
ERGODICIDADE DE UM ERODER UNIDIMENSIONAL
COM RUÍDO ALEATÓRIO

RENATA NUNES DE SOUZA PEREIRA

Orientador: Prof. Ph.D. Andrei Toom

Área de concentração: Probabilidade

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, junho de 2005

Universidade Federal de Pernambuco
Mestrado em Estatística

14 de junho de 2005

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Renata Nunes de Souza Pereira

intitulada

Ergodicidade de um eroder unidimensional com ruído aleatório

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Coordenador da Pós-graduação em Estatística

UFPE
Prof. Klaus L. P. Vasconcelos
Coordenador da
Pós-graduação em
Estatística, UFPE

Banca Examinadora:

A Toom

André Toom

orientador

Luiz Renato Gonçalves Fontes

Luiz Renato Gonçalves Fontes (USP)

Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

“As soluções, eu já as possuo há muito tempo.

Mas ainda não sei como cheguei a elas.”

Carl Friedrich Gauss

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo inestimável apoio e amor: sem estes jamais transporia as barreiras pelo caminho.

De uma maneira muito especial, agradeço ao meu orientador Andrei Toom pela confiança, carinho e principalmente pela atenção e entusiasmo com que conduziu este trabalho. Aproveito a oportunidade para dizer que o orgulho de tê-lo como orientador é imenso.

Agradeço a coordenação do mestrado, sempre tão dedicada e responsável, pela contínua preocupação com o bem-estar dos alunos. Em especial, ao incansável vice-coordenador Francisco Cribari que nos bastidores travou uma luta pela continuação do suporte financeiro indispensável ao término deste trabalho; à secretária Valéria cujo carinho e atenção comigo (e todos) são qualidades extras a seu trabalho responsável.

Meus agradecimentos a todos os professores do mestrado e, em particular, ao professor Klaus Vasconcellos, cuja competência para ensinar e conhecimento do que ensina servirão de modelo para o resto de minha vida profissional.

Da minha graduação na UEFS, não posso deixar de agradecer ao professor Sérgio Azevedo, que confiou e me incentivou desde o princípio e cuja seriedade em seu trabalho serviram de inspiração.

Agradeço a minha família pelo amor e apoio incondicionais: Aos meus pais que trabalharam muito para oferecer aos filhos oportunidades que não tiveram; a minha mãe: para mim, um exemplo de coragem e de luta; aos meus irmãos, que nos momentos difíceis foram o apoio necessário para reerguer-me.

Com muito carinho, agradeço ao meu querido Rico por estar sempre, mesmo a quilômetros de distância, ajudando-me a ter paciência e a continuar acreditando em mim. Sem seu apoio e atenção não teria forças suficiente para chegar ao final.

Aos meus eternos amigos e companheiros de turma: Francisco, pelo carinho e atenção; a Milena, pela alegria e companhia; a Carlos pelo otimismo, sinceridade e pelas nossas

longas e boas conversas; a Dany, pelo companheirismo e tolerância, que se tornou minha irmã durante esse tempo; pela inestimável ajuda, agradeço a Tiago, pessoa verdadeira e confiável; a Gecy, André, Tatiane e Sandra Pinheiro, pela amizade, carinho e atenção dispensada nestes anos de convivência; a Andréa, Artur e Junior por ajudar-me sempre que precisei. Aproveito ainda para agradecer a Michelli, que me indicou o mestrado, e a Moisés, Gilson e Raydonal por terem me ajudado muito no início dos meus estudos em Estatística.

À CAPES e à PROPESQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos a ergodicidade da seguinte classe de autômatos celulares. O espaço configuracional é $\Omega = \{0, 1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$. Cada elemento de Ω é chamado uma *configuração*. Cada configuração é uma sequência bi-infinita $x = (\dots x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$, onde todos $x_i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Consideramos uma classe de operadores determinísticos $D : \Omega \rightarrow \Omega$, dependendo de um número natural r (o raio de interação) e uma função monótona $f : \{0, 1, \dots, m\}^{2r+1} \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ assim: $(Dx)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$. Uma configuração x é chamada uma *ilha* se o conjunto $\{i : x_i > 0\}$ é finito. D é chamado *conservativo* se existe uma ilha x tal que para todo t natural a configuração $D^t x$ contém pelo menos uma componente igual a m . Nós dizemos que D *eroda* uma ilha se existir um t natural, tal que $D^t x = \text{“todos zeros”}$. Nós chamamos D de *erosivo* se todas as ilhas são erodadas por ele.

Também consideramos um operador aleatório S_α que transforma cada componente em m , independentemente das outras componentes. Foi provado por Toom que no caso $m = 1$ as seguintes três condições são equivalentes: (i) D é conservativo; (ii) D não é erodente; (iii) $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha \in (0, 1)$. Nós provamos que no caso $m = 2$ cada duas destas três condições não são equivalentes. Nossas demonstrações usam nosso principal exemplo, no qual $r = 1$ e

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_{i-1} = 0; x_i = x_{i+1} = 1, \\ 1, & \text{se } x_{i-1} = x_i = 2; x_{i+1} = 1, \\ 2, & \text{se } x_{i-1} + x_i = x_{i+1} = 2, \\ \text{O número inteiro mais próximo de } \frac{(x_{i-1} + x_i + x_{i+1})}{3} & \\ \text{em todos os outros casos.} & \end{cases}$$

Abstract

We study ergodicity of the following class of cellular automata. The *configuration* space is $\Omega = \{0, 1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$. Every element of Ω , called a configuration, is a bi-infinite sequence $x = (\dots x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$, where all $x_i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Let us consider a class of deterministic operators $D : \Omega \rightarrow \Omega$, depending on a natural number r (range of interaction) and a monotonic function $f : \{0, 1, \dots, m\}^{2r+1} \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ as follows: $(Dx)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$. A configuration x is called an *island* if the set $\{i : x_i > 0\}$ is finite. D is called a *conservator* if there is an island x such that for every natural t the configuration $D^t x$ contains at least one component equal to m . We say that D erodes an island if there is a natural t such that $D^t x = \text{“all zeros”}$. We call D an *eroder* if it erodes all islands. Also we consider a random operator S_α which turns every component into m independently of other components. It has been proved by Toom that in the case $m = 1$ the following three conditions are equivalent: a) D is a conservator; b) D is not an eroder; c) $S_\alpha D$ is ergodic for all $\alpha > 0$. We prove that in the case $m = 2$ every two of these three conditions are not equivalent. Our proofs use our main example, in which $r = 1$ and

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_{i-1} = 0; x_i = x_{i+1} = 1, \\ 1, & \text{if } x_{i-1} = x_i = 2; x_{i+1} = 1, \\ 2, & \text{if } x_{i-1} + x_i = x_{i+1} = 2, \\ \text{the nearest integer number to } \frac{(x_{i-1} + x_i + x_{i+1})}{3} & \\ \text{in all the other cases.} & \end{cases}$$

1	Introdução	1
2	Resultados sobre Autômatos Celulares	6
2.1	Operadores Determinísticos	6
2.2	Propriedades de Operadores Determinísticos	8
2.3	Definição do Processo	14
3	Enunciado do Teorema Principal	17
3.1	O Exemplo Principal	17
4	Prova do Teorema Principal	19
4.1	Prova do Teorema 3.2 (Teorema Principal)	19
5	Discussões e Sugestões de Pesquisa	27

Apêndices	29
Referências Bibliográficas	35

CAPÍTULO 1

Introdução

Os processos aleatórios com interação local fazem parte da teoria moderna de probabilidade. Eles começaram a ser pesquisados algumas décadas atrás, desempenhando nas últimas décadas um papel muito importante em diversos avanços matemáticos e sua aplicação estende-se para um crescente número de áreas do conhecimento.

Os sistemas que se adequam a essa teoria possuem um conjunto (finito ou infinito) chamado espaço, um parâmetro chamado tempo e um conjunto dos possíveis estados de cada componente. Todos estes conjuntos podem ser discretos ou contínuos. Em nosso trabalho consideramos espaço, tempo e o conjunto dos estados discretos. Uma das vantagens em estudar autômatos celulares discretos é que as definições básicas são conceitualmente simples. Para maiores detalhes sobre processos com tempo discretos veja Toom *et al* (1990), Toom (1995) e Toom (2001) entre outros.

O conceito original de autômato celular está associado a John von Neumann, veja Neumann (1963). Ele foi o primeiro a propor um sistema para reproduzir vida como resultado de regras simples. Criando sua máquina, Von Neumann de fato definiu pela primeira vez um autômato celular como uma grade de células que interagem com suas células vizinhas.

Desde Von Neumann, autômatos celulares estão nos fundamentos das pesquisas em vida artificial que constroem mundos sintéticos com características dos sistemas vivos. Atualmente os autômatos celulares vêm sendo muito utilizados para modelar vários problemas do mundo real. Como predisse corretamente von Neumann, as simulações de computador viriam a ser muito utilizadas, da mesma maneira que experiência na ciência natural, entretanto, as simulações sugerem a teoria.

Autômatos celulares descrevem uma gama de fenômenos interessantes. Por exemplo, autômato celular não-ergódico é análogo a transição física (congelamento, fusão, vaporização, condensação, etc.) Nosso maior interesse nesse trabalho é estudar a ergodicidade de autômatos celulares. Introduzimos a seguir algumas definições gerais necessárias para o desenvolvimento desse trabalho.

Consideramos neste trabalho somente o caso unidimensional, logo, o espaço considerado é \mathbb{Z} , onde $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros. Nos casos multidimensionais o espaço considerado é \mathbb{Z}^d .

Cada função de \mathbb{Z} para $U = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ chamaremos de *configuração*. Logo, o conjunto das configurações é $\Omega = U^{\mathbb{Z}}$. Dada uma configuração x , denotamos por $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ a i -ésima componente da configuração x , e chamamos x_i de *nível* do ponto $i \in \mathbb{Z}$.

Cada operador $D : U^{\mathbb{Z}} \rightarrow U^{\mathbb{Z}}$ é chamado de *operador determinístico*. Consideramos somente operadores D definidos da seguinte forma: dado um número natural r e qualquer função $f : U^{2r+1} \rightarrow U$, definimos D assim:

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad (Dx)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r}). \quad (1.1)$$

Escrevemos $x \prec y$, se $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Uma função $f(\cdot)$ é *monótona* quando

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \implies f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n).$$

Chamamos um operador D de *monótono* se

$$x \prec y \implies Dx \prec Dy.$$

Denominamos de *cilindro fino* qualquer subconjunto de $U^{\mathbb{Z}}$ da forma

$$c = \{x \in U^{\mathbb{Z}} : x_{v_1} = a_{v_1}, \dots, x_{v_n} = a_{v_n}\},$$

onde x_{v_1}, \dots, x_{v_n} são componentes de x e $a_{v_1} \dots a_{v_n} \in U$.

Consideramos medidas em Ω , isto é, na σ -álgebra gerada por cilindros finos. Estamos interessados em medidas normalizadas em Ω , ou seja, aquelas que assumem valor 1 em Ω .

Denotamos por \mathcal{M} o conjunto das medidas normalizadas em Ω . A uma medida concentrada em qualquer $x \in \Omega$ denominamos δ -*medida* e denotaremos por δ_x . Do mesmo modo medida concentrada em “todos a ” denotamos por δ_a . Se $\nu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots \in \mathcal{M}$, dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \nu,$$

se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_n(c) = \nu(c)$ para todo cilindro fino c .

Como já falamos anteriormente, autômatos celulares são amplamente estudados na atualidade e possuem diversas formas de abordagem. Aqui, consideraremos o caso em que os autômatos celulares são os operadores $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, definidos a seguir. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos um conjunto finito $\mathcal{V}(i) \subset \mathbb{Z}$ que denominamos de *vizinhança* de i . Para cada conjunto $I \subset \mathbb{Z}$, definimos sua vizinhança assim:

$$\mathcal{V}(I) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}(i).$$

Definimos autômato celular como uma função, $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Este operador age da seguinte forma:

$$(P\mu)(y_W = b_W) = \sum_{a_{\mathcal{V}(W)}} \mu(a_{\mathcal{V}(W)}) \prod_{i \in W} \pi(b_i | a_{\mathcal{V}(i)})$$

para cada $W \subset \mathbb{Z}$ e qualquer b_W , onde $\pi(b_i | a_{\mathcal{V}(i)})$ é a probabilidade condicional de que após a aplicação do operador P , a i -ésima componente estará no estado b dado que a vizinhança de i estava no estado $a_{\mathcal{V}(i)}$, no instante anterior. Esta probabilidade denominamos de *probabilidade de transição*.

O resultado de P agindo sobre μ denotamos por $P\mu$. Dizemos que uma medida μ é *invariante* para P se $P\mu = \mu$. O Operador P será chamado *ergódico* se ele tem exatamente uma medida invariante μ_{inv} e

$$\forall \mu \in \mathcal{M} : \lim_{t \rightarrow +\infty} P^t \mu = \mu_{inv},$$

onde a convergência significa convergência em todos os cilindros finos.

Sabemos que o problema de decidir se um autômato celular é ou não ergódico, não tem solução algorítmica conforme provado por Kurdyumov (1978). Logo, é necessário estudar ergodicidade para uma classe restrita de autômatos celulares. Por esta razão consideramos somente operadores do tipo $S_\alpha D$ onde D é monótono e S_α é definido a seguir. Consideramos um operador aleatório $S_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, que torna cada componente em m com probabilidade α independentemente. Os operadores S_α são monótonos para todos $\alpha \in (0, 1)$.

Para cada $v \in \mathbb{Z}$ definimos a translação

$$\mathcal{T}_v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z},$$

de modo que $\mathcal{T}_v(a) = a+v$. Assim podemos definir a translação no espaço de configurações $\mathcal{T}_v : U^{\mathbb{Z}} \rightarrow U^{\mathbb{Z}}$ para cada configuração x , da seguinte forma:

$$(\mathcal{T}_v x)_i = x_{i+v}.$$

Denotamos pela mesma letra \mathcal{T}_v a translação correspondente de \mathcal{M} para \mathcal{M} .

Quando um operador $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ comuta com todas as translações, ou seja,

$$\forall v : P\mathcal{T}_v = \mathcal{T}_v P,$$

denominamos o operador de *uniforme*. Todos os operadores considerados neste trabalho são uniformes.

Sejam duas medidas μ e ν , dizemos que $\mu \prec \nu$ se, para cada função monótona mensurável H , tivermos

$$E(H|\mu) \leq E(H|\nu),$$

onde $E(H|\mu)$ significa esperança de H na medida μ . Dizemos que um operador aleatório $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é monótono se $\mu \prec \nu$ implicar $P\mu \prec P\nu$.

Chamaremos os nossos maiores resultados de teorema, todos os resultados auxiliares chamaremos de lema. Os resultados relevantes em nosso trabalho que já foram provados em trabalhos anteriores chamaremos de proposição. O problema para o qual queremos contribuir é a classificação completa de superposições $S_\alpha D$ entre ergódicos e não ergódicos. Até agora nada foi feito com relação a esse problema para todos os m . Logo vale a pena começar por valores pequenos de m .

Foi provado por Toom (2001) que no caso $m = 1$ as seguintes três condições são equivalentes: (i) D é conservativo; (ii) D não é erodente; (iii) $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha > 0$. Em nosso trabalho nos concentramos no caso em que $m = 2$. Nós provamos que no caso $m = 2$ cada duas destas três condições não são equivalentes. Nossa demonstração usa nosso principal exemplo, no qual $r = 1$ e

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_{i-1} = 0; x_i = x_{i+1} = 1, \\ 1, & \text{se } x_{i-1} = x_i = 2; x_{i+1} = 1, \\ 2, & \text{se } x_{i-1} + x_i = x_{i+1} = 2, \\ \text{O número inteiro mais próximo de } \frac{(x_{i-1} + x_i + x_{i+1})}{3} & \\ \text{em todos os outros casos.} & \end{cases}$$

Nosso maior resultado é mostrar que $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha \in (0, 1)$, ainda que este operador seja erodente.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, apresentamos os principais resultados sobre autômatos celulares. No capítulo 3, apresentamos o nosso teorema principal. No capítulo 4, apresentamos a prova do teorema principal. No capítulo 5, temos algumas discussões, comentários e sugestões para novas pesquisas.

Resultados sobre Autômatos Celulares

2.1 Operadores Determinísticos

Consideramos operadores determinísticos definidos como em (1.1), monótonos, tais que para todos $a \in \{0, 1, \dots, m\}$ temos:

$$f(a, \dots, a) = a \tag{2.1}$$

Definição 2.1. *Uma configuração é chamada ilha se o conjunto $\{i : x_i > 0\}$ é finito.*

Denota-se por $I_a(x)$ o conjunto dos i tais que $x_i \geq a$. É claro que $x \in X$ é uma ilha se $I_1(x)$ é finito (isto é, se o número das componentes maior que zero é finito).

Definição 2.2. *Dizemos que uma ilha x é D -robusta se para cada t natural a configuração $D^t x$ possui pelo menos uma componente no nível m .*

Definição 2.3. *Um operador D é chamado conservativo se existe pelo menos uma ilha robusta com relação a D .*

Dizemos que uma ilha x é *erodida* por um operador D se existe um número natural t tal que $D^t x = (\dots 000 \dots)$. É claro que uma ilha x não é erodida por D se para todo $t = 1, 2, 3, \dots$, $D^t x \neq (\dots 000 \dots)$.

Definição 2.4. Um operador D é chamado de *erodente* se ele erode cada ilha. Denominamos também um operador D agindo em $\{0, 1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$ de m -erodente se, para cada ilha x , existe t natural tal que $(D^t x)_i < m$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

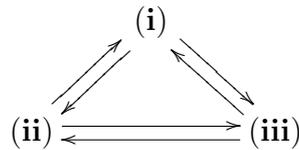
Petri (1979) demonstrou que, sem a condição de monotonicidade, não existe algoritmo para diferenciar operador erodente de não-erodente, até mesmo em dimensão 1. Supondo a condição de monotonicidade, Galperin (1976) apresentou condição de erodente apenas para dimensão 1 e com conjunto de estados, $U = \{0, 1, 2, \dots, m\}$.

Proposição 2.1 (Toom 2001). *Seja $m=1$ e D definido em (1.1) com a condição de monotonicidade, então as três condições são equivalentes:*

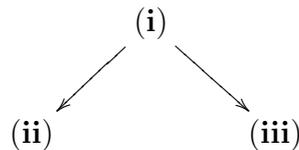
- (i) D é conservativo.
- (ii) D não é erodente.
- (iii) $S_\alpha D$ é ergódico para cada $\alpha > 0$.

Prova: Veja Toom (2001).

Podemos apresentar esta proposição com o seguinte esquema:



Temos em nosso resultado principal que para $m = 2$ cada duas condições (i) (ii) e (iii) não são equivalentes. De fato, temos apenas as seguintes implicações:



As outras implicações são geralmente falsas. Vamos listar e justificar cada uma delas para esse caso.

(i) \Rightarrow (ii) Como D é conservativo, existe pelo menos uma ilha robusta x . Logo $D^t x \neq (\dots 000 \dots)$ para todo $t = 1, 2, 3, \dots$. Assim D não é erodente.

(i) \Rightarrow (iii) Pela **Proposição 2.5**, veja página 15.

(ii) $\not\Rightarrow$ (i) Seja $(Dx)_i = \max\{1, \min(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})\}$. Este operador não é erodente, entretanto não é conservativo.

(ii) $\not\Rightarrow$ (iii) Seja $(Dx)_i = \max\{1, \min(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})\}$. Logo, se tomarmos a condição inicial “todos uns”, para valores pequeno de $\alpha \in (0, 1)$, temos que $(S_\alpha D)^t \delta_1$ não tende para δ_2 . Logo $S_\alpha D$ não é ergódico.

(iii) $\not\Rightarrow$ (ii) Pelo nosso **Teorema 3.2 (Teorema Principal)**, temos que o nosso operador G é erodente, mas a superposição $S_\alpha G$ é ergódico para todo $\alpha > 0$.

(iii) $\not\Rightarrow$ (i) Pelo nosso **Teorema 3.2 (Teorema Principal)**, temos também que a superposição $S_\alpha G$ é ergódica para cada $\alpha > 0$, entretanto G não é conservativo.

2.2 Propriedades de Operadores Determinísticos

Lema 2.1. *Um operador determinístico definido como em (1.1) é monótono se, e somente se, f é monótona.*

Demonstração: Em uma direção: Mostremos que se f é monótona, então D é monótono. Sejam as configurações x e y tais que $x \prec y$, como f é monótona temos que

$$f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r}) \leq f(y_{i-r}, \dots, y_{i+r}).$$

Assim, $(Dx)_i \leq (Dy)_i$.

Mostremos agora que se D é monótono, então f é monótona. Sejam x_{-r}, \dots, x_r e y_{-r}, \dots, y_r , tais que $\forall j \in [-r, r] : x_j \leq y_j$. Devemos mostrar que

$$f(x_{-r}, \dots, x_r) \leq f(y_{-r}, \dots, y_r), \quad (2.2)$$

Sejam x e y configurações tais que $x_i = y_i$ para todos $i \notin [-r, r]$. Assim $x \prec y$. Como D é monótono, $Dx \prec Dy$. Então $(Dx)_0 \prec (Dy)_0$. Portanto, tem-se (2.2). *Lema 2.1 está demonstrado.*

Introduzimos agora algumas definições e propriedades de operadores determinísticos que serão utilizadas em nosso trabalho. Alguns desses resultados foram demonstrados por Galperin (1976) e outros deles foram obtidos nesse trabalho baseados em seus resultados.

Uma configuração x é chamada *crescente* se $\forall i \in \mathbb{Z} : x_i \leq x_{i+1}$ e *decrecente* se $\forall i \in \mathbb{Z} : x_{i+1} \leq x_i$. Dizemos que uma configuração é *monótona* se for crescente ou decrescente. Cada configuração monótona que não é constante é chamada *escada*.

Para cada escada x os limites $a = \lim_{i \rightarrow -\infty} x_i$ e $b = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i$ existem. Denominam-se de *limite esquerdo* e *limite direito* de x respectivamente. Neste caso denomina-se x de (a, b) -*escada*. Dada uma (a, b) -escada x , chama-se *coordenada esquerda* o maior ponto $i \in \mathbb{Z}$ que tem nível a e denota-se por $\text{esq}(x)$. Do mesmo modo chama-se *coordenada direita* o menor ponto $i \in \mathbb{Z}$ que tem nível b e denota-se por $\text{dir}(x)$.

Lema 2.2. *Seja D monótono definido como em (1.1) e com a propriedade (2.1). Se x é uma (a, b) -escada, então Dx também é uma (a, b) -escada.*

Demonstração: Tomemos x uma (a, b) -escada crescente, ou seja,

$$(\forall i \in \mathbb{Z}; x_i \leq x_{i+1}).$$

Como D é monótono,

$$(\forall i \in \mathbb{Z}; x_i \leq x_{i+1}) \implies (\forall i \in \mathbb{Z}; (Dx)_i \leq (Dx)_{i+1}).$$

Logo os limites

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} (Dx)_i \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (Dx)_i,$$

existem. Falta mostrar que $\lim_{i \rightarrow -\infty} (Dx)_i = a$ e $\lim_{i \rightarrow +\infty} (Dx)_i = b$. Pela definição de x , existe i_0 tal que $(\forall i \leq i_0 : x_i = a)$. Assim

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} (Dx)_i = \lim_{i \rightarrow -\infty} f(x_{i-r}, \dots, x_{i+r}) = \lim_{i \rightarrow -\infty} f(a, \dots, a) = \lim_{i \rightarrow -\infty} a = a.$$

De forma análoga podemos provar que $\lim_{i \rightarrow +\infty} (Dx)_i = b$. Portanto Dx é uma (a, b) -escada. Para (a, b) -escada decrescente a demonstração é análoga. *Lema 2.2 está demonstrado.*

Lema 2.3. *Se x e y são duas escadas do mesmo tipo e $x \succ y$, então $\text{esq}(x) \leq \text{esq}(y)$ e $\text{dir}(x) \leq \text{dir}(y)$.*

Demonstração: Consideramos (a, b) -escada, o tipo de nossas escadas. Mostremos que $\text{dir}(x) \leq \text{dir}(y)$. Sejam x e y escadas crescentes, seja $j = \text{dir}(y)$, logo j é a menor coordenada que tem nível b em y . Assim, dado que y é uma (a, b) -escada crescente temos $b = y_j = y_{j+1} = \dots = y_{j+r}$. Por hipótese temos $\forall j \in \mathbb{Z} : y_j \leq x_j \implies x_j = b$. Sabendo que x é crescente e que $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = b$, temos que $b = x_j = x_{j+1} = \dots = x_{j+r}$. Portanto, $\text{dir}(x) \leq j = \text{dir}(y)$. De forma análoga podemos concluir para escadas crescentes que $\text{esq}(x) \leq \text{esq}(y)$, motivo pelo qual omitimos a demonstração. *Lema 2.3 está demonstrado.*

O comprimento da escada x , denotado por $\text{comp}(x)$, é definido como $\text{comp}(x) = \text{dir}(x) - \text{esq}(x)$. Notemos que sempre $\text{comp}(x) \geq 1$. Uma (a, b) -escada é chamada um (a, b) -salto quando $\text{comp}(x) = 1$, ou seja, $x = (\dots aabb \dots)$.

Proposição 2.2 (Galperin 1976). *Seja x um (a, b) -salto, D monótono definido com em (1.1) e com a propriedade (2.1). Então os seguintes limites existem:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{esq}(D^t x)}{t} = L_{a,b} \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dir}(D^t x)}{t} = R_{a,b}$$

Demonstração: O caso geral, ou seja, $U = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ foi provado por Galperin (1976). Vamos explicar a demonstração para $U = \{0, 1, 2\}$.

Quando $R_{a,b} = L_{a,b}$ denotamos este valor comum por $V_{a,b}$ e denominaremos de (a, b) -velocidade do operador D .

Neste caso temos 6 possíveis saltos: três crescentes e três decrescentes. Os saltos crescentes são: $(0, 1)$ – salto, $(0, 2)$ – salto e $(1, 2)$ – salto. Os decrescentes são: $(1, 0)$ – salto, $(2, 0)$ – salto e $(2, 1)$ – salto. Vamos provar a existência dos limites para os saltos crescentes, pois para decrescentes as demonstrações são análogas.

O primeiro caso, $(0, 1)$ – salto, como só possui dois estados, $\{0, 1\}$, a ação de D não faz aparecer um novo estado. Dx é uma translação da configuração original x . Deste modo, temos:

$$\exists v \in \mathbb{Z} : Dx = \mathcal{T}_v x.$$

Denotamos $\text{esq}(x) = j$, conseqüentemente $\text{dir}(x) = j + 1$. Logo $\text{esq}(D^t x) = j + vt$ e $\text{dir}(D^t x) = j + 1 + vt$. Assim,

$$L_{0,1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{esq}(D^t x)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j + vt}{t} = v.$$

Por outro lado,

$$R_{0,1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dir}(D^t x)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j + 1 + vt}{t} = v.$$

Portanto os limites existem e são iguais $L_{0,1} = R_{0,1} = V_{0,1}$. O caso $(1, 2)$ – salto é análogo ao apresentado acima.

Agora vamos mostrar que os limites existem quando x é $(0, 2)$ – salto. Tomemos x , um $(0, 2)$ – salto e aplicamos D a ele iterativamente. Desta forma, alguns uns podem aparecer entre zeros e dois. Neste caso temos que considerar duas situações distintas:

$$V_{0,1} \geq V_{1,2} \quad \text{ou} \quad V_{0,1} < V_{1,2}.$$

Suponha $V_{0,1} \geq V_{1,2}$, assim a quantidade de componentes em $D^t x$ no estado 1 é limitada, veja Galperin (1976). Assim, dado que D é monótono e $V_{0,1} \geq V_{1,2}$, temos que a quantidade de componentes no estado 1 não ultrapassa $2r + 1$, o raio de interação de D . Logo temos que $L_{0,2}$ e $R_{0,2}$ existem e são iguais.

Suponha $V_{0,1} < V_{1,2}$, temos que a quantidade de componentes no estado 1 em $D^t x$ tende para infinito, assim $L_{0,2} = V_{0,1}$ e $R_{0,2} = V_{1,2}$. Como que $V_{1,2}$ e $V_{0,1}$ existem, concluímos que $L_{0,2}$ e $R_{0,2}$ existem. Para $U = \{0, 1, 2\}$. *Proposição 2.2 está provada.*

Quando $R_{a,b} = L_{a,b}$ denotamos este valor comum por $V_{a,b}$ e denominaremos de (a,b) -*velocidade* do operador D .

Lema 2.4. *Seja x um $(0,2)$ -salto e D monótono definido como em (1.1). Então*

$$\text{esq}(D^t x) \leq \text{esq}(x) + t \cdot V_{0,1}. \quad (2.3)$$

Demonstração: Podemos supor que $\text{esq}(x) = 0$ e provar que

$$\text{esq}(D^t x) \leq t \cdot V_{0,1}$$

Seja y um $(0,1)$ -salto, tal que $\text{esq}(y) = 0$. Como y é um $(0,1)$ -salto temos $\text{esq}(Dy) = V_{0,1}$, assim $\text{esq}(D^t y) = t \cdot V_{0,1}$. Logo temos $(D^t y)_{t \cdot V_{0,1}} = 0$ e $(D^t y)_{t \cdot V_{0,1} + 1} = 1$.

Temos $x \succ y$. Logo

$$D^t x \succ D^t y.$$

Assim,

$$\forall i : (D^t x)_i \geq (D^t y)_i \implies (D^t x)_{t \cdot V_{0,1} + 1} \geq (D^t y)_{t \cdot V_{0,1} + 1} = 1.$$

Então

$$(D^t x)_{t \cdot V_{0,1} + 1} \geq 1.$$

Logo

$$\text{esq}(D^t x) \leq t \cdot V_{0,1}.$$

Lema 2.4 está demonstrado.

Lema 2.5. *Seja x um $(0,2)$ -salto e D monótono definido como em (1.1). Então,*

$$\text{dir}(D^t x) \geq \text{dir}(x) + t \cdot V_{1,2}.$$

Demonstração: Podemos supor que $\text{dir}(x) = 0$ e provar que

$$\text{dir}(D^t x) \geq t \cdot V_{1,2}$$

Seja y um $(1,2)$ -salto, tal que $\text{dir}(y) = 0$. Como y é um $(1,2)$ -salto temos $\text{dir}(Dy) = V_{1,2}$, assim $\text{dir}(D^t y) = t \cdot V_{1,2}$. Logo temos $(D^t y)_{t \cdot V_{1,2}} = 2$ e $(D^t y)_{t \cdot V_{1,2} - 1} = 1$.

Temos $x \prec y$. Portanto

$$D^t x \prec D^t y.$$

Assim,

$$\forall i : (D^t x)_i \leq (D^t y)_i \implies (D^t x)_{t \cdot V_{1,2}-1} \leq (D^t y)_{t \cdot V_{1,2}-1} = 1.$$

Então

$$(D^t x)_{t \cdot V_{1,2}-1} \leq 1.$$

Daí

$$\text{dir}(D^t x) \geq t \cdot V_{1,2}.$$

Lema 2.5 está demonstrado.

Lema 2.6. *Seja D monótono definido como em (1.1). Então $L_{0,2} \leq V_{0,1}$.*

Demonstração: Pelo **Lema 2.4** desigualdade (2.3) temos:

$$\text{esq}(D^t x) \leq \text{esq}(x) + t \cdot V_{0,1}. \quad (2.4)$$

Observamos que dividindo ambos os lados da desigualdade de (2.4) por t e aplicando o limite quando $t \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{esq}(D^t x)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{esq}(x)}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \cdot V_{0,1}}{t}.$$

Portanto,

$$L_{0,2} \leq V_{0,1}.$$

Lema 2.6 está demonstrado.

Lema 2.7. *Seja D monótono definido como em (1.1). Então $R_{0,2} \geq V_{1,2}$.*

Demonstração: Análoga ao **Lema 2.6**.

Proposição 2.3 (Galperin 1976). *Um operador D monótono definido como em (1.1) é erodente se, e somente se*

$$R_{0,k} > L_{k,0} \text{ para todos } k = 1, 2, \dots, m.$$

Prova: Ver Galperin (1976).

Proposição 2.4 (Galperin 1976). *Um operador D monótono definido como em (1.1) é conservativo se, e somente se, $R_{0,m} \leq L_{m,0}$.*

Prova: Ver Galperin (1976).

2.3 Definição do Processo

Esta definição de nosso processo será necessária para prova dos teoremas. Apresentamos o processo como uma medida no espaço da seguinte forma. Seja o espaço

$$\bar{\Omega} = \{0, 1, \dots, m\}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+},$$

e consideramos uma medida em $\bar{\Omega}$ induzida por uma medida-produto no espaço auxiliar

$$\Psi = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+}.$$

Denotaremos por $w \in \Psi$ uma configuração auxiliar e w_v^t a componente de w indexada por $v \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}_+$.

Seja \mathcal{P} uma medida produto em Ψ tal que

$$w_v^t = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } \alpha, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - \alpha. \end{cases}$$

Nosso processo é induzido de \mathcal{P} com uma função definida de forma indutiva. Denotamos por x_v^t as componentes da configuração $x \in \bar{\Omega}$.

Base de indução: $x_v^0 = 0$, para todo $v \in \mathbb{Z}$.

Passo de indução para todo $t = 0, 1, 2, \dots$

$$x_v^{t+1} = \begin{cases} m, & \text{se } w_v^{t+1} = 1, \\ f(x_{v+v_1}^t, \dots, x_{v+v_n}^t), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}$ e denominamos *vetores vizinhos* de v . Nós usaremos a letra \mathcal{P} também para denotarmos as probabilidades dos eventos de nosso processo.

Proposição 2.5. *Seja $U = \{0, 1, \dots, m\}$. Assumimos que o operador D definido em (1.1) é monótono e conservativo. Então o operador $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha > 0$.*

Prova: Usamos a descrição acima para nosso processo. Pela uniformidade, a **Proposição 2.5** é equivalente a:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x_0^T = m) = 1. \quad (2.5)$$

Seja z , uma ilha robusta, de tal forma que para cada número natural t existe v_t tal que $(D^t z)_{v_t} = m$. Por causa da uniformidade temos:

$$(D^t(\mathcal{T}_{-v_t} z))_0 = m.$$

Para cada $t \in [1, T]$, vamos considerar o evento

$$E_t = \{w : w_h^t = 1 \text{ para todo } h \text{ tal que } (\mathcal{T}_{-v_{T-t}} z)_h \neq 0\}.$$

Devido à monotonicidade, este evento garante que a configuração no tempo t não é menor que $\mathcal{T}_{-v_{T-t}} z$. Desta forma, garantimos que nesse passo $x_0^T = m$. Nós sabemos que $w_v^t = 1$ com probabilidade $\alpha \in (0, 1)$ independentemente para cada par (v, t) , logo $\mathcal{P}(E_t) = \alpha^k$, onde k é o número de componentes de z diferentes de zero. Assim $\mathcal{P}(\text{não } E_t) = 1 - \alpha^k$. Dado que os eventos são independentes,

$$\mathcal{P}(\text{para todo } t \in [1, T] \text{ não } E_t) = (1 - \alpha^k)^T.$$

Assim,

$$\mathcal{P}(x_0^T = m) \geq 1 - (1 - \alpha^k)^T.$$

O lado direito dessa desigualdade é igual a 1 quando $T \rightarrow \infty$, portanto temos (2.5). *Proposição 2.5 está provado.*

Proposição 2.6 (Toom 2001). *Seja $m = 1$. Assumimos que o operador D definido como em (1.1) é monótono. Neste caso temos:*

(i) *Se $V_{0,1} \leq V_{1,0}$, então $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha > 0$.*

(ii) *Se $V_{0,1} > V_{1,0}$, existe $\alpha > 0$ tal que $S_\alpha D$ não é ergódico.*

Prova: Primeiramente vamos provar o item (i). Temos que $V_{0,1} \leq V_{1,0}$, conseqüentemente $R_{0,1} \leq L_{1,0}$. Logo para o caso $U = \{0, 1\}$ temos que D é conservativo. Uma vez que D definido em (1.1) é monótono e conservativo, pela **Proposição 2.5** temos que $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha > 0$.

Agora vamos a prova do item (ii). Se $V_{0,1} > V_{1,0}$, tem-se imediatamente que $R_{0,1} > L_{1,0}$. Aplicando a **Proposição 2.3 (Galperin)** ao caso particular $U = \{0, 1\}$, temos que D é erodente. Portanto o segundo item desta proposição é equivalente à **Proposição 2.1** provada por Toom (2001). Para prova completa desse resultado veja Toom (2001). *Proposição 2.6 está provada.*

Enunciado do Teorema Principal

3.1 O Exemplo Principal

Consideramos a seguinte hipótese: Seja operador D definido como em (1.1) monótono temos que $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha \in (0, 1)$ se, e somente se, D é conservativo. Se $U = \{0, 1\}$, esta hipótese é verdadeira, provada por Toom (2001). O nosso maior resultado é apresentar um exemplo que é uma refutação dessa hipótese quando $U = \{0, 1, 2\}$, ou seja, apresentamos um exemplo de um operador D definido como em (1.1) monótono não conservativo, na verdade erodente, cuja superposição $S_\alpha D$ é ergódica para cada $\alpha > 0$.

Agora consideramos um operador determinístico particular G , apresentado pela primeira vez por Toom (1976). Tomemos $\Omega = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas as con-

figurações. Seja $(Gx)_i = g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, onde

$$g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_{i-1} = 0; x_i = x_{i+1} = 1, \\ 1, & \text{se } x_{i-1} = x_i = 2; x_{i+1} = 1, \\ 2, & \text{se } x_{i-1} + x_i = x_{i+1} = 2, \\ \text{O inteiro mais próximo de } \frac{(x_{i-1} + x_i + x_{i+1})}{3} & \\ \text{em todos os outros casos.} & \end{cases} \quad (3.1)$$

Teorema 3.1. G é erodente.

Prova: Vamos mostrar que G é erodente, logo não conservativo. Isto é, $I_2(G^t x)$ e $I_1(G^t x)$ são vazios para algum $t = 1, 2, 3, \dots$, onde $I_2(G^t x)$ é o conjunto dos i tais que $(G^t x)_i = 2$. Tal conjunto é vazio para todo $t \geq l$, onde l é a quantidade de componentes x_i no estado 2. Temos também que $I_1(G^t x)$ é o conjunto dos i tais que $(G^t x)_i \geq 1$. Tal conjunto é vazio para todo $t \geq 2l$, onde l é a quantidade de componentes x_i no estado 1. Portanto G é erodente.

Outra forma de mostrar que D é erodente.

Tabela 3.1: Velocidades para o operador G

$V_{0,1}$	$V_{1,0}$	$V_{1,2}$	$V_{2,1}$	$V_{0,2}$	$L_{2,0}$	$R_{2,0}$
1	0	-1	-1	0	-1	0

Assim, temos que $R_{0,2} > L_{2,0}$ e $R_{0,1} > L_{1,0}$, pela **Proposição 2.3 (Galperin)** concluímos que G é erodente. Desta maneira, temos também pela **Proposição 2.4** que D não é conservativo. *Teorema 3.1 está provado.*

Teorema 3.2 (Teorema Principal). $S_\alpha G$ é ergódico para todo $\alpha > 0$.

Prova do Teorema Principal

4.1 Prova do Teorema 3.2 (Teorema Principal)

Devemos mostrar que $S_\alpha G$ é ergódico para cada $\alpha > 0$. Sabemos por (2.1) que $\forall a \in \{0, 1, 2\} : f(a, \dots, a) = a$, então $f(2, \dots, 2) = 2$. Logo, δ_2 é invariante para G . Por outro lado, δ_2 é invariante para S_α . Logo, δ_2 é invariante para $S_\alpha G$. Portanto, mostrar a ergodicidade de $S_\alpha G$ é equivalente a mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S_\alpha G)^t \delta_0 = \delta_2. \quad (4.1)$$

Mostremos que se (4.1) então $S_\alpha G$ é ergódico. Devido a monotonicidade de $S_\alpha G$ e sabendo que $\forall \mu : \delta_0 \prec \mu$, temos

$$\forall t, \mu : (S_\alpha G)^t \delta_0 \prec (S_\alpha G)^t \mu.$$

Se aplicando $(S_\alpha G)$ para δ_0 o limite é δ_2 , então, aplicando $(S_\alpha G)$ para qualquer outra medida, o limite também será δ_2 .

Devido a uniformidade e monotonicidade, para mostrar (4.1) é suficiente mostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : ((S_\alpha G)^T \delta_0)(x_0 < 2) \leq \varepsilon.$$

Usando nossa representação do processo definido na seção (2.3), temos que mostrar:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \mathcal{P}(x_0^T = 2) \geq 1 - \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$ escolhido e T um parâmetro que vamos escolher. Para cada $t \in [1, T]$ e cada n natural, consideramos o evento:

$$\mathcal{E}_t = \{w : \forall h \in [0, 2n] : w_h^t = 1\}. \quad (4.2)$$

Sabemos que todos os w_h^t são independentes e que cada w_h^t é igual a 1 com probabilidade α . Logo, temos $\mathcal{P}(\mathcal{E}_t) = \alpha^{2n+1}$. Conseqüentemente,

$$\mathcal{P}(\text{não } \mathcal{E}_t) = 1 - \alpha^{2n+1}.$$

Sabendo que $0 < (1 - \alpha^{2n+1}) < 1$, concluímos que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - \alpha^{2n+1})^T = 0.$$

Logo para cada ε e cada n existe T_1 , tal que

$$\forall T \geq T_1 : (1 - \alpha^{2n+1})^T \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (F_1)$$

Suponhamos que pelo menos um evento \mathcal{E}_t aconteceu. Em seguida definimos uma sequência de variáveis aleatórias $\mathcal{S}_t, \mathcal{S}_{t+1}, \dots$ de maneira indutiva.

Base de indução: $\mathcal{S}_0 = 2n$.

Passo de indução: $\mathcal{S}_{t+1} = \mathcal{S}_t + w_{\mathcal{S}_t}^t$.

Observamos que a sequência $\mathcal{S}_t, \mathcal{S}_{t+1}, \dots$ é o mesmo passeio aleatório descrito no Apêndice A. Logo, devido ao **Lema A item (i)** no Apêndice A temos,

$$\mathcal{P}\left(\exists t : \mathcal{S}_t < n + \frac{\alpha t}{2}\right) \leq \sum_{t=\lceil \frac{2n}{\alpha} \rceil}^{\infty} \rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}} (\alpha\rho + 1 - \alpha)]^t, \quad (4.3)$$

para $\rho = 1 - \alpha$.

Tomando o mesmo valor para ρ pelo **Lema A item (ii)** temos também que $0 < \rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)] < 1$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{t=\lceil \frac{2n}{\alpha} \rceil}^{\infty} \rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)]^t &= \rho^n \sum_{t=\lceil \frac{2n}{\alpha} \rceil}^{\infty} [\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)]^t = \\ &= \frac{\rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)]^{\lceil \frac{2n}{\alpha} \rceil}}{1 - \rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Assim, $\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists n$ tal que, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left(\exists t : \mathcal{S}_t < n + \frac{\alpha t}{2} \right) &= \mathcal{P} \left(\bigcup_{t=0}^{\infty} \{ w : \mathcal{S}_t < n + \frac{\alpha t}{2} \} \right) \leq \\ &\leq \frac{\rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)]^{\lceil \frac{2n}{\alpha} \rceil}}{1 - \rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, com a mesma escolha de n temos

$$\mathcal{P} \left(\exists t : \mathcal{S}_t < n + \frac{\alpha t}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (F_2)$$

Consideramos o plano discreto com coordenadas (s, t) em que $s \in \mathbb{Z}$ (espaço) e $t \in \mathbb{Z}_+$ definimos \mathcal{Q} a região deste plano tal que

$$0 < s < n + \frac{\alpha(t - t_0)}{2} \quad e \quad t > t_0,$$

onde t_0 é parâmetro. Chamaremos de passo Sul-Leste o vetor $(1, -1)$. Definimos agora para cada ponto $(s, t) \in \mathcal{Q}$ a quantidade *ranque* de (s, t) que denotaremos por $\text{ran}(s, t)$, que é o número máximo de passos Sul-Leste, começando em (s, t) , tais que depois desses passos ainda continuamos em \mathcal{Q} .

Lema 4.1. *Seja g definida em (3.1).*

(i) *Se $b > 0$ e $c > 0$, então $g(a, b, c) \geq b$*

(ii) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $g(a, b, c) \geq 1$.

Demonstração: Observamos os seguintes valores de $g(a, b, c)$:

Para verificar os itens (i), (ii) ver Tabela 4.1, Tabela 4.2 respectivamente:

Tabela 4.1: Aplicação de g para o caso (i)

a	b	c	$g(a, b, c)$
1	2	2	2
1	2	1	1
2	1	1	1
2	2	1	1
1	1	2	2
2	1	2	2

Tabela 4.2: Aplicação de g para o caso (ii)

a	b	c	$g(a, b, c)$
2	2	0	1
1	1	0	1

Lema 4.1 está demonstrado.

Lema 4.2. Denotamos as componentes x_v^t por $x_{(v,t)}$. Consideramos o nosso processo aleatório \mathcal{P} , com a seguinte condição:

$$x_{(0,t)} = x_{(1,t)} = \dots = x_{(2n,t)} = 2.$$

Então,

$$\forall (s, t) \in \mathcal{Q}: \quad \mathcal{P}(x_{(s,t)} < 2) \leq (1 - \alpha)^{\text{ran}(s,t)}.$$

Demonstração: Provemos por indução.

Base de indução $\text{ran}(s, t) = 0$. Assim evidentemente,

$$\mathcal{P}(x_{(s,t)} < 2) \leq 1.$$

Passo de indução. Suponha verdadeiro para $\text{ran}(s, t) \geq k$. Seja $\text{ran}(s, t) = k + 1$, onde $k \geq 0$, daí $(s + 1, t - 1) \in \mathcal{Q}$ e $\text{ran}(s + 1, t - 1) = k$. Pela hipótese de indução temos

$$\mathcal{P}(x_{(s+1, t-1)} < 2) \leq (1 - \alpha)^k.$$

Agora aplicamos o operador determinístico na configuração x e obtemos:

$$(Gx_t)_s = g(x_{(s-1, t-1)}, x_{(s, t-1)}, x_{(s+1, t-1)}).$$

Pelo **Lema 4.1** temos $(Gx_t)_s = x_{(s+1, t-1)}$. Agora aplicamos operador aleatório e temos que:

$$\begin{aligned} (S_\alpha G)(x_{(s, t)} < 2) &= (1 - \alpha) (S_\alpha G)(x_{(s, t-1)} < 2) = \\ &= (1 - \alpha) (S_\alpha G(x_{(s+1, t-1)} < 2)) \leq (1 - \alpha)^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto o passo de indução está feito. *Lema 4.2 está demonstrado.*

Definimos uma sequência de subconjuntos de \mathcal{Q} que chamaremos de *diagonais* e denotaremos por \mathcal{D} . Desta forma, $(s, t) \in \mathcal{D}_q$ se, $s + t = t_0 + q$. Denotamos por $|\mathcal{D}_t|$ a cardinalidade de \mathcal{D}_t .

Lema 4.3. *Seja*

$$\mathbb{E}_t = \{w : \exists h \in \mathcal{D}_t; w_h = 1\}. \quad (4.4)$$

Então para cada ε existe n , tal que

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_t\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demonstração: Temos que

$$\mathcal{P}(\mathbb{E}_t) = 1 - \mathcal{P}(\forall h \in \mathcal{D}_t; w_h = 0) = 1 - (1 - \alpha)^{|\mathcal{D}_t|} \quad (4.5)$$

Se $i \neq j$ temos que $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$, daí

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_t\right) = \prod_{t=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbb{E}_t) \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) em (4.6) temos,

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_t\right) = \prod_{t=1}^{\infty} (1 - (1 - \alpha)^{|\mathcal{D}_t|}),$$

devido ao **Lema B**, ver Apêndice B, temos que

$$\prod_{t=1}^{\infty} (1 - (1 - \alpha)^{|\mathcal{D}_t|}) \geq 1 - \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{|\mathcal{D}_t|}$$

Sabemos que para $t \geq n$ temos $|\mathcal{D}_t| \geq [n + \frac{\alpha t}{2}]$, em que $[.]$ é a parte inteira. Logo,

$$\sum_{t=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{|\mathcal{D}_t|} \leq \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{[n + \frac{\alpha t}{2}]}, \quad (4.7)$$

assim por (4.7) temos que,

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^{\infty} (1 - (1 - \alpha)^{|\mathcal{D}_t|}) &\geq 1 - \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{[n + \frac{\alpha t}{2}]} \\ &= 1 - \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \alpha)^n (1 - \alpha)^{\frac{\alpha t}{2}} = 1 - (1 - \alpha)^n \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{\frac{\alpha t}{2}} = \\ &= 1 - (1 - \alpha)^n \sum_{t=1}^{\infty} ((1 - \alpha)^{\frac{\alpha}{2}})^t = 1 - (1 - \alpha)^n \frac{(1 - \alpha)^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\forall \alpha \in (0, 1), \forall \varepsilon > 0, \exists n : \quad (1 - \alpha)^n \frac{(1 - \alpha)^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então,

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_t\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Lema 4.3 está demonstrado.

Portanto devido ao **Lema 4.3** temos,

$$1 - \mathcal{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_t\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (F_3)$$

Baseado nas demonstrações anteriores temos:

1. Pela desigualdade (F_1) temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, \forall n \geq n_1 : \mathcal{P}(\forall t \in [1, T] : \mathcal{E}_t \text{ não acontece}) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

2. Pela desigualdade (F_2) temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_2, \forall n \geq n_2 : \mathcal{P} \left(\exists t : \mathcal{S}_t < n + \frac{\alpha t}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

3. Pela desigualdade (F_3) temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_3, \forall n \geq n_3 : 1 - \mathcal{P} \left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_t \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomamos $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ para garantir que todas as desigualdades acima são cumpridas. Agora vamos escolher T e estimar $\mathcal{P}(x_0^T < 2)$.

Para cada $t \in [0, T]$ nós definimos anteriormente em (4.2) o evento \mathcal{E}_t . Também definimos o evento

$$\mathcal{E}'_t = \mathcal{E}_t \cap \bigcap_{u=1}^{t-1} (\text{não } \mathcal{E}_u),$$

Se $t = 1$, isto significa que $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1$. O evento \mathcal{E}'_t significa que o evento \mathcal{E}_t é o primeiro que ocorreu dos eventos $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_T$.

Suponhamos que o evento \mathcal{E}'_t aconteceu. Sob esta condição consideramos os seguintes eventos:

$$\text{(I)} \quad \mathcal{F}_1 = \{ \forall t \in [1, T] : \mathcal{E}_t \text{ não acontece} \}.$$

$$\text{(II)} \quad \mathcal{F}_2 = \{ \exists t : \mathcal{S}_t < n + \frac{\alpha t}{2} \}.$$

$$\text{(III)} \quad \mathcal{F}_3 = \{ \forall h \in \mathcal{D}_t, \exists t : w_h^t = 0 \}.$$

Denominamos \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 primeiro, segundo e terceiro fracasso respectivamente.

Pela desigualdade (F_2) temos que $\mathcal{P}(\mathcal{F}_2 | \mathcal{E}'_t) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ se $n \geq n_2$. Devido ao **Lema 4.3** temos $\mathcal{P}(\mathcal{F}_3 | \mathcal{E}'_t) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $n \geq n_3$. Então

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 | \mathcal{E}'_t) \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Logo devido ao **Lema C**, ver Apêndice C, temos

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 | (\bigcup_{u=1}^T \mathcal{E}'_u)) \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\text{nenhum fracasso}) &\geq \mathcal{P}(\text{n\~ao } \mathcal{F}_2, \text{ n\~ao } \mathcal{F}_3 | \text{n\~ao } \mathcal{F}_1) \cdot \mathcal{P}(\text{n\~ao } \mathcal{F}_1) \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) = 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{9} > 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Teorema Principal esta provado.

CAPÍTULO 5

Discussões e Sugestões de Pesquisa

Nosso resultado principal é apenas um exemplo de um autômato celular ergódico para $m = 2$, mas sua importância é relevante, pois é através deste que verificamos que o resultado para $m = 1$ de Toom (2001) não é verdade para $m = 2$. Mais precisamente, para $m = 1$ temos que $S_\alpha D$ é ergódico se, e somente se, D não é erodente. Nosso teorema principal mostra que para $m = 2$ esse resultado não é verdadeiro. Desta maneira, para $m = 2$, encontrar o conjunto dos autômatos celulares que são ergódicos é uma tarefa não cumprida e certamente muito trabalhosa.

O operador G e previsão de sua ergodicidade foi apresentado por Toom (1976), mas a prova da ergodicidade de $S_\alpha G$ está sendo apresentada pela primeira vez nesta tese. Nosso teorema principal mostra que δ_2 é a única medida invariante do operador $S_\alpha G$ para cada $\alpha > 0$.

Nosso interesse para trabalhos futuros é encontrar para $m = 2$ algo um pouco mais geral como por exemplo o conjunto dos autômatos celulares, tal que a superposição $S_\alpha D$ é ergódica.

Um problema ainda não resolvido, mas que parece ser muito razoável e temos indícios

de sua veracidade é o seguinte:

Seja $U = \{0, 1, 2\}$. Assumimos que o operador D definido em (1.1) é monótono.

(i) Se $V_{1,2} \leq V_{2,1} < V_{0,2} \leq V_{1,0} < V_{0,1}$, então D é erodente e $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) Se $V_{1,2} < V_{2,1} < V_{0,2} \leq V_{1,0} \leq V_{0,1}$, então D é erodente e $S_\alpha D$ é ergódico para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Esta conjectura é mais abrangente que nosso resultado, por isso sua prova merece muita atenção. Com esse resultado encontraríamos uma classe de operadores ergódicos para $m = 2$.

Apêndice A

Lema A. Consideramos o passeio aleatório $\mathcal{S}_t = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$, sendo todos os Y_i , com $i = 1, \dots, t$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas em que

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } \alpha, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - \alpha. \end{cases}$$

Logo:

(i) Para cada $\rho \in (0, 1)$ temos,

$$P\left(\mathcal{S}_t < n + \frac{t\alpha}{2}\right) \begin{cases} = 0, & \text{se } t < \frac{2n}{\alpha}, \\ \leq \rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}} (\alpha\rho + 1 - \alpha)]^t, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(ii) Para cada $\alpha \in (0, 1)$, existe $\rho \in (0, 1)$ tal que $\rho^{-\frac{\alpha}{2}} (\alpha\rho + 1 - \alpha) < 1$.

Demonstração : Primeiro vamos mostrar o item (i). Sabemos que

$$P\left(\mathcal{S}_t < n + \frac{t\alpha}{2}\right) = \sum_{j < n + \frac{t\alpha}{2}} P(\mathcal{S}_t = j).$$

Porém \mathcal{S}_t tem distribuição binomial com parâmetros t e α , logo

$$P(\mathcal{S}_t = j) = \begin{cases} C_j^t \alpha^j (1 - \alpha)^{t-j}, & \text{se } 0 \leq j \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde C_j^t significa a combinação de t elementos tomados j a j e

$$\mathbb{I}(j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j < n + \frac{t\alpha}{2}, \\ 0, & \text{se } j \geq n + \frac{t\alpha}{2}. \end{cases}$$

Assim podemos escrever que

$$\sum_{j < n + \frac{t\alpha}{2}} P(\mathcal{S}_t = j) = \sum_{j=0}^t P(\mathcal{S}_t = j) \cdot \mathbb{I}(j)$$

Seja $\varphi(j) = \rho^{j - (-n + \frac{\alpha t}{2})}$, em que $0 < \rho < 1$. Logo,

$$\forall j : \mathbb{I}(j) \leq \varphi(j).$$

Desta forma temos que,

$$P\left(\mathcal{S}_t < n + \frac{t\alpha}{2}\right) = \sum_{j=0}^t P(\mathcal{S}_t = j) \cdot \mathbb{I}(j) \leq \sum_{j=0}^t P(\mathcal{S}_t = j) \cdot \varphi(j).$$

Porém,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^t P(\mathcal{S}_t = j) \cdot \varphi(j) &= \sum_{j=0}^t C_j^t \alpha^j (1 - \alpha)^{t-j} \rho^{j - (-n + \frac{\alpha t}{2})} = \\ &= \rho^{n - \frac{t\alpha}{2}} \sum_{j=0}^t C_j^t (\alpha\rho)^j (1 - \alpha)^{t-j} = \rho^{n - \frac{t\alpha}{2}} (\alpha\rho + 1 - \alpha)^t = \rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}} (\alpha\rho + 1 - \alpha)]^t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P\left(\mathcal{S}_t < n + \frac{t\alpha}{2}\right) \begin{cases} = 0, & \text{se } t < \frac{2n}{\alpha} \\ \leq \rho^n [\rho^{-\frac{\alpha}{2}} (\alpha\rho + 1 - \alpha)]^t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora vamos provar (ii). Devemos provar que

$$\forall \alpha \in (0, 1); \exists \rho \in (0, 1)$$

tal que,

$$\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha) < 1 \iff \frac{\alpha\rho + 1 - \alpha}{\rho^{\frac{\alpha}{2}}} < 1.$$

De modo equivalente basta provar que

$$\ln\left(\frac{\alpha\rho + 1 - \alpha}{\rho^{\frac{\alpha}{2}}}\right) < \ln 1,$$

ou seja,

$$\ln(\alpha\rho + 1 - \alpha) - \ln(\rho)^{\frac{\alpha}{2}} < 0.$$

É suficiente tomarmos $\rho = 1 - \alpha$, então

$$\ln(\alpha(1 - \alpha) + 1 - \alpha) < \frac{\alpha}{2} \ln(1 - \alpha).$$

Daí,

$$\ln(\alpha - \alpha^2 + 1 - \alpha) < \frac{\alpha}{2} \ln(1 - \alpha).$$

Assim, precisamos verificar se a desigualdade abaixo é verdadeira para qualquer $\alpha \in (0, 1)$, ou seja,

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \ln(1 - \alpha^2) < \frac{\alpha}{2} \ln(1 - \alpha). \quad (*)$$

Utilizando a expansão de Taylor temos que:

$$\ln(1 - \alpha^2) = -\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{2} - \frac{\alpha^6}{3} - \frac{\alpha^8}{4} - \frac{\alpha^{10}}{5} - \dots$$

$$\frac{\alpha}{2} \ln(1 - \alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{4} - \frac{\alpha^4}{6} - \frac{\alpha^5}{8} - \frac{\alpha^6}{10} - \dots$$

Assim demonstrar (*) é equivalente a mostrar que

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^4}{6} + \frac{\alpha^5}{8} + \frac{\alpha^6}{10} + \dots < \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{2} + \frac{\alpha^6}{3} + \frac{\alpha^8}{4} + \frac{\alpha^{10}}{5} + \dots$$

Dividindo a expressão acima por α^2 temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^4}{10} + \dots < 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{3} + \frac{\alpha^6}{4} + \frac{\alpha^8}{5} + \dots$$

Sabemos que,

$$\frac{1}{2}(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)$$

mas,

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^4}{10} + \dots < \frac{1}{2}(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \dots) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right).$$

Logo,

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^4}{10} + \dots < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) < 1, \quad \forall \alpha; \quad \alpha \in (0, 1).$$

mas, $1 < 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{3} + \frac{\alpha^6}{4} + \frac{\alpha^8}{5} + \dots$. Logo podemos concluir (*) portanto

$$\rho^{-\frac{\alpha}{2}}(\alpha\rho + 1 - \alpha) < 1.$$

Lema A está demostrado.

Apêndice B

Lema B. *Seja $a_1, \dots, a_k \in (0, 1)$. Então:*

$$(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3) \dots (1 - a_k) \geq 1 - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k).$$

Demonstração Provemos por indução.

Base de indução $k = 1$. Neste caso temos, $1 - a_1 = 1 - a_1$ é evidente.

Passo de indução. Suponha verdadeiro para k . Desta forma temos pela hipótese de indução que,

$$\prod_{i=1}^k (1 - a_i) \geq (1 - \sum_{i=1}^k a_i). \quad (**)$$

agora multiplicamos ambos os lados de (**) por $(1 - a_{k+1})$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k (1 - a_i)(1 - a_{k+1}) &\geq (1 - \sum_{i=1}^k a_i)(1 - a_{k+1}) = 1 - a_{k+1} - \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i + a_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i \geq 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i. \end{aligned}$$

Lema B está demonstrado.

Apêndice C

Definição C. Dado um espaço amostral Δ definimos os eventos

$$A, A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Delta,$$

tal que $A = \cup_{i=1}^n A_i$ e $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Lema C. Seja $P(B|A_i) \leq \varepsilon$ para todos i . Então $P(B|A) \leq \varepsilon$.

Demonstração: Por hipótese temos:

$$\forall i = 1, \dots, n: \quad P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \leq \varepsilon.$$

Devemos mostrar que

$$P(B | \cup_{i=1}^n A_i) \leq \varepsilon.$$

Sabemos que

$$P(B | \cup_{i=1}^n A_i) = \frac{P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n))}{P(\cup_{i=1}^n A_i)},$$

como os A_i são disjuntos temos que: se $i \neq j$ então $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$. Logo,

$$\begin{aligned} P(B | \cup_{i=1}^n A_i) &= \frac{\sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)} = \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^n P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(B | \cup_{i=1}^n A_i) \leq \varepsilon.$$

Lema C está demonstrado.

Referências Bibliográficas

- GALPERIN, G. One-dimensional Automaton Networks with Monotonic Local Interaction. *Doklady of Soviet Acad. of Sciences*, v. 12, pp. 74-87, 1976
- KURDYUMOV, G. L. An Algorithm-Theoretic Method in Studying Homogeneous Random Networks. *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology*. Ed. Dobrushin, R. L., Kryukov, V. I. and Toom, A. L. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, v. 653, pp. 37-55, 1978
- NEWMANN J. V. The general and logical theory of automata. *Collected Work*, edited by A. H. Taub, v.5, pp. 288, 1963.
- PETRI, N. The unsolvability of the problem of discerning of annulling iterative nets. *Studies in the theory of algorithms and mathematical logic*, Moscow, Nauka, 1979.
- TOOM, A; VASILYEV, N; STAVSKAYA, O; MITYUSHIN, L; KURDYUMOV, G. L. and PIROGOV, S. Discrete Local Markov Systems. *Stochastic Cellular Systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. *Nonlinear Science: theory and applications*, Manchester University Press, 1990.
- TOOM, A. Unstable Multicomponent Systems. *Problemy Peredachi Informtsii*, v. 12, n. 3, pp. 78-84, julho. 1976.

TOOM, A. Cellular Automata with Errors: Problems for Students of Probability. *Topics in Contemporary Probability and its Applications*. Ed. J. Laurie Snell. CRC Press, pp. 117-157, 1995.

TOOM, A. *Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares*. 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, RJ, 2001.