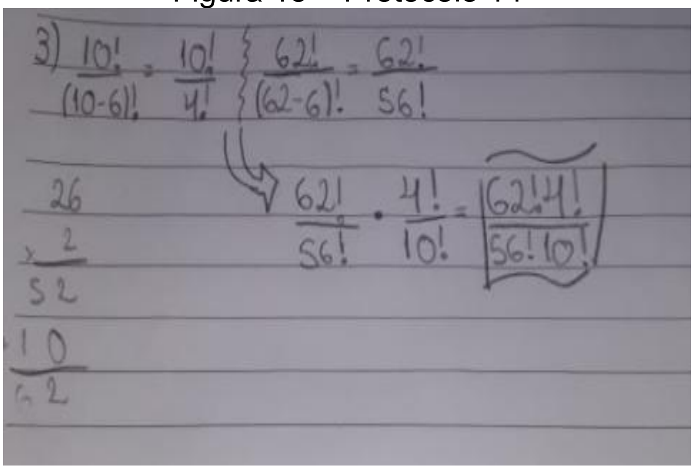
2) [Adaptado ENEM, 2017] Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. Determine o coeficiente de melhora da alteração recomendada.

Figura 14 – Protocolo 13



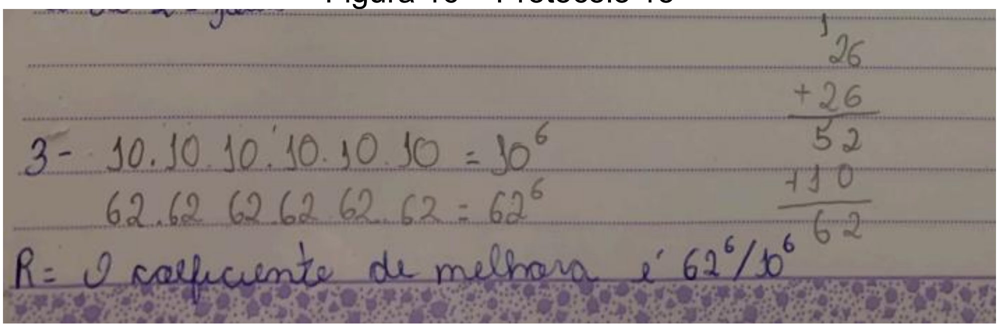
Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 15 – Protocolo 14



Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 16 – Protocolo 15



Fonte: Coelho e Dias (2021).

3) [Adaptado ENEM, 2017] Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogames. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o

número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro [Figura 17].

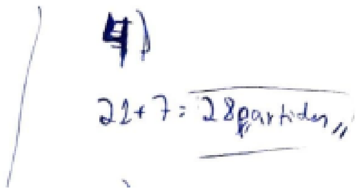
Figura 17 – Ilustração do Problema 3 do Terceiro Encontro

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Fonte: Dados da pesquisa.

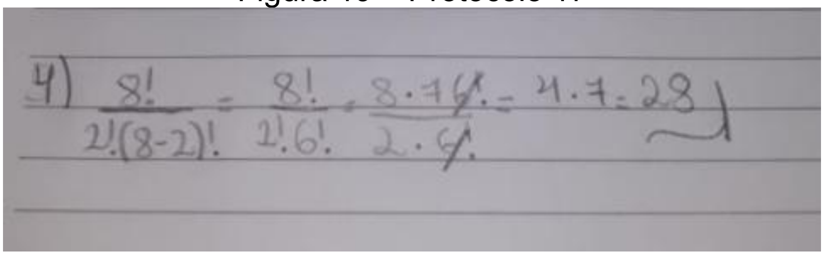
Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

Figura 18 – Protocolo 16



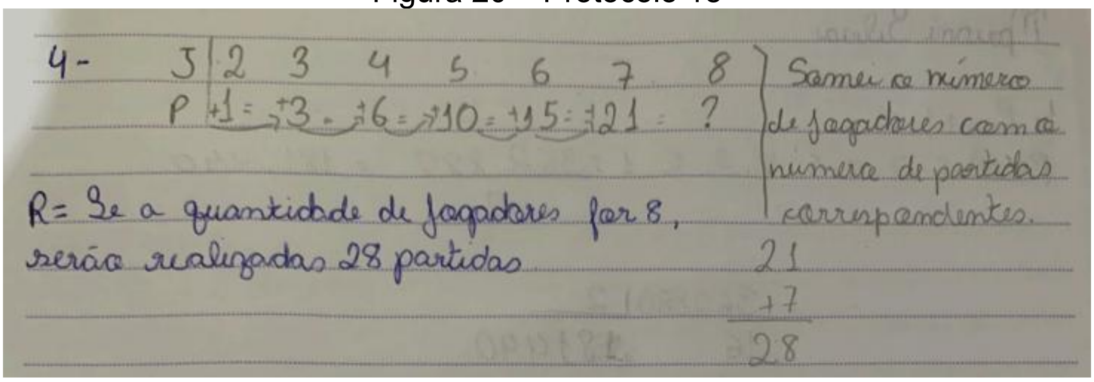
Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 19 – Protocolo 17



Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 20 – Protocolo 18



Fonte: Coelho e Dias (2021).

4) [Adaptado ENEM, 2017] Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa.

Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

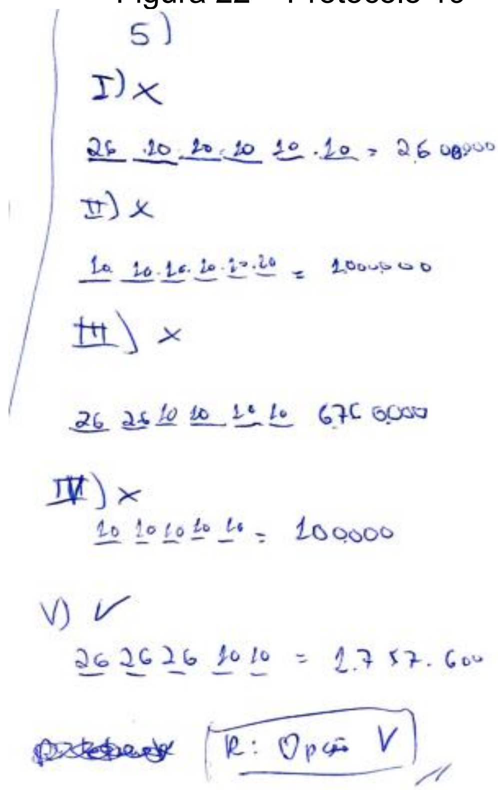
Figura 21 – Ilustração do Problema 4 do Terceiro Encontro

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

Fonte: Dados da pesquisa.

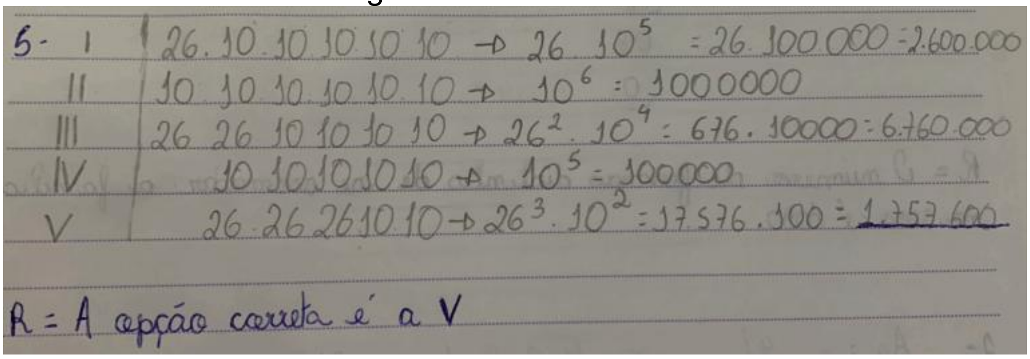
As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. Determine a opção que mais se adequa às condições da empresa.

Figura 22 – Protocolo 19



Fonte: Coelho e Dias (2021).

Figura 23 – Protocolo 20



5- I 26.10.10.10.10.10 → 26.10^5 = 26.100000 = 2.600.000
II 10.10.10.10.10.10 → 10^6 = 1000000
III 26.26.10.10.10.10 → $26^2.10^4$ = 676.10000 = 6.760.000
IV 10.10.10.10.10 → 10^5 = 100000
V 26.26.26.10.10 → $26^3.10^2$ = 17.576.100 = 1.757.600

R = A opção correta é a V

Fonte: Coelho e Dias (2021).

3.5.4 Encontro 4: Atividade interventiva

Duração: intervalo de 15 dias para elaboração.

Tema: Construindo uma atividade interventiva.

Objetivos : (Do encontro) Elaborar e desenvolver estratégias de ensino para ressignificação do erro por meio de padrões de erros; (Da pesquisa) Identificar conhecimentos para o ensino de Combinatória de licenciandos do curso de Matemática a partir da elaboração de plano de aula, de discussões durante o processo formativo e em entrevistas; analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios.

Desenvolvimento: Este encontro (assíncrono) foi dedicado à elaboração do plano de aula em trio, que pode ser conferido nos Anexos A e B. Foi enviado um modelo estrutural para tal elaboração, conforme consta no Apêndice A.

3.5.5 Encontro 5: Socialização da atividade interventiva

Duração: 90 min.

Tema: Apresentação e reflexões sobre planos de aula.

Objetivos: (Do encontro) Apresentar o plano de aula desenvolvido por trios e discutir as propostas apresentadas a partir de elementos estudados no processo formativo; (Da pesquisa) Analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios; identificar conhecimentos para o ensino de Combinatória de licenciandos do curso de Matemática a partir da elaboração de plano de aula, de discussões durante o processo formativo e em entrevistas.

Desenvolvimento: Este encontro foi dedicado à apresentação do plano de aula elaborado pelos trios (ver Anexos A e B). Após cada apresentação, houve o momento de discussão e levantamento de observações sobre o apresentado por cada trio, a fim de promover aprendizado mútuo.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresentamos os dados e os discutimos de acordo com os referenciais teóricos apresentados em capítulos anteriores. Inicialmente, houve 13 inscritos na formação que propusemos, mas apenas seis participantes mantiveram presença e participaram do processo formativo. Assim, foram analisadas no questionário perfil apenas as respostas desses participantes, que nomeamos de P1, P2, P3, P4, P5 e P6.

4.1 QUESTIONÁRIO PERFIL

Nesse questionário, buscamos identificar as experiências e conhecimentos prévios dos licenciandos quanto à Combinatória. Para isso, enviamos via e-mail o seguinte questionário.

Quadro 5 – Perguntas do questionário perfil

<table>
<tr><th>Viés da Pergunta</th><th>Perguntas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Perfil dos participantes</td><td>Em que ano/período você ingressou no curso? Você já teve outra formação acadêmica? Se sim, qual?</td></tr>
<tr><td>Você já teve alguma experiência com ensino de Matemática? Se sim, fale sobre.</td></tr>
<tr><td>Já participou de algum programa de bolsa institucional para licenciando? Se sim, qual?</td></tr>
<tr><td>Estudo de Combinatória</td><td>Você se lembra de ter estudado Análise Combinatória na educação básica ou na graduação? Se sim, em qual período e como foi o processo de ensino?</td></tr>
<tr><td>Conhecimento sobre Combinatória</td><td>Você se sente seguro(a) com os seus conhecimentos sobre a Combinatória? Fale um pouco sobre isso.</td></tr>
<tr><td>Experiência com ensino de Combinatória</td><td>Você já atua como docente?

Caso tenha respondido sim para pergunta anterior, conte-nos: Você realiza planos de aulas? Com que frequência (diariamente, semanalmente, quinzenalmente etc.)? Quais materiais você usa como consulta para elaborar seus planos de aula?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ensino de Combinatória</td><td>Você está trabalhando ou já trabalhou com Combinatória com seus alunos? Se sim, explique como foi.</td></tr>
<tr><td>Seus estudantes têm dificuldade e/ou facilidades com problemas de Combinatória (arranjo, permutação, combinação e produto de medidas)? Quais?</td></tr>
</table>

	Quais os erros mais comuns que você observa na resolução de problemas de Combinatória?
	Que estratégias você utiliza para minimizar os erros?

Fonte: Elaboração própria.

Além dessas perguntas, deixamos um espaço para que os participantes pudessem registrar algo que considerassem relevante, além do questionado.

Apuramos que os participantes desta pesquisa iniciaram seus cursos entre 2021.1 e 2022.1, sendo que cinco deles estão cursando a primeira graduação e um deles (P1) já havia cursado Licenciatura em Química. Quanto à experiência com ensino de Matemática, todos alegaram ter tido alguma vivência, e as respostas foram as seguintes:

Quadro 6 – Questionário perfil: experiência com ensino de Matemática

Participantes	**Pergunta: Você já teve alguma experiência com ensino de Matemática? Se sim, fale sobre.**
P1	Sim, atualmente atuo como estagiário no programa Tempo Certo da prefeitura de Caruaru, ministrando aulas de reforço para os alunos
P2	A única experiência que tive foi em monitoria no ensino médio, tive que passar uns três meses dando monitoria para meus colegas de turma
P3	Já sim, no ensino médio. Percebi que era bom e que gostava de ensinar
P4	As únicas experiências foram no estágio I e no PIBID
P5	Aulas de reforço
P6	Sim. Participei do PIBID, fui monitor de matemática em turmas de 6° e 7° ano de uma escola municipal da minha cidade por 4 meses e atualmente sou professor de reforço dos nonos anos de uma outra escola municipal da minha cidade

Fonte: Elaboração própria.

As respostas indicam que alguns participantes tiveram experiências pontuais ainda no ensino médio (P2 e P3), outros por meio de programas de incentivo à docência ou estágios (P1, P4 e P6). Além disso, P5 e P6 tiveram experiência com aulas de reforço, sendo que P6 ainda exercia a função de professor de reforço até a data de conclusão desta pesquisa. As experiências relatadas são razoáveis, considerando que são estudantes que se encaminham para a finalização do curso. Quando questionados sobre a participação em programas de bolsas institucionais, percebemos que três deles (P2, P3 e P5) não participaram de nenhum programa, enquanto P4 e P6 participaram do Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID) e P1 do programa Tempo Certo, da Prefeitura de Caruaru. Experiências em programas de estágio e incentivo à docência contribuem para o desenvolvimento de conhecimentos pedagógicos, tanto no sentido teórico quanto no sentido prático.

Quando perguntamos sobre o estudo do conteúdo de Combinatória na educação básica ou na graduação, as respostas foram as que seguem (Quadro 7).

Quadro 7 – Questionário perfil: estudo em Combinatória em momentos anteriores

Participantes	**Pergunta: Você se lembra de ter estudado Análise Combinatória na educação básica ou na graduação? Se sim, em qual período e como foi o processo de ensino?**
P1	Sim, foi no segundo e terceiro período da graduação. Não lembro de ter estudado na educação básica. Estudei o conteúdo de análise combinatória em duas disciplinas, sendo a primeira Estatística e a segunda a eletiva Princípios de Contagem. Considero que as metodologias de ensino utilizadas foram satisfatórias nas duas disciplinas, havendo tempo necessário para que ocorresse assimilação dos conhecimentos que estavam sendo estudados
P2	Estudei Análise Combinatória apenas na faculdade (pelo que me recordo). Foi no segundo período. Lembro que o processo de ensino foi bem complicado, na verdade tive muita dificuldade com a cadeira, pela forma como ela foi retratada
P3	Sim, em particular no meu segundo ano do ensino médio, eu estava participando de um programa chamado "OBMEP na escola" que era um preparatório para a prova da OBMEP, as questões de Combinatória para mim eram as mais difíceis, mas depois de estudar eu consegui pegar a ideia
P4	Não estudei no ensino médio, por *n* fatores, em especial por ter o 3° ano na pandemia e a professora ter esperado esse ano para dar o conteúdo. Na graduação tive contato, mas pouco e com baixa qualidade, principalmente por ter sido de forma remota
P5	Não
P6	Sim. Estudei um pouco sobre no 2° e no 5° período

Fonte: Elaboração própria.

O participante P3 foi o único que estudou Combinatória ainda no ensino médio e de forma mais aprofundada, por estar no projeto preparatório para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). P1, P2, P4 e P6 tiveram contato com esse conteúdo apenas na graduação, mas alguns deles expressaram não ter conseguido obter boas experiências de aprendizagem com esse conteúdo, mesmo na graduação. P5 relatou não se lembrar de ter estudado o conteúdo na educação básica ou na graduação. Ball, Thames e Phelps (2008) destacaram a importância de considerar como o conhecimento do conteúdo se manifesta na prática, pois apenas conhecer o conteúdo não é suficiente para garantir a aprendizagem dos estudantes.

As respostas sobre a confiança dos participantes em relação aos conhecimentos sobre Combinatória foram as seguintes:

Quadro 8 – Questionário perfil: segurança quanto ao conhecimento de Combinatória

Participantes	Pergunta: Você se sente seguro(a) com os seus conhecimentos sobre a Combinatória?
P1	Não, pois vejo a Combinatória como uma das áreas da Matemática que mais possui uma grande variedade de questões, sendo necessário um conhecimento muito amplo para que as questões sejam solucionadas, não havendo uma fórmula exata para cada tipo de questão
P2	Não me sinto seguro e quero aprender mais com o curso, creio que tenho uma base muito fraca de Combinatória e espero que isso não me prejudique ao longo do curso, pois quero melhorar essa base
P3	Sim, gosto muito de probabilidade e acho que hoje mesmo sem estudar muito Análise Combinatória eu me saio bem
P4	Não me sinto muito seguro, uma vez que eu sinto a necessidade de provar se as minhas soluções estão corretas, coisa que não consigo com a Análise Combinatória
P5	Não tanto como gostaria. Preciso praticar mais
P6	Atualmente, sim. Depois de ensinar isso algumas vezes, nos tornamos mais confiantes

Fonte: Elaboração própria.

As respostas da maioria dos participantes indicam que eles não se sentem confiantes quanto aos conhecimentos que possuem sobre Combinatória. P1 e P2 informaram que percebem a necessidade de estudar a base matemática para se sentirem mais confiantes para ministrar as aulas. P4 percebe a necessidade de demonstrar suas soluções e parece encontrar dificuldade para fazer isso em soluções de problemas combinatórios. Segundo Coelho e Dias (2021), é importante que o professor se sinta confiante, pois, caso ele apresente insegurança com o conteúdo, sua dificuldade pode ser transmitida aos seus aprendizes.

Quando observamos o construto de Ball, Thames e Phelps (2008), percebemos que as dimensões do conhecimento partem exatamente do conhecimento do conteúdo, pois o conhecimento do conteúdo está sempre atrelado a um determinado espectro do conhecimento pedagógico. Ou seja, o conhecimento do conteúdo é a base para se construir os outros conhecimentos.

Também buscamos apurar se algum deles já havia atuado como docente, mas somente P6 marcou que já atuou como professor e, por isso, pôde responder algumas perguntas a mais que os outros participantes. Assim, para sintetizar melhor os dados, colocamos suas respostas no quadro que segue.

Quadro 9 – Questionário perfil: experiência com ensino de Combinatória (P6)

Questionário	**Você já atua como docente? Caso tenha respondido sim para a pergunta anterior, conte-nos: Você realiza planos de aulas? Com que frequência (diariamente, semanalmente, quinzenalmente etc.)? Quais materiais você usa como consulta para elaborar seus planos de aula?**
P6	Atualmente, não realizo. Como sou professor de reforço, meu trabalho costuma ser aplicar listas de exercícios e tirar as dúvidas dos alunos sobre essas listas, ensinando múltiplas formas de resolver o mesmo problema
Questionário	**Você está trabalhando ou já trabalhou com Combinatória com seus alunos? Se sim, explique como foi**
P6	Com uma turma, trabalhei apenas 1 vez. Ensinei a alunos do 2° ano. Utilizei um jogo que elaborei para ensinar permutação
Questionário	**Seus estudantes têm dificuldade e/ou facilidades com problemas de Combinatória (arranjo, permutação, combinação e produto de medidas)? Quais?**
P6	Sim. Com todos os problemas que não possam ser resolvidos utilizando simplesmente o princípio fundamental da contagem
Questionário	**Quais os erros mais comuns que você observa na resolução de problemas de Combinatória?**
P6	Não saber qual fórmula utilizar. Não saber identificar o tipo de problema que está tentando resolver. Não saber realizar exercícios onde a repetição se faz presente
Questionário	**Que estratégias você utiliza para minimizar os erros?**
P6	Utilizo jogos para ensinar

Fonte: Elaboração própria.

Analisando as respostas de P6, identificamos que ele teve uma experiência com o ensino do conteúdo de Combinatória utilizando jogos como metodologia de ensino. Quando questionado sobre as dificuldades dos alunos, P6 diz que eles têm dificuldades com “todos os problemas que não possam ser resolvidos utilizando simplesmente o princípio fundamental da contagem”. Consideramos que os alunos tenham mais facilidade para resolver situações de Produto de medidas, onde o princípio multiplicativo geralmente é mais requisitado como estratégia de resolução. Ou seja, situações como Arranjo, Permutação e Combinação, que geralmente utilizam fórmulas, apresentam maior dificuldade para os estudantes. A resposta sobre os tipos de erros pode comprovar um pouco dessa especulação.

Dada a experiência de P6, percebemos que este participante expõe conhecimento de alunos ao reconhecer os tipos de erros dos seus estudantes e dá indícios de ter construído conhecimento de ensino quando relata utilizar jogos como metodologia de ensino.

As respostas apresentadas no questionário indicam que a maioria dos participantes da pesquisa possui pouca experiência no ensino de Matemática e muitos deles acreditam que precisam adquirir maior domínio do conteúdo de Combinatória. É preciso salientar que, apesar de um bom domínio do conteúdo ser muito útil para o ensino de Matemática, isso, por si só, não é suficiente. É necessário levar em conta a questão pedagógica. Segundo Shulman (1986, p. 8, **tradução nossa**), “o mero conhecimento do conteúdo provavelmente será tão inútil do ponto de vista pedagógico quanto a habilidade sem conteúdo"[2]. Assim, além das técnicas matemáticas, conhecer a forma como os estudantes pensam e reagem aos conteúdos, os obstáculos mais comuns atrelados a determinados temas e as melhores formas de apresentá-los são alguns dos conhecimentos destacados por Ball, Thames e Phelps (2008), que os professores precisam aprimorar para gerenciar melhor suas aulas.

Como apontado por P1 no Quadro 8, não reconhecer os tipos de problemas pode ser um obstáculo quanto ao conhecimento do conteúdo. No entanto, quando a metodologia não é adequada, como apontado por P2 e P4 no Quadro 7, isso pode dificultar a aquisição de conhecimentos pedagógicos sobre o conteúdo. Entendemos que a formação inicial deve favorecer o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo, mas, para que isso aconteça de forma adequada, as disciplinas deveriam ser ministradas por meio de metodologias dinâmicas.

4.2 ENTREVISTA INICIAL

Como mencionado, três licenciandos (P1, P2 e P5) participaram das entrevistas iniciais com o objetivo de identificar experiências e conhecimentos prévios de licenciandos quanto à Combinatória e as compreensões sobre erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Para elaboração de questionamentos, buscamos informações nas respostas dadas pelos participantes no questionário perfil.

---

[2] Do original: “*Mere content knowledge is likely to be as useless pedagogically as content-free skill*” (Shulman, 1986, p. 8).

Quando questionados sobre onde ocorreram seus aprendizados em Combinatória, P1 e P2 disseram que cursaram alguma disciplina na graduação e P5 não lembra de ter estudado durante a graduação e/ou ensino médio.

O participante P1 alega ter estudado este conteúdo nas disciplinas de Estatística e em uma eletiva de Contagem. Questionamos se, em algumas dessas disciplinas, a questão pedagógica sobre o ensino desse conteúdo foi abordada. A resposta foi a seguinte:

> **P1**: É porque as disciplinas pedagógicas sobre o ensino de Matemática, pelo que eu me lembro, em Metodologia I a gente aprendeu mais sobre as operações básicas, questões do Fundamental II, questões sobre frações, essas questões de como abordar. Já em Metodologia II foi mais no campo da álgebra. A gente ficou mais ali discutindo pedagogicamente o ensino da álgebra. Aí eu não tive tanto contato com metodologia de ensino para a Análise Combinatória.

Pela fala de P1, observa-se que as disciplinas que tratam da parte pedagógica do curso são as de metodologia. Muito embora tenha cursado algumas, elas não discutiram o ensino da Combinatória ou não foram desenvolvidas de forma que o licenciando pudesse ter essa referência pedagógica. A ementa da disciplina Matemática II, que também aborda a Combinatória, não foi citada pelo participante. A disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática I tem em sua ementa uma componente para discussão do raciocínio combinatório, mas P1 não menciona isso, talvez por não se lembrar.

Quanto ao questionamento, P2 disse que a disciplina de Estatística “[...] foi mais na parte teórica de Probabilidade e Estatística [...]”, não citando outras disciplinas pedagógicas que poderiam abordar pedagogicamente esse conteúdo.

Apesar de o participante P1 estar cursando a segunda graduação e, em ambos os cursos, poder ter estudado Combinatória, ele expressou no questionário não se sentir confiante com este conteúdo. Questionamos sobre isso na entrevista e ele disse o seguinte:

> **P1**: É, eu acho que assim, eu não sinto tanta confiança. Porque vendo assim, questões de concurso, as questões que envolvem Análise Combinatória são as mais desafiadoras. Porque, trazendo um exemplo, não sei se ficou muito bem explicado na resposta lá que eu coloquei. Mas, exemplo, a gente vê uma questão sobre volume, sobre área. Ali meio que a gente já tem um esquema de como calcular. Mas quando é uma questão sobre probabilidade, que parece que tem muito mais formas de se elaborar uma questão que envolve Combinatória, né?

Em sua resposta, P1 confirma a insegurança que sente com as questões de Combinatória, inclusive ao resolver questões de concurso, o que pressupõe a necessidade de maiores estudos para o bom domínio desse conteúdo. Quando questionado sobre como poderia ser o ensino de Combinatória, em resposta a isso ele disse:

> **P1**: Eu acho que assim, pensando agora, tem de ir progressivamente, subir o nível progressivamente. Eu acho que consigo entender melhor, por exemplo, Arranjo, Permutação e depois partir para Combinação, que já muda um pouquinho a fórmula, pelo que eu lembro. Eu acho que seria nessa progressão mesmo.
> **Pesquisador**: Sim, ter uma progressão linear.
> **P1**: Isso, e também identificar pela questão quando que vai ser Arranjo, que a ordem importa, e Combinação, que a ordem não importa. Exemplo, eu vejo uma questão que eu não consigo identificar. Assim, algumas eu consigo, mas outras ficam mais implícitas ali se a ordem vai importar ou não.

