
CORREÇÃO DE VIÉS DO ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA PARA A FAMÍLIA EXPONENCIAL BIPARAMÉTRICA

GILSON BARBOSA DOURADO

Orientador: Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Área de concentração: Estatística Matemática

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal
de Pernambuco para obtenção do grau de Mestre em Estatística

Recife, fevereiro de 2004

Universidade Federal de Pernambuco

Mestrado em Estatística

16 de fevereiro de 2004

(di)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Gilson Barbosa Dourado

titulada

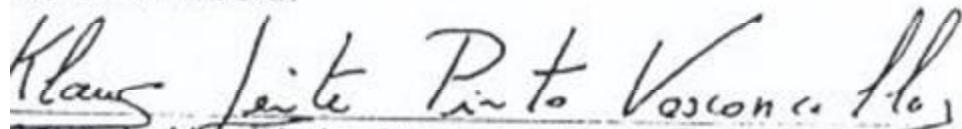
Correção de viés do estimador de máxima verossimilhança para a família
exponencial biparamétrica

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau
de Mestre em Estatística.

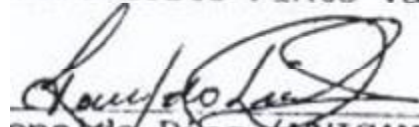


Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

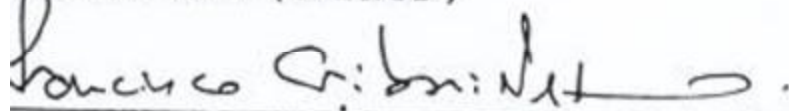
Examinadora:



Klaus Leite Pinto Vasconcellos orientador



Leonardo Dias (UNICAMP)



Francisco Cribari Neto

Computers are useless. They can only give yor answers.
— Pablo Picasso

Agradecimentos

A Deus, cujo nome é Jeová, pois sem ele seria impossível a realização deste trabalho.

A meus pais, pelo apoio e incentivo. Aos meus irmãos, Jaciara, Jussara e Gilvã, pelo amor, carinho e amizade.

Ao meu orientador, Klaus Vasconcellos, pela paciência e confiança.

Aos meus colegas de mestrado, que se tornaram não só colegas mas verdadeiros amigos. Em especial, a Sílvia, a Patrícia, Tatiane e Tarciana, não desmerecendo os demais. A Sílvia, pelo belo exemplo de respeito e confiança; a Patrícia, por sua amizade, confiança e sinceridade; a Tatiane, pela alegria e carinho; e a Tarciana, pela amizade e respeito.

Aos meus amigos e colegas, Felipe, Ricardo e Raydonal, pela amizade, respeito e compreensão.

A todos os colegas de mestrado, Patrícia Espinheiro, Michelli, Diana, Heráclito, Amanda, Júnior, André, Sandra Rêgo, Sandra Pinheiro, Gecynalda, Andréa, Tatiane e Renata.

Aos professores do Programa de Mestrado em Estatística da UFPE, pela credibilidade e por sua contribuição à minha formação estatística.

A Valéria, pela competência, disponibilidade e compreensão.

Ao Coordenador da Pós-Graduação em Estatística, Francisco Cribari Neto, pelo apoio e ajuda.

A meu grande amigo Reginaldo, pela amizade, respeito e companheirismo.

A todos que participaram direta ou indiretamente na realização deste sonho. A meus amigos da Congregação Engenho do Meio.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Os estimadores de máxima verossimilhança são, em geral, viesados para o verdadeiro valor do parâmetro. Normalmente, o viés é desprezado com base na alegação de que ele é desprezível comparado aos erros padrão das estimativas. Em uma amostra de tamanho n , o viés em geral é de ordem $O(n^{-1})$, enquanto que o desvio padrão é de ordem $O(n^{-1/2})$. Apesar do viés não constituir um problema sério se o tamanho da amostra for razoavelmente grande, em amostras onde o tamanho não é suficientemente grande o viés pode ser significativo.

Dada a grande importância do estimador de máxima verossimilhança, muitas técnicas foram desenvolvidas para corrigir o viés destes estimadores em pequenas amostras. O objetivo desta dissertação é apresentar algumas técnicas que concentram na remoção do viés de segunda ordem para estimadores de máxima verossimilhança na família exponencial biparamétrica, o que pode ser feito tanto de forma analítica como numérica. Apresentaremos três procedimentos para correção do viés de segunda ordem das estimativas de máxima verossimilhança. O primeiro procedimento é baseado na expressão do viés de segunda ordem obtida por Cox e Snell (1968), onde o estimador corrigido será dado pela diferença entre o estimador de máxima verossimilhança e o viés de segunda ordem calculado usando o estimador original. Uma segunda metodologia utilizada para corrigir o estimador de máxima verossimilhança foi introduzida por Firth (1993). Este método consiste na modificação da função escore com o objetivo de remover o termo de ordem n^{-1} do viés do estimador de máxima verossimilhança. Um terceiro procedimento para a correção do viés de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança é baseado na estimação numérica do viés através de um esquema de reamostragem bootstrap, onde o viés é estimado como a diferença entre o valor médio das estimativas de máxima verossimilhança nas réplicas de bootstrap e a estimativa original. Derivamos a expressão do viés dos estimadores de máxima verossimilhança para a formula de Cox e Snell (1968). Comprovamos a similaridade entre os métodos corretivo e preventivo, que demonstraram desempenho superior na redução do viés e do erro quadrático médio em comparação aos estimadores originais e bootstrap.

Abstract

Maximum likelihood estimators are typically biased. There are several different ways to correct this problem. The chief goal of this dissertation is to present some of them, which focus on removing the second order bias of maximum likelihood estimators in the biparametric exponential family. This may be done by analytical or numerical procedures. We will present three of these procedures; a correction method, a preventive method and a bootstrap correction method. We observe that the first two methods produce similar results in our specific problem; the performance of these estimators was much better than that of the original estimators and that of the estimator obtained by bootstrap methods.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
1.2	Família exponencial biparamétrica	3
1.3	Estimação por máxima verossimilhança	4
1.4	Organização da dissertação	7
1.5	Suporte computacional	7
2	Correção de Viés para Família Exponencial Biparamétrica	8
2.1	Viés de segunda ordem	8
2.2	Estimadores corrigidos	10
2.3	Viés para família exponencial biparamétrica	13
2.4	Casos particulares	16
2.4.1	Distribuição gama	16
2.4.2	Distribuição normal inversa	19
2.4.3	Distribuição log-gama	21
2.4.4	Distribuição log-beta-inversa	23
3	Resultados Numéricos	27
3.1	Introdução	27
3.2	Distribuição gama	28
3.3	Distribuição normal inversa	30
3.4	Distribuição log-gama	32
3.5	Distribuição log-beta-inversa	34
4	Conclusão	56
◇	Apêndice	57
◇	Referências	68

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Durante os últimos anos, duas das características que marcaram a Estatística aplicada e teórica foram a importância da família exponencial de distribuições de probabilidade na construção de modelos e a função de verossimilhança na Inferência Estatística. Muitos dos modelos comumente utilizados na Estatística são baseados em distribuições de probabilidade que têm características especiais em comum. Tais distribuições podem ser agrupadas em várias famílias. A mais importante delas é chamada de *família exponencial*. Esta família tem várias propriedades estatísticas importantes que desempenham um papel central na Inferência Estatística, além da facilidade de manipulação matemática.

A família exponencial pode ser classificada de acordo com o número de parâmetros (uniparamétrica, biparamétrica, etc) ou número de variáveis (univariada, bivariada, etc.). Muitas distribuições, como normal, binomial, binomial negativa, gama, Poisson, beta, normal inversa, etc., podem ser reunidas na chamada família exponencial univariada. Posteriormente, muitos outros aspectos dessa família foram descobertos e tornaram-se importantes na teoria estatística. Muitos estudos foram desenvolvidos utilizando a família exponencial, como por exemplo, os modelos lineares generalizados (MLG) propostos por Nelder e Wedderburn (1972). A idéia básica dos MLG consiste em abrir um leque de opções para a distribuição da variável resposta, permitindo que a mesma pertença à família exponencial de distribuições, bem como dar maior flexibilidade para a relação funcional entre a média da variável resposta e o preditor linear.

No presente trabalho estudaremos a família exponencial biparamétrica, apresentando a fórmula geral proposta por Lindsay (1986) que utiliza a propriedade de que, dada a densidade de uma família exponencial uniparamétrica arbitrária, podemos construir, a partir de uma distribuição mista uniparamétrica, uma classe de distribuições na família exponencial com dois ou mais parâmetros, isto é feito utilizando a família reponderada infinitamente divisível como uma distribuição misturadora. Dizemos que uma distribuição F é infinitamente di-

visível se para cada n existe uma distribuição F_n tal que $F = F_n^n$, ou seja, F é infinitamente divisível se e somente se para cada n pudermos representá-la como distribuição de uma soma $S_n = X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$ de n variáveis aleatórias independentes com distribuição comum F_n . Para mais detalhes sobre distribuições infinitamente divisíveis; ver Dudewicz *et al.* (1998, p. 330). Com base nesta classe, muitos estudos foram desenvolvidos. Por exemplo, Gelfand e Dalal (1990) estudaram o problema da superdispersão e Dey, Gelfand e Peng (1997) criaram uma classe de modelos lineares generalizados com superdispersão.

O problema proposto por Lindsay em 1986 pode ser visto do seguinte modo: suponha que temos uma família exponencial de densidades da variável aleatória X com a forma

$$f(x; \tau) = e^{\tau x + k(\tau)}, \quad \tau \in \Omega, \quad (1.1)$$

onde Ω representa o espaço paramétrico; buscamos uma família de distribuições $Q(\cdot; \alpha, \beta)$ com suporte no espaço paramétrico Ω tal que para determinadas funções $T(X)$ e $k(\alpha, \beta)$ tenhamos

$$f(x; \alpha, \beta) =_{\text{def}} \int f(x; \tau) dQ(\tau; \alpha, \beta) = e^{\alpha x + \beta T(x) - k(\alpha, \beta)} \quad (1.2)$$

que neste caso será obtida por uma distribuição infinitamente divisível. A classe conveniente de funções $T(\cdot)$ será a função geradora de momentos da distribuição infinitamente divisível.

Uma vantagem de utilizarmos o modelo (1.2) está na possibilidade de estudar a superdispersão. Dizemos que um modelo apresenta superdispersão quando a variância amostral aparenta ser muito grande em comparação àquela que é dada pelo modelo. Este é um problema bastante comum pois, muitas vezes, distribuições de dados amostrais podem ser muito heterogêneas para ser explicadas por uma família uniparamétrica de modelos no sentido de que a relação média-variância implícita em tal família parece ser violada através dos dados; a variância amostral é grande comparada com aquela que é predita através da relação média-variância. Neste caso, uma solução seria considerar uma coleção maior de modelos, digamos uma família biparamétrica (Gelfand e Dalal, 1990). Além deste modelo resolver o problema da superdispersão, o mesmo possui outras vantagens, como, por exemplo, a flexibilidade da escolha da função $T(\cdot)$ via seleção da família de parâmetros $Q(\cdot; \alpha, \beta)$ e a relação $k'(\tau) = E[X; \tau]$. Apesar das suas vantagens esta família apresenta algumas desvantagens como a de requerer integração numérica para estimação de máxima verossimilhança.

1.2 Família exponencial biparamétrica

Sejam $X_1, \dots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Dizemos que X_i , $i = 1, \dots, n$, pertence à família exponencial biparamétrica $\mathcal{F}$ proposta por Lindsay (1986) se a sua função de densidade (ou distribuição de probabilidade) com relação a alguma medida puder ser escrita da seguinte forma:

$$f(x; \theta, \tau) = b(x) \exp\{\theta x + \tau T(x) - \rho(\theta, \tau)\}, \quad (1.5)$$

onde se X_i for contínua, f é assumida densidade com respeito à medida de Lebesgue, enquanto se X_i for discreta, f é assumida densidade com respeito a uma medida de contagem. Supomos que $\rho(., .)$ é uma função conhecida que só depende de θ e τ e que possui as quatro primeiras derivadas contínuas em relação aos componentes do vetor de parâmetros (θ, τ) e que o espaço paramétrico é $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Os parâmetros θ e τ em (1.5) não são sempre interpretáveis estatisticamente. A grande motivação do modelo (1.5) reside na definição de Modelos Lineares Generalizados com superdispersão (Dey, Gelfand e Peng, 1997). Além disso, a forma conveniente da expressão torna o cálculo dos cumulantes necessário ao desenvolvimento de métodos assintóticos de segunda ordem bastante simples.

Um caso especial de (1.5) é a família exponencial uniparamétrica onde tomamos $\tau = 0$, dada por

$$f(x; \theta) = b(x) \exp\{\theta x - \mathcal{X}(\theta)\}. \quad (1.6)$$

Em (1.6) temos $\mathcal{X}'(\theta) = E(X)$, a média de X , e a variância de X é $\mathcal{X}''(\theta)$. Temos ainda $\eta = \mathcal{X}(\cdot)$ estritamente convexa.

Definindo-se $\rho^{(r,s)} = \partial \rho^{r+s} / \partial \theta^r \partial \tau^s$ temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \rho^{(1,0)} &= E(X; \theta, \tau), \\ \rho^{(0,1)} &= E(T(X); \theta, \tau), \\ \rho^{(1,1)} &= cov(X, T(X); \theta, \tau), \\ \rho^{(2,0)} &= var(X; \theta, \tau), \\ \rho^{(2,1)} &= E[\{X - E(X)\}^2 \{T(X) - E(T(X))\}; \theta, \tau], \end{aligned} \quad (1.7)$$

etc.

1.3 Estimação por máxima verossimilhança

Considere, como resultado de um experimento qualquer, a observação $\underline{x}$ de um vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, discreto ou contínuo, com distribuição de probabilidade pertencendo a alguma família $\mathcal{P}$ especificada a menos de um vetor finito de parâmetros $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ desconhecido. Seja $f(\underline{x}; \underline{\theta})$ a função de probabilidade ou densidade de $\underline{X}$, envolvendo $\underline{\theta} \in \Theta$, onde $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ é o conjunto de valores possíveis para o vetor $\underline{\theta}$, denominado espaço paramétrico.

Sendo $\underline{\theta}$ desconhecido, estamos interessados em utilizar a observação $\underline{x}$ para obter informação a respeito de $\underline{\theta}$. Trataremos este problema de inferência via verossimilhança, supondo que a distribuição de $\underline{X}$ é determinada por alguma distribuição em $\mathcal{P}$.

Definimos a função de verossimilhança como tendo a expressão da função de probabilidade ou densidade conjunta do vetor aleatório $\underline{X}$. A função de verossimilhança é dada por $L(\underline{\theta}) = f(x_1, \dots, x_n; \underline{\theta})$, se $\mathcal{P}$ tem densidade f , ou $L(\underline{\theta}) = p(x_1, \dots, x_n; \underline{\theta})$, se $\mathcal{P}$ tem função de probabilidade p . A inferência por verossimilhança pode ser considerada como um processo de obtenção de informação sobre um vetor de parâmetros $\underline{\theta}$, a partir da amostra $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, através da função de verossimilhança $L(\underline{\theta})$.

Muito freqüentemente, as componentes de $\underline{X}$ são mutuamente independentes para todas as distribuições da família $\mathcal{P}$ e a função de verossimilhança de $\underline{\theta}$ reduz-se a

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \underline{\theta}). \quad (1.11)$$

Usualmente, trabalha-se com a log-verossimilhança, $\ell(\underline{\theta}) = \log L(\underline{\theta})$. No caso em que as variáveis aleatórias são independentes, a log-verossimilhança é da forma

$$\ell(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \underline{\theta}). \quad (1.12)$$

Se as variáveis aleatórias forem dependentes, a log-verossimilhança pode ser obtida a partir das funções de densidade (ou probabilidade) condicionais, se existirem.

A função de verossimilhança informa a ordem natural de preferência entre diversas possibilidades para $\underline{\theta}$. Um conjunto de dados é dito ser mais verossímil para um vetor $\underline{\theta}$ do que para $\underline{\theta}'$ se a verossimilhança associada a $\underline{\theta}$ for maior que a associada a $\underline{\theta}'$. O estatístico inglês R.A. Fisher (1925) propôs a noção de verossimilhança como um método de estimação e um critério para comparar duas hipóteses rivais a serem testadas. Deste modo, a verossimilhança é entendida como uma medida de crença racional ao tirarmos alguma conclusão baseada nos dados. Neste sentido, o método de máxima verossimilhança (MV)

objetiva escolher o valor do vetor $\boldsymbol{\theta}$ de parâmetros que fornece a chance mais provável de ocorrer novamente os mesmos dados que ocorreram. Assim, para estimador, escolhe-se aquele vetor de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança no espaço paramétrico Θ . Desta forma, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que maximiza $L(\boldsymbol{\theta})$ em Θ , isto é, tal que $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq L(\boldsymbol{\theta})$ para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Ou seja, o EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é definido como a variável aleatória

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\operatorname{argmax}} L(\boldsymbol{\theta}), \quad (1.13)$$

se este existir.

Uma forma conveniente para estimar o vetor $\boldsymbol{\theta}$ pelo método da MV é tomar a log-verossimilhança. Como logaritmo é uma função monótona crescente, maximizar $L(\boldsymbol{\theta})$ é equivalente a maximizar $\ell(\boldsymbol{\theta})$. Então, o EMV é definido de modo que, para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$,

$$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \ell(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.14)$$

Todavia, é importante ressaltar que a solução de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ decorrente de (1.14) pode não ser única. O cálculo dos EsMV dependerá da distribuição definida por $f(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ e de Θ . Se Θ é um conjunto discreto, calcula-se $\ell(\boldsymbol{\theta})$ para os diversos $\boldsymbol{\theta}$'s e escolhe-se $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como aquele valor de $\boldsymbol{\theta}$ correspondente ao máximo de $\ell(\boldsymbol{\theta})$. Quando $\ell(\boldsymbol{\theta})$ é contínua e diferenciável em Θ , o EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode, na maioria das vezes, ser obtido resolvendo o sistema de equações $U(\boldsymbol{\theta}) = \partial \ell / \partial \theta_r = 0$, para $r = 1, \dots, p$, desde que $\boldsymbol{\theta}$ não se encontre na fronteira do espaço paramétrico.

Os EsMV apresentam algumas propriedades ótimas. Por exemplo, se a função de verossimilhança envolver estatísticas suficientes para $\boldsymbol{\theta}$, o EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ será função destas estatísticas suficientes. Em linhas gerais, o conceito de suficiência pode ser introduzido da seguinte forma: consideremos uma estatística $S = S(Y)$, $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, como função das variáveis amostrais $Y_1, \dots, Y_n$. Diremos que S é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ na família de distribuições definida por $\mathcal{P}$ se a distribuição condicional de $\mathcal{Y}$ dado S não envolve $\boldsymbol{\theta}$. A suficiência de S implica que toda a informação que os dados $\mathcal{Y}$ contêm sobre $\boldsymbol{\theta}$ está concentrada em S . Uma condição necessária e suficiente para esta suficiência é que a verossimilhança possa ser escrita na forma

$$L(\boldsymbol{\theta}) = g(s, \boldsymbol{\theta}) h(\mathcal{Y}),$$

onde $g(\cdot, \cdot)$ depende dos dados $\mathcal{Y}$ somente através de $s = s(\mathcal{Y})$, s é o valor observado de S , e $h(\mathcal{Y})$ é uma função dos dados que não envolve $\boldsymbol{\theta}$. Um fato decorrente desta condição é que se S é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$, qualquer função um a um de S também será suficiente. Uma

segunda propriedade importante é que os EsMV são, sob condições bastante gerais, assintoticamente eficientes. Outra, e talvez a mais importante propriedade, é que, sob condições bastante gerais, os EsMV são consistentes e assintoticamente normais,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, I(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1})$$

onde $\boldsymbol{\theta}_0$ é o valor verdadeiro do parâmetro e $I(\boldsymbol{\theta})$, conhecida como a informação de Fisher, é

$$I(\boldsymbol{\theta}) \equiv E_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right).$$

Para este trabalho, considere a sequência $\{X_n; n \geq 1\}$ de n variáveis aleatórias i.i.d. com função de densidade (ou distribuição de probabilidade) dada por (1.5). A função de verossimilhança para a família exponencial biparamétrica é dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n b(x_i) \exp\{\theta x_i + \tau T(x_i) - \rho(\theta, \tau)\}. \quad (1.15)$$

Logo, a função log-verossimilhança total $\ell(\theta, \tau)$, para os parâmetros θ e τ , terá a forma

$$\ell(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n \log b(X_i) + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n T(X_i) - n\rho(\theta, \tau). \quad (1.16)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ e $\hat{\tau}$ de θ e τ são obtidos maximizando a função (1.16) ou, equivalentemente, resolvendo o sistema de equações, $\partial \ell / \partial \theta = 0$ e $\partial \ell / \partial \tau = 0$. Os estimadores são solução do sistema

$$\begin{aligned} n\rho^{(1,0)}|_{\hat{\theta}, \hat{\tau}} &= \sum_{i=1}^n X_i, \\ n\rho^{(0,1)}|_{\hat{\theta}, \hat{\tau}} &= \sum_{i=1}^n T(X_i). \end{aligned} \quad (1.17)$$

A resolução do sistema (1.17) pode apresentar alguns problemas, pois nem sempre a solução tem forma fechada. Uma alternativa é utilizar métodos numéricos de maximização de funções. Vale ressaltar que os estimadores de máxima verossimilhança dependem apenas das estatísticas conjuntamente suficientes

$$\sum_{i=1}^n X_i \text{ e } \sum_{i=1}^n T(X_i).$$

1.4 Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos. Como já visto, no primeiro capítulo há uma breve introdução sobre a família exponencial biparamétrica, mostrando as características desta família, bem como a sua importância em estudos de superdispersão.

No segundo capítulo, abordaremos um problema comum com o estimador de máxima verossimilhança em pequenas amostras, o viés. Apresentaremos três metodologias para a correção do estimador de máxima verossimilhança com relação ao viés de segunda ordem. A primeira é baseada na proposta de subtrair o viés de segunda ordem avaliado no EMV, também conhecida como procedimento ‘corretivo’; a segunda é baseada na metodologia de David Firth (1993), ou procedimento ‘preventivo’, que consiste em reduzir o viés do estimador introduzindo um pequeno viés na função escore; a terceira é baseada na estimação numérica do viés em um esquema de reamostragem bootstrap, técnica introduzida por Efron em 1979.

No terceiro capítulo, discutiremos os comportamentos dos estimadores corrigidos através das metodologias empregadas. Com base em simulações de Monte Carlo, serão investigados os comportamentos dos estimadores utilizando quatro critérios de comparação: viés relativo, erro quadrático médio e duas medidas globais. Para conduzirmos tal investigação serão consideradas nove combinações de valores dos parâmetros.

1.5 Suporte computacional

Na realização deste trabalho foram utilizadas três software. O primeiro software foi o Maple, versão 8.0, utilizada para cálculos das expressões simplificadas dos vieses de θ e τ . O segundo software utilizada foi a linguagem de programação matricial **Ox**, criada por Jurgen Doornik em 1994, com suporte a orientação a objetos. Tal linguagem permite a implementação de técnicas estatísticas com facilidade e atende a requisitos como precisão e eficiência, o que contribui para a sua ampla utilização no campo da computação numérica. Em vista da sua eficiência computacional, todas as simulações deste trabalho foram feitas utilizando esta linguagem. Para mais detalhes sobre esta linguagem de programação, ver Doornik (2001). Para a apresentação gráfica, utilizamos o software R, que é baseada na linguagem de alto nível S desenvolvida para análise, manipulação e apresentação gráfica de dados.

Capítulo 2

Correção de viés para família exponencial biparamétrica

2.1 Viés de segunda ordem

Os estimadores de máxima verossimilhança são, em geral, viesados para o verdadeiro valor do parâmetro. Normalmente, o viés é desprezado com base na alegação de que ele é desprezível comparado ao erro padrão da estimativa. Apesar do viés não constituir um problema sério quando o tamanho da amostra é razoavelmente grande, em uma amostra cujo tamanho não seja suficientemente grande, o viés pode vir a ser significativo. Para uma amostra de tamanho n o viés é $O(n^{-1})$, enquanto que o desvio padrão é $O(n^{-1/2})$. Todavia, as estimativas produzidas pelos estimadores de máxima verossimilhança, em amostras pequenas ou moderadas, podem ter viés apreciável, de magnitude comparável ao erro padrão da estimativa de máxima verossimilhança. Daí a importância de obter alguma fórmula que reduza a magnitude do viés.

Em um modelo com parâmetro θ p -dimensional, o viés $E(\hat{\theta} - \theta)$ do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ pode ser escrito como

$$B(\hat{\theta}) = \frac{b_1(\theta)}{n} + \frac{b_2(\theta)}{n^2} + \dots, \quad (2.1)$$

onde $b_1(\theta), b_2(\theta)$, etc. são funções de θ e n é usualmente o número de observações. Sendo assim, observamos que $B(\hat{\theta}) = O(n^{-1})$. O termo $b_1(\theta)/n$ é chamado viés de segunda ordem do estimador $\hat{\theta}$.

Expressões para o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança estão amplamente disponíveis na literatura. Historicamente, o primeiro artigo a tratar do viés de segunda ordem foi de Bartlett (1953), que obteve uma expressão para o viés de ordem $O(n^{-1})$ para o estimador de máxima verossimilhança no caso uniparamétrico, num estudo sobre intervalos de confiança aproximados. Posteriormente, Haldane e Smith (1956) produziram expressões de ordem similar para os primeiros cumulantes dos estimadores de máxima verossimilhança. Shenton e Wallington (1962) desenvolveram a metodologia básica

para obter o viés de ordem $O(n^{-1})$ do EMV no contexto biparamétrico. Cox e Snell (1968) obtiveram o viés para uma ampla classe de modelos. Expressões para o viés do EMV até ordem $O(n^{-2})$ e covariâncias da mesma ordem, para o caso multiparamétrico, foram obtidas por Bowman e Shenton (1965) e Shenton e Bowman (1977).

Também, Cordeiro e MacCullagh (1991) e Cordeiro e Klein (1994) forneceram expressões gerais em forma matricial para o viés de segunda ordem em modelos lineares generalizados e em modelos ARMA, respectivamente. Ferrari, Botter, Cordeiro e Cribari-Neto (1996) deduziram o viés de ordem $O(n^{-1})$ do EMV em modelos gerais uniparamétricos e compararam a estimativa corrigida com o EMV usual, em termos de erro médio quadrático. Cribari-Neto, Botter, Cordeiro e Ferrari (1998) apresentaram, para distribuições pertencentes à família exponencial, expressões em forma fechada para os vieses de segunda e terceira ordem do EMV.

Cordeiro e Vasconcellos (1997) derivaram uma fórmula matricial para o viés nos modelos de regressão não-lineares multivariados homoscedásticos normais e Vasconcellos e Cordeiro (1997) generalizaram este resultado considerando modelos heteroscedásticos. Cordeiro e Cribari-Neto (1998) concluíram, através de estudos de simulação dos vieses em modelos não-exponenciais não-lineares, que os EsMV corrigidos pelo viés são mais precisos em termos de erro médio quadrático que as estimativas originais. Cordeiro e Vasconcellos (1999) apresentaram o viés de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros no modelo de regressão von Mises. Cribari-Neto e Vasconcellos (2001) analisaram três alternativas para correção de viés de segunda ordem para a distribuição beta, o procedimento corretivo, o procedimento de David Firth (1993) e a correção via bootstrap, comparando a performance dos estimadores para trinta e seis valores do vetor de parâmetros.

Muitas metodologias têm sido empregadas para retirar o termo de segunda ordem do viés do estimador de máxima verossimilhança, de forma analítica e numérica. O método numérico do bootstrap para correção do viés de segunda ordem, apesar de ser computacionalmente intenso, não requer o cálculo de $b_1(\theta)$ para a sua implementação. A metodologia analítica pode ser tanto de caráter “corretivo” quanto “preventivo”. A metodologia corretiva para correção de viés do estimador de máxima verossimilhança concentra-se na idéia de substituir $\hat{\theta}$ em $b_1(\theta)/n$ obtendo o estimador

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \frac{b_1(\hat{\theta})}{n}, \quad (2.2)$$

corrigido por viés até segunda ordem. Já a metodologia preventiva para correção de viés faz uma modificação adequada na função escore com o objetivo de remover o termo de ordem n^{-1} do viés do estimador de máxima verossimilhança (Firth, 1993).

2.2 Estimadores corrigidos

Dada a grande importância dos EsMV, muitas técnicas foram desenvolvidas para corrigir o viés destes estimadores em pequenas amostras. O nosso objetivo é apresentar algumas técnicas que se concentram na remoção do viés de segunda ordem, o que pode ser feito tanto de forma analítica como numérica. Apresentaremos três procedimentos para correção das estimativas de máxima verossimilhança, com base no viés de segunda ordem. Seja $\hat{\theta}$ o EMV de um certo parâmetro θ . Podemos escrever o viés deste estimador como

$$E(\hat{\theta} - \theta) = \frac{b_1(\theta)}{n} + O(n^{-2}), \quad (2.3)$$

onde o termo $b_1(\theta)/n$ é dito ser o viés de segunda ordem do estimador. Subtraindo-se o viés de segunda ordem avaliado em $\hat{\theta}$ do estimador de máxima verossimilhança, podemos definir o estimador corrigido

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - b_1(\hat{\theta})/n. \quad (2.4)$$

É possível mostrar que o viés de $\tilde{\theta}$ é tal que

$$E(\tilde{\theta} - \theta) = O(n^{-2}). \quad (2.5)$$

Na tentativa de encontrar uma expressão para o viés, Bartlett (1953), quando estudava intervalos de confiança para grandes amostras, propôs uma expressão simples para o viés de ordem n^{-1} do estimador de máxima verossimilhança em uma amostra aleatória simples com distribuição envolvendo apenas um parâmetro. Haldane e Smith (1956) discutiram expansões assintóticas para o viés dos estimadores de máxima verossimilhança lidando com amostras aleatórias com distribuição envolvendo um ou dois parâmetros desconhecidos. Posteriormente, Cox e Snell (1968) deduziram uma fórmula para o viés de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança do vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$, $q > 1$. A expressão obtida pode ser representada na forma

$$B_1(\hat{\theta}_a) = \sum_{r,s,t} \kappa^{a,r} \kappa^{s,t} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{rst} + \kappa_{rs,t} \right\}, \quad (2.6)$$

onde, r, s, t variam de 1 até q , $B_1(\hat{\theta}_a) = b_1(\hat{\theta}_a)/n$ e $\kappa_{rs} = E\{U_{rs}\}$, $\kappa_{rst} = E\{U_{rst}\}$, $\kappa_{rs,t} = E\{U_{rs}U_t\}$, onde $U_r = \partial\ell/\partial\theta_r$, $U_{rs} = \partial^2\ell/\partial\theta_r\partial\theta_s$, $U_{rst} = \partial^3\ell/\partial\theta_r\partial\theta_s\partial\theta_t$, são os cumulantes obtidos a partir de derivadas da log-verossimilhança ℓ . Os cumulantes (ou momentos) são todos de ordem $O(n)$. Mais ainda, $-\kappa^{ar}$ e $-\kappa^{st}$ são os elementos (a, r) e (s, t) de $K_\theta^{-1} = (-\kappa^{rs})$, a inversa da matriz de informação de Fisher $K_\theta = (-\kappa_{rs})$. A formula (2.6) é útil para calcular o viés $O(n^{-1})$ do estimador de máxima verossimilhança em situações bastante

gerais, permanecendo válida mesmo quando não há independência entre as observações, contanto que todos os κ 's sejam de ordem $O(n)$. Cordeiro e Klein (1994) desenvolveram uma expressão matricial para o viés em modelos lineares generalizados.

O estimador corrigido $\tilde{\theta}$ baseado na expressão (2.6) é definido como

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{B_1(\hat{\theta})}, \quad (2.7)$$

onde $\widehat{B_1(\hat{\theta})}$ significa $B_1(\hat{\theta})$ avaliado em $\hat{\theta}$. Espera-se que $\tilde{\theta}$ tenha melhores propriedades em amostras finitas que $\hat{\theta}$. No caso uniparamétrico, (2.6) reduz-se a

$$B_1(\hat{\theta}) = \left(\kappa_{\theta\theta}^{(\theta)} - \frac{1}{2} \kappa_{\theta\theta\theta} \right) \kappa_{\theta\theta}^{-2}, \quad (2.8)$$

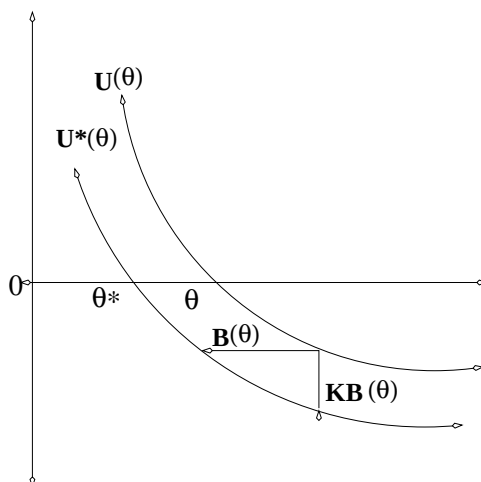
expressão dada por Bartlett (1953).

Uma diferente metodologia utilizada para corrigir o viés de segunda ordem foi introduzida por David Firth em 1993. O método consiste na modificação da função escore com o objetivo de remover o termo de ordem n^{-1} da expressão (2.1). Em problemas regulares o estimador de máxima verossimilhança é definido como uma solução da equação escore

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = U(\theta) = 0, \quad (2.9)$$

onde $\ell(\theta) = \log L(\theta)$ é o logaritmo da função de verossimilhança. A idéia do método proposto por David Firth consiste em reduzir o viés de $\hat{\theta}$ introduzindo um pequeno viés na função escore. A modificação para $U(\theta)$ pode ser explicada por uma simples geometria de triângulos, como ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Modificação da função escore.



Se $\hat{\theta}$ está sujeito a um viés positivo $B_1(\theta)$, a função escore é deslocada para baixo em cada ponto θ por uma quantidade $KB_1(\theta)$. Isto define a função escore modificada dada por

$$U^*(\theta) = U(\theta) - KB_1(\theta), \quad (2.10)$$

onde K é a matriz de informação de Fisher e $B_1(\theta)$ é o viés de segunda ordem. Então, o estimador de θ corrigido pelo viés de segunda ordem, digamos, θ^* , pode ser obtido como solução da equação $U^* = 0$. Em particular, quando $E[U_r U_{st}] = 0$, para todo r, s, t , pode-se verificar que θ^* pode ser obtido pela maximização do logaritmo da função de verossimilhança modificada

$$\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |K|. \quad (2.11)$$

Este é o caso, por exemplo, quando as derivadas de segunda ordem do logaritmo da função de verossimilhança com respeito aos parâmetros não dependem dos valores da amostra; isto acontece se θ é um parâmetro canônico da família exponencial de modelos. A proposta de Firth (1993) é preventiva, ao invés de corretiva, no sentido de modificar a equação escore, ou talvez, o logaritmo da função de verossimilhança, para produzir um estimador modificado, ao invés de corrigir a solução original da equação escore.

Um terceiro procedimento para a correção do viés de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança é baseado na estimação numérica do viés através de um esquema de reamostragem bootstrap, onde o viés é estimado pela diferença entre o valor médio do estimador de máxima verossimilhança das B réplicas de bootstrap e o estimador original. A técnica de reamostragem bootstrap introduzida por Efron (1979) tornou-se uma ferramenta bastante útil e alternativa para métodos estatísticos tradicionais, em circunstâncias em que outras técnicas não são aplicáveis, em particular, no caso em que o tamanho da amostra é pequeno, pois visa substituir as complexidades analíticas ou uso de aproximações assintóticas para determinados problemas.

O método bootstrap tenta realizar o que seria desejável realizar na prática; se possível, repetir o experimento. Este método consiste em, dada uma amostra $X = (X_1, \dots, X_n)$ com n observações, construir B amostras $X^{*(1)}, \dots, X^{*(B)}$ independentes e identicamente distribuídas de tamanho n , onde cada amostra é obtida da amostra original tal que todas as observações sejam retiradas com a mesma probabilidade. No caso do viés, seja $\hat{\theta}_{(.)}$ o valor médio dos estimadores de máxima verossimilhança obtidos das B réplicas de bootstrap, cada réplica baseada em uma pseudo-amostra de tamanho n do conjunto de dados original, usando amostragem com reposição. Sendo assim, a estimativa do viés do estimador $\hat{\theta}$ é

$$\widehat{B_1(\hat{\theta})} = \hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}. \quad (2.12)$$

Logo, o estimador corrigido pelo viés é dado por

$$\check{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{B_1(\hat{\theta})} = \hat{\theta} - (\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}) = 2\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(.)}. \quad (2.13)$$

Note que o estimador corrigido via bootstrap não requer derivação analítica do viés da função. Ferrari e Cribari-Neto (1998) discutem a relação entre o método analítico, baseado em expansões em série, e o método bootstrap, sendo os dois métodos válidos para a obtenção de correções de vieses dos EsMV.

2.3 Viés para família exponencial biparamétrica

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. cuja densidade comum tem a forma da função (1.5). Neste caso, teremos $q = 2$ e $\phi = (\theta, \tau)$. Portanto, a expressão (2.6) para o viés de segunda ordem proposta por Cox e Snell, no caso do vetor de parâmetros ϕ , fazendo a, r, s, t variarem em (θ, τ) , é dada por

$$B_1(\hat{\theta}) = \sum_{\theta, \tau} \kappa^{\theta, r} \kappa^{s, t} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{rst} + \kappa_{rs, t} \right\} \quad (2.14)$$

e

$$B_1(\hat{\tau}) = \sum_{\theta, \tau} \kappa^{\tau, r} \kappa^{s, t} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{rst} + \kappa_{rs, t} \right\}. \quad (2.15)$$

Desenvolvendo as expressões (2.14) e (2.15), teremos

$$\begin{aligned} B_1(\hat{\theta}) = & \kappa^{\theta, \theta} \kappa^{\theta, \theta} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\theta\theta} + \kappa_{\theta\theta, \theta} \right\} + \kappa^{\theta, \theta} \kappa^{\theta, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\theta\tau} + \kappa_{\theta\theta, \tau} \right\} + \\ & \kappa^{\theta, \theta} \kappa^{\tau, \theta} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\tau\theta} + \kappa_{\theta\tau, \theta} \right\} + \kappa^{\theta, \tau} \kappa^{\theta, \theta} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\theta\theta} + \kappa_{\tau\theta, \theta} \right\} + \\ & \kappa^{\theta, \theta} \kappa^{\tau, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\tau\tau} + \kappa_{\theta\tau, \tau} \right\} + \kappa^{\theta, \tau} \kappa^{\theta, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\theta\tau} + \kappa_{\tau\theta, \tau} \right\} + \\ & \kappa^{\theta, \tau} \kappa^{\tau, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\tau\tau} + \kappa_{\theta\tau, \tau} \right\} + \kappa^{\theta, \tau} \kappa^{\tau, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\tau\tau} + \kappa_{\tau\tau, \tau} \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} B_1(\hat{\tau}) = & \kappa^{\tau, \tau} \kappa^{\tau, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\tau\tau} + \kappa_{\tau\tau, \tau} \right\} + \kappa^{\tau, \tau} \kappa^{\tau, \theta} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\tau\theta} + \kappa_{\tau\tau, \theta} \right\} + \\ & \kappa^{\tau, \tau} \kappa^{\theta, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\theta\tau} + \kappa_{\tau\theta, \tau} \right\} + \kappa^{\tau, \theta} \kappa^{\tau, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\tau\tau} + \kappa_{\theta\tau, \tau} \right\} + \\ & \kappa^{\tau, \tau} \kappa^{\theta, \theta} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\tau\theta\theta} + \kappa_{\tau\theta, \theta} \right\} + \kappa^{\tau, \theta} \kappa^{\tau, \theta} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\tau\theta} + \kappa_{\theta\tau, \theta} \right\} + \\ & \kappa^{\tau, \theta} \kappa^{\theta, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\theta\tau} + \kappa_{\theta\theta, \tau} \right\} + \kappa^{\tau, \theta} \kappa^{\theta, \tau} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\theta\theta\tau} + \kappa_{\theta\theta, \tau} \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

No nosso caso as derivadas parciais são da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 U_\theta &= \frac{\partial \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n X_i - n\rho^{(1,0)}, & U_\tau &= \frac{\partial \ell(\theta, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n T(X_i) - n\rho^{(0,1)}, \\
 U_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = -n\rho^{(2,0)}, & U_{\theta\tau} &= \frac{\partial^2 \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta \partial \tau} = -n\rho^{(1,1)}, \\
 U_{\theta\theta\theta} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta^3} = -n\rho^{(3,0)}, & U_{\theta\theta\tau} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta^2 \partial \tau} = -n\rho^{(2,1)}, \\
 U_{\theta\tau\theta} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta \partial \tau \partial \theta} = -n\rho^{(1,2)}, & U_{\tau\theta\theta} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \tau \partial \theta^2} = -n\rho^{(2,1)}, \\
 U_{\theta\tau\tau} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \theta \partial \tau^2} = -n\rho^{(1,2)}, & U_{\tau\tau\theta} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \tau^2 \partial \theta} = -n\rho^{(1,2)}, \\
 U_{\tau\theta\tau} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \tau \partial \theta \partial \tau} = -n\rho^{(1,2)}, & U_{\tau\tau\tau} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta, \tau)}{\partial \tau^3} = -n\rho^{(0,3)}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Os momentos (cumulantes) de (2.18) seguem a notação canônica

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\theta\theta\theta} &= E(U_{\theta\theta\theta}), & \kappa_{\theta\theta,\theta} &= E(U_{\theta\theta}U_\theta), \\
 \kappa_{\theta\theta\tau} &= E(U_{\theta\theta\tau}), & \kappa_{\theta\theta,\tau} &= E(U_{\theta\theta}U_\tau), \\
 \kappa_{\theta\tau\theta} &= E(U_{\theta\tau\theta}), & \kappa_{\theta\tau,\theta} &= E(U_{\theta\tau}U_\theta), \\
 \kappa_{\tau\theta\theta} &= E(U_{\tau\theta\theta}), & \kappa_{\tau\theta,\theta} &= E(U_{\tau\theta}U_\theta), \\
 \kappa_{\theta\tau\tau} &= E(U_{\theta\tau\tau}), & \kappa_{\theta\tau,\tau} &= E(U_{\theta\tau}U_\tau), \\
 \kappa_{\tau\tau\theta} &= E(U_{\tau\tau\theta}), & \kappa_{\tau\tau,\theta} &= E(U_{\tau\tau}U_\theta), \\
 \kappa_{\tau\theta\tau} &= E(U_{\tau\theta\tau}), & \kappa_{\tau\theta,\tau} &= E(U_{\tau\theta}U_\tau), \\
 \kappa_{\tau\tau\tau} &= E(U_{\tau\tau\tau}), & \kappa_{\tau\tau,\tau} &= E(U_{\tau\tau}U_\tau).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para a obtenção dos cumulantes utilizaremos o fato de que $E\{\frac{\partial \ell}{\partial \phi}\} = 0$, ou seja, a esperança da função escore é igual a zero. Com base neste argumento temos as seguintes relações

$$E\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = n\rho^{(1,0)}$$

e

$$E\left\{\sum_{i=1}^n T(X_i)\right\} = n\rho^{(0,1)}.$$

Utilizando as relações acima, tem-se os cumulantes dados por

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\theta\theta\theta} &= -n\rho^{(3,0)}, \\
 \kappa_{\theta\tau\theta} &= \kappa_{\theta\tau\tau} = \kappa_{\tau\tau\theta} = \kappa_{\tau\theta\tau} = -n\rho^{(1,2)}, \\
 \kappa_{\theta\theta\tau} &= \kappa_{\tau\theta\theta} = -n\rho^{(2,1)}, \\
 \kappa_{\tau\tau\tau} &= -n\rho^{(0,3)},
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

enquanto que os cumulantes $\kappa_{\theta\theta,\theta} = \kappa_{\theta\theta,\tau} = \kappa_{\theta\tau,\theta} = \kappa_{\tau\theta,\theta} = \kappa_{\theta\tau,\tau} = \kappa_{\tau\tau,\theta} = \kappa_{\tau\theta,\tau} = \kappa_{\tau\tau,\tau}$ são iguais a zero. Assim, substituindo os valores dos cumulantes nas expressões (2.16) e (2.17), obtemos os vieses de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros θ e τ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 B_1(\hat{\theta}) &= \left(\frac{n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right)^2 \frac{1}{2}(-n\rho^{(3,0)}) + \left(\frac{-n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(2,1)}) + \\
 &\quad \left(\frac{-n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(2,1)}) + \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \left(\frac{-n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(2,1)}) + \\
 &\quad \left(\frac{n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(1,2)}) + \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right)^2 \frac{1}{2}(-n\rho^{(1,2)}) + \\
 &\quad \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right)^2 \frac{1}{2}(-n\rho^{(1,2)}) + \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(0,3)})
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 B_1(\hat{\tau}) &= \left(\frac{n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right)^2 \frac{1}{2}(-n\rho^{(0,3)}) + \left(\frac{-n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(1,2)}) + \\
 &\quad \left(\frac{-n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(1,2)}) + \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \left(\frac{-n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(1,2)}) + \\
 &\quad \left(\frac{n\rho^{(2,0)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(2,1)}) + \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right)^2 \frac{1}{2}(-n\rho^{(2,1)}) + \\
 &\quad \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right)^2 \frac{1}{2}(-n\rho^{(2,1)}) + \left(\frac{n\rho^{(1,1)}}{n^2D} \right) \left(\frac{n\rho^{(0,2)}}{n^2D} \right) \frac{1}{2}(-n\rho^{(3,0)}),
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $D = \rho^{(0,2)}\rho^{(2,0)} - (\rho^{(1,1)})^2$. Reescrevendo (2.21) e (2.22), os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos componentes de ϕ serão

$$B_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{2nD^2} \left[3\rho^{(0,2)}\rho^{(1,1)}\rho^{(2,1)} - 2(\rho^{(1,1)})^2\rho^{(1,2)} + \rho^{(1,1)}\rho^{(2,0)}\rho^{(0,3)} - \rho^{(0,2)}\rho^{(2,0)}\rho^{(1,2)} - \rho^{(3,0)}(\rho^{(0,2)})^2 \right]$$

e

$$B_1(\hat{\tau}) = \frac{1}{2nD^2} \left[3\rho^{(2,0)}\rho^{(1,1)}\rho^{(1,2)} - 2(\rho^{(1,1)})^2\rho^{(2,1)} + \rho^{(1,1)}\rho^{(0,2)}\rho^{(3,0)} - \rho^{(2,0)}\rho^{(0,2)}\rho^{(2,1)} - \rho^{(0,3)}(\rho^{(2,0)})^2 \right].$$

Sabendo-se a forma do viés de segunda ordem, os estimadores corrigidos pelo viés são dados pelas simples expressões abaixo

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - B_1(\hat{\theta}) \text{ e } \tilde{\tau} = \hat{\tau} - B_1(\hat{\tau}). \quad (2.23)$$

Uma segunda proposta para a correção dos estimadores de máxima verossimilhança pelo viés de segunda ordem é através da equação escore modificada introduzida por Firth (1993). Podemos ver da equação (1.16) que as derivadas de segunda ordem de $\ell(\theta, \tau)$ com respeito a θ e τ não envolvem as estatísticas $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n T(X_i)$. Portanto, estimadores corrigidos pelo viés de segunda ordem, usando a metodologia preventiva de David Firth, podem ser obtidos maximizando a função $\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |K|$. Para a distribuição exponencial biparamétrica, temos a seguinte função de verossimilhança modificada

$$\ell^*(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n b(X_i) + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n T(X_i) - n\rho(\theta, \tau) + \frac{1}{2} \log \left\{ n^2 \rho^{(2,0)} \rho^{(0,2)} - n^2 (\rho^{(1,1)})^2 \right\},$$

e os estimadores corrigidos de θ e τ serão θ^* e τ^* , as soluções do sistema

$$\rho^{(1,0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2n} \left\{ \frac{\rho^{(3,0)}\rho^{(0,2)} + \rho^{(2,0)}\rho^{(1,2)} - 2\rho^{(2,1)}}{\rho^{(2,0)}\rho^{(0,2)} - (\rho^{(1,1)})^2} \right\}, \quad (2.24)$$

$$\rho^{(0,1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i) + \frac{1}{2n} \left\{ \frac{\rho^{(0,3)}\rho^{(2,0)} + \rho^{(2,1)}\rho^{(0,2)} - 2\rho^{(1,2)}}{\rho^{(2,0)}\rho^{(0,2)} - (\rho^{(1,1)})^2} \right\}.$$

A terceira proposta utiliza o método de reamostragem bootstrap, já introduzido no item 2.2.

2.4 Casos particulares

Existe uma grande quantidade de distribuições que pertencem à família exponencial biparamétrica. No entanto, consideraremos apenas algumas delas: as distribuições gama, normal inversa, log-gama e a log-beta-inversa.

2.4.1 Distribuição Gama

A distribuição gama é bastante utilizada para análise de dados contínuos onde o coeficiente de variação, não a variância, é considerado constante. Seja X uma variável aleatória com

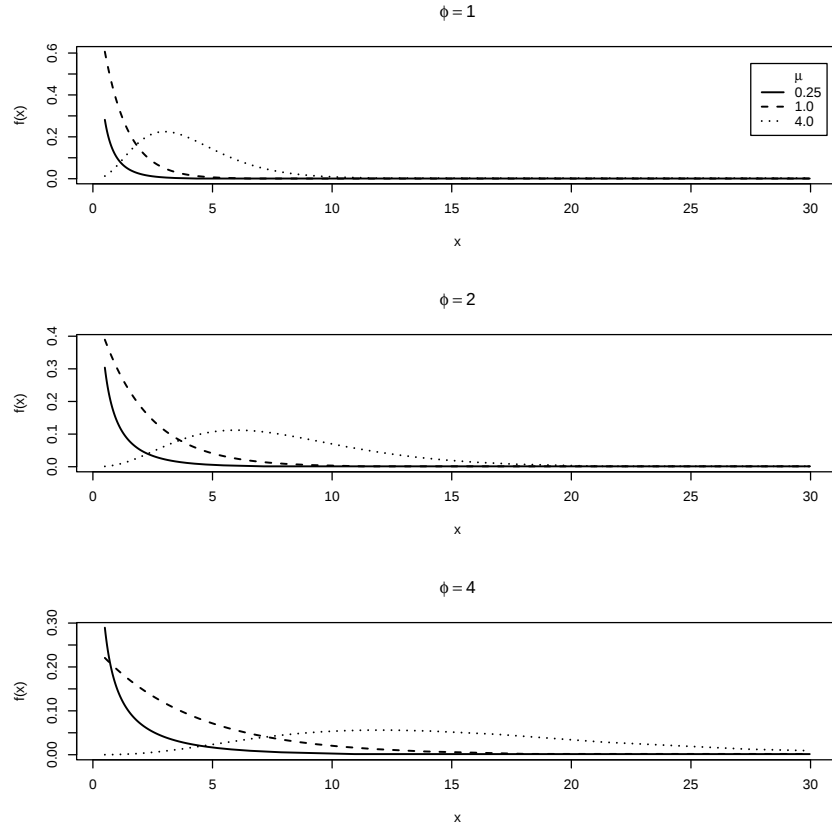
distribuição gama de média $\mu\phi$ e variância $\mu^2\phi$, $X \sim \text{Gama}(\phi, 1/\mu)$. A densidade de X é expressa na forma

$$\frac{\mu^{-\phi}}{\Gamma(\phi)} x^{\phi-1} e^{-x/\mu} = \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{x}{\mu} + \phi \log x - \log \left(\mu^\phi \Gamma(\phi) \right) \right\},$$

onde μ , ϕ e $x > 0$. Desta forma a distribuição de X pertence à família exponencial bi-paramétrica. A distribuição gama apresenta algumas particularidades: o caso em que $\phi = 1$ corresponde à distribuição exponencial; quando $\mu = n$ e $\phi = n/2$ obtemos a distribuição χ_n^2 ; temos ainda que o parâmetro ϕ determina a forma da distribuição e o coeficiente de assimetria é $\kappa_3/\kappa_2^{3/2} = 2\phi^{-1/2}$; a distribuição gama é assintoticamente normal no sentido de que $\frac{(X-\mu\phi)}{\sqrt{\phi}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mu^2)$, quando $\phi \rightarrow \infty$.

Algumas propriedades típicas da distribuição gama são mostradas na Figura 2.2. Podemos observar que, à medida que μ aumenta, a forma da curva torna-se similar à da curva de densidade de probabilidade da distribuição normal. De fato, X/μ converge em distribuição para $N(\phi, \phi)$, quando o valor de μ tende para infinito.

Figura 2.2: Distribuição gama.



Comparando a expressão (1.5) com a densidade da distribuição gama acima, temos os parâmetros $\theta = -1/\mu$ e $\tau = \phi$; assim, τ é o parâmetro de forma e θ , o simétrico do parâmetro

de escala. Daí, podemos escrever a distribuição gama da seguinte forma:

$$f(x; \theta, \tau) = \frac{1}{x} \exp \left\{ \theta x + \tau \log x - \left(\tau \log \left(\frac{-1}{\theta} \right) + \log \Gamma(\tau) \right) \right\},$$

onde a média e a variância são, respectivamente,

$$E(X) = \frac{\partial \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(1,0)} = -\frac{\tau}{\theta}$$

e

$$Var(X) = \frac{\partial^2 \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(2,0)} = -\frac{\tau}{\theta^2}.$$

Consideremos n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição gama, com log-verossimilhança dada por

$$\ell(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{X_i} + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n \log X_i - n \left(\tau \log \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \log \Gamma(\tau) \right), \quad (2.25)$$

onde os estimaodres de máxima verossimilhança para θ e τ serão solução para o sistema

$$\begin{aligned} -n \frac{\tau}{\theta} &= \sum_{i=1}^n X_i, \\ n \left(\log \left(\frac{-1}{\theta} \right) + \psi'(\tau) \right) &= \sum_{i=1}^n \log X_i. \end{aligned}$$

Com base no conhecimento destes estimadores podemos obter o viés de segunda ordem usando a fórmula de Cox e Snell (1968) para a distribuição gama. Os vieses de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ são, respectivamente,

$$B_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\theta \left(-3\psi'(\tau) - \tau\psi''(\tau) + 2\tau(\psi'(\tau))^2 \right)}{n \left(\tau\psi'(\tau) - 1 \right)^2}$$

e

$$B_1(\hat{\tau}) = \frac{1}{2} \frac{2 - \tau\psi'(\tau) + \tau^2\psi''(\tau)}{n \left(\tau\psi'(\tau) - 1 \right)^2},$$

onde $\psi(\tau) = \frac{d}{d(\tau)} \log \Gamma(\tau)$, ψ' e ψ'' sendo as derivadas de primeira e segunda ordem de ψ , também conhecidas como as funções digama e trigama, respectivamente. Pode ser visto de (2.25) que as derivadas de segunda ordem de $\ell(\theta, \tau)$ com respeito a θ e τ não envolvem as estatísticas $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log X_i$. Portanto, um estimador corrigido por viés até segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança pode ser obtido, usando a metodologia preventiva de David Firth, maximizando a função $\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |K|$. Para a distribuição gama, teremos

$$\ell^*(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{X_i} + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n \log X_i - n \left(\tau \log \left(\frac{-1}{\theta} \right) + \log \Gamma(\tau) \right) + \frac{1}{2} \log \left\{ n^2 \left(\frac{\tau\psi'(\tau) - 1}{\theta^2} \right) \right\}.$$

A correção numérica do viés via bootstrap para os EsMV da distribuição gama é descrita no item 2.2; estimamos o viés através das B amostras bootstrap e então o subtraímos do estimador de máxima verossimilhança, obtendo assim o estimador corrigido pelo viés.

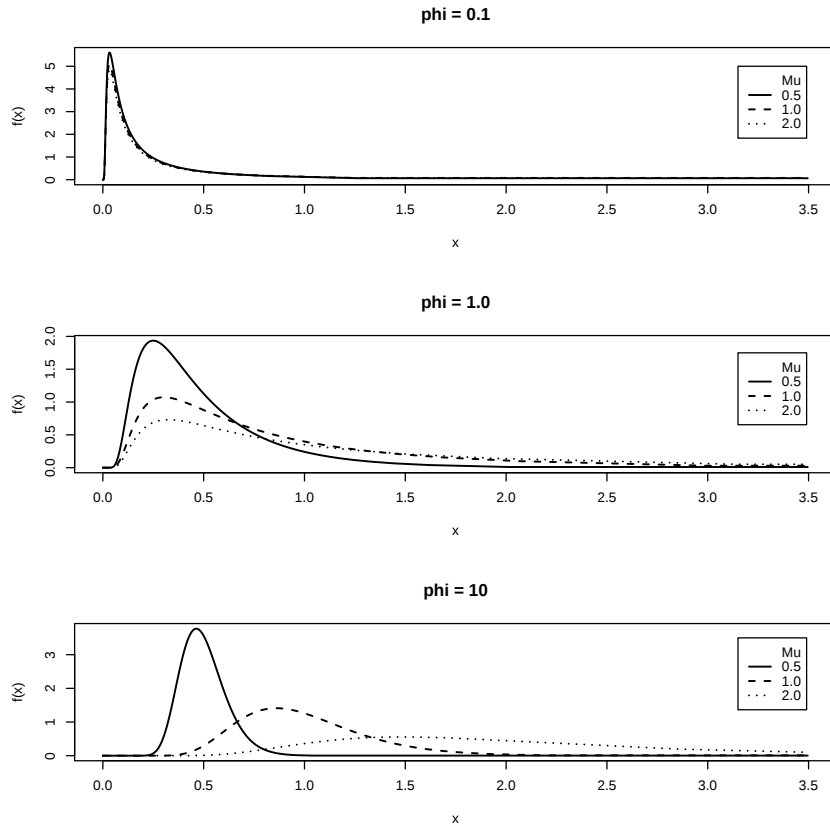
2.4.2 Distribuição Normal Inversa

A distribuição normal inversa $NI(\mu, \phi)$ é um membro importante da família (1.5) cuja densidade é

$$\left(\frac{\phi}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\phi(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\phi}{2\mu^2}x - \frac{\phi}{2x} - \left(-\frac{\phi}{\mu} - \frac{1}{2}\log\phi\right)\right\},$$

com μ, ϕ e $x > 0$. A densidade da distribuição normal inversa é unimodal e assimétrica para a direita. O nome normal inversa vem da uma relação inversa entre as funções geratrizes de momentos desta distribuição e da normal. Esta distribuição tem algumas analogias com a normal, como por exemplo, no caso em que temos uma amostra de variáveis aleatórias i.i.d. a média amostral tem distribuição $NI(\mu, n\phi)$. Alguns gráficos da distribuição normal inversa são mostrados na Figura 2.3.

Figura 2.3: Distribuição normal inversa.



Podemos reescrever a distribuição normal inversa na forma da expressão (1.5) onde teremos as seguintes relações entre os parâmetros: $\theta = -\phi/2\mu^2$ e $\tau = -\phi/2$. Deste modo, a distribuição normal inversa será da forma

$$f(x; \theta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp \left\{ \theta x + \frac{\tau}{x} - \left(-2\sqrt{\theta\tau} - \frac{1}{2} \log(-2\tau) \right) \right\},$$

onde a média e a variância são

$$E(X) = \frac{\partial \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta} = \rho^{(1,0)} = -\frac{\tau}{\sqrt{\theta\tau}}$$

e

$$Var(X) = \frac{\partial^2 \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(2,0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\theta^3}}.$$

Considere n observações i.i.d. com distribuição comum normal inversa, com o logaritmo da função verossimilhança dado por

$$\ell(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{\sqrt{2\pi X_i^3}} + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} - n \left(-2\sqrt{\theta\tau} - \frac{1}{2} \log(-2\tau) \right), \quad (2.26)$$

utilizado para obter os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ , que são solução para o sistema

$$-n \frac{\tau}{\sqrt{\theta\tau}} = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$n \left(-\frac{\theta}{\sqrt{\theta\tau}} - \frac{1}{2\tau} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}.$$

Podemos obter o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança usando a formula de Cox e Snell (1968). Os vieses de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ são

$$B_1(\hat{\theta}) = -\frac{3\theta(2\sqrt{\theta\tau} + 1)}{2n\sqrt{\theta\tau}}$$

e

$$B_1(\hat{\tau}) = -\frac{3\tau}{n}.$$

Notamos de (2.26) que as derivadas de segunda ordem de $\ell(\theta, \tau)$ com respeito a θ e τ não envolvem as estatísticas $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$. Assim, um estimador cujo viés é corrigido até segunda ordem, usando a metodologia preventiva de David Firth, pode ser obtido maximizando a função $\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |K|$. No caso da distribuição normal inversa, teremos

$$\ell^*(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{\sqrt{2\pi x_i^3}} + \theta \sum_{i=1}^n x_i + \tau \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} - n \left(2\sqrt{\theta\tau} - \frac{1}{2} \log(-2\tau) \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{n^2 \sqrt{\theta\tau}}{4\theta^2 \tau^2} \right).$$

A correção numérica do viés via bootstrap para a distribuição normal inversa é descrita no item 2.2.

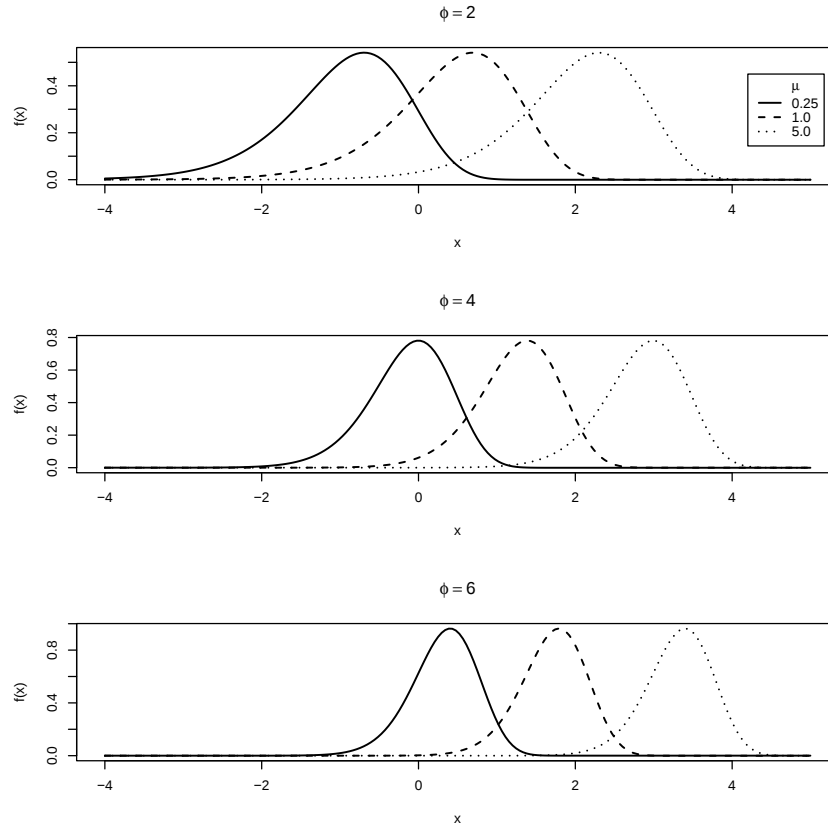
2.4.3 Distribuição Log-Gama

Seja Y uma variável aleatória com distribuição $G(\mu, \phi)$ com média $\mu\phi$ e variância $\mu^2\phi$. Seja $X = \log Y$. Neste caso, dizemos que X tem distribuição log-gama, com densidade na forma

$$\frac{\mu^{-\phi}}{\Gamma(\phi)} \exp \left\{ x\phi - \frac{1}{\mu} \exp x \right\} = \exp \left\{ x\phi - \frac{1}{\mu} \exp x + \log \left(\frac{\mu^{-\phi}}{\Gamma(\phi)} \right) \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $\mu, \phi > 0$, com média $\log \mu - \psi(\phi)$ e variância $\psi'(\phi)$, $\psi(\phi) = \frac{d}{d\phi} \log \Gamma(\phi)$ e $\psi'(\phi) = \frac{d^2}{d\phi^2} \log \Gamma(\phi)$. Na Figura 2.4 temos alguns gráficos da distribuição log-gama onde podemos observar algumas das suas características. Note que μ é parâmetro de escala. A distribuição log-gama é assimétrica à esquerda e à medida que aumentamos o valor de ϕ a forma da curva torna-se similar à curva de densidade normal.

Figura 2.4: Distribuição log-gama.



A distribuição log-gama também faz parte da família exponencial biparamétrica onde temos $\theta = \phi$ e $\tau = \frac{-1}{\mu}$. Podemos escrever a densidade como

$$f(x; \theta, \tau) = \exp \left\{ \theta x - \tau e^x - \theta \log\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \log \Gamma(\theta) \right\},$$

onde a média é

$$E(X) = \frac{\partial \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(1,0)} = \log\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \psi(\theta)$$

e a variância é

$$Var(X) = \frac{\partial^2 \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(2,0)} = \psi'(\theta),$$

com $\psi(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log \Gamma(\theta)$ e $\psi'(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log \Gamma(\theta)$.

Consideremos n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição comum log-gama, com o logaritmo da função de verossimilhança dado por

$$\ell(\theta, \tau) = \theta \sum_{i=1}^n x_i - \tau \sum_{i=1}^n e^{x_i} - n \left\{ \theta \log\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \log \Gamma(\theta) \right\}, \quad (2.27)$$

utilizado para obter os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ , que são solução para o seguinte sistema

$$n \left(\log\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \psi(\theta) \right) = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$-n \frac{\theta}{\tau} = \sum_{i=1}^n e^{X_i}.$$

Com base no conhecimento destes estimadores, podemos obter o viés de segunda ordem usando a formula de Cox e Snell (1968) para a distribuição log-gama. Os vieses de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ são, respectivamente,

$$B_1(\hat{\theta}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{2 - \theta \psi'(\theta) + \theta^2 \psi''(\theta)}{n(\theta \psi'(\theta) - 1)^2} \right)$$

e

$$B_1(\hat{\tau}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\tau \{3\psi'(\theta) + \theta \psi'(\theta) - 2\theta(\psi'(\theta))^2\}}{n(\theta \psi'(\theta) - 1)^2} \right),$$

onde $\psi''(\theta) = \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \log \Gamma(\theta)$. Da função log-verossimilhança (2.27) notamos que as derivadas de segunda ordem de $\ell(\theta, \tau)$ com respeito a θ e τ não envolvem as estatísticas $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n e^{X_i}$. Portanto, o estimador corrigido por viés até segunda ordem do estimador de

máxima verossimilhança pode ser obtido, usando a metodologia preventiva de David Firth, maximizando a função $\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |K|$. Para a distribuição log-gama, teremos

$$\ell(\theta, \tau) = \theta \sum_{i=1}^n x_i - \tau \sum_{i=1}^n e^{x_i} - n \left\{ \theta \log\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \log \Gamma(\theta) \right\} + \frac{1}{2} \log \left\{ n^2 \left(\frac{\theta \psi'(\theta) - 1}{\tau^2} \right) \right\}.$$

A correção numérica do viés via bootstrap para a distribuição log-gama é aquela descrita para as distribuições anteriores.

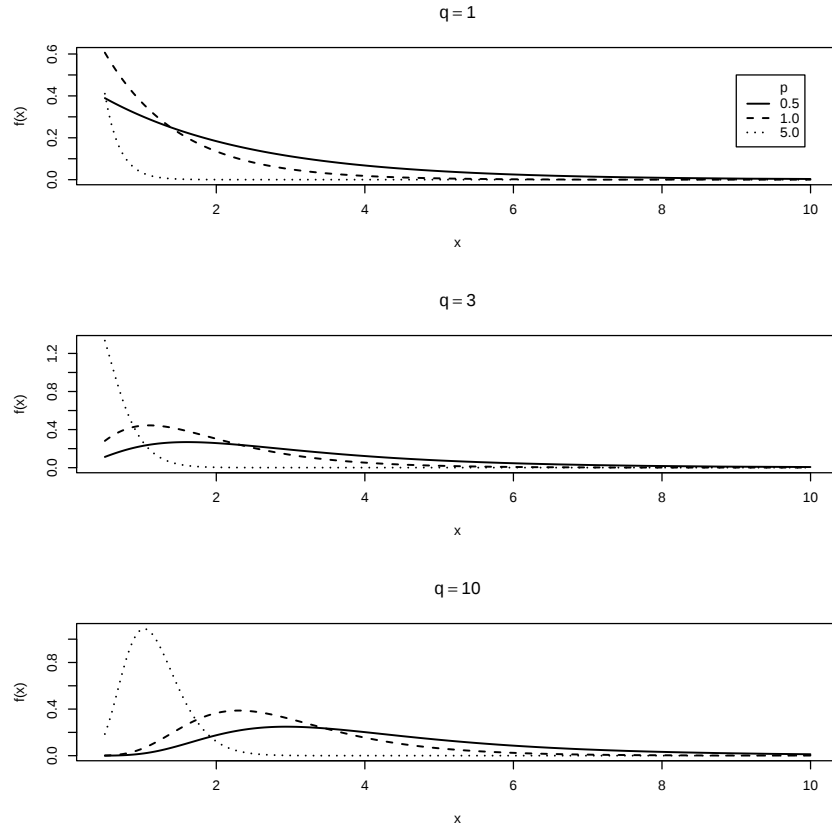
2.4.4 Distribuição Log-beta-inversa

Seja X uma variável aleatória, $X = -\log Z$, $Z \sim \text{Beta}(p, q)$ com $p > 0, q > 0$. A densidade de X tem a forma

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-x} (1 - e^{-x})^{q-1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \exp \left\{ -px + q \log(1 - e^{-x}) + \log \left(\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \right) \right\},$$

onde $0 \leq x \leq \infty$, com média $\psi(p) - \psi(p+q)$ e variância $\psi'(p) - \psi'(p+q)$. A distribuição log-beta-inversa é uma distribuição assimétrica à direita, como pode ser visto na Figura 2.5.

Figura 2.5: Distribuição log-beta.



Podemos reescrever a distribuição -log-beta de acordo com a expressão (1.5) onde teremos as seguintes relações entre os parâmetros: $\theta = -p$ e $\tau = q$. Deste modo, a distribuição log-beta-inversa será da forma

$$f(x; \theta, \tau) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \exp \left\{ \theta x + \tau \log(1 - e^{-x}) + \log \left(\frac{\Gamma(\tau - \theta)}{\Gamma(-\theta)\Gamma(\tau)} \right) \right\};$$

a média e a variância são

$$E(X) = \frac{\partial \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(1,0)} = \psi(-\theta) - \psi(\tau - \theta)$$

e

$$Var(X) = \frac{\partial^2 \rho(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = \rho^{(2,0)} = \psi'(-\theta) - \psi'(\tau - \theta),$$

com $\psi(\theta) = \frac{d}{d\theta} \log \Gamma(\theta)$ e $\psi'(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2} \log \Gamma(\theta)$.

Considere n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição comum log-beta-inversa, com o logaritmo da função de verossimilhança dado por

$$\ell(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{(1 - e^{-X_i})} + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-X_i}) + n \log \left(\frac{\Gamma(\tau - \theta)}{\Gamma(-\theta)\Gamma(\tau)} \right), \quad (2.28)$$

utilizado para obter os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ , que são solução para o sistema

$$n(\psi(-\theta) + \psi(\tau - \theta)) = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$n(\psi(\tau) - \psi(\tau - \theta)) = \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-X_i}).$$

Desta forma podemos obter o viés de segunda ordem usando a formula de Cox e Snell (1968) para a distribuição-log-beta. Os vieses de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança de θ e τ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} B_1(\theta) = & \frac{1}{2}(\psi'(\tau - \theta)(\psi'(-\theta)\psi''(\tau) - 2\psi''(-\theta)\psi'(\tau)) + (\psi'(\tau - \theta))^2(-\psi'(\tau) + \psi''(-\theta)) \\ & + (\psi'(\tau))^2(\psi''(-\theta) - \psi''(\tau - \theta)) - \psi''(\tau - \theta)\psi'(-\theta)\psi'(\tau))/n(-\psi'(-\theta)\psi'(\tau) + \\ & \psi'(-\theta)\psi'(\tau - \theta) + \psi'(\tau - \theta)\psi'(\tau))^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_1(\tau) = & \frac{1}{2}(\psi''(\tau - \theta))^2(\psi''(\tau) - \psi''(-\theta)) + \psi'(\tau - \theta)(\psi''(-\theta)\psi'(\tau) - 2\psi'(-\theta)\psi''(\tau)) \\ & + (\psi'(-\theta))^2(\psi''(\tau) - \psi''(\tau - \theta)) - \psi''(\tau - \theta)\psi'(-\theta)\psi'(\tau)/n(-\psi'(-\theta)\psi'(\tau) + \\ & \psi'(-\theta)\psi'(\tau - \theta) + \psi'(\tau - \theta)\psi'(\tau))^2). \end{aligned}$$

Notamos de (2.28) que as derivadas de segunda ordem de $\ell(\theta, \tau)$ com respeito a θ e τ não envolvem as estatísticas $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-X_i})$. Assim, um estimador cujo viés é corrigido até segunda ordem, usando a metodologia preventiva de David Firth, pode ser obtido maximizando a função $\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |K|$. No caso da distribuição -log-beta, teremos

$$\begin{aligned} \ell^*(\theta, \tau) = & \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{1 - e^{-X_i}} + \theta \sum_{i=1}^n X_i + \tau \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-X_i}) - n \log \left(\frac{\Gamma(-\theta)\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau - \theta)} \right) \\ & + \frac{1}{2} \log \{ n^2 (-\psi'(-\theta)\psi'(\tau) + \psi'(-\theta)\psi'(\tau - \theta) + \psi'(\tau - \theta)\psi'(\tau)) \}. \end{aligned}$$

A correção numérica do viés via bootstrap para a distribuição log-beta-inversa é aquela descrita para as distribuições anteriores.

Na tabela 2.1 encontram-se as características das distribuições da família exponencial biparamétrica que são utilizadas neste trabalho, bem como a relação entre os vetores de parâmetros (θ, τ) e (μ, ϕ) .

Tabela 2.1. Características de algumas distribuições da família exponencial biparamétrica.

	Gama	Normal Inversa	Log-Gama	- Log-Beta
$b(\cdot)$	$1/x$	$1/\sqrt{2\pi x^3}$	1	$1/(1 - e^{-x})$
θ	$-1/\mu$	$-\phi/2\mu^2$	ϕ	$-p$
τ	ϕ	$-\phi/2$	$-1/\mu$	q
$T(\cdot)$	$\log x$	$1/x$	e^x	$\log(1 - e^{-x})$
$\rho(\cdot, \cdot)$	$\log\left(\frac{-1}{\theta}\right)^{\tau}\Gamma(\tau)$	$-2\sqrt{\theta\tau} - \frac{1}{2}\log(-2\tau)$	$\theta\log(-\frac{1}{\tau}) + \log\Gamma(\theta)$	$-\log\left(\frac{\Gamma(\tau-\theta)}{\Gamma(-\theta)\Gamma(\tau)}\right)$

Capítulo 3

Resultados Numéricos

3.1 Introdução

Neste capítulo serão investigados os comportamentos dos estimadores baseados nas três metodologias discutidas no capítulo 2 de correção do viés de segunda ordem das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros θ e τ da família exponencial biparamétrica. Consideramos quatro distribuições pertencentes a esta família; são elas: a distribuição gama, a distribuição log-gama, a distribuição log-beta-inversa e a distribuição normal inversa. Para cada distribuição, nove diferentes valores para o par ordenado (θ, τ) e três diferentes valores de amostra ($n = 20, 40$ e 60 observações) foram considerados, totalizando vinte e sete diferentes situações (ou experimentos). O gerador das variáveis aleatórias utilizado foi o “multiply with carry” de George Marsaglia, de período aproximadamente 2^{60} , “GM”, implementado na linguagem `0x`.

A investigação foi realizada através de simulações de Monte Carlo onde o número de réplicas em cada experimento foi de 10,000. Para cada experimento, calculamos a média das estimativas e o erro quadrático médio correspondente para quatro diferentes estimadores, a saber: estimador de máxima verossimilhança, dois estimadores corrigidos pelo viés analiticamente e o estimador bootstrap corrigido pelo viés. Para cada amostra de Monte Carlo foram geradas 500 amostras bootstrap, totalizando 5,000,000 de réplicas por experimento. Todas as simulações foram realizadas utilizando a linguagem de programação matricial `0x` no sistema operacional Linux.

As amostras de Monte Carlo e bootstrap produziram estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse. Como os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros θ e τ , em geral, não possuem forma fechada, estas estimativas foram obtidas através de um método de otimização quasi-Newton conhecido como BFGS. As simulações computacionais realizadas utilizaram derivadas analíticas a fim de se obter maior precisão e eficiência. Para mais detalhes do método BFGS veja Press *et al.* (1992).

Os resultados das simulações, para cada distribuição considerada, estão aqui apresenta-

dos em forma de tabelas mostrando o desempenho dos quatro diferentes estimadores de θ e τ para as distribuições consideradas; uma tabela para cada um dos diferentes estimadores. Para este fim, os vieses relativos do estimador de máxima verossimilhança, denotado por EMV, do estimador corrigido subtraindo-se o viés de segunda ordem estimado, denotado por CBC, do estimador corrigido pelo viés obtido de forma preventiva, PBC, e do estimador bootstrap corrigido pelo viés, denotado por BBC, foram estimados. Estimamos o viés relativo de $\hat{\theta}$ a partir das replicações de Monte Carlo como

$$ViesRel = \frac{\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{\theta}_i - \theta}{\theta},$$

onde R é o número de réplicas de Monte Carlo e $\hat{\theta}_i$ é a i -ésima estimativa no esquema de Monte Carlo; analogamente para os outros estimadores de θ . Também foram estimados os erros quadráticos médios dos estimadores, que se encontram entre colchetes na tabela, ao lado dos respectivos vieses relativos. Os resultados estão apresentados para observações de tamanhos 20, 40 e 60, em cada tabela.

Com o objetivo de avaliar o desempenho global de cada um dos quatro diferentes estimadores, calculamos duas medidas globais, para cada valor de n , usando a média dos resultados obtidos para os nove diferentes valores de θ e τ . A primeira medida é baseada no viés relativo correspondente a cada específico estimador e valor de n , sendo aqui denominada norma quadrática do viés relativo integrado, que é calculada para o k -ésimo estimador, $k = 1, \dots, 4$, da seguinte forma:

$$IRBSQ_{(k)} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{h=1}^9 (r_{h,k})^2},$$

onde os $r_{h,k}$'s ($h = 1, \dots, 9$) correspondem aos nove diferentes valores do viés relativo para o k -ésimo estimador (n fixo). Similarmente, calculamos a média do erro quadrático médio relativo, para o k -ésimo estimador, $k = 1, \dots, 4$, como

$$ARMSE_{(k)} = \frac{1}{9} \sum_{h=1}^9 \frac{MSE_{h,k}}{p^2},$$

onde os $MSE_{h,k}$ correspondem aos nove diferentes valores do erro quadrático médio para o k -ésimo estimador e p corresponde ao valor do parâmetro (θ ou τ) considerado.

3.2 Distribuição Gama

As investigações nesta seção foram realizadas através de simulação de Monte Carlo, já descrita na seção 3.1, considerando a distribuição gama com função de densidade dada em 2.4.1

e a reparametrização dada por $\theta = -1/\mu$ e $\tau = \phi$. Foram considerados para μ os valores 0.25, 1.0 e 4.0 e para ϕ os valores 1.0, 2.0 e 4.0, que correspondem aos valores -4.0 , -1.0 e -0.25 para θ e 1.0, 2.0 e 4.0 para τ . O gráfico da densidade gama com os valores de μ e ϕ considerados podem ser visto na Figura 2.2.

Os resultados das simulações de Monte Carlo estão apresentados nos quadros seguintes com o objetivo de mostrar os desempenhos dos quatros diferentes estimadores de θ e τ para a distribuição gama. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de interesse não têm forma fechada e as estimativas foram obtidas utilizando o método BFGS com derivadas analíticas.

Nos Quadros 3.1 a 3.4 encontram-se os resultados acerca da investigação dos comportamentos dos quatros diferentes estimadores de θ e τ , EMV, CBC, PBC e BBC, apresentando os vieses relativos e os erros quadráticos médios que estão entre colchetes. Através dos resultados destes quadros podemos concluir dois fatos importantes. O primeiro refere-se ao EMV, que é bastante viesado, o que pode ser facilmente observado no Quadro 3.1. Para tanto, consideremos o experimento em que os valores de θ e τ são respectivamente -0.25 e 4.0 . No caso em que o tamanho da amostra é $n = 20$ notamos que os vieses relativos dos estimadores de máxima verossimilhança são 18.16% para θ e 16.74% para τ . Ao considerarmos o tamanho de amostra $n = 60$ nota-se uma redução nos vieses relativos de 30.23% para θ e 30.05% para τ comparado ao experimento onde o tamanho da amostra é 20, pois os vieses relativos de θ e de τ são de 5.4% e 5.03%, respectivamente.

O segundo fato importante é que os estimadores corrigidos analiticamente apresentam melhor desempenho que o EMV e BBC, reduzindo substancialmente o viés relativo. Por exemplo, considerando o mesmo experimento quando $n = 20$, os vieses relativos dos estimadores CBC para θ e τ são -0.02% e 0.03% e dos estimadores PBC são -0.05% e 0.0% , respectivamente (Quadros 3.2 e 3.3). Ao avaliarmos o comportamento destes estimadores quando $n = 60$, observamos que os vieses relativos para ambos os estimadores corrigidos analiticamente, CBC e PBC, são 0.06% para θ e 0.05% para τ . Nota-se que os vieses relativos dos EMV para θ e τ são respectivamente 908 e 558 vezes maiores do que os dos estimadores CBC além de 363 e 500 vezes maiores que os dos estimadores PBC, considerando o mesmo experimento onde o tamanho da amostra é 20. Quanto aos estimadores BBC, estes reduzem os vieses relativos mas não tão efetivamente como os estimadores corrigidos analiticamente. Por exemplo, considerando o mesmo experimento já mencionado, quando o tamanho da amostra é 20, o viés relativo para o estimador de θ é -2.58% e para o estimador de τ -2.33% ; porém, quando o tamanho da amostra aumenta, $n = 60$, os vieses relativos se reduzem para -0.04% e -0.05% , respectivamente, representando uma redução de 98.4% para θ e 97.9% para τ (Quadro 3.4).

Quanto ao erro quadrático médio, podemos observar que os estimadores propostos reduzem-no substancialmente em comparação ao EMV. Considerando o experimento onde $\theta = -0.25$, $\tau = 4.0$ e $n = 20$, os erros quadráticos médios dos estimadores EMV, CBC, PBC e BBC para θ e τ são 0.0138 e 3.0409, 0.0085 e 1.8742, 0.0085 e 1.8740, 0.0085 e 1.8878, respectivamente. Comparando o erro quadrático médio dos estimadores EMV com os demais estimadores, nota-se que o do EMV é aproximadamente 62% maior que os dos demais estimadores, tanto para θ como para τ .

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 encontram-se os resultados das medidas globais IRBSQ e ARMSE. Através destas medidas podemos ter uma idéia do desempenho geral dos quatros estimadores estudados para os nove diferentes valores de θ e τ . Os resultados apresentados na Tabela 3.1 correspondem à medida global IRBSQ, que é baseada no viés relativo. Com respeito a esta medida, notamos que os estimadores EMV apresentam valores bastante altos da norma do viés relativo integrado comparados aos demais estimadores para qualquer tamanho de amostra considerado. Entre os três estimadores corrigidos pelo viés, observamos que os estimadores corrigidos analiticamente, CBC e PBC, têm desempenho similar além de serem os estimadores que apresentam melhor desempenho na redução do viés. Quanto à medida global baseada no erro quadrático médio, ARMSE, notamos que os estimadores corrigidos pelo viés são comparáveis e que o EMV tem desempenho inferior ao dos demais estimadores.

3.2 Distribuição Normal Inversa

Nesta seção serão investigados os comportamentos das três metodologias de correção de viés de segunda ordem das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros θ e τ da distribuição normal inversa, com função de densidade dada no item 2 da seção 2.4. Para a simulação de Monte Carlo consideramos para μ os valores 0.5, 1.0 e 2.0 e para ϕ os valores 0.1, 1.0 e 10.0, o que corresponderá aos valores $-20.0, -5.0, -2.0, -1.25, -0.5, -0.2, -0.125, -0.05$ e -0.0125 para θ e $-5.0, -0.5$ e -0.05 para τ , de acordo com a reparametrização onde $\theta = -\phi/2\mu^2$ e $\tau = -\phi/2$. As densidades da distribuição normal inversa para os valores de μ e ϕ aqui considerados encontram-se na Figura 2.3.

Diferentemente das outras distribuições consideradas, na distribuição normal inversa há forma fechada para a solução do sistema na seção 2.4.2, e, por conseguinte, para os EsMV de θ e τ . As investigações foram realizadas através de simulações de Monte Carlo onde os resultados estão apresentados nos quadros e tabelas seguintes, mostrando o desempenho dos quatro diferentes estimadores de θ e τ para a distribuição normal inversa considerando amostras de tamanho 20, 40 e 60.

Os Quadros 3.5 a 3.8 resumem os resultados das investigações sobre o comportamento dos quatros diferentes estimadores de θ e τ , apresentando os vieses relativos e os erros quadráticos médios (entre colchetes), revelando importantes informações a respeito dos estimadores. A primeira informação diz respeito aos EsMV, que são fortemente viesados. Por exemplo, considere o experimento onde $\theta = -0.01254$ e $\tau = -0.05$. Avaliando o comportamento destes estimadores para o tamanho de amostra $n = 20$ temos os vieses relativos dos estimadores de θ e τ dados por 5854.5% e 124.67%, respectivamente; observando o comportamento dos mesmos quando o tamanho da amostra aumenta, notamos uma grande redução nos vieses relativos; por exemplo, quando $n = 60$, o de θ reduz 87.29% e o de τ reduz 84.25%. Comportamento similar pode ser observado para as demais situações.

Além disso, diferentemente das demais distribuições consideradas, os estimadores corrigidos pelo viés até segunda ordem derivados da formula de Cox e Snell, para o caso da distribuição normal inversa, não reduzem o viés enquanto que o estimador corrigido de forma preventiva reduz substancialmente o viés. Sob as mesmas condições avaliadas para os EsMV, quando $n = 20$ os vieses relativos dos estimadores CBC e PBC para θ e τ são 8282.9% e 158.37%, 3065.5% e 85.56%, respectivamente. Quando o tamanho da amostra $n = 60$, os vieses relativos dos estimadores CBC são 1047.4% para θ e 25.62% para τ , o que representa uma redução da mesma magnitude dos estimadores EMV, de 87.13% para θ e 84.98% para τ . Quanto aos estimadores PBC os vieses relativos de θ e τ são 391.46% e 12.56%, respectivamente, representando uma redução nos vieses relativos de 87.23% para θ e 85.53% para τ . Note que os vieses relativos dos EsMV são menores que os vieses relativos dos estimadores CBC e maiores que os dos estimadores PBC. Outra informação importante é que os estimadores corrigidos pelo viés de forma numérica reduzem os vieses relativos, porém não tão efetivamente como os estimadores corrigidos de forma analítica. Por exemplo, considere o experimento onde o valor de θ é -0.0125 e de τ é -0.05; quando $n = 20$ os vieses relativos dos estimadores BBC para θ e τ são 2999.3% e 86.86%, respectivamente. Ao analisarmos o comportamento destes estimadores quando $n = 60$, notamos uma redução de 85.69% para θ e 84.18% para τ (Quadro 3.8) com relação ao caso $n = 20$. Os erros quadráticos médios dos estimadores EMV, CBC, PBC e BBC para θ e τ , para o experimento onde $\theta = -0.0125$, $\tau = -0.05$ e $n = 20$, são 0.7882 e 0.0049, 1.4698 e 0.0076, 0.2914 e 0.0026, 0.3280 e 0.0027, respectivamente. Nota-se que as correções analíticas e numérica conseguem reduzir o erro quadrático médio, exceto a correção analítica derivada da fórmula de Cox e Snell.

Nas Tabelas 3.3 e 3.4 encontram-se os resultados das medidas globais IRBSQ e ARMSE. Através destas, podemos avaliar o desempenho geral dos quatro diferentes estimadores de θ e τ . Os resultados na Tabela 3.3 correspondem à medida global IRBSQ, que é baseada no viés relativo. Observamos que os EsMV, diferentemente das demais distribuições já consideradas,

apresentam desempenho superior ao estimador CBC; o seu desempenho é inferior quando comparamos aos dos estimadores PBC e BBC. Quanto aos estimadores corrigidos pelo viés, observamos que estes estimadores não são comparáveis, ou seja, os valores da norma do viés relativo integrado não são similares. Quanto à medida global baseada no erro quadrático médio, ARMSE, notamos que os estimadores corrigidos pelo viés tanto de forma analítica quanto numérica são bastante similares, reduzindo substancialmente o erro quadrático médio, enquanto que os EsMV apresentam desempenho inferior aos demais estimadores, exceto os estimadores CBC (Tabela 3.4).

3.3 Distribuição Log-Gama

Os resultados apresentados nesta seção correspondem aos experimentos de Monte Carlo realizados sob as condições descritas na seção 3.1, considerando a distribuição log-gama com função de densidade dada no item 2.4 e a reparametrização dada por $\theta = \phi$ e $\tau = -1/\mu$. Na simulação de Monte Carlo consideramos para μ os valores 0.25, 1.0 e 5.0 e para ϕ os valores 2.0, 4.0 e 6.0, que, de acordo com a reparametrização considerada, correspondem aos valores 2.0, 4.0 e 6.0 para θ e -4.0 , -1.0 e -0.2 para τ ; os valores de μ e ϕ são os mesmos considerados na Figura 2.4.

Uma dificuldade encontrada no caso da distribuição log-gama decorre do fato de não haver uma forma fechada para a solução do sistema na seção 2.4.3, e, por conseguinte, para as EsMV de θ e τ . Para calcularmos as EsMV de θ e τ , utilizamos o método quasi-Newton BFGS. Os resultados estão apresentados nas tabelas seguintes, mostrando o desempenho dos quatro diferentes estimadores de θ e τ para a distribuição log-gama considerando observações de tamanho 20, 40, e 60.

Os Quadros 3.9 a 3.12 resumem os resultados das investigações acerca dos comportamentos dos quatro estimadores diferentes de θ e τ (EMV, CBC, PBC e BBC), apresentando os vieses relativos e os erros quadráticos médios (entre colchetes). Estas tabelas revelam importantes informações. Primeiro, o EMV pode ser fortemente viesado. Por exemplo, quando $n = 20$, $\theta = 2.0$ e $\tau = -1.0$, os vieses relativos dos estimadores EMV são aproximadamente de 19% para τ e 16% para θ (Quadro 3.9). Note que, considerando a mesma situação mudando apenas o tamanho da amostra para $n = 60$, os vieses relativos dos estimadores de ambos os parâmetros se reduzem para 5%, o que representa uma redução de 70.24% para τ e 71.78% para θ nos vieses relativos dos EMV em comparação com o experimento onde o tamanho da amostra é 20. Comportamento similar pode ser observado para as demais situações.

Segundo, os estimadores corrigidos analiticamente apresentam desempenho melhor que o EMV e o BBC, ou seja, os estimadores corrigidos analiticamente, CBC e PBC, reduzem substancialmente o viés relativo. Considerando a mesma situação analisada para os EMV, $n = 20$, $\theta = 2.0$ e $\tau = -1.0$, os vieses relativos dos estimadores CBC para θ e τ são, respectivamente, 0.07% e 0.23% e dos estimadores PBC são 0.02% e 0.18% (Quadros 3.10 e 3.11). Avaliando o comportamento destes estimadores quando o tamanho da amostra é $n = 60$, os vieses relativos dos estimadores CBC são 0.01% para θ e -0.2% para τ , enquanto que para os estimadores PBC são 0.0% e -0.21% , respectivamente; notamos uma redução para os estimadores CBC de 7% para θ e 1.15% para τ ; já para os estimadores PBC, um decréscimo de -216.27% para τ e 100% para θ . Note que os vieses relativos dos EsMV para θ e τ são 228 e 83 vezes respectivamente maiores do que os dos estimadores CBC e 787 e 106 vezes maiores que os dos estimadores PBC, quando $n = 20$, $\theta = 2.0$ e $\tau = -1.0$. Já para os estimadores BBC, os vieses relativos para θ e τ , sob a mesma situação considerada acima, são -2.13% e -2.4% . Quando o tamanho da amostra aumenta, $n = 60$, os vieses relativos reduzem para -0.13% e -0.37% , respectivamente, o que representa uma redução de aproximadamente 94% para θ e 85% para τ (Quadro 3.12). Os estimadores BBC reduzem os vieses relativos, porém, não tão efetivamente como os estimadores corrigidos analiticamente. Os erros quadráticos médios dos estimadores EMV, CBC, PBC, BBC para θ e τ , quando $n = 20$, $\theta = 2.0$ e $\tau = -1.0$, são 0.7501 e 0.2484, 0.4697 e 0.1529, 0.4696 e 0.1529, 0.4698 e 0.1524 respectivamente. É claro que a correção analítica também consegue reduzir o erro quadrático médio. O erro quadrático médio do EMV é mais de 59% maior do que os dos estimadores CBC, PBC e BBC para θ e mais de 62% maior do que os dos CBC, PBC e BBC para τ .

As Tabelas 3.5 e 3.6 avaliam o desempenho geral dos quatro diferentes estimadores, para cada valor de n , usando a média dos resultados obtidos para nove diferentes valores de θ e τ . Na Tabela 3.5 encontram-se os resultados da medida global IRBSQ, que é baseada no viés relativo. Observamos que os EsMV apresentam valores muito altos da norma do viés relativo integrado em comparação aos demais estimadores para qualquer valor de n . Os estimadores corrigidos analiticamente têm desempenho similar no que diz respeito à redução do viés relativo além de serem, dentre os quatro estimadores, os estimadores que apresentam desempenho superior na redução do viés. Já com respeito à medida global baseada no erro quadrático médio, ARMSE, notamos que os estimadores CBC, PBC e BBC são bastantes similares e o EMV apresenta desempenho inferior aos demais estimadores. Nota-se que os estimadores CBC, PBC e BBC apresetam tanto o viés relativo quanto o erro quadrático médio menores que os EsMV.

3.4 Distribuição Log-Beta-Inversa

Os quadros e tabelas seguintes mostram o desempenho dos quatro diferentes estimadores dos parâmetros θ e τ para a distribuição log-beta-inversa, cuja função de densidade é dada no item 4 da seção 2.4. Os valores de p e q considerados foram 0.5, 1.0, 5.0 e 1.0, 3.0, 10.0, respectivamente, o que corresponde aos valores -0.5 , -1.0 e -5.0 para θ e 1.0, 3.0 e 10.0 para τ . As investigações foram realizadas através de simulações de Monte Carlo, como descrito na seção 3.1. Como os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros θ e τ não têm forma fechada, as estimativas foram obtidas utilizando o método BFGS com derivadas analíticas.

Os Quadros 3.15 a 3.18 resumem os resultados das investigações acerca do comportamento dos quatro diferentes estimadores de θ e τ , apresentando os vieses relativos e os erros quadráticos médios, entre colchetes. Estes quadros revelam importantes informações acerca dos estimadores. Novamente, só EsMV são fortemente viesados. Para ilustrar, considere o experimento onde θ assume valor -0.5 e $\tau = 1.0$ (o comportamento da distribuição neste experimento pode ser visto na figura 2.5). Quando $n = 20$, os valores dos vieses relativos dos EMV, de θ e τ são respectivamente 19.75% e 14.57%. Note que, quando $n = 60$, ocorre uma redução significativa de 71% para θ e 70% para τ (Quadro 3.15).

Outra importante informação diz respeito aos estimadores corrigidos analiticamente. Estes estimadores têm melhor desempenho que os demais estimadores, reduzindo significativamente o viés relativo. Por exemplo, para a mesma situação analisada para os EMV, considere o tamanho da amostra igual a 20. Os vieses relativos dos estimadores CBC e PBC para θ e τ são 0.53%, 0.08% e 0.45%, -0.01% , respectivamente (Quadros 3.16 e 3.17). Ao avaliarmos o comportamento dos mesmos quando $n = 60$, observamos que os vieses relativos para os estimadores CBC são 0.04% para θ e 0.05% para τ , o que representa uma redução de 92% para θ e 37.5% para τ , enquanto que, para os estimadores PBC, os vieses relativos são 0.03% para θ e 0.04% para τ , representando uma redução de 93% para θ e um aumento de 500% para τ . Nota-se que os vieses relativos do EMV para θ e τ são 37 e 182 vezes respectivamente maiores do que os dos estimadores CBC e 4 e 1457 vezes maiores que os dos estimadores PBC, quando $\theta = -0.05$, $\tau = 1.0$ e $n = 20$. Os vieses relativos dos estimadores BBC para θ e τ são 2.23% e -1.89% , respectivamente, sob as mesmas condições analisadas para os EMV quando $n = 20$. Quando o tamanho da amostra aumenta, $n = 60$, os vieses relativos reduzem para -0.11% para θ e 0.06% para τ (Quadro 3.18). Note que os estimadores BBC reduzem os vieses relativos, mas não tanto quanto os estimadores CBC e PBC.

Quanto ao erro quadrático médio, podemos observar que os estimadores propostos reduzem-no substancialmente em comparação ao EMV. Por exemplo, considere o experimento onde $\theta = -5.0$ e $\tau = 1.0$ e $n = 20$. Os erros quadráticos médios dos EsMV, CBC, PBC e BBC para θ e τ são 6.7216 e 0.1652, 4.1112 e 0.1050, 4.1074 e 0.1051, 4.0908 e 0.1046, respectivamente. Comparando o erro quadrático médio dos EsMV com os demais, nota-se que o do EMV é aproximadamente 61% para θ e 63% para τ maior que os demais estimadores, CBC, PBC e BBC.

As Tabelas 3.7 e 3.8 apresentam o desempenho geral dos estimadores através das medidas globais IRBSQ e ARMSE, usando a média dos resultados obtidos para os nove diferentes valores de θ e τ . Na Tabela 3.7 encontram-se os resultados da norma do viés relativo integrado, IRBSQ. Observamos que os estimadores EMV têm valores da norma do viés relativo integrado muito altos revelando assim o seu pobre desempenho em comparação aos outros estimadores. Por outro lado, os estimadores corrigidos analiticamente, CBC e PBC, além de serem comparáveis, têm desempenho superior aos dos demais estimadores na redução do viés. Com respeito à média do erro quadrático médio relativo, ARMSE, notamos que os estimadores CBC, PBC e BBC são comparáveis e que o EMV apresenta desempenho inferior, pois apresenta valores muito altos em comparação aos estimadores corrigidos pelo viés (Tabela 3.8). Nota-se que os estimadores CBC, PBC e BBC apresentam tanto o viés relativo quanto o erro quadrático médio menores que os EsMV.

Quadro 3.1: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador de máxima verossimilhança de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -4.00$				
n	EMV	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\hat{\theta}$	0.2058[4.8360]	0.1872[3.8129]	0.1843[3.6693]
	$\hat{\tau}$	0.1399[0.1625]	0.1584[0.7142]	0.1700[3.1742]
40	$\hat{\theta}$	0.0912[1.4921]	0.0860[1.3070]	0.0826[1.2141]
	$\hat{\tau}$	0.0648[0.0552]	0.0733[0.2504]	0.0760[1.0597]
60	$\hat{\theta}$	0.0566[0.8622]	0.0580[0.7842]	0.0541[0.7350]
	$\hat{\tau}$	0.0410[0.0319]	0.0488[0.1481]	0.0509[0.6432]
$\theta = -1.00$				
n	EMV	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\hat{\theta}$	0.1919[0.2669]	0.1858[0.2440]	0.1794[0.2248]
	$\hat{\tau}$	0.1385[0.1562]	0.1590[0.7631]	0.1655[3.1725]
40	$\hat{\theta}$	0.0953[0.0962]	0.0823[0.0819]	0.0876[0.0781]
	$\hat{\tau}$	0.0654[0.0554]	0.0693[0.2497]	0.0797[1.0911]
60	$\hat{\theta}$	0.0599[0.0554]	0.0556[0.0477]	0.0545[0.0450]
	$\hat{\tau}$	0.0412[0.0321]	0.0482[0.1470]	0.0506[0.6360]
$\theta = -0.25$				
n	EMV	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\hat{\theta}$	0.1968[0.0176]	0.1900[0.0153]	0.1816[0.0138]
	$\hat{\tau}$	0.1392[0.1594]	0.1614[0.7504]	0.1674[3.0409]
40	$\hat{\theta}$	0.0962[0.0061]	0.0841[0.0050]	0.0855[0.0049]
	$\hat{\tau}$	0.0678[0.0564]	0.0709[0.2424]	0.0779[1.1018]
60	$\hat{\theta}$	0.0620[0.0035]	0.0583[0.0031]	0.0549[0.0029]
	$\hat{\tau}$	0.0435[0.0331]	0.0490[0.1496]	0.0503[0.6525]

Quadro 3.2: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no metodo corretivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -4.00$				
n	CBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\tilde{\theta}$	0.0008[2.9807]	-0.0009[2.3459]	0.0021[2.2577]
	$\tilde{\tau}$	-0.0039[0.1044]	-0.0001[0.4446]	0.0025[1.9603]
40	$\tilde{\theta}$	-0.0024[1.1578]	-0.0005[1.0164]	-0.0008[0.9452]
	$\tilde{\tau}$	-0.0015[0.0439]	0.0004[0.1962]	-0.0007[0.8279]
60	$\tilde{\theta}$	-0.0040[0.7299]	0.0018[0.6588]	-0.0001[0.6210]
	$\tilde{\tau}$	-0.0021[0.0274]	0.0014[0.1252]	0.0011[0.5432]
$\theta = -1.00$				
n	CBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\tilde{\theta}$	-0.0108[0.1650]	-0.0021[0.1512]	-0.0021[0.1392]
	$\tilde{\tau}$	-0.0051[0.1001]	0.0004[0.4795]	-0.0013[1.9767]
40	$\tilde{\theta}$	0.0013[0.0742]	-0.0038[0.0643]	0.0038[0.0602]
	$\tilde{\tau}$	-0.0010[0.0440]	-0.0033[0.1975]	0.0028[0.8469]
60	$\tilde{\theta}$	-0.0009[0.0466]	-0.0005[0.0402]	0.0002[0.0380]
	$\tilde{\tau}$	-0.0018[0.0276]	0.0008[0.1244]	0.0007[0.5371]
$\theta = -0.25$				
n	CBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\tilde{\theta}$	-0.0067[0.0109]	0.0015[0.0094]	-0.0002[0.0085]
	$\tilde{\tau}$	-0.0046[0.1023]	0.0024[0.4681]	0.0003[1.8742]
40	$\tilde{\theta}$	0.0022[0.0047]	-0.0021[0.0039]	-0.0018[0.0038]
	$\tilde{\tau}$	0.0012[0.0446]	-0.0018[0.1905]	-0.0011[0.8595]
60	$\tilde{\theta}$	0.0011[0.0029]	0.0021[0.0026]	0.0006[0.0025]
	$\tilde{\tau}$	0.0003[0.0283]	0.0016[0.1265]	0.0005[0.5524]

Quadro 3.3: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no metodo preventivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -4.00$				
n	PBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	θ^*	-0.0002[2.9796]	-0.0013[2.3451]	0.0018[2.2573]
	τ^*	-0.0049[0.1044]	-0.0006[0.4445]	0.0022[1.9601]
40	θ^*	-0.0026[1.1577]	-0.0006[1.0163]	-0.0009[0.9451]
	τ^*	-0.0018[0.0439]	0.0003[0.1962]	-0.0008[0.8279]
60	θ^*	-0.0041[0.7299]	0.0018[0.6588]	-0.0002[0.6210]
	τ^*	-0.0022[0.0274]	0.0013[0.1252]	0.0010[0.5432]
$\theta = -1.00$				
n	PBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	θ^*	-0.0119[0.1650]	-0.0026[0.1512]	-0.0024[0.1391]
	τ^*	-0.0061[0.1002]	-0.0001[0.4794]	-0.0016[1.9764]
40	θ^*	0.0011[0.0742]	-0.0039[0.0643]	0.0037[0.0602]
	τ^*	-0.0012[0.0440]	-0.0034[0.1975]	0.0027[0.8469]
60	θ^*	-0.0010[0.0466]	-0.0005[0.0402]	0.0002[0.0380]
	τ^*	-0.0019[0.0276]	0.0008[0.1244]	0.0007[0.5371]
$\theta = -0.25$				
n	PBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	θ^*	-0.0078[0.0109]	0.0010[0.0094]	-0.0005[0.0085]
	τ^*	-0.0056[0.1024]	0.0019[0.4680]	0.0000[1.8740]
40	θ^*	0.0019[0.0047]	-0.0023[0.0039]	0.0017[0.0038]
	τ^*	0.0010[0.0446]	-0.0019[0.1905]	-0.0010[0.8599]
60	θ^*	0.0010[0.0029]	0.0020[0.0026]	0.0006[0.0025]
	τ^*	0.0002[0.0283]	0.0016[0.1265]	0.0005[0.5524]

Quadro 3.4: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido bootstrap de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -4.00$				
n	BBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\check{\theta}$	-0.0290[2.9906]	-0.0277[2.3756]	-0.0241[2.2647]
	$\check{\tau}$	-0.0241[0.1041]	-0.0232[0.4469]	-0.0215[1.9704]
40	$\check{\theta}$	-0.0068[1.1580]	-0.0040[1.0217]	-0.0046[0.9467]
	$\check{\tau}$	-0.0045[0.0439]	-0.0026[0.1969]	-0.0041[0.8311]
60	$\check{\theta}$	-0.0053[0.7345]	0.0002[0.6609]	-0.0014[0.6234]
	$\check{\tau}$	-0.0030[0.0275]	-0.0001[0.1256]	-0.0001[0.5452]
$\theta = -1.00$				
n	BBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\check{\theta}$	-0.0397[0.1656]	-0.0298[0.1503]	-0.0289[0.1398]
	$\check{\tau}$	-0.0252[0.0992]	-0.0222[0.4779]	-0.0260[1.9792]
40	$\check{\theta}$	-0.0027[0.0742]	-0.0079[0.0644]	0.0000[0.0605]
	$\check{\tau}$	-0.0037[0.0440]	-0.0069[0.1977]	-0.0008[0.8506]
60	$\check{\theta}$	-0.0025[0.0468]	-0.0022[0.0402]	-0.0013[0.0380]
	$\check{\tau}$	-0.0031[0.0276]	-0.0007[0.1247]	-0.0007[0.5374]
$\theta = -0.25$				
n	BBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 2.0$	$\tau = 4.0$
20	$\check{\theta}$	-0.0349[0.0109]	-0.0250[0.0095]	-0.0258[0.0085]
	$\check{\tau}$	-0.0237[0.1017]	-0.0196[0.4723]	-0.0233[1.8878]
40	$\check{\theta}$	-0.0018[0.0047]	-0.0061[0.0039]	-0.0024[0.0038]
	$\check{\tau}$	-0.0015[0.0447]	-0.0050[0.1911]	-0.0028[0.8595]
60	$\check{\theta}$	-0.0004[0.0029]	0.0003[0.0026]	-0.0004[0.0025]
	$\check{\tau}$	-0.0007[0.0284]	0.0003[0.1269]	-0.0005[0.5552]

Tabela 3.1. Norma quadrática do viés relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	0.1894	0.0045	0.0050	0.0298
	τ	0.1559	0.0029	0.0034	0.0233
$n = 40$	θ	0.0833	0.0024	0.0024	0.0047
	τ	0.0719	0.0018	0.0018	0.0040
$n = 60$	θ	0.0572	0.0017	0.0017	0.0022
	τ	0.0472	0.0013	0.0013	0.0015

Tabela 3.2. Média do erro quadrático médio relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	0.2503	0.1545	0.1544	0.1550
	τ	0.1802	0.1131	0.1131	0.1132
$n = 40$	θ	0.1394	0.0658	0.0658	0.0659
	τ	0.0618	0.0485	0.0486	0.0487
$n = 60$	θ	0.0499	0.0420	0.0420	0.0421
	τ	0.0366	0.0310	0.0310	0.0311

Quadro 3.5: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador de máxima verossimilhança de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\tau = -0.050$				
n	EMV	$\theta = -0.200$	$\theta = -0.050$	$\theta = -0.0125$
20	$\hat{\theta}$	3.5392[0.9136]	14.410[0.8273]	58.545[0.7882]
	$\hat{\tau}$	1.1093[0.0039]	1.2031[0.0045]	1.2467[0.0049]
40	$\hat{\theta}$	1.0396[0.1109]	4.6103[0.0846]	18.842[0.0797]
	$\hat{\tau}$	0.1852[0.0002]	0.2957[0.0004]	0.3415[0.0005]
60	$\hat{\theta}$	0.3995[0.0378]	1.6757[0.0141]	7.4427[0.0130]
	$\hat{\tau}$	0.0617[0.0001]	0.1459[0.0002]	0.1964[0.0002]
$\tau = -0.500$				
n	EMV	$\theta = -2.000$	$\theta = -0.500$	$\theta = -0.125$
20	$\hat{\theta}$	0.2572[1.8265]	0.3663[0.2079]	0.7707[0.0356]
	$\hat{\tau}$	0.1721[0.0529]	0.1733[0.0522]	0.2273[0.0543]
40	$\hat{\theta}$	0.1883[0.6074]	0.1686[0.0648]	0.2535[0.0079]
	$\hat{\tau}$	0.0748[0.0176]	0.0845[0.0191]	0.0825[0.0180]
60	$\hat{\theta}$	0.0818[0.3609]	0.1046[0.0365]	0.1555[0.0042]
	$\hat{\tau}$	0.0540[0.0107]	0.0517[0.0107]	0.0522[0.0108]
$\tau = -5.000$				
n	EMV	$\theta = -20.000$	$\theta = -5.000$	$\theta = -1.250$
20	$\hat{\theta}$	0.1893[96.243]	0.1900[6.5175]	0.4582[0.9222]
	$\hat{\tau}$	0.1802[5.5479]	0.1738[5.3763]	0.2024[6.6746]
40	$\hat{\theta}$	0.0853[32.366]	0.0936[2.2485]	0.1306[0.1708]
	$\hat{\tau}$	0.0823[1.8456]	0.0857[1.9076]	0.0877[1.8962]
60	$\hat{\theta}$	0.0573[19.338]	0.0606[1.3146]	0.0639[0.0921]
	$\hat{\tau}$	0.0542[1.1019]	0.0544[1.0928]	0.0514[1.0567]

Quadro 3.6: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no metodo corretivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\tau = -0.050$				
n	CBC	$\theta = -0.200$	$\theta = -0.050$	$\theta = -0.0125$
20	$\tilde{\theta}$	5.3049[1.7659]	20.649[1.5434]	82.829[1.4698]
	$\tilde{\tau}$	1.4257[0.0061]	1.5336[0.0071]	1.5837[0.0076]
40	$\tilde{\theta}$	1.6716[0.2039]	6.5724[0.1530]	26.056[0.1414]
	$\tilde{\tau}$	0.2741[0.0004]	0.3929[0.0006]	0.4421[0.0008]
60	$\tilde{\theta}$	0.7470[0.0624]	2.5563[0.0261]	10.474[0.0233]
	$\tilde{\tau}$	0.1148[0.0001]	0.2032[0.0002]	0.2562[0.0003]
$\tau = -0.500$				
n	CBC	$\theta = -2.000$	$\theta = -0.500$	$\theta = -0.125$
20	$\tilde{\theta}$	0.5225[3.2022]	0.7292[0.3766]	1.3879[0.0689]
	$\tilde{\tau}$	0.3479[0.0904]	0.3492[0.0896]	0.4114[0.0970]
40	$\tilde{\theta}$	0.2401[0.8772]	0.3332[0.0970]	0.5051[0.0127]
	$\tilde{\tau}$	0.1554[0.0248]	0.1658[0.0269]	0.1637[0.0255]
60	$\tilde{\theta}$	0.1611[0.4761]	0.2106[0.0494]	0.3164[0.0060]
	$\tilde{\tau}$	0.1067[0.0138]	0.1043[0.0138]	0.1048[0.0139]
$\tau = -5.000$				
n	CBC	$\theta = -20.000$	$\theta = -5.000$	$\theta = -1.250$
20	$\tilde{\theta}$	0.3752[164.67]	0.3836[11.114]	0.7099[1.5755]
	$\tilde{\tau}$	0.3572[9.4535]	0.3499[9.1716]	0.3828[11.136]
40	$\tilde{\theta}$	0.1705[45.673]	0.1831[3.1858]	0.2307[0.2501]
	$\tilde{\tau}$	0.1634[2.6050]	0.1671[2.6904]	0.1693[2.6857]
60	$\tilde{\theta}$	0.1126[24.952]	0.1186[1.7009]	0.1271[0.1200]
	$\tilde{\tau}$	0.1069[1.4196]	0.1071[1.4102]	0.1040[1.3624]

Quadro 3.7: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no metodo preventivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\tau = -0.050$				
n	PBC	$\theta = -0.200$	$\theta = -0.050$	$\theta = -0.0125$
20	θ^*	1.5386[0.3357]	7.2553[0.3123]	30.655[0.2914]
	τ^*	0.7473[0.0020]	0.8203[0.0023]	0.8556[0.0026]
40	θ^*	0.3394[0.0524]	2.3791[0.0350]	10.559[0.0331]
	τ^*	0.0859[0.0002]	0.1837[0.0003]	0.2241[0.0003]
60	θ^*	0.0242[0.0241]	0.6748[0.0061]	3.9146[0.0053]
	τ^*	0.0040[0.0001]	0.0798[0.0001]	0.1256[0.0001]
$\tau = -0.500$				
n	PBC	$\theta = -2.000$	$\theta = -0.500$	$\theta = -0.125$
20	θ^*	-0.0136[1.0980]	-0.0133[0.1174]	0.0901[0.0167]
	τ^*	-0.0074[0.0329]	-0.0111[0.0324]	0.0228[0.0302]
40	θ^*	-0.0048[0.4641]	0.0007[0.0473]	-0.0092[0.0054]
	τ^*	-0.0066[0.0139]	0.0015[0.0148]	-0.0024[0.0139]
60	θ^*	0.0020[0.2981]	-0.0028[0.0296]	-0.0098[0.0032]
	τ^*	0.0009[0.0090]	-0.0016[0.0091]	-0.0019[0.0092]
$\tau = -5.000$				
n	PBC	$\theta = -20.000$	$\theta = -5.000$	$\theta = -1.250$
20	θ^*	0.0030[59.158]	-0.0043[4.0499]	0.2046[0.4930]
	τ^*	0.0028[3.4224]	-0.0030[3.3391]	0.0206[4.0923]
40	θ^*	0.0001[25.194]	0.0039[1.7350]	0.0302[0.1244]
	τ^*	0.0010[1.4344]	0.0041[1.4756]	0.0059[1.4586]
60	θ^*	0.0019[16.266]	0.0025[1.1029]	0.0005[0.0772]
	τ^*	0.0014[0.9283]	0.0016[0.9196]	-0.0013[0.8941]

Quadro 3.8: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido bootstrap de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\tau = -0.050$				
n	BBC	$\theta = -0.200$	$\theta = -0.050$	$\theta = -0.0125$
20	$\check{\theta}$	1.5069[0.3732]	7.1206[0.3515]	29.993[0.3280]
	$\check{\tau}$	0.7580[0.0020]	0.8336[0.0024]	0.8686[0.0027]
40	$\check{\theta}$	0.3731[0.0581]	2.5343[0.0400]	11.213[0.0385]
	$\check{\tau}$	0.0946[0.0002]	0.1975[0.0003]	0.2395[0.0004]
60	$\check{\theta}$	0.0466[0.0253]	0.7594[0.0071]	4.2913[0.0064]
	$\check{\tau}$	0.0091[0.0001]	0.0892[0.0001]	0.1374[0.0002]
$\tau = -0.500$				
n	BBC	$\theta = -2.000$	$\theta = -0.500$	$\theta = -0.125$
20	$\check{\theta}$	-0.0421[1.1130]	-0.0498[0.1211]	0.0524[0.0184]
	$\check{\tau}$	-0.0264[0.0327]	-0.0258[0.0323]	0.0213[0.0304]
40	$\check{\theta}$	-0.0084[0.4680]	-0.0024[0.0480]	-0.0081[0.0056]
	$\check{\tau}$	-0.0091[0.0140]	0.0005[0.0149]	-0.0007[0.0140]
60	$\check{\theta}$	0.0009[0.2998]	-0.0032[0.0298]	-0.0075[0.0033]
	$\check{\tau}$	0.0001[0.0090]	-0.0018[0.0091]	-0.0008[0.0092]
$\tau = -5.000$				
n	BBC	$\theta = -20.000$	$\theta = -5.000$	$\theta = -1.250$
20	$\check{\theta}$	-0.0230[59.485]	-0.0307[4.0765]	0.1730[0.4750]
	$\check{\tau}$	0.0217[3.4472]	-0.0265[3.3592]	-0.0018[4.0610]
40	$\check{\theta}$	-0.0038[25.210]	0.0002[1.7370]	0.0259[0.1249]
	$\check{\tau}$	-0.0028[1.4349]	0.0007[1.4783]	0.0022[1.4653]
60	$\check{\theta}$	0.0007[16.307]	0.0009[1.1087]	-0.0007[0.0774]
	$\check{\tau}$	0.0003[0.9312]	0.0002[0.9244]	-0.0024[0.8953]

Tabela 3.3. Norma quadrática do viés relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	20.135	28.516	10.513	10.288
	τ	0.5813	0.9250	0.4672	0.4746
$n = 40$	θ	6.4765	8.8780	3.6097	3.8340
	τ	0.1763	0.2553	0.1008	0.1082
$n = 60$	θ	2.5476	3.6057	1.3241	1.4527
	τ	0.0946	0.1442	0.0496	0.0547

Tabela 3.4. Média do erro quadrático médio relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	600.32	1119.6	222.30	250.19
	τ	3.0678	1.1798	1.8450	1.8451
$n = 40$	θ	60.877	108.12	25.335	29.415
	τ	0.8727	0.1498	0.6855	0.6945
$n = 60$	θ	10.050	18.129	4.1660	4.9969
	τ	0.5218	0.0637	0.4337	0.4381

Quadro 3.9: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador de máxima verossimilhança de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = 2.0$				
n	EMV	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\hat{\theta}$	0.1558[0.6991]	0.1593[0.7501]	0.1638[0.7285]
	$\hat{\tau}$	0.1846[3.7496]	0.1910[0.2484]	0.1949[0.0095]
40	$\hat{\theta}$	0.0752[0.2446]	0.0734[0.2495]	0.0737[0.2523]
	$\hat{\tau}$	0.0888[1.2831]	0.0871[0.0808]	0.0838[0.0033]
60	$\hat{\theta}$	0.0482[0.1527]	0.0474[0.1479]	0.0503[0.1471]
	$\hat{\tau}$	0.0576[0.7905]	0.0539[0.0475]	0.0590[0.0020]
$\theta = 4.0$				
n	EMV	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\hat{\theta}$	0.1672[3.2582]	0.1634[3.0437]	0.1709[3.2885]
	$\hat{\tau}$	0.1819[3.7369]	0.1768[0.2177]	0.1860[0.0095]
40	$\hat{\theta}$	0.0716[1.0674]	0.0784[1.1145]	0.0757[1.0885]
	$\hat{\tau}$	0.0794[1.2274]	0.0858[0.0792]	0.0823[0.0031]
60	$\hat{\theta}$	0.0502[0.6297]	0.0484[0.6347]	0.0507[0.6415]
	$\hat{\tau}$	0.0553[0.7245]	0.0529[0.0448]	0.0554[0.0018]
$\theta = 6.0$				
n	EMV	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\hat{\theta}$	0.1753[7.8300]	0.1718[7.3812]	0.1766[7.6326]
	$\hat{\tau}$	0.1861[3.8551]	0.1823[0.2265]	0.1864[0.0093]
40	$\hat{\theta}$	0.0774[2.4507]	0.0775[2.4685]	0.0766[2.4490]
	$\hat{\tau}$	0.0821[1.1888]	0.0818[0.0751]	0.0805[0.0029]
60	$\hat{\theta}$	0.0493[1.4054]	0.0495[1.4654]	0.0478[1.4223]
	$\hat{\tau}$	0.0523[0.6819]	0.0515[0.0443]	0.0509[0.0017]

Quadro 3.10: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no método corretivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = 2.0$				
n	CBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\tilde{\theta}$	-0.0023[0.4361]	0.0007[0.4697]	0.0045[0.4500]
	$\tilde{\tau}$	-0.0031[2.3115]	0.0023[0.1529]	0.0056[0.0058]
40	$\tilde{\theta}$	-0.0022[0.1902]	0.0005[0.1953]	0.0007[0.1976]
	$\tilde{\tau}$	-0.0022[0.9890]	0.0006[0.0626]	-0.0024[0.0026]
60	$\tilde{\theta}$	0.0009[0.1295]	0.0001[0.1255]	0.0028[0.1238]
	$\tilde{\tau}$	0.0014[0.6653]	-0.0020[0.0402]	0.0027[0.0016]
$\theta = 4.0$				
n	CBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\tilde{\theta}$	0.0001[2.0320]	-0.0031[1.8916]	0.0032[2.0397]
	$\tilde{\tau}$	0.0000[2.3168]	-0.0043[0.1347]	0.0035[0.0059]
40	$\tilde{\theta}$	-0.0048[0.8437]	0.0015[0.8697]	-0.0010[0.8532]
	$\tilde{\tau}$	-0.0038[0.9638]	0.0021[0.0615]	-0.0011[0.0024]
60	$\tilde{\theta}$	0.0003[0.5321]	-0.0014[0.5392]	0.0008[0.5420]
	$\tilde{\tau}$	0.0010[0.6097]	-0.0013[0.0379]	0.0012[0.0016]
$\theta = 6.0$				
n	CBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\tilde{\theta}$	0.0044[4.8594]	0.0014[4.5665]	0.0055[4.7055]
	$\tilde{\tau}$	0.0052[2.3852]	0.0020[0.1397]	0.0055[0.0057]
40	$\tilde{\theta}$	-0.0007[1.9127]	-0.0006[1.9274]	-0.0014[1.9151]
	$\tilde{\tau}$	-0.0005[0.9248]	-0.0008[0.0585]	-0.0020[0.0023]
60	$\tilde{\theta}$	-0.0014[1.1896]	-0.0011[1.2430]	-0.0028[1.2099]
	$\tilde{\tau}$	-0.0013[0.5760]	-0.0020[0.0376]	-0.0026[0.0015]

Quadro 3.11: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no método preventivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = 2.0$				
n	PBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	θ^*	-0.0028[0.4261]	0.0002[0.4696]	0.0040[0.4499]
	τ^*	-0.0036[2.3107]	0.0018[0.1529]	0.0051[0.0058]
40	θ^*	0.0021[0.1902]	0.0004[0.1953]	0.0006[0.1976]
	τ^*	0.0021[0.9889]	0.0005[0.0626]	-0.0025[0.0026]
60	θ^*	0.0008[0.1295]	0.0000[0.1255]	0.0028[0.1238]
	τ^*	0.0014[0.6652]	-0.0021[0.0402]	0.0027[0.0016]
$\theta = 4.0$				
n	PBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	θ^*	-0.0002[2.0317]	-0.0034[1.8914]	0.0030[2.0394]
	τ^*	-0.0003[2.3164]	-0.0045[0.1347]	0.0033[0.0059]
40	θ^*	-0.0049[0.8437]	0.0015[0.8697]	-0.0010[0.8532]
	τ^*	-0.0039[0.9638]	0.0021[0.0615]	-0.0012[0.0024]
60	θ^*	0.0003[0.5321]	-0.0014[0.5392]	0.0008[0.5420]
	τ^*	0.0009[0.6097]	-0.0013[0.0379]	0.0011[0.0016]
$\theta = 6.0$				
n	PBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	θ^*	0.0042[4.8590]	0.0012[4.5662]	0.0053[4.7052]
	τ^*	0.0050[2.3850]	0.0018[0.1396]	0.0053[0.0057]
40	θ^*	-0.0008[1.9126]	-0.0006[1.9272]	-0.0015[1.9151]
	τ^*	-0.0005[0.9247]	-0.0009[0.0585]	-0.0021[0.0023]
60	θ^*	-0.0014[1.1896]	-0.0012[1.2430]	-0.0028[1.2099]
	τ^*	-0.0014[0.5759]	-0.0020[0.0376]	-0.0027[0.0015]

Quadro 3.12: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido bootstrap de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = 2.00$				
n	BBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\hat{\theta}$	-0.0251[0.4380]	-0.0213[0.4698]	-0.0175[0.4490]
	$\check{\tau}$	-0.0302[2.3304]	-0.0240[0.1524]	-0.0206[0.0058]
40	$\hat{\theta}$	-0.0009[0.1904]	-0.0033[0.1956]	-0.0028[0.1988]
	$\check{\tau}$	-0.0017[0.9879]	-0.0040[0.0627]	-0.0066[0.0026]
60	$\hat{\theta}$	-0.0003[0.1299]	-0.0013[0.1261]	0.0015[0.1238]
	$\check{\tau}$	-0.0000[0.6674]	-0.0037[0.0404]	0.0010[0.0017]
$\theta = 4.00$				
n	BBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\hat{\theta}$	-0.0230[2.0570]	-0.0255[1.9184]	-0.0204[2.0563]
	$\check{\tau}$	-0.0253[2.3524]	-0.0286[0.1368]	-0.0223[0.0059]
40	$\hat{\theta}$	-0.0083[0.8463]	-0.0021[0.8749]	-0.0049[0.8568]
	$\check{\tau}$	-0.0077[0.9661]	-0.0017[0.0618]	-0.0053[0.0024]
60	$\hat{\theta}$	-0.0011[0.5351]	-0.0026[0.5417]	-0.0007[0.5439]
	$\check{\tau}$	-0.0006[0.6121]	-0.0025[0.0381]	-0.0004[0.0016]
$\theta = 6.0$				
n	BBC	$\tau = -4.0$	$\tau = -1.0$	$\tau = -0.2$
20	$\hat{\theta}$	-0.0202[4.8655]	-0.0219[4.5894]	-0.0191[4.7529]
	$\check{\tau}$	-0.0206[2.3881]	-0.0229[0.1409]	-0.0205[0.0058]
40	$\hat{\theta}$	-0.0049[1.9211]	-0.0042[1.9317]	-0.0050[1.9196]
	$\check{\tau}$	-0.0050[0.9273]	-0.0046[0.0586]	-0.0059[0.0023]
60	$\hat{\theta}$	-0.0027[1.1934]	-0.0027[1.2469]	-0.0041[1.2145]
	$\check{\tau}$	-0.0027[0.5776]	-0.0036[0.0377]	-0.0040[0.0015]

Tabela 3.5. Norma quadrática do viés relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	0.1672	0.0033	0.0032	0.0217
	τ	0.1856	0.0039	0.0038	0.0241
$n = 40$	θ	0.0075	0.0020	0.0020	0.0045
	τ	0.0836	0.0020	0.0020	0.0051
$n = 60$	θ	0.0491	0.0016	0.0016	0.0022
	τ	0.0544	0.0018	0.0018	0.0025

Tabela 3.6. Média do erro quadrático médio relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	0.1976	0.1227	0.1224	0.1234
	τ	0.2324	0.1445	0.1445	0.1455
$n = 40$	θ	0.0612	0.0518	0.0518	0.0520
	τ	0.0777	0.0614	0.0606	0.0606
$n = 60$	θ	0.0389	0.0330	0.0330	0.0331
	τ	0.0457	0.0388	0.0398	0.0354

Quadro 3.15: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador de máxima verossimilhança de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -0.50$				
n	EMV	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\hat{\theta}$	0.1279[0.0349]	0.1279[0.0329]	0.1346[0.0343]
	$\hat{\tau}$	0.1762[0.2398]	0.2170[3.0061]	0.2536[40.896]
40	$\hat{\theta}$	0.0569[0.0126]	0.0539[0.0117]	0.0595[0.0119]
	$\hat{\tau}$	0.0808[0.0768]	0.0936[0.9603]	0.1107[12.357]
60	$\hat{\theta}$	0.0385[0.0075]	0.0402[0.0074]	0.0376[0.0070]
	$\hat{\tau}$	0.0529[0.0455]	0.0691[0.5659]	0.0699[7.1152]
$\theta = -1.00$				
n	EMV	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\hat{\theta}$	0.1509[0.1794]	0.1475[0.1686]	0.1419[0.1554]
	$\hat{\tau}$	0.1517[0.1765]	0.1820[2.1801]	0.1975[26.634]
40	$\hat{\theta}$	0.0701[0.0612]	0.0698[0.0564]	0.0656[0.0554]
	$\hat{\tau}$	0.0715[0.0617]	0.0898[0.7368]	0.0881[8.9651]
60	$\hat{\theta}$	0.0457[0.0369]	0.0428[0.0325]	0.0415[0.0319]
	$\hat{\tau}$	0.0468[0.0364]	0.0549[0.4209]	0.0585[5.1399]
$\theta = -5.00$				
n	EMV	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\hat{\theta}$	0.1975[6.7216]	0.1645[4.9341]	0.1634[4.7572]
	$\hat{\tau}$	0.1457[0.1652]	0.1624[1.6916]	0.1695[20.058]
40	$\hat{\theta}$	0.0901[2.1671]	0.0809[1.7441]	0.0753[1.7267]
	$\hat{\tau}$	0.0687[0.0564]	0.0771[0.5894]	0.0781[7.2463]
60	$\hat{\theta}$	0.0572[1.2191]	0.0525[1.0657]	0.0530[0.9933]
	$\hat{\tau}$	0.0437[0.0320]	0.0507[0.3565]	0.0542[4.1946]

Quadro 3.16: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no metodo corretivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -0.50$				
n	CBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\tilde{\theta}$	-0.0006[0.0228]	0.0016[0.0216]	0.0074[0.0223]
	$\tilde{\tau}$	-0.0008[0.1446]	-0.0035[1.7707]	0.0100[23.749]
40	$\tilde{\theta}$	-0.0022[0.0102]	-0.0041[0.0095]	0.0011[0.0096]
	$\tilde{\tau}$	0.0003[0.0589]	-0.0063[0.7338]	0.0009[9.2780]
60	$\tilde{\theta}$	0.0000[0.0065]	0.0022[0.0064]	-0.0003[0.0061]
	$\tilde{\tau}$	0.0009[0.0380]	0.0039[0.4635]	-0.0010[5.8773]
$\theta = -1.00$				
n	CBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\tilde{\theta}$	-0.0018[0.1130]	0.0018[0.1071]	-0.0023[0.0988]
	$\tilde{\tau}$	-0.0012[0.1107]	-0.0009[1.3461]	-0.0002[16.276]
40	$\tilde{\theta}$	0.0000[0.0482]	0.0028[0.0443]	-0.0008[0.0440]
	$\tilde{\tau}$	0.00012[0.0484]	0.0055[0.5654]	-0.0023[6.9716]
60	$\tilde{\theta}$	0.0002[0.0314]	-0.0006[0.0278]	-0.0016[0.0273]
	$\tilde{\tau}$	0.0012[0.0309]	0.0005[0.3540]	-0.0003[4.3146]
$\theta = -5.00$				
n	CBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\tilde{\theta}$	0.0053[4.1112]	-0.0073[3.0745]	-0.0051[2.9559]
	$\tilde{\tau}$	0.0008[0.1050]	-0.0026[1.0512]	-0.0050[12.415]
40	$\tilde{\theta}$	0.0023[1.6717]	0.0012[1.3518]	-0.0024[1.3565]
	$\tilde{\tau}$	0.0020[0.0445]	0.0010[0.4587]	-0.0022[5.6775]
60	$\tilde{\theta}$	0.0004[1.0223]	0.0008[0.8993]	0.0023[0.8333]
	$\tilde{\tau}$	0.0005[0.0272]	0.0013[0.3010]	0.0018[3.5207]

Quadro 3.17: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido baseado no metodo preventivo de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -0.50$				
n	PBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	θ^*	-0.0012[0.0228]	-0.0005[0.0216]	0.0048[0.0223]
	τ^*	-0.0002[0.1442]	-0.0050[1.7641]	0.0072[23.691]
40	θ^*	-0.0023[0.0102]	-0.0046[0.0095]	0.0005[0.0096]
	τ^*	0.0005[0.0589]	-0.0066[0.7332]	0.0003[9.2728]
60	θ^*	-0.0001[0.0065]	0.0020[0.0064]	-0.0006[0.0061]
	τ^*	0.0010[0.0380]	0.0038[0.4633]	-0.0013[5.8760]
$\theta = -1.00$				
n	PBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	θ^*	-0.0017[0.1129]	0.0011[0.1070]	-0.0032[0.0989]
	τ^*	-0.0010[0.1106]	-0.0014[1.3445]	-0.0012[16.267]
40	θ^*	0.0000[0.0482]	0.0026[0.0443]	-0.0010[0.0440]
	τ^*	0.0012[0.0484]	0.0054[0.5652]	-0.0025[6.9705]
60	θ^*	0.0002[0.0314]	-0.0006[0.0278]	-0.0017[0.0273]
	τ^*	0.0012[0.0309]	0.0004[0.3540]	-0.0004[4.3142]
$\theta = -5.00$				
n	PBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	θ^*	0.0045[4.1074]	-0.0076[3.0733]	-0.0054[2.9556]
	τ^*	-0.0001[0.1051]	-0.0029[1.0509]	-0.0052[12.413]
40	θ^*	0.0022[1.6714]	0.0012[1.3517]	-0.0025[1.3565]
	τ^*	0.0018[0.0445]	0.0009[0.4586]	-0.0023[5.6772]
60	θ^*	0.0003[1.0223]	0.0008[0.8993]	0.0023[0.8333]
	τ^*	0.0004[0.0272]	0.0012[0.3010]	0.0018[3.5206]

Quadro 3.18: Viés relativo com erro quadrático médio para o estimador corrigido bootstrap de θ e τ , com $n = 20, 40$ e 60 observações.

$\theta = -0.50$				
n	BBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\hat{\theta}$	-0.0186[0.0227]	-0.0145[0.0215]	-0.0082[0.0219]
	$\check{\tau}$	-0.0315[0.1466]	-0.0385[1.8370]	-0.0294[24.268]
40	$\hat{\theta}$	-0.0046[0.0103]	-0.0065[0.0095]	-0.0008[0.0097]
	$\check{\tau}$	-0.0038[0.0591]	-0.0115[0.7374]	-0.0036[9.3482]
60	$\hat{\theta}$	-0.0010[0.0065]	0.0015[0.0064]	-0.0011[0.0061]
	$\check{\tau}$	-0.0005[0.0383]	0.0023[0.4665]	-0.0029[5.8953]
$\theta = -1.00$				
n	BBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\hat{\theta}$	-0.0238[0.1132]	-0.0182[0.1062]	-0.0216[0.0983]
	$\check{\tau}$	-0.0224[0.1115]	-0.0265[1.3532]	-0.0275[16.296]
40	$\hat{\theta}$	-0.0037[0.0484]	0.0001[0.0442]	-0.0042[0.0438]
	$\check{\tau}$	-0.0023[0.0488]	0.0021[0.5669]	-0.0069[6.9654]
60	$\hat{\theta}$	-0.0010[0.0315]	-0.0017[0.0279]	-0.0029[0.0274]
	$\check{\tau}$	0.0000[0.0309]	-0.0010[0.3548]	-0.0021[4.3272]
$\theta = -5.00$				
n	BBC	$\tau = 1.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 10.0$
20	$\hat{\theta}$	-0.0223[4.0908]	-0.0316[3.0947]	-0.0287[2.9815]
	$\check{\tau}$	-0.0189[0.1046]	-0.0259[1.0499]	-0.0297[12.556]
40	$\hat{\theta}$	-0.0015[1.6751]	-0.0022[1.3603]	-0.0067[1.3599]
	$\check{\tau}$	-0.0008[0.0445]	-0.0024[0.4609]	-0.0066[5.6957]
60	$\hat{\theta}$	-0.0011[1.0275]	-0.0007[0.9016]	0.0009[0.8356]
	$\check{\tau}$	-0.0006[0.0274]	-0.0001[0.3016]	0.0003[3.5292]

Tabela 3.7. Norma quadrática do viés relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	0.1521	0.0044	0.0040	0.0977
	τ	0.1868	0.0040	0.0036	0.0283
$n = 40$	θ	0.0653	0.0022	0.0023	0.0040
	τ	0.2432	0.0031	0.0032	0.0054
$n = 60$	θ	0.0459	0.0012	0.0012	0.0015
	τ	0.0563	0.0016	0.0016	0.0015

Tabela 3.8. Média do erro quadrático médio relativo.

		EMV	CBC	PBC	BBC
$n = 20$	θ	0.1743	0.1102	0.1101	0.1099
	τ	0.2468	0.1498	0.1495	0.1517
$n = 40$	θ	0.0604	0.0477	0.0477	0.0478
	τ	0.0816	0.0629	0.0629	0.0632
$n = 60$	θ	0.0356	0.0303	0.0303	0.0304
	τ	0.0475	0.0397	0.0397	0.0399

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho, utilizamos simulações de Monte Carlo para investigar o comportamento dos diferentes métodos de correção de viés. Consideramos dois métodos de correção de viés até segunda ordem de forma analítica que diferem quanto a sua natureza: um é “corretivo”, isto é, aplicado após obtidos os estimadores de máxima verossimilhança, e o outro é “preventivo”, isto é, aplicado após introduzir um pequeno viés na função escore. Também consideramos um esquema de correção de viés de forma numérica onde o viés é estimado via um esquema bootstrap e então subtraído do estimador original.

Baseado nos quadros e tabelas apresentados, observamos que os vieses corrigidos de caráter corretivo e preventivo reduzem substancialmente o viés relativo dos estimadores de máxima verossimilhança, bem como o erro quadrático médio. Também quando comparamos os estimadores corretivo e preventivo, notamos que seus vieses e erros quadráticos médios são similares. Em geral, podemos concluir que ambos os estimadores têm performance equivalente na redução do viés e do erro quadrático médio dos estimadores de máxima verossimilhança. Porém, pode ser computacionalmente simples o uso da correção preventiva, pois apenas requer a introdução de um termo na função log-verossimilhança total.

Os estimadores bootstrap reduzem os vieses relativos, porém não tão efetivamente quanto os corrigidos analiticamente. Quanto ao erro quadrático médio, notamos que os estimadores bootstrap também o reduzem tornando-o até mesmo comparável aos dos estimadores corrigidos pelo viés de forma analítica.

Apêndice

Neste apêndice encontra-se o programa utilizado para estimar os parâmetros das distribuições gama, normal inversa, log-gama e log-beta-inversa utilizando as três metodologias discutidas nesta dissertação para correção de viés até segunda ordem. O programa foi escrito na linguagem de programação matricial Ox.

```
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#import <maximize>

/* variaveis globais */
static decl s_MX;
static decl s_MXb;
const decl IB = 1;

//const decl vpar1 = <0.25,1.0,4.0>;//dist. gama
//const decl vpar2 = <1.0,2.0,4.0>;//dist. gama

//const decl vpar1 = <0.5,1.0,2.0>;//dist. normal inversa
//const decl vpar2 = <0.1,1.0,10.0>;//dist. normal inversa

//const decl vpar1 = <0.25,1.0,5.0>;//dist. log-gama
//const decl vpar2 = <2.0,4.0,6.0>;//dist. log-gama

//const decl vpar1 = <0.5,1.0,5.0>;//dist. -log-beta
//const decl vpar2 = <1.0,3.0,10.0>;//dist. -log-beta

/* Funcao log-verossimilhana total da distribuio Gama */
floggamma(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
  adFunc[0] = -vP[1]*log(1/vP[0])-loggamma(vP[1])+vP[1]*meanc(log(s_MX))-
    vP[0]*meanc(s_MX);

  if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
    return 0;
  else
    return 1;
}

floggammaDF(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
  decl digama = polygamma(vP[1],1);

  adFunc[0] = -vP[1]*log(1/vP[0])-loggamma(vP[1])+vP[1]*meanc(log(s_MX))-vP[0]*meanc(s_MX)
    +(1/(2*sizer(s_MX)))*(log((vP[1]*digama-1)/vP[0]^2));

  if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
    return 0;
  else
    return 1;
}
```

```

fbgamma(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -vP[1]*log(1/vP[0])-loggamma(vP[1])+vP[1]*meanc(log(s_MXb))-
        vP[0]*meanc(s_MXb);

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
        return 0;
    else
        return 1;
}

/* Funcao log-verossimilhana modificada da distribuio normal inversa */
flogninv(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = 0.5*sizer(s_MX)*log(vP[1])-(vP[1]/(2*vP[0]^2))*sumc(s_MX)+sizer(s_MX)*
        (vP[1]/vP[0])-(vP[1]/2)*sumc(ones(sizer(s_MX),1)./s_MX) +(3/2)*
        log(vP[0]/vP[1]);

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
        return 0;
    else
        return 1;
}

/* Funo log-verossimilhana total da distribuio Log-beta-inversa */
flogbeta(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -loggamma(vP[0])-loggamma(vP[1])+loggamma(vP[0]+vP[1])-vP[0]*
        meanc(s_MX)+ vP[1]*meanc(log(1.0-exp(-s_MX)));

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;

    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

flbetaDF(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl digama1 = polygamma(vP[0],1);
    decl digama2 = polygamma(vP[1],1);
    decl digama = polygamma(vP[0]+vP[1],1);

    adFunc[0] = double(-loggamma(fabs(vP[0]))-loggamma(fabs(vP[1]))+loggamma(fabs(vP[0])+
        fabs(vP[1]))-fabs(vP[0])*meanc(s_MX)+fabs(vP[1])*meanc(log(1.0-exp(-s_MX)))
        +(1/(2*sizer(s_MX)))*log(digama1*digama2-digama*(digama1+digama2)));

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;

    else
        return 1; // 1 indica sucesso
}

flbBoot(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = -loggamma(vP[0])-loggamma(vP[1])+loggamma(vP[0]+vP[1])-vP[0]*meanc(s_MXb)+

```

```

        vP[1]*meanc(log(1.0-exp(-s_MXb)));

        if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) )
        return 0;

        else
        return 1; // 1 indica sucesso
    }

/* Funo log-verossimilhana total da distribuio Log-Gama*/
fLoggamma(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = vP[1]*log(vP[0])-loggamma(vP[1])+vP[1]*meanc(s_MX)-
        vP[0]*meanc(exp(s_MX));

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
        return 0;
    else
        return 1;
}

//verossimilhana modificada
fLgDF(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl loggama = polygamma(vP[1],1);

    adFunc[0] = vP[1]*log(vP[0])-loggamma(vP[1])+vP[1]*meanc(s_MX)-
        vP[0]*meanc(exp(s_MX))+(1/(2.0*sizer(s_MX)))*(log(loggama*vP[1]-1)-2*
        log(vP[0]));

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
        return 0;
    else
        return 1;
}

fLgBoot(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    adFunc[0] = vP[1]*log(vP[0])-loggamma(vP[1])+vP[1]*meanc(s_MXb)-
        vP[0]*meanc(exp(s_MXb));

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]))
        return 0;
    else
        return 1;
}

main()
{
// Declaracao das variaveis utilizadas
decl i,media,tempoexec, dist,Est_media,Est_ep,cfalha, cfalhaboot, mu,phi,j,k,
    theta,tau,c,NRepl,mu_hat, phi_hat, boot,vpb,irb,mBoot,mBootMC,Estim_DF,
    dfuncb,emvboot, cn, INMIN,INMAX, vies, EQM, ViesRel,vpar;

// Cabecario dos resultados
print( "\n\n\t\t\t PROGRAMA OX: ", oxfilename(0) );
print( "\n\n\t\t\t VERSO OX: ", oxversion() );

```

```

print( "\n\t\t ESTIMACAO: EMV, CBC, PBC e BBC" );
print( "\n\t\t DATA: ", date() );
print( "\n\t\t HORA: ", time(), "\n" );

tempoexec=timer(); //contagem do tempo de execucao
ranseed("GM"); //Selecao do gerador de numero aleatorios

//Escolha da distribuio :0-gama; 1 - normal inversa; 2- log-beta-inversa; 3- log-gama.
dist = 1;

//inicializacao das variaveis
INMIN = 20;
INMAX = 20;
NRepl = 1000;
mu_hat = 0;
phi_hat = 0;
theta = zeros(2,NRepl);
tau = zeros(2,NRepl);
mBoot = zeros(2,IB);
mBootMC = zeros(2,NRepl);
emvboot = zeros(2,NRepl);
Est_media = zeros(2,4);
Est_ep = zeros(2,4);
Estim_DF = zeros(2,NRepl);
vies = zeros(2,4);
EQM = zeros(2,4);
ViesRel = zeros(2,4);

// loop para diferentes tamanhos de amostra
for (cn = INMIN; cn <= INMAX; cn += 20)
{

//loop para os verdadeiros valores dos parametros
for (j = 1; j < 2; ++j)
{
mu = vpar1[j]; // valor de mu
// loop over values of q
for (k = 1; k < 2; ++k)
{
phi = vpar2[k]; // valor de phi
s_MX = zeros(cn,1); //

//inicializacao da contagem de falhas
cfalha = 0; // para Loop's de Monte Carlo
cfalhaboot = 0; // para Loop's do bootstrap

//Loop de Monte Carlos, 10000 replicas
for (i = 0; i < NRepl; ++i)
{
//Distribuio Gama
if (dist==0){
decl vp, dfunc, ir,vpDF,dfuncDF,irDF,vpar;
decl a =1/mu;
decl r = phi;
s_MX = rangamma(cn,1,r,a);// geracao da amostra com dist. gama
vp = ones(2,1); // Chute inicial dos parametros
vpDF = ones(2,1); //Chute inicial dos par. para a funcao ver. modificada

```

```

ir = MaxBFGS(floggamma, &vp, &dfunc, 0, TRUE); //maximizao da funcao de verossimilhanca
irDF = MaxBFGS(floggammaDF, &vpDF, &dfuncDF, 0, TRUE); //maximizao da fun. de ver. modificada

if((ir == MAX_CONV || ir == MAX_WEAK_CONV) &&
    (irDF == MAX_CONV || irDF == MAX_WEAK_CONV)) // criterio de convergencia
{
theta[0][i] = -vp[0]; //estimador de maxima verossimilhanca de theta
tau[0][i] = vp[1]; //estimador de maxima verossimilhanca de tau

decl digama = polygamma(vp[1],1);
decl trigama = polygamma(vp[1],2);

//estimadores corrigidos pelo vies
theta[1][i] = theta[0][i] - 0.5*( theta[0][i]*(-3*digama-tau[0][i]*trigama +
    2*tau[0][i]*digama^2)/(sizer(s_MX)*(tau[0][i]*digama-1)^2) );
tau[1][i] = tau[0][i] + 0.5*( 2 - tau[0][i]*digama + trigama*tau[0][i]^2) /
    (sizer(s_MX)*(tau[0][i]*digama-1)^2));

//metodologia preventiva de David Firth
Estim_DF[0][i] = -vpDF[0];
Estim_DF[1][i] = vpDF[1];

//metodologia numerica Bootstrap
for(boot=0; boot < IB; ++boot)
{
s_MXb = s_MX[ranu(cn,1)*cn];
vpb = ones(2,1); // valor inicial

irb = MaxBFGS(fbgamma, &vpb, &dfuncb, 0, TRUE);
if( (irb == MAX_CONV) || (irb == MAX_WEAK_CONV) ) // criterio de convergencia
{
mBoot[0][boot] = -vpb[0];
mBoot[1][boot] = vpb[1];

}
else
{
++cfalhaboot; //contagem de falhas
--boot;
}

}
mBootMC[i] = meanr(mBoot);
emvboot[i] = 2.0*(theta[0][i] | tau[0][i]) - mBootMC[i];

}
else
{
++cfalha; //contagem de falhas
--i;
}
}

// Distribuio Normal Inversa
if(dist==1)
{
decl vp, dfunc, irDF;
vp = ones(2,1); // valor inicial

```

```

s_MX = raninvgaussian(cn,1, mu, phi); //geracao da amostra com dist. normal inversa
mu_hat = sumc(s_MX)/cn; // EMV de mu
phi_hat = 1/( (1/cn)*sumc(ones(cn,1)./s_MX) - 1/mu_hat ); // EMV de phi
theta[0][i] = - phi_hat/(2.0*(mu_hat)^2);
tau[0][i] = - phi_hat/2.0;

//estimadores corrigidos pelo vies
theta[1][i]= theta[0][i]+(3/2)*(theta[0][i]*( 2*sqrt( theta[0][i]*tau[0][i] )+1 ) )
              /(cn*sqrt( theta[0][i]*tau[0][i] ) );
tau[1][i]= tau[0][i]+3*tau[0][i]/cn;

//metodologia preventiva de David Firth
irDF = MaxBFGS(flogninv, &vp, &dfunc, 0, TRUE);

if(irDF==MAX_CONV || irDF==MAX_WEAK_CONV) // criterio de convergencia
{
  Estim_DF[0][i] = -vp[1]/(2.0*vp[0]^2);
  Estim_DF[1][i] = -vp[1]/2.0;

  //metodologia nmerica Bootstrap
  for(boot=0; boot < IB; ++boot)
  {
    s_MXb = s_MX[ranu(cn,1)*cn];
    vpb = ones(2,1); // valor inicial

    decl b_mu_hat = meanc(s_MXb);
    decl b_phi_hat = 1/( (1/cn)*sumc(ones(cn,1)./s_MXb) - 1.0/b_mu_hat );

    mBoot[0][boot] = -b_phi_hat/(2.0*(b_mu_hat^2));
    mBoot[1][boot] = -b_phi_hat/2.0;

  }

  mBootMC[i] = meanr(mBoot);
  emvboot[i] = 2.0*(theta[0][i] | tau[0][i]) - mBootMC[i];
}
else
{
  --i;
}
}

//Dsistribuio Log-Beta-inversa
if(dist==2){
  decl vp, dfunc, ir, vpDF, dfuncDF, irDF;
  decl X = ranbeta(cn,1,mu , phi);

  s_MX = -log(X); // geracao da amostra com dist. log-beta-inversa
  vp = ones(2,1); //valor inicial
  vpDF = ones(2,1); //valor inicial

  //Estimador de maxima verossimilhana
  ir = MaxBFGS(flogbeta, &vp, &dfunc, 0, TRUE);
  irDF = MaxBFGS(flbetaDF, &vpDF, &dfuncDF, 0 , TRUE);

  if((ir == MAX_CONV || ir == MAX_WEAK_CONV) &&

```

```

    (irDF == MAX_CONV || irDF == MAX_WEAK_CONV)) //criterio de convergencia
{
    decl digama = polygamma(vp[1]-vp[0],1);
    decl digama1 = polygamma(-vp[0],1);
    decl digama2 = polygamma(vp[1],1);
    decl trigama = polygamma(vp[1]-vp[0],2);
    decl trigama1 = polygamma(-vp[0],2);
    decl trigama2 = polygamma(vp[1],2);

    //estimadores de maxima verossimilhanca
    theta[0][i] = -vp[0];
    tau[0][i] = vp[1];

    //estimadores corrigidos pelo vies
    theta[1][i] = theta[0][i]-0.5*( (digama*digama1*trigama2 - digama^2*trigama2 -
        trigama*digama1*digama2+trigama1*digama2^2 - 2.0*trigama1*digama*
        digama2 + trigama1*digama^2 - trigama*digama2^2)/
        ( sizer(s_MX)*(-digama1*digama2 + digama1*digama + digama*digama2)^2 ));

    tau[1][i] = tau[0][i]+0.5*( (trigama1*digama*digama2 - digama^2*trigama1 -
        trigama*digama1*digama2+trigama2*digama1^2 - 2.0*trigama2*digama*
        digama1 + trigama2*digama^2 - trigama*digama1^2)/
        ( sizer(s_MX)*(-digama1*digama2 + digama1*digama + digama*digama2)^2 ));

    //metodologia preventiva de David Firth
    Estim_DF[0][i] = -fabs(vpDF[0]);
    Estim_DF[1][i] = fabs(vpDF[1]);

    //metodologia nmerica Bootstrap
    for(boot=0; boot < IB; ++boot)
    {
        s_MXb = s_MX[ranu(cn,1)*cn];
        vpb = ones(2,1); // valor inicial

        // Estimador de maxima verossimilhanca
        irb = MaxBFGS(flbBoot, &vpb, &dfuncb, 0, TRUE);

        if( (irb == MAX_CONV) || (irb == MAX_WEAK_CONV) // criterio de convergencia
        {
            mBoot[0][boot] = -vpb[0];
            mBoot[1][boot] = vpb[1];

        }
        else
        {
            ++cfalhaboot; //contagem de falhas
            --boot;
        }

    }
    mBootMC[i] = meanr(mBoot);
    emvboot[i] = 2.0*(theta[0][i] | tau[0][i]) - mBootMC[i];
}
else
{
    ++cfalha; //contagem de falhas
    --i;
}
}

```

```

}

//Distribuio Log-Gama(a,r)
if (dist==3){
  decl vp, dfunc, ir,irDF,dfuncDF,vpDF;
  decl a =1/mu;
  decl r = phi;

  s_MX = log(rangamma(cn,1,r,a)); //geracao da amostra com dis. LG(r,a)
  vp = ones(2,1); //valor inicial
  vpDF = ones(2,1); //valor inicial

  ir = MaxBFGS(fLoggamma, &vp, &dfunc, 0, TRUE); //maximizacao da funcao de verossimilhana
  irDF = MaxBFGS(fLgDF, &vpDF, &dfuncDF, 0, TRUE); //maximizacao da fun. de ver. modificada

  if((ir == MAX_CONV || ir == MAX_WEAK_CONV) &&
      (irDF == MAX_CONV || irDF == MAