
UMA AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DA EFICIÊNCIA
DO GASTO PÚBLICO MUNICIPAL NO BRASIL

FERNANDO CÉSAR BRITO SANTOS

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
Co-orientadora: Profa. Dra. Maria da Conceição Sampaio de Sousa
Área de concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau
de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, dezembro de 2004

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

26 de novembro de 2004

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

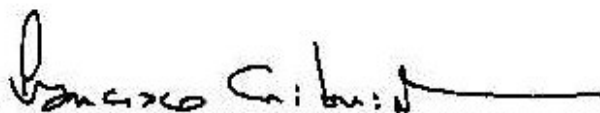
Fernando César Brito Santos

intitulada

Uma avaliação estatística da eficiência do gasto público municipal no

Brasil

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

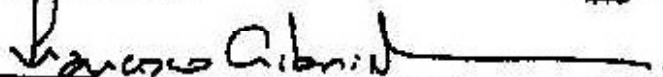


Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:



Prof. Francisco Cribari Neto
Coordenador de Mestrado
em Estatística da UFPE

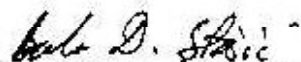


Francisco Cribari Neto

orientador



Silvia Lopes de Paula Ferrari (USP)



Borko Darko Stosić (UFRPE)

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

À minha esposa Sônia e à minha filha Mirella

Agradecimentos

A Deus e a todas as forças espirituais que iluminando meus caminhos permitiram que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais, João e Verônica, pelo esforço contínuo e imensurável para me educar.

À Sônia, minha esposa, que me suportou e compreendeu durante o desenvolvimento deste trabalho.

À Mirella, minha filha, que tolerou a minha falta de paciência e a minha ausência, mesmo quando eu estava presente fisicamente.

Aos meus tios Arli e Lune, pelo apoio de sempre e por compreenderem minha ausência.

Ao meu orientador, Professor Dr. Francisco Cribari-Neto, pela oportunidade concedida, competência, paciência, incentivo e disponibilidade.

À minha co-orientadora, Professora Dra. Maria da Conceição Sampaio de Sousa, pela disponibilização de parte dos dados.

À Silvia Torres e Cristina Moraes, pelo companherismo, suporte e incentivo.

À Valéria Bittencourt, pela eficiência, organização e apoio nos momentos difíceis.

Ao corpo docente do Programa de Mestrado em Estatística da UFPE, pela ajuda e atenção.

Aos colegas do mestrado e a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Esta dissertação fornece uma visão geral de como os municípios brasileiros têm-se comportado com relação ao gerenciamento de recursos públicos. O objetivo central é mensurar o impacto que a idade do município exerce na eficiência dessas cidades, além de indicar alguns aspectos considerados relevantes para a otimização dos gastos municipais. Para alcançar tal objetivo foi utilizado o banco de dados de um trabalho semelhante a este, desenvolvido por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić, em 2003, juntamente com informações provenientes do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento. As avaliações foram realizadas a partir dos fundamentos teóricos de três técnicas: DEA (análise envoltória de dados), regressão clássica e regressão quantílica. A técnica DEA se mostrou eficaz para a análise aqui proposta, porém não foi capaz de identificar o efeito que fatores externos poderiam provocar na eficiência dos municípios do Brasil. Daí a utilização dos métodos de regressão supra mencionados, que se revelaram adequados não só no tratamento dos fatores exógenos como nos condicionantes, sendo a regressão quantílica mais elucidativa por não se limitar às estimativas das medidas de tendência central. Os resultados revelaram que variáveis como idade dos municípios e recebimento de *royalties* sempre devem ser levadas em consideração em uma avaliação municipal.

Abstract

This thesis addresses the issue of evaluating the efficiency of public spending at Brazilian municipalities. The chief goal of the thesis is to measure the impact of the municipalities' ages on such efficiency. To that end, we have used the dataset compiled by Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003) together with further information from "Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento". The empirical analysis were performed using three approaches: DEA (data envelopment analysis), classical linear regression and quantile regression. The regression techniques were employed in order to identify the exogenous factors that explain the differences in efficiency. Our results show that young municipalities tend to be less efficient than well established ones.

Índice

1. Introdução	1
2. DEA - Análise Envoltória de Dados.....	3
2.1 Evolução Histórica	3
2.2 O Método DEA	4
2.2.1 O Modelo CCR	4
2.2.2 O Modelo BCC	6
2.3 O Esquema Jackstrap	8
3. Regressão Quantílica	11
3.1 Evolução Histórica	11
3.2 Fundamentos Teóricos.....	13
3.2.1 Densidade Simétrica	13
3.2.2 Função de Distribuição Inversa.....	14
3.2.3 Função Quantil	14
3.2.4 Modelo de Alocação.....	15
3.2.5 Função Kernel	15
3.3 Regressão Quantílica	16
3.3.1 Propriedades de Regressão Quantílica	18
3.3.2 A Função “Sparsity” ou Função Densidade Quantil.....	19
3.3.3 Estrutura dos Erros.....	21
3.3.4 Estimacão da Matriz de Covariância.....	22
3.3.5 Qualidade do Ajuste pela Regressão Quantílica.....	25
3.3.6 Inferência para Regressão Quantílica	26

4. Regressão Clássica	33
4.1 Evolução Histórica	33
4.2 O Método dos Mínimos Quadrados Ordinários	34
4.2.1 Propriedades dos Estimadores de Mínimos Quadrados	35
4.2.2 Qualidade do Ajuste pela Regressão Linear Clássica	35
4.2.3 Inferência para Regressão Linear Clássica	36
4.2.4 Estatísticas Auxiliares	43
5. Modelos	44
5.1 Os Modelos DEA	45
5.2 Os Modelos Lineares de Regressão Clássica	47
5.3 Os Modelos de Regressão Quantílica	50
6. Os Dados - Uma Breve Descrição	51
7. Resultados	55
7.1 Definição dos Modelos Ajustados	55
7.1.1 Modelos de Regressão Linear Clássica	55
7.1.2 Modelos de Regressão Quantílica	74
7.2 Eficiência Técnica Estimada	89
7.2.1 A Partir do Método DEA-CCR	90
7.2.2 A Partir do Método DEA-BCC	103
8. Conclusões	114
Bibliografia	117

Capítulo 1

Introdução

Uma avaliação estatística do gasto público municipal no Brasil foi realizada por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003). Contudo, estes autores não levaram em consideração a idade do município como fator condicionante. Esta variável pode influenciar a eficiência dos municípios brasileiros, uma vez que municípios novos supostamente não têm, ainda, uma estrutura administrativa e gerencial adequada.

A princípio, conjectura-se que em uma cidade recém-fundada a falta de estrutura e de recursos pode levá-la a ser pouco eficiente, ou até mesmo ineficiente no que se refere à administração dos recursos municipais. O objetivo desta dissertação é refazer a avaliação supra citada, considerando a idade dos municípios e verificando a importância dos fatores externos, que por sua natureza são extremamente difíceis de serem controlados.

Na avaliação foram utilizadas três técnicas: DEA (análise envoltória de dados), regressão clássica e regressão quantílica. A técnica DEA, que é não-paramétrica, pode ser usada para classificar os municípios brasileiros como eficientes ou ineficientes no que se refere ao gasto público. Os eficientes são utilizados para a construção matemática da fronteira de eficiência e servem de referência para os municípios que estão afastados dessa fronteira, considerados ineficientes.

Devido à natureza determinística dos modelos não-paramétricos, as ineficiências encontradas podem não ser explicadas apenas pela incompetência administrativa ou pela inexistência de incentivos e planejamentos satisfatórios para assegurar um funcionamento adequado das municipalidades, mas também pela presença de observações influentes (*outliers*), erros de medida, omissão de variáveis, heterogeneidade dos dados e outras discrepâncias es-

tatísticas; ver Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003).

Adicionalmente, as ineficiências podem ser consequência da existência de fatores externos, tais como condições naturais e climáticas, fatores políticos, características demográficas e sócio-econômicas, dentre outras.

Este trabalho se concentra na obtenção da estimativa da eficiência técnica de cada município, utilizando sua dependência de fatores exógenos com a finalidade de avaliar a relação entre as medidas obtidas pelo método DEA, através dos modelos CCR e BCC e as medidas ajustadas pelos fatores condicionantes obtidas a partir dos modelos de regressão clássica e quantílica.

A plataforma computacional utilizada é o pacote estatístico R, que é um *software* livre e tem sintaxe semelhante à do *software* S-PLUS. Ambos podem ser obtidos pela *internet* através das páginas <http://www.r-project.org> e <http://www.insightful.com>, respectivamente.

A estrutura organizacional desta dissertação compreende oito capítulos, incluindo esta introdução. No segundo capítulo é feita a abordagem teórica da técnica DEA, iniciando com uma sucinta evolução histórica, passando pela definição dos modelos CCR e BCC e terminando com a descrição do esquema de reamostragem jackstrap. O capítulo 3 apresenta a regressão quantílica, começando com um breve referencial histórico, seguido dos fundamentos teóricos e básicos referentes ao desenvolvimento do método. O quarto capítulo trata da teoria da regressão clássica, partindo de um resumo de sua origem, passando pelo método dos mínimos quadrados ordinários com suas propriedades e características. No capítulo 5 são definidos os modelos utilizados na avaliação objeto desta dissertação. Os capítulos 6 e 7 apresentam uma descrição dos dados e os resultados, acompanhados de suas respectivas análises e, finalmente, o oitavo capítulo contém um resumo das principais conclusões.

Capítulo 2

DEA - Análise Envoltória de Dados

2.1 Evolução Histórica

A abordagem analítica de mensuração da eficiência na produção teve sua origem com os trabalhos de Koopmans e Debreu em 1951, quando foram dadas duas definições para eficiência técnica.

Segundo Koopmans (1951), baseado na definição de eficiência de Pareto, um vetor composto por produtos (saídas, *outputs*) e recursos disponíveis (insumos, entradas, *inputs*) é tecnicamente eficiente se e somente se:

- nenhum dos produtos pode ser aumentado sem que um outro produto seja reduzido ou algum insumo seja aumentado;
- nenhum dos insumos pode ser reduzido sem que um outro insumo seja aumentado ou algum produto seja reduzido.

Este conceito permite diferenciar entre estados de produção eficientes e ineficientes, mas não permite medir o grau de ineficiência de um vetor. Daí, surge o coeficiente de utilização de recursos, definido por Debreu (1951), que é uma medida radial de eficiência técnica. Esta medida busca maximizar a redução equiproporcional de todos os insumos ou a maximização da expansão equiproporcional de todos os produtos.

Com base nesses dois conceitos, Farrell (1957) introduziu a idéia de determinar uma medida de eficiência de uma organização comparando-a com o melhor nível de eficiência observado, o que deu origem ao método DEA.

Do inglês *data envelopment analysis*, DEA é uma técnica de otimização não-paramétrica utilizada para obtenção de medidas relativas de eficiência que permitem a classificação de uma unidade tomadora de decisão (DMU - *decision making unit*) como sendo eficiente ou ineficiente, quando comparada com um conjunto de referência teórico.

Este método foi inicialmente proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), a partir do trabalho de dissertação para obtenção do grau de Ph.D de E. Rhodes sob a supervisão de W.W. Cooper. O modelo originalmente proposto é conhecido como CCR. Posteriormente, foram desenvolvidos o modelo multiplicativo por Charnes, Cooper, Seiford e Stutz (1982) e o modelo BCC por Banker, Charnes e Cooper (1984). Estes modelos formam o núcleo das estruturas analíticas que constituem o DEA.

2.2 O Método DEA

Um modelo DEA determina para cada DMU a razão máxima da soma ponderada dos produtos e a soma ponderada dos insumos, condicionada à disponibilidade dos recursos e à quantidade gerada de produtos. Neste caso, os termos de ponderação são as incógnitas a serem determinadas pelo modelo. Dessa forma, a técnica DEA é identificada como um modelo de programação matemática fracional que pode ser transformado em um modelo de programação linear.

2.2.1 O Modelo CCR

Sejam x_{ij} a quantidade disponível do insumo i usada na atividade j , y_{kj} a quantidade do produto k gerada na atividade j , v_i o peso dado ao insumo utilizado na atividade j e u_k o peso dado ao produto gerado na atividade j . O modelo CCR é dado por:

1. Modelo de Programação Fracional

$$\max_{u,v} Z_n = \frac{\sum_{k=1}^K u_k y_{kn}}{\sum_{i=1}^I v_i x_{in}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{k=1}^K u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^I v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots, J,$$

$$u_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K), \quad v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, I).$$

2. Modelo de Programação Linear

$$\max_{u,v} W_n = \sum_{k=1}^K u_k y_{kn}$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^K u_k y_{kj} - \sum_{i=1}^I v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

$$\sum_{i=1}^I v_i x_{in} = 1,$$

$$u_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K), \quad v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, I).$$

De maneira mais direta, o modelo CCR de programação linear acima visa determinar os pesos que maximizam o produto final gerado, W_n , para cada DMU tomada como referência, com os mesmos ou menos recursos. Isto significa que existem n problemas de programação linear para serem resolvidos, o que dá a dimensão do trabalho computacional a ser realizado. No que se refere às restrições, elas foram introduzidas no modelo para assegurar que nenhuma DMU pode estar além da “fronteira de eficiência” e para garantir que os pesos são positivos.

Convém salientar que para cada modelo de programação linear, chamado primal ou primitivo, existe um outro modelo, denominado dual, que é composto pelos mesmos coeficientes do primal, porém dispostos de maneira diferente. Neste caso, o dual do modelo CCR de programação linear é dado por

$$\min_{\theta, \lambda} \theta$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \theta x_{in} - \sum_{j=1}^J \lambda_j x_{ij} &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, I, \\ \sum_{j=1}^J \lambda_j y_{kj} &\geq y_{nk}, & k = 1, 2, \dots, K, \\ \lambda_j &\geq 0, & j = 1, 2, \dots, J. \end{aligned}$$

Aqui, verifica-se que o objetivo é determinar os valores dos pesos que minimizam o uso dos recursos disponíveis para cada DMU, com a finalidade de gerar a mesma quantidade de produtos ou mais. Quanto às restrições, pode-se notar que o vetor de intensidade, λ , representa retornos constantes de escala.

Devido às características dos modelos primal e dual, encontrando-se a solução de um desses modelos, automaticamente encontra-se a solução do outro modelo.

Pelo teorema básico da dualidade, se o primal e o dual têm soluções compatíveis, então a solução ótima do primal é igual à solução ótima do dual (ver Puccine, 1989). Dessa forma, a solução do problema pode ser encontrada tanto pela resolução do primal quanto pela resolução do dual. Geralmente, a escolha recai no modelo cuja intensidade computacional é menor.

2.2.2 O Modelo BCC

Em algumas situações a obtenção de medidas relativas de eficiência deve levar em consideração desajustes estruturais de longo prazo e, portanto, o uso de constantes de retorno de escala não é adequado. Logo, nessas circunstâncias, o modelo CCR não deve ser utilizado. Banker, Charnes e Cooper (1984) fizeram uma pequena alteração no modelo CCR, introduzindo uma nova restrição àquele modelo, que permitisse a existência de retorno variável de escala. Neste caso, o conjunto factível de atividades é formado por todas as combinações convexas das atividades observadas (disponíveis). Portanto, tem-se retornos crescentes para níveis baixos de produção e retornos decrescentes para níveis altos.

Assim, foi criado o modelo BCC:

$$\min_{\theta, \lambda} \theta$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \theta x_{in} - \sum_{j=1}^J \lambda_j x_{ij} &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, I, \\ \sum_{j=1}^J \lambda_j y_{kj} &\geq y_{nk}, & k = 1, 2, \dots, K, \\ \lambda_j &\geq 0, & j = 1, 2, \dots, J, \\ \sum_{j=1}^J \lambda_j &= 1. \end{aligned}$$

Devido ao fato de que a técnica DEA é um método não-estocástico, a “fronteira de eficiência” gerada por este método é passível de erros de medida e exposta ao questionamento das propriedades estatísticas de seus resultados. Uma forma de superar estas dificuldades seria a combinação da técnica DEA com outras metodologias, como por exemplo, o esquema “jackstrap”, que combina outros dois esquemas de reamostragem (“jackknife” e “bootstrap”) para eliminar a influência de *outliers* (pontos influentes) e possíveis erros de medida contidos nos dados.

Segundo Stošić e Sampaio de Sousa (2003), o método DEA é extremamente atrativo pois não exige conhecimento prévio da relação funcional existente entre as variáveis de entrada e saída e não impõe pesos estatísticos arbitrários às variáveis. Por outro lado, ainda segundo Stošić e Sampaio de Sousa (2003), como o método é baseado no conceito de fronteira de produção, um simples erro no conjunto de dados (erro de medida) ou uma unidade com excepcional desempenho (*outlier*) pode comprometer seriamente a análise, visto que os resultados para as unidades restantes ficam alterados na direção de valores de pouca eficiência, a distribuição de frequência da eficiência torna-se altamente assimétrica e a escala de eficiência global muda para uma forma não-linear.

Vários autores, como Wilson (1993, 1995), Banker e Gifford (1988) e Seaver e Triantis (1989), desenvolveram técnicas considerando os efeitos de *outliers* e de erros de medida. Contudo, as aproximações por eles propostas

dependem fortemente de inspeção manual, o que é virtualmente impossível quando o conjunto de dados é muito grande.

A definição de *outlier* derivada do conceito de alavancagem usado por Cribari-Neto e Zarkos (2004) aplicado à técnica DEA utiliza o impacto produzido no resultado das eficiências DEA para todas as outras DMUs quando a DMU é removida do conjunto de dados. Assim, a identificação das DMUs influentes é feita a partir das medidas de alavancagem, que podem ser calculadas da seguinte maneira:

- (i) Aplica-se o método DEA ao conjunto original de dados, obtendo-se, assim, o conjunto de medidas de eficiência $\{\theta_j | j = 1, 2, \dots, J\}$.
- (ii) Remove-se cada DMU do conjunto de dados, uma após a outra, e para cada DMU removida recalcula-se o conjunto de medidas de eficiência, agora denotado por $\{\theta_{jr}^* | j = 1, 2, \dots, J; j \neq r\}$, onde $r = 1, 2, \dots, J$ indica a DMU removida.
- (iii) Calcula-se a medida de alavancagem para a j -ésima DMU como sendo o desvio padrão das medidas de eficiência antes e depois da remoção da DMU. Ou seja:

$$\ell_r = \sqrt{\frac{\sum_{j=1; j \neq r}^J (\theta_{jr}^* - \theta_j)^2}{J - 1}}. \quad (2.1)$$

Como pode-se notar, a obtenção de ℓ_r exige a resolução de $J(J - 1)$ modelos de programação linear, o que pode ser computacionalmente muito intensivo e até proibitivo para J muito grande. Surge assim, a necessidade de uma técnica que diminua a intensidade dos cálculos.

2.3 O Esquema Jackstrap

Desenvolvido por Stošić e Sampaio de Sousa (2003), este esquema objetiva reduzir o impacto das DMUs influentes, usando o conceito de *outliers* dado por Cribari-Neto e Zarkos (2004). Isto pode ser realizado através de um processo em duas fases.

1. Primeira fase: Nesta fase é implementado um algoritmo em 3 passos para calcular as medidas de alavancagem. Ou seja:

- (i) Seleciona-se, aleatoriamente, um subconjunto de L DMUs, geralmente 10% de J , e calculam-se as medidas de alavancagem de acordo com (2.1), agora denotadas por $\tilde{\ell}_{j1}$, onde o número 1 no índice indica o primeiro subconjunto gerado.
- (ii) Repete-se o passo (i) um número grande, B , de vezes, obtendo-se $\tilde{\ell}_{jb}$, onde $b = 1, 2, \dots, B$. Neste caso, encontram-se BL subconjuntos de medidas de alavancagem. Assim, cada DMU, em média, é selecionada $m_j = BL/J$ vezes.
- (iii) Calcula-se a alavancagem média para cada DMU através da expressão

$$\tilde{\ell}_j = \frac{\sum_{b=1}^{m_j} \tilde{\ell}_{jb}}{m_j}$$

e a alavancagem média global

$$\tilde{\ell} = \frac{\sum_{j=1}^J \tilde{\ell}_j}{J}.$$

2. Segunda fase: Aqui, é utilizado o esquema bootstrap para reduzir a probabilidade de um *outlier* ser selecionado, usando as medidas de alavancagem obtidas na primeira fase. Stošić e Sampaio de Sousa (2003) implementaram este esquema a partir das distribuições de probabilidade linear, inversa, exponencial e da *heaviside step function*, definidas como segue:

- (a) Distribuição de probabilidade linear:

$$P(\tilde{\ell}_j) = \frac{\ell_{\max} - \tilde{\ell}_j}{\ell_{\max} - \ell_{\min}},$$

onde $\ell_{\max}$ e $\ell_{\min}$ são as alavancagens máxima e mínima do conjunto $\{\tilde{\ell}_j; j = 1, 2, \dots, J\}$, respectivamente. Nota-se claramente que a probabilidade de se escolher uma DMU com a medida de alavancagem máxima, $\ell_{\max}$, é zero e que a probabilidade de se escolher uma DMU com a medida de alavancagem mínima, $\ell_{\min}$, é 1.

(b) Distribuição de probabilidade inversa:

$$P(\tilde{\ell}_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tilde{\ell}_j < \ell_0, \\ \left(\frac{\ell_0}{\tilde{\ell}_j}\right) \left(\frac{\ell_{\max} - \tilde{\ell}_j}{\ell_{\max} - \ell_0}\right), & \text{se } \tilde{\ell}_j \geq \ell_0, \end{cases}$$

onde $\ell_0 > 0$ é o limite inferior de $\tilde{\ell}_j$. Este limite é introduzido para lidar com casos onde $\tilde{\ell}_j = 0$, podendo ser arbitrariamente pequeno.

(c) Distribuição de probabilidade exponencial:

$$P(\tilde{\ell}_j) = \frac{e^{-\tilde{\ell}_j} - e^{-\ell_{\max}}}{e^{-\ell_{\min}} - e^{-\ell_{\max}}}.$$

(d) *Heaviside step function*:

$$P(\tilde{\ell}_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tilde{\ell}_j < \tilde{\ell} \log J, \\ 0, & \text{se } \tilde{\ell}_j \geq \tilde{\ell} \log J, \end{cases}$$

onde a expressão $\tilde{\ell} \log J$ foi escolhida para levar em consideração o tamanho da amostra. Por exemplo, para $J = 1000$ a DMU que apresentar medida de alavancagem maior ou igual a três vezes o valor da média global é rejeitada.

Assim, mesmo usando o esquema jackstrap para tornar o método DEA mais robusto, é necessário intenso cálculo computacional. Uma alternativa metodológica para a mensuração da eficiência seria o uso de modelos paramétricos, ou seja, o uso de modelos estatísticos de fronteira estocástica. Contudo, este tipo de modelo exige informações prévias sobre sua forma funcional além de impor fortes condições para sua aplicação.

Capítulo 3

Regressão Quantílica

3.1 Evolução Histórica

A teoria da regressão de uma forma geral teve seus rudimentos no ano de 1760, quando Rudjer Boscovich propôs estimar a elipticidade da terra usando cinco observações com comprimento de um grau de latitude y_i , para várias latitudes θ_i , através da resolução do problema

$$\min \sum |y_i - \alpha - \beta \sin^2 \theta_i|$$

sujeito à restrição

$$n^{-1} \sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \sin^2 \theta_i) = 0.$$

Posteriormente, cerca de 50 anos depois, Laplace mostrou que o problema proposto por Boscovich em 1760 podia ser resolvido através do cálculo de uma *mediana ponderada* (ver Maciel, 2001).

No entanto, com base no método dos mínimos quadrados criado por Adrien Marie Legendre, por volta de 1806, foi Francis Galton (em 1886) quem desenvolveu um método geral para o estudo de relações, ao qual ele deu o nome de “regressão”. Em 1887, Edgeworth, com base nas idéias de Boscovich, criou o método “mediana plural”, que foi apresentado como uma alternativa ao método dos mínimos quadrados.

Ainda com base na teoria de Boscovich, Charnes, Cooper e Ferguson (1955) formularam a técnica de regressão de mínima soma de erros absolutos, denominada de método de estimação L_1 , como um problema de programação linear, atraindo, mais uma vez, atenção à regressão mediana e provocando o

surgimento de vários trabalhos, nos quais foram desenvolvidas as propriedades estatísticas do método e onde foram propostos algoritmos para obtenção das estimativas L_1 em modelos de regressão simples e múltipla.

Contudo, devido a facilidades computacionais, o método de mínimos quadrados foi e ainda tem sido ostensivamente usado em diversas áreas como ferramenta de análise de modelos lineares de regressão. Porém, esta técnica muitas vezes apresenta uma visão incompleta do conjunto de dados e da relação entre as variáveis, principalmente diante de violações das suposições do modelo tradicional.

Com o avanço de algumas técnicas de regressão consideradas mais robustas por apresentarem uma série de vantagens quando comparadas ao método tradicional, mas que haviam sido “esquecidas” em função das dificuldades computacionais, estas foram implementadas em plataformas estatísticas e econométricas e novos métodos foram desenvolvidos.

Regressão quantílica foi introduzida por Koenker e Basset (1978) como uma forma de ampliar o método clássico de estimação em um modelo de regressão, que nos fornece a média condicional, para uma técnica de estimação de várias curvas, através dos quantis condicionais, que caracterizam toda a distribuição condicional da variável de interesse, dado um conjunto de regressores. Assim, o método de estimação L_1 (regressão de mínima soma de erros absolutos) supracitado passou a ser um caso particular de regressão quantílica para o quantil 0.50, que na verdade é a regressão mediana.

O modelo de regressão quantílica proposto por Koenker e Basset (1978) pode ser visto como uma extensão dos quantis ordinários em um modelo de locação para uma classe mais geral, na qual os quantis condicionais têm a forma linear.

Buchinsky (1997) lista várias características bastante atrativas da regressão quantílica, tais como:

- O modelo de regressão quantílica pode ser utilizado para caracterizar toda a distribuição condicional de uma variável resposta dado um conjunto de regressores e não apenas a média condicional.
- O modelo tem uma representação na forma de programação linear, o que facilita a estimação dos parâmetros, uma vez que as estimativas são obtidas em um número finito de iterações simplex.
- A função objetivo da regressão quantílica é uma soma ponderada de desvios absolutos, fornecendo uma medida de locação robusta de modo

que o vetor de coeficientes estimado não é sensível a observações extremas na variável dependente.

- Quando os erros não seguem distribuição normal os estimadores de regressão quantílica podem ser mais eficientes que estimadores de mínimos quadrados.
- Soluções diferentes para quantis distintos podem ser interpretadas como diferenças na resposta da variável dependente às mudanças nos regressores em vários pontos da distribuição condicional da variável dependente.

3.2 Fundamentos Teóricos

3.2.1 Densidade Simétrica

Uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é simétrica se $f(x) = f(-x)$ para todo x . Além do mais, uma variável aleatória X é simétrica se X e $-X$ têm a mesma função de distribuição. Analisando estes dois conceitos sob as condições impostas e considerando que X é uma variável aleatória contínua, verifica-se que:

1. Primeira condição: $f(x) = f(-x)$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^x f(-y)dy = \int_{-x}^{\infty} f(y)dy, \quad -\infty < x < \infty.$$

Então,

$$\begin{aligned} P(-X \leq x) &= P(X \geq -x) = \int_{-x}^{\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^x f(-y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^x f(y)dy = P(X \leq x). \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que X e $-X$ têm a mesma função de distribuição. Logo, X é simétrica.

2. Segunda condição: X é simétrica, ou seja, X e $-X$ têm a mesma função densidade de probabilidade $g(x)$. Então, definindo $f(x) = (g(x) + g(-x))/2$, fica evidente que X tem densidade simétrica.

Assim, se X é uma variável aleatória que possui função densidade de probabilidade, então X tem densidade simétrica se e somente se X for uma variável aleatória simétrica.

Vale a pena salientar que procedimento similar pode ser adotado para o caso de variáveis aleatórias discretas.

3.2.2 Função de Distribuição Inversa

Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F_X(x)$ e função densidade $f(x)$. Se $y = F_X(x)$, então $dy/dx = F'_X(x) = f(x)$. Logo, $dx/dy = 1/f(x)$. Assim, usando a fórmula da mudança de variável (ver Hoel, Port e Stone, 1978),

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|;$$

a variável aleatória $Y = F_X(x)$ tem a seguinte função densidade:

$$g(y) = f(x) \frac{1}{f(x)} = 1, \quad 0 < y < 1.$$

Ou seja,

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, $Y = F_X(x) \sim U(0, 1)$.

Pelo teorema médio do cálculo, se $F_X(x)$ é estritamente crescente, então existe um único valor de x tal que $y = F_X(x)$. Portanto, como $Y \sim U(0, 1)$, então $X = F_X^{-1}(Y)$.

3.2.3 Função Quantil

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição dada por $F_X(x)$. O τ -ésimo quantil de X é dado por

$$Q_\tau(x) = F_X^{-1}(\tau) = \inf\{x : F(x) \geq \tau\}, \quad \tau \in (0, 1).$$

Considerando que $-\infty < x < \infty$, $F(x) \geq \tau$ se e somente se $Q_\tau \leq x$. Assim, X é identicamente distribuído como Q_τ , onde $\tau \sim U(0, 1)$. Então,

$$x = F_X^{-1}(\tau),$$

conforme visto anteriormente. Em particular, quando $\tau = 1/4$, $\tau = 1/2$ e $\tau = 9/10$, os quantis são chamados de 1º quartil, mediana e 9º decil, respectivamente.

3.2.4 Modelo de Locação

Suponha que $F_X(x, \lambda)$ seja a função de distribuição de uma variável aleatória X , indexada pelo parâmetro λ . O parâmetro λ é dito ser de locação se e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $F_X(x, \lambda)$ pode ser escrita em função de $x - \lambda$, isto é,

$$F_X(x, \lambda) = G_X(x - \lambda).$$

Equivalentemente, λ é um parâmetro de locação da função de distribuição $F(x, \lambda)$ da variável aleatória X se e somente se a distribuição de $X - \lambda$ não depender de λ . Portanto, quando λ é um parâmetro de locação, $F(\cdot, \lambda)$ pode ser chamada de família de parâmetros de locação (ver Mood, Graybill e Boes, 1974).

3.2.5 Função Kernel

A estimação por kernel é um método não-paramétrico que vem sendo utilizado em diversas áreas de pesquisa, especialmente em análise de padrões espaciais de eventos pontuais em $\mathbb{R}^2$, onde o objetivo é obter uma estimativa suavizada da densidade de eventos por unidade de área. Ou seja, o pesquisador produz uma estimativa suavizada da intensidade local dos eventos sobre a área estudada. Segundo Devroye e Krzyzak (1999), a estimação de kernel é um método originalmente desenvolvido para obter uma estimativa suavizada de uma função densidade de probabilidade a partir de uma amostra de dados observados sem forma paramétrica conhecida.

A estimativa da intensidade local para cada evento, $\hat{\delta}_h(s)$, exige a identificação dos eventos vizinhos aos quais podem ser atribuídas ponderações de acordo com a distância entre o ponto a ser estimado e seus vizinhos. Então, uma estimativa básica para a intensidade padrão de pontos na posição s pode ser dada por

$$\hat{\delta}_h(s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h^2} k\left(\frac{s - s_i}{h}\right),$$

onde $k(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade que deve ser escolhida adequadamente, conhecida como kernel, h é a largura da banda (*bandwidth*) que define a constante de suavização, s é o centro da área a ser estimada, s_i é a localização do ponto e n é o número total de pontos.

Convém salientar que a distância entre o ponto de avaliação e seus vizinhos, bem como os pesos a serem atribuídos, são controlados pela função kernel, $k(\cdot)$, e pela constante de suavização, h . Assim, pode-se concluir que a função kernel pode ser qualquer uma, escolhida de acordo com os objetivos a serem alcançados. Por exemplo, a função kernel pode ser gaussiana, retangular, triangular, quártica, dentre outras.

3.3 Regressão Quantílica

A solução de problemas de programação linear consiste em otimizar (maximizando ou minimizando) uma determinada função objetivo, condicionada a certas restrições. Como citado anteriormente, o modelo de regressão quantílica tem uma representação na forma de programação linear, o que exige a definição de uma função objetivo.

Seja o seguinte modelo linear, expresso matricialmente:

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

onde Y é um vetor de variáveis aleatórias de tamanho $n \times 1$, X é uma matriz $n \times p$ de regressores de posto p ($p < n$), β é um vetor $p \times 1$ de parâmetros desconhecidos e ε é um vetor $n \times 1$ de erros independentes e identicamente distribuídos. A função de distribuição de Y é dada por

$$P(Y \leq y_i) = P(X\beta + \varepsilon \leq y_i) = P(\varepsilon \leq y_i - x_i\beta) = F_\varepsilon(y_i - x_i\beta),$$

onde x_i representa a i -ésima linha da matriz X . Se β for um escalar e $x_i \equiv 1$, tem-se como caso especial o modelo de locação.

A função quantil condicional de Y dado X pode ser assim definida:

$$Q_\tau(Y|X) = X\beta + F_\varepsilon^{-1}(\tau) = X\beta(\tau), \quad (3.1)$$

onde $\beta(\tau) = \beta + F_\varepsilon^{-1}(\tau)u$, sendo $u' = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ e sendo F_ε^{-1} a função quantil dos erros.

De forma geral, o τ -ésimo quantil amostral de Y no modelo de locação é uma solução do problema

$$\min_b \left\{ \sum_{i: y_i \geq b} \tau |y_i - b| + \sum_{i: y_i < b} (1 - \tau) |y_i - b| \right\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

O análogo para o modelo linear do τ -ésimo quantil é definido de maneira semelhante. Assim, a solução para $\beta(\tau)$ em (3.1), $\hat{\beta}(\tau)$, denominado quantil de regressão, é solução de

$$\min_{\beta} \quad n^{-1} \left\{ \sum_{i: y_i \geq x_i \beta} \tau |y_i - x_i \beta| + \sum_{i: y_i < x_i \beta} (1 - \tau) |y_i - x_i \beta| \right\},$$

que pode ser reescrito como

$$\min_{\beta} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - x_i \beta),$$

onde $\rho_{\tau}(e_i)$, a função perda, é dada por

$$\rho_{\tau}(e_i) = (\tau - I(e_i < 0))e_i = \begin{cases} \tau e_i, & \text{se } e_i \geq 0, \\ (\tau - 1)e_i, & \text{se } e_i < 0, \end{cases}$$

sendo $e_i = y_i - x_i \beta$ e sendo $I(\cdot)$ a usual função indicadora. Essa função é conhecida como “*check function*”.

Dessa forma, as estimativas de $\beta(\tau)$ são obtidas minimizando a média da “função perda”. Esta otimização pode ser atingida através das técnicas de programação linear, bastando para isto introduzir $2n$ variáveis artificiais $\{v_i^{(1)}, v_i^{(2)} : i = 1, 2, \dots, n\}$ para representar as partes positivas e negativas do vetor de resíduos.

Assim, o modelo de regressão quantílica tem a seguinte representação na forma de programação linear, denominada primal:

- Função objetivo:

$$\min_{\beta} \quad n^{-1} \left\{ \sum_{i: y_i \geq x_i \beta} \tau |y_i - x_i \beta| + \sum_{i: y_i < x_i \beta} (1 - \tau) |y_i - x_i \beta| \right\}. \quad (3.2)$$

- Restrições:

$$y_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j(\tau) + e_i, \quad (3.3)$$

com $\beta_j(\tau)$ e e_i sem restrição de sinal.

Como nos modelos de programação linear padrão, as variáveis devem ser positivas, então faz-se necessária uma transformação nas variáveis $\beta_j(\tau)$ e em e_i , que pode ser efetuada da seguinte maneira:

$$\beta_j(\tau) = \beta_j(\tau)^{(1)} - \beta_j(\tau)^{(2)} \quad \text{e} \quad e_i = v_i^{(1)} - v_i^{(2)},$$

onde $\beta_j(\tau)^{(1)} \geq 0$, $\beta_j(\tau)^{(2)} \geq 0$, $v_i^{(1)} \geq 0$ e $v_i^{(2)} \geq 0$. Assim, as restrições podem ser reescritas na forma padrão. Ou seja,

- Restrições:

$$y_i = \sum_{j=1}^p x_{ij}(\beta_j(\tau)^{(1)} - \beta_j(\tau)^{(2)}) + (v_i^{(1)} - v_i^{(2)}),$$

$$\text{com } \beta_j(\tau)^{(1)} \geq 0, \beta_j(\tau)^{(2)} \geq 0, v_i^{(1)} \geq 0 \text{ e } v_i^{(2)} \geq 0.$$

Convém salientar que para todo modelo de programação linear, denominado primal, existe um outro modelo chamado dual que é composto pelos mesmos coeficientes do primal, porém com objetivos diferentes (por exemplo: se no modelo primal o objetivo é maximizar, então no dual é minimizar). Primal e dual estão diretamente relacionados. Dessa relação pode-se concluir que soluções compatíveis existem tanto no primal quanto no dual se a matriz de regressores X possuir posto completo. Além disso, o teorema de equilíbrio em programação linear garante que pelo menos uma dessas soluções compatíveis é ótima.

3.3.1 Propriedades de Regressão Quantílica

Os estimadores dos quantis de regressão quantílica, $\hat{\beta}(\tau)$, possuem importantes propriedades que auxiliam na análise dos dados em estudo e facilitam os procedimentos computacionais, reduzindo significativamente o número de iterações simplex. Essas propriedades, apresentadas por Koenker e Basset (1978), são:

1. Equivariância:

Seja $\mathcal{B}(\tau; Y, X)$ o conjunto de soluções compatíveis de um modelo de regressão quantílica. Então, para todo $\hat{\beta}(\tau) \equiv \hat{\beta}(\tau; Y, X) \in \mathcal{B}(\tau; Y, X)$, tem-se:

(i) Equivariância em escala:

- $\hat{\beta}(\tau; aY, X) = a\hat{\beta}(\tau; Y, X), \quad a \in [0, \infty);$
- $\hat{\beta}(1 - \tau; aY, X) = a\hat{\beta}(\tau; Y, X), \quad a \in (\infty, 0].$

(ii) Equivariância de mudança ou de regressão:

$$\hat{\beta}(\tau; Y + X\gamma, X) = \hat{\beta}(\tau; Y, X) + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^p.$$

(iii) Equivariância para a matriz de regressores X :

$$\hat{\beta}(\tau; Y, XA) = A^{-1}\hat{\beta}(\tau; Y, X),$$

onde A é uma matriz $p \times p$ não-singular.

2. Invariância para transformações monotônicas:

Sejam $h(\cdot)$ uma função não-decrescente em $\mathbb{R}$ e Y uma variável aleatória. Então,

$$Q_\tau(h(y)) = h(Q_\tau(y)).$$

Ou seja, os quantis da variável aleatória transformada $h(y)$ são os quantis transformados da variável aleatória Y .

3.3.2 A Função “Sparsity” ou Função Densidade Quantil

A função “sparsity” mede a densidade das observações próximas ao quantil de interesse. Se os dados são pouco numerosos ou dispersos no quantil de interesse, será mais difícil estimar esse quantil. Por outro lado, quando os dados apresentam pouca dispersão no quantil de interesse, este quantil será estimado com mais precisão. Em outras palavras, a precisão assintótica das estimativas dos quantis de regressão depende da função “sparsity”.

A função “sparsity” pode ser obtida a partir da identidade $F_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau)) = \tau$. Ou seja, derivando esta função com relação a τ , obtém-se a recíproca da densidade do erro avaliada no quantil de interesse, isto é,

$$f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau)) \frac{dF_\varepsilon^{-1}(\tau)}{d\tau} = 1 \Rightarrow \frac{dF_\varepsilon^{-1}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} = s(\tau),$$

que na verdade é a função “sparsity”. Em outras palavras, a função “sparsity” é a derivada da função quantil, F_ε^{-1} .

Entretanto, $s(\tau)$ não é conhecida e, assim, precisa ser estimada. Segundo Siddiqui (1960), $s(\tau)$ pode ser estimada como segue:

$$\hat{s}_n(\tau) = \frac{\hat{F}_n^{-1}(\tau + h_n) - \hat{F}_n^{-1}(\tau - h_n)}{2h_n},$$

onde a constante de suavização, h_n , tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ e $\hat{F}_Y^{-1}$ é uma estimativa da função quantil.

A maneira mais simples de estimar F_ε^{-1} é através dos resíduos obtidos da estimação da regressão quantílica. Assim,

$$\hat{F}_\varepsilon^{-1}(\tau) = \hat{e}_{(i)}, \quad \text{para } \tau \in \left[\frac{(i-1)}{n}, \frac{i}{n} \right],$$

onde $\hat{e}_{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são as estatísticas de ordem dos resíduos, $\hat{e}_i$. Alternativamente, pode-se usar uma interpolação dessas estatísticas de ordem.

Basset e Koenker (1982) sugerem o uso da função quantil empírica avaliada na média, $\bar{X}$, para estimar $F_Y^{-1}(\tau)$, ou seja:

$$\hat{F}_Y^{-1}(\tau) = \bar{X}\hat{\beta}(\tau),$$

onde $\hat{\beta}(\tau)$ são os quantis de regressão estimados.

No que se refere à constante de suavização, h_n , Hall e Sheather (1988) sugeriram a seguinte regra, com base em expansões de Edgeworth para os quantis padronizados:

$$h_n = n^{-1/3} z_\alpha^{2/3} \left[\frac{1, 5s(\tau)}{s''(\tau)} \right]^{1/3},$$

onde z_α satisfaz $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha/2$, sendo Φ a função de distribuição normal padrão.

Na ausência de informações quanto à forma de $s(\tau)$, Koenker e Portnoy (1996) sugerem o uso do modelo gaussiano para obter h_n :

$$h_n = n^{-1/3} z_\alpha^{2/3} \left[\frac{1, 5\phi^2(\Phi^{-1}(\tau))}{2(\Phi^{-1}(\tau))^2 + 1} \right]^{1/3},$$

onde ϕ é a função densidade de probabilidade normal padrão.

3.3.3 Estrutura dos Erros

1. Erros Independentes e Identicamente Distribuídos (i.i.d.)

Koenker e Basset (1978) mostraram que para erros independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição $F_\varepsilon(e)$ e função densidade de probabilidade $f_\varepsilon(e) = F'_\varepsilon(e)$, com $f_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\tau)) > 0$, verifica-se que

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)) \xrightarrow{d} N(0, \Lambda_\tau), \quad (3.4)$$

onde a matriz de covariância limite é dada por

$$\Lambda_\tau = \frac{\tau(1-\tau)}{f_\varepsilon^2(F_\varepsilon^{-1}(\tau))} D^{-1},$$

sendo D a seguinte matriz positiva definida:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i x_i'.$$

2. Erros Não Identicamente Distribuídos (n.i.d.)

Neste caso, a matriz de covariância limite assume a forma do “Huber Sandwich”, como mostrado a seguir (ver Koenker e Portnoy, 1996):

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)) \xrightarrow{d} N(0, H_n^{-1} J_n H_n^{-1}), \quad (3.5)$$

onde

$$J_n(\tau) = \tau(1-\tau)n^{-1}(X'X),$$

$$H_n(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i x_i' f_i(\xi_i(\tau))$$

e $f_i(\xi_i(\tau))$ é a densidade condicional da variável resposta Y avaliada no τ -ésimo quantil condicional. Aqui, nota-se que no caso das funções f_i 's serem idênticas, o “Huber Sandwich” se iguala à expressão Λ_τ e, portanto, tem-se erros i.i.d.

Assim, pode-se concluir que a precisão assintótica em modelos com erros i.i.d. depende da função “sparsity”, $s(\tau)$, enquanto que em modelos com erros n.i.d. esta precisão depende de $H_n(\tau)$, que são desconhecidas e, portanto, precisam ser estimadas.

3. Erros Homoscedásticos

Considerando que os erros são i.i.d., a função quantil para o modelo de regressão linear simples $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ é

$$Q_\tau(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X + F_\varepsilon^{-1}(\tau) = (\beta_0 + F_\varepsilon^{-1}(\tau)) + \beta_1 X,$$

onde F_ε^{-1} é a função quantil da distribuição dos erros e $\tau \in (0, 1)$. Neste caso, para todos os quantis o coeficiente angular da reta, β_1 , será o mesmo, enquanto que o intercepto da equação, $\beta_0 + F_\varepsilon^{-1}(\tau)$, aumenta quando τ aumenta. Portanto, os quantis condicionais são simples deslocamentos paralelos, conforme mostrado na Figura 3.1.

4. Erros Heteroscedásticos

Levando em conta o modelo linear simples, onde os erros são i.i.d., tem-se $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \sigma_i \varepsilon_i$, onde $\sigma_i = X_i \gamma$. A função quantil para este modelo é

$$\begin{aligned} Q_\tau(Y|X) &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \sigma_i F_\varepsilon^{-1}(\tau) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_i + X_i \gamma F_\varepsilon^{-1}(\tau) \\ &= \beta_0 + (\beta_1 + \gamma F_\varepsilon^{-1}(\tau)) X_i. \end{aligned}$$

Dessa forma, verifica-se que o coeficiente angular da reta assume valores diferentes para diferentes valores de τ , enquanto que o intercepto da equação não se altera. Isto pode ser observado com mais clareza na Figura 3.2.

3.3.4 Estimação da Matriz de Covariância

A estimação da matriz de covariância assintótica de $\hat{\beta}(\tau)$ depende basicamente da estimação de $s(\tau)$, no caso de erros i.i.d., já apresentada anteriormente, ou alternativamente, da estimação de $H_n(\tau)$, quando os erros são n.i.d., que pode ser obtida através dos seguintes métodos:

1. Método Kernel (Powell Sandwich)

Powell (1986) propôs uma estimativa para a matriz de covariância que é baseada na função kernel, $k(\cdot)$, como segue:

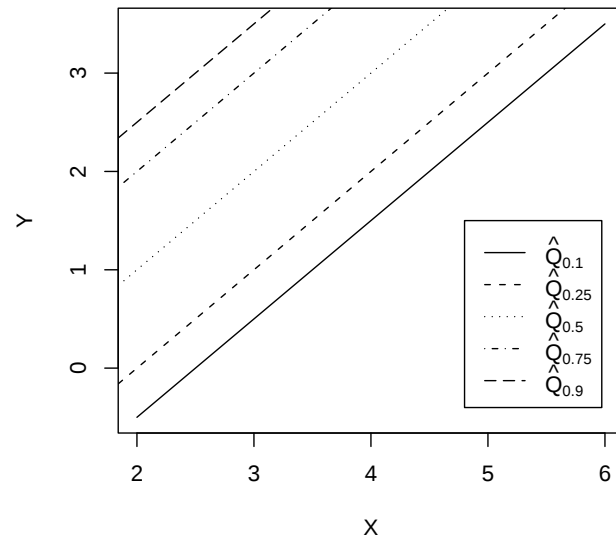


Figura 3.1: Gráfico de quantis condicionais para erros homoscedásticos.

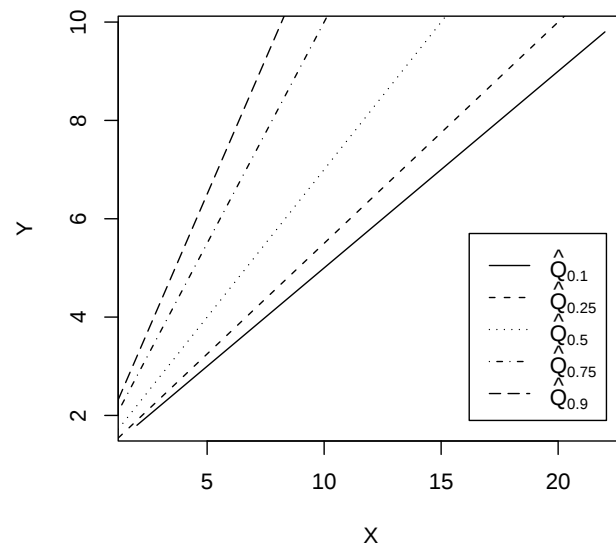


Figura 3.2: Gráfico de quantis condicionais para erros heteroscedásticos.

$$\hat{H}_n(\tau) = (h_n n)^{-1} \sum_{i=1}^n k(\hat{e}_i(\tau)/h_n) x_i x_i',$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} h_n \rightarrow \infty$.

2. Método Bootstrap

É uma técnica que permite a obtenção de mais informações a respeito das variáveis objeto do estudo a partir de apenas uma amostra de dados. Para sua aplicação é necessário o uso da simulação. O método aqui apresentado utiliza esquema bootstrap por pares, ou seja, usa reamostragem para obter mais informações tanto sobre a variável dependente quanto sobre a covariável. Sua aplicação é feita através dos seguintes passos:

- (i) Extraia uma amostra aleatória de n pares de valores (y_i^*, x_i^*) , $i = 1, 2, \dots, n$, da função de distribuição empírica F_{nXY} .
- (ii) Obtenha a estimativa bootstrap $\hat{\beta}^*(\tau)$ através da regressão quantílica de Y^* em X^* .
- (iii) Repita os passos (i) e (ii) um número grande, B , de vezes, obtendo as estimativas bootstrap $\hat{\beta}_1^*(\tau), \hat{\beta}_2^*(\tau), \dots, \hat{\beta}_B^*(\tau)$.
- (iv) Determine o estimador bootstrap da matriz de covariância a partir da expressão

$$\hat{\Lambda}(\tau) = \frac{n}{B} \sum_{j=1}^B (\hat{\beta}_j^*(\tau) - \bar{\beta}^*(\tau)) (\hat{\beta}_j^*(\tau) - \bar{\beta}^*(\tau))',$$

$$\text{onde } \bar{\beta}^*(\tau) = B^{-1} \sum_{j=1}^B \hat{\beta}_j^*.$$

Uma alternativa para estimar a matriz de covariância é uma extensão da estimação da função “sparsity”, proposta por Hendricks e Koenker (1992):

$$\hat{f}_i(\xi_i(\tau)) = \frac{2h_n}{x_i'(\hat{\beta}(\tau + h_n) - \hat{\beta}(\tau - h_n))}.$$

3.3.5 Qualidade do Ajuste pela Regressão Quantílica

A medida para aferir a qualidade do ajustamento através da regressão quantílica sugerida por Koenker e Machado (1999) é $R^1(\tau)$, que é semelhante ao coeficiente de determinação, R^2 , do modelo linear de regressão tradicional.

Particionando a função quantil condicionada definida em (3.1), o modelo passa a ter a expressão

$$Q_\tau(y_i|x_i) = x'_{i1}\beta_1(\tau) + x'_{i2}\beta_2(\tau). \quad (3.6)$$

Admitindo restrição a esse modelo, tal que

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

e considerando que $\hat{\beta}(\tau)$ é a solução do modelo completo, ou seja,

$$\hat{V}(\tau) = \min_{\beta} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_i\beta),$$

e $\tilde{\beta}(\tau) = (\tilde{\beta}_1(\tau)', 0')'$ é a solução para o modelo restrito imposto pela hipótese fundamental acima, ou seja,

$$\tilde{V}(\tau) = \min_{\beta_1} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_{i1}\beta_1),$$

então, tem-se:

$$R^1(\tau) = 1 - \frac{\hat{V}(\tau)}{\tilde{V}(\tau)},$$

Desde que $\tilde{\beta}(\tau)$ é obtido através da restrição imposta a $\hat{\beta}(\tau)$, fica evidente que $\hat{V}(\tau) \leq \tilde{V}(\tau)$ e, por conseguinte, $0 \leq R^1(\tau) \leq 1$, como no R^2 . Contudo, o $R^1(\tau)$ é uma medida local que avalia a qualidade do ajuste relativo de modelos de regressão quantílica para um quantil específico em termos de uma soma ponderada de resíduos absolutos, enquanto que o R^2 é uma medida global que avalia a qualidade do ajuste de modelos de regressão tradicionais sobre toda a distribuição condicional.

3.3.6 Inferência para Regressão Quantílica

Com base no desenvolvimento de $R^1(\tau)$, Koenker e Machado (1999) apresentaram vários procedimentos para realização de testes de hipóteses. Eles propuseram teste de razão de verossimilhança, através do modelo de regressão Laplaciano, bem como teste de postos. Esta escolha é consequência da analogia que essas técnicas apresentam com modelos lineares de regressão quantílica.

1. Teste da Razão de Verossimilhança

Inicialmente, Koenker e Machado (1999) consideraram a densidade Laplaceana assimétrica, ou seja,

$$f_1(\varepsilon) = \tau(1 - \tau)\exp\{-\rho_\tau(\varepsilon)\}$$

para testar a hipótese

$$H_0 : \beta_2 = 0,$$

onde β_2 vem da partição definida em (3.6).

A função de verossimilhança sob a condição de que $\{\varepsilon_i\}$ vem da densidade acima citada é,

$$L(\beta) = [\tau(1 - \tau)]^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_i\beta)\right\}$$

com a log de verossimilhança dada por

$$\ell(\beta) = n \ln[\tau(1 - \tau)] - \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_i\beta).$$

A função de verossimilhança, $L(\beta)$, é maximizada por

$$\min \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_i\beta) = \hat{V}(\tau).$$

Sob H_0 , a log de verossimilhança é

$$\ell(\beta) = n \ln[\tau(1 - \tau)] - \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_{i1}\beta_1),$$

e a função de verossimilhança é maximizada por

$$\min \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - x_{i1}\beta_1) = \tilde{V}(\tau).$$

Logo, a razão de verossimilhança é assim obtida:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\tau) &= \frac{\exp\{-\tilde{V}(\tau)\}}{\exp\{-\hat{V}(\tau)\}} \Rightarrow \\ \Rightarrow [\lambda_n(\tau)]^2 &= [\exp\{-\tilde{V}(\tau) + \hat{V}(\tau)\}]^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln[\lambda_n(\tau)]^2 &= \ln [\exp\{-\tilde{V}(\tau) + \hat{V}(\tau)\}]^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 \ln \lambda_n(\tau) &= 2[\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)]. \end{aligned}$$

Sob H_0 , $-2 \ln \lambda_n(\tau) \xrightarrow{d} \chi_q^2$, onde q é o número de restrições em teste.

A partir desse resultado e realizando ligeira adaptação nos argumentos de Koenker e Basset (1982), obtém-se a seguinte estatística de teste

$$L_n(\tau) = \frac{2[\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)]}{\tau(1 - \tau)s(\tau)}, \quad (3.7)$$

que é assintoticamente χ_q^2 .

Trabalho semelhante pode ser realizado utilizando a densidade assimétrica de Laplace na forma de locação e escala, ou seja,

$$f_{\sigma}(\varepsilon) = \frac{\tau(1 - \tau)\exp\left\{\frac{-\rho_{\tau}(\varepsilon)}{\sigma}\right\}}{\sigma},$$

cuja função log de verossimilhança é

$$\ell(\beta) = n \ln[\tau(1 - \tau)] - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - x_i\beta),$$

com a correspondente estatística de razão de verossimilhança dada por

$$-2 \ln \lambda_n^*(\tau) = 2n \ln [\tilde{V}(\tau)/\hat{V}(\tau)], \quad (3.8)$$

onde $\hat{\sigma}(\tau) = n^{-1}\hat{V}(\tau)$ e $\tilde{\sigma}(\tau) = n^{-1}\tilde{V}(\tau)$.

Para análise assintótica, a equação (3.8) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda_n^*(\tau) &= 2n \ln \{1 + [\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)] / \hat{V}(\tau)\} \\ &= 2 \ln \left[1 + \left(\frac{\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)}{n\sigma} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} -2 \ln \lambda_n^*(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \ln \left[1 + \left(\frac{\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)}{n\sigma(\tau)} \right) \right]^n \\ &= 2 \ln \left\{ \exp \left[\frac{\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)}{\sigma(\tau)} \right] \right\} \\ &= \frac{2[\tilde{V}(\tau) - \hat{V}(\tau)]}{\sigma(\tau)}, \end{aligned}$$

onde assume-se que $0 < \sigma(\tau) < \infty$. Então, $\hat{\sigma}(\tau) = n^{-1}\hat{V}(\tau) \rightarrow \sigma(\tau)$.

De maneira análoga a (3.7), sob H_0 a estatística teste é

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{2n\sigma(\tau)}{\tau(1-\tau)s(\tau)} \ln [\tilde{V}(\tau)/\hat{V}(\tau)],$$

que é assintoticamente χ_q^2 .

2. Teste Rankscore

Desenvolvido por Gutenbrunner, Jurečková, Koenker e Portnoy (1993) para modelos lineares de regressão homoscedásticos, é baseado na regressão rankscore que possui propriedades análogas às dos correspondentes testes de postos em modelos de locação. Posteriormente, Koenker e Machado (1999) estenderam este teste para modelos heteroscedásticos.

A regressão rankscore, desenvolvida por Gutenbrunner e Jurečková (1992), provém do dual relacionado com o modelo de programação linear (primal) que define a solução ótima do modelo de regressão quantílica, já citado neste trabalho em (3.2) e (3.3). Esta técnica pode ser vista como sendo uma generalização da dualidade das estatísticas de ordem e de postos do modelo de locação para o modelo linear de amostra única.

O modelo dual referente ao primal definido em (3.2) e (3.3) é

$$Y'_n a = \max X'_n a = (1 - \tau) X'_n \mathbf{1}_n, \quad a \in [0, 1]^n.$$

Ou seja,

$$\hat{a}_{ni}(\tau) = \arg \max \{Y'_n a \mid X'_n a = (1 - \tau) X'_n \mathbf{1}_n, \quad a \in [0, 1]^n\}.$$

- Modelos Homoscedásticos

A função quantil condicionada particionada definida em (3.6), pode ser reescrita da seguinte forma

$$Q_\tau(Y|X_i) = X_1 \beta_1(\tau) + X_2 \beta_2(\tau),$$

onde $\beta(\tau) = \beta + F_\varepsilon^{-1}$, o que caracteriza um modelo homoscedástico. Com a partição, $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau)', \beta_2(\tau)')'$, sendo $\beta_1(\tau)$ e $\beta_2(\tau)$ vetores de dimensão p e q , respectivamente.

A hipótese a ser testada é $H_0 : \beta_2(\tau) = 0$ e a estatística teste é dada por

$$T_n^{(1)} = \frac{S'_n Q_n^{-1} S_n}{A^2(\varphi)},$$

onde

* $Q_n = n^{-1} (X_2 - \hat{X}_2')' (X_2 - \hat{X}_2)$, com $\hat{X}_2 = X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$, uma matriz $q \times q$ positiva definida.

* $S_n = n^{-1/2} (X_2 - \hat{X}_2')' \hat{b}_n$, sendo $\hat{b}_n = (\hat{b}_{n1}, \hat{b}_{n2}, \dots, \hat{b}_{nn})'$ o vetor composto pelos “rankscores”: $\hat{b}_{ni} = - \int_0^1 \varphi(t) d\hat{a}_{ni}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Aqui, como na teoria clássica de testes de postos, $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função escore, que é não-decrescente e integrável em $(0, 1)$.

* $A^2(\varphi) = \int_0^1 [\varphi(t) - \bar{\varphi}]^2 dt$, com $\bar{\varphi} = \int_0^1 \varphi(t) dt$.

Sob H_0 a distribuição de $T_n^{(1)}$ é χ_q^2 central, onde q é o número de restrições imposto pela hipótese nula.

- Modelos Heteroscedásticos

Aqui, segue-se a mesma partição do caso homoscedástico, sendo que $\beta(\tau) = \beta + \gamma F_\varepsilon^{-1}$, o que indica heteroscedasticidade.

Assim, para testar $H_0 : \beta_2 = 0$, tem-se a seguinte estatística teste:

$$T_n^{(2)} = \frac{S_n(\tau)' M_n^{-1} S_n(\tau)}{\tau(1 - \tau)},$$

onde $M_n = n^{-1}(X_2 - \hat{X}_2)'(X_2 - \hat{X}_2)$, como Q_n definido no caso homoscedástico. Entretanto, devido a heteroscedasticidade, $\hat{X}_2 = X_1(X_1'\Gamma_n^{-1}X_1)^{-1}X_1'\Gamma_n^{-1}X_2$, sendo $\Gamma = \text{diag}(\sigma_i)$, lembrando que $\sigma_i = x_i\gamma$.

Sob hipótese nula, $T_n^{(2)}$ é assintoticamente distribuída como χ_q^2 , com parâmetro de não-centralidade dado por

$$\eta(\varphi, \zeta) = \frac{\xi'\Omega^{-1}\xi}{A^2(\varphi)},$$

onde

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, \zeta, F_\varepsilon) &= \int_0^1 \zeta(t) f_\varepsilon[F_\varepsilon^{-1}(\tau)] d_\varphi(t), \\ \Omega &= \Psi H_n^{-1} D_n H_n^{-1} \Psi', \\ \Psi &= [0: I_q], \\ D_n &= n^{-1} X_n' X_n,\end{aligned}$$

e $\zeta(\tau)$ é uma função contínua, $\zeta(\tau) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$, tal que $\beta_2 = \zeta(\tau)/\sqrt{n}$. No entanto, o interesse principal é a função quantil escore

$$\varphi(\tau) = \tau - I(t < \tau), \quad (3.9)$$

cuja atenção está voltada exclusivamente para o τ -ésimo quantil. Neste caso, $\bar{\varphi} = 0$ e $A^2(\varphi) = \tau(1 - \tau)$. Assim, os “rankscores” são dados por

$$\hat{b}_n = \hat{a}_n(\tau) - (1 - \tau).$$

Dessa forma,

$$\xi(\varphi, \zeta, F_\varepsilon) = \zeta(t) f_\varepsilon[F_\varepsilon^{-1}(\tau)].$$

3. Intervalos de Confiança

Inferência sobre a população a partir de dados amostrais através da estimação intervalar em regressão quantílica segue basicamente a mesma

metodologia utilizada na regressão tradicional. Quando a matriz de covariância é desconhecida, tem-se:

$$P\left(\hat{\beta}_j(\tau) - t_{(n-p;\alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_j(\tau))} < \beta_j(\tau) < \hat{\beta}_j(\tau) + t_{(n-p;\alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_j(\tau))}\right) = 1 - \alpha,$$

para $j = 1, 2, \dots, p$. Aqui, $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_j(\tau))$ é o j -ésimo elemento da diagonal principal da matriz de covariância limite estimada, $1 - \alpha$ é o nível de confiança adotado e $t_{(n-p;\alpha/2)}$ é o quantil de ordem $\alpha/2$ ($0 < \alpha < 1/2$) da distribuição t com $n - p$ graus de liberdade. Assim, um intervalo de confiança para $\beta_j(\tau)$ com coeficiente de confiança $(1 - \alpha)\%$ é:

$$\left[\hat{\beta}_j(\tau) - t_{(n-p;\alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_j(\tau))}; \hat{\beta}_j(\tau) + t_{(n-p;\alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_j(\tau))} \right].$$

É importante frisar que existem outras técnicas para a construção de intervalos de confiança, tais como: método da inversão de testes “rankscore”, desenvolvido por Hušková (1994) a partir da teoria de regressão *rankscores* apresentada por Gutenbrunner, Jurečková, Koenker e Portnoy (1993), e esquema bootstrap (Buchinsky, 1994).

De acordo com Maciel (2001), o método da inversão de testes rankscore tem uma forma geral de difícil computação. Entretanto, para o caso de um quantil fixo e escolhendo a função quantil escore como em (3.9), um teste pode ser construído com base em $\hat{a}_n$, que é a solução de

$$\max\{(y - x_2)\xi' a | X_1' a = (1 - \tau)X_1' \mathbf{1}_n, \quad a \in [0, 1]^n\},$$

da seguinte maneira:

- hipóteses:

$$H_0 : \beta_2 = \xi$$

$$H_1 : \beta_2 \neq \xi.$$

- estatística teste:

$$T_n(\xi) = \frac{S_n(\xi)}{A(\varphi_\tau)q_n},$$

onde

$$q_n = n^{-1}x_2'(I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')x_2,$$

$$S_n(\xi) = n^{-1/2}x_2'\hat{b}_n(\xi).$$

Sob H_0 , $S_n(\xi) \xrightarrow{d} N(0, A^2(\varphi_\tau)q_n^2)$.

- regra de decisão: rejeitar a hipótese nula se $|T_n(\xi)| > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.

Capítulo 4

Regressão Clássica

4.1 Evolução Histórica

Conforme citado no capítulo anterior, a teoria da regressão teve seu início em 1760, com Rudjer Boscovich, mas veio tomar forma a partir do método dos mínimos quadrados criado por Legendre, por volta de 1806, e quando Francis Galton (em 1886) desenvolveu a regressão. Posteriormente, segundo Barbancho (1970), Laplace, Carl Friedrich Gauss, Francis Galton, Karl Pearson e Ronald Fisher, generalizando o método dos mínimos quadrados, consolidaram as bases pilares da teoria da regressão.

Com o advento da análise de demanda, no início do século XX, surge a análise quantitativa da economia e, portanto, a econometria, que na verdade é uma combinação de três ramos científicos: economia, matemática e estatística. A partir de então a análise de regressão baseada no método dos mínimos quadrados teve um desenvolvimento extraordinário, principalmente com a fundação da *Econometric Society* em Cleveland (EUA) em dezembro de 1930, com a constituição da Comissão Cowles para Pesquisa Econômica em 1932 e com o início da publicação da revista *Econometrica* em 1933.

Segundo Barbancho (1970), Ragnar Frisch, um dos fundadores da *Econometric Society*, publicou, em 1934, seus estudos sobre análises de confluências, que contribuíram para esclarecer muitos problemas de análise de regressão, especialmente sobre multicolinearidade. A Comissão Cowles elaborou, no período de 1943 a 1954, um tratado de econometria denominado *statistical inference in dynamic economic models*, sobre problemas de especificação e de equações simultâneas, dentre outros.

De acordo com Matos (2000), nos últimos 30 anos os cientistas deram ênfase ao estudo de regressões espúrias ou dúbias, levantadas por George Box e Gwilym Jenkins, em 1970 e 1976 e por Clive Granger e Paul Newbold, em 1974, e de regressão em séries temporais, destacando-se os estudos de George Box e D. Pierce, em 1970, George Box e Gwilym Jenkins, em 1976, Wayne Fuller, também em 1976, Clive Granger e Paul Newbold, em 1974, além de David Dickey e Wayne Fuller, em 1979.

4.2 O Método dos Mínimos Quadrados Ordinários

Seja o seguinte modelo linear, expresso em forma matricial,

$$Y = X\beta + e,$$

onde Y é um vetor de tamanho $n \times 1$, X é uma matriz $n \times k$ de posto k ($k < n$), β é um vetor $k \times 1$ e e é um vetor $n \times 1$ de erros, sendo k a quantidade de parâmetros de regressão.

Supondo que os valores de X não são aleatórios, a esperança de Y é

$$E(Y) = E(X\beta + e) = X\beta + E(e).$$

Admitindo que a média dos erros é nula, vem

$$E(Y) = X\beta.$$

Dessa forma, o erro pode ser definido como sendo $e = Y - E(Y) = Y - X\beta$.

O método dos mínimos quadrados consiste em minimizar a soma dos quadrados dos erros, ou seja,

$$S = e'e = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta.$$

Derivando com relação a β e igualando a 0, encontram-se as estimativas dos parâmetros do modelo em questão. Ou seja:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

Note que as variáveis que compõem a matriz X não devem apresentar colinearidade perfeita, pois isto tornaria a matrix $(X'X)$ singular.

Considerando que a variância dos erros é constante e que o erro de uma observação é não-correlacionado com o erro de outras observações, isto é, $\text{var}(e) = \sigma^2$, onde $0 < \sigma^2 < \infty$ e $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$, $\forall i \neq j$, a matriz de covariância de Y pode ser assim calculada:

$$\text{cov}(Y) = E\{[Y - E(Y)][Y - E(Y)]'\} = E(ee') = \sigma^2 I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

4.2.1 Propriedades dos Estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários

Os estimadores de mínimos quadrados ordinários são não-viesados:

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'Y] = (X'X)^{-1}X'E(Y) = (X'X)^{-1}X'X\beta = \beta.$$

A matriz de covariância de $\hat{\beta}$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\beta}) &= E\{[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})][\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]'\} = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'ee'X(X'X)^{-1}] = (X'X)^{-1}X'E(ee')X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}. \end{aligned}$$

Como a estimativa de mínimos quadrado ordinários de σ^2 é $\hat{\sigma}^2 = \hat{e}'\hat{e}/(n - k)$, onde $\hat{e} = [I_n - X(X'X)^{-1}X']Y$ é o vetor de resíduos, a estimativa de $\text{cov}(\hat{\beta})$ é

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}.$$

Uma observação importante é que $\hat{\beta}$ é função linear de Y . Logo, se Y tem distribuição normal, $\hat{\beta}$ também tem distribuição normal.

Assim, os estimadores de mínimos quadrados ordinários são lineares e não-viesados. Como estes estimadores satisfazem ao teorema de Gauss-Markov, então eles se enquadram na classe dos estimadores lineares não-viesados de variância mínima. Contudo, convém salientar que esta propriedade só se verifica sob as suposições já citadas.

4.2.2 Qualidade do Ajuste pela Regressão Linear Clássica

1. Coeficiente de Determinação (R^2): é um indicador da qualidade do modelo estimado, ou seja, indica a proporção da variabilidade de Y

em torno de $\bar{Y}$ que é explicada ao se usar o modelo estimado. Dessa forma, quanto mais próximo de 1 for o seu valor, maior será o poder explicativo do modelo estimado. O coeficiente de determinação é dado por

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{e}'\hat{e}}{Y'Y - n\bar{Y}^2}.$$

2. Coeficiente de Determinação Ajustado ($\bar{R}^2$): como o coeficiente de determinação, esta medida também indica a qualidade do modelo estimado. Porém, ela não é uma proporção e, conseqüentemente, pode estar fora do intervalo $[0, 1]$. O coeficiente de determinação ajustado é dado por

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{e}'\hat{e}/(n - k)}{(Y'Y - n\bar{Y}^2)/(n - 1)}.$$

Convém salientar que, para modelos com mais de um regressor, verifica-se que $\bar{R}^2 < R^2$.

4.2.3 Inferência para Regressão Linear Clássica

1. Estatísticas t de Student e F :

As estatísticas t e F são utilizadas para realizar inferências sobre os parâmetros, notadamente no que se refere à construção de intervalos de confiança e na validação de alguns tipos de hipóteses. No caso dos estimadores de mínimos quadrados, é necessário supor que os erros seguem distribuição normal. Admitindo esta suposição, tem-se

- Intervalos de confiança: adotando um coeficiente de confiança de $1 - \alpha$ e considerando que $t_{(n-k, \alpha/2)}$ é o quantil de ordem $\alpha/2$ ($0 < \alpha < 1/2$) da distribuição t com $n - k$ graus de liberdade, tem-se

$$P \left[\hat{\beta}_i - t_{(n-k, \alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{(n-k, \alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)} \right] = 1 - \alpha,$$

para $i = 1, \dots, k$. Assim, um intervalo de confiança para β_i de nível $(1 - \alpha)\%$ é

$$\left[\hat{\beta}_i - t_{(n-k, \alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)}; \hat{\beta}_i + t_{(n-k, \alpha/2)} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)} \right].$$

- Testes de hipóteses: para a realização de testes é necessário definir as hipóteses, determinar uma estatística de teste e estabelecer uma regra de decisão. Assim:

– Teste t : neste caso, tem-se:

* hipóteses:

· testes bilaterais:

$$H_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$$

$$H_1 : \beta_i \neq \beta_i^{(0)}$$

· testes unilaterais à direita:

$$H_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$$

$$H_1 : \beta_i > \beta_i^{(0)}$$

· testes unilaterais à esquerda:

$$H_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$$

$$H_1 : \beta_i < \beta_i^{(0)}$$

* estatística teste: sob a hipótese nula

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)}} \sim t_{(n-k)}$$

* regra de decisão: rejeita-se a hipótese H_0 se:

- $|t| > t_{(n-k, \alpha/2)}$, nos testes bilaterais;
- $t > t_{(n-k, \alpha)}$, nos testes unilaterais à direita;
- $t < -t_{(n-k, \alpha)}$, nos testes unilaterais à esquerda.

Convém lembrar que $n - k$ são os graus de liberdade da distribuição t e α é o nível de significância.

– Análise de variância: aqui, o teste F é utilizado para verificar a significância das variáveis explicativas. As hipóteses são:

$$H_0 : \beta_s = \mathbf{0}$$

$$H_1 : \beta_s \neq \mathbf{0},$$

onde

$$\beta_s = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sob a hipótese nula, a estatística de teste é:

$$F = \frac{\hat{\beta}_s' [\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}_s)] \hat{\beta}_s}{k-1} \sim F_{(k-1, n-k)},$$

sendo

$$\hat{\beta}_s' = [\hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3 \quad \dots \quad \hat{\beta}_k].$$

Assim, a regra de decisão para este teste é rejeitar a hipótese nula se $F > F_{(\alpha; k-1, n-k)}$, onde α é o nível de significância e $k-1$ e $n-k$ são os graus de liberdade do numerador e do denominador da distribuição F , respectivamente.

2. Teste de Normalidade de Bera-Jarque:

Este teste verifica se determinado conjunto de valores provém de uma distribuição normal. A estatística de teste é baseada em duas medidas descritivas: os coeficiente de assimetria e curtose. As hipóteses testadas são: H_0 : a distribuição do conjunto de valores é normal, contra H_1 : a distribuição do conjunto de valores não é normal e pertence à família de Pearson. A estatística de teste é

$$BJ = n \left[\frac{\hat{\alpha}_1}{6} + \frac{(\hat{\alpha}_2 - 3)^2}{24} \right],$$

onde $\sqrt{\hat{\alpha}_1}$ e $\hat{\alpha}_2$ são os coeficientes amostrais de assimetria e curtose, respectivamente. Sob a hipótese nula $BJ \xrightarrow{d} \chi_2^2$. A regra de decisão para este teste é rejeitar H_0 se $BJ > \chi_{(1-\alpha, 2)}^2$, onde $\chi_{(1-\alpha, 2)}^2$ é o percentil de ordem $1-\alpha$ da distribuição χ_2^2 .

3. Testes de Heteroscedasticidade:

Quando a suposição de homoscedasticidade é violada, isto é, quando a variância dos erros varia ao longo das observações, os estimadores de mínimos quadrados ordinários permanecem não-viesados e consistentes, porém tornam-se ineficientes, ou seja, não têm mais variância

mínima e, neste caso, inferências baseadas nessas estimativas podem ser imprecisas.

Assim, na presença de heteroscedasticidade, $\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ nem é não-viesado e nem consistente para $\text{cov}(\hat{\beta})$. Neste caso, é importante considerar estimativas mais confiáveis para $\text{cov}(\hat{\beta})$.

Sob heteroscedasticidade, a matriz de covariância de $\hat{\beta}$ é dada por

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1},$$

onde Ω é uma matriz diagonal contendo as variâncias dos erros. Note que se $\Omega = \sigma^2 I_n$, tem-se homoscedasticidade.

Para detectar a presença de heteroscedasticidade, pode-se utilizar os seguintes testes:

- Teste de Breusch-Pagan:
 - hipóteses: H_0 : há homoscedasticidade; H_1 : há heteroscedasticidade;
 - estatística de teste:

$$LM_{BP} = \frac{m'Z(Z'Z)^{-1}Z'm}{2\tilde{\sigma}^4},$$

onde:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 & \dots & z_s \end{bmatrix}, \quad m_i = \hat{e}_i^2 - \tilde{\sigma}_i^2$$

$$\text{e } \tilde{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2.$$

Sob a hipótese nula, $LM_{BP} \xrightarrow{d} \chi_{(s-1)}^2$, onde $(s-1)$ é o número de restrições em teste;

- regra de decisão: rejeitar H_0 se $LM_{BP} > \chi_{(1-\alpha, s-1)}^2$.
Uma observação importante sobre este teste é que ele é muito sensível a desvios da suposição de normalidade.

- Teste de Koenker: desenvolvido para robustecer o teste de Breusch-Pagan. Os dois testes têm a mesma estrutura, sendo que a estatística de teste de Koenker é dada por

$$LM_K = \frac{m'Z(Z'Z)^{-1}Z'm}{n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{e}_i^2 - \tilde{\sigma}_i^2)^2}.$$

A vantagem deste teste é que ele funciona bem mesmo quando a suposição de normalidade é violada.

4. Testes *quasi-t*: São semelhantes aos testes *t* supra citados, porém, com duas diferenças fundamentais, a saber:

- a estatística teste *quasi-t* é dada por

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)}},$$

onde $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)$ é obtida de um estimador consistente de $\text{cov}(\hat{\beta})$.

- sob a hipótese nula, que é igual à do teste *t*, $\tau \xrightarrow{d} N(0, 1)$.
Existem estimadores consistentes da matriz de covariância de $\hat{\beta}$ (HCCMEs); estes estimadores são consistentes tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade de forma desconhecida. Alguns HCCMEs encontram-se listados a seguir.

– HC0

Proposto por White (1980), este HCCME, que é conhecido simplesmente como estimador de White, estima $\text{cov}(\hat{\beta})$ da seguinte maneira:

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\hat{\Omega}X(X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{e}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{e}_n^2 \end{bmatrix}.$$

– HC1

Desenvolvido por Hinkley (1977), o estimador é definido como

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = \frac{n}{n-k} (X'X)^{-1} X' \hat{\Omega} X (X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{e}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{e}_n^2 \end{bmatrix}.$$

– HC2

Proposto por Horn, Horn e Duncan (1975), este estimador de $\text{cov}(\hat{\beta})$ é escrito da seguinte forma:

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} X' \hat{\Omega} X (X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{e}_1^2}{1-h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{e}_2^2}{1-h_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\hat{e}_n^2}{1-h_n} \end{bmatrix}.$$

– HC3

Davidson & MacKinnon (1993) propõem que $\text{cov}(\hat{\beta})$ seja assim estimado:

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} X' \hat{\Omega} X (X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{e}_1^2}{(1-h_1)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{e}_2^2}{(1-h_2)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\hat{e}_n^2}{(1-h_n)^2} \end{bmatrix}.$$

– HC4

Com o objetivo de levar em conta a razão entre as alavancagens individuais e a alavancagem média, Cribari-Neto (2004) propôs que a matriz de covariância fosse assim estimada:

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} X' \hat{\Omega} X (X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{e}_1^2}{(1-h_1)^{\alpha_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{e}_2^2}{(1-h_2)^{\alpha_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\hat{e}_n^2}{(1-h_n)^{\alpha_n}} \end{bmatrix},$$

sendo $\alpha_i = \min\{\frac{nh_i}{k}, 4\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

– HC5

Este estimador, desenvolvido por Souza (2004), leva em consideração o efeito do grau máximo de alavancagem. Neste caso, a estimativa da matriz de covariância é dada por

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\hat{\Omega}X(X'X)^{-1},$$

onde

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{e}_1^2}{(1-h_1)^{\delta_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{e}_2^2}{(1-h_2)^{\delta_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\hat{e}_n^2}{(1-h_n)^{\delta_n}} \end{bmatrix},$$

sendo $\delta_i = \min\{\frac{h_i}{h}, \max\{4, \frac{kh_{\max}}{h}\}\}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

Aqui, $h_{\max} = \max\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ enquanto que δ é uma constante; Souza (2004) propõe usar $k = 0.7$.

Tanto em HC2, quanto em HC3, HC4 e HC5, $h_1, h_2, \dots, h_n$ são os elementos diagonais da matriz $H = X(X'X)^{-1}X'$.

O desenvolvimento de HCCMEs teve início com os trabalhos de Eicker (1963, 1967) e Huber (1967). Posteriormente, White (1980) introduziu a idéia para econometristas e profissionais da área, introduzindo o estimador HC0. Cinco anos após, MacKinnon e White (1985) mostram que HC0 pode ter desempenho ruim em amostras finitas e apresentam três estimadores alternativos conhecidos como HC1, HC2 e HC3, todos assintoticamente equivalentes a HC0. Baseados em resultados de simulação de Monte Carlo, MacKinnon e White (1985) recomendaram o uso do estimador HC3. Mais adiante, Davidson e MacKinnon (1993) recomendaram fortemente o uso do HC2 ou do HC3 no lugar do HC0. Cribari-Neto (2004) e Souza (2004) propuseram os estimadores HC4 e HC5, respectivamente, que levam em consideração a influência de pontos de alta alavancagem.

4.2.4 Estatísticas Auxiliares

1. Fator de Inflação de Variância (FIV): é uma medida utilizada para detectar a presença de multicolinearidade nos dados, mostrando como a variância de um estimador aumenta pela presença de colinearidade entre as variáveis regressoras. Pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$FIV = \frac{1}{(1 - r_{ij}^2)}, i \neq j (i = 1, 2, \dots, k)(j = 1, 2, \dots, k),$$

onde r_{ij} é o coeficiente de correlação entre a covariável X_i e a covariável X_j . Assim, a medida que r_{ij}^2 se aproxima de 1, o FIV se aproxima do infinito, enquanto que se r_{ij}^2 se aproxima de 0, o FIV tende para 1. Daí, quanto maior for o grau de colinearidade entre as covariáveis, maior é o valor do FIV (ver Gujatari, 2000).

Uma regra prática para identificar a presença de multicolinearidade através do FIV é: se o $FIV > 5$, então diz-se que essa covariável é altamente co-linear.

2. Critérios de Informação de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC): estas medidas são usadas para selecionar, adequadamente, as covariáveis que devem ser incluídas no modelo. Podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned} AIC &= \ln \left(\frac{SSE_i}{n} \right) + \frac{2K_i}{n} \\ BIC &= \ln \left(\frac{SSE_i}{n} \right) + \frac{K_i}{n} \ln(n), \end{aligned}$$

onde SSE_i é a soma dos quadrados dos resíduos e K_i é a quantidade de parâmetros, ambos do i -ésimo modelo avaliado.

O uso dessas duas medidas é recomendado em modelos encaixados, ou seja, em modelos onde um é caso particular do outro. A aplicação consiste no cálculo das medidas para vários modelos e, em seguida, escolhe-se o modelo que apresentar o menor AIC ou o menor BIC.

Capítulo 5

Modelos

Uma avaliação estatística do gasto público municipal no Brasil foi realizada por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić, em 2003. Contudo, esse trabalho não levou em consideração a idade do município, variável esta que pode influenciar o resultado da eficiência dos municípios brasileiros, uma vez que municípios novos, supostamente, não têm, ainda, uma estrutura adequada.

Em uma cidade recém-criada, conjectura-se, a princípio, que a falta de estrutura e de recursos pode levá-la a ser ineficiente no tocante aos gastos públicos. Como ultimamente foram criados muitos municípios no Brasil, este trabalho tem como objetivo refazer a avaliação da eficiência técnica dos municípios brasileiros, sendo que, agora, levando em conta a idade dos mesmos.

Assim, a avaliação estatística do gasto público municipal no Brasil realizada nesta dissertação é feita a partir do trabalho desenvolvido por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003), que utilizaram três técnicas de estimação: DEA (Data Envelopment Analysis), regressão clássica e regressão quantílica.

Através da técnica DEA, os municípios brasileiros são classificados como eficientes ou ineficientes no que se refere ao gasto público. Os eficientes são utilizados para a construção matemática da fronteira de eficiência e servem de referência para os municípios que estão afastados dessa fronteira, considerados ineficientes.

Devido à natureza determinística dos modelos não-paramétricos, as ineficiências encontradas podem não ser explicadas apenas pela incompetência administrativa ou pela inexistência incentivos e planejamentos satisfatórios para assegurar um funcionamento adequado das municipalidades, mas, tam-

bém, pela presença de observações influentes (*outliers*), erros de medida, omissão de variáveis, heterogeneidade dos dados e outras discrepâncias estatísticas; ver Sampaio de Sousa, Cribari–Neto e Stošić (2003).

Adicionalmente, as ineficiências podem ser consequência da existência de fatores externos sobre os quais os municípios não têm controle, tais como condições naturais e climáticas, fatores políticos, características demográficas e sócio-econômicas, dentre outras. O cálculo das medidas de eficiência em função de fatores exógenos se dá pela diferença entre as medidas de eficiência técnica geradas pelo método DEA e as medidas de eficiência estimadas em função dos fatores condicionantes. Neste contexto, a regressão clássica e a regressão quantílica são utilizadas para prever a eficiência dos municípios brasileiros em função dos fatores condicionantes.

Dessa forma, este trabalho também se concentra na obtenção da estimativa da eficiência técnica de cada município, utilizando sua dependência de fatores exógenos com a finalidade de avaliar a relação entre as medidas obtidas pelo método DEA, através dos modelos CCR e BCC, e as medidas previstas pelos fatores condicionantes obtidas a partir dos modelos de regressão clássica e quantílica. Por conseguinte, de posse das eficiências previstas pelos modelos de regressão exclusivamente em função de fatores exógenos, foram expurgados os efeitos destes fatores das eficiências DEA, obtendo-se, assim, medidas mais “puras” de eficiência.

As medidas de eficiência técnica dos municípios brasileiros geradas pelo método DEA-CCR e DEA-BCC utilizadas como referência para a avaliação objeto deste trabalho são as mesmas obtidas por Sampaio de Sousa, Cribari–Neto e Stošić (2003), conforme mencionado acima.

5.1 Os Modelos DEA

Visando ao tratamento de *outliers* e erros de medida, Sampaio de Sousa, Cribari–Neto e Stošić (2003) levaram em consideração a robustez proporcionada pelo esquema jackstrap. Dessa forma, as medidas de eficiência geradas pelos modelos CCR e BCC por eles adotados foram obtidas a partir dos critérios descritos a seguir:

- O subconjunto de DMUs, L , é composto por 10% do total de municípios que compõem a base de dados, ou seja, $L = 476$.
- A quantidade de réplicas de bootstrap é $B = 500$, resultando em 238

mil medidas de alavancagem para cada modelo DEA.

- A redução dos efeitos provocados por observações influentes é feita através da distribuição *heaviside step function*, uma vez que a mesma leva em conta o tamanho da amostra.
- As variáveis que compõem estes modelos são identificadas em dois grupos:
 - Insumos, entradas ou *inputs*: são os recursos e os serviços disponibilizados pelos municípios. Aqui, são utilizados:
 - * gasto atual (X_1) - esta variável está relacionada com o custo total agregado;
 - * número de professores (X_2) - usada para mostrar a eficiência dos serviços em educação;
 - * número de hospitais e postos de saúde (X_3) - indicador de gastos com serviços de saúde;
 - * proporção de mortalidade infantil (X_4) - esta variável foi colocada no modelo como insumo pelo fato de que ela é indicadora de eficiência dos serviços de saúde.
 - Produtos finais/acabados, saídas ou *outputs*: são os resultados obtidos pelos serviços oferecidos pelos municípios. As variáveis que compõem este grupo foram cuidadosamente selecionadas de um conjunto de serviços disponibilizados pelos municípios, levando em consideração a consonância com o grupo de insumos. Estas variáveis são:
 - * população total residente (Y_1) - esta variável visa à avaliação dos serviços administrativos;
 - * população alfabetizada (Y_2), número de estudantes matriculados nos ensinos fundamental e médio (Y_3), frequência dos estudantes por escola (Y_4), número de estudantes aprovados por escola (Y_5), número de estudantes na série correta por escola (Y_6) - estas cinco variáveis estão relacionadas à eficiência dos serviços educacionais;
 - * número de domicílios com água potável (Y_7), número de domicílios com acesso a sistema de esgoto (Y_8) e número de domicílios com acesso a coleta de lixo (Y_9) - estas variáveis avaliam as condições de saúde e moradia.

5.2 Os Modelos Lineares de Regressão Clássica

As eficiências técnicas das municipalidades brasileiras estimadas por estes modelos levam em consideração os seguintes critérios:

- Variáveis estudadas para composição do modelo

A variável resposta é a eficiência técnica obtida pelo método DEA e as covariáveis estudadas são identificadas e classificadas de acordo suas características, da seguinte forma:

- sócio-econômicas: despesas com pessoal (E_1), despesa com pessoal ativo (E_2), percentual de domicílios cujo chefe ganha até um salário mínimo (E_3), rendimento médio (E_4), rendimento mediano (E_5), participação no projeto alvorada (E_{22}) e rendimento de *royalties* de água (ROY);
- políticas: partido político dos prefeitos - PFL (E_6), PMDB (E_7), PSDB (E_8), PT (E_9), PPS (E_{10}), PPB (E_{11}), PTB (E_{12}), PDT (E_{13}), outros partidos (E_{14});
- administrativas: prédios que pagaram IPTU em 1998 (E_{15}), índice de atualização do cadastro predial (E_{16}), participação em consórcios intermunicipais (E_{17}), grau de informatização (E_{18}) e poder de decisão dos conselhos municipais (E_{19});
- indicadoras de economia de escala: densidade demográfica (E_{20}) e taxa de urbanização (E_{21});
- indicadoras de localização: polígono da seca (E_{23}), região metropolitana (RM_2), capitais dos Estados (CAP) e distância entre os municípios (W_1) e (W_2);
- outras variáveis: idade do município (E_{25}), municípios turísticos (MT), população total (POP), *royalties* I (R_1), *royalties* II (R_2), receitas correntes (RC), transferências correntes (TC) e receita líquida (RL).

Dentre as variáveis citadas acima algumas são do tipo *dummy*, ou seja, assumem o valor 1 se há a característica desejada e o valor 0 caso contrário. Especificamente para as variáveis distância entre os municípios e idade dos municípios, as características desejadas são menor

ou igual a 50 quilômetros e oito anos, respectivamente. Esta escolha prende-se ao fato de que um município muito novo, no máximo duas administrações, tende a ser ineficiente, devido à falta de estrutura, e que a eficiência de um determinado município pode influir na eficiência de seus vizinhos próximos.

No que se refere às variáveis *royalties* I (R_1) e *royalties* II (R_2), elas são do tipo *dummy*. R_1 assume o valor 1 se o município recebia qualquer quantia a título de *royalties* e o valor 0 caso contrário. Já R_2 é igual a 1 se o município recebia mais de 10% da sua receita tributária a título de *royalties* e é igual a 0 caso contrário.

Convém salientar que este elenco de variáveis foi usado por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003), exceto a idade do município (E_{25}), cuja fonte é o Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil gerado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento.

- Definição do modelo

Devido ao fato de que a variável dependente assume valores no intervalo $(0, 1]$, ou seja, $(0 < \theta \leq 1)$, o que caracteriza uma restrição ou uma censura à variável, o modelo de regressão mais adequado é o tobit, também conhecido como modelo de regressão censurada. Desenvolvido por James Tobin (1958), tobit é um modelo de regressão onde fatores ligados à mensuração dos dados impedem a observação de valores da variável resposta ao longo de toda a sua extensão possível. Isto significa que a variável resposta assume apenas determinados valores, ficando os demais censurados. Esta censura introduz uma correlação entre o termo de erro e as covariáveis de um modelo de regressão linear clássica, violando uma das condições necessárias à aplicação do método dos mínimos quadrados. Assim, os parâmetros do modelo tobit geralmente são estimados pelo método da máxima verossimilhança. Contudo, para sua aplicação é necessário assumir normalidade e homoscedasticidade pois, caso contrário, as estimativas dos parâmetros seriam inconsistentes.

O uso do método dos mínimos quadrados ordinários em modelos lineares de regressão onde a variável dependente é censurada também gera estimativas inconsistentes. Segundo Greene (1981), este problema se agrava à medida em que a proporção de observações censuradas

na amostra aumenta. Então, pode-se notar que o problema da inconsistência não traz grandes consequências quando o número de observações censuradas é pequeno. Além do mais, tem sido mostrado na literatura que fazendo uma transformação logarítmica na variável dependente, os estimadores de mínimos quadrados ordinários continuam não-viesados e passam a ser consistentes quando a variável dependente assume apenas valores estritamente positivos.

Como mostrado no Capítulo 4, os estimadores de mínimos quadrados ordinários são não-viesados, consistentes, e assintoticamente normais mesmo na presença de heteroscedasticidade de forma desconhecida, o que não ocorre com os estimadores de máxima verossimilhança utilizados no modelo tobit. Este é mais um argumento em favor do método dos mínimos quadrados, uma vez que o problema da ineficiência provocada pela heteroscedasticidade pode ser solucionado usando-se HCCMEs, conforme já mencionado.

Diante do exposto, a escolha do método para realizar as estimativas da eficiência técnica dos municípios do Brasil recai no modelo de regressão linear clássica através dos estimadores de mínimos quadrados ordinários, com especificação semilog, também denominada log-lin. Dessa forma, a variável resposta passa a ser o logaritmo das medidas de eficiência geradas pela técnica DEA, tanto pelo modelo CCR quanto pelo BCC.

Quando não há informações sobre a forma funcional do modelo a ser ajustado, é comum assumir linearidade. Neste caso, tem-se:

$$\ln \theta = X\beta + e.$$

Neste modelo, o coeficiente de inclinação mede a variação proporcional ou relativa ocorrida em θ para cada variação absoluta verificada em X . Assim, multiplicando-se a variação relativa em θ por 100, obtém-se a variação percentual ou a taxa de crescimento ocorrida em θ para uma variação absoluta em X .

Outro modelo aqui estudado é definido em função da variável distância entre os municípios. Anselin (1988), com o objetivo de levar em consideração a dependência espacial de θ , ou seja, visando eliminar os efeitos da correlação espacial, propôs o modelo

$$(I - \rho W)\theta = X\beta + e \Rightarrow \theta = \rho W\theta + X\beta + e, \quad \text{com} \quad e = \lambda W e + u.$$

Como o modelo especificado é o semilog, tem-se como resposta $\ln \theta$ e não θ . Assim,

$$\ln \theta = \rho W\theta + X\beta + e,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n , W é uma matriz $n \times n$ que controla a existência dos efeitos de vizinhança entre as cidades; aqui ρ mede a correlação espacial, ou seja, se for diferente de zero, indica que a eficiência estimada para um determinado município é diretamente afetada pela eficiência de seus vizinhos. O parâmetro λ captura a correlação espacial entre os erros e u é um novo termo para o erro.

Igualmente a Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003), aqui W tem duas formas: na primeira, denotada por W_1 , o elemento (ij) de W_1 é igual a um se a distância entre os municípios i e j não excede a 50 quilômetros e é igual a zero caso contrário; na segunda, denotada por W_2 , o elemento (ij) de W_2 é igual ao quociente entre a distância entre os municípios i e j e a distância máxima encontrada, o que resulta em uma medida entre zero e um. Este critério para a definição de W permite que a avaliação seja realizada através de uma medida binária (*dummy*) e de uma medida relativa.

5.3 Os Modelos de Regressão Quantílica

Considerando a heterogeneidade dos dados, é possível que as estimativas condicionadas pela média obtidas a partir do modelo linear de regressão tradicional através dos estimadores de mínimos quadrados sofram influência dessa variabilidade. A regressão quantílica oferece mecanismos para que as estimativas sejam condicionadas pela mediana, que não é afetada por valores extremos ou, ainda, se for do interesse, por outros quantis.

O modelo de regressão quantílica aqui utilizado segue o mesmo padrão adotado no modelo de regressão linear clássica descrito acima.

Capítulo 6

Os Dados - Uma Breve Descrição

A base de dados utilizada na presente dissertação é composta por 4755 municípios, selecionados dentre 5264. Alguns municípios deixaram de ser incluídos nesta base porque não apresentavam as informações completas para a análise.

Todas as informações são referentes ao ano de 2000, exceto com relação à variável “prédios que pagaram IPTU”, cujas informações são de 1998. Estes dados foram obtidos junto aos órgãos: Secretaria do Tesouro Nacional, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Ministério da Educação e Cultura, Instituto de Pesquisas Econômicas e Aplicadas e através do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento.

A Tabela 6.1 exibe medidas estatísticas que fornecem uma visão global a respeito do comportamento das variáveis quantitativas utilizadas como regressores nos modelos de regressão linear clássica e quantílica. Como era de se esperar, estas variáveis se mostram heterogêneas, principalmente a receita líquida (RL), com coeficiente de variação 1606.32%. Apenas duas, índice de atualização do cadastro predial (E_{16}) e taxa de urbanização (E_{21}), com coeficientes de variação 13.35% e 39.76%, respectivamente, apresentam certa homogeneidade. Algumas dessas medidas revelam situações interessantes e até curiosas, como listado a seguir:

- o A cidade de Salto Veloso (SC) foi a que menos gastou com pessoal, R\$ 915.78, enquanto que São Paulo (SP) foi a que apresentou maior gasto, R\$ 1,800,263,284.00. No que tange à despesa com pessoal ativo,

a situação é semelhante: R\$ 809.19 gastos por Salto Veloso e R\$ 1,776,983,284.00 por São Paulo.

- O município de Cantanhede (MA) foi o que apresentou o menor rendimento médio, cerca de R\$ 114.85, e Santana de Parnaíba (SP), o maior, R\$ 2,583.57.
- Em Santa Tereza (RS) não havia domicílios onde o chefe ganhava um salário mínimo ou menos. Na contra-mão estavam Barro Alto (GO), Nina Rodrigues (MA) e Iracema (CE), onde em 62.93% de seus domicílios o chefe da família ganhava até um salário mínimo.
- Para 705 municípios nenhum prédio pagou IPTU em 1998 e 648 não tinham esta informação disponível. No entanto, o índice médio de atualização do cadastro predial era de 0.909.
- No que se refere à população, a cidade de Borá (SP) tinha apenas 795 habitantes, quando a média era 31,551 habitantes por cidade e metade dos municípios tinha menos de 11,000 habitantes.
- 944 municípios não tinham receitas correntes e nem transferências correntes e 945 não tinham receita líquida.

Quanto às variáveis do tipo *dummy*, a Tabela 6.2 mostra o número de municípios com a característica desejada. Os dados são referentes ao ano de 2000. Por exemplo, 891 municípios tinham prefeitos filiados ao PFL, 1,089 ao PMDB e 167 ao PT; 1,876 cidades participavam de consórcios intermunicipais; 3,124 estavam informatizadas e em 2,075 os conselhos municipais tinham poder de decisão. Além disso, 2,001 municípios participavam do projeto alvorada, 1,212 pertenciam à região do polígono da seca e 807 tinham, no máximo, 8 anos de existência.

A matriz de vizinhanças entre os municípios, W_1 , tem um comportamento especial. Ela é uma matriz $n \times n$, onde o elemento (i, j) é igual a um se a distância entre os municípios i e j não excede 50 quilômetros e zero caso contrário.

Tabela 6.1: Medidas descritivas de covariáveis que compõem os modelos de regressão linear clássica e quantílica.

Variável	Medida			
	Mínimo	1º Quartil	Média	Mediana
E_1	915.78	1054762.49	5982257.94	1796975.85
E_2	809.19	880172.53	5151351.47	1477156.66
E_3	0.00	3.20	11.96	8.38
E_4	114.85	260.47	435.90	400.27
E_5	70.00	151.00	240.25	200.00
E_{15}	0.00	26.50	1856.16	180.00
E_{16}	0.00	0.89	0.91	0.97
E_{20}	0.10	12.00	89.94	25.00
E_{21}	0.00	40.04	58.36	58.43
POP	795.00	5449.00	31550.86	10977.00
RC	0.00	1951458.00	14599047.37	3370762.56
TC	0.00	1868988.31	9717298.06	3059835.00
RL	0.00	31453.20	4881749.32	187842.00

Variável	Medida			
	3º Quartil	Máximo	Desvio padrão	Coef. variação(%)
E_1	3529655.01	1800263284.00	39239479.25	655.93
E_2	2968204.91	1776983284.00	35950452.13	697.88
E_3	17.63	62.93	11.02	92.12
E_4	561.01	2583.57	214.91	49.30
E_5	300.00	1000.00	109.03	45.38
E_{15}	754.50	917523.00	18513.67	997.42
E_{16}	0.97	1.00	0.12	13.35
E_{20}	50.10	11608.80	459.00	510.36
E_{21}	77.21	100.00	23.21	39.76
POP	22145.00	10434252.00	196876.14	624.00
RC	7215022.70	7753358748.00	141570626.36	969.72
TC	6370433.26	3259088539.00	64334223.03	662.06
RL	765562.83	4494270209.00	78416908.62	1606.32

Tabela 6.2: Número de municípios com a característica requerida pela variável *dummy*.

Variável <i>dummy</i>	Número de municípios
E_6	891
E_7	1089
E_8	824
E_9	167
E_{10}	140
E_{11}	536
E_{12}	336
E_{13}	250
E_{14}	522
E_{17}	1876
E_{18}	3124
E_{19}	2075
E_{22}	2001
E_{23}	1212
RM_2	325
E_{25}	807
ROY	390
MT	350
CAP	26
R_1	697
R_2	474

Capítulo 7

Resultados

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos usando o *software* R, que é composto por pacotes desenvolvidos para a análise, manipulação e exibição gráfica de dados. Uma de suas vantagens é a flexibilidade em permitir a criação de novas funções e a modificação de muitas funções internas. Pode ser obtido pela *internet* através da página <http://www.r-project.org> nas versões *Windows*, *Linux*, *Unix* e *Macintosh*.

Conforme já citado, os resultados DEA-CCR e DEA-BCC foram obtidos por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003). Neste trabalho, eles estão expostos em tabelas comparativas e gráficos que também exibem as eficiências geradas pelos modelos de regressão clássica e quantílica, considerando fatores condicionantes e fatores exógenos.

7.1 Definição dos Modelos Ajustados

7.1.1 Modelos de Regressão Linear Clássica

1. A Partir do DEA-CCR

Após uma análise das variáveis disponíveis, ficou evidente que, devido à natureza das mesmas, algumas delas apresentavam elevadas correlações entre si e, conseqüentemente, foram excluídas dos três modelos de regressão linear clássica: o que mensura a eficiência técnica dos municípios sem levar em conta a correlação espacial e aqueles que consideram tal correlação. Seguem, abaixo, as justificativas da eliminação dessas variáveis:

- Despesa com pessoal (E_1), despesa com pessoal ativo (E_2) e receita líquida (RL): Neste caso, as variáveis E_2 e RL foram excluídas dos modelos, visto que RL , como já mencionado, é altamente heterogênea e E_1 é mais abrangente do que E_2 , contendo, inclusive, as informações referentes a esta última.
- Salário médio e salário mediano: a opção se deu pelo salário médio em função das propriedades estatísticas da média e pelo fato das duas variáveis apresentarem graus de variabilidade semelhantes.
- Região metropolitana (RM_2) e distância entre os municípios (W_1 e W_2): estas variáveis, separadamente, fazem parte dos três modelos de regressão linear tradicional. RM_2 é uma das covariáveis do modelo $\ln \theta = X\beta + e$, enquanto que W_1 e W_2 compõem os modelos que incluem a correlação espacial, ou seja, $\ln \theta = \rho W\theta + X\beta + e$.
- Recebimento de *royalties* de água (ROY), *royalties* I (R_1) e *royalties* II (R_2): aqui, o objetivo é identificar se o recebimento de *royalties* exerce influência sobre eficiência do município. A variável escolhida foi R_2 .

Ademais, a variável outros partidos E_{14} foi excluída do modelo em razão da mesma não conter informações para todos os municípios e a variável prédios que pagaram IPTU em 1998, E_{15} , não pertence a nenhum modelo visto que, além de apresentar grau de variabilidade muito alto, todas as outras variáveis são referentes ao ano de 2000.

A partir de então, foram obtidos os três modelos estimados para regressão linear clássica, considerando todas as variáveis restantes, sendo a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR a variável dependente e as demais as covariáveis. Em seguida, foi realizada uma inspeção para detectar multicolinearidade através do método fator de inflação de variância (FIV). A Tabela 7.1 mostra as variáveis excluídas do modelo por apresentarem fatores de inflação de variância muito elevados.

Convém salientar que a variável despesa com pessoal (E_1) apresentou $FIV = 32.6013$ para o modelo sem correlação espacial, $FIV = 32.6614$ e $FIV = 32.6504$ para os modelos com correlação espacial usando W_1 e W_2 , respectivamente. Por estes valores a variável E_1 deveria ter sido excluída dos modelos. Contudo, devido ao fato de que ela é relacionada com a variável receita líquida (RL), que foi retirada dos modelos, decidiu-se por sua manutenção.

Um novo ajuste foi feito, agora sem as variáveis excluídas: E_2 , E_5 , E_{14} , E_{15} , ROY , $R1$, POP , RC , TC e RL . Nota-se da Tabela 7.2 que as variáveis restantes não apresentam características de multicolinearidade.

Assim, os modelos estimados de regressão linear clássica foram obtidos a partir das covariáveis exibidas na Tabela 7.2, considerando que a variável dependente é formada pela eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

As Tabelas 7.3, 7.4 e 7.5 mostram os coeficientes estimados para cada uma das covariáveis apresentadas na Tabela 7.2, com as respectivas estatísticas de teste t e $quasi-t$, que indicam a significância de cada covariável, principalmente as estatísticas $quasi-t$, uma vez que os três modelos apresentam heteroscedasticidade, conforme mostra a Tabela 7.6, que exhibe os resultados dos testes de Koenker e Breusch-Pagan.

Uma constatação importante é que o modelo que não leva em conta a correlação espacial, através da variável distância entre os municípios, apresentou a covariável região metropolitana (RM_2) como não-significativa ao nível de 5%, enquanto que os modelos que foram definidos com a correlação espacial apresentaram as covariáveis W_1EFIC e W_2EFIC como significativas ao nível de 5%. Como os modelos com e sem correlação espacial diferem exatamente quanto ao uso dos regressores RM_2 , W_1EFIC e W_2EFIC e como RM_2 é não-significativo, então o modelo sem correlação espacial foi descartado, permanecendo apenas os modelos que envolvem as duas matrizes que definem as distâncias entre os municípios.

Excluindo dos modelos com correlação espacial as covariáveis não-significativas ao nível de 5%, obtém-se um modelo com dezesseis covariáveis, que é composto por W_1 , e um outro com quatorze, que é formado por W_2 .

Assim, finalmente, é definido o modelo de regressão linear clássica que tem como variável resposta a eficiência gerada pelo método DEA-CCR. É aquele composto pelas dezesseis covariáveis cuja descrição é exibida na Tabela 7.7. Esta decisão foi tomada com base no fato de que quanto mais informações forem utilizadas para a composição de um modelo, mais confiáveis tendem a ser os resultados obtidos. Os resultados revelam que:

Tabela 7.1: Variáveis excluídas dos modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR, em função da multicolinearidade.

Variável	Fator de inflação de variância		
	Modelo sem correlação espacial	Modelo com correlação espacial	
		com matriz W_1	com matriz W_2
<i>POP</i>	34.3100	34.5581	34.6749
<i>RC</i>	93.7519	93.8675	93.7044
<i>TC</i>	108.9213	108.8168	109.1517

- A vinculação partidária dos prefeitos dos municípios é significativa apenas no caso das cidades cujo administrador é filiado ao PMDB (E_7) e ao PDT (E_{13}). As cidades gerenciadas pelo PMDB têm sua eficiência técnica média diminuída em torno de 3.455%, enquanto que as administradas pelo PDT, a diminuição da eficiência média é ainda maior: 4.676%, considerando, em cada caso, as demais covariáveis constantes.
- Igualmente aos partidos políticos, os municípios turísticos (MT) não conseguem fazer com que sua vocação para o turismo os tornem mais eficientes, visto que esta variável não é significativa ao nível de 5%. Além disso, caso ela fosse significativa, exerceria impacto negativo sobre a eficiência (ver Tabela 7.4). Certamente esta variável deve ter mais atenção dos administradores municipais, uma vez que sendo bem trabalhada, pode ser uma fonte geradora de interessantes recursos, que bem aplicados poderiam tornar o turismo em uma variável significativamente positiva na prestação de serviços à população.
- Como era esperado, os municípios localizados no polígono da seca, E_{23} , tendem a ser mais ineficientes do que os demais, uma vez que estando sujeitos a condições climáticas adversas têm dificuldades de direcionar recursos para suprir as demandas da comunidade.
- A variável que mais contribui para o aumento da eficiência média dos municípios é capitais dos Estados (CAP), que mantendo os demais regressores constantes, aumenta a eficiência média em torno

de 18.67%, seguida do grau de informatização do município(E_{18}), que proporciona crescimento médio de 8.493%. Nos dois casos se verifica o esperado. Primeiro, as capitais geram mais recursos, devido ao fato de serem mais desenvolvidas em determinadas áreas, como a industrial e a tecnológica. Segundo, a informatização do município pode diminuir custos e agilizar processos, o que aumenta a eficiência.

- A conjectura central desta dissertação se confirmou, uma vez que a idade dos municípios, E_{25} , é a segunda variável significativa que mais influi negativamente. Quando as demais variáveis independentes são mantidas constantes, a eficiência média das cidades que têm menos de 8 anos (cerca de duas gestões) é diminuída em aproximadamente 8.823%. Isto reforça a idéia de que a falta de estrutura administrativa e de experiência em gestão pública causa perdas aos municípios, tornando-os ineficientes. Assim, esta variável, que é o foco principal deste trabalho, indica que a criação de novos municípios, como vem acontecendo no Brasil, pode trazer mais problemas do que soluções, visto que a tendência é que estas cidades não tenham bom desempenho no tocante à administração dos gastos públicos.
- Os municípios que recebem *royalties* (R_2) não conseguem canalizar tal receita em prol da melhoria dos serviços públicos; muito pelo contrário, esta é a variável que mais influi na diminuição da eficiência dessas cidades, apresentando decréscimo médio de 15.26%. Isto sugere que esta receita adicional gera gastos de maior vulto ou indevidos e, por conseguinte, municípios ineficientes.
- Dentre as covariáveis significativas, as que menos exercem influência na eficiência média dos municípios são rendimento médio (E_4) e densidade demográfica (E_{20}), que caminham em direções opostas, ou seja, para cada real que aumenta, em média, a renda do trabalhador, a eficiência fica reduzida em menos de 0.01%, enquanto que cada pessoa por metro quadrado, incrementa a eficiência média em menos de 0.05%. Estes resultados sugerem que as municipalidades mais empobrecidas tendem a administrar melhor seus escassos recursos. Esta suposição torna-se mais forte em virtude do percentual de domicílios cujo chefe ganha até um salário mínimo (E_3) ser positivamente significativo.

Tabela 7.2: Fator de inflação de variância para as variáveis selecionadas como covariáveis dos três modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Variável	Fator de inflação de variância		
	Modelo sem correlação espacial	Modelo com correlação espacial	
		com matriz W_1	com matriz W_2
W_1EFIC	–	1.1389	–
W_2EFIC	–	–	1.2475
E_1	1.6119	1.6119	1.6166
E_3	2.8005	2.8550	2.8127
E_4	2.9967	2.9946	2.9980
E_6	2.2165	2.2164	2.2195
E_7	2.4396	2.4443	2.4560
E_8	2.1623	2.1621	2.1654
E_9	1.3372	1.3379	1.3426
E_{10}	1.2462	1.2462	1.2475
E_{11}	1.8569	1.8578	1.8774
E_{12}	1.5439	1.5439	1.5438
E_{13}	1.4401	1.4409	1.4482
E_{16}	1.0527	1.0532	1.0523
E_{17}	1.1422	1.1427	1.2131
E_{18}	1.3319	1.3320	1.3324
E_{19}	1.0306	1.0298	1.0319
E_{20}	1.5582	1.4913	1.4523
E_{21}	1.7157	1.7136	1.7452
E_{22}	2.7609	2.7738	2.7766
E_{23}	1.8691	1.8967	1.8989
RM_2	1.2786	–	–
E_{25}	1.1861	1.1873	1.1865
MT	1.3719	1.3293	1.3289
CAP	1.4040	1.4129	1.4199
R^2	1.1329	1.1193	1.1220

Tabela 7.3: Estimativas dos coeficientes do modelo de regressão linear clássica sem correlação espacial, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR, com suas respectivas estatísticas de teste t e $quasi-t$.

Variável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	$quasi-t$	
			HC3	HC4
Intercepto	-9.309×10^{-01}	-20.532	-20.476	-20.446
E_1	7.485×10^{-11}	0.518	0.910	0.727
E_3	8.692×10^{-04}	1.283	1.235	1.236
E_4	-8.128×10^{-05}	-2.261	-1.987	-1.960
E_6	-2.780×10^{-02}	-1.633	-1.645	-1.647
E_7	-4.410×10^{-02}	-2.659	-2.745	-2.749
E_8	-1.717×10^{-02}	-0.991	-1.012	-1.014
E_9	4.878×10^{-03}	0.174	0.194	0.193
E_{10}	-1.153×10^{-02}	-0.391	-0.400	-0.401
E_{11}	-2.260×10^{-02}	-1.175	-1.198	-1.200
E_{12}	1.917×10^{-02}	0.886	0.903	0.904
E_{13}	-5.583×10^{-02}	-2.327	-2.288	-2.292
E_{16}	-7.761×10^{-02}	-2.058	-2.189	-2.189
E_{17}	-5.349×10^{-02}	-5.483	-5.395	-5.405
E_{18}	8.583×10^{-02}	7.913	7.658	7.670
E_{19}	3.628×10^{-02}	3.973	3.969	3.976
E_{20}	5.039×10^{-05}	4.152	3.366	2.942
E_{21}	5.320×10^{-03}	21.122	20.565	20.584
E_{22}	4.334×10^{-02}	2.886	2.656	2.657
E_{23}	-5.591×10^{-02}	-3.995	-3.884	-3.890
RM_2	3.293×10^{-02}	1.647	1.598	1.590
E_{25}	-9.145×10^{-02}	-7.065	-6.100	-6.111
MT	-1.477×10^{-02}	-0.738	-0.681	-0.680
CAP	1.456×10^{-01}	2.031	2.113	1.996
$R2$	-1.525×10^{-01}	-9.619	-8.613	-8.621

Tabela 7.4: Estimativas dos coeficientes do modelo de regressão linear clássica com correlação espacial, usando a matriz W_1 , onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR, com suas respectivas estatísticas de teste t e $quasi-t$.

Variável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	$quasi-t$	
			HC3	HC4
Intercepto	-9.819×10^{-01}	-21.284	-21.234	-21.221
W_1EFIC	4.592×10^{-03}	5.732	5.793	5.790
E_1	7.546×10^{-11}	0.524	1.025	0.931
E_3	1.401×10^{-03}	2.055	1.968	1.969
E_4	-8.185×10^{-05}	-2.285	-2.026	-2.002
E_6	-2.710×10^{-02}	-1.597	-1.605	-1.608
E_7	-4.822×10^{-02}	-2.914	-3.007	-3.012
E_8	-1.661×10^{-02}	-0.961	-0.984	-0.985
E_9	1.187×10^{-03}	0.042	0.047	0.047
E_{10}	-1.104×10^{-02}	-0.376	-0.393	-0.393
E_{11}	-2.591×10^{-02}	-1.352	-1.376	-1.378
E_{12}	2.021×10^{-02}	0.937	0.952	0.953
E_{13}	-6.009×10^{-02}	-2.512	-2.462	-2.466
E_{16}	-7.256×10^{-02}	-1.929	-2.062	-2.063
E_{17}	-5.672×10^{-02}	-5.831	-5.723	-5.733
E_{18}	8.410×10^{-02}	7.778	7.549	7.561
E_{19}	3.810×10^{-02}	4.187	4.197	4.205
E_{20}	4.447×10^{-05}	3.758	3.222	2.835
E_{21}	5.409×10^{-03}	21.558	20.796	20.815
E_{22}	4.896×10^{-02}	3.263	3.011	3.013
E_{23}	-6.659×10^{-02}	-4.738	-4.598	-4.606
E_{25}	-8.655×10^{-02}	-6.704	-5.781	-5.792
MT	-6.799×10^{-03}	-0.346	-0.324	-0.324
CAP	1.768×10^{-01}	2.466	2.590	2.454
$R2$	-1.518×10^{-01}	-9.667	-8.530	-8.539

Tabela 7.5: Estimativas dos coeficientes do modelo de regressão linear clássica com correlação espacial, usando a matriz W_2 , onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR, com suas respectivas estatísticas de teste t e $quasi-t$.

Variável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	$quasi-t$	
			HC3	HC4
<i>Intercepto</i>	-7.927×10^{-01}	-11.795	-11.319	-11.313
<i>W₂EFIC</i>	-7.916×10^{-05}	-2.719	-2.508	-2.510
E_1	9.629×10^{-11}	0.666	1.188	0.992
E_3	5.927×10^{-04}	0.873	0.848	0.848
E_4	-8.625×10^{-05}	-2.401	-2.113	-2.086
E_6	-2.933×10^{-02}	-1.723	-1.734	-1.737
E_7	-4.778×10^{-02}	-2.873	-2.955	-2.960
E_8	-1.940×10^{-02}	-1.119	-1.144	-1.146
E_9	8.924×10^{-05}	0.003	0.004	0.004
E_{10}	-1.449×10^{-02}	-0.492	-0.499	-0.499
E_{11}	-2.861×10^{-02}	-1.481	-1.505	-1.508
E_{12}	1.921×10^{-02}	0.889	0.904	0.905
E_{13}	-6.133×10^{-02}	-2.551	-2.501	-2.505
E_{16}	-7.808×10^{-02}	-2.071	-2.203	-2.203
E_{17}	-4.746×10^{-02}	-4.722	-4.616	-4.624
E_{18}	8.465×10^{-02}	7.806	7.546	7.559
E_{19}	3.558×10^{-02}	3.896	3.892	3.899
E_{20}	5.663×10^{-05}	4.836	3.794	3.313
E_{21}	5.441×10^{-03}	21.433	20.880	20.896
E_{22}	3.974×10^{-02}	2.640	2.437	2.439
E_{23}	-5.554×10^{-02}	-3.970	-3.861	-3.868
E_{25}	-9.219×10^{-02}	-7.124	-6.140	-6.151
<i>MT</i>	-8.945×10^{-03}	-0.454	-0.424	-0.424
<i>CAP</i>	1.220×10^{-01}	1.693	1.801	1.703
R_2	-1.519×10^{-01}	-8.634	-8.489	-8.498

Tabela 7.6: Teste de heteroscedasticidade de Koenker e Breusch-Pagan para os três modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Modelo	Teste					
	Koenker			Breusch-Pagan		
	LM_K	gl	p -valor	LM_{BP}	gl	p -valor
Sem correlação espacial	152.91	24	2×10^{-16}	210.01	24	2×10^{-16}
Com cor. espacial (W_1)	158.82	24	2×10^{-16}	217.64	24	2×10^{-16}
Com cor. espacial (W_2)	153.84	24	2×10^{-16}	209.27	24	2×10^{-16}

Tabela 7.7: Descrição do modelo de regressão linear clássica selecionado, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	$quasi-t$	
			HC3	HC4
<i>Intercepto</i>	-9.967×10^{-01}	-22.593	-22.583	-22.551
$W_1 EFIC$	4.579×10^{-03}	5.724	5.792	5.787
E_3	1.396×10^{-03}	2.054	1.972	1.972
E_4	-8.186×10^{-05}	-2.385	-2.172	-2.149
E_7	-3.455×10^{-02}	-3.211	-3.230	-3.234
E_{13}	-4.676×10^{-02}	-2.308	-2.218	-2.218
$E_{16}^{(1)}$	-7.190×10^{-02}	-1.912	-2.047	-2.046
E_{17}	-5.659×10^{-02}	-5.825	-5.727	-5.733
E_{18}	8.493×10^{-02}	7.864	7.639	7.647
E_{19}	3.745×10^{-02}	4.121	4.136	4.141
E_{20}	4.827×10^{-05}	4.326	3.721	3.313
E_{21}	5.411×10^{-03}	21.941	21.164	21.160
E_{22}	5.062×10^{-02}	3.390	3.145	3.146
E_{23}	-6.788×10^{-02}	-4.838	-4.698	-4.702
E_{25}	-8.823×10^{-02}	-6.844	-5.897	-5.904
CAP	1.867×10^{-01}	2.830	2.927	2.762
R_2	-1.526×10^{-01}	-9.868	-8.704	-8.706

⁽¹⁾ não-significativa ao nível de 5%, pelo teste t , mas significativa ao mesmo nível normal pelos testes $quasi-t$.

2. A Partir do DEA-BCC

Nesta seção, foi realizada uma análise semelhante àquela dos modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR. Em síntese:

- Inicialmente foram excluídas as variáveis que pelas suas características estavam correlacionadas.
- Em seguida, foi realizado um teste para detectar a presença de multicolinearidade entre os regressores, através do fator de correção de variância (FIV) e as covariadas que apresentaram $FIV > 5$ foram excluídas, exceto a covariável E_1 , pelas razões já citadas quando da análise dos modelos ajustados a partir do DEA-CCR (vide Tabela 7.8). Logo depois, o referido teste foi repetido, sem as covariáveis correlacionadas, para constatar que as restantes não eram colineares (Tabela 7.9).

Tabela 7.8: Variáveis dos modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC, que apresentaram fator de inflação de variância maior do que 5.

Variável	Fator de inflação de variância		
	Modelo sem correlação espacial	Modelo com correlação espacial	
		com matriz W_1	com matriz W_2
$E_1^{(1)}$	32.6013	32.6166	32.6503
POP	34.3100	34.4600	34.6004
RC	93.7519	93.9037	93.6798
TC	108.9213	108.7645	109.1390

⁽¹⁾ Covariável não excluída

- Depois foram feitos os testes de Koenker e Breusch-Pagan, para detectar a existência de heteroscedasticidade (ver Tabela 7.13). Aqui, a conclusão foi a mesma, ou seja, há heteroscedasticidade nos dados.
- Posteriormente, sem os regressores indesejados, os três modelos especificados foram ajustados pelo método de mínimos quadrados ordinários e foi procedida uma análise para averiguação da

significância das covariáveis ao nível de 5%, através dos testes t e $quasi-t$, sendo este último por intermédio dos estimadores consistentes HC3 e HC4.

- Finalmente, foram eliminadas dos modelos ajustados as covariáveis não-significativas (Tabelas 7.10, 7.11 e 7.12). Pelo motivo já mencionado quando da análise dos modelos de regressão linear clássica a partir do DEA-CCR, o modelo sem correlação espacial foi descartado, enquanto que, diferentemente daquela análise, o modelo com correlação espacial composto por W_2 foi rejeitado pelo fato de que esta covariável é não-significativa.

Assim, chega-se à definição do modelo de regressão linear clássica, cuja variável resposta é a eficiência gerada pelo método DEA-BCC. Este modelo está descrito na Tabela 7.14.

O modelo de regressão linear clássica gerado pelo DEA-BCC, que introduz retornos de escala variáveis no método DEA, confirma a maioria dos resultados obtidos pelo modelo de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência gerada pelo DEA-CCR, que utiliza retorno de escala constante. Contudo, são constatadas as seguintes divergências:

- As variáveis E_4 , E_{13} , E_{20} , E_{22} e CAP passaram de significativas, ao nível de 5%, no modelo gerado pelo DEA-CCR, para não-significativas no modelo obtido pelo DEA-BCC, enquanto que o regressor E_{11} deixou de ser não-significativo e passou a ser significativo, ao nível de 5%, no modelo gerado pelo DEA-BCC.
- O regressor índice de atualização do cadastro predial (E_{16}), significativo nos dois modelos, surpreendentemente aponta efeitos sobre eficiências em direções opostas, ou seja, no modelo gerado pelo DEA-CCR a eficiência diminui em 7.190%, enquanto que no modelo obtido pelo DEA-BCC a eficiência aumenta em 9.771%.

Adicionalmente às análises realizadas até então, os resultados obtidos a partir dos dois modelos indicam que não há nenhuma relação direta entre rendas mais altas e melhoria da qualidade de vida proporcionada pela prestação de bons serviços públicos à sociedade; que municípios

circunvizinhos (distância menor que 50 Km, W_1EFIC) tendem a apresentar eficiências correlacionadas; que o poder de decisão dos conselhos municipais inibe a ação da corrupção e o abuso no uso dos recursos públicos; e que a participação dos municípios em consórcios, ao contrário do esperado, diminui a eficiência da municipalidade envolvida.

Além disso, é importante destacar que a variável idade do município, E_{25} , mantém-se significativa, ao nível de 5%, e continua influenciando negativamente a eficiência dos municípios com menos de 8 anos de fundação. Porém, no modelo obtido a partir do DEA-BCC, esta influência é menor: -4.042% .

Tabela 7.9: Fator de inflação de variância para as variáveis selecionadas como covariáveis dos três modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Variável	Fator de inflação de variância		
	Modelo sem correlação espacial	Modelo com correlação espacial	
		com matriz W_1	com matriz W_2
W_1EFIC	—	1.0803	—
W_2EFIC	—	—	1.2210
E_1	1.6119	1.6130	1.6157
E_3	2.8005	2.8198	2.8087
E_4	2.9967	2.9958	3.0008
E_6	2.2165	2.2165	2.2193
E_7	2.4396	2.4426	2.4531
E_8	2.1623	2.1631	2.1649
E_9	1.3372	1.3375	1.3422
E_{10}	1.2462	1.2463	1.2474
E_{11}	1.8569	1.8575	1.8752
E_{12}	1.5439	1.5438	1.5438
E_{13}	1.4401	1.4404	1.4484
E_{16}	1.0527	1.0550	1.0523
E_{17}	1.1422	1.1488	1.2143
E_{18}	1.3319	1.3325	1.3326
E_{19}	1.0306	1.0294	1.0308
E_{20}	1.5582	1.4615	1.4533
E_{21}	1.7157	1.7123	1.7486
E_{22}	2.7609	2.7751	2.7715
E_{23}	1.8691	1.8988	1.8687
RM_2	1.2786	—	—
E_{25}	1.1861	1.1852	1.1851
MT	1.3719	1.3289	1.3290
CAP	1.4040	1.4057	1.4176
$R2$	1.1329	1.1232	1.1200

Tabela 7.10: Estimativas do coeficientes das covariáveis do modelo de regressão linear clássica sem correlação espacial, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC, com suas respectivas estatísticas de teste t e *quasi-t*.

Variável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	<i>quasi-t</i>	
			HC3	HC4
Intercepto	-8.656×10^{-01}	-18.412	-18.406	-18.4019
E_1	-1.055×10^{-10}	-0.705	-1.3858	-1.1879
E_3	2.371×10^{-03}	3.374	3.5436	3.5489
E_4	1.096×10^{-05}	0.294	0.3004	0.2995
E_6	-2.034×10^{-02}	-1.152	-1.1694	-1.1713
E_7	-4.055×10^{-02}	-2.358	-2.3795	-2.3835
E_8	-8.670×10^{-03}	-0.482	-0.4953	-0.4961
E_9	2.540×10^{-02}	0.874	0.9614	0.9596
E_{10}	-8.667×10^{-03}	-0.284	-0.3023	-0.3024
E_{11}	-6.937×10^{-02}	-3.480	-3.4632	-3.4700
E_{12}	-1.767×10^{-02}	-0.788	-0.8556	-0.8566
E_{13}	-2.955×10^{-02}	-1.188	-1.1922	-1.1945
E_{16}	8.014×10^{-02}	2.049	1.9521	1.9521
E_{17}	-2.812×10^{-02}	-2.780	-2.7528	-2.7581
E_{18}	2.974×10^{-02}	2.644	2.6082	2.6128
E_{19}	2.671×10^{-02}	2.821	2.8197	2.8243
E_{20}	2.771×10^{-05}	2.202	2.2710	2.0830
E_{21}	1.560×10^{-04}	5.972	5.8781	5.8866
E_{22}	1.488×10^{-02}	0.956	0.9400	0.9410
E_{23}	-5.283×10^{-02}	-3.640	-3.7957	-3.8011
RM_2	-3.308×10^{-02}	-1.596	-1.5332	-1.5319
E_{25}	-4.037×10^{-02}	-3.008	-2.8604	-2.8665
MT	-1.022×10^{-04}	-0.005	-0.0049	-0.0049
CAP	-4.497×10^{-02}	-0.605	-0.5265	-0.4999
R^2	-7.269×10^{-02}	-4.423	-4.1210	-4.1260

Tabela 7.11: Estimativas dos coeficientes das covariáveis do modelo de regressão linear clássica com correlação espacial, usando a matriz W_1 , onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC, com suas respectivas estatísticas de teste t e *quasi-t*.

Variável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	<i>quasi-t</i>	
			HC3	HC4
Intercepto	-9.505×10^{-01}	-19.880	-19.574	-19.578
W_1EFIC	6.393×10^{-03}	7.892	7.803	7.817
E_1	-7.509×10^{-11}	-0.505	-1.012	-0.897
E_3	3.088×10^{-03}	4.408	4.570	4.578
E_4	1.856×10^{-05}	0.501	0.512	0.511
E_6	-1.949×10^{-02}	-1.111	-1.129	-1.130
E_7	-4.522×10^{-02}	-2.645	-2.663	-2.668
E_8	-5.125×10^{-03}	-0.287	-0.296	-0.297
E_9	2.202×10^{-02}	0.762	0.837	0.835
E_{10}	-5.692×10^{-03}	-0.187	-0.199	-0.199
E_{11}	-7.245×10^{-02}	-3.657	-3.631	-3.638
E_{12}	-1.798×10^{-02}	-0.807	-0.879	-0.880
E_{13}	-3.273×10^{-02}	-1.324	-1.323	-1.326
E_{16}	9.693×10^{-02}	2.491	2.344	2.345
E_{17}	-3.433×10^{-02}	-3.405	-3.355	-3.362
E_{18}	2.751×10^{-02}	2.461	2.434	2.439
E_{19}	2.708×10^{-02}	2.880	2.884	2.889
E_{20}	1.430×10^{-05}	1.181	1.277	1.181
E_{21}	1.668×10^{-03}	6.426	6.318	6.328
E_{22}	2.435×10^{-02}	1.570	1.556	1.558
E_{23}	-6.687×10^{-02}	-4.600	-4.820	-4.827
E_{25}	-3.779×10^{-02}	-2.835	-2.702	-2.708
MT	-5.527×10^{-03}	-0.272	-0.268	-0.268
CAP	-1.885×10^{-02}	-0.255	-0.222	-0.211
$R2$	-8.393×10^{-02}	-5.160	-4.804	-4.811

Tabela 7.12: Estimativas dos coeficientes das covariáveis do modelo de regressão linear clássica com correlação espacial, usando a matriz W_2 , onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC, com suas respectivas estatísticas de teste t e $quasi-t$.

Covariável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	$quasi-t$	
			HC3	HC4
<i>Intercepto</i>	-8.628×10^{-01}	-12.338	-12.159	-12.153
<i>W₂EFIC</i>	-3.470×10^{-06}	-0.115	-0.112	-0.112
<i>E₁</i>	-1.050×10^{-10}	-0.700	-1.418	-1.273
<i>E₃</i>	2.451×10^{-03}	3.483	3.643	3.648
<i>E₄</i>	1.239×10^{-05}	0.332	0.340	0.339
<i>E₆</i>	-2.062×10^{-02}	-1.167	-1.184	-1.186
<i>E₇</i>	-4.070×10^{-02}	-2.360	-2.384	-2.388
<i>E₈</i>	-8.408×10^{-03}	-0.467	-0.481	-0.481
<i>E₉</i>	2.514×10^{-02}	0.863	0.947	0.945
<i>E₁₀</i>	-8.410×10^{-03}	-0.275	-0.292	-0.292
<i>E₁₁</i>	-6.914×10^{-02}	-3.451	-3.434	-3.440
<i>E₁₂</i>	-1.790×10^{-02}	-0.798	-0.867	-0.868
<i>E₁₃</i>	-2.923×10^{-02}	-1.171	-1.175	-1.177
<i>E₁₆</i>	8.143×10^{-02}	2.082	1.982	1.982
<i>E₁₇</i>	-2.716×10^{-02}	-2.604	-2.553	-2.558
<i>E₁₈</i>	3.007×10^{-02}	2.672	2.640	2.644
<i>E₁₉</i>	2.611×10^{-02}	2.756	2.756	2.761
<i>E₂₀</i>	2.249×10^{-05}	1.851	1.901	1.749
<i>E₂₁</i>	1.540×10^{-03}	5.840	5.785	5.793
<i>E₂₂</i>	1.520×10^{-02}	0.974	0.962	0.963
<i>E₂₃</i>	-5.210×10^{-02}	-3.590	-3.737	-3.742
<i>E₂₅</i>	-4.135×10^{-02}	-3.081	-2.936	-2.943
<i>MT</i>	-5.942×10^{-03}	-0.291	-0.287	-0.287
<i>CAP</i>	-4.337×10^{-02}	-0.580	-0.506	-0.480
<i>R₂</i>	-7.571×10^{-02}	-4.632	-4.299	-4.305

Tabela 7.13: Teste de heteroscedasticidade de Koenker e Breusch-Pagan para os três modelos de regressão linear clássica, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Modelo	Teste					
	Koenker			Breusch-Pagan		
	LM_K	gl	p -valor	LM_{BP}	gl	p -valor
Sem correlação espacial	52.72	24	6×10^{-04}	68.68	24	3×10^{-06}
Com cor. espacial (W_1)	50.60	24	1×10^{-03}	66.68	24	7×10^{-06}
Com cor. espacial (W_2)	51.77	24	8×10^{-04}	67.61	24	5×10^{-06}

Tabela 7.14: Descrição do modelo de regressão linear clássica selecionado, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa do coeficiente	Estatística teste		
		t	$quasi-t$	
			HC3	HC4
<i>Intercepto</i>	-9.489×10^{-01}	-22.128	-21.137	-21.126
W_1EFIC	6.380×10^{-03}	7.942	7.788	7.796
E_3	3.377×10^{-03}	5.575	5.813	5.816
E_7	-3.518×10^{-02}	-3.130	-3.027	-3.030
E_{11}	-6.286×10^{-02}	-4.203	-4.036	-4.040
E_{16}	9.771×10^{-02}	2.516	2.369	2.366
E_{17}	-3.666×10^{-02}	-3.676	-3.621	-3.625
E_{18}	2.499×10^{-02}	2.334	2.295	2.298
E_{19}	2.814×10^{-02}	3.004	3.017	3.020
E_{21}	1.719×10^{-03}	6.924	6.877	6.884
E_{23}	-5.930×10^{-02}	-4.497	-4.680	-4.683
E_{25}	-4.042×10^{-02}	-3.064	-2.910	-2.913
R_2	-8.032×10^{-02}	-5.099	-4.770	-4.772

7.1.2 Modelos de Regressão Quantílica

A escolha dos regressores para a composição do modelo de regressão quantílica foi baseada na análise que definiu os modelos de regressão linear clássica. Ou seja, os regressores que foram considerados estatisticamente significativos ao nível de 5% nos modelos de regressão clássica foram os selecionados para formar os dois modelos de regressão quantílica: aquele onde a variável dependente é a eficiência técnica obtida pelo método DEA-CCR e o outro onde esta mesma variável é gerada pelo DEA-BCC.

Cada modelo foi estimado levando-se em consideração os quantis 0.10 (décimo percentil), 0.25 (primeiro quartil), 0.50 (mediana), 0.75 (terceiro quartil) e 0.90 (nonagésimo percentil).

As estimativas foram realizadas através do pacote *quantreg* disponível para o *software* R, que usa como *default* uma versão modificada do algoritmo de Barrodale e Roberts, utilizada sempre em modelos que têm menos de cinco mil observações e menos de vinte parâmetros.

Uma vez que os dados apresentam heteroscedasticidade, os cálculos foram realizados considerando erros n.i.d., através da função “nid” do pacote *quantreg*, que estima a matriz de covariância assintótica (Hubber Sandwich) a partir da função “sparsity”, conforme exposto no Capítulo 3. A análise de significância das covariáveis foi realizada a partir da estatística de teste t .

1. A partir do DEA-CCR

As Tabelas 7.15 a 7.19 exibem as estimativas dos coeficientes dos cinco modelos de regressão quantílica, com seus respectivos intervalos de 95% de confiança e estatísticas de teste t . Nelas, pode-se observar que, em cada modelo, pelo menos duas covariáveis são não-significativas. Por exemplo, no modelo para o quantil 0.10, os regressores E_4 , E_{22} , E_{23} e CAP não são significativos. Já no modelo para o quantil 0.25, os regressores não-significativos são E_4 e E_7 , enquanto que as covariáveis E_3 e E_{13} não são significativas no modelo cujo quantil é a mediana. No que se refere aos modelos onde os quantis de interesse são 0.75 e 0.90, a significância das covariáveis pode ser observada nas Tabelas 7.18 e 7.19.

Analisando os resultados dos cinco modelos apresentados acima, verifica-se que:

- A variável que mede a eficiência dos municípios com base na cir-

cunvizinhança, W_1EFIC , apresenta uma evolução interessante ao longo dos quantis. Primeiro, este regressor é significativo em todos os quantis estudados. Segundo, o efeito vizinhança é mais intenso entre os municípios menos eficientes.

- O recebimento de *royalties* (R_2) também é significativo em todos os quantis, porém, ao contrário da variável W_1EFIC , seu impacto é negativo e seu efeito mais intenso se dá entre os municípios que apresentam desempenhos menos ruins, isto é, nos quantis superiores.

Tabela 7.15: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.10, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-1.3042	-1.4766 ; -1.2165	-15.1646
W_1EFIC	0.0079	0.0062 ; 0.0094	6.4583
E_3	0.0026	0.0014 ; 0.0044	2.2871
E_4	-0.0001	-0.000161 ; -0.000003	-1.5984
E_7	-0.0374	-0.0705 ; -0.0111	-2.0292
E_{13}	-0.0653	-0.0122 ; -0.0136	-2.1975
E_{16}	-0.2230	-0.2879 ; -0.0626	-2.8716
E_{17}	-0.0568	-0.0768 ; -0.0331	-3.6540
E_{18}	0.1396	0.1162 ; 0.1723	7.6768
E_{19}	0.0432	0.0152 ; 0.0623	2.9197
E_{20}	0.00004	0.000038 ; 0.000045	4.1627
E_{21}	0.0055	0.0046 ; 0.0061	13.6593
E_{22}	0.0362	0.0104 ; 0.0743	1.5514
E_{23}	-0.0443	-0.0892 ; -0.0078	-1.8231
E_{25}	-0.1764	-0.2179 ; -0.1425	-8.7231
CAP	0.2162	0.0050 ; 0.3150	1.9378
R_2	-0.2391	-0.3176 ; -0.1818	-5.9280

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

- Participação dos municípios em consórcios (E_{17}), poder de decisão dos conselhos municipais (E_{19}), densidade demográfica (E_{20}) e taxa de urbanização (E_{21}) são regressores que se mostram significativos e com resultados razoavelmente homogêneos em todos os quantis. Isto indica que o impacto causado por cada uma dessas variáveis é aproximadamente o mesmo, independentemente do município estar entre os mais eficientes ou não.

Tabela 7.16: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.25, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-1.1699	-1.2600 ; -1.0593	-21.1651
W_1EFIC	0.0044	0.0029 ; 0.0061	4.2067
E_3	0.0026	0.0012 ; 0.0050	2.6411
E_4	-0.00006	-0.00010 ; 0.00002	-1.5296
E_7	-0.0138	-0.0445 ; 0.0075	-0.9713
E_{13}	-0.0537	-0.1042 ; -0.0119	-2.1468
E_{16}	-0.1682	-0.2538 ; -0.0768	-3.5596
E_{17}	-0.0628	-0.0857 ; -0.0416	-4.7689
E_{18}	0.1369	0.1088 ; 0.1621	9.1696
E_{19}	0.0371	0.0133 ; 0.0558	3.0814
E_{20}	0.00003	0.00002 ; 0.00007	6.5961
E_{21}	0.0057	0.0051 ; 0.0062	17.2133
E_{22}	0.0726	0.0356 ; 0.1033	6.4741
E_{23}	-0.0777	-0.1164 ; -0.0396	-4.09031
E_{25}	-0.1388	-0.1742 ; -0.1082	-6.5593
CAP	0.1920	-0.0264 ; 0.3067	6.5126
R_2	-0.1715	-0.2150 ; -0.1347	-8.2110

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

- As demais covariáveis são não-significativas em pelo menos um dos quantis avaliados. Neste rol está a idade do município (E_{25}),

que não é significativa no modelo referente ao quantil 0.75. Contudo, ela apresenta uma evolução até surpreendente. Ela causa um forte impacto negativo (-17.64%) no menor quantil e este impacto é suavizado à medida que os quantis aumentam, chegando a provocar impacto favorável à eficiência (5.29%) no quantil mais elevado. Estes resultados sugerem que cidades criadas a partir de municípios considerados pouco eficientes, ou mesmo ineficientes, tendem a prestar serviços de má qualidade à sociedade, enquanto que fazer a cisão em um município que tem boa estrutura administrativa e experiência na gestão dos fundos municipais pode gerar duas cidades com potencial de prestar bons serviços às suas populações. Aqui, supõe-se, então, que há uma transferência de conhecimentos ao novo município.

Em virtude da análise comparativa dos resultados da eficiência técnica dos municípios brasileiros obtidos pelos modelos definidos neste trabalho utilizar o modelo de regressão quantílica apenas para o quantil da mediana, este modelo foi reestimado sem as covariáveis não-significativas, obtendo-se, dessa forma, o modelo desejado. O resultado está disposto na Tabela 7.20.

Como mencionado anteriormente, o modelo de regressão quantílica foi composto pelas variáveis que se mostraram significativas, ao nível de 5% , nos modelos de regressão linear clássica.

Com exceção das variáveis percentual de domicílios cujo chefe ganha até um salário mínimo (E_3) e PDT (E_{13}), que se mostraram não-significativas no modelo de regressão quantílica estimado a partir do DEA-CCR, os resultados obtidos pela média são semelhantes aos gerados pela mediana, notadamente no que se refere ao sentido da eficiência técnica estimada, ou seja, todas as covariáveis comuns aos dois modelos apresentaram exatamente os mesmos sinais.

Assim sendo, considerando as medidas de eficiência técnica geradas pelo DEA-CCR como variável dependente, as análises realizadas no modelo de regressão linear clássica são pertinentes aqui, no modelo de regressão quantílica, quando o quantil considerado é a mediana.

Tabela 7.17: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.50, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.9542	-1.0258 ; -0.8820	-24.7058
<i>W₁EFIC</i>	0.0038	0.0021 ; 0.0051	4.3408
<i>E₃</i>	0.0014	0.0002 ; 0.0023	1.9132
<i>E₄</i>	-0.0001	-0.00019 ; -0.00006	-3.4023
<i>E₇</i>	-0.0311	-0.0512 ; -0.0151	-2.7354
<i>E₁₃</i>	-0.0497	-0.0951 ; 0.0006	-1.7658
<i>E₁₆</i>	-0.1170	-0.1659 ; -0.0585	-4.5570
<i>E₁₇</i>	-0.0631	-0.0880 ; -0.0433	-5.9284
<i>E₁₈</i>	0.1024	0.0810 ; 0.1174	8.5500
<i>E₁₉</i>	0.0309	0.0158 ; 0.0499	3.1884
<i>E₂₀</i>	0.00006	0.00002 ; 0.00008	3.7487
<i>E₂₁</i>	0.0059	0.0054 ; 0.0063	21.2814
<i>E₂₂</i>	0.0499	0.0215 ; 0.0716	3.0151
<i>E₂₃</i>	-0.0595	-0.0814 ; -0.0363	-3.9286
<i>E₂₅</i>	-0.1010	-0.1299 ; -0.0736	-5.6627
<i>CAP</i>	0.1655	0.0734 ; 0.3110	4.1809
<i>R₂</i>	-0.1450	-0.1693 ; -0.1150	-8.4196

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.18: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.75, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.8076	-0.9002 ; -0.7167	-17.2045
<i>W₁EFIC</i>	0.0039	0.0019 ; 0.0058	4.0419
<i>E₃</i>	-0.0002	-0.0019 ; 0.0007	-0.3201
<i>E₄</i>	-0.0001	-0.00020 ; -0.00002	-3.8032
<i>E₇</i>	-0.0347	-0.0558 ; -0.0191	-2.5241
<i>E₁₃</i>	-0.0345	-0.0893 ; 0.0034	-1.4497
<i>E₁₆</i>	-0.0206	-0.0873 ; 0.0337	-0.5493
<i>E₁₇</i>	-0.0660	-0.0910 ; -0.0452	-5.4801
<i>E₁₈</i>	0.0497	0.0324 ; 0.0768	3.8304
<i>E₁₉</i>	0.0380	0.0208 ; 0.0555	3.3961
<i>E₂₀</i>	0.00004	0.00003 ; 0.00009	4.1308
<i>E₂₁</i>	0.0058	0.0053 ; 0.0066	19.6145
<i>E₂₂</i>	0.0528	0.0282 ; 0.0852	3.0052
<i>E₂₃</i>	-0.0628	-0.842 ; -0.0411	-3.9969
<i>E₂₅</i>	-0.0332	-0.0648 ; 0.0083	-1.5304
<i>CAP</i>	0.2249	0.0630 ; 0.2809	2.6378
<i>R₂</i>	-0.1052	-0.1383 ; -0.0652	-5.3424

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.19: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.90, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.6047	-0.7723 ; -0.5332	-10.8028
<i>W₁EFIC</i>	0.0022	0.00003 ; 0.00343	2.1555
<i>E₃</i>	-0.0017	-0.0030 ; 0.0006	-1.8017
<i>E₄</i>	-0.0001	-0.00020 ; 0.00005	-2.6686
<i>E₇</i>	-0.0552	-0.0764 ; -0.0345	-3.9550
<i>E₁₃</i>	-0.0397	-0.1056 ; 0.0141	-0.9495
<i>E₁₆</i>	0.0356	-0.0187 ; 0.1639	0.7733
<i>E₁₇</i>	-0.0688	-0.0855 ; -0.0416	-5.1238
<i>E₁₈</i>	0.0131	-0.0174 ; 0.0435	0.7591
<i>E₁₉</i>	0.0449	0.0162 ; 0.0661	3.4699
<i>E₂₀</i>	0.00005	0.00002 ; 0.00022	5.2509
<i>E₂₁</i>	0.0053	0.0049 ; 0.0061	15.3219
<i>E₂₂</i>	0.0436	0.0113 ; 0.0943	1.8001
<i>E₂₃</i>	-0.0776	-0.1137 ; -0.0396	-3.3532
<i>E₂₅</i>	0.0529	0.0138 ; 0.0966	2.1500
<i>CAP</i>	0.1337	0.0400 ; 0.1829	2.3540
<i>R₂</i>	-0.1046	-0.1391 ; -0.0618	-4.3370

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.20: Descrição do modelo de regressão quantílica definitivo para o quantil 0.50, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-CCR.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.9256	-0.9825 ; -0.8481	-26.1100
<i>W₁EFIC</i>	0.0035	0.0019 ; 0.0049	4.1502
<i>E₄</i>	-0.0002	-0.00021 ; -0.00009	-4.2636
<i>E₇</i>	-0.0270	-0.0468 ; -0.0093	-2.3879
<i>E₁₆</i>	-0.1092	-0.1706 ; -0.0657	-3.9836
<i>E₁₇</i>	-0.0643	-0.0866 ; -0.0430	-6.0351
<i>E₁₈</i>	0.0997	0.0771 ; 0.1189	8.3578
<i>E₁₉</i>	0.0312	0.0147 ; 0.0501	3.2119
<i>E₂₀</i>	0.00006	0.00003 ; 0.00008	4.7192
<i>E₂₁</i>	0.0056	0.0053 ; 0.0061	21.7112
<i>E₂₂</i>	0.0569	0.0317 ; 0.0837	3.5920
<i>E₂₃</i>	-0.0527	-0.0822 ; -0.0300	-3.5359
<i>E₂₅</i>	-0.1038	-0.1319 ; -0.0671	-5.8404
<i>CAP</i>	0.1697	0.0881 ; 0.3213	3.6965
<i>R₂</i>	-0.1406	-0.1636 ; -0.1081	-7.5350

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscor.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

2. A Partir do DEA-BCC

Igualmente ao item anterior, a análise de significância dos regressores dos modelos de regressão quantílica cuja variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-BCC é realizada com base nos dados constantes nas Tabelas 7.21, 7.22, 7.23, 7.24 e 7.25, que exibem os modelos de regressão quantílica estimados para os quantis 0.10, 0.25, 0.50, 0.75 e 0.90, respectivamente. Os resultados revelam que:

- As variáveis W_1EFIC , E_3 , E_{21} e E_{23} são significativas e seus resultados apresentam pouca variabilidade ao longo dos quantis. Isto também foi verificado no modelo gerado pelo DEA-CCR, sendo

que apenas a variável E_{21} pertence aos dois conjuntos com estas características.

- Os partidos políticos, analogamente aos outros modelos já analisados, não conseguem converter suas práticas ideológicas em prêmios à eficiência dos seus municípios. Especificamente neste modelo, PMDB (E_7) e PPB (E_{11}) produzem seus piores resultados nos quantis inferiores e os menos ruins nos quantis superiores, salientando que a variável PMDB não é significativa nos modelos para os quantis 0.75 e 0.90, enquanto que PPB é significativa em todos os quantis.
- A idade do município (E_{25}) se mostrou significativa apenas nos três quantis inferiores. Neste caso, fica confirmado que é um risco criar cidades a partir de municípios que não conseguem oferecer bons serviços a sua coletividade.
- O recebimento de *royalties* (R_2), aqui, apesar de apresentar resultados proporcionalmente menores do que no modelo de regressão quantílica gerado pelo DEA-CCR, tem efeito similar nos dois modelos.

A Tabela 7.26 apresenta o modelo de regressão quantílica na mediana com todos os regressores significativos, ao nível de 5%. Sua obtenção tem como objetivo a comparação dos seus resultados com os obtidos a partir da média condicional. Verifica-se que:

- No tocante ao sentido da eficiência técnica, os resultados obtidos pela regressão linear clássica e pela regressão quantílica são similares. Quanto às proporcionalidades, os resultados apresentam pequenas variações. Assim, as análises realizadas no modelo condicionado pela média servem para explicar o ocorrido no modelo obtido pela mediana. Este fato também se repete quando a variável dependente é proveniente do DEA-CCR.
- Um resultado inesperado aconteceu com a variável poder de decisão dos conselhos municipais, E_{19} , que era significativa e tornou-se não-significativa, quando da retirada da variável E_{16} do modelo.

Tabela 7.21: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.10, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-1.3397	-1.4736 ; -1.2436	-22.8301
<i>W₁EFIC</i>	0.0084	0.0060 ; 0.0101	6.2035
<i>E₃</i>	0.0049	0.0030 ; 0.0074	5.4065
<i>E₇</i>	-0.0976	-0.1330 ; -0.0547	-4.7714
<i>E₁₁</i>	-0.1313	-0.1836 ; -0.0721	-6.8149
<i>E₁₆</i>	0.0780	0.0138 ; 0.2359	1.4976
<i>E₁₇</i>	-0.0248	-0.0552 ; 0.0025	-1.7314
<i>E₁₈</i>	0.0363	0.0046 ; 0.0620	2.5123
<i>E₁₉</i>	0.0566	0.0210 ; 0.0808	4.0161
<i>E₂₁</i>	0.0013	0.0005 ; 0.0021	3.3520
<i>E₂₃</i>	-0.0370	-0.0848 ; 0.0063	-2.5279
<i>E₂₅</i>	-0.0975	-0.1293 ; -0.0651	-6.0074
<i>R₂</i>	-0.1590	-0.2099 ; -0.1138	-5.6889

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.22: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.25, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-1.1817	-1.2996 ; -1.1058	-18.9529
W_1EFIC	0.0070	0.0058 ; 0.0089	7.0312
E_3	0.0044	0.0034 ; 0.0060	6.0233
E_7	-0.0519	-0.0789 ; -0.0200	-3.0950
E_{11}	-0.0851	-0.1208 ; -0.0556	-4.4400
E_{16}	0.1193	0.0589 ; 0.2335	2.0461
E_{17}	-0.0457	-0.0691 ; -0.0200	-3.2330
E_{18}	0.0395	0.0147 ; 0.0612	2.8232
E_{19}	0.0487	0.0295 ; 0.0703	3.8380
E_{21}	0.0017	0.0011 ; 0.0023	5.0158
E_{23}	-0.0641	-0.1042 ; -0.0412	-3.9004
E_{25}	-0.0718	-0.1031 ; -0.0351	-3.8038
R_2	-0.1000	-0.1386 ; -0.0575	-4.1028

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.23: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.50, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.8959	-0.9744 ; -0.8095	-18.0256
<i>W₁EFIC</i>	0.0054	0.0043 ; 0.0067	5.9451
<i>E₃</i>	0.0024	0.0016 ; 0.0039	3.5695
<i>E₇</i>	-0.0245	-0.0497 ; -0.0051	-1.9607
<i>E₁₁</i>	-0.0637	-0.0964 ; -0.0352	-3.3362
<i>E₁₆</i>	0.0708	-0.0085 ; 0.1508	1.5816
<i>E₁₇</i>	-0.0322	-0.0521 ; -0.0146	-2.7637
<i>E₁₈</i>	0.0318	0.0115 ; 0.0472	2.5532
<i>E₁₉</i>	0.0216	0.0035 ; 0.0397	1.9940
<i>E₂₁</i>	0.0016	0.0012 ; 0.0021	5.6013
<i>E₂₃</i>	-0.0410	-0.0657 ; -0.0208	-2.7633
<i>E₂₅</i>	-0.0398	-0.0669 ; -0.0176	-2.4412
<i>R₂</i>	-0.0608	-0.0895 ; -0.0266	-2.8159

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.24: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.75, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.7460	-0.8259 ; -0.6663	-28.4843
<i>W₁EFIC</i>	0.0059	0.0037 ; 0.0078	6.3346
<i>E₃</i>	0.0030	0.0015 ; 0.0041	5.1724
<i>E₇</i>	-0.0066	-0.0312 ; 0.0149	-0.4833
<i>E₁₁</i>	-0.0440	-0.0666 ; -0.0117	-3.1734
<i>E₁₆</i>	0.1056	0.0129 ; 0.1719	6.0747
<i>E₁₇</i>	-0.0369	-0.0574 ; -0.0148	-3.5719
<i>E₁₈</i>	0.0169	-0.0046 ; 0.0403	1.4909
<i>E₁₉</i>	0.0214	0.0027 ; 0.0411	2.0344
<i>E₂₁</i>	0.0019	0.0014 ; 0.0026	7.1828
<i>E₂₃</i>	-0.0748	-0.0953 ; -0.0504	-5.0641
<i>E₂₅</i>	-0.0189	-0.0553 ; 0.0202	-1.0075
<i>R₂</i>	-0.0536	-0.0952 ; -0.0259	-2.9184

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.25: Descrição do modelo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.90, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.5347	-0.6531 ; -0.4427	-8.4547
<i>W₁EFIC</i>	0.0052	0.0034 ; 0.0090	3.7605
<i>E₃</i>	0.0020	0.0012 ; 0.0036	2.1360
<i>E₇</i>	-0.0136	-0.0410 ; 0.0179	-0.6613
<i>E₁₁</i>	-0.0534	-0.0793 ; -0.0187	-2.7131
<i>E₁₆</i>	0.0852	0.0095 ; 0.1832	1.5694
<i>E₁₇</i>	-0.0495	-0.0690 ; -0.0268	-2.8870
<i>E₁₈</i>	0.0052	-0.0208 ; 0.0387	0.2973
<i>E₁₉</i>	0.0007	-0.0241 ; 0.0313	0.0409
<i>E₂₁</i>	0.0024	0.0016 ; 0.0030	5.6759
<i>E₂₃</i>	-0.0777	-0.1023 ; -0.0494	-3.7161
<i>E₂₅</i>	0.0120	-0.0235 ; 0.0448	0.5166
<i>R₂</i>	-0.0839	-0.1042 ; -0.0244	-3.9424

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

Tabela 7.26: Descrição do modelo definitivo de regressão quantílica estimado para o quantil 0.50, onde a variável resposta é a eficiência técnica gerada pelo método DEA-BCC.

Covariável	Estimativa dos coeficientes		Estatística teste $t^{(2)}$
	Pontual	Intervalar ⁽¹⁾	
<i>Intercepto</i>	-0.8116	-0.8631 ; -0.7758	-29.4227
W_1EFIC	0.0055	0.0041 ; 0.0069	6.1019
E_3	0.0025	0.0017 ; 0.0036	3.9013
E_7	-0.0270	-0.0481 ; -0.0121	-2.2131
E_{11}	-0.0649	-0.1010 ; -0.0380	-3.4798
E_{17}	-0.0383	-0.0573 ; -0.0218	-3.3278
E_{18}	0.0300	0.0120 ; 0.0460	2.4535
E_{21}	0.0015	0.0012 ; 0.0021	5.2312
E_{23}	-0.0499	-0.0687 ; -0.0316	-3.4866
E_{25}	-0.0384	-0.0622 ; -0.0154	-2.4031
R_2	-0.0613	-0.0899 ; -0.0270	-3.0778

⁽¹⁾ Intervalo de 95% de confiança calculado pelo método da inversão de testes rankscore.

⁽²⁾ Calculada considerando erros n.i.d.

7.2 Eficiência Técnica Estimada

Em virtude do volume de informações ser muito grande, os resultados obtidos através dos modelos aqui estudados foram agrupados e estão apresentados em tabelas.

É importante salientar que os modelos de regressão quantílica apresentados nesta seção são referentes apenas ao quantil da mediana, para fins comparativos com os modelos de regressão clássica.

Como os modelos selecionados têm especificação semilog, foi necessário exponenciar os resultados para que as eficiências técnicas estimadas fossem obtidas. Dessa forma, para os modelos de regressão clássica e quantílica identificadas, respectivamente, por $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$, tem-se:

$$\hat{\theta} = e^{X\hat{\beta}} \quad \text{e} \quad \tilde{\theta} = e^{X\tilde{\beta}},$$

onde $\hat{\beta}$ e $\tilde{\beta}$ são os vetores dos parâmetros estimados através da regressão linear clássica e da regressão quantílica levando em consideração os fatores condicionantes.

Retirando-se das eficiências técnicas obtidas pelos métodos DEA-CCR e DEA-BCC a influência dos fatores condicionantes, obtém-se as estimativas das medidas de eficiência baseadas nos fatores externos, cujo cálculo foi realizado por

$$\hat{\hat{\theta}} = \theta - \hat{\theta} \quad \text{e} \quad \tilde{\tilde{\theta}} = \theta - \tilde{\theta}$$

para os modelos de regressão linear clássica e quantílica, respectivamente.

Especificamente quanto às medidas estimadas com base em fatores exógenos, os resultados merecem uma explicação adicional. Como pode-se notar, essas medidas de eficiência apresentam valores no intervalo $[-1, 1]$ e, neste caso, convém analisar as seguintes situações:

- Eficiência igual a ± 1 : isto ocorre quando os fatores exógenos são suficientes para explicar o comportamento da eficiência média. Ou seja, os fatores condicionantes não exercem qualquer tipo de influência nas medidas de eficiência.
- Eficiência igual a zero: esta situação é oposta àquela citada acima. Ou seja, os fatores condicionantes são suficientes para explicar o comportamento da eficiência média e os exógenos não influem nas medidas de eficiência.

- Eficiência entre (-1, 0): isto significa que as medidas geradas pelo modelo de regressão clássica com fatores condicionantes são superestimadas exatamente na medida originada pelos fatores exógenos
- Eficiência entre (0, 1): aqui, as medidas geradas pelo modelo de regressão clássica com fatores condicionantes são subestimadas justamente na medida obtida pelos fatores exógenos.

Nota-se que a escala acima é incompatível com aquela resultante dos demais modelos. Para contornar esta dificuldade, esses resultados foram normalizados e, assim, as eficiências técnicas geradas através dos fatores exógenos passaram a ter a escala [0,1], comum nos outros modelos. A normalização foi feita a partir das expressões

$$\hat{\beta}^* = \frac{\hat{\beta} - \min(\hat{\beta})}{\max(\hat{\beta} - \min(\hat{\beta}))} \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^* = \frac{\tilde{\beta} - \min(\tilde{\beta})}{\max(\tilde{\beta} - \min(\tilde{\beta}))}$$

para as medidas obtidas através da regressão linear clássica e regressão quantílica.

7.2.1 A Partir do Método DEA-CCR

Como era de se esperar os resultados obtidos pela técnica DEA-CCR, estão no intervalo (0, 1], sendo o valor mínimo 0.0947. Metade dos municípios brasileiros tem eficiência máxima em torno de 0.5031, abaixo da eficiência média que é 0.5222, e dentre os 75% municípios menos eficientes, o que apresenta melhor desempenho tem eficiência máxima de apenas 0.6257. Estes resultados estão expostos na Tabela 7.27.

No que se refere ao modelo de regressão linear tradicional, as medidas de eficiência obtidas se concentram mais em torno da média, ou seja, os municípios menos eficientes apresentam melhor desempenho e os mais eficientes têm pior desempenho, quando comparadas com as medidas do modelo DEA-CCR, principalmente com relação às variáveis independentes, que exercem influência na eficiência gerada pelos fatores condicionantes de no mínimo 0.2936 e em média 0.4993 (ver Tabela 7.27).

Com relação ao modelo de regressão quantílica para a mediana, os resultados são semelhantes àqueles da regressão clássica, tanto no que se refere aos

Tabela 7.27: Medidas descritivas da eficiência técnica estimadas pelos modelos DEA-CCR, regressão clássica e regressão quantílica na mediana ⁽¹⁾.

Medida	Modelo				
	DEA CCR	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		condicionantes	exógenos	condicionantes	exógenos
Mínimo	0.0947	0.2936	0.0000	0.2883	0.0000
1 ^o Quartil	0.3952	0.4418	0.3755	0.4434	0.3897
Mediana	0.5031	0.4928	0.4522	0.4990	0.4655
Média	0.5222	0.4993	0.4676	0.5043	0.4809
3 ^o Quartil	0.6257	0.5527	0.5412	0.5609	0.5546
Máximo	1.0000	1.0790	1.0000	1.1860	1.0000
Desvio padrão	0.1757	0.0803	0.1340	0.0853	0.1340
Coef. variação	0.3365	0.1608	0.2866	0.1692	0.2787

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-CCR.

fatores condicionantes quanto aos exógenos, conforme informações expostas na Tabela 7.27.

Com alusão aos municípios e segundo as Tabelas 7.29 e 7.30, as medidas de eficiência dadas pelo DEA-CCR revelam que somente 85 deles são eficientes, o que representa 1.79% dos municípios estudados. Este resultado é ainda pior quando a análise é feita a partir dos modelos de regressão clássica por fatores condicionantes, que aponta somente 2 municípios totalmente eficientes: Belo Horizonte (MG) e Diadema (SP), significando 0.04% dos municípios e por fatores exógenos, que indica apenas a cidade de São João das Missões, o que representa 0.02%. Neste caso, há uma curiosidade: com exceção de São João das Missões, estas cidades não fazem parte do seletor grupo das 85 cidades consideradas eficientes pelo método DEA-CCR, uma vez que suas medidas de eficiência são 0.7580 e 0.6503, respectivamente. Já o modelo de regressão quantílica por fatores condicionantes indica 4 municípios considerados cem por cento eficientes: Belo Horizonte (MG), Diadema (SP), Osasco (SP) e Taboão da Serra (SP), representando 0.08%, enquanto que o modelo por fatores exógenos, como na regressão clássica, mostra que somente a cidade de São João das Missões é totalmente eficiente. Aqui, a curiosidade se repete em virtude do método DEA-CCR gerar as medidas 0.9870 para a eficiência da cidade de Osasco (SP) e 0.6725 para o município de Taboão da Serra (SP).

A explicação para este fato reside, justamente, nos fatores exógenos. Estas medidas estão exibidas na Tabela 7.28.

Tabela 7.28: Medidas de eficiência técnica estimadas dos municípios considerados totalmente eficientes pelos modelos de regressão clássica e quantílica na mediana ⁽¹⁾.

Município	Modelo				
	DEA CCR	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		cond. ⁽²⁾	exógenos	cond. ⁽²⁾	exógenos
Belo Horizonte (MG)	0.7580	1.0787	0.1714	1.0929	0.1774
Diadema (SP)	0.6503	1.0396	0.1123	1.1856	0.0050
Osasco (SP)	0.9870	0.9796	0.4542	1.0909	0.3762
São João Missões (MG)	1.0000	0.3595	1.0000	0.3787	1.0000
Taboão da Serra (SP)	0.6725	0.9451	0.2129	1.0443	0.1457

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-CCR.

⁽²⁾ Condicionantes

Pode-se ainda verificar que 2142 cidades, representando 45.05% dos municípios, têm suas eficiências estimadas pelo DEA-CCR no intervalo [0.4, 0.6). Pela ótica da regressão clássica e da quantílica, este percentual aumenta consideravelmente para 79.20% e 76.61%, significando 3766 e 3643 municípios, respectivamente, quando são considerados fatores condicionantes. Levando em consideração os fatores exógenos, estes percentuais são mais próximos daquele obtido pelo DEA-CCR, conforme mostram as Tabelas 7.29 e 7.30.

Uma análise mais geral, porém superficial, pode ser realizada por intermédio de visualização gráfica. As Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 exibem os histogramas das eficiências estimadas pelos três métodos aqui discutidos com suas respectivas densidades estimadas. Como já citado anteriormente, nota-se uma grande semelhança entre as previsões geradas pelos dois métodos.

Do ponto de vista mais amplo, a Tabela 7.31 apresenta a quantidade de municípios, por unidade da federação e por região, considerando as faixas de eficiência estimadas pelo DEA-CCR, já expostas anteriormente. Nela, pode-se constatar que dos 85 municípios considerados eficientes, 32 são do estado de São Paulo, 10 são de Minas Gerais e 6 são de Pernambuco, totalizando 48

Tabela 7.29: Quantidade de municípios de acordo com as medidas de eficiência técnica estimadas pelos modelos DEA-CCR, regressão clássica e regressão quantílica na mediana ⁽¹⁾.

Eficiência técnica	Modelo				
	DEA CCR	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		condicionantes	exógenos	condicionantes	exógenos
0.0 ⊢ 0.2	32	0	34	0	28
0.2 ⊢ 0.4	1208	475	1505	483	1308
0.4 ⊢ 0.6	2142	3766	2495	3643	2627
0.6 ⊢ 0.8	996	500	626	611	679
0.8 ⊢ 1.0	292	12	94	14	112
1.0 ou mais ⁽²⁾	85	2	1	4	1

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-CCR.

⁽²⁾ Os modelos de regressão clássica e quantílica apresentaram medidas estimadas maiores do que 1.

Tabela 7.30: Percentual de municípios de acordo com as medidas de eficiência técnica estimadas pelos modelos DEA-CCR, regressão clássica e regressão quantílica na mediana⁽¹⁾.

Eficiência técnica	Modelo				
	DEA CCR	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		condicionantes	exógenos	condicionantes	exógenos
0.0 ⊢ 0.2	0.67	0.00	0.71	0.00	0.59
0.2 ⊢ 0.4	25.40	9.99	31.65	10.16	27.51
0.4 ⊢ 0.6	45.05	79.20	52.47	76.61	55.25
0.6 ⊢ 0.8	20.95	10.52	13.17	12.85	14.28
0.8 ⊢ 1.0	6.14	0.25	1.98	0.30	2.35
1.0 ou mais ⁽²⁾	1.79	0.04	0.02	0.08	0.02

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-CCR.

⁽²⁾ Os modelos de regressão clássica e quantílica apresentaram medidas estimadas maiores do que 1.

idades, o que significa dizer que 56.47% dos municípios eficientes estão em apenas três Estados. Por outro lado, seis Estados brasileiros não apresentam municípios eficientes. São eles: Acre, Amazonas e Rondônia, da Região Norte; Alagoas e Sergipe, do Nordeste; e Mato Grosso do Sul da Região Centro-Oeste. Com relação ao intervalo que contém as menores medidas de eficiência, dos 32 municípios nele contidos, 10 são do estado da Paraíba, no Nordeste, ou seja, 31.25% das cidades com eficiência estimada menor de 0.2 estão em um único Estado. Entretanto, 12 unidades da federação não têm municípios nesse intervalo e 9 têm apenas uma cidade com eficiência menor que 0.2.

Da perspectiva regional, o Sudeste é a região que tem mais cidades eficientes, com 46. Em seguida, vem o Nordeste com 19 cidades. No que se refere ao intervalo que contém as menores medidas de eficiência, a região de melhor desempenho é a Centro-Oeste, com apenas 1 município, seguida da região Sul com 3 municípios.

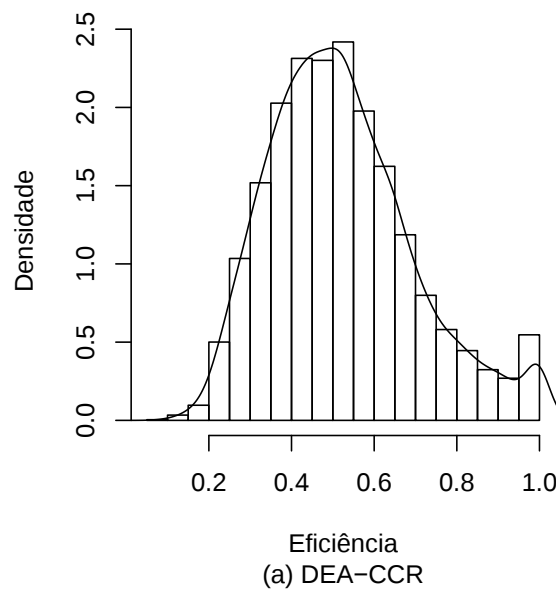


Figura 7.1: Histograma das medidas de eficiência geradas pelo DEA-CCR.

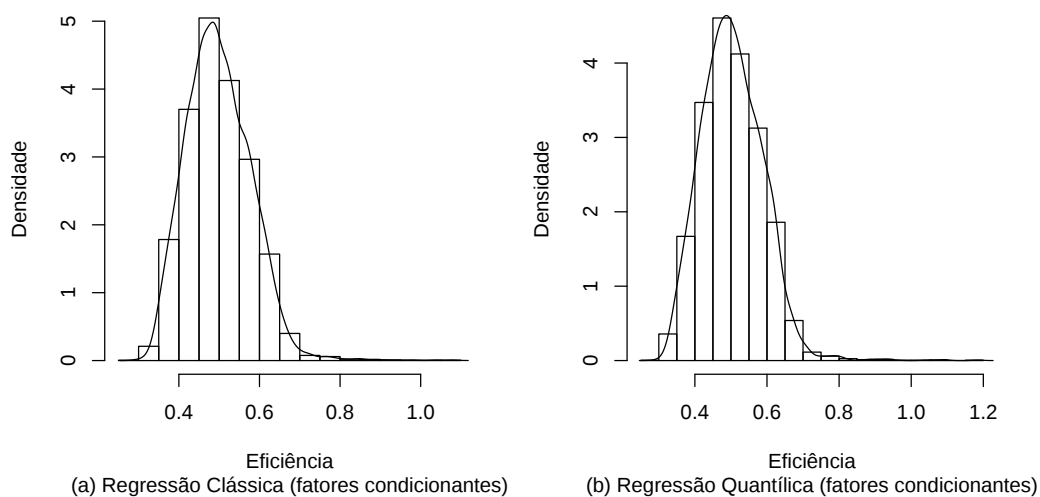


Figura 7.2: Histogramas das medidas de eficiência geradas pelos modelos de regressão clássica e quantílica na mediana com fatores condicionantes, a partir do DEA-CCR.

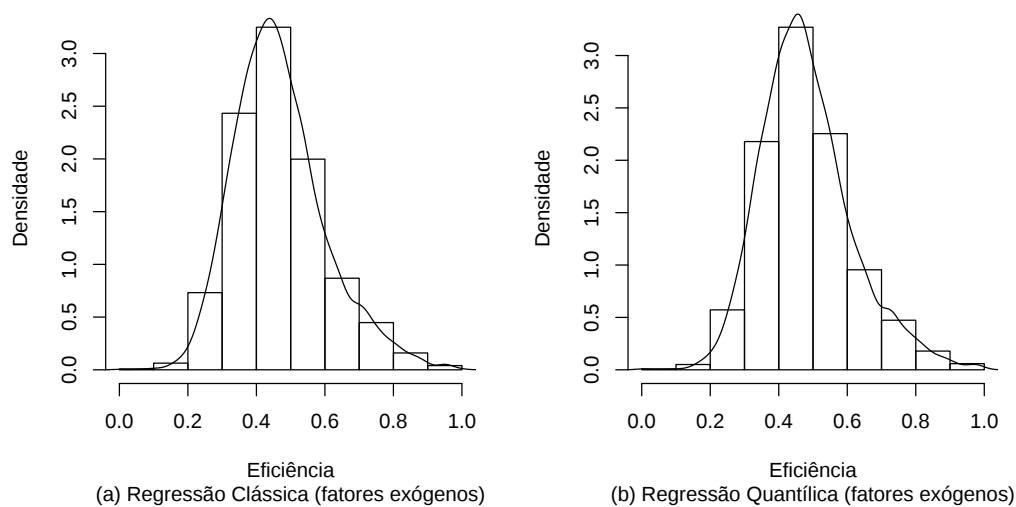


Figura 7.3: Histogramas das medidas de eficiência geradas pelos modelos de regressão clássica e quantílica na mediana com fatores exógenos, a partir do DEA-CCR.

A Tabela 7.32 revela resultados interessantes sob o ponto de vista relativo. Por exemplo, na região Sudeste, o estado de Minas Gerais tem 10 municípios eficientes, enquanto que o Rio de Janeiro tem apenas 3. Contudo, considerando a quantidade de municípios de cada um dos dois Estados, o Rio de Janeiro apresenta desempenho, aproximadamente, três vezes superior ao estado de Minas Gerais. Isto também se verifica entre as regiões, bastando observar as regiões Sul e Centro-Oeste.

Avaliação semelhante pode ser realizada com os resultados obtidos pelos métodos de regressão clássica e quantílica, expostos nas Tabelas 7.33 a 7.36.

Tabela 7.31: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo DEA-CCR, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 $\vdash$ 0.2	0.2 $\vdash$ 0.4	0.4 $\vdash$ 0.6	0.6 $\vdash$ 0.8	0.8 $\vdash$ 1.0	1.0
Centro-Oeste	1	82	127	65	25	4
Goiás	0	37	41	27	11	2
Mato Grosso	1	39	51	17	4	0
Mato Grosso do Sul	0	6	35	21	10	2
Nordeste	15	390	779	292	61	19
Alagoas	1	19	61	16	2	0
Bahia	2	62	214	77	18	3
Ceará	0	45	97	28	3	1
Maranhão	0	10	70	56	8	5
Paraíba	10	85	80	17	6	2
Pernambuco	1	16	91	44	12	6
Piauí	0	69	81	20	5	1
Rio Grande do Norte	1	60	64	19	3	1
Sergipe	0	24	21	15	4	0
Norte	6	103	150	72	28	6
Acre	0	8	6	4	1	0
Amazonas	0	7	28	16	3	0
Amapá	0	3	3	2	1	1
Pará	1	18	48	29	10	1
Rondônia	1	13	20	11	2	0
Roraima	0	0	1	1	4	2
Tocantins	4	54	44	9	7	2
Sudeste	7	313	570	353	122	46
Espírito Santo	0	21	40	10	3	1
Minas Gerais	3	223	352	204	33	10
Rio de Janeiro	3	38	29	6	5	3
São Paulo	1	31	149	133	81	32
Sul	3	320	516	214	56	10
Paraná	0	79	185	95	25	4
Rio Grande do Sul	1	155	198	72	22	1
Santa Catarina	2	86	133	47	9	5
Total	32	1208	2142	996	292	85

Tabela 7.32: Quantidade de municípios totalmente eficientes, segundo a eficiência técnica relativa com base no total de municípios de cada Estado, gerada pelo DEA-CCR, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Quantidade de municípios		
	Total	Eficientes	
		Absoluta	Relativa (%)
Centro-Oeste	304	4	1.32
Goiás	118	2	1.69
Mato Grosso	112	0	0.00
Mato Grosso do Sul	74	2	2.70
Nordeste	1556	19	1.22
Alagoas	99	0	0.00
Bahia	376	3	0.80
Ceará	174	1	0.57
Maranhão	149	5	3.36
Paraíba	200	2	1.00
Pernambuco	170	6	3.53
Piauí	176	1	0.57
Rio Grande do Norte	148	1	0.68
Sergipe	64	0	0.00
Norte	365	6	1.64
Acre	19	0	0.00
Amazonas	54	0	0.00
Amapá	10	1	10.00
Pará	107	1	0.93
Rondônia	47	0	0.00
Roraima	8	2	25.00
Tocantins	120	2	1.67
Sudeste	1411	46	3.26
Espírito Santo	75	1	1.33
Minas Gerais	825	10	1.21
Rio de Janeiro	84	3	3.57
São Paulo	427	32	7.49
Sul	1119	10	0.89
Paraná	388	4	1.03
Rio Grande do Sul	449	1	0.22
Santa Catarina	282	5	1.77
Total	4755	85	1.79

Tabela 7.33: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão clássica com fatores condicionantes a partir do DEA-CCR, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 $\vdash$ 0.2	0.2 $\vdash$ 0.4	0.4 $\vdash$ 0.6	0.6 $\vdash$ 0.8	0.8 $\vdash$ 1.0	1.0
Centro-Oeste	0	21	257	25	1	0
Goiás	0	4	99	14	1	0
Mato Grosso	0	15	92	5	0	0
Mato Grosso do Sul	0	2	66	6	0	0
Nordeste	0	161	1295	96	4	0
Alagoas	0	9	87	3	0	0
Bahia	0	23	323	30	0	0
Ceará	0	13	151	9	1	0
Maranhão	0	11	128	10	0	0
Paraíba	0	18	171	10	1	0
Pernambuco	0	11	128	30	1	0
Piauí	0	47	127	2	0	0
Rio Grande do Norte	0	19	127	1	1	0
Sergipe	0	10	53	1	0	0
Norte	0	51	295	19	0	0
Acre	0	2	16	1	0	0
Amazonas	0	2	51	1	0	0
Amapá	0	2	7	1	0	0
Pará	0	16	86	5	0	0
Rondônia	0	16	28	3	0	0
Roraima	0	3	4	1	0	0
Tocantins	0	10	103	7	0	0
Sudeste	0	75	1089	239	6	2
Espírito Santo	0	14	54	7	0	0
Minas Gerais	0	51	717	56	0	1
Rio de Janeiro	0	5	69	9	1	0
São Paulo	0	5	249	167	5	1
Sul	0	167	830	121	1	0
Paraná	0	41	313	34	0	0
Rio Grande do Sul	0	81	313	54	1	0
Santa Catarina	0	45	204	33	0	0
Total	0	475	3766	500	12	2

Tabela 7.34: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão clássica com fatores exógenos a partir do DEA-CCR, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 ⊢ 0.2	0.2 ⊢ 0.4	0.4 ⊢ 0.6	0.6 ⊢ 0.8	0.8 ⊢ 1.0	1.0
Centro-Oeste	3	106	152	36	7	0
Goiás	0	49	48	21	0	0
Mato Grosso	3	45	58	4	2	0
Mato Grosso do Sul	0	12	46	11	5	0
Nordeste	10	462	884	178	22	0
Alagoas	1	22	65	10	1	0
Bahia	4	83	243	42	4	0
Ceará	0	45	118	10	1	0
Maranhão	0	17	88	34	10	0
Paraíba	4	110	74	12	0	0
Pernambuco	1	44	88	35	2	0
Piauí	0	61	101	14	0	0
Rio Grande do Norte	0	61	76	8	3	0
Sergipe	0	19	31	13	1	0
Norte	1	115	171	66	12	0
Acre	0	7	10	2	0	0
Amazonas	0	10	30	13	1	0
Amapá	0	3	3	4	0	0
Pará	0	17	58	28	4	0
Rondônia	0	11	28	8	0	0
Roraima	0	0	1	3	4	0
Tocantins	1	67	41	8	3	0
Sudeste	18	438	684	231	39	1
Espírito Santo	1	19	47	8	0	0
Minas Gerais	7	270	431	108	8	1
Rio de Janeiro	1	47	29	5	2	0
São Paulo	9	102	177	110	29	1
Sul	2	384	604	115	14	0
Paraná	0	102	229	51	6	0
Rio Grande do Sul	2	171	235	39	2	0
Santa Catarina	0	111	140	25	6	0
Total	34	1505	2495	626	94	1

Tabela 7.35: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão quantílica na mediana com fatores condicionantes a partir do DEA-CCR, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 $\vdash$ 0.2	0.2 $\vdash$ 0.4	0.4 $\vdash$ 0.6	0.6 $\vdash$ 0.8	0.8 $\vdash$ 1.0	1.0
Centro-Oeste	0	22	244	38	0	0
Goiás	0	4	94	20	0	0
Mato Grosso	0	16	89	7	0	0
Mato Grosso do Sul	0	2	61	11	0	0
Nordeste	0	153	1264	134	5	0
Alagoas	0	7	87	5	0	0
Bahia	0	17	315	44	0	0
Ceará	0	10	150	13	1	0
Maranhão	0	17	123	9	0	0
Paraíba	0	19	165	15	1	0
Pernambuco	0	11	122	35	2	0
Piauí	0	49	122	5	0	0
Rio Grande do Norte	0	15	126	6	1	0
Sergipe	0	8	54	2	0	0
Norte	0	50	293	22	0	0
Acre	0	2	16	1	0	0
Amazonas	0	2	50	2	0	0
Amapá	0	2	7	1	0	0
Pará	0	14	87	6	0	0
Rondônia	0	16	28	3	0	0
Roraima	0	3	4	1	0	0
Tocantins	0	11	101	8	0	0
Sudeste	0	75	1039	286	7	4
Espírito Santo	0	16	51	8	0	0
Minas Gerais	0	50	693	80	1	1
Rio de Janeiro	0	3	68	12	1	0
São Paulo	0	6	227	186	5	3
Sul	0	183	803	131	2	0
Paraná	0	46	306	36	0	0
Rio Grande do Sul	0	85	301	61	2	0
Santa Catarina	0	52	196	34	0	0
Total	0	483	3643	611	14	4

Tabela 7.36: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão quantílica na mediana com fatores exógenos a partir do DEA-CCR, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 ⊢ 0.2	0.2 ⊢ 0.4	0.4 ⊢ 0.6	0.6 ⊢ 0.8	0.8 ⊢ 1.0	1.0
Centro-Oeste	1	98	158	37	10	0
Goiás	0	42	54	20	2	0
Mato Grosso	1	43	60	5	3	0
Mato Grosso do Sul	0	13	44	12	5	0
Nordeste	9	416	902	205	24	0
Alagoas	1	18	66	13	1	0
Bahia	4	70	247	51	4	0
Ceará	0	42	118	14	0	0
Maranhão	0	14	85	38	12	0
Paraíba	3	100	85	12	0	0
Pernambuco	1	41	87	38	3	0
Piauí	0	54	104	18	0	0
Rio Grande do Norte	0	60	77	8	3	0
Sergipe	0	17	33	13	1	0
Norte	0	102	180	68	15	0
Acre	0	7	9	3	0	0
Amazonas	0	8	32	12	2	0
Amapá	0	3	3	4	0	0
Pará	0	15	59	28	5	0
Rondônia	0	9	29	9	0	0
Roraima	0	0	0	4	4	0
Tocantins	0	60	48	8	4	0
Sudeste	17	394	708	247	44	1
Espírito Santo	1	17	48	9	0	0
Minas Gerais	6	239	451	116	12	1
Rio de Janeiro	2	44	31	5	2	0
São Paulo	8	94	178	117	30	0
Sul	1	298	679	122	19	0
Paraná	0	79	245	55	9	0
Rio Grande do Sul	1	135	269	40	4	0
Santa Catarina	0	84	165	27	6	0
Total	28	1308	2627	679	112	1

7.2.2 A Partir do Método DEA-BCC

Os resultados obtidos pela técnica DEA-BCC, de maneira geral, são muito parecidos com os gerados pelo DEA-CCR. Isto é constatado pelos dados contidos nas Tabelas 7.37, 7.38 e 7.39 a partir das quais se verifica que as duas técnicas fornecem resultados semelhantes. Situação análoga se dá com os modelos de regressão clássica e quantílica na mediana.

Tabela 7.37: Medidas descritivas da eficiência técnica estimadas pelos modelos DEA-BCC, regressão clássica e regressão quantílica ⁽¹⁾.

Medida	Modelo				
	DEA BCC	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		condicionantes	exógenos	condicionantes	exógenos
Mínimo	0.0774	0.3824	0.0000	0.3915	0.0000
1 ^a Quartil	0.4093	0.4766	0.3515	0.4861	0.3505
Mediana	0.5073	0.4994	0.4468	0.5071	0.4448
Média	0.5249	0.5002	0.4636	0.5072	0.4624
3 ^a Quartil	0.6198	0.5231	0.5545	0.5274	0.5543
Máximo	1.0000	0.6282	1.0000	0.6126	1.0000
Desvio padrão	0.1652	0.0335	0.1597	0.0303	0.1608
Coef. variação	0.3148	0.0671	0.3444	0.0596	0.3479

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-BCC.

No que se refere à quantidade de municípios conforme as faixas de eficiência adotadas neste trabalho, as duas técnicas DEA conduzem às mesmas conclusões, uma vez que os resultados são parecidos.

O mesmo não ocorre nos modelos de regressão estimados pelos fatores condicionantes. Aqueles gerados a partir do DEA-BCC apresentam quase todos os municípios com eficiências no intervalo $[0.4, 0.6)$, cerca de 99.73% na regressão clássica e 99.90% na regressão quantílica, enquanto que nesses modelos, quando gerados pelo DEA-CCR, a quantidade de municípios é melhor distribuída nas faixas de eficiências. Esta é a situação onde os dois métodos de análise envoltória de dados geram resultados mais divergentes. No entanto, quando esta comparação é feita entre os modelos de regressão gerados pelo mesmo DEA-BCC, os resultados voltam a ser similares.

Esta análise também pode ser realizada através de uma inspeção visual. As Figuras 7.4, 7.5 e 7.6 exibem os histogramas com suas respectivas den-

Tabela 7.38: Quantidade de municípios de acordo com as medidas de eficiência técnica estimadas pelos modelos DEA-BCC, regressão clássica e regressão quantílica ⁽¹⁾.

Eficiência técnica	Modelo				
	DEA BCC	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		condicionantes	exógenos	condicionantes	exógenos
0.0 ⊢ 0.2	26	0	122	0	126
0.2 ⊢ 0.4	1078	4	1672	1	1661
0.4 ⊢ 0.6	2281	4742	2123	4750	2125
0.6 ⊢ 0.8	1041	9	655	4	659
0.8 ⊢ 1.0	250	0	182	0	183
1.0	79	0	1	0	1

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-BCC.

Tabela 7.39: Percentual de municípios de acordo com as medidas de eficiência técnica estimadas pelos modelos DEA-BCC, regressão clássica e regressão quantílica ⁽¹⁾.

Eficiência técnica	Modelo				
	DEA BCC	Regressão clássica		Regressão quantílica	
		Fatores		Fatores	
		condicionantes	exógenos	condicionantes	exógenos
0.0 ⊢ 0.2	0.55	0.00	2.57	0.00	2.65
0.2 ⊢ 0.4	22.67	0.08	35.16	0.02	34.93
0.4 ⊢ 0.6	47.97	99.73	44.65	99.90	44.69
0.6 ⊢ 0.8	21.89	0.19	13.77	0.08	13.86
0.8 ⊢ 1.0	5.26	0.00	3.83	0.00	3.85
1.0	1.66	0.00	0.02	0.00	0.02

⁽¹⁾ Regressão clássica e quantílica onde a variável dependente é a eficiência gerada pelo DEA-BCC.

sidades estimadas para os modelos aqui tratados. Nelas é possível verificar a similaridade existente, não só entre os métodos de regressão, mas também entre as duas técnicas DEA.

Para uma descrição dos resultados no âmbito regional ou estadual, as Tabelas 7.41 a 7.46 fornecem os dados necessários para tal e corroboram

todas as análises realizadas até o presente. No que diz respeito a comparação entre os modelos de regressão, a semelhança entre as previsões geradas pelos dois métodos é tão grande que em alguns casos os resultados são exatamente iguais (ver Tabelas 7.44 e 7.46).

Finalmente, a Tabela 7.40 mostra os coeficientes de correlação linear calculados para verificar a relação existente entre os modelos de regressão clássica e quantílica, onde o quantil de interesse é a mediana, obtidos através dos fatores condicionantes e exógenos. Considerando a variável dependente como sendo a eficiência técnica obtida a partir do DEA-CCR, os resultados para os modelos com fatores condicionantes e exógenos foram 0.9918 e 0.9971, respectivamente. Quando a variável dependente são as medidas de eficiência geradas pela técnica DEA-BCC, os coeficientes de correlação obtidos foram 0.9520 para os modelos de regressão com fatores condicionantes e 0.9979 para os modelos com fatores exógenos. Estes resultados ratificam todas as análises comparativas feitas até então, inclusive aquelas realizadas através da visualização gráfica. Ou seja, as duas técnicas geram, de fato, estimativas semelhantes, principalmente quando os fatores exógenos são levados em consideração, uma vez que, nestes casos, a correlação linear existente é quase perfeita.

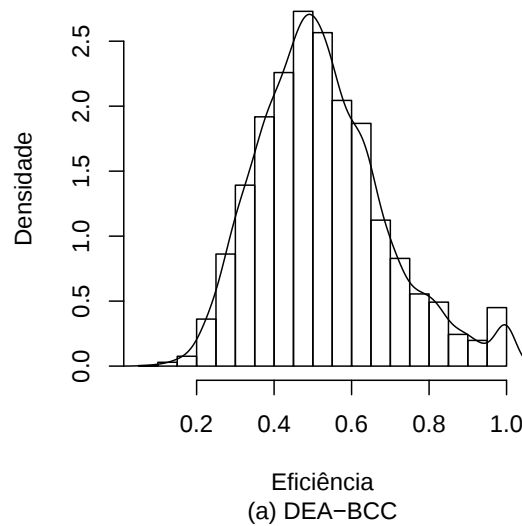


Figura 7.4: Histograma das medidas de eficiência geradas pelo DEA-BCC.

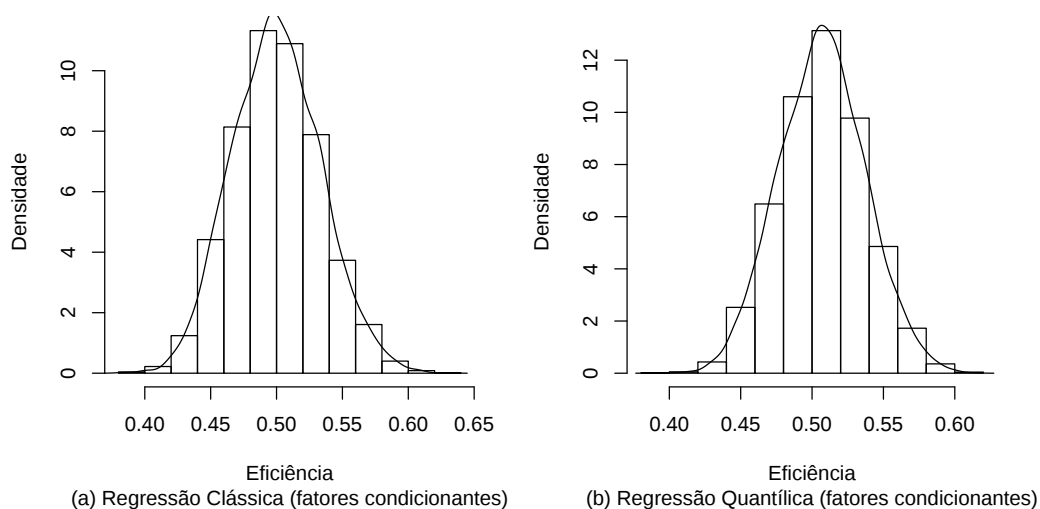


Figura 7.5: Histogramas das medidas de eficiência geradas pelos modelos de regressão clássica e quantílica com fatores condicionantes, a partir do DEA-BCC.

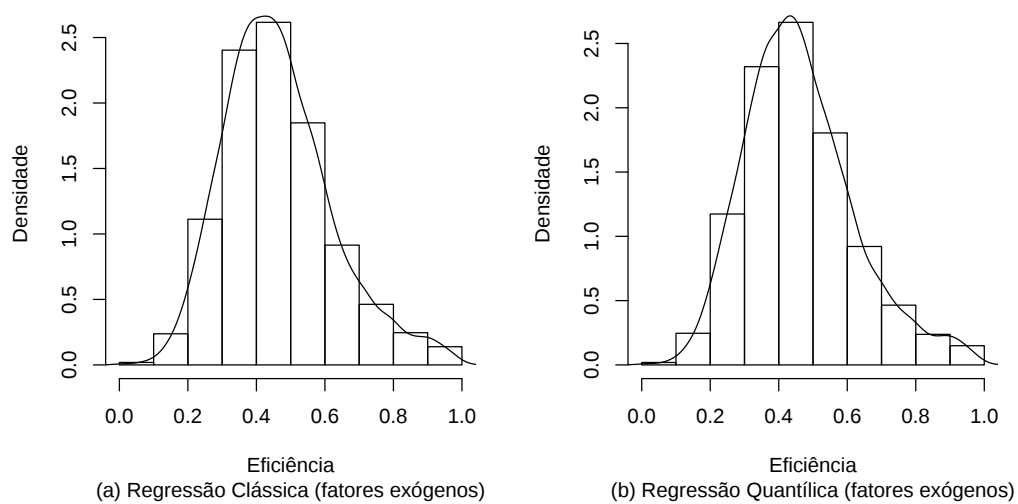


Figura 7.6: Histogramas das medidas de eficiência geradas pelos modelos de regressão clássica e quantílica com fatores exógenos, a partir do DEA-BCC.

Tabela 7.40: Coeficientes de correlação linear entre os métodos de regressão clássica e quantílica para a mediana, de acordo com os fatores.

Fatores	Coeficientes de correlação linear	
	A partir do DEA-CCR	A partir do DEA-BCC
Condicionantes	0.9918	0.9520
Exógenos	0.9971	0.9979

Tabela 7.41: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo DEA-BCC, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 $\vdash$ 0.2	0.2 $\vdash$ 0.4	0.4 $\vdash$ 0.6	0.6 $\vdash$ 0.8	0.8 $\vdash$ 1.0	1.0
Centro-Oeste	2	85	131	62	20	4
Goiás	0	39	43	27	8	1
Mato Grosso	2	39	51	17	3	0
Mato Grosso do Sul	0	7	37	18	9	3
Nordeste	10	319	827	320	59	21
Alagoas	1	17	61	18	2	0
Bahia	2	61	217	77	16	3
Ceará	0	34	107	29	3	1
Maranhão	0	6	70	59	8	6
Paraíba	5	67	101	20	5	2
Pernambuco	1	15	92	45	12	5
Piauí	0	41	88	38	7	2
Rio Grande do Norte	0	58	66	20	3	1
Sergipe	1	20	25	14	3	1
Norte	3	85	163	83	25	6
Acre	0	7	6	5	1	0
Amazonas	0	6	30	15	3	0
Amapá	0	1	4	4	0	1
Pará	0	15	50	31	10	1
Rondônia	0	7	23	15	2	0
Roraima	0	0	1	3	2	2
Tocantins	3	49	49	10	7	2
Sudeste	6	293	621	358	96	37
Espírito Santo	0	21	42	9	2	1
Minas Gerais	1	187	386	208	34	9
Rio de Janeiro	3	36	28	8	7	2
São Paulo	2	49	165	133	53	25
Sul	5	296	539	218	50	11
Paraná	1	75	189	95	22	6
Rio Grande do Sul	2	144	218	65	19	1
Santa Catarina	2	77	132	58	9	4
Total	26	1078	2281	1041	250	79

Tabela 7.42: Quantidade de municípios totalmente eficientes, segundo a eficiência técnica relativa com base no total de municípios de cada Estado, gerada pelo DEA-BCC, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Quantidade de municípios		
	Total	Eficientes	
		Absoluta	Relativa (%)
Centro-Oeste	304	4	1.32
Goiás	118	1	0.85
Mato Grosso	112	0	0.00
Mato Grosso do Sul	74	3	4.05
Nordeste	1556	21	1.35
Alagoas	99	0	0.00
Bahia	376	3	0.80
Ceará	174	1	0.57
Maranhão	149	6	4.03
Paraíba	200	2	1.00
Pernambuco	170	5	2.94
Piauí	176	2	1.14
Rio Grande do Norte	148	1	0.68
Sergipe	64	1	1.56
Norte	365	6	1.64
Acre	19	0	0.00
Amazonas	54	0	0.00
Amapá	10	1	10.00
Pará	107	1	0.93
Rondônia	47	0	0.00
Roraima	8	2	25.00
Tocantins	120	2	1.67
Sudeste	1411	37	2.62
Espírito Santo	75	1	1.33
Minas Gerais	825	9	1.09
Rio de Janeiro	84	2	2.38
São Paulo	427	25	5.85
Sul	1119	11	0.98
Paraná	388	6	1.55
Rio Grande do Sul	449	1	0.22
Santa Catarina	282	4	1.42
Total	4755	79	1.66

Tabela 7.43: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão clássica com fatores condicionantes a partir do DEA-BCC, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 ⊢ 0.2	0.2 ⊢ 0.4	0.4 ⊢ 0.6	0.6 ⊢ 0.8	0.8 ⊢ 1.0	1.0
Centro-Oeste	0	0	304	0	0	0
Goiás	0	0	118	0	0	0
Mato Grosso	0	0	112	0	0	0
Mato Grosso do Sul	0	0	74	0	0	0
Nordeste	0	1	1554	1	0	0
Alagoas	0	0	99	0	0	0
Bahia	0	0	376	0	0	0
Ceará	0	0	174	0	0	0
Maranhão	0	0	149	0	0	0
Paraíba	0	0	199	1	0	0
Pernambuco	0	0	170	0	0	0
Piauí	0	0	176	0	0	0
Rio Grande do Norte	0	1	147	0	0	0
Sergipe	0	0	64	0	0	0
Norte	0	0	365	0	0	0
Acre	0	0	19	0	0	0
Amazonas	0	0	54	0	0	0
Amapá	0	0	10	0	0	0
Pará	0	0	107	0	0	0
Rondônia	0	0	47	0	0	0
Roraima	0	0	8	0	0	0
Tocantins	0	0	120	0	0	0
Sudeste	0	2	1402	7	0	0
Espírito Santo	0	0	75	0	0	0
Minas Gerais	0	2	822	1	0	1
Rio de Janeiro	0	0	84	0	0	0
São Paulo	0	0	421	6	0	0
Sul	0	1	1117	1	0	0
Paraná	0	0	387	1	0	0
Rio Grande do Sul	0	1	448	0	0	0
Santa Catarina	0	0	282	0	0	0
Total	0	4	4742	9	0	0

Tabela 7.44: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão clássica com fatores exógenos a partir do DEA-BCC, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 ⊢ 0.2	0.2 ⊢ 0.4	0.4 ⊢ 0.6	0.6 ⊢ 0.8	0.8 ⊢ 1.0	1.0
Centro-Oeste	13	115	122	40	14	0
Goiás	6	45	46	16	5	0
Mato Grosso	7	54	43	5	3	0
Mato Grosso do Sul	0	16	33	19	6	0
Nordeste	31	539	741	195	50	0
Alagoas	3	31	55	8	2	0
Bahia	3	112	202	50	9	0
Ceará	1	56	98	17	2	0
Maranhão	1	30	77	31	10	0
Paraíba	17	105	59	15	4	0
Pernambuco	1	51	83	24	11	0
Piauí	0	66	77	27	6	0
Rio Grande do Norte	2	66	60	17	3	0
Sergipe	3	22	30	6	3	0
Norte	11	112	166	52	24	0
Acre	1	6	9	3	0	0
Amazonas	1	14	26	12	1	0
Amapá	0	3	4	2	1	0
Pará	1	20	56	21	9	0
Rondônia	1	9	28	7	2	0
Roraima	0	1	2	1	4	0
Tocantins	7	59	41	6	7	0
Sudeste	35	459	622	232	63	0
Espírito Santo	1	28	39	6	1	0
Minas Gerais	13	284	388	123	17	0
Rio de Janeiro	8	41	23	7	5	0
São Paulo	13	106	172	96	40	0
Sul	32	447	472	136	31	1
Paraná	3	126	186	60	13	0
Rio Grande do Sul	16	212	164	45	12	0
Santa Catarina	13	109	122	31	6	1
Total	122	1672	2123	655	182	1

Tabela 7.45: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão quantílica com fatores condicionantes a partir do DEA-BCC, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 ⊢ 0.2	0.2 ⊢ 0.4	0.4 ⊢ 0.6	0.6 ⊢ 0.8	0.8 ⊢ 1.0	1.0
Centro-Oeste	0	0	304	0	0	0
Goiás	0	0	118	0	0	0
Mato Grosso	0	0	112	0	0	0
Mato Grosso do Sul	0	0	74	0	0	0
Nordeste	0	1	1555	0	0	0
Alagoas	0	0	99	0	0	0
Bahia	0	0	376	0	0	0
Ceará	0	0	174	0	0	0
Maranhão	0	0	149	0	0	0
Paraíba	0	0	200	0	0	0
Pernambuco	0	0	170	0	0	0
Piauí	0	0	176	0	0	0
Rio Grande do Norte	0	1	147	0	0	0
Sergipe	0	0	64	0	0	0
Norte	0	0	365	0	0	0
Acre	0	0	19	0	0	0
Amazonas	0	0	54	0	0	0
Amapá	0	0	10	0	0	0
Pará	0	0	107	0	0	0
Rondônia	0	0	47	0	0	0
Roraima	0	0	8	0	0	0
Tocantins	0	0	120	0	0	0
Sudeste	0	0	1407	4	0	0
Espírito Santo	0	0	75	0	0	0
Minas Gerais	0	0	825	0	0	0
Rio de Janeiro	0	0	84	0	0	0
São Paulo	0	0	423	4	0	0
Sul	0	0	1119	0	0	0
Paraná	0	0	388	0	0	0
Rio Grande do Sul	0	0	449	0	0	0
Santa Catarina	0	0	282	0	0	0
Total	0	1	4750	4	0	0

Tabela 7.46: Quantidade de municípios, segundo a eficiência técnica gerada pelo método de regressão quantílica com fatores exógenos a partir do DEA-BCC, por unidade da federação (UF) e por região.

Região UF	Eficiência técnica					
	0.0 ⊢ 0.2	0.2 ⊢ 0.4	0.4 ⊢ 0.6	0.6 ⊢ 0.8	0.8 ⊢ 1.0	1.0
Centro-Oeste	9	120	122	40	13	0
Goiás	3	47	47	17	4	0
Mato Grosso	6	57	41	5	3	0
Mato Grosso do Sul	0	16	34	18	6	0
Nordeste	36	525	740	204	51	0
Alagoas	4	31	54	8	2	0
Bahia	3	109	202	53	9	0
Ceará	1	57	98	16	2	0
Maranhão	1	27	73	38	10	0
Paraíba	19	103	59	15	4	0
Pernambuco	1	50	82	25	12	0
Piauí	0	62	80	28	6	0
Rio Grande do Norte	4	63	64	14	3	0
Sergipe	3	23	28	7	3	0
Norte	9	114	166	50	25	1
Acre	1	6	9	3	0	0
Amazonas	1	13	28	10	2	0
Amapá	0	2	5	2	0	1
Pará	0	25	52	21	9	0
Rondônia	1	8	28	8	2	0
Roraima	0	0	3	1	4	0
Tocantins	6	60	41	5	8	0
Sudeste	39	458	621	228	65	0
Espírito Santo	1	28	39	6	1	0
Minas Gerais	14	287	384	122	18	0
Rio de Janeiro	11	40	21	7	5	0
São Paulo	13	103	177	93	41	0
Sul	33	444	476	137	29	0
Paraná	3	122	188	63	12	0
Rio Grande do Sul	16	211	170	41	11	0
Santa Catarina	14	111	118	33	6	0
Total	126	1661	2125	659	183	1

Capítulo 8

Conclusões

A presente dissertação teve como objetivo a avaliação estatística da eficiência do gasto público municipal no Brasil, principalmente no que tange ao impacto da idade do município e dos fatores externos à referida eficiência. Para tal, foi utilizado como base o trabalho desenvolvido por Sampaio de Sousa, Cribari-Neto e Stošić (2003), que abordaram a análise envoltória de dados (DEA-CCR e DEA-BCC), métodos de reamostragens (“jackknife”, “bootstrap” e “jackstrap”), além de regressão clássica e regressão quantílica.

As principais conclusões estão sumariadas a seguir:

- Os métodos não-paramétricos DEA-CCR e DEA-BCC se mostraram eficazes no cálculo das eficiências técnicas de municipalidades brasileiras, principalmente com o uso do esquema “jackstrap”. Por sua vez, essas medidas de eficiência se revelaram bastantes úteis, como variáveis dependentes, nos modelos paramétricos aqui utilizados: regressão clássica e regressão quantílica.
- De uma forma geral, os modelos de regressão clássica e quantílica na mediana obtidos a partir do DEA-CCR e do DEA-BCC apresentaram resultados semelhantes. Contudo, a regressão quantílica, por atuar em diferentes quantis, mostrou-se mais elucidativa, uma vez que a análise dos seus resultados transcendeu os limites das medidas de centralidade.
- Os fatores exógenos exercem fortes influências nas eficiências geradas pelos modelos estimados através dos fatores condicionantes, chegando a ser responsáveis, em alguns casos, por mais de 50% da eficiência dos municípios. Como os fatores externos não são, em quase sua totalidade,

possíveis de serem controlados, conclui-se, então, que oferecer serviços de boa qualidade à população, por parte desses municípios, não é uma tarefa fácil.

- Dos indicadores de localização, o efeito da vizinhança entre as cidades e do município situado no polígono da seca se apresentam estatisticamente significativos em todos os modelos analisados. Contudo, o primeiro exerce um efeito positivo e, o segundo, como esperado, causa impacto negativo. Assim, por razões diferentes, sempre devem ser levados em consideração nas avaliações municipais.
- Os municípios mais pobres tendem a administrar melhor seus escassos recursos. Esta afirmativa tem suporte no percentual de domicílios cujo chefe ganha até um salário mínimo e na renda média do trabalhador, que são estatisticamente significativos.
- Os indicadores administrativos são importantes na avaliação do município. Quanto maior o poder dos conselhos municipais e quanto maior o grau de informatização do município, maior é a tendência dessas cidades prestarem bons serviços à comunidade. Isto porque os conselhos fiscalizam a aplicação dos recursos, diminuindo a corrupção e o abuso na distribuição de verbas, enquanto que o uso de recursos computacionais agiliza processos e diminui custos. Entretanto, os consórcios municipais, ao contrário do que se esperava, têm impacto negativo, o que sugere uma reformulação dos mesmos para que o objetivo de minimização de gasto volte a ser atingido.
- A estratégia administrativa para o recebimento de *royalties* deve ser revista pelos municípios, visto que esta receita afeta negativamente a eficiência administrativa em todos os modelos estudados, inclusive nos diversos quantis da regressão quantílica.
- Os resultados relativos à idade do município, objeto central dessa dissertação, confirmam que a falta de estrutura administrativa e de experiência em gestão pública onera os municípios jovens, tornando-os ineficientes. Os resultados mostram ainda que cidades criadas a partir de municípios pouco eficientes, ou mesmo ineficientes, tendem a operar ineficientemente, enquanto que a divisão de municípios que têm boa estrutura gerencial e experiência na gestão dos fundos municipais gera

novas municipalidades com potencial para oferecer bons serviços às suas populações. Assim, fica caracterizado o risco que há ao se criar cidades sem levar em consideração os critérios de eficiência tratados nesta dissertação.

Uma complementação e, até mesmo uma confirmação das análises realizadas neste trabalho pode ser concretizada através do modelo tobit, que devido a algumas de suas características se presta ao tipo de avaliação ora proposta.

Bibliografia

- [1] Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Dordrecht: Kluwer.
- [2] Banker, R.D., Charnes, A. e Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30:1078-1092.
- [3] Banker, R.D. e Gifford, J.L. (1988). A relative efficiency method for the evaluation of public health nurse productivity. Mimeo.
- [4] Barbancho, A. G. (1970). *Fundamentos e Possibilidades da Econometria*. Rio de Janeiro: Forum.
- [5] Basset, G. e Koenker, R. (1982). An empirical quantile function for linear models with i.i.d. errors. *Journal of the American Statistical Association*, 77:407-415.
- [6] Buchinsky, M. (1994). Changes in the U.S. wage structure 1963-1987: application of quantile regression. *Econometrica*, 62:405-458.
- [7] Buchinsky, M. (1997). Recent advances in quantile regression: a practical guideline for empirical research. *Journal of Human Resources*, 33:88-126.
- [8] Charnes, A., Cooper, W.W. e Ferguson, R. (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science*, 1:138-151.
- [9] Charnes, A., Cooper, W.W. e Rhodes, E. (1978). Measuring efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 1:429-44.

- [10] Charnes, A., Cooper, W.W., Seiford, L.M. e Stutz, J. (1982). A multiplicative model for efficiency analysis. *Socio-economic Planning Sciences*, 16:223-224.
- [11] Cribari-Neto, F. (2004). Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form. *Computational Statistics and Data Analysis*, 45:215-233.
- [12] Cribari-Neto, F. e Zarkos, S. (2004). Leverage-adjusted heteroskedastic bootstrap methods. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 74:215-232.
- [13] Davidson, R. & MacKinnon, J.G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*. New York: Oxford University Press.
- [14] Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19:273-292.
- [15] Devroye, L. e Krzyzak, A. (1999). On the Hilbert kernel density estimate. *Statistics and Probability Letters*, 44:299-308.
- [16] Eicker, F. (1963). Asymptotic normality and consistency of the least squares estimators for families of linear regressions. *Annals of Mathematical Statistics*, 34:447-456.
- [17] Eicker, F. (1967). Limit theorems for regression with unequal and dependent errors. In: *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley: University of California press, 1:59-82.
- [18] Farrell, M.J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of Royal Statistical Society A*, 120:253-281.
- [19] Greene, W.H. (1981). On the asymptotic bias of the ordinary least squares estimator of the tobit model. *Econometrica*, 49:505-513
- [20] Gujarati, D.N. (2000). *Econometria Básica*. São Paulo: Makron Books.
- [21] Gutenbrunner, C., Jurečková, J., Koenker, R. e Portnoy, S. (1993). Test of linear hypotheses based on regression rank scores. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2:307-331.

- [22] Hall, P. e Sheather, S.J. (1988). On the distribution of a Studentized quantile. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 50:381-391.
- [23] Hendricks, W. e Koenker, R. (1992). Hierarchical Spline Models for Conditional Quantiles and the Demand for Electricity. *Journal of the American Statistical Association*, 87:58-68.
- [24] Hinkley, D.V. (1977). Jackknifing in unbalanced situations. *Technometrics*, 19:285-292.
- [25] Hoel, P.G., Port, S.C., e Stone, C.J. (1978). *Introdução à Teoria das Probabilidades*. Rio de Janeiro: Interciência.
- [26] Horn, S.D., Horn, R.A. & Duncan, D.B. (1975). Estimating heteroskedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, 70:380-385.
- [27] Huber, P.J. (1967). The behavior of maximum likelihood estimates under non-standard conditions. In: *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkley: University of California press, pp. 221-233.
- [28] Hušková, M. (1994). Some sequential procedures based on regression rank scores. *Journal of Nonparametric Statistics*, 3:285-298.
- [29] Koenker, R. e Basset, G. (1978). Regression quantiles. *Econometrica*, 46:33-50.
- [30] Koenker, R. e Machado, J. (1999). Goodness of fit and related inference process for quantile regression. *Journal of the American Statistical Association*, 94:1296-1310.
- [31] Koenker, R. e Portnoy, S. (1996). Quantile regression. *University of Illinois at Urbana-Champaign Working Paper*, 97-100.
- [32] Koopmans, T.C. (1951). An analysis of production as an efficient combination of activities. In: *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission for Research in Economics. New York: John Wiley and Sons.

- [33] Maciel, M.C. (2001). *A Dinâmica das Mudanças na Distribuição Salarial e no Retorno à Educação para Mulheres: Uma Aplicação de Regressão Quantílica*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Estatística, Universidade Federal de Pernambuco.
- [34] MacKinnon, J.G. & White, H. (1985). Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite-sample properties. *Journal of Econometrics*, 29:305-25.
- [35] Matos, O.C. (2000). *Econometria Básica: Teoria e Aplicações*, 3ª ed. São Paulo: Atlas.
- [36] Mood, A.M., Graybill, F.A. e Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, 3ª ed. New York: McGraw-Hill.
- [37] Powell, J.L. (1986). Censored regression quantiles. *Journal of Econometrics*, 32:143-155.
- [38] Puccine, A.L. (1989). *Introdução à Programação Linear*. Rio de Janeiro: LTC.
- [39] Sampaio de Sousa, M.C., Cribari-Neto, F. e Stošić, B. D. (2003). Explaining DEA technical efficiency scores in an outlier corrected environment: the case of public services in Brazilian municipalities. Texto para discussão, Universidade de Brasília.
- [40] Seaver, B.L. e Triantis, K.P. (1989). The implications of using messy data to estimate production-frontier-based technical efficiency measures. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7:49-59.
- [41] Siddiqui, M. (1960). Distribution of quantiles from a bivariate population. *Journal of Research of the National Bureau of Standards B*, 64:145-150.
- [42] Souza, T.C. (2004). *Inferência em Modelos Heteroscedásticos na Presença de Pontos de Alavanca*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Estatística, Universidade Federal de Pernambuco.
- [43] Stošić, B.D. e Sampaio de Souza, M.C. (2003). Jackstrapping DEA scores for robust efficiency measurement. *Anais do XXV Encontro Brasileiro de Econometria*, 2:1525-1540.

- [44] Tobin. J. (1958). Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables. *Econometrica*, 26:24-36.
- [45] White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48:817–838.
- [46] Wilson, P. (1993). Detecting influential observations in data envelopment analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 6:27-45.
- [47] Wilson, P. (1995). Detecting influential observations in deterministic non-parametric frontiers models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 11:319-323.