Apesar de a pergunta ser voltada para a questão de ensino desse conteúdo, percebemos que o participante se atenta mais para a questão do conhecimento do conteúdo. Ou seja, existe uma crença de que o domínio do conteúdo é suficiente para gerir uma boa aula. A respeito disso, Shulman (1986, p. 8, **tradução nossa**) afirma:

> É provável que o mero conhecimento do conteúdo seja tão inútil do ponto de vista pedagógico quanto a competência sem conteúdo. Mas, para combinar corretamente os dois aspectos das capacidades de um professor, é necessário que prestemos tanta atenção aos aspectos de conteúdo do ensino quanto à que dedicamos recentemente aos elementos do processo de ensino[3].

Para P1, a progressão linear no nível de dificuldade dos problemas é uma forma confortável de aprendizado. Isso pode significar que sua abordagem de ensino possa ser baseada nesta perspectiva. Ou seja, escolha de exemplos mais simples de tarefas pedagogicamente sequenciadas, que deem ao aluno a oportunidade de evoluir seu aprendizado progressivamente. Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que as escolhas sequenciadas de exemplos, tarefas e atividades são uma forma de conhecimento de ensino. Também observamos que este participante reconhece a dificuldade em saber se a ordem vai importar ou não na solução de problemas combinatórios. Em seguida, o participante disse:

> **P1**: Eu acho que isso é o cerne da Combinatória. Assim, posso estar equivocado, mas entendo assim como o grande diferencial. [...] A partir disso

---

[3] Do original: "*Mere content knowledge is likely to be as useless pedagogic- ally as content-free skill. But to blend properly the two aspects of a teacher's capacities requires that we pay as much attention to the content aspects of teaching as we have recently devoted to the elements of teaching process*" (Shulman, 1986, p. 8).

> você tem que pensar de acordo se a ordem importa ou não. Atualmente, é como eu imagino.

Saber diferenciar as situações combinatórias tem sido uma dificuldade para professores e alunos quanto a esse conteúdo (Coelho; Dias, 2022; Sabo, 2010). Este é um ponto de dificuldade já conhecido na literatura sobre os erros em Combinatória e que ainda persiste. P2, quando questionado sobre suas dificuldades com este conteúdo, respondeu:

> **P2**: Olha, sendo bem sincero, eu senti um pouco de dificuldade. Eu não sei se foi pela metodologia ou se foi pela minha dificuldade em si com Probabilidade, mas, tipo, acho que foi muito mais pela metodologia mesmo, porque eu gostava de Probabilidade, mas com essa cadeira eu tive muita dificuldade. Eu não entendi o que aconteceu, mas eu gosto muito ainda de Probabilidade. É um campo que eu gostaria muito de explorar.
> **P2**: Tinha bastante dificuldade quando eu paguei a cadeira de Estatística na questão de diferenciar [os tipos de problemas], tipo quando é que usa Arranjo, quando é que usa Permutação, essas coisas. Acho que minha principal dificuldade era interpretar as questões, sabe? O enunciado. Porque é uma coisa que eu percebi que muitos alunos têm, não é só eu. Quando você lê o enunciado, você não sabe qual fórmula usar direito, porque são muitos termos que você precisa prestar atenção. Então, eu acho que se eu tive alguma dificuldade foi nessa questão mesmo. Na questão interpretativa das questões, de Arranjo, Combinação, essas coisas, sabe?

P2 alegou ter tido um pouco de dificuldade no aprendizado deste conteúdo durante a disciplina de Estatística e, assim como P1, também destacou a questão da diferenciação das situações combinatórias e dos invariantes como entrave no aprendizado desse conteúdo. Ainda sobre a questão de dificuldade com a aprendizagem de Combinatória, decidimos perguntar aos participantes se eles refletem sobre seus próprios erros na aprendizagem de Matemática ou mesmo se dão alguma atenção a eles. A respeito disso, disseram:

> **P2**: Eu acho que fui começar a trabalhar mais essas questões do erro quando eu paguei a cadeira de Avaliação da Aprendizagem. Aí a gente começou a aprender algumas coisas sobre isso. Antes, eu analisava muito mais meus erros, tipo ah, eu não posso fazer mais. Eu olhava e dizia: estou errando neste caminho, não posso repetir mais as mesmas coisas. Só que eu não dava muita atenção, eu não vou ser hipócrita, eu não dava muita atenção para os meus erros antigamente. Depois que eu paguei essa cadeira de Avaliação da Aprendizagem, eu comecei a dar muito mais atenção para isso e a analisar muito mais, porque eu vi que faz parte da questão de aprendizagem você saber como trabalhar com os seus erros.
> **P5**: Talvez tenha sido em uma disciplina de Metodologia logo no início. Foi uma disciplina pedagógica lá no primeiro período. Eu acredito que não tive tanta dedicação naquela disciplina e, quando eu fui fazê-la pela segunda vez, eu consegui entender o que eu estava errando. Inclusive, isso me deu um pouco mais de confiança nas disciplinas seguintes, no segundo e terceiro período.

> **P5**: É incrível que assim, é muito chato, com certeza, não ser aprovado em uma disciplina. Que foi o que aconteceu no primeiro período. E acredito que seria muito bom saber meu erro para antecipá-lo. Saber que naquele caminho eu errarei e terei que mudá-lo.
> **P1**: Bom, acredito que não. No momento em que erro uma questão, eu digo: ah, era por isso! Depois passa e eu não fico refletindo tanto.

P2 indica que teve alguma experiência com o trabalho com os erros ao cursar a disciplina Avaliação da Aprendizagem e que, por isso, passou a ter uma outra postura, dando mais atenção para seus próprios erros. Essa disciplina também foi cursada pelos demais participantes da entrevista, mas nenhum deles mencionou tal perspectiva.

P5 teve a oportunidade de refletir sobre seus erros ao cursar uma disciplina em que não foi aprovado; essa experiência fez com que sua percepção mudasse de tal forma que se refletiu em outras disciplinas. Para além disso, o participante reflete sobre o quão importante seria poder antecipar seus próprios erros para buscar novas rotas. Por outro lado, P1 ainda não teve essa percepção e não vê tanto sentido em dar tanta atenção aos erros.

Procuramos entender como os participantes veem a questão dos erros porque, como Hadamard (1945 *apud* Cury, 2019) atesta, os matemáticos também cometem erros, porém os corrigem antes de mostrar a solução para seus alunos; ou seja, se os professores erram, os estudantes também podem errar, e a reflexão dos erros por parte do professor pode contribuir com o processo de ensino, uma vez que eles passam a entender os erros dos seus alunos e buscam alternativas para minimizá-los.

Também buscamos questionar as crenças dos participantes quanto à contribuição dos erros para o ensino e aprendizagem de Matemática.

> **Pesquisador**: Você acredita que os erros podem contribuir de alguma forma para o ensino e aprendizagem de Matemática?
> **P1**: Sim! Acredito que sim. Porque pelo erro o aluno tem como corrigir a sua linha de raciocínio, suas ações, então acredito que sim!
> **P5**: Boa pergunta! Eu sei que gosto muito de estar à frente do tempo, sempre evitar o desperdício do tempo.
> **P2**: Com certeza, quanto mais a gente for avaliando o que a gente está errando, mais a gente sabe o que deve prestar atenção e focar. Por exemplo, se é em problemas de Matemática Básica, eu sei a fórmula, mas errei a conta de besteira. Ou então eu não sei a fórmula, eu preciso trabalhar mais a questão de interpretar, essas coisas. Então acho que aprender com os erros é muito importante; nessas questões, facilita muito na aprendizagem da Matemática em si.

A resposta de P1 indica que ele percebe o aprendizado que pode ser gerado quando o professor estuda os erros e busca novas formas de (res)significá-los para os alunos. A fala de P2 demonstra que possui perspectiva semelhante à de P1. Inicialmente, P5 reflete sobre a possibilidade do uso dos erros, mas parece não compreender toda a dimensão da pergunta, por isso decidimos questioná-los novamente, reformulando a pergunta para melhor compreendermos suas crenças sobre essa perspectiva. Suas respostas seguem no trecho abaixo.

> **P5**: É porque, quando a gente vai ensinar, a gente quer que seja exato, seja perfeito, que aquele conhecimento seja transmitido, que as crianças entendam. E, com certeza, uma atividade que todos buscamos é não ter o erro.
> **Pesquisador**: Sim!
> **P5**: Talvez, para isso ser feito, acho que seria necessário ter testes, experimentos, né? Como uma busca científica. Busca uma pesquisa que faz tipo testes, um método de testagem para verificar se é correto, acho que seria um dos bons caminhos para verificar o erro. E sim, como temos visto nos meios sociais, o erro a gente pode ter como aprendizagem. Conhecer o erro para saber não o repetir.
> **P2**: Ah, então, acho que isso é muito importante. Principalmente a autocorreção dos alunos. Por exemplo, fiz uma prova, depois vou responder a prova com todos os alunos para eles aprenderem como faz, onde eles erram. Acho que é muito importante o professor trabalhar os erros em sala de aula, principalmente em Matemática, eu acho.

A princípio, P5 indica a preocupação de desenvolver o conteúdo de forma que tudo ocorra corretamente; porém, nossa crença é que, em um ambiente de aprendizagem, podem surgir erros e incoerências dos alunos em um processo natural de aprendizagem. Nossas preocupações ficam no âmbito do que o professor pode fazer frente ao erro para ajudar os alunos a superá-los. Na sequência, P5 faz menções a pesquisas nessa área e reconhece que o erro pode ter um ponto positivo quando o conhecemos e buscamos não o praticar mais. O participante P2 percebe a importância da autocorreção em momentos de provas e o trabalho com os erros na sala. Entendemos que, quando o professor corrige as atividades no quadro, é importante que os estudantes sejam convidados a refletir sobre o que erraram, pois, ao compreendê-los, talvez possam não os cometer novamente. Apesar dos participantes concordarem com essa perspectiva, eles ainda não parecem ter noção de como isso poderia ser feito.

Em suma, constatamos com as entrevistas iniciais que alguns dos participantes possuem conhecimento sobre o conteúdo de Combinatória, porém conhecimentos pedagógicos e de ensino a respeito desse conteúdo ainda não foram trabalhados com eles, o que provoca insegurança em ensinar este conteúdo, principalmente por terem dificuldades para reconhecer as diferentes situações combinatórias. Embora ter dificuldade com o conteúdo possa ser um obstáculo para o ensino da Matemática, concordamos com Hill *et al.* (2004 *apud* Ball; Thames; Phelps, 2008) que o conhecimento matemático geral não é totalmente responsável pelas habilidades para ensinar; ou seja, o estudo de metodologias também se faz importante.

Sobre o exposto, consideramos necessário que, para além das disciplinas de metodologias, haja espaços onde, além do estudo e compreensão do conteúdo, as práticas de ensino sejam experienciadas.

Quanto às crenças sobre o uso dos erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, verificamos que os entrevistados acreditam ser esta uma boa estratégia para a aprendizagem, apesar de não saberem ao certo como essa estratégia poderia ser usada. Quando mencionamos erros aqui, queremos nos referir ao estudo das respostas dos alunos, não necessariamente levar em conta somente os erros.

Concordamos com Ball, Thames e Phelps (2008) a respeito da amálgama que combina conhecimento do conteúdo, conhecimento dos alunos e conhecimento da pedagogia. Assim, nosso objetivo com o processo formativo foi analisar conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino apresentados por licenciandos de Matemática em um processo formativo baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios.

4.3 ENCONTROS

Neste tópico apresentamos as análises sobre os encontros formativos. Como descrito na metodologia, realizamos 4 encontros síncronos e um encontro assíncrono, nos quais trabalhamos os conhecimentos de conteúdo, de aluno e para o ensino, de acordo com a teoria de Ball, Thames e Phelps (2008), autores que utilizamos para analisar os dados do processo formativo.

4.3.1 Encontro 1

No primeiro encontro, trabalhamos o conhecimento do conteúdo, buscando trazer elementos introdutórios sobre a Combinatória, como definição e apresentação de quatro tipos de problemas combinatórios: Produto de Medidas, Arranjo, Permutação e Combinação. Selecionamos quatro problemas, que nomeamos de problemas introdutórios, nos quais enfatizamos o tripé: situação, invariante e representação simbólica (Vergnaud, 1986) como forma de compreender os problemas.

A dinâmica utilizada no encontro foi a seguinte: para cada problema combinatório era fornecido um tempo para os participantes elaborarem suas soluções e, em seguida, eles eram convidados a dizer como fizeram e pensaram a resolução. A adesão ao convite era voluntária, pois não queríamos constrangê-los, mas, como indicado nas respostas do questionário inicial, sabíamos que alguns participantes já tinham conhecimentos sobre o conteúdo e também gostaríamos de observar o engajamento deles para modelar as diferentes situações-problemas.

Para melhor compreensão da análise, apresentamos na sequência as situações-problemas trabalhadas (Quadro 10). Em seguida, apresentamos trechos das discussões do encontro.

Quadro 10 – Enunciados das questões do primeiro encontro

Situação-Problema	**Enunciado**	**Classificação**
1	Uma fábrica de móveis tem dez modelos para mesas e quatro modelos para cadeiras. Quantos pares de modelos de mesa e cadeira a fábrica tem disponíveis? (Bonjorno, 2020, p. 87)	Produto de Medidas
2	Oito cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os 3 primeiros lugares? (Bonjorno, 2020, p. 87)	Arranjo simples
3	Quantas comissões de três participantes podem ser formadas com cinco pessoas? (Bonjorno, 2020, p. 96)	Combinação simples
4	Considere a palavra LIVRO. Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra? (problema adaptado) (Bonjorno, 2020, p. 95)	Permutação simples
5	Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto A={a, b, c}. (Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013)	Combinação simples, porém, com estratégia pré-determinada (listagem)
6	Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras? (Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013)	Combinação simples com dois termos
7	Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, sabendo-se que, cada placa é uma sequência	Produto de Medidas que pode ser

	de 3 letras e 4 dígitos? (Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013)	resolvido utilizando dois arranjos com repetição

Fonte: Elaboração própria.

Após apresentarmos a situação-problema 1, pedimos que os participantes comentassem suas respostas a respeito deste problema. Um dos participantes observou que poderiam multiplicar a quantidade de mesas e cadeiras e dividir por 2, enquanto os outros comentaram usando o chat que apenas multiplicaram as possibilidades. O participante P4 usou a fórmula da combinação para chegar à sua resposta, veja o trecho a seguir.

"**P4**: Eu combinei os elementos, combinei dez em quatro; **Pesquisador**: Deu quanto? **P4**: 210."

A resposta apresentada por P4 indica que ele usou a fórmula da combinação, o que é um equívoco, pois a situação trata de Produto de Medidas. Na sequência das respostas e comentários dos participantes, apresentamos a nossa solução e comentamos as características do problema, mostrando algumas estratégias para interpretar a situação.

Questionamos os participantes sobre como eles costumam pensar e gerar suas estratégias para resolver os problemas combinatórios; gostaríamos de saber se eles usavam algum tipo de representação para auxiliar seus pensamentos ou se usavam a fórmula de maneira direta. Obtivemos a seguinte resposta de P4: "Eu tento usar os dois, mas normalmente uso as fórmulas".

Nossa preocupação era se o uso de fórmulas poderia ser um teorema-em-ação (Moreira, 2002; Lima, 2015), ou seja, para todo problema de Combinatória existe uma fórmula para calculá-lo. Essa não é uma afirmação matematicamente verdadeira para todos os problemas combinatórios, mas pode vir a ter validade dentre as múltiplas situações combinatórias discutidas no ensino básico.

Os comentários sobre o segundo problema foram os seguintes:

> **P2**: Eu fiz considerando as possibilidades, para o primeiro lugar haveriam 8 possibilidades, para o segundo já haveriam 7 e para o terceiro lugar haveriam 6. Aí multiplicando tudo 336.
> **Pesquisador**: Alguém fez diferente?
> **P4**: Não, eu fiz igual ao P2.

A fala de P2 indica o uso do princípio multiplicativo. Essa estratégia também foi utilizada por outros participantes que se manifestaram pelo chat, o que nos pareceu indicar que este problema foi resolvido sem dificuldades.

Mais do que resolver o problema da maneira correta, gostaríamos que os participantes observassem as diferenças entre as situações combinatórias. Antes que o pesquisador apresentasse a resposta dessa questão, ele decidiu questionar os estudantes se entre os dois primeiros problemas existia similaridade ou não, haja visto que, a essa altura, os participantes já haviam feito suas observações no chat sobre os dois primeiros problemas. Assim, obtivemos as seguintes respostas:

> **P*[4]**: Eu acho que ele é diferente porque a ordem importa, naquele poderia ser aleatório, mas aí a gente tem as três posições.
> **P1**: O que eu acho que diferencia é que ali no primeiro problema era bem claro, mesas e cadeiras. Eram coisas diferentes, e nesse não, eram cavalos só que era para diferenciar entre eles, e no primeiro não, eram permutações de elementos diferentes, aqui foram permutações de um elemento de um mesmo tipo.

P* observou que no segundo problema a ordem importa, ou seja, se C1, C2 e C3 são cavalos, qualquer que seja a ordem de escolha para as posições primeiro, segundo e terceiro lugar teremos um agrupamento diferente, o que torna sua maneira de contar mais específica. Porém, a maior evidência das diferenças entre as duas primeiras situações é que, na primeira, há a existência de dois conjuntos nos quais os agrupamentos são formados a partir desses dois conjuntos e não apenas um.

A fala de P1 remete a essa diferenciação, embora não seja tão precisa em sua colocação; ele percebe a existência de dois tipos diferentes de conjuntos, demandando assim um raciocínio combinatório diferente da segunda situação. P2 usou a fórmula de combinação para solucionar o segundo problema, por isso o questionamos sobre o que estava pensando quando resolveu o problema. A resposta foi a seguinte:

> **P2**: [...] na minha cabeça, eu tratei os cavalos como se fosse superficialidade, sabe? Como se não importasse a ordem deles porque são cavalos. Sei lá, na minha cabeça não fazia sentido a ordem importar, mas agora eu entendi melhor.

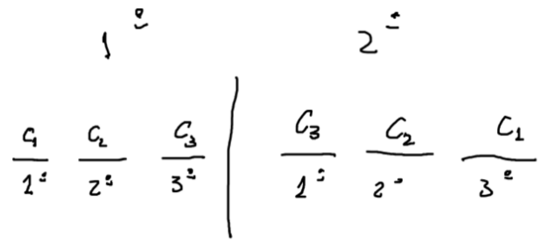
Foi perguntado ao participante se, dentro da perspectiva em que ele estava calculando, um determinado agrupamento era distinto do outro ou não. A princípio,

---

[4] O Participante P* participou apenas dos dois primeiros encontros e não fez a atividade final, por isso não o trazemos em nossa análise, mas consideramos a fala nesse encontro interessante.

queríamos verificar se ele usava a fórmula da combinação com a perspectiva correta, ou seja, cada agrupamento é contado apenas uma vez, pois a ordem não importa. A figura a seguir apresenta uma representação simbólica que utilizamos para fazer essa indagação.

Figura 24 – Representação simbólica usada pelo pesquisador na discussão da questão 2



Fonte: Elaboração própria.

Em primeira instância, o participante enxergou o objeto de contagem sob uma ótica, mas quando lhe foi apresentada a maneira correta de se pensar a solução desse problema, ele percebeu que via os cavalos de maneira errada, como exposto no trecho abaixo.

> **P2**: [...] quando eu estava fazendo, que escolhi fazer por combinação, pensei: não vou olhar cada cavalo. Eu pensei como se fosse um conjunto só. É um conjunto, sabe? Mas é como se fosse uma coisa só. Como se os cavalos não fossem diferentes. Foi isso que pensei na hora que estava fazendo, na primeira vez que olhei o enunciado. Só que dá para ver que são [cavalos] diferentes. Tanto é que você pode colocar C4, C5 até o C8 na posição, não ser só o C1, C2 e C3. Então isso evidencia bastante porque a ordem importa nesse caso, porque são cavalos diferentes. Quando li o enunciado, tratei como se fossem cavalos iguais.

A resposta de P2 indicou que ele se apropriou de maneira adequada do tipo de contagem que a fórmula da Combinação possui, mas a utiliza em situações erradas, ou seja, de Arranjo. O participante percebeu que sua maneira de pensar estava equivocada; porém, observamos que, de maneira sutil, existe um processo de abstração sobre a qualidade dos objetos básicos da contagem que quem estuda Combinatória precisa adquirir. Este participante parece ainda não tê-lo adquirido. Para melhor nos expressarmos em nossa análise, nomeamos por objetos básicos da contagem todo elemento que pode ser usado para formar um agrupamento; neste caso, são os cavalos.

Por meio da narrativa de P2, percebemos que a compreensão sobre os objetos que estão à disposição para contagem, ou seja, nesse contexto os cavalos, afeta de alguma forma a escolha da fórmula a ser usada e não a situação combinatória em si. Quando no enunciado é pedido “[...] quantas são as possibilidades de chegada para os **3 primeiros lugares**?” (Bonjorno, 2020, p. 87, **grifo nosso**), uma ordem de escolha é estabelecida, caracterizando um tipo específico de invariante operatório (Vergnaud, 1986; Moreira, 2002). Mas, em primeira instância, isso não foi percebido pelo participante.

Quando apresentamos um exemplo de agrupamento possível para esta situação combinatória, percebemos que ficou mais claro para os participantes o raciocínio que apresentamos. Tendo em vista os equívocos apresentados pelos participantes, buscamos evidenciar em cada solução o tipo de invariante que estava sendo exigido e a estratégia que poderíamos usar para contar, buscando assim construir um raciocínio combinatório e não apenas o uso de fórmulas.

A terceira questão envolve uma situação de Combinação Simples e nenhum dos participantes apresentou dificuldade para resolvê-la, assim como a quarta questão, que é um problema de Permutação Simples. Após os participantes terem feito suas resoluções na quarta questão, decidimos perguntar se este problema, comparado aos anteriores, era diferente em algum aspecto. Obtivemos as seguintes respostas:

> **Pesquisador**: Esse problema é diferente dos que a gente já resolveu até então?
> **P4**: Não, porque usa o princípio multiplicativo.
> **P1**: Eu acho que ele é parecido com o dos cavalos, porque ele dá a palavra [LIVRO], né? Então assim, usando o princípio multiplicativo dá para resolver da mesma forma que resolve o segundo problema dos cavalos. Aí, como ele quer saber a quantidade de anagramas, e as letras não se repetem, então é só aplicar. Para a primeira, 5 possibilidades; para a segunda letra do anagrama, 4; para a terceira, 3; e assim sucessivamente.

Pelas respostas de P4 e P1 percebemos que o princípio multiplicativo é fortemente usado em situações de Arranjos ou Permutações, mas em problemas de Combinação usar a fórmula nos pareceu a estratégia mais comum. Além disso, a fala de P1 demonstrou bastante domínio sobre esse tipo de situação ao observar que não há repetições de letras, assim o princípio multiplicativo pode ser aplicado de forma direta.

Após ouvir os participantes, o pesquisador mostrou as diferenças entre as situações apresentadas a partir das suas falas, evidenciando que o princípio multiplicativo é apenas uma estratégia de contagem e que a diferença entre os problemas se dá por outros aspectos, ou seja, o tipo de invariante.

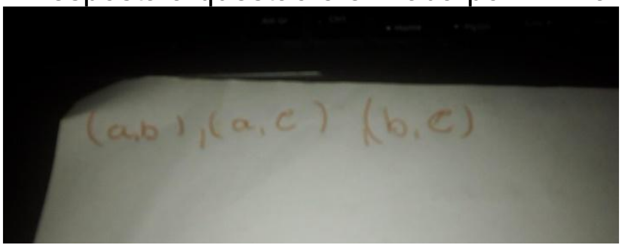
Na quinta questão, todos os participantes indicaram corretamente a quantidade de subconjuntos possíveis. Chamamos atenção para o comando da questão, pois era solicitada uma listagem, mas muitos apresentaram apenas o número de subconjuntos no chat e não a listagem como solicitada. Abaixo seguem algumas respostas dos participantes nas próximas três figuras.

Figura 25 – Resposta à questão 5 enviada pelo chat

a,b ; a,c ; c,b

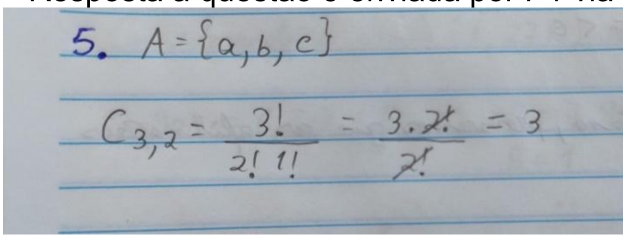
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 26 – Resposta à questão 5 enviada por P4 via WhatsApp



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27 – Resposta à questão 5 enviada por P1 via WhatsApp



Fonte: Dados da pesquisa.

As duas primeiras figuras dessa última sequência representam respostas fora do padrão, uma vez que foi solicitada listagem de subconjuntos; essas representações devem ser acompanhadas de chaves, de acordo com o formalismo matemático. Além disso, o uso de parênteses pode estar representando um par ordenado. Na Figura 27, o participante usou a fórmula da Combinação corretamente para calcular as possibilidades, mas não fez a listagem como ordena o comando da questão.

Antes do pesquisador discutir a resolução da questão com todos, P2 fez a seguinte observação: "**P2**: Eu acho que você poderia ter outra resposta se considerasse que {b, c} é diferente de {c, b}, sabe? Poderia ser uma outra resposta que o aluno poderia ter. Não ver essa diferenciação entre {b, c} e {c, b}, ou {a, c} com {c, a}."

Este era nosso primeiro encontro e, portanto, ainda não havíamos apresentado os protocolos de resposta de alunos, mas este comentário mostra certa visão do que se espera dos alunos. Observa-se que P2 tem noção dos agrupamentos corretos e, além disso, consegue prever possíveis erros atrelados ao padrão de resposta exigido. Assim, percebemos a noção do conhecimento de conteúdo e de alunos sendo externada, suscitada por essa problemática, tal como indicada por Ball, Thames e Phelps (2008). Acreditamos que o ambiente de debate das soluções corretas e erradas apresentadas pelos participantes pode ter provocado esse *insight* em P2.

Na sexta questão, apenas P4 comentou sua solução oralmente, explicando seu raciocínio baseado no princípio multiplicativo.

> **P4**: Eu pensei da seguinte maneira: a gente teria 5 letras e a placa tem três espaços para letra, então a gente multiplica 5 x 5 x 5. A gente tem 6 dígitos e quatro possibilidades para colocar, aí multiplicaria 6 x 6 x 6 x 6. Aí multiplicando todos os conjuntos de números com os conjuntos de letras, ou seja, 5^3 x 6^4 daria o resultado que eu coloquei aqui [...].

P4 usou um esquema bastante assertivo para esse problema, onde cada objeto básico (letras e dígitos) foi escolhido sequencialmente avaliando todas as possibilidades que cada caractere da placa poderia ter, demonstrando assim um bom domínio do princípio multiplicativo.

Decidimos provocar P4 e questionar por que era necessário multiplicar e não somar o "[...] **conjunto de números com os conjuntos de letras** [...]" a que ele [P4] havia sinalizado. A isso ele respondeu:

> **P4**: É porque, de certa forma, é uma sequência número [símbolos], aí eu acho que não combina. Por que não é alinhado uma sequência que a gente tem 7 casinhas e aí a gente vai multiplicando as possibilidades? Se somar, é como se fosse duas coisas distintas. Mas a gente tem um conjunto que é letras e números, então não convém somar e sim sair multiplicando.

A fala de P4 revela que cada possibilidade foi calculada sequencialmente por esquema de "tracinhos" e, por isso, faz sentido que cada possibilidade seja multiplicada na sequência. Esse esquema é adequado nesse tipo de situação, porém exige uma justificativa acompanhada de representação para que os alunos consigam esquematizar um raciocínio combinatório que conte de forma padronizada todos os tipos de agrupamentos, sem que façam a "distinção" mencionada por P4 quando diz

“[...] Se somar, é como se fossem duas coisas distintas [...]”, de acordo com o protocolo de pesquisa, ainda em 2024.

Este problema foi resolvido pela maioria dos participantes da mesma forma como P4 apresentou, e nos pareceu que a maioria deles não teve dificuldade quando visualizamos suas respostas no chat. No entanto, esse problema apresenta certa complexidade, pois envolve dois conjuntos: o das letras e o dos dígitos. Portanto, apresenta característica de Produto de Medidas, mas o cálculo das possibilidades das letras é feito com um Arranjo com repetição, assim como o dos dígitos, totalizando, assim, $5^3 \times 6^4$ agrupamentos.

Em situações como esta da sexta questão, em que o professor é questionado, ter domínio do princípio multiplicativo e saber construir uma representação que possa justificar uma contagem, e, para além disso, também explorar qual aspecto do agrupamento deve ou não ser contado, são conhecimentos de ensino que só poderão ser desenvolvidos mediante o conhecimento do conteúdo e das formas de ensino. Por isso, em alguns momentos levamos os participantes a refletirem sobre esses aspectos que, talvez para outros profissionais da área de exatas, não fossem relevantes, como Ball, Thames e Phelps (2008) mencionam em seus escritos, pois se referem ao conhecimento especializado do professor.

Em suma, este encontro buscou mostrar os diferentes tipos de problemas combinatórios, explorando representações e identificando situações e invariantes segundo Vergnaud (1986), sem deixar de apresentar o princípio multiplicativo como uma forma de explorar outros aspectos do pensamento combinatório. Diante dessas estratégias, foi possível identificar nas reflexões dos participantes P1, P2 e P4 amostras do desenvolvimento do pensamento combinatório. P1 demonstra conhecimento do conteúdo quando reconhece uma distinção entre os problemas 1 e 2 e identifica que no primeiro problema existem dois conjuntos distintos e que no segundo há apenas um, do qual seus elementos são selecionados para formar os agrupamentos. Muito embora essa observação seja interessante, ela não é suficiente para distinguir totalmente as duas situações, mas demonstra que o participante adquiriu uma percepção sobre o invariante do primeiro problema. Devemos levar em consideração que, até aquele momento, não havíamos apresentado o invariante do segundo problema e procuramos chamar atenção para isso a partir deste comentário.

P2 demonstrou conhecimento de aluno ao mencionar possíveis erros de alunos no problema 5, quando sinaliza que os conjuntos {b, c} e {c, b} poderiam ser contados como diferentes. Além disso, essa fala também demonstra conhecimento do conteúdo, pois o participante reconhece o invariante de ordem desse problema e como isso poderia se tornar um entrave no aprendizado dos estudantes.

Fizemos provocações com o intuito de despertar um pensamento crítico sobre o conteúdo e suas formas de ensino. Observamos nas falas de P1, P2 e P4 diversas reflexões sobre as principais diferenças entre as situações combinatórias e as estratégias de soluções, e foi possível notar que essa estratégia tem levado os participantes a revelarem seus conhecimentos e, com isso, construir novas ideias e aprimorar seus conhecimentos.

4.3.2 Encontro 2

Este encontro teve dois momentos: um primeiro, no qual foram resolvidas três questões de Combinatória, e um segundo, onde foram discutidos protocolos de alunos. O objetivo da pesquisa para esse encontro é analisar o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de Combinatória, de ensino e de alunos a partir do estudo dos erros e acertos em problemas combinatórios. Precisamente, na segunda parte desse encontro trabalhamos com os protocolos de alunos, buscando que os participantes observassem as respostas errôneas e refletissem sobre a potencialidade do trabalho com erros, não o concebendo apenas como algo a ser eliminado, mas um aliado no processo de ensino.

Ao final do primeiro encontro, pedimos que, durante a semana, os participantes lessem um artigo de Lima (2014). Este artigo discute erros e estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios, por isso o indicamos para que tivessem uma noção das estratégias dos alunos.

No Quadro 11 seguem as questões discutidas nesse encontro. Lembramos que as três primeiras questões foram resolvidas na primeira parte do encontro, e as três últimas já haviam sido resolvidas no encontro anterior.

Quadro 11 – Enunciados das questões discutidas no segundo encontro

Núm. das questões	Enunciado	Protocolo da questão	Classificação
1	Liste todos os números de dois algarismos distintos que	Protocolo 2	Arranjo simples com estratégia pré-determinada

	podemos formar com os dígitos 1, 3 e 5. (Lima, 2015, p. 139)		
2	Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo? (Lima, 2015, p. 129)	Protocolos 6,7,8.	Problema com característica de Arranjo Simples, porém com várias restrições. Utilização do Princípio Multiplicativo e Aditivo levando em conta restrições
3	Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C? (Lima, 2015, p. 147)	Protocolo 9	Produto de Medidas, exige pensamento invertido da situação
4	Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto (Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013) $A = \{a, b, c\}$.	Protocolo 1	Combinação simples, porém, com estratégia pré-determinada (listagem)
5	Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras? (Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013)	Protocolo 3	Combinação simples com dois termos
6	Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, sabendo-se que, cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos? (Santos-Wagner; Bortoloti; Ferreira, 2013)	Protocolo 4 e 5	Produto de medidas que pode ser resolvido utilizando dois arranjos com repetição

Fonte: Elaboração própria.

Como mencionado na metodologia, antes do pesquisador apresentar uma solução para cada questão, foi dado um tempo para que os participantes fizessem suas respostas e depois voluntariamente apresentassem as estratégias utilizadas.

4.3.2.1 Primeiro momento de resolução de problemas

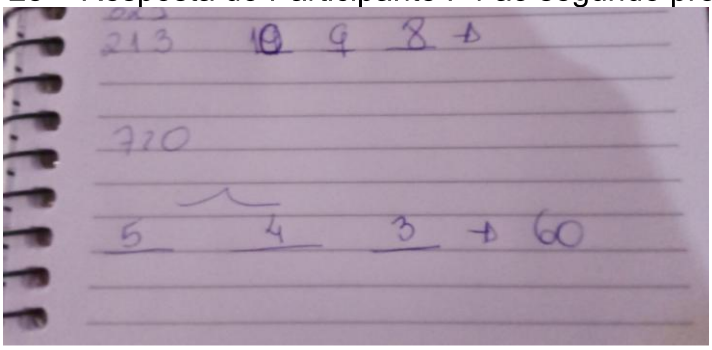
O primeiro problema (Quadro 9) foi resolvido com facilidade pelos participantes. Por ser um problema com poucos objetos básicos de contagem, decidimos perguntar se esse problema era interessante e qual seria a sua utilidade para o ensino de Combinatória. Obtivemos as seguintes respostas.

> **P6**: Eu a utilizaria para iniciar o conteúdo de permutação, eu primeiro passaria essa questão, os alunos responderiam, e aí eu iria associar a questão ao conteúdo.
> **P4**: Eu concordo com P6 e acho interessante essa abordagem aí para fazer listagem de espaço amostral, em que os alunos vão fazer as possibilidades de combinar os dois algarismos para fazer a listagem.

As respostas de P6 e P4 demonstram conhecimento de ensino e conhecimento de aluno. Quando P6 escolhe essa questão para iniciar os estudos de permutação, ele está pensando em uma abordagem que demanda sequência de ensino; por outro lado, escolher exatamente essa questão, achando que os estudantes terão sucesso com ela, dá indício de conhecimento de aluno, segundo Ball, Thames e Phelps (2008).

Para a segunda questão (Quadro 9), P4 apresentou a seguinte resposta:

Figura 28 – Resposta do Participante P4 ao segundo problema



Fonte: Dados da pesquisa.

Esta solução foi apresentada para a turma e questionado se alguém fez de modo diferente. P2 alegou que fez de modo parecido, justificando que a escolha dos algarismos da centena teria 9 possibilidades porque o zero não pode entrar nessa posição. O pesquisador questionou P4 se ele havia considerado o zero para aquela posição e a resposta foi a seguinte:

> **P4**: Eu não pensei em excluir o zero porque eu pensei literalmente em fazer um dígito. Como a placa de um carro que tem três dígitos, independente se é zero, se é um ou dois. Só fazer o dígito. Por isso que eu considerei o zero, porque eu não estava importando se valeria dezena, centena ou o que se formaria no final.

A fala de P4 indica que ele teve uma interpretação equivocada sobre a real pergunta do problema. O pesquisador aproveitou a fala para lembrar que este pensamento também pode ser uma interpretação dos alunos quando estão internalizando os conceitos de Combinatória e buscou mostrar o que está sendo pedido no enunciado, demonstrando as características sobre os tipos de agrupamentos que podemos ter nesta situação combinatória. O pesquisador demonstrou que a contagem realizada pelo participante P4 (Figura 28) seria coerente em outras situações, como por exemplo, se o comando estivesse pedindo senhas. Com isso, P4 percebeu onde estava seu equívoco e porque não faria sentido naquele caso considerar o zero. No enxerto a seguir apresenta-se sua colocação: "**P4**: [...] eu fiquei pensando, depois que eu apresentei a resposta. Mas se eu colocar o zero, por exemplo, números que começam com zero já perdem a casa das centenas, então fica estranho".

Além disso, decidimos levar os participantes a refletir um pouco mais sobre o próprio enunciado da questão. Apontamos que o enunciado não explicita os algarismos que o estudante pode usar, ou seja, ele precisa ter em mente que existem 10 algarismos para resolver essa questão corretamente, assim perguntamos aos participantes se esse fator pode de alguma forma dificultar para o aluno compreender a questão. A isto, P4 respondeu da seguinte maneira: "**P4**: Eu acho que talvez dificulte um pouquinho porque talvez de fato ele considere de 1 a 9. Mas é interessante deixar aberto assim para ele formar um pensamento mais crítico e entender que o 0 entra na listagem".

Acreditamos que o professor precisa ter pensamento crítico sobre a clareza dos enunciados dos exercícios escolhidos por ele para suscitar aprendizagem dos estudantes. Ball, Thames e Phelps (2008) colocam essa questão como conhecimento comum do conteúdo, pois outros grupos que trabalham matemática certamente conseguem identificar erros em enunciados ou definições imprecisas. A fala de P4 demonstra criticidade ao ponderar sobre as duas possibilidades, julgando mais interessante a proposta apresentada pela questão. Como esta pergunta foi feita de forma genérica, ou seja, não pensamos em grupo específico de alunos, com dificuldade ou que estejam resolvendo problemas combinatórios ainda pela primeira vez, por exemplo, julgamos que a resposta de P4 representa um conhecimento de ensino na medida em que reconhece a necessidade de fazer o aluno pensar, despertar processos cognitivos.

A segunda parte da questão exigia uma contagem que, usando o princípio multiplicativo, por exemplo, teria duas restrições a serem consideradas: o zero não pode estar na casa das centenas e os algarismos da unidade devem ser pares. Visualizando apenas a resposta de P4, não ficou muito aparente qual foi a estratégia usada. Por conta disso, decidimos perguntar a ele e aos demais qual foi a estratégia usada, assim obtivemos as seguintes respostas:

> **P4**: Esse eu fiquei também na dúvida porque eu considerei o 0 como par. Aí foi 0, 2, 4, 6 e 8, aí deu 5 números na primeira possibilidade. 4 para a segunda casinha e 3 números para a última casa. Aí eu fiz a multiplicação e deu 60.
> **P2**: Eu fiz diferente, só que eu também tive várias dúvidas nessa parte. A primeira dúvida é: zero é par ou não é? A outra dúvida é: se for somente números pares, quantos são ao todo? Aí eu fiquei pensando. Tem que ser diferentes ou iguais? Por exemplo, tem que ser três números pares iguais ou diferentes. Aí eu fiquei nessa dúvida quando eu estava fazendo essa.

Os participantes P4 e P2 usaram apenas algarismos pares para formar os números. Quando identificamos isso, questionamos qual o critério para um número ser par e eles responderam de forma adequada “colocar a resposta”. Então, passamos a questionar se o número 352 não poderia ser uma possibilidade e se esse tipo de número entraria na contagem que eles estavam fazendo. Diante dessa informação, P4 disse não ter analisado quais números entram em sua contagem, apenas fez a multiplicação (Figura 28).

Percebemos que este participante não tinha em mente possibilidades de números com três algarismos pares, apenas tinha a intenção de formar uma sequência de números com três algarismos em que todos os algarismos fossem pares. Este pensamento pode estar associado à má interpretação do enunciado quando diz “E se for somente **números pares** [...]” (Lima, 2015, p. 129, **grifo nosso**). A palavra número pode ter sido confundida com algarismo.

Quando estendemos essa discussão com os demais participantes, perguntando se eles não haviam pensado em usar todos os algarismos, P3 alegou ter usado os números pares somente na casa das unidades, mas quando pedimos que apresentasse sua solução, o estudante alegou não as ter escrito porque estava sem folhas, mas havia pensado em escolher qualquer algarismo na casa das centenas, dezenas e na unidade ser apenas par.

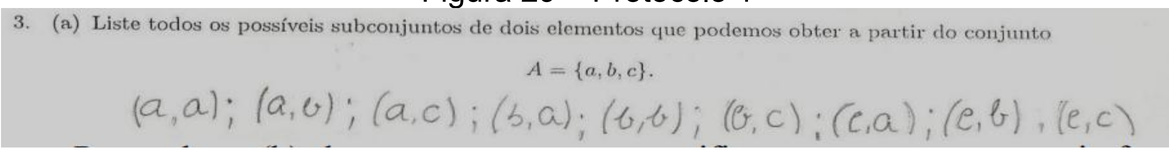
Quando finalmente o pesquisador começou sua exposição sobre a solução do segundo problema, P4 teve um *insight* de como resolver o problema, alegando que poderíamos dividir por 2, pois metade dos números são pares e a outra metade ímpares. O pesquisador alegou que, neste caso específico, não seria assim e demonstrou porque isso ocorreu. A exposição acabou sendo um pouco longa para detalhar o máximo possível o raciocínio empregado nessa questão e abarcar todas as dúvidas apresentadas pelos participantes.

A terceira questão (Quadro 9) foi resolvida por todos os participantes com bastante facilidade, apesar de ser um Produto de Medidas, exige um pensamento invertido para realização da solução, mas eles não tiveram dificuldade.

4.3.2.2 Segundo momento: estudo de protocolos de alunos

O segundo momento desse encontro foi marcado pelo estudo dos protocolos de alunos a partir de seis questões estudadas anteriormente. O primeiro problema a ser revisado foi o seguinte "**Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto $A = \{a, b, c\}$"** (Quadro 10).

O protocolo com a resposta de aluno discutido com o grupo foi:

Figura 29 – Protocolo 1

3. (a) Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto

$A = \{a, b, c\}$.

(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c); (c,a); (c,b), (c,c)

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013).

Para iniciar a discussão, apresentamos novamente a questão estudada no encontro anterior e perguntamos se os participantes se lembravam. Com a confirmação positiva, apresentamos o protocolo da Figura 29 e pedimos que os participantes tentassem conjecturar o que o protocolo estava informando, ou seja, o que o aluno poderia estar imaginando ao registrar a resposta e o que eles compreendiam sobre a resposta. O enxerto abaixo traz a conjectura dos participantes:

> **P2**: Eu acho que ele foi juntando todas as letras. Ele começou com (a, a), porque o "a" já estava lá, pegou o "a" e colocou de novo. Aí colocou (a, b) e (a, c). Depois ele foi para a letra "b", aí ele fez com todos os três que estão lá, como se estivessem fora, sabe? A letra "b" é como se estivesse fora desse conjunto, aí ele fez (b, a), (b, b) e (b, c). Depois ele fez a mesma coisa com o "c". Ele pegou o "c" que estaria fora e depois juntou com o "c" que estaria dentro, (c, a), (c, b) e (c, c). Acho que foi isso que ele pensou.

> **Pesquisador**: Mas a resposta dele é coerente com o que se pedia no enunciado?
> **P4**: A resposta é coerente, mas está errada porque ele considerou o (a, a), o (b, b) e o (c, c).
> **Pesquisador**: Só por isso ou tem mais coisas?
> **P3**: O (a, b) e o (b, a) é o mesmo subconjunto também.

Ball, Thames e Phelps (2008, 401, **tradução nossa**[5]) propõem que o conhecimento do conteúdo e dos alunos pode estar explícito quando os professores são capazes de "[...] ouvir e interpretar o pensamento emergente e incompleto dos alunos, expresso na forma como eles usam a linguagem". Observamos na resposta de P2 que ele identificou um padrão de resposta exposto pelo aluno, muito embora não tenha mencionado o que poderia estar errado ou correto diante do apresentado pelo aluno. Por isso, o pesquisador perguntou se a resposta era coerente com o que se pedia no enunciado. Com a identificação de certos termos da listagem que não poderiam estar, embora no todo, as respostas de P4 e P3 indicam que eles consideram a resposta coerente. Identificar um erro é um conhecimento comum do conteúdo; saber quais são os erros mais prováveis é um conhecimento de conteúdo e dos alunos e pode representar um primeiro passo para saber como agir diante deles.

Ao analisar as respostas equivocadas, o professor pode se perguntar até que ponto o registro do aluno apresenta coerência com a lógica e a escrita matemática, ou quais padrões lógicos ou de representação estão sendo apresentados pelos estudantes. Esse questionamento pode contribuir para que o professor faça observações mais intencionais sobre certos detalhes de um conteúdo e proponha maneiras de desestabilizar os erros ou, em uma nova abordagem do conteúdo, usar outras explicações ou ainda exemplos para provocar insights e reflexões sobre aspectos da natureza matemática na qual se quer construir conhecimentos e aprendizados.

Na sequência, os participantes foram indagados sobre como poderiam ajudar o aluno do protocolo 1. As respostas foram:

> **P4**: Seria interessante mostrar a ele que está errado essa repetição de dois objetos, porque é como se estivesse pegando uma coisa duas vezes.
> **Pesquisador**: Lembrar da definição de conjuntos, né?
> **P4**: Isso, porque na verdade ele só está repetindo, não está pegando outro elemento, ele está fazendo um conjunto só com um termo.
> **P3**: Eu acho que o que falta para ele é saber o que é um subconjunto mesmo, talvez ele não soubesse direito. Eu explicaria o que é um subconjunto.

[5] Do original: "*Teachers must also be able to hear and interpret students' emerging and incomplete thinking as expressed in the ways that pupils use language.* (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 401).

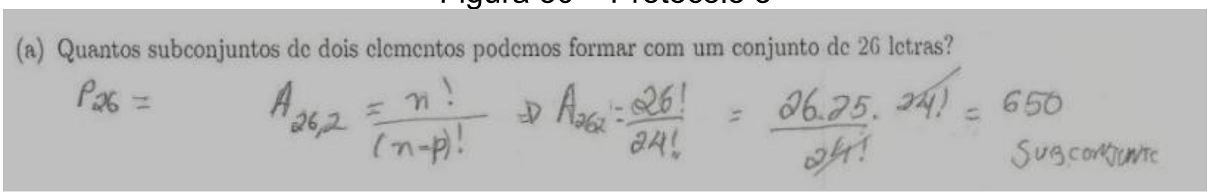
A fala de P4 demonstra preocupação em evidenciar para o aluno que existe o invariante de ordem nesta situação: os conjuntos {a, b} e {b, a} são iguais por possuírem os mesmos elementos, por isso não faz sentido exibi-los duas vezes. Por outro lado, P3 observa que pode ser que o aluno não soubesse a definição de subconjunto, então trazer uma explicação sobre isso poderia levá-lo a entender o que se pede na questão.

O intuito de nossa provocação era que os participantes pudessem avaliar matematicamente a situação para entender onde o aluno poderia estar errando. Como expomos no capítulo metodológico, este protocolo apresenta padrão de pares ordenados e não de subconjunto, como era esperado pelo comando da questão. Portanto, quando os licenciandos destacam a necessidade de se revisitar definições de subconjunto, eles estão evidenciando a necessidade de se esclarecer más interpretações da natureza matemática que podem influenciar nos equívocos das respostas.

Cury (2012) considera que o professor iniciante precisa experimentar novas estratégias de ensino, pois caso contrário irá repetir aquilo que seus professores do ensino básico lhe ensinaram. Ou seja, questionar a partir do erro de que forma os participantes poderiam ajudar o aluno é uma forma de reflexão sobre novas formas de ensino.

O segundo problema discutido neste momento foi: “**Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras?**” (Quadro 10), e o protocolo foi o 3.

Figura 30 – Protocolo 3



Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013).

A princípio, pedimos para os participantes relembrarem a questão e dessem uma olhada no protocolo 3 (Figura 30). A partir disso, os questionamos sobre a resposta do protocolo do aluno. As considerações foram:

> **P5**: Eu acho que é o mesmo que eu iria fazer, só que ele usou a fórmula de Arranjo, aí chegou no resultado, mas do jeito que estou crendo ele poderia chegar aí.
> **Pesquisador**: Não entendi o que você falou no final.

> **P5**: É porque a gente tem 26 letras, só que a gente não pode usá-las repetidamente [...]. Então a gente só pode usar uma de cada aos pares. Como na primeira parte a gente tem 26 letras para usar, na segunda teria 25 letras para usar.

P5 parece perceber que a resposta apresenta incongruência, porém acredita que o raciocínio do aluno é o mesmo que ele poderia ter. Notamos que o erro do aluno poderia, de alguma forma, ser familiar para esse participante, talvez baseado em sua própria experiência de aprendizagem, como quando P5 diz: “Eu acho que é o mesmo que eu iria fazer [...]”. Esse trecho também é um indicativo de que conhecimento de aluno pode estar sendo despertado.

Acreditamos que, para P5, o aluno poderia multiplicar 26×25, mas teria que desconsiderar os casos repetidos no final. O participante não apresentou justificativa para descontar esses casos repetidos, por exemplo, como os subconjuntos têm dois elementos, então precisava desconsiderar a metade das possibilidades, ou seja, dividir por 2. No entanto, percebemos que o participante observou que o invariante de ordem (Vergnaud, 1986) precisava ser avaliado nessa situação combinatória. No enxerto abaixo, apresentamos um diálogo sobre essa questão.

> **Pesquisador**: No caso, nesse formato que você falou, 26×25, a gente precisa lembrar de dividir por 2, né? Para tirar aquilo que ficou em excesso. Pois, o conjunto que tem A e B é o mesmo conjunto que tem B e A em ordem trocada [...]. Então qual é o erro dele aqui?
> **P4**: O erro dele, em essência, é não ter dividido por 2.
> Pesquisador: Não ter dividido por dois, ter contado aqui 650, então contou repetidamente vários casos, né?
> **P4**: Isso, está tudo dobrado.

Observamos na fala de P4 que, se o aluno tivesse dividido por 2, teria chegado à contagem correta. Matematicamente falando, isso é verdade, porém nenhum dos participantes mencionou que essa situação é uma situação de Combinação e, por isso, seria um equívoco usar fórmula de Arranjo. Mas parece que pensaram em como chegar à conclusão correta a partir do que eles interpretaram sobre o raciocínio do aluno, ou seja, apesar de ser uma questão de Combinação, poderia ser usado o princípio multiplicativo para chegar ao resultado. Na sequência, fizemos o seguinte questionamento:

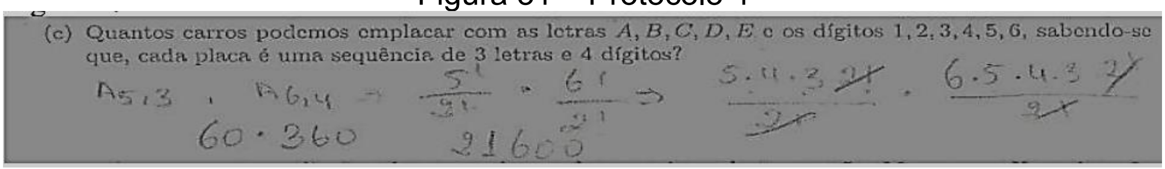
> **Pesquisador**: O que a gente pode fazer aqui para ajudar o aluno?
> **P3**: Eu acho que é a questão do subconjunto novamente, porque ele deve ter pensado que {A, B} e {B, A} são subconjuntos diferentes. Sendo que são iguais, acho que foi por isso que ele fez Arranjo.

P3 sugere que o estudante não tenha compreendido o que é um subconjunto. Esse problema demanda um conhecimento matemático que não foi definido no enunciado, ou seja, o que é um subconjunto. Mas, em termos de conhecimento de professor, refletir sobre as respostas dos alunos pode trazer bons insights sobre as formas de ensinar. A resposta para a pergunta do pesquisador exige um conhecimento especializado, uma vez que processos e sequências de ensino são pensados e repensados para minimizar erros e, neste caso, erros que ainda não são totalmente conhecidos pelos licenciandos (Ball; Thames; Phelps, 2008). Mas, antes que isso aconteça, o conhecimento de aluno é internalizado quando o professor compreende onde e como acontece o erro do aluno (Ball, Thames e Phelps, 2008).

A solução do protocolo 3 (Figura 30) apresenta equívoco quanto ao uso da fórmula. Assim, compreender as respostas incompletas dos estudantes e identificar qual ou quais equívocos mais relevantes apresentados na solução contribui para que o professor compreenda a forma de pensar do aluno, dando-lhe a possibilidade de pensar estrategicamente como desconstruir tais equívocos. Além disso, questionar o estudante sobre como ele chegou naquela resposta e o que ele estava pensando quando formulou sua resposta pode trazer informações extras e mais fidedignas sobre a forma de pensar dos alunos.

A situação combinatória "quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, sabendo-se que cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos" (Quadro 10) foi discutida junto aos protocolos 4 e 5.

Figura 31 – Protocolo 4


(c) Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, sabendo-se que, cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos?

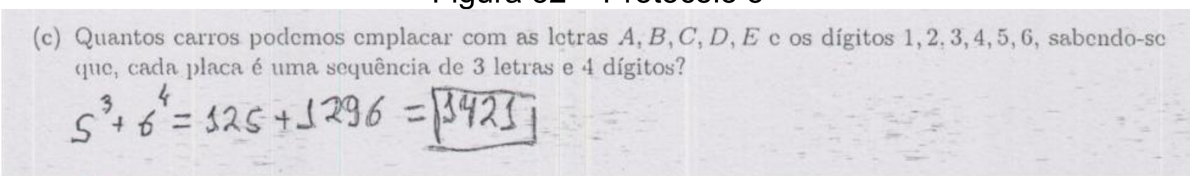
$A_{5,3}$, $A_{6,4}$ → $\frac{5!}{2!} \cdot \frac{6!}{2!}$ ⇒ $\frac{5.4.3\,2!}{2!}$, $\frac{6.5.4.3\,2!}{2!}$

60 · 360

21600

Fonte: Lima (2015).

Figura 32 – Protocolo 5


(c) Quantos carros podemos emplacar com as letras A, B, C, D, E e os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, sabendo-se que, cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos?

$5^3 + 6^4 = 125 + 1296 = \boxed{1421}$

Fonte: Lima (2015).

A princípio, quando apresentamos tais protocolos, P3, P4 e P5 não conseguiram compreender as respostas dos estudantes. Questionamos P6 se ele havia conseguido compreender algo nas soluções e ele apresentou o seguinte raciocínio:

> **P6**: O de baixo [protocolo 5] parece até um daqueles problemas de retirar uma bola, só que você a devolve para a caixa. Se ele tivesse que escolher 5 letras [ele dispõe de 5 letras], aí ele tem que escolher 3 [ele precisa escolher 3 das 5]. Aí, na primeira opção, ele pode escolher qualquer uma das 5, na segunda opção qualquer uma das 5 e na terceira qualquer uma das 5. E aí ele errou no princípio, porque eu acredito que não é para ele pensar em letras ou números, por aí seria uma soma, mas sim uma multiplicação. Eu acho que ele errou nessa parte.

A fala de P6 se baseia no protocolo 5 e descreve um argumento de Arranjo com repetição, quando avalia que as possibilidades de cada escolha são iguais à quantidade total de elementos disponíveis. Observamos que o participante P6 identificou que o erro do estudante estava na soma das possibilidades das letras e números “[...] pensar em letras ou[6] números [...]”. Essa fala demonstra domínio do conhecimento do conteúdo da Combinatória, uma vez que P6 consegue identificar o erro ao saber a solução correta para aquele caso, pois identificar se é um caso de soma ou multiplicação requer compreensão de como se comportam os agrupamentos. Neste caso, saber que a placa é composta por duas configurações de letras e números.

A respeito do protocolo 4, P2 disse que:

> **P2**: É, acho que o de baixo ele pensou como o P6 falou e o problema foi ele ter somado. O de cima [protocolo 4] acho que ele pensou em fazer Arranjo para os dois. Ele considerou como sendo arranjo de 5, porque são 5 letras, sendo que na placa tem 3, aí fez arranjo de 5 tomado a 3. Aí ele multiplicou com o arranjo de 6 porque seriam 6 números, só que ali está pedindo 4. Aí ele pensou em fazer isso, fazer arranjo separado de cada um, de letra para número e depois multiplicar. Acho que foi isso que ele pensou.

Em muitos casos, as respostas não são tão claras, mas P2 demonstrou ter compreendido o pensamento do aluno ao identificar que a fórmula de Arranjo estava sendo usada e com que objetivo, descrevendo de maneira sequencial o que o aluno poderia ter pensado, demonstrando assim domínio do conteúdo da Combinatória e aprimorando seu conhecimento de aluno.

Após algumas discussões sobre os protocolos 4 e 5, percebemos que os participantes entenderam que, no protocolo 4, o estudante usou a fórmula do Arranjo porque, nesse caso, a ordem importava, mas cometeu um equívoco por não considerar ser um Arranjo com repetição. No protocolo 5, o estudante usou Arranjo

---

[6] Vale referenciar que na Matemática, em muitos casos, a palavra “ou” está associada a soma.

com repetição, mas se equivocou ao somar as possibilidades de letras e números. Por isso, os participantes foram questionados sobre qual resposta poderia estar mais equivocada. A isso, P4 respondeu:

> **P4**: Eu acho que o mais certo, se for considerar, é o de baixo. Ele está numa linha bem próxima, apesar de ele ter somado. Porque, querendo ou não, ele foi num raciocínio bem certinho, o único pecado dele foi considerar como se fossem duas coisas distintas e não considerou uma linearidade para formar a placa. Eu acho que o de baixo quase que acertava. O problema é que ele pensou, de certa forma, em dois eventos distintos.

Pela fala de P4, observamos que a resposta mais adequada é a do protocolo 5, pois o estudante percebeu que era caso de usar um Arranjo com repetição. Portanto, somar naquele caso é um equívoco mais aceitável que no protocolo 4, onde o estudante usou Arranjo simples. Acreditamos que, para esse participante, reconhecer o invariante operatório (Vergnaud, 1986) que o problema esteja exigindo seja um ponto central nas soluções dos alunos.

Para uma melhor condução desse momento de análise das respostas, perguntamos qual dos participantes havia lido o artigo de Lima (2014). No quadro a seguir, apresentamos as estratégias em que o autor expõe erros e estratégias de aluno ao resolverem problemas combinatórios (ver Quadro 12).

Quadro 12 – Principais dificuldades e estratégia apresentadas pelos alunos

Dificuldade	Descrição da estratégia
Listagem Não sistemática	Os alunos realizam a listagem sem nenhum tipo de organização. Dessa maneira, listagem de possibilidades pode ficar faltando elementos, ou com elementos em excesso
Ordem dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à ordem dos elementos, considerando a ordem relevante em problemas que não é, e desconsiderando-a quando é necessário levá-la em conta. Um dos erros que pode surgir é classificar um problema de combinação como um problema de arranjo
Repetição dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à possibilidade de repetição de elementos. Então, desconsidera a repetição dos elementos quando o problema permite, assim como o inverso
Diferenciação dos problemas combinatórios	Alunos possuem dificuldades nos conceitos de cada tipo de problema de combinatória, classificando os problemas de maneira errônea
Utilização das Fórmulas	Além da dificuldade de lembrar as fórmulas de cada problema, os alunos apresentam dificuldades na substituição dos valores do problema na fórmula e resolve-la

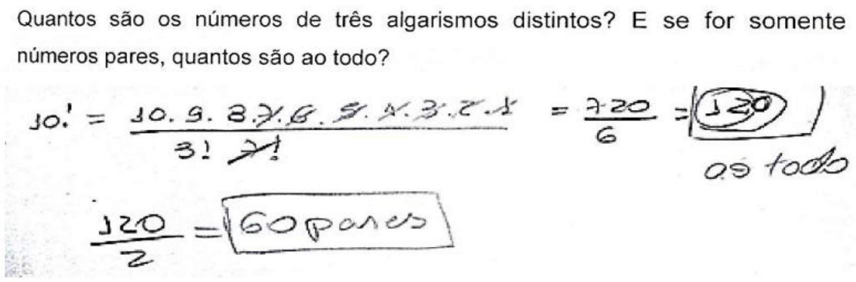
Utilização do Diagrama de árvores	Os alunos montam o diagrama de árvores com uma estrutura errônea

Fonte: Lima (2014, p. 5).

Foi discutido com eles as estratégias usadas pelos alunos e onde apresentam falhas. Por meio da exposição, buscamos sinalizar como os erros podem ser classificados e onde é mais comum ocorrer falhas em cada tipo de estratégia, pois entendemos que os licenciandos precisam conhecer as estratégias e as falhas de cada estratégia para fortalecer seus conhecimentos sobre a Combinatória, seu ensino e sobre os alunos.

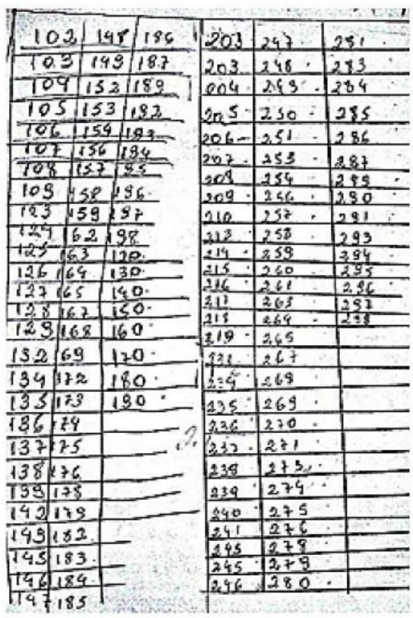
Na sequência, foi discutido o problema "**Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?**" (Quadro 11) e os protocolos 6, 7 e 8.

Figura 33 – Protocolo 6



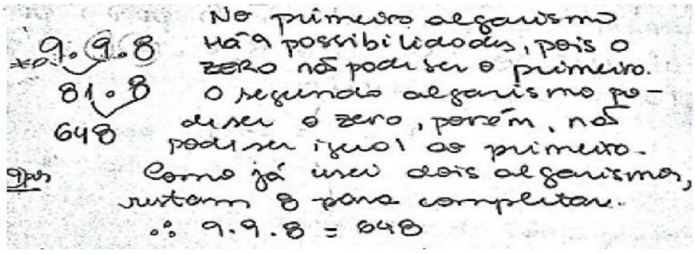
Fonte: Lima (2015).

Figura 34 – Protocolo 7



Fonte: Lima (2015).

Figura 35 – Protocolo 8


9.9.8
81.8
648
No primeiro algarismo há 9 possibilidades, pois o zero não pode ser o primeiro.
O segundo algarismo pode ser o zero, porém, não pode ser igual ao primeiro.
Como já usei dois algarismos, restam 8 para completar.
∴ 9.9.8 = 648

Fonte: Lima (2015).

O protocolo 6 foi o primeiro a ser apresentado e, de imediato, P2 e P4 se manifestaram dizendo não terem compreendido o que o estudante apresentou, devido ao "10!" estar igualado à sequência de números que os lembrava de uma Combinação. Por outro lado, P6 conseguiu entender e apresentou sua perspectiva para os demais:

> **P6**: Tirando esse 10! que ele colocou aí no começo, o resto é só combinação 10, 3 a 3. Ele só se enganou nesse 10! aí. Isso foi o que causou todo estranhamento.
> **P4**: Mas, pelo que eu lembro, a resposta ainda está errada porque não pode considerar o 10. Foi o que a gente fez quase agora. Por causa do zero, se colocar na primeira casa vai dar errado.
> **P6**: Que está errado, está! A gente só está tentando tornar o negócio mais compreensível, né? Aí, depois de descobrir todos os números, ele considerou que metade era par.

A leitura feita por P6 demonstra, além de domínio do conteúdo, certa facilidade em compreender como os alunos pensam. No entanto, os outros participantes estavam tentando entender que tipo de conta o estudante estava fazendo. Em suma, P6 percebeu que seus colegas não tinham compreendido o raciocínio do aluno por não perceberem que 10! não tinha relação com Combinação, e isso lhes causou "estranhamento".

Quando questionado pelo fato de os cálculos estarem errados, P6 alegou que, apesar de estarem errados, eles apresentam certa coerência por entregar a suposta quantidade de números de três algarismos diferentes. Além disso, ao dividir por dois, o estudante também calcula a quantidade par desses números. Neste episódio, P6 externaliza conhecimento de aluno, pois consegue não só saber que a resposta está errada, mas também compreender o caminho usado pelo aluno para chegar à conclusão de suas respostas, o que vem de encontro com as considerações de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401): "os professores também devem ser capazes de ouvir e interpretar o pensamento emergente e incompleto dos alunos, expresso na forma como eles usam a linguagem".

Ainda sobre o protocolo 6, motivado pelas discussões de P4 e P6, os participantes foram questionados se considerar que metade dos números são pares poderia ser considerada uma resposta "muito errada ou muito fora", conforme percebido pelo pesquisador. A respeito disso, P4 respondeu: "Acho que não, eu segui o mesmo caminho. Pelo menos, na minha cabeça fez sentido". Quando P4 estava resolvendo este problema, ele julgou que a divisão da quantidade de números de três algarismos diferentes poderia ser dividida por dois para encontrar a quantidade par. Isso o fez perceber que, apesar dessa estratégia estar equivocada, ainda assim faz sentido pensar que metade dos números são pares. A respeito dos erros, Brousseau (1983, p. 171) afirma que:

> O erro não é somente efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse ou sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são construídos em obstáculos.

De fato, quando pegamos uma quantidade par de números em sequência, metade deles será par, porém, nesse problema, os números não estão em sequência. Assim, não podemos afirmar com certeza que este conhecimento pode tê-los levado a essa estratégia. Mas, saber que metade dos números são pares, sobre qualquer que seja o contexto desse aprendizado, pode ser um conhecimento invocado para este momento. Ou seja, em algum momento pode fazer sentido, porém, nesse contexto, não é.

Também questionamos se usar a fórmula da Combinação nessa situação lhes parecia um erro fora do esperado. P4 respondeu que "[...] a ordem importa, então complica". Para o participante, se equivocar com o invariante parece ser mais incoerente do que dividir por dois para determinar a porção par.

Terminadas as discussões sobre o protocolo 6, apresentamos os protocolos 7 e 8 juntos e pedimos que os participantes analisassem o que os estudantes protocolaram. P4 respondeu o seguinte:

> **P4**: Eu acho que ele é corajoso porque listar esse tanto de números é complicado. Ele foi destinado a tentar fazer a listagem, mas não pensou matematicamente que ele poderia facilitar a vida dele. Acho que ele foi pelo senso comum de literalmente fazer a listagem. Provavelmente ele não tinha domínio do conteúdo em si ou alguma fórmula, mas ele tentou fazer. Aí o jeito que ele sabia foi esse.

> **Pesquisador**: Mas olhando para essa listagem, você acha que tem algum padrão? Ele foi coerente até onde conseguiu chegar?
> **P4**: Eu acho que ele está indo certo porque ele já removeu o zero da primeira casa, então ele vai certo, mas vai demorar muito.

A fala de P4 sobre o "pensar" matematicamente indica que o participante percebe a necessidade de uma abstração, ou seja, pensar uma estratégia mais efetiva. P4 demonstra sensibilidade ao conjecturar que talvez essa fosse a única estratégia conhecida pelo aluno para solucionar esse problema. Nesta questão, usar a listagem é uma desvantagem por ter uma lista demasiadamente grande de possibilidades.

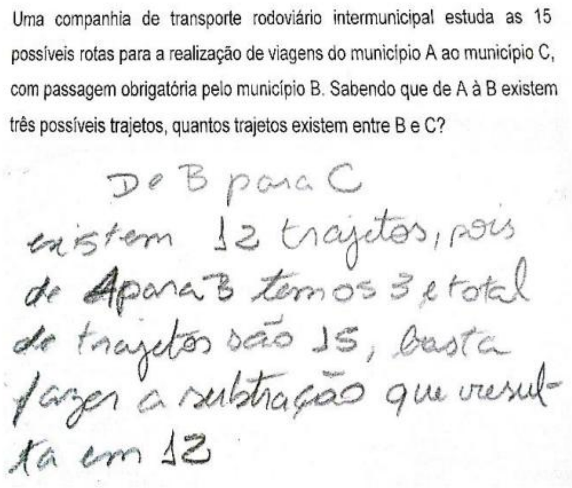
Diante disso, o pesquisador buscou mostrar aos participantes alguns cenários em que a listagem seria útil, por exemplo, com uma quantidade menor de algarismos. Além disso, discutiu-se sobre a necessidade de se construir o pensamento combinatório nos estudantes para que eles pudessem formalizar estratégias menos árduas, uma vez que a listagem não faz sentido em todas as situações combinatórias. Quando questionamos sobre o padrão de listagem, gostaríamos de chamar a atenção para erros que os estudantes cometem por não conseguir listar de forma padronizada, embora não pareça ser o caso deste protocolo.

Listar sem um determinado padrão pode ocasionar erros de contagem, mas listar utilizando um padrão, em uma situação em que há uma quantidade demasiada de casos, torna-se um erro de estratégia e não um erro capaz de não produzir a solução. Observar esses aspectos pode fazer com que o professor fale sobre determinadas estratégias com mais cuidado em sala de aula.

A solução do protocolo 8 está correta e P4 foi o único participante que se manifestou sobre a mesma, classificando-a como perfeita por apresentar todo o procedimento de forma justificada.

O problema "**Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A a B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?**" (Quadro 10) foi discutido com o protocolo 9.

Figura 36 – Protocolo 9



Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?

De B para C
existem 12 trajetos, pois
de A para B temos 3 e total
de trajetos são 15, basta
fazer a subtração que resul-
ta em 12

Fonte: Lima (2015).

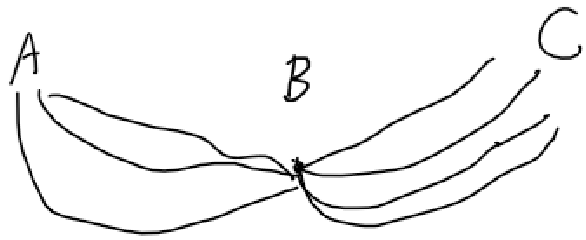
Após a apresentação, foi pedido aos participantes que analisassem o protocolo 9 e expressassem suas opiniões sobre a solução do estudante. O enxerto a seguir expõe tais considerações:

> **P4**: Eu acho que ele pensou na resposta literalmente ao pé da letra. Ele não pensou em fazer algum arranjo de caminho que pode ir para um lado ou pode ir por outro, literalmente, existem 15 no total, vou subtrair os três que eu já tenho, vou colocar doze caminhos e pronto.
> **P5**: Ele não conseguiu interpretar o que a questão estava pedindo. Com isso, ele não conseguiu chegar no resultado final. Porque, acredito eu, ele interpretou como se os três primeiros caminhos de A para B já estivessem contados e ele não conseguiu desvendar que entre B e C existiam novos caminhos. Por isso ele chegou em doze.
> **P4**: Inclusive parece que ele pensou que o caminho é linear. Ou seja, sai de A e chega logo em C, ou existe algum atalho de B para C, ou coisa nesse sentido.
> **P5**: Feito o que o P4 falou. O que o aluno contou como três caminhos primários, [...] acredito eu que esses três caminhos seriam diretos de A para C. Foi isso o que deu errado. Não é de A para C, é de A para B. Eu acho que ele não conseguiu visualizar essa parte e acabou adicionando os doze para completar os quinze.

P4 percebe que o equívoco do protocolo está em interpretar de forma “literal” as informações. Já P5 acha que o estudante não consegue imaginar a existência de caminhos entre as cidades B e C que pudessem ser combinados para formar o trajeto, por isso o estudante subtrai três dos quinze para obter os doze caminhos. Mais uma vez, tentar compreender como o aluno pensou e buscar entender as respostas reforça o conhecimento de aluno. Mas nem sempre será possível compreender o que o estudante pensou sem perguntá-lo. Porém, neste trabalho, o conhecimento de aluno se expressa quando o (futuro) professor tenta compreender o raciocínio do aluno, contribuindo ainda para conhecer os erros mais prováveis de ocorrer e elaborar estratégias para minimizá-los.

Na sequência, mostramos nosso ponto de vista sobre a questão, ou seja, usamos alguns desenhos (Figura 37) para representar o possível raciocínio do estudante.

Figura 37 – Representação feita pelo pesquisador comentando o Protocolo 9

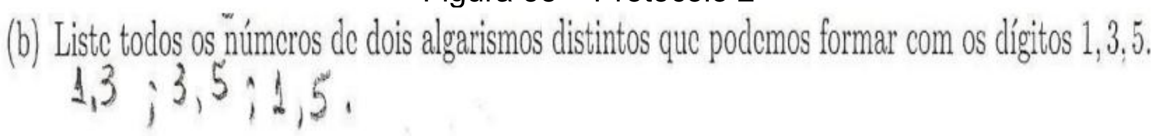


Fonte: Dados da pesquisa.

Com essa representação, tentamos demonstrar que um estudante poderia ter contado 7 caminhos diferentes para sair de A até C, somando os três caminhos de A até B e os quatro caminhos de B até C.

O último enunciado foi: “Liste todos os números de dois algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 1, 3 e 5” (Quadro 11), e o protocolo foi o 2.

Figura 38 – Protocolo 2



(b) Liste todos os números de dois algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 1, 3, 5.

1,3 ; 3,5 ; 1,5 .

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013).

Perguntamos o que os participantes pensavam dessa resposta. Inicialmente disseram o seguinte:

> **P4**: Eu acho que ele levou muito ao pé da letra a ideia de associar os números.
> **P5**: Diferente do da gente, que deu 6. Ele fez a unicidade de cada um, fez só com um número, não repetiu.
> **Pesquisador**: O que mais vocês podem observar no que ele escreveu? Ele não conseguiu listar todos, e o que mais?
> **P4**: Ele não escreveu os números adequadro não.
> **P2**: Tem a questão da vírgula. 1,3; 3,5; 1,5 no modo como ele escreveu.

Alguns participantes apontaram inicialmente que havia incoerência com os números. P5 falou da unicidade. Muito provavelmente, ele observou que mais números poderiam ser escritos ao inverter a ordem dos algarismos. P2 percebeu que os números estavam escritos na forma decimal. Diante dessa observação, pedimos aos participantes, por ora, que ignorassem o uso da vírgula e se atentassem à listagem do aluno. Depois disso, P4 respondeu:

> **P4**: Eu pude notar, em essência, que ele sabe o que é para fazer. Só que ele não percebeu que dá para inverter os números, ou seja, formar 13 ou 31. O problema está aí, ele só considera literalmente pegar dois números e pronto, não considera inverter. É um dígito, então poderia estar sendo permutada a ordem deles.

Por seu comentário, compreendemos que P4 consegue observar, para além do fato de essa resposta não apresentar números de dois dígitos, que o padrão de listagem não apresenta o invariante de ordem da situação imposta, ou seja, esse era o caso de Arranjo simples, mas o aluno não percebeu. Por essa leitura, observamos conhecimento do conteúdo e de aluno emergindo na fala do participante.

Neste encontro, os protocolos utilizados consistem em respostas reais que apresentam uma gama de questões e respostas, como é o caso da questão 2, na qual expomos três protocolos com o intuito de expandir o conhecimento dos participantes a respeito do universo de resposta dos estudantes. Dissecamos os protocolos com o intuito de que compreendessem os erros e também pensassem em estratégias de ensino para (res)significá-los, como no caso do protocolo 3, no qual questionamos soluções para ajudar o estudante.

Identificamos e trabalhamos conhecimentos de ensino quando questionamos como os participantes usariam determinados problemas combinatórios. Os participantes também cometeram equívocos ao resolverem problemas combinatórios, e isso os sensibilizou ao analisarem os protocolos de estudantes e observarem que podem cometer os mesmos equívocos que os estudantes.

Existe uma relação imbricada entre os tipos de conhecimento de professor estabelecida por Ball, Thames e Phelps (2008), ou seja, uma determinada situação pode emanar um ou vários conhecimentos ao mesmo tempo. Por exemplo, estar diante de um padrão de resposta e identificar que ela está errada pode ser conhecimento do conteúdo. No entanto, quando se está diante de um padrão de respostas erradas e se reconhece que aquele erro é cometido com frequência (ou não) por estudantes, indica conhecimento do conteúdo e dos alunos. Criar uma sequência de ensino de um conteúdo para evitar o erro indica que o professor tem conhecimento do conteúdo e do ensino. Ao passo que criar uma sequência a partir de um erro desconhecido é um conhecimento especializado do professor, pois demanda também capacidade de reflexão sobre a natureza do erro.

A análise das respostas pôde, sob diversas perspectivas, trazer esclarecimentos sobre como compreender o que houve de errado para corrigir e ter sucesso em atividades futuras, esclarecer interpretações errôneas sobre a natureza da Matemática, analisar erros com o intuito de esclarecer más interpretações de um determinado conteúdo e refletir sobre estratégias de ensino.

Acreditamos que o olhar crítico sobre aquilo que o aluno entrega como resposta, seja ela correta ou errada, é um passo para pensar novas formas de ensino. Desse modo, as atividades propostas neste encontro tiveram o intuito de provocar reflexões e aprendizados sobre as estratégias de alunos, incluindo erros e acertos, respostas incompletas e pouco formalizadas no âmbito da Matemática. Assim, incitamos a observância de detalhes importantes para os professores que buscam melhorar suas práticas nas salas de aula (Ball; Thames; Phelps, 2008). Também acreditamos que o que foi apresentado aqui possa subsidiar cursos de licenciatura que tenham o enfoque prático da construção de conhecimentos pedagógicos.

Em suma, o que esquematizamos neste encontro consiste, em um primeiro momento, em fazer com que os participantes pensassem os problemas combinatórios, realizassem soluções sobre eles e refletissem coletivamente sobre as soluções, construindo assim conhecimentos do conteúdo de Combinatória. Em seguida, foram apresentados protocolos de alunos para essas questões. Analisamos os diversos detalhes contidos nessas respostas e buscamos compreender como os alunos pensam, o que suas respostas revelam sobre seus saberes e não saberes e o que pode ser feito para ajudar o aluno. Essa estratégia permitiu que os participantes pudessem construir os conhecimentos de alunos e de ensino.

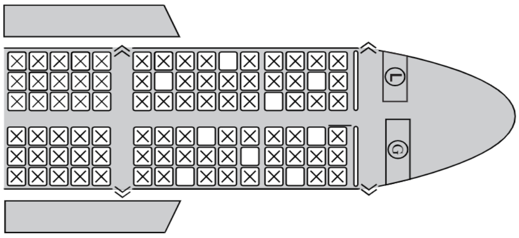
4.3.3 Encontro 3

Este encontro foi reservado para fazer uma atividade prática envolvendo um teste diagnóstico da pesquisa de Coelho e Dias (2022), na qual realizaram um teste diagnóstico com três estudantes do ensino médio, onde protocolos de alunos também foram colhidos e serão estudados neste encontro.

As atividades deste encontro consistiam em resolver as questões, identificar quais poderiam ser os equívocos do estudante para cada questão, analisar e categorizar os tipos de erros em protocolo de aluno dessas questões. Essa atividade foi realizada em grupos, sendo o grupo 1 formado por P2, P4 e P6; e o grupo 2, por P1, P3 e P5. A primeira questão apresentada foi a seguinte:

Questão 1: [Adaptado ENEM, 2015] Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Figura 39 – Ilustração de apoio da Questão 1 do Encontro 3

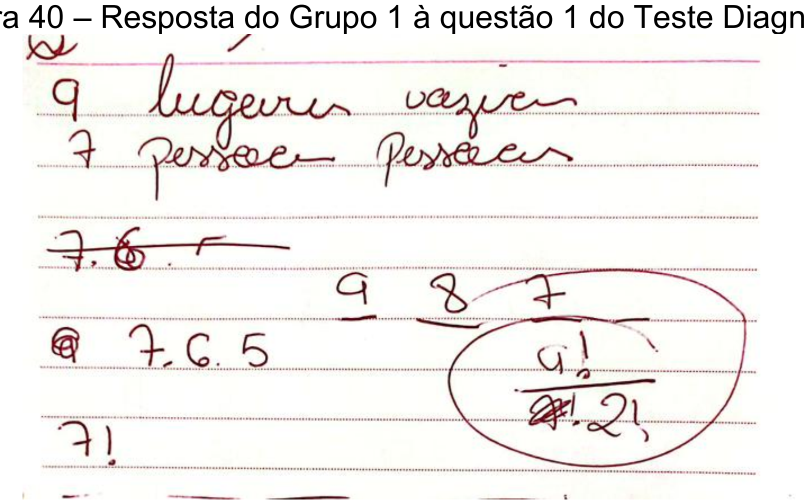


Fonte: Dados da pesquisa.

Determine o número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo.

O protocolo da Figura 40 apresenta a resposta do grupo 1 e, apesar de percebermos vestígios de outros cálculos no entorno, observa-se que utilizaram a fórmula do arranjo no canto inferior direito (demarcada por um círculo). Percebemos que os participantes começaram usando a estratégia dos tracinhos para depois fazer o uso da fórmula. Isso mostra que um certo raciocínio combinatório foi construído antes do uso da fórmula como resposta final.

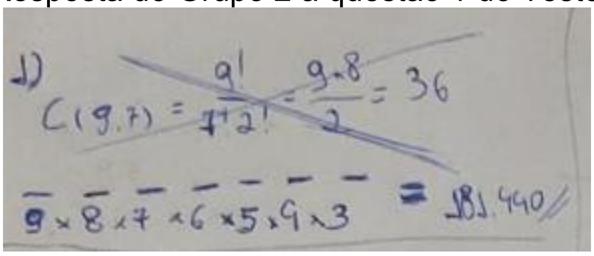
Figura 40 – Resposta do Grupo 1 à questão 1 do Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

O protocolo da Figura 41 mostra dois cálculos: um usando a combinação, muito embora esteja marcado com um “X” mostrando uma anulação de parte da resposta, e outro utilizando o princípio multiplicativo com o resultado correto. Percebemos que os participantes fizeram algum tipo de correção para essa questão e usaram a estratégia de tracinhos para chegar ao resultado. Usar inicialmente a fórmula da Combinação representa um equívoco quanto à situação combinatória e ao invariante (Vergnaud, 1986), pois cada ordem na qual os passageiros se sentam representa uma nova possibilidade.

Figura 41 – Resposta do Grupo 2 à questão 1 do Teste Diagnóstico



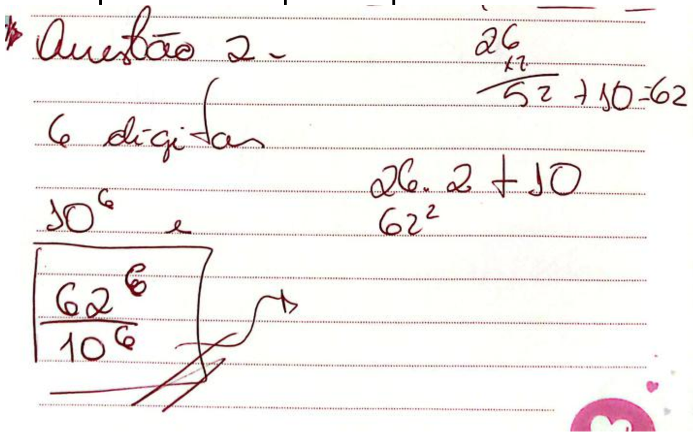
Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, foi trabalhada a segunda questão.

Questão 2. [Adaptado ENEM, 2017] Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. Determine o coeficiente de melhora da alteração recomendada.

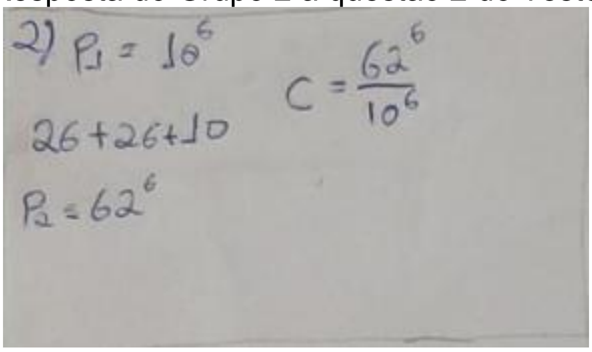
As respostas dos grupos foram as seguintes:

Figura 42 – Resposta do Grupo 1 à questão 2 do Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 43 – Resposta do Grupo 2 à questão 2 do Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta do grupo 1 (Figura 42) está correta e demonstra que os participantes conseguiram observar que este é um caso de Arranjo com repetição. Assim, entendemos que os participantes estão conseguindo compreender as situações e os invariantes dos problemas.

O grupo 2 (Figura 43) também respondeu corretamente à questão. Observamos que a primeira parte, que representa as senhas usando apenas algarismos, foi calculada e representada por "P1" e o segundo modelo de senha foi identificado por "P2", e o coeficiente de melhoria identificado por "C", demonstrando assim bom uso do raciocínio combinatório.

Na sequência, foi solicitado aos participantes que respondessem à terceira questão.

Questão 3. [Adaptado ENEM, 2017] Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogames. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de

pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

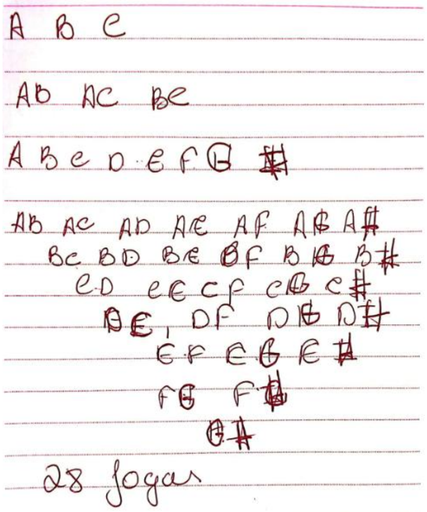
Figura 44 – Ilustração de apoio da Questão 3 do Encontro 3

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Fonte: Dados da pesquisa.

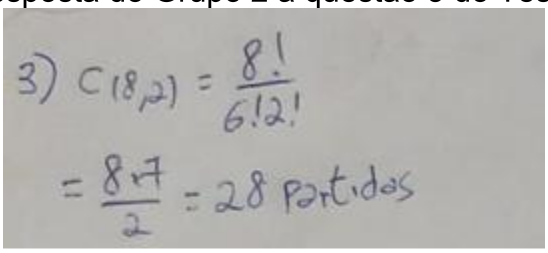
Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas? As respostas dos grupos foram as que seguem.

Figura 45 – Resposta do Grupo 1 à questão 3 do Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 46 – Resposta do Grupo 2 à questão 3 do Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

O protocolo do grupo 1 (Figura 45) indica que utilizaram uma representação simbólica seguida de um padrão de organização das estruturas dos jogos para calcular a quantidade de partidas que serão realizadas. Entendemos que inicialmente foi feito um teste com três jogadores representados pelas letras A, B e C, e cada jogo foi representado utilizando duas letras, formando assim três jogos (AB, AC e BC). Em seguida, eles selecionaram as 8 primeiras letras do alfabeto para realizar as combinações de jogos para o caso que está sendo pedido na questão, formando assim 28 partidas. O enxerto abaixo pode confirmar isso.

> **P4**: O que acontece é o seguinte: a gente tem 2 jogadores então vai dar uma partida, porque cada partida é jogada por duas pessoas. Quando a gente for para três jogadores a gente vai ter por exemplo — vamos chamá-los de A, B e C. Então A vai jogar com B, A vai jogar com C e B vai jogar com C. Aí dá três jogos, assim vai combinando até chegar no 8.

De imediato, não observamos que o tipo de situação combinatória foi identificado pelo grupo 1 (Figura 45), muito embora o invariante pareça ter sido identificado por eles, pois nas partidas selecionadas os jogadores não se repetem. Por outro lado, em primeira instância, parece que os participantes não percebem se tratar de uma Combinação, mesmo assim, seu raciocínio e seu modo de representar de forma sistemática os levaram à resposta certa.

O protocolo do grupo 2 (Figura 46) mostra que os participantes conseguiram identificar que esta era uma situação de combinação e usaram a fórmula para encontrar corretamente o número de partidas, apresentando assim conhecimento sobre o conteúdo.

Após a resolução, a questão 4 foi resolvida pelos grupos.

Questão 4. [Adaptado ENEM, 2017] Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

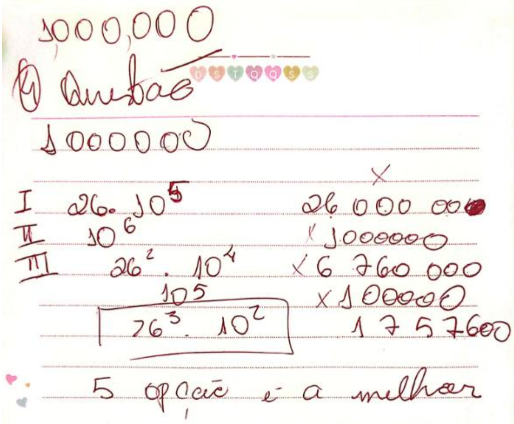
Figura 47 – Ilustração de apoio da Questão 4 do Encontro 3

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

Fonte: Dados da pesquisa.

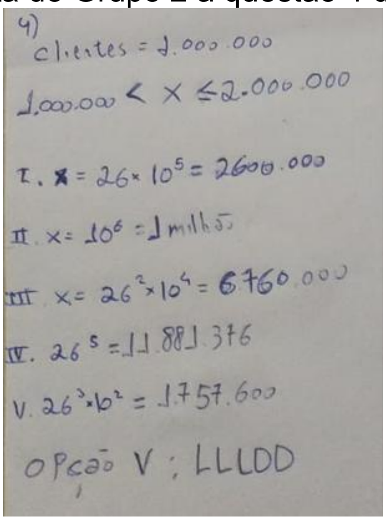
As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. Determine a opção que mais se adequa às condições da empresa.

Figura 48 – Resposta do Grupo 1 à questão 4 do Teste Diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 49 – Resposta do Grupo 2 à questão 4 do Teste Diagnóstico



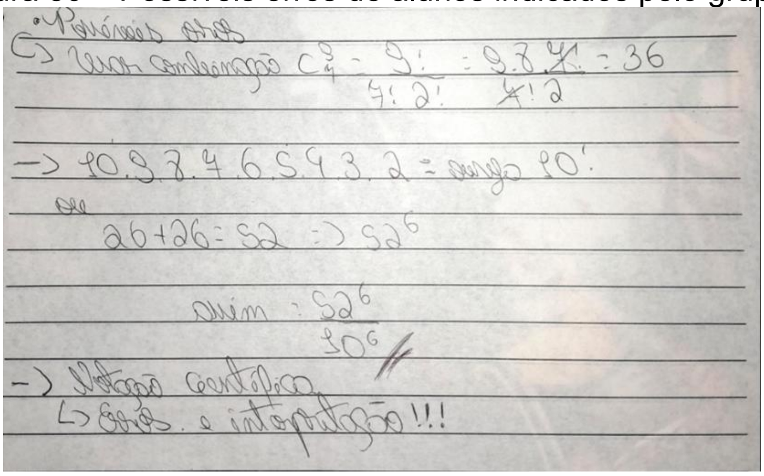
Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 4, o grupo 1 apresentou bom domínio do uso do princípio multiplicativo ao escolher, por eliminação, a opção mais adequada de senhas (Figura 48).

Percebemos que a escolha da opção mais adequada se deu por eliminação das opções, sabendo que a melhor estava entre um milhão e dois milhões de possibilidades. O grupo 2 (Figura 49) demonstrou ter compreendido o problema ao usar o princípio multiplicativo na contagem das possibilidades, sinalizando assim o conhecimento do conteúdo.

Como segundo momento da atividade, pedimos que os estudantes escrevessem possíveis erros que os alunos poderiam cometer ao tentarem realizar esse teste. O grupo 1 listou os erros expressos na Figura 50.

Figura 50 – Possíveis erros de alunos indicados pelo grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo o grupo 1, os erros associados à primeira questão são usar a fórmula da Combinação Simples no lugar do Arranjo Simples, pois esse também foi um equívoco cometido por um dos participantes. Durante o estudo das respostas corretas e erradas, os participantes observaram erros como este, no qual o estudante tem dificuldade em identificar os invariantes de cada problema, classificando-os de maneira equivocada (Vergnaud, 1986; Lima, 2014). Além disso, eles cometeram esse tipo de equívoco ao realizarem as tarefas, tornando-se assim um erro comum no estudo de Combinatória. O exposto indica indícios de conhecimento de aluno (Ball; Thames; Phelps, 2008) pelos participantes.

Na segunda questão, o grupo 1 achou que os estudantes poderiam calcular como Arranjo Simples no lugar de um Arranjo com Repetição. Eles também acharam que os estudantes poderiam esquecer de somar os números às novas possibilidades de letras. Assim, em vez de terem 62 possibilidades, teriam apenas 52. Percebemos aqui que o invariante do problema poderia ser uma possibilidade de equívoco dos alunos. Tais colocações, novamente, indicam conhecimento de aluno demonstrado pelos participantes.

No relatório em que pedimos ao grupo 1 não aparecem informações sobre a terceira questão, mas na gravação desse encontro capturamos a seguinte discussão sobre a mesma.

> **P4**: Na terceira, em essência eles podem não saber o que é para fazer. Não saber como formar um jogo, porque eles podem ficar pensando como assim dois jogadores jogam uma partida. O que talvez não seja tão intuitivo, principalmente quando chega no terceiro jogador.
> **P2**: Principalmente quando você vai para a segunda parte, são três jogadores e três jogos. Aí na sua cabeça você fica perdido porque na sua cabeça você pensa que devia ser diferente, pelo menos na minha.
> **P4**: É, não é tão intuitivo. Eu acho que em essência eles vão errar em fazer os arranjos entre os jogadores e o número de partidas.

Nessa discussão, P2 e P4 observam que a distribuição das partidas apresentadas no quadro pode não ser tão intuitiva, o que pode gerar confusão para os alunos. Entendemos que, mais uma vez, é externado o conhecimento de aluno quando os participantes conseguem prever o que os estudantes achariam confuso ou difícil (Ball; Thames; Phelps, 2008).

Para a quarta questão, os participantes apontaram notação científica como possibilidade de erro dos alunos em suas notas. No enxerto a seguir, observa-se melhor como se deu essa discussão.

> **P2**: Na minha cabeça eles só poderiam errar essa questão de notação científica mesmo. Porque tem um monte de número quebrado e eles poderiam esquecer de alguma vírgula, esquecer de somar alguma coisa, são erros que eles podem cometer.
> **P4**: Eu acho que é mais questão de interpretação que eles podem errar, porque eles podem querer pegar somente a resposta maior. Se eles forem na resposta maior vai dar errado porque eles não querem a maior. Eles podem estar errando pegando uma que dá um milhão certinho, então eu acho que, em essência, é só questão de interpretação. Porque se ele entende o procedimento da questão, que é fazer as multiplicações das possibilidades de letras por números, acredito que não tem muito o que errar aí não.
> **P2**: Sim, sim! Concordo!

P2 considera que trabalhar com números de ordem de grandeza mais elevada pode gerar equívocos para os alunos. Já P4 acha que a escolha das opções pode ser uma questão mais desafiadora para os estudantes. A crença de P2 e P4 é que esta questão não deve ser tão difícil do ponto de vista do raciocínio combinatório, mas as dificuldades podem surgir em questões secundárias, como a escolha correta da melhor senha ou erros no cálculo numérico. Esses julgamentos, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), são julgamentos do conhecimento de aluno, pois os professores precisam reconhecer o que os alunos terão dificuldade ou achar confuso.

O grupo 2 realizou essa tarefa por meio de um relatório escrito, por isso organizamos suas colocações em um Quadro 13.

Quadro 13 – Possíveis erros de alunos indicados pelo grupo 2

Item do questionário	Possíveis erros de alunos
1	O aluno poderia ficar confuso a respeito do tipo de cálculo que deveria realizar para resolver a questão, se a questão se trata de um arranjo ou de uma combinação
2	Pode não ficar claro para o aluno que os elementos disponíveis para a criação das senhas, que são letras e números, podem se repetir, e acabar realizando o cálculo considerando que não pode haver repetição dos elementos O aluno poderia confundir a quantidade de elementos disponíveis para a criação das senhas O aluno poderia ficar confuso a respeito do termo “razão”, não compreender que se trata de uma divisão entre os resultados obtidos
3	Poderia não ficar claro para o aluno se duas partidas entre dois jogadores com ordens alternadas seriam consideradas iguais ou diferentes (exemplos: jogador 1 vs jogador 2 e jogador 2 vs jogador 1) O aluno poderia achar que a quantidade de partidas possíveis sempre seria um múltiplo de 3, devido às coincidências com os resultados anteriores
4	O aluno poderia achar que teria que, por se tratar de tipos diferentes de elementos, teria que somar as quantidades de possibilidades ao invés de multiplicar O aluno poderia cometer algum erro ao tentar converter o número para potência de base 10 O aluno poderia deixar passar despercebido que os elementos poderiam se repetir, sendo assim realizaria o cálculo de forma a considerar que os elementos não poderiam se repetir

Fonte: Dados da pesquisa.

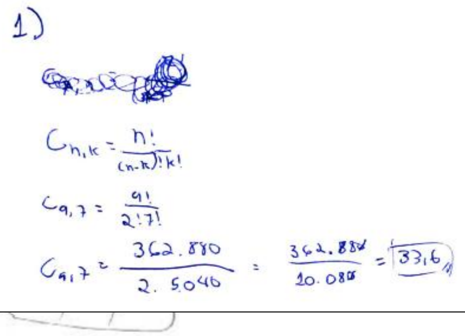
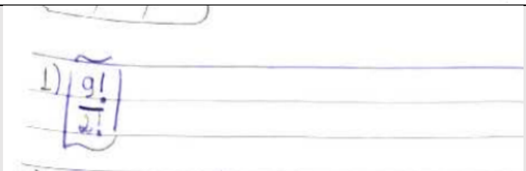
Os possíveis erros elencados pelo grupo 2 envolvem desde má interpretação dos invariantes dos problemas, o que poderia fazer com que os alunos escolhessem fórmulas ou estratégias erradas para calcular as possibilidades, até outras peculiaridades de cada problema. É o caso da questão 3, por exemplo, na qual os participantes identificaram que os múltiplos de três que aparecem no quadro da questão poderiam ser um distrator para que o aluno pensasse que a resposta é um múltiplo de três.

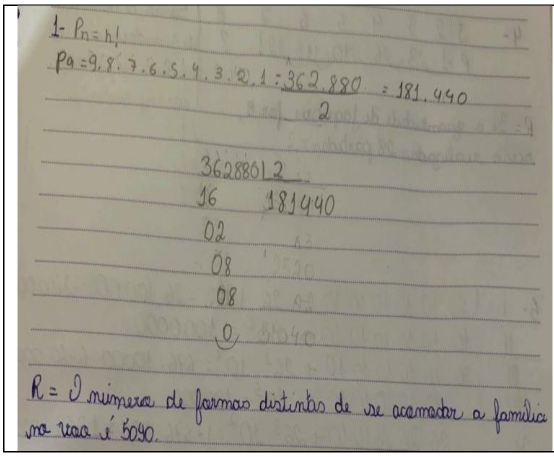
Além disso, na questão 2, eles acreditam que os estudantes poderiam ficar confusos a respeito do termo razão que aparece no enunciado, podendo, assim, surgir cálculos equivocados. Na questão 4, apontam para erros no cálculo de potenciação. Em suma, para além de erros associados à situação combinatória, os participantes conseguem perceber erros associados ao processo de execução dos cálculos.

Procuramos, por meio desta atividade, conhecer como os participantes podem expressar o domínio do conhecimento da Combinatória e dos erros dos alunos. As falas e anotações aqui elencadas demonstraram o domínio sobre as situações combinatórias e, em particular, sobre os invariantes operatórios. Também identificamos o reconhecimento de possíveis erros e falhas processuais, que Ball, Thames e Phelps (2008) vão chamar de conhecimento de alunos. Como já mencionamos, os professores precisam ser capazes de prever o que os alunos pensam, se acham confuso, difícil ou fácil e, ainda, se a atividade será motivadora ou não (Ball; Thames; Phelps, 2008).

A última atividade desse encontro consistia em realizar uma anotação sobre os protocolos de cada questão. Abaixo seguem novamente os protocolos e as anotações de cada grupo.

Quadro 14 – Anotações do grupo 1 sobre a primeira questão do teste diagnóstico

Protocolo	Anotações
	Aluno 1: Errou na interpretação, pois usou combinação
	Aluno 2: Não mostrou o que fez

 1- $P_n = n!$ $P_9 = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = \frac{362.880}{2} = 181.440$ 362880 | 2 16 181440 02 08 08 0 R = O número de formas distintas de se acomodar a família na roda é 5040.	Aluno 3: Falta de organização e não entendeu o problema completamente

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

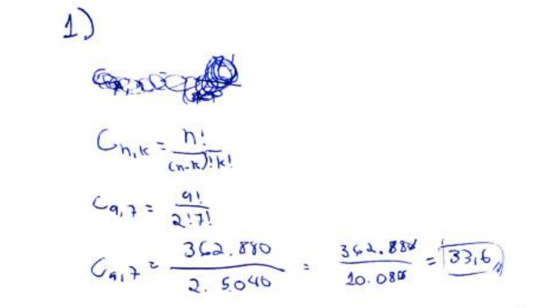
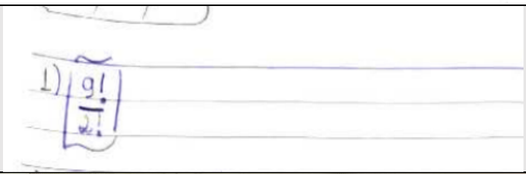
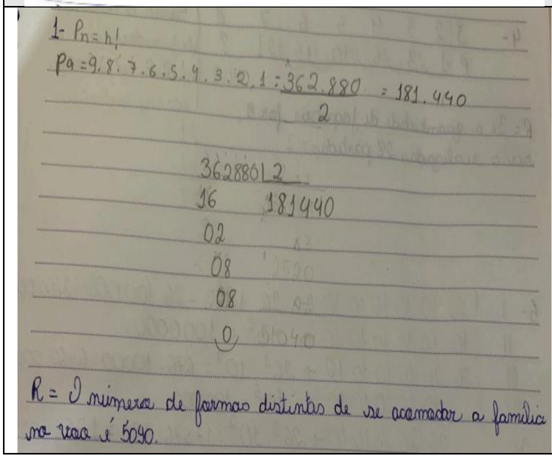
O grupo 1 fez anotações curtas sobre os protocolos dos estudantes, como podemos ver no Quadro 14. Dentre as observações destacadas por eles está o uso da fórmula da Combinação Simples em uma situação de Arranjo Simples (aluno 1), observação sobre uso apenas da resposta final (aluno 2) e falta de organização e compreensão do problema (aluno 3). O enxerto abaixo traz mais detalhes do que eles pensaram sobre a resposta do aluno 2.

> **P4**: Ele acertou!
> **P2**: É, só que ele foi direto na resposta. Não tem nada, só tem a resposta.
> **P4**: Nem sei o que ele pensou aí não.
> **P2**: Talvez ele tenha criado um raciocínio, só que talvez ele não tenha conseguido passar para o papel. Só colocou a resposta final.

Apesar da resposta do aluno 2 ser bastante curta, os participantes conseguem fazer algumas suposições sobre o que ele poderia ter pensado. O protocolo do aluno 3 apresenta alguns detalhes confusos, pois o estudante usa notação de permutação, mas faz o cálculo de Arranjo, estabelecendo uma igualdade não verdadeira na primeira parte e, como resposta final, apresenta o número 5040, que coincide com 7!. Esses detalhes parecem ter causado estranheza aos participantes, comprometendo o entendimento deles sobre o que o estudante quis escrever.

No entanto, o que os participantes pensavam que poderia ser um equívoco dos alunos se mostrou verdadeiro no caso do protocolo do aluno 1, pois este estudante usou a fórmula errada. Isso pode significar que os participantes já conseguem prever alguns erros, ainda que alguns deles possam ser baseados nos seus próprios erros e conhecimentos prévios.

Quadro 15 – Anotações do grupo 2 sobre a primeira questão do teste diagnóstico

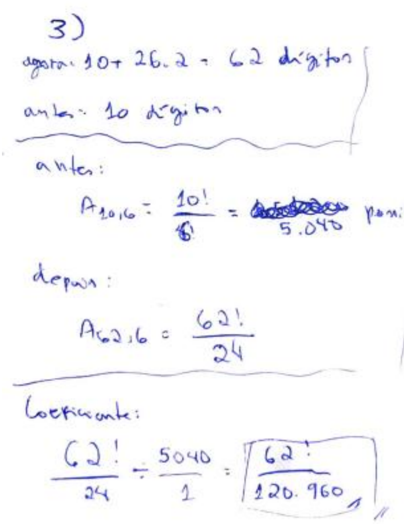
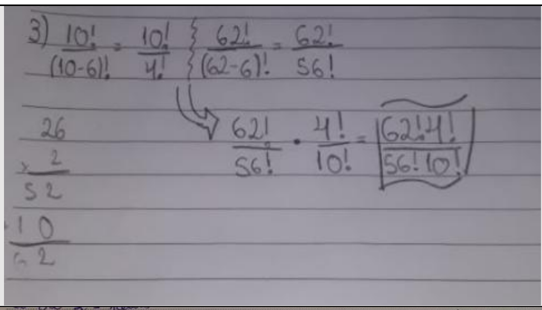
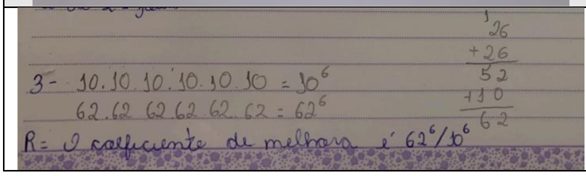
Protocolo	Anotações
	O principal erro do aluno 1 foi não ter identificado que a questão se tratava de um arranjo e não de uma combinação
	O aluno 2 identificou que a questão se tratava de um arranjo, porém não chegou a completar o cálculo
	O aluno 3 acertou o cálculo que determinava a quantidade possível de formas da família viajar, porém errou ao determinar que o resultado era 5040

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

As anotações do grupo 2 demonstram atenção com alguns detalhes dos protocolos, por exemplo, como o protocolo do aluno 2 que apresentou uma resposta correta, porém os participantes percebem que ela está incompleta, pois não foi apresentado numericamente o total de possibilidades. No protocolo do aluno 3 eles percebem que o estudante consegue encontrar o número de possibilidades, mas apresenta outro número como resposta final. Isto pode corroborar com o que Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401, **tradução nossa**[7]) elencam como parte do conhecimento de aluno, pois o professor é capaz de "[...] interpretar o pensamento emergente e incompleto dos alunos na forma como eles usam a linguagem".

[7] Do original: "*Teachers must also be able to hear and interpret student's emerging and incomplete thinking as expressed in the ways that pupils use language*" (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 401).

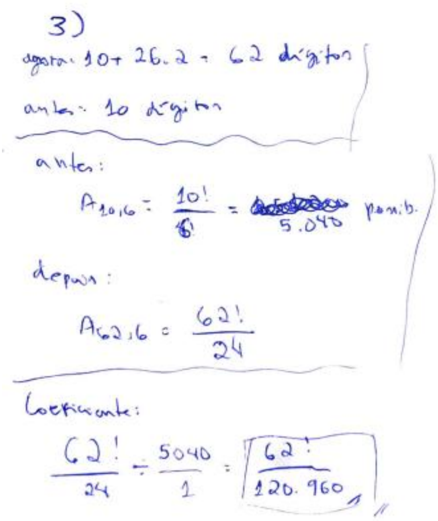
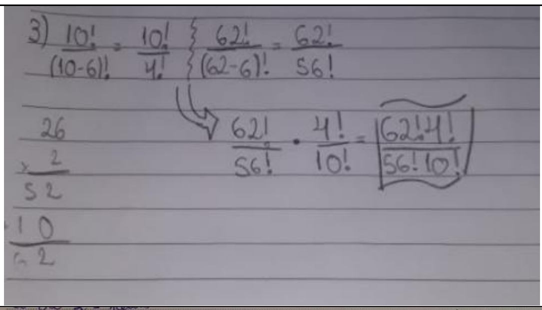
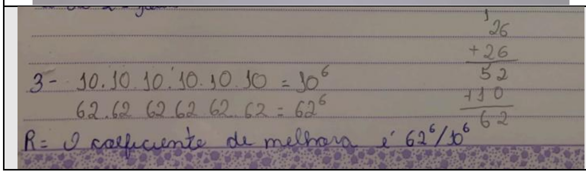
Quadro 16 – Anotações do grupo 1 sobre a segunda questão do teste diagnóstico

Protocolo	Anotações
 3) agora: 10+ 26.2 = 62 dígitos antes: 10 dígitos antes: $A_{10,6} = \frac{10!}{6} = 5.040$ possib. depois: $A_{62,6} = \frac{62!}{24}$ Coeficiente: $\frac{62!}{24} \div \frac{5040}{1} = \boxed{\frac{62!}{120.960}}$	Aluno 1: Entende o problema, mas se atrapalha na fórmula
 3) $\frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!}$ $\frac{62!}{(62-6)!} = \frac{62!}{56!}$ $\frac{62!}{56!} \cdot \frac{4!}{10!} = \boxed{\frac{62!4!}{56!10!}}$ 26 x 2 = 52 + 10 = 62	Aluno 2: Não soube interpretar e aplicou a fórmula
 3- 10.10.10.10.10.10 = 10^6 62.62.62.62.62.62 = 62^6 R= O coeficiente de melhora é $62^6/10^6$ 26 + 26 = 52 + 10 = 62	Aluno 3: Fez de modo adequado

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

A situação-problema da questão 2 exigia um Arranjo com repetição, porém os protocolos dos alunos 1 e 2 mostram cálculos com Arranjo Simples. O grupo 1 (Quadro 16) percebeu que as anotações do aluno 1 apresentam falhas na substituição dos dados da questão e nos parâmetros corretos da fórmula, apesar de não mencionarem equívoco no uso de fórmula. Quando o grupo 1 pensou em possíveis erros para essa questão, eles marcaram como erros o uso da fórmula de Arranjo e soma, ao invés do produto das possibilidades (ver Figura 50), e aqui os alunos 1 e 2 (Quadro 16) incorreram no uso da fórmula de Arranjo, como eles previram na atividade anterior. Para os participantes, o aluno 2 pode não ter entendido a situação-problema e, por conta disso, pode ter aplicado a fórmula que achou mais adequada.

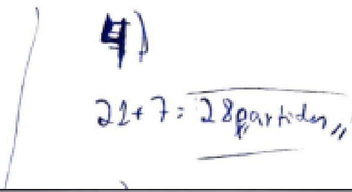
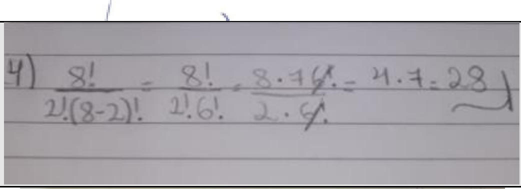
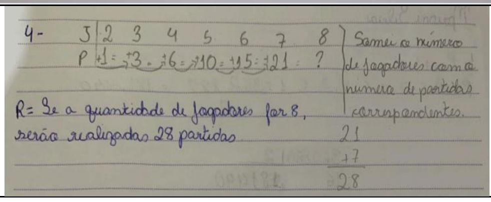
Quadro 17 – Anotações do grupo 2 sobre a segunda questão do teste diagnóstico

<table>
<tr><th>Protocolo</th><th>Anotações</th></tr>
<tr><td>
</td><td rowspan="2">Os alunos 1 e 2 consideraram que a questão se tratava de um arranjo, por considerarem que os elementos não poderiam se repetir. O aluno 1 soube identificar a quantidade de elementos que formariam a senha, porém errou o cálculo da fórmula e o cálculo do coeficiente, o mesmo caso aconteceu com o aluno 2</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>O aluno 3 acertou porque conseguiu identificar que a questão permitia que houvesse repetição dos elementos</td></tr>
</table>

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

As anotações do grupo 2 (Quadro 17) mostram que eles compreenderam as estratégias usadas pelos alunos e conseguiram identificar equívocos dos estudantes ao não perceberem que a situação era um Arranjo com repetição como principal incoerência. Também percebem, no caso do aluno 1, erros na substituição dos dados na fórmula. Acreditamos que compreender a natureza das situações combinatórias, assim como os erros associados a elas, pode gerar melhores formas de ensino.

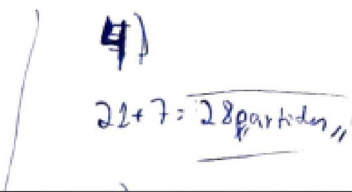
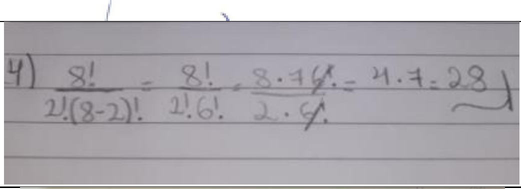
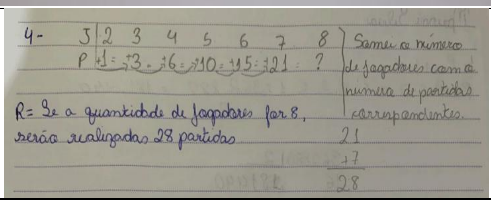
Quadro 18 – Anotações do grupo 1 sobre a terceira questão do teste diagnóstico

Protocolo	Anotações
	Aluno 1: Fez certo
	Aluno 2: Fez certo e usou a fórmula de modo adequado
	Aluno 3: Ok, fez certo

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

Na terceira questão, todos os alunos apresentaram respostas corretas. Alguns aparentemente identificaram um padrão na disposição dos dados do quadro sobre as partidas e outros apresentaram fórmulas. Isso pareceu satisfatório para o grupo 1 (Quadro 18).

Quadro 19 – Anotações do grupo 2 sobre a terceira questão do teste diagnóstico

Protocolo	Anotações
	Todos os alunos conseguiram chegar na resposta correta. O aluno 1 não justificou seu raciocínio, o aluno 2 utilizou a fórmula de combinação para determinar o resultado e o aluno 3 justificou seu cálculo de acordo com o número de jogadores e o número de partidas correspondentes
	
	

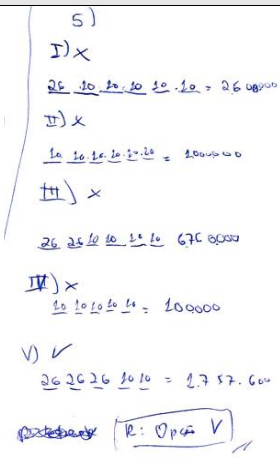
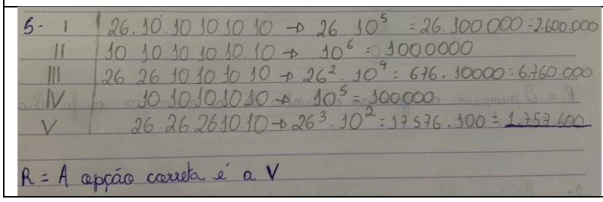
Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

O grupo 2 observou que os protocolos (Quadro 19) apresentaram respostas corretas, mas buscou se atentar a como os estudantes justificaram ou deixaram de justificar suas respostas. Percebemos em suas anotações o esforço de detalhar as respostas, mesmo as corretas, uma vez que elas também precisam ser questionadas e analisadas. O enxerto abaixo traz parte da discussão sobre a resposta do aluno 1.

> **P1**: Nessa aqui ele fez somar 7 para 28 partidas. Aqui [aponta para o quadro] ele fez 1 + 2 = 3 e foi aumentando 1; +2; +3; +4. [aponta para o quadro] 6 + 4 = 10; 10 + 5 = 15; 15 + 6 = 21; 21 + 7 = 28. Ele usou essa estratégia.

Mesmo que o aluno não tenha apresentado uma justificativa para o cálculo, os participantes conseguiram supor uma relação de coerência na resposta do estudante.

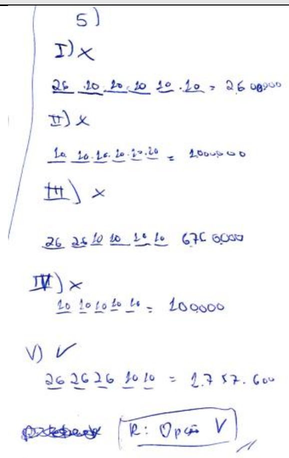
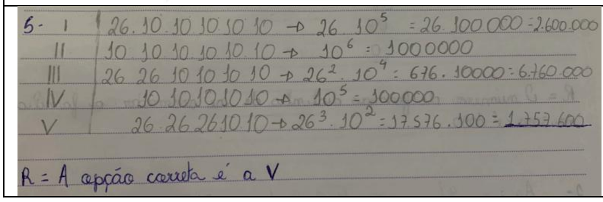
Quadro 20 – Anotações do grupo 1 sobre a quarta questão do teste diagnóstico

Protocolo	**Anotações**
 5) I) x 26.10.10.10.10.10 = 2600000 II) x 10.10.10.10.10.10 = 1000000 III) x 26.26.10.10.10.10 6760000 IV) x 10.10.10.10.10 = 100000 V) ✓ 26.26.26.10.10 = 1.757.600 R: Opção V  5- I 26.10.10.10.10.10 → 26.10^5 = 26.100000 = 2600000 II 10.10.10.10.10.10 → 10^6 = 1000000 III 26.26.10.10.10.10 → 26^2.10^4 = 676.10000 = 6760000 IV 10.10.10.10.10 → 10^5 = 100000 V 26.26.26.10.10 → 26^3.10^2 = 17576.100 = 1757600 R = A opção correta é a V	Aluno 1: Todos fizeram ok e semelhante

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

As anotações do grupo 1 (Quadro 20) para esses protocolos demonstram que os participantes tiveram sucesso nas questões, não necessitando de outras considerações.

Quadro 21 – Anotações do grupo 2 sobre a quarta questão do teste diagnóstico

Protocolo	Anotações
 	Os alunos 1 e 3 acertaram a questão utilizando a mesma estratégia, que foi calculando as possibilidades de senhas para cada caso e comparando os resultados para encontrar o que obedecia aos critérios estabelecidos pela questão

Fonte: Coelho e Dias (2022) e dados da pesquisa.

As anotações do grupo 2 (Quadro 21) demonstram compreensão das estratégias feitas pelos alunos. P1 fez a seguinte análise diante desses protocolos: “essa foi a que teve menos erros, todos chegaram no mesmo resultado. Acertaram o princípio multiplicativo, multiplicaram e compararam os resultados”. As anotações anteriores sobre possíveis erros para essa questão não se confirmaram, uma vez que os protocolos demonstram bom uso do princípio multiplicativo.

Buscamos por meio dessas atividades criar ambientes onde conhecimentos matemáticos inerentes ao ensino da Matemática fossem estimulados, muito embora o pesquisador procurasse exercer pouca interferência nessas atividades, haja vista que os encontros anteriores poderiam servir de base para estas. Ainda assim, o resultado das tarefas exibe conhecimentos do conteúdo de Combinatória, conhecimento de alunos e conhecimentos de ensino.

Na primeira parte do encontro, os participantes demonstram conhecimento de conteúdo ao resolverem questões de situações combinatórias, evidenciando domínio sobre os invariantes, representações simbólicas e reconhecimento de situações combinatórias (Vergnaud, 1986), além do uso do princípio multiplicativo.

Na segunda parte do encontro, os participantes puderam demonstrar conhecimentos de aluno ao tentar prever seus possíveis erros. Baseados nos erros já encontrados em tarefas de encontros anteriores, nos seus próprios equívocos com as situações combinatórias e nas orientações fornecidas também em encontros anteriores, os participantes produziram relatórios de possíveis equívocos, e muitos desses se confirmaram nos protocolos de alunos na última parte da atividade.

A última parte do encontro consistia em analisar os protocolos de alunos. Mais uma vez, conhecimentos de conteúdo e de aluno puderam ser trabalhados. O conhecimento de conteúdo identifica onde está o erro nas atividades dos alunos (Ball; Thames; Phelps, 2008). O conhecimento de aluno pode ser construído ao buscar compreender as soluções e os padrões ou a falta deles em cada protocolo. Reconhecer e entender a natureza dos erros em cada solução pode ter construído, além de habilidade em Matemática, entendimento de como os alunos pensam e reagem a atividades matemáticas, e possivelmente habilidade de ensino.

Diante dos protocolos de alunos, os licenciandos puderam se perguntar o que os estudantes escreveram, além de refletir sobre o que demonstram saber ou não saber. Essas são perguntas diárias de professores que buscam melhorar suas práticas levando em conta feedbacks de tarefas. Acreditamos que atividades desse tipo podem estruturar disciplinas pedagógicas da licenciatura para os mais diversos tipos de conteúdo abordados sobre o ensino básico, estimulando os futuros professores a atuarem como professores pesquisadores de suas próprias práticas. Disciplinas da Matemática pura, voltadas para Álgebra, Geometria e Cálculo, também poderiam ser estruturadas para que os graduandos pudessem refletir sobre seus próprios erros em algum momento.

4.3.4 Encontros 4 e 5

No encontro 4, os participantes se reuniram em grupos para a elaboração do plano de aula. Assim, não tivemos acesso às discussões, apenas aos planos que foram apresentados no encontro 5. Para a elaboração do plano, eles receberam um modelo, para que pudéssemos debater sobre os mesmos pontos com os dois grupos (ver Apêndice A).

No encontro 5, os grupos apresentaram seus planos de aula e foi debatido sobre eles. Discutimos sobre as questões apresentadas e objetivos indicados nos planos de aula. Na análise do grupo 1, os protocolos do teste diagnóstico (protocolos de 10 a 20) revelavam que os estudantes não conseguiam usar a fórmula na situação correta, apesar de conhecerem as fórmulas. Portanto, eles propuseram um conjunto de atividades na qual os estudantes teriam apenas que classificar qual era o tipo de problema (Arranjo Simples, Permutação Simples e Combinação Simples). Nos Anexos A e B apresentamos os planos de aula na íntegra. Aqui, apresentamos alguns tópicos nos quadros a seguir.

No plano de aula do grupo 1, o objetivo foi “diferenciar o tipo de agrupamento utilizado”. Metodologicamente, eles pretendiam discutir as diferenças entre os problemas, que chamaremos aqui de problemas introdutórios, mostrando para os alunos suas particularidades e, em seguida, pedir a seus estudantes que classificassem e resolvessem três problemas (Arranjo, Permutação e Combinação), que chamaremos de exercícios de fixação. No Quadro 22, apresentamos os problemas propostos pelo grupo 1.

Quadro 22 – Exercícios selecionados para plano de aula pelo grupo 1

Tópicos	Problemas Combinatórios	Classificação
Problemas Introdutórios	1) Quantos códigos de 3 letras são possíveis de serem criados com as letras do alfabeto?	Arranjo com repetição
	2) Para realizar uma prova, um professor elaborou 6 tipos de provas distintas apenas pelas cores e ordem das questões. Nessa configuração, qual é a quantidade de maneira distintas que os alunos Pedro, José, Maria e Antônio podem pegar nessas provas considerando que existem apenas um tipo de cada prova à disposição dos alunos?	Arranjo simples
	3) Uma turma de 7 alunos está brincando no pátio aproveitando a hora do intervalo. Ao ouvir o sinal que informa o retorno para as salas de aula, os alunos se encaminham para formar uma fila. De quantas maneiras distintas os alunos podem formar a sequência da fila?	Permutação simples
Exercícios de Fixação	1) Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1,2,3, 7, 8?	Arranjo simples
	2) Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: GUARANÁ, SODA e TÔNICA de quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerante?	Combinação com repetição
	3) Uma classe tem meninas a e b meninos. De quantas formas eles podem ficar em fila se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (supor que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso)	Não é um problema da Combinatória

Fonte: Elaboração própria.

Ball, Thames e Phelps (2008) definem que, no domínio do conhecimento de ensino, os professores devem escolher cuidadosamente os exemplos que guiarão as instruções dos alunos de acordo com seu objetivo. As falas dos integrantes do grupo 1 revelam a intenção deles com o plano de aula.

> **P4**: A priori a gente pensou em fazer uma breve discussão apresentando qual caso se aplica em qual caso, ou seja, se é Permutação, se é Arranjo ou uma Combinação. Ou seja, apresentar todo o contexto geral para [...] ir à raiz do erro do estudante. E, em seguida, identificar, já que o problema em essência não era de fato só aplicar a fórmula, pelo menos as fórmulas eles conseguiam fazer uma dada manipulação. A gente pensou que ele poderia fazer uma classificação dos problemas, para ver se eles conseguem compreender como que cada agrupamento funciona em cada questão, por exemplo, se era um arranjo, uma combinação, para de fato eles tirarem o erro deles, que majoritariamente consistia em qual caso é cada caso.

Percebemos que a escolha dos problemas introdutórios tinha a intenção de estruturar o conhecimento de Combinatória a partir de situações de Arranjo Simples, Permutação Simples e Combinação Simples. Porém, quando analisamos as questões escolhidas, observamos que nem todas as situações combinatórias foram selecionadas, apenas Permutação Simples, Arranjo Simples e com repetição. Por outro lado, quando analisamos os exercícios de fixação, que serviriam para o aluno treinar o ato de classificar os problemas, observamos que um deles (problema 3) não era realmente uma questão de Combinatória; era um problema de Combinação com repetição (problema 2), que não foi trabalhado com os participantes no processo formativo. Apenas o problema de Arranjo Simples estava de acordo com a intenção deles.

O número de escolhas em cada uma das situações nos pareceu adequado, haja vista que o grupo tinha intenção numa perspectiva introdutória. Como dois dos exercícios de fixação (problemas 2 e 3) nos pareceram se distanciar daquilo que eles gostariam de observar dos alunos, decidimos questionar se eles tentaram resolver as questões. Eles responderam da seguinte forma:

> **P4**: Em essência a gente não chegou a resolver porque o objetivo central da aula não era que eles [alunos] tivessem que resolver, mas sim identificar. Porque o erro estava de fato na identificação, a gente não queria focar em que eles resolvessem, e sim só identificar.

Observamos que, por mais que os licenciandos não tivessem resolvido as questões, ao ler determinado enunciado o professor precisa refletir sobre a coerência e a imprecisão do mesmo, assim como deve ocorrer na leitura de definições e teoremas (Ball, Thames; Phelps, 2008). Isso faria com que as escolhas das questões recaíssem sobre os problemas que eles realmente queriam tratar.

Embora os participantes tivessem feito uma observação pertinente sobre os erros dos protocolos de alunos, como o uso inadequado das fórmulas, que demonstra conhecimento de aluno, neste caso, por não suportar os objetivos elencados, o conhecimento de ensino ficou aquém. A resolução das atividades propostas pelos licenciandos, juntamente com o conhecimento de alunos, poderia os levar a fazerem melhores escolhas.

O grupo 2 (P2, P4, P6) também observou que boa parte dos erros dos protocolos consistia no uso inadequado de fórmulas, ou seja, os alunos não conseguiam diferenciar quando era Arranjo ou Combinação. Assim, eles selecionaram dois objetos de conhecimento para serem estudados: princípio multiplicativo e diferença entre Arranjo e Combinação Simples. Seus objetivos foram “compreender e aplicar o princípio multiplicativo em problemas de arranjo e combinação; capacitar o aluno a diferenciar problemas de arranjo e de combinação simples”, de acordo com o Protocolo de Pesquisa. Aparentemente, existe um estímulo nesses objetivos ao abandono do uso de fórmulas.

A metodologia descrita pelo grupo consiste em realizar uma primeira atividade abordando o princípio multiplicativo, seguida de exemplos utilizando Arranjo e Combinação Simples. Essas atividades, que chamamos de **problemas introdutórios**, seriam seguidas por um conjunto de exercícios, que chamamos de **exercícios de fixação**, selecionados para que os alunos pudessem praticar. No Quadro 23 segue a relação dos problemas e nossa classificação sobre os mesmos.

Quadro 23 – Exercícios selecionados para plano de aula pelo grupo 2

Tópicos	Problemas Combinatórios	Classificação
Problemas Introdutórios	1) Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida, pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?	Produto de Medidas

	2) De quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem organizar uma fila composta por 4 delas?	Arranjo simples
	3) Quantas combinações são possíveis de serem formadas se em um conjunto de cinco frutas distintas escolhermos três para montar uma salada?	Combinação simples
Exercícios de Fixação	1) Uma empresa está desenvolvendo dois sistemas: um para gerar senhas e outro para formar equipes de trabalho. Com base nas descrições abaixo, responda às perguntas: As senhas serão formadas por 4 caracteres, sendo 2 letras e 2 números. As letras serão escolhidas do conjunto {A, B, C, D} e os números do conjunto {1, 2, 3}. (a) Quantas senhas diferentes podem ser formadas se não houver repetição de caracteres? (b) Quantas senhas diferentes podem ser formadas se os caracteres puderem se repetir?	Arranjo simples e Arranjo com repetição
	2) Um projeto será desenvolvido por 5 pessoas. Para organizar as tarefas, as equipes serão formadas de duas maneiras diferentes: (a) Para uma atividade em que a ordem dos membros importa, quantas equipes diferentes de 3 pessoas podem ser formadas? (b) Para outra atividade em que a ordem não importa, quantas equipes diferentes de 3 pessoas podem ser formadas?	Combinação e Arranjo simples
	3) Razão e Interpretação (a) Qual é a razão entre as possibilidades com e sem repetição de caracteres na formação das senhas do item 1? (b) (c) Explique por que a quantidade de equipes no item 2(a) é diferente da quantidade no item 2(b).	Continuação do exercício anterior
	4) No meio da “invasão tecnológica” que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que a senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição. Qual é o número máximo de tentativas que o banco	Arranjo com dois elementos explicitados e um elemento fixo explicitado em determinada

	deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?	posição (Braz; Borba, 2012).
	5) Durante os experimentos sobre genética, Mendel precisou escolher 3 mudas diferentes de ervilha para serem cobaias do mesmo experimento. Sabendo que ele tinha disponível 10 mudas naquele dia, então o número de maneiras distintas que ele poderia escolher as cobaias é igual a: (a) 90 (b) 120 (c) 160 (d) 200 (e) 240	Combinação simples

Fonte: Elaboração própria.

Observamos que as escolhas dos problemas do grupo 2 estão compatíveis com os objetivos que se propuseram a trabalhar. O primeiro momento é constituído por três exemplos introdutórios, onde são trabalhados exemplos de Produto de medidas, Arranjo Simples e Combinação Simples. Os exercícios de Arranjo e Combinação possuem poucos elementos e poucas etapas de escolhas, o que pode ser compatível com a exploração de várias estratégias de contagem, incluindo listagem sistemática. Além disso, é citado o uso de material dourado nesse primeiro momento, mas não há muitos detalhes de como isso pode ser explorado.

A construção do grupo 2 está acompanhada de conhecimentos de Combinatória, conhecimentos de aluno e conhecimento de ensino, pois percebemos domínio do conteúdo sendo externado pelos conhecimentos dos tipos de situações combinatórias e da preocupação com os invariantes de ordem, como proposto por Vergnaud (1986) e Pessoa e Borba (2010). As escolhas das questões foram pensadas para sanar dificuldades dos estudantes como parte do conhecimento de aluno, além do sequenciamento das questões para promover melhor aprendizagem, como parte do conhecimento de ensino. No enxerto abaixo podemos entender as intenções do grupo.

> **P1**: [...] os objetos do conhecimento são o princípio multiplicativo e trabalhar as diferenças entre Arranjo e Combinação. Porque o que a gente viu que a maioria dos erros que estavam nas questões era isso. Ele não estava conseguindo diferenciar quando era Arranjo ou Combinação. Aí consiste no seguinte, trabalhar com exemplos, está aqui um exemplo com o princípio multiplicativo para eles entenderem que pelo princípio multiplicativo é possível resolver os dois tipos de questões [ler e explicar o exemplo 1].

Na sequência, o participante fala sobre os outros exemplos.

> **P1**: Outro exemplo sobre Arranjo [ler o enunciado da questão]. Aí eles veriam que a ordem importa por causa de uma fila [pausa]. Eles seriam alertados para tentar compreender o contexto da questão para saber que, quando

> temos uma fila, a ordem vai importar. [...] O terceiro exemplo é sobre uma Combinação Simples, perguntando assim [ler o enunciado do problema 3]. Então as três vão estar ali no mesmo conjunto, não vai importar a ordem que elas foram escolhidas, no final o produto ali vai ser uma salada.

Ball, Thames e Phelps (2008) definem que, no conhecimento de ensino, os professores sequenciam os conteúdos, escolhem os exemplos para introduzir e os outros que serão usados para aprofundar. Notamos, por meio das falas de P1, que as escolhas dos problemas introdutórios foram cuidadosamente pensadas para subsidiar os objetivos de aula. A abordagem do princípio multiplicativo como uma estratégia para subsidiar a aprendizagem, na qual o uso de fórmulas pode ser ocultado, demonstra mais uma vez o conhecimento de ensino. Quanto a isso, Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que os professores que conhecem diferentes modelos de instrução viáveis estão usando um conhecimento de ensino.

Com respeito à escolha dos exercícios de fixação, o grupo justificou da seguinte forma:

> **P1**: Aqui foram uns exercícios que a gente foi pensando [aponta para os exercícios de fixação, ver Quadro 23]. [...] Seria para eles irem conhecendo e tirando dúvidas. Seria assim, prestando um auxílio para eles pensarem se a ordem importa ou se a ordem não importa. Foi pensado dessa maneira.

Os exercícios de fixação foram escolhidos para que os estudantes pudessem aplicar os conhecimentos enfatizados nos problemas introdutórios e, com o auxílio do professor, novamente apontando para os invariantes de ordem dos problemas.

A atividade final (exercícios de fixação) exigiu dos licenciandos conhecimentos sobre diversas perspectivas condicionadas ao ensino de Matemática. O estudo sobre erros e acertos, o conhecimento sobre a Combinatória (situações, invariantes e representação simbólica), a reflexão dos exercícios e seus enunciados, a escolha de exemplos iniciais e exercícios para prática os levaram a refletir sobre as questões pedagógicas da Matemática.

Devemos considerar que a criação de um plano de aula focado nos erros demanda um conhecimento especializado, quando o erro não é um erro já conhecido pelo professor, muito embora os erros desta última atividade apresentem similaridade com os que foram trabalhados em questões anteriores. Os licenciandos tiveram suas primeiras experiências imersivas neste processo formativo ao trabalhar com protocolos de alunos, mas ainda estão aprimorando seus conhecimentos de professor, muito embora a sala de aula os espere com todos esses conhecimentos bem estabelecidos para gerir todas as demandas que o ambiente exige. Assim, os conhecimentos e reflexões dos encontros anteriores puderam nortear escolhas das atividades e percepções sobre os erros dos alunos, conhecimento do conteúdo e de estratégia de ensino.

Acreditamos que ambientes como esses, de produção e discussão de planos de aula, favoreçam a construção de diversos tipos de conhecimentos pertinentes à prática do professor, como questões avaliativas, planejamento e sequenciamento de atividades, criação de materiais, entre outros construtos pedagógicos do ambiente escolar. Acreditamos que, se disciplinas da graduação oferecessem atividades como essas, os futuros professores poderiam ampliar o conhecimento sobre a prática docente real da sala de aula.

4.4 ENTREVISTA FINAL

A entrevista final teve por objetivo verificar as percepções de três participantes (P1, P2 e P5) após o processo formativo. De forma mais específica, objetivamos analisar o desenvolvimento do conhecimento de Combinatória e de alunos a partir de problemas combinatórios e atividades envolvendo protocolos de alunos desenvolvidas no processo formativo. Como mencionamos na metodologia, a entrevista final foi feita com os mesmos participantes da primeira entrevista.

Sintetizamos as respostas por meio de quadros para facilitar a compreensão das respostas dadas pelos diferentes participantes às mesmas perguntas.

Quadro 24 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 1

Pesquisador	**Como foi para você participar desse curso? Você conseguiu acompanhar o desenvolvimento das questões? Você sentiu dificuldade para fazer alguma questão?**
P1	Para mim o curso foi tranquilo. A metodologia do curso foi bem proveitosa, a gente conseguiu ter uma noção de erros que os alunos poderiam cometer, né? Aí, é bom ver para a gente ter uma noção dos erros que podem confundir e até a gente mesmo pode cometer. Então, se a gente já teve contato com esse conteúdo e comete erros, é muito provável que eles vão cometer também. Aí, é bom que a gente tenha um preparo ali, para quando erros assim surgirem a gente ter uma base trabalhar

P2	Eu acho que a experiência foi muito boa pelos debates que a gente teve, principalmente quando a gente estava respondendo as questões junto com todo mundo. Quando a gente começou a avaliar qual era a resposta de cada um e principalmente a questão de trabalhar com as interpretações. Interpretações que eu achei bastante interessantes na proposta do minicurso, porque às vezes eu tinha muita dificuldade para poder entender a diferenciação entre algumas coisas, aí parando para pensar que muitos alunos tinham essa mesma dificuldade que eu, deu para eu expandir mais os horizontes, sabe?
P5	Para mim foi bom porque eu aprimorei um conhecimento que eu estou vendo que chega até mim nos últimos anos, na vida social eu escuto lições ou palavras dessas de aprender com os erros. E acredito que é algo bom, porque assim nós acabamos de evitar os erros com frequência, se a gente puder antecipar os erros. [...] mas acredito que a maior dificuldade para aprender com o erro é a similaridade entre o que é o certo e o que é o errado

Fonte: Elaboração própria.

As falas indicam uma avaliação positiva do processo formativo, enfatizada por argumentos que contemplam evolução no aprendizado e reflexão sobre a importância de estarem preparados para os desafios da docência. P1 enfatizou o quão importante é ter uma base para trabalhar com os erros dos estudantes, P2 apontou dificuldade em saber diferenciar os problemas combinatórios e o quanto é importante saber que essa também é uma dificuldade dos alunos e, por fim, P5 acredita ter aprimorado seus conhecimentos e levanta reflexões sobre a vantagem de se antecipar os erros.

De fato, o trabalho com os erros trouxe reflexões importantes a respeito do trabalho docente, e as falas dos participantes revelam que as tarefas empregadas durante o curso exigiram uma interação entre conhecimento matemático e compreensões pedagógicas relacionadas ao aprendizado do estudante. Diante do exposto, consideramos que o conhecimento de aluno e o conhecimento de ensino, mesmo que os participantes não tenham noção da existência deles, foram acionados durante as atividades e também estão presentes nos fragmentos de suas falas.

No Quadro 25 apresentamos o questionamento quanto ao nível de dificuldade das questões abordadas no processo formativo.

Quadro 25 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 2

Pesquisador	**Qual foi a questão que você achou mais difícil?**
P1	Teve uma não muito difícil, mas eu achei um pouco complexa pelo contexto das poltronas do avião [Questão 1 do teste diagnóstico]. Aquela questão ali eu achei muito propensa ao aluno errar. Mas, debatendo eu compreendo o contexto dela e a gente consegue resolver
P2	Tinha umas que até eram intuitivas, mas talvez seja porque a gente tem uma base, então para a gente pode ser mais intuitiva, e tinha outra que eu tive um pouco de dificuldade para responder. Por exemplo, a da nossa última atividade, teve uma questão que eu fique perdido. O meu colega de grupo que conseguiu me explicar como que fazia, mas tive um pouco de dificuldade para entender. Tem questão que só ler o enunciado já confunde sua mente. Tive que ler bastante vezes para poder entender. Mas, tirando isso, as outras questões foram fáceis de entender, mas foi o que eu falei, eu acho que é porque a gente tem uma base, então já ajuda bastante
P5	Agora eu não estou sabendo te responder, porque a gente viu bastante exemplos, vimos os alunos a forma como eles usavam. E sinceramente, agora para te responder eu não tenho certeza.

Fonte: Elaboração própria.

Nesta pergunta, buscamos identificar se algum problema combinatório foi mais desafiador para os participantes. Apenas P1 conseguiu mencionar uma questão específica. Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401, **tradução nossa**), quanto ao conhecimento de aluno, afirmam que “os professores devem prever o que os alunos provavelmente pensarão e o que eles acharão confuso”. A opinião de P1 vai ao encontro de tais considerações.

P2 alegou ter encontrado questões difíceis, mas, com a ajuda de colegas, conseguiu entender o problema. Segundo ele, por causa de sua bagagem de conhecimentos, não teve tanta dificuldade em acompanhar o processo formativo. P5 não se lembra de ter tido dificuldades.

Na sequência, questionamos os licenciandos a respeito de sua confiança para resolver problemas combinatórios. As respostas seguem no Quadro 26.

Quadro 26 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 3

Pesquisador	Você se sente mais confiante para resolver problemas combinatórios?
P1	Sim, me sinto sim! Me ajudou a estudar um pouco mais o conteúdo
P5	Sim. Acredito que fortaleceu meu conhecimento, me trouxe mais confiança. [...] As notícias que chegam até mim sobre esse assunto e mais outras pessoas que percebem que estão entendendo isso, que o erro é também um método para a gente poder analisar para poder acertar depois. Algo que a gente pode usufruir para chegar ao acerto

Fonte: Elaboração própria.

Quando fizemos esta mesma pergunta na entrevista inicial, tanto P1 quanto P5 responderam que não se sentiam confiantes com este conteúdo. Assim, com o fim do processo formativo, suas percepções mudaram e eles sentem que conseguem dominar o conhecimento desse conteúdo. Quanto ao conhecimento do conteúdo, Ball, Thames e Phelps (2008) alertam que, quando o professor tem pouco domínio sobre o conteúdo e comete erros ou se perde na explicação, gera perda de tempo de instrução, podendo deixar os alunos confusos. Além disso, esse conhecimento serve de base para dominar outros conhecimentos, como o pedagógico. Assim, se o professor tiver dificuldades com estes conhecimentos, é provável que seus alunos também tenham.

Na quarta pergunta, questionamos os participantes a respeito do princípio multiplicativo (Quadro 27).

Quadro 27 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 4

Pesquisador	A forma de pensar do princípio multiplicativo trouxe mais esclarecimento sobre soluções de problemas combinatórios?
P1	Eu gosto de usar o princípio quando não tem combinação, onde os elementos não vão se repetir. Porque eu usando só o princípio multiplicativo eu particularmente tendo a me perder no número de repetições que teve. Quando é combinação eu prefiro usar a fórmula e quando é arranjo, quando a ordem importa e não vai ter nenhuma repetição eu prefiro usar o princípio multiplicativo
P2	Eu acho que ajudou bastante porque a gente não fica preso na questão das fórmulas. Você sabe que tem outras maneiras de responder e que são até mais fáceis. Eu fazia isso antes, mas eu nem tinha noção que estava fazendo isso, eu vim ter mais clareza com esse minicurso. Porque antigamente quando eu tinha problemas, sei lá, de permutação por exemplo, eu já ficava pensando em fórmulas. Eu ficava pensando meu Deus o que que eu vou fazer, e quando você sabe que pode construir aqueles tracinhos e ir multiplicando já ajuda bastante, do que ficar preso

	numa questão porque você está tentando adivinhar as fórmulas. Acho que isso foi muito proveitoso, pelo menos para mim, né?
P5	Sim, sim, de certo modo, porque entende que quando a gente está com nosso conhecimento ali em prática a gente sempre vai fazer o que nos foi ensinado, né? E as vezes, quando a gente acaba tendo um erro a gente vai procurar o professor ou alguém que tem o conhecimento para a gente aprender

Fonte: Elaboração própria.

As respostas dos participantes indicam que o princípio multiplicativo contribuiu para o aprendizado deles, muito embora, no caso de P1, ainda encontre dificuldade para usar esse raciocínio em situações de Combinação. P2 alegou que agora consegue ao menos começar as questões utilizando os “tracinhos” para ir apresentando as escolhas/decisões. Formas alternativas de apresentar soluções são um conhecimento de conteúdo, pois o professor consegue avaliar as vantagens e desvantagens de usar certas representações (Ball; Thames; Phelps, 2008).

Na sequência, questionamos os futuros professores a respeito da confiança deles em conduzir uma aula sobre Combinatória (ver Quadro 28).

Quadro 28 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 5

Pesquisador	**Você se sente confiante para conduzir uma aula sobre o conteúdo de Combinatória?**
P1	Sim, planejando por etapas dá para organizar bem a aula
P2	Eu acho que eu me sinto e principalmente porque recentemente eu tive que preparar um plano justamente para essa área. Então, já vi isso antes, vou tentar aproveitar o que eu já aprendi. Aí me deu mais confiança para eu fazer principalmente o conteúdo de Arranjo, Permutação, Combinação. Aí, como a gente já tinha explorado e já discutiu metodologia e essas coisas, eu aproveitei para usar para mim mesmo. Obviamente ainda tem algumas coisas que eu acho que eu preciso melhorar, isso é desenvolvimento pessoal meu, eu preciso correr atrás em algumas coisas que eu tenho dificuldade, mas em si, ajudou bastante a tirar as outras dúvidas que eu tinha. Principalmente aquela questão que eu falei sobre permutação e interpretação. Sem dúvidas foi muito proveitoso
P5	Sim, concordo!

Fonte: Elaboração própria.

As respostas demonstram que os participantes se sentem mais confiantes. P2 menciona que a experiência de ter feito um plano de aula durante o processo formativo lhe deu mais segurança com a Combinatória, apesar de reconhecer que ainda precisa evoluir, pois, em algumas situações, ele encontra dificuldades com os invariantes. P1 se sente mais confiante, mas percebe que é preciso planejar por etapas.

Buscamos, durante o processo formativo, trabalhar diversos aspectos voltados para o ensino e aprendizagem de Combinatória, além de promover atividades práticas comuns ao dia a dia do professor. No entanto, muitos outros aspectos são necessários para o professor ter confiança, e poucas horas de formação não dão conta disso. O exposto pelos participantes nos indica que eles entendem a necessidade de planejamento e aprofundamento dos seus conhecimentos do conteúdo.

Na pergunta 6, questionamos os participantes quanto às experiências com os registros de alunos.

Quadro 29 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 6

Pesquisador	Como foi para você conhecer registros de alunos em problemas combinatórios?
P1	Foi interessante, porque eu ainda não tive a oportunidade de trabalhar em sala de aula com o conteúdo de Combinatória. Acho que foi interessante ver como os alunos podem vir a responder as questões do conteúdo, aí eu gostei
P2	Eu nunca havia tido essa experiência de corrigir em si uma questão de aluno. A primeira vez foi no ensino médio, mas nem era sobre combinação era sobre outras coisas. Quando eu vi agora, eu percebi que os alunos são muito distintos nas respostas deles, nunca vai ser padronizado, sabe? Às vezes tem uns [registros] muito difíceis de compreender. Tem uns que só colocam a resposta, aí você fica, meu Deus, o que ele pensou? Ele conseguiu responder direito, ele colou de alguém? Ele sabe fazer ou não sabe fazer? Então é muito difícil você está aberto a interpretações. Mas em geral é muito bom a gente ir tendo essas experiências com as respostas dos alunos para a gente ir se acostumando. Toda experiência é muito bem-vinda. Então você vai se acostumando a tentar pensar o que o aluno pensou - Olha até aqui ele seguiu o raciocínio direitinho. Aqui ele se perdeu um pouquinho. Acho que é uma experiência muito boa você trabalhar com os erros dos alunos e com as respostas deles, tanto as erradas como as certas. Aí no meu caso como eu não tive tanta experiência assim, quanto mais experiência eu for tento é mais vantajoso para mim. Então eu acho muito bom!
P5	Eu não cheguei a ver em algum outro canto se eu não tiver errado, se minha memória não estiver falha. Eu recentemente no início do curso comecei a buscar acesso a livros da área de ensino daquelas disciplinas que a gente precisa ser formados para nos formar como professores. Eu conheci métodos que são métodos de pesquisa científica de testagem, algo que eu não tinha tanta certeza se ia me produzir a possibilidade de aprender com os

	erros. Eu acredito que foi bom eu ter acesso a essa pesquisa e a esse conhecido porque eu não tinha pesquisado até o momento por mais que tenha chegado informação sobre

Fonte: Elaboração própria.

As respostas dos licenciandos indicam que não haviam tido contato com protocolos de alunos sobre o conteúdo de Combinatória e, por esse motivo, acharam interessante ter essa experiência. P2, ao relatar sua experiência, descreve que os protocolos são bastante distintos, alguns de difícil compreensão e, em outros, é possível perceber o acerto e o erro do aluno.

Acreditamos que essa experiência pode ter levado os participantes a questionar erros e acertos e não simplesmente ignorá-los. Essa postura investigativa de P2 é esperada de docentes que reconhecem que os erros podem contribuir para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Na sequência, os questionamos sobre suas crenças a respeito dos erros no ensino e aprendizagem de Matemática.

Quadro 30 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 7

Pesquisador	Você acredita que os erros podem contribuir de alguma forma para o ensino e aprendizagem de Matemática? Você saberia como?
P1	Sim, sim! Porque uma vez que a pessoa erra, meio que é difícil a pessoa esquecer. Aí, o professor trabalhando naquele erro para corrigir tende a ser menos recorrente. Acredito que sim. Eu tentaria ver os erros e ir pontuando, eu veria aqueles que são mais comuns, trazendo para o contexto da sala de aula, eu tentaria observar quais erros que mais ocorreram aí, a próxima aula seria focada nesses erros para que fossem menos recorrentes, tentar corrigir aqueles erros ali
P2	Sem dúvidas pode. Foi isso que a gente fez no nosso último trabalho do plano de aula, que a gente trabalhou com os erros deles para poder montar um plano, para poder fazer com que eles aprendessem no que estavam errando, acho que é bastante proveitoso. Quando você percebe onde os alunos estão errando, você tem meio que um caminho a seguir, sabe? Se você viu que a maioria está errou em tal quesito, você vai poder focar nesse quesito. Vai pode englobar a maioria. Aí, tem uma minoria que ficou perdida em continhas básicas, por que não tirar 5 minutos da aula para focar nessas coisas, sabe? Acho que é muito proveitoso você aprender com os erros do aluno e você criar tanto planos de aula quanto metodologias para poder sanar esses erros. É óbvio que você não vai conseguir contemplar tudo, porque tem erros que já vai acompanhando os alunos a muito tempo, sabe? Você vai tentar com que eles não cometam mais, mas alguns já estão na

	cabeça deles, então você tentar que eles errem menos vezes possíveis. Acho importante a gente trabalhar isso
P5	Porque assim, durante a prática o erro acontece, né? Um exemplo, em física a gente precisa transformar um valor de uma unidade de medida para outra, de metros por segundo para quilômetros por hora. E, às vezes, na prática a gente percebe que encontrar esse tipo de erro, né? Então, eu acho que quando a gente percebe os erros, como a gente está buscando a perfeição, algo corre de ser feito a gente vai querer entender aquele erro que a gente acabou de cometer. Isso é bom, isso é necessário porque a perfeição no nosso dia a dia ela existe, a probabilidade de a gente errar e aprender com o erro nos faz superar um problema que está por vir

Fonte: Elaboração própria.

Esta pergunta também foi feita na entrevista inicial e, naquele momento, P1 e P2 acreditavam que os erros poderiam contribuir de alguma forma. As respostas de agora demonstram que eles não só acreditam, como também compreendem como isso pode acontecer. P1 menciona que o papel sensível do professor a essas questões pode ajudar os estudantes a evoluírem, como quando diz que ele analisaria os erros e, os mais comuns, planejaria uma intervenção. A mesma visão é compartilhada por P2, demonstrando assim atitudes compatíveis com os conhecimentos de aluno e de ensino elencados por Ball, Thames e Phelps (2008).

Por fim, questionamos os licenciandos quanto às contribuições do conhecimento dos erros na elaboração do planejamento do professor.

Quadro 31 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 8

Pesquisador	**Você acredita que os erros podem contribuir de alguma forma para o ensino e aprendizagem de Matemática? Você saberia como?**
P1	Sim, sim! Porque uma vez que a pessoa erra, meio que é difícil a pessoa esquecer. Aí, o professor trabalhando naquele erro para corrigir tende a ser menos recorrente. Acredito que sim. Eu tentaria ver os erros e ir pontuando, eu veria aqueles que são mais comuns, trazendo para o contexto da sala de aula, eu tentaria observar quais erros que mais ocorreram aí, a próxima aula seria focada nesses erros para que fossem menos recorrentes, tentar corrigir aqueles erros ali
P2	Sem dúvidas pode. Foi isso que a gente fez no nosso último trabalho do plano de aula, que a gente trabalhou com os erros deles para poder montar um plano, para poder fazer com que eles aprendessem no que estavam errando, acho que é bastante proveitoso. Quando você percebe onde os alunos estão errando,

	você tem meio que um caminho a seguir, sabe? Se você viu que a maioria está errou em tal quesito, você vai poder focar nesse quesito. Vai pode englobar a maioria. Aí, tem uma minoria que ficou perdida em continhas básicas, por que não tirar 5 minutos da aula para focar nessas coisas, sabe? Acho que é muito proveitoso você aprender com os erros do aluno e você criar tanto planos de aula quanto metodologias para poder sanar esses erros. É óbvio que você não vai conseguir contemplar tudo, porque tem erros que já vai acompanhando os alunos a muito tempo, sabe? Você vai tentar com que eles não cometam mais, mas alguns já estão na cabeça deles, então você tentar que eles errem menos vezes possíveis. Acho importante a gente trabalhar isso
P5	Porque assim, durante a prática o erro acontece, né? Um exemplo, em física a gente precisa transformar um valor de uma unidade de medida para outra, de metros por segundo para quilômetros por hora. E, às vezes, na prática a gente percebe que encontrar esse tipo de erro, né? Então, eu acho que quando a gente percebe os erros, como a gente está buscando a perfeição, algo corre de ser feito a gente vai querer entender aquele erro que a gente acabou de cometer. Isso é bom, isso é necessário porque a perfeição no nosso dia a dia ela existe, a probabilidade de a gente errar e aprender com o erro nos faz superar um problema que está por vir

Fonte: Elaboração própria.

Esta pergunta também foi feita na entrevista inicial e, naquele momento, P1 e P2 acreditavam que os erros poderiam contribuir de alguma forma. As respostas de agora demonstram que eles não só acreditam, como também compreendem como isso pode acontecer. P1 menciona que o papel sensível do professor a essas questões pode ajudar os estudantes a evoluírem, como quando diz que ele analisaria os erros e, os mais comuns, planejaria uma intervenção. A mesma visão é compartilhada por P2, demonstrando assim atitudes compatíveis com os conhecimentos de aluno e de ensino elencados por Ball, Thames e Phelps (2008).

Por fim, questionamos os licenciandos quanto às contribuições do conhecimento dos erros na elaboração do planejamento do professor.

Quadro 32 – Entrevista final: Respostas dos participantes à pergunta 8

Pesquisador	**Ter conhecimento dos erros pode de alguma forma ajudar o planejamento do professor? Você saberia como?**
P1	Sim, acredito que sim! Porque tendo ali ciência dos erros que são mais propensos a acontecer o professor pode pensar em metodologias para que esses erros não sejam cometidos. Metodologias que favoreçam o raciocínio que vai evitar que esse erro ocorra
P2	Acho que sim! Se o professor estiver introduzindo um conteúdo ele quer fazer como se fosse uma avaliação diagnóstica, sabe? Ele

	quer saber no que os alunos estão com dificuldade, ele quer saber o que que os alunos não estão conseguindo compreender. Ou então, ele está dando um conteúdo e já tem um tempo que ele quer saber no que os alunos ainda têm dificuldade. Trabalhar com erros é bastante importante nisso, pois é no teste mesmo que os alunos vão demonstrar o que eles sabem o que eles não sabem. [...] a partir disso, trabalhando com os erros, o professor saberia qual caminho seguir para trabalhar com eles, a meu ver
P5	Sim, e isso me leva a pensar como professor que é muito bom estar em nossos grupos e convívio com outros professores para que a gente possa perceber os erros que não só acontece com a gente, mas com outros e assim, antecipar erros venham estar presente em nosso dia a dia

Fonte: Elaboração própria.

As respostas nos indicam que os entrevistados acreditam que, de alguma forma, os erros podem ajudar no planejamento do professor. P1 menciona que, conhecendo os erros mais comuns, o professor pode propor formas de ensinar que evitem que eles se repitam. Essa resposta vai ao encontro das características de conhecimento de aluno e de ensino, uma vez que podem evitar que os erros permaneçam, ou seja, propõem formas de ensino que possam desestabilizá-los.

P2 também demonstrou saber como os erros podem ajudar, ao descrever o trabalho de um professor investigador da própria prática, quando menciona a avaliação diagnóstica e atividades que podem servir de base para propor novos caminhos de ensino. Em suma, novamente observamos conhecimento de aluno dando suporte para melhorar o conhecimento de ensino.

Sabemos que os erros possuem uma perspectiva negativa, sobretudo quando se trata de aprendizagem de Matemática. Assim, buscamos nessas entrevistas entender como foi a experiência dos licenciandos ao ter contato com protocolo de alunos, atividades envolvendo análise de erros e planejamento de aulas. Notamos que a experiência foi importante por despertar nos participantes o interesse em aprimorar seus conhecimentos de Combinatória, entender um pouco de suas dificuldades e saber que essas são as mesmas que seus alunos podem ter.

Em suma, a entrevista final levantou informações já evidenciadas em diversos momentos das atividades, que proporcionaram crenças, reflexões e atitudes. Observamos evoluções nas crenças que podem levar a atitudes, como é o caso em que os licenciandos acreditam que os erros podem contribuir de alguma forma para o ensino e aprendizagem de Matemática, mas, mais do que isso, eles agora têm noção do que pode ser feito para trabalhar com os erros.

Consideramos que o processo formativo contribuiu com a ampliação de conhecimentos de Combinatória pelos participantes, uma vez que se manifestaram mais confiantes com este conteúdo. Além disso, eles também mencionaram sentir-se mais confiantes para ministrar aulas de Combinatória, uma vez que as atividades de planejamento de aula lhes trouxeram essa experiência.

O estudo das respostas, acertos e erros por meio dos protocolos também se tornou uma experiência diferenciada, levando os licenciandos a se questionar como ou o que o aluno pensou, até onde uma determinada estratégia apresenta falhas ou em que momento ela não apresenta. Ter conhecimentos sobre os alunos pode ter mudado suas visões sobre a apresentação do conteúdo. Sequenciar tarefas também foi uma atividade importante para desenvolver seus conhecimentos de ensino.

Apresentamos o princípio multiplicativo como forma alternativa de resolução de problemas combinatórios. Houve boa aceitação por parte dos licenciandos a respeito desse método, sendo que alguns se sentem mais confiantes para usá-lo em problemas que não são de combinação (P1), enquanto outros, como P2, até consideram que pode ser mais fácil resolver por essa maneira.

As entrevistas evidenciaram que, à medida que os licenciandos discorriam sobre suas opiniões e reflexões sobre a experiência vivida durante o processo formativo, conhecimentos de conteúdo, de alunos e para o ensino foram apresentados. O conhecimento do conteúdo de Combinatória pode ser observado quando os participantes admitem sentir-se mais confiantes para resolver problemas combinatórios, mas também quando percebem a necessidade de aprofundar mais o conhecimento desse conteúdo.

O conhecimento de aluno foi externado quando os licenciandos afirmaram que observar os erros pode, de alguma forma, contribuir para o ensino e aprendizagem de Matemática, uma vez que perceberam que podem monitorar os erros mais comuns dos estudantes. O conhecimento de ensino também foi evidenciado nessa perspectiva, uma vez que os licenciandos indicaram ser importante observar os erros para, em outro momento, proporem atividades mais direcionadas visando sanar os erros ou mesmo construir novas metodologias de ensino. Além disso, tendo conhecimento dos erros, eles também entendem que podem fazer novas abordagens de ensino que possam evitar que esses erros aconteçam.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É ruim errar? Quando estamos aprendendo, será que podemos evitar errar? É possível aprender sem nunca ter errado? Se errarmos, podemos aprender com nosso erro? Culturalmente, a Matemática é bicho-papão do ensino básico; o erro também é? Foram questões como essas e estudos sobre conhecimentos docentes que nos motivaram a desenvolver esta pesquisa. Também não podemos descartar crenças e desafios pessoais que nos trouxeram tais inquietações e, a partir daí, escolhemos a Combinatória.

Encontramos maneiras de pensar problemas combinatórios por meio do tripé situação, invariantes e representação simbólica, de Vergnaud (1986), e com a classificação de Pessoa e Borba (2010). Consideramos que, ao classificar problemas combinatórios, poderíamos entender e analisar estratégias de resolução. Em Ball, Thames e Phelps (2008), encontramos a descrição de conhecimentos do professor que nos auxilia nos estudos de erros e acertos.

Assim, propomos como questão central de pesquisa: quais conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino são apresentados por licenciandos em Matemática em um processo formativo baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios? Esta pergunta deu origem ao objetivo central do nosso estudo, que é analisar conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino apresentados por licenciandos de Matemática em um processo formativo baseado no estudo de erros e acertos em problemas combinatórios.

Ao realizar uma pesquisa em bancos de teses e dissertações por trabalhos que abarcassem a formação de professores e o ensino de Combinatória, localizamos lacunas nas quais esta pesquisa poderia contribuir com a comunidade acadêmica e com professores do ensino básico e superior, pois percebemos que não havia estudos que cingissem conhecimentos de alunos e para o ensino feitos com estudantes de graduação. Apesar de encontrarmos pesquisas para o fortalecimento do conteúdo de Combinatória para esse público, entendemos que só o conhecimento do conteúdo não é suficiente para a sala de aula.

Previamente, buscamos conhecer quais os conhecimentos e experiências com o ensino da Matemática e, em particular, com o ensino de Combinatória. Utilizamos um questionário e uma entrevista inicial para verificarmos isso e notamos que alguns ainda não tiveram experiências, enquanto outros participaram de programas de incentivo à docência e estágio não obrigatório, e apenas um dos licenciandos teve experiência com ensino de Combinatória usando jogos como metodologia de ensino.

Construímos um caminho metodológico que abarcava análise de erros e acertos com a construção de conhecimentos do conteúdo de Combinatória, conhecimento do conteúdo e de aluno e conhecimento de conteúdo e para o ensino. Construímos e desenvolvemos um processo formativo que trouxe vivências e reflexão junto a licenciandos do curso de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco.

Começamos apresentando situações-problema de Combinatória para que pudessem relembrar alguns conceitos; analisamos o tripé situação, invariante e representação simbólica (Vergnaud, 1986). Debatemos as respostas dos participantes, buscando entender suas estratégias de resolução, e mostramos resoluções utilizando o princípio multiplicativo, buscando construir o raciocínio combinatório por meio de provocações, representações e explanações.

Observamos que os participantes ainda fazem um uso limitado do princípio multiplicativo, sendo a principal estratégia o uso de fórmulas para resolver as situações combinatórias, e ainda encontram dificuldades para classificá-las, o que demanda atenção dos cursos de licenciatura com respeito à aprendizagem desse conteúdo. Identificamos que os licenciandos não estudaram aspectos pedagógicos desse conteúdo, apesar de haver disciplinas na grade curricular cujas ementas fazem alusão à abordagem pedagógica desse conteúdo.

As provocações serviram para fazer os licenciandos refletirem sobre os enunciados das questões, em qual momento determinada questão poderia ser usada, ou seja, se tinha aspecto introdutório ou se seria uma questão com uma perspectiva um pouco mais abstrata, levando o estudante a recorrer a estratégias mais formalizadas, como o uso de fórmulas ou do princípio multiplicativo. Nesses momentos, os licenciandos puderam construir conhecimentos de ensino à medida em que dissecaram os problemas combinatórios, identificando objetivos de aprendizagem e possíveis entraves na aprendizagem, refletindo assim sobre maneiras de agir frente a possíveis erros. Acreditamos que seja importante que os estudantes de licenciatura analisem criticamente enunciados de questões, observando se os mesmos descrevem bem a estrutura matemática e a adequação a determinado público.

Estudamos protocolos de alunos contendo erros e acertos, dissecamos as soluções buscando compreender os erros e o pensamento do estudante, buscando padrões nas respostas para não só ter conhecimento dos erros, mas também pensar formas de ensino para levar o aluno ao acerto. Consideramos que conhecimento de aluno e de ensino foram construídos por meio dessas atividades.

Com respeito ao conteúdo de Combinatória, a maioria dos participantes estava vendo pela primeira vez respostas de alunos, e, na opinião deles, esse ponto foi bastante positivo para o seu aprendizado durante o processo formativo. Assim, defendemos que abordagens como estas, em que há estudos de enunciados e estudo de respostas de alunos, podem ser adotadas para cursos na graduação com fim de provocar conhecimento de alunos e para o ensino.

No encontro 3, estudamos protocolos com soluções de alunos da educação básica com o intuito de conhecer erros, acertos, formas de linguagem, representação e estratégias de alunos, mas desta vez de forma mais prática pedimos que participantes fizessem algumas tarefas. Os licenciandos puderam supor quais poderiam ser os erros mais comuns praticados pelos alunos, também puderam corrigir protocolos de alunos, analisar e fazer anotações sobre os protocolos, além de construir plano de aula como atividade interventiva para os erros analisados. Essa metodologia pode contribuir com o conhecimento de Combinatória ao realizarem soluções para os problemas do teste diagnóstico.

O conhecimento de ensino foi evidenciado pelas escolhas das atividades, tanto as com perspectivas introdutórias visando a explicação do conteúdo quanto as atividades de fixação visando a prática por parte dos estudantes. O grupo 1 (P2, P4, P6) elaborou um conjunto de atividades para que os alunos pudessem identificar as situações combinatórias; nos seus exercícios de fixação não foram tão felizes ao proporem atividade que não era problema combinatório e outra que não fazia parte do conjunto de questões que havíamos trabalhado durante o curso. O exposto demonstra uma certa fragilidade no domínio do conteúdo de Combinatória.

Consideramos que o domínio do conteúdo é a base para que os outros conhecimentos se sustentem e se efetive na prática docente, não sendo ele o conhecimento suficiente para gerir uma boa aula, mas aquele que desperta os conhecimentos de ensino e de alunos, por exemplo. Sendo assim, é muito importante que os futuros professores desenvolvam esse conhecimento e consigam, a partir dele, pensar pedagogicamente modelos de instrução e pesquisa em Educação Matemática.

O grupo 2 (P1, P3, P5) buscou mostrar as diferenças entre os problemas combinatórios de Arranjo simples e Combinação simples. Para isso, escolheram um conjunto de questões introdutórias e atividade de fixação para prática dos estudantes. Observamos que suas escolhas foram compatíveis com seus objetivos e com as questões analisadas por eles, uma vez que procuraram atividades que trabalhassem Arranjo e Combinação sobre variados contextos. Assim, no encontro 5 pode-se acompanhar como os licenciandos se apropriaram de conhecimentos de Combinatória, de alunos e para o ensino, uma vez que todos esses conhecimentos foram necessários para a construção do plano de aula.

A entrevista final comprovou conhecimentos externados em momentos do processo formativo. Com ela, percebemos evolução no conhecimento de Combinatória, maior confiança para ministrar e construir planos de aulas para o ensino de Combinatória, crenças de que os erros podem ser usados para planejar aulas e fazer o monitoramento de aprendizagens.

Os dados da pesquisa não revelaram somente onde e como os alunos erram, mas também que os professores erram, mesmo tendo mais conhecimento que os alunos, e isso despertou o interesse nos participantes em buscar mais conhecimento sobre o tema. Esses conhecimentos são construídos e fortalecidos durante o progresso da carreira do professor (Tardif, 2014). No entanto, as atividades propostas puderam subsidiar novas perspectivas e reflexões sobre o ensino de Matemática e, sobretudo, sobre o ensino da Combinatória.

Consideramos que os conhecimentos externados (ou não) contribuem e fortalecem a prática docente. Nossa pesquisa indica que conhecimentos de Combinatória, de aluno e de ensino podem ser trabalhados de maneira intencional em cursos de formação inicial de professores, sejam em cursos de extensão ou em disciplinas pedagógicas que conciliem conhecimentos matemáticos aos pedagógicos de forma prática e próxima do contexto de sala de aula.

O processo formativo realizado fortaleceu crenças indicadas nas entrevistas iniciais de que os erros podem contribuir de alguma forma para o ensino e aprendizagem dos alunos, mas a partir do processo formativo os licenciandos puderam conhecer formas de compreender os erros dos estudantes, assim como os erros que eles também cometem.

Acreditamos que as atividades realizadas nos encontros podem ser aprimoradas e estendidas para subsidiar cursos na formação inicial de Matemática. Sendo assim, baseado em Cury (2013), listamos alguns tópicos norteadores para que cursos possam subsidiar conhecimentos de professor aliados ao uso de erros e acertos como forma de abordagem:

a) Apresentação do conteúdo matemático, em especial da educação básica, acompanhado de métodos de ensino;

b) Apresentação de pesquisas com a temática da análise de erros;

c) Discussão sobre tipos de erros, buscando entender dificuldades encontradas e elaborar metodologias de ensino;

d) Aprendizagem de técnicas de análise de erros; e

e) Momentos de correção de atividades com protocolos de alunos e criação de atividades/planos de aulas interventivos.

Acreditamos que esses tópicos, aliados ao que construímos nesta pesquisa como metodologia, poderão subsidiar conhecimentos elencados por Ball, Thames e Phelps (2008). Certamente a prática docente aperfeiçoará o professor, mas o caminho pode ser apontado ainda na formação inicial.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Adryanne Maria Rodrigues Barreto de; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. Discutindo combinatória em um processo de formação continuada com professores dos anos iniciais. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v 96, p. 666-682, 2015.

ASSIS, Adryanne Maria Rodrigues Barreto de. **Conhecimentos de Combinatória e seu ensino em processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora**. 2014. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**. v. 59, n. 5, p. 389 - 407, 2008.

BIFI, Carlos Ricardo. **Conhecimentos estatísticos no Ciclo I do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico com professores em exercício**. 2014. 134 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia MT. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais. III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana (SIPEMAT), 2012. *In:* **Anais do [...]**, v. 13, n. 2, p. 6, 2012.

BRASIL. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Enem**: Provas e Gabaritos – 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: 10 ago. 2024.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et les problemes en Maths. **La Pensé e Sauvage**, v. 4, 1983.

CARVALHO, Inayara de. **Manifestações dos saberes pedagógicos de Análise Combinatória**. 2018. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Acre, Rio Branco, 2018.

CHARTIER, R. **A história cultural**: entre práticas e representações. 2. ed. Bertrand Brasil. Rio de Janeiro, 2002.

COELHO, Levy de Oliveira; DIAS, Monica Souto da Silva. Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. **Em Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 13, n. 2, p. 6, 2022.

CUNHA, Maria de Jesus Gomes da. **Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do ensino médio**. 2015. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

CURY, Helena Noronha. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 15, n. 3, p. 547-562, 2013.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

DE CERTEAU, M. **A invenção do cotidiano**: artes de fazer, v. 1. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 1994.

GERHARDT, Tatiana Engel G.; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 120.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Ediitora Atlas SA, 2008.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar** - 5: combinatória, probabilidade. 8 ed. São Paulo, Atual, 2013.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, v. 32, 1994.

HILL, Heather C.; BALL, Deborah Loewenberg; SCHILLING, Steven G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for research in mathematics education**, v. 39, n. 4, p. 37-400, 2008.

HOLANDA, Dorghisllany Souza. **Investigando uma proposta de formação inicial de professores de matemática no interior de Pernambuco**: conhecimentos docentes de combinatória. 2017. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. Campinas, n. 1, p. 9-43, jan./abr. 2001.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. v.1, Parte II Álgebra. SPM, Lisboa, 2010.

LA TAILLE, Yves Joel Jean Marie Rodolphe de. O erro na perspectiva piagetiana. *In:* LA TAILLE, Yves Joel Jean Maria Rodolphe de (Org.). **Erro e fracasso na escola**: alternativas teóricas e práticas, 1997.

LIMA, Ana Paula Barbosa de. **Princípio Fundamental da Contagem**: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

LIMA, Itatiane Borges. **Aulas de combinatória no ensino médio**: como estão ocorrendo. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de. **Problemas de Combinatória**: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciatura em Matemática. 2015. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

LOEWENBERG BALL, Deborah; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special?. **Journal of teacher education**. v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

MAGINA, Sandra; MERLINI, Vera Lúcia; SANTOS, Aparecido dos. A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012. *In:* **Anais do [...]**, v. 3, p. 1-12, 2012.

MARTINS, Géssica Gonçalves. **Ensino de Análise Combinatória**: um estudo das representações de professores de Matemática do Ensino Médio público de São Mateus. 2018. 147 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2018.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar**: Combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MOREIRA, Marcos Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências.** Porto Alegre, vol. 7, n. 1 (jan./mar. 2002), p. 7-29, 2002.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti.3 + 1 e suas (in) Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 26, p. 1137 - 1150, 2012.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NÓVOA, António. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. *In*: NÓVOA, António (Org.). **Formação de Professores e Profissão Docente**. Lisboa: Edições Asa, 2009.

OLIVEIRA, Eliana Gomes de. **Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental**: um estudo na escolarização básica. 2014. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em TEIA**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 1, n. 1, p. 1-22, 2010.

PIAGET, J. **Seis estudos de Psicologia**; tradução Alice Magalhães D' Ambrosio e Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 24 ed. 1999.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prima da Matemática**: estatística, combinatória e probabilidade. – 1. Ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

RANGEL, Ana Carolina Ferreira. **Entre plantas e árvores**: uma articulação entre a resolução de problemas, a análise combinatória e um beija-flor. 2022. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 2022.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes Docentes**: a análise combinatória no Ensino Médio. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTOS, Francisco Aristonio de Almeida. **A análise combinatória de um ponto de vista superior**: contribuições para a prática e para a formação do professor de Matemática. 2017. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2017.

SANTOS-WAGNER, Vania Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D'Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, Itamar Miranda da. **A relação do professor com o saber matemático e os condimentos mobilizados em sua prática**. 2014. 145 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2014a

SILVA, José Carlos Thompson da. **Jogo sobre Análise Combinatória e formação inicial de professores de Matemática**. 2014. 167 f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014b.

SILVA, Pablo Egidio Lisboa da. **Problemas combinatórios condicionais**: um olhar para o livro didático do ensino médio. 2015. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20-26, 1976.

SPINILLO, Alina Galvão et al. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim Gepem**, n. 64, p. 57-70, 2014.

VERGNAUD, Gérard. La teoría de los campos conceptuales. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133 - 170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986.
VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paullo: Martins Fontes, 1991.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**. v. 12, p. 151-169, 1981.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

ZANON, Thiarla Xavier Dal-cin. **Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

APÊNDICE A – MODELO DE PLANO DE AULA

Modelo de plano de aula enviado para os participantes.

Modelo plano de aula

Turma/ano letivo:

Duração: (Tempo em minutos)

Objetos de conhecimento:

Liste o objeto de conhecimento

Objetivos:

Liste os objetivos desta aula

Metodologia:

Descreva o passo a passo de como você pretende conduzir essa aula, redija sobre como será feita cada uma das atividades que você pretende fazer.

Recursos didáticos:

Liste os recursos didáticos que serão usados (ex: lousa, material concreto, computador etc).

Avaliação:

Diga como esta aula será avaliada (ex: de modo processual, por meio de atividades etc)

Anexos (se houver):

Coloque aqui as atividades que selecionadas se houver.

ANEXO A – PLANO DE AULA DO GRUPO 1

Plano de aula do grupo 1

Plano de aula para o curso de Análise Combinatória

Duração: 50 min.

Tema: Técnicas de agrupamentos de dados

Disciplina: Matemática

Conteúdos: Análise Combinatória

Combinação**;**

Arranjo.

Permutação**.**

Objetivos:

Diferenciar o tipo de agrupamento utilizado.

Metodologia:

Para dar início a aula é apresentado aos estudantes situações problemas em que cada tipo de agrupamento de dados é utilizado focando nas divergências e particularidades de cada fenômeno, os quais estão presentes no anexo I. Em seguida, será fornecido aos alunos um grupo de situações problemas (anexo II) envolvendo combinação, arranjo e permutação com o objetivo dos alunos diferenciarem qual tipo de agrupamento pertence a situação e por qual motivo eles afirmam isto.

Recursos Didáticos: Quadro branco, marcador e ficha de exercícios.

Avaliação: Será feita mediante as soluções apresentadas pelos alunos nos exercícios propostos.

Anexo I

i) Quantos códigos de 3 letras são possíveis de serem criados com as letras do alfabeto?

Para realizar uma prova, um professor elaborou 6 tipos de provas distintas apenas pelas cores e ordem das questões. Nessa configuração, qual é a quantidade de maneira distintas que os alunos Pedro, José, Maria e Antônio podem pegar nessas provas considerando que existem apenas um tipo de cada prova à disposição dos alunos?

Uma turma de 7 alunos está brincando no pátio aproveitando a hora do intervalo. Ao ouvir o sinal que informa o retorno para as salas de aula, os alunos se encaminham para formar uma fila. De quantas maneiras distintas os alunos podem formar a sequência da fila?

Anexo II

Dada os 3 problemas a seguir, aponte que tipo de agrupamento é feito para resolvê-lo.

1- Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1,2,3, 7, 8?

2- Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: GUARANÁ, SODA e TÔNICA de quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerante?

3- Uma classe tem meninas a e b meninos. De quantas formas eles podem ficar em fila se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (supor que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso).

Referências

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática**: volume único. 5 ed. São Paulo: Atual, 2007

ANEXO B – PLANO DE AULA DO GRUPO 2

Plano de aula do grupo 2.

Plano de aula

Turma/ano letivo: 2º ano Ens. Médio.

Duração: 50 minutos.

Tema: Análise Combinatória**.**

Disciplina: Matemática**.**

Objetos de conhecimento:

Princípio multiplicativo**;**

Diferenças entre arranjo e combinação simples

Objetivos:

Compreender e aplicar o princípio multiplicativo em problemas de arranjo e combinação;

Capacitar o aluno a diferenciar problemas de arranjo e de combinação simples

Metodologia:

Para o primeiro momento seria apresentado um exemplo para realizar a introdução do conteúdo do princípio multiplicativo, o uso do material dourado pode ser uma alternativa para ilustrar os elementos a serem combinados. Após esse momento, seriam apresentados outros dois exemplos, sendo um sobre arranjo e outro sobre combinação simples. Para a explicação desses exemplos seria enfatizada a importância que a ordem dos elementos tem para cada situação, alertando os estudantes para a importância de analisar o contexto de cada exemplo. Em seguida seriam propostos exercícios para que os estudantes tentassem resolvê-los e aplicar o que foi estudado.

Recursos didáticos: Quadro branco, material dourado, exercícios complementares.

Avaliação: Ocorrerá de modo a observar o engajamento dos estudantes nos momentos de resolução dos exemplos e resolução dos exercícios.

Anexos:

1º exemplo: Princípio Multiplicativo:

Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida, pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

2º exemplo: Exemplo sobre Arranjo:

De quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem organizar uma fila composta por 4 delas?

3º exemplo: Exemplo sobre Combinação Simples:

Quantas combinações são possíveis de serem formadas se em um conjunto de cinco frutas distintas escolhermos três para montar uma salada?

Exercícios sobre Arranjo e Combinação:

1. Uma empresa está desenvolvendo dois sistemas: um para gerar senhas e outro para formar equipes de trabalho. Com base nas descrições abaixo, responda às perguntas:

Senhas

As senhas serão formadas por 4 caracteres, sendo 2 letras e 2 números. As letras serão escolhidas do conjunto {A, B, C, D} e os números do conjunto {1, 2, 3}.

(a) Quantas senhas diferentes podem ser formadas se não houver repetição de caracteres?

(b) Quantas senhas diferentes podem ser formadas se os caracteres puderem se repetir?

2. Um projeto será desenvolvido por 5 pessoas. Para organizar as tarefas, as equipes serão formadas de duas maneiras diferentes:

(a) Para uma atividade em que a ordem dos membros importa, quantas equipes diferentes de 3 pessoas podem ser formadas?

(b) Para outra atividade em que a ordem não importa, quantas equipes diferentes de 3 pessoas podem ser formadas?

3. Razão e Interpretação

a) Qual é a razão entre as possibilidades com e sem repetição de caracteres na formação das senhas do item 1?

(b) Explique por que a quantidade de equipes no item 2(a) é diferente da quantidade no item 2(b).

4. No meio da “invasão tecnológica” que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que a senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição. Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?

5. Durante os experimentos sobre genética, Mendel precisou escolher 3 mudas diferentes de ervilha para serem cobaias do mesmo experimento. Sabendo que ele tinha disponível 10 mudas naquele dia, então o número de maneiras distintas que ele poderia escolher as cobaias é igual a:

(a) 90
(b) 120
(c) 160
(d) 200
(e) 240.

6. (ENEM/2020) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor. Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a:

(a) 64
(b) 74
(c) 254
(d) 274
(e) 634.

Referências

1) https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-arranjo-ou-combinacao.htm.

2) https://www.vestibulandoweb.com.br/questoes/matematica-enem-2020-arranjos-analise-combinatoria

ANEXO C – EMENTA DO CURSO DE MATEMÁTICA II

Matemática II

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Disciplina	___ Prática de Ensino
___ Atividade complementar	___ Módulo
___ Monografia	___ Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

X Obrigatório   ___ Eletivo   ___ Optativo

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária		Nº créditos	CH Global	Período
		Teórica	Prática			
MATM0027	Matemática II	60	0	4	60	3º

Pré-requisitos	-	Co-requisitos	-	Requisitos C.H.	-

EMENTA

Trigonometria no triângulo retângulo, circunferência trigonométrica, funções circulares, transformações trigonométricas, equações, inequações e funções trigonométricas. Análise combinatória, Binômio de Newton e teoria das probabilidades.

OBJETIVOS DO COMPONENTE

• Contribuir com o amadurecimento dos alunos enquantos futuros professores da educação básica apresentando de forma mais avançada os conteúdos relacionados à Trigonometria, Análise Combinatória e Probabilidade vistos no ensino básico.
• Ajudar na imersão do aluno na vida acadêmica, proporcionando uma percepção diferenciada e mais profunda sobre os temas relacionados aos conteúdos citados anteriormente.

METODOLOGIA

Aulas expositivas, atividades em grupo, resolução de problemas pelos docentes em sala de aula e discussão dos mesmos.

AVALIAÇÃO

Provas escritas dissertativas, listas de exercícios, seminários ou outras atividades previstas no regimento da UFPE, a critério do professor.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

TRIGONOMETRIA

- Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo
- Propriedades e relações entre senos, cossenos e tangentes
- Leis dos senos
- Leis dos cossenos
- Arcos e ângulos
- Medida de um ângulo central
- O ciclotrigonométrico
- O seno no ciclo trigonométrico
- O cosseno no ciclo trigonométrico
- Gráfico das funções seno e propriedades
- Gráfico da função cosseno e propriedades
- A função tangente: gráfico e propriedades
- Relação fundamental relações decorrentes
- Identidades trigonométricas
- Recorrência a um arco do 1oquadrante
- Funções trigonométricas inversas.
- Seno, cosseno e tangente da soma
- Seno, cosseno e tangente da diferença
- Seno, cosseno e tangente do arco metade
- Equações Trigonométricas: principais casos
- Inequações trigonométricas: principais

ANALISE COMBINATÒRIA

- Introdução
- Princípio fundamental da contagem
- Agrupamentos
- Cálculo de arranjos
- Cálculo de combinações
- Cálculo depermutações
- Resolução de exercícios gerais

BINOMIO DE NEWTON
- Introdução
- Fatorial
- Números binomiais
- Triângulo de Pascal
- Desenvolvimento do binômio de Newton
- Termo geral

PROBABILIDADE
- Introdução
- Espaço amostral
- Eventos
- Probabilidade da união de dois eventos
- Probabilidade condicional
- Probabilidade do evento complementar
- O métodobinomial
- Aplicações

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações : volume único. 3.ed. São Paulo: Ática, 2009.
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3**: trigonometria : 123 exercícios resolvidos, 385 exercícios propostos com resposta, 226 testes de vestibulares com resposta. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.
- SANTOS, J. Plinio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à análise combinatória**. 4.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- DEMANA, Franklin D. **Pré-calculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.
- MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática**: temas e metas : sistemas lineares e análise combinatóriasistemas. São Paulo: Atual, 1986.
- MEYER, Paul L. **Probabilidade: aplicações a estatística**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
- SPIEGEL, Murray Ralph. **Probabilidade e estatística**. São Paulo: McGraw-Hill, 1978.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
CAA/NFD Matemática-Licenciatura	CAA/NFD Matemática-Licenciatura

ASSINATURA DO COORDENADOR DO NÚCLEO

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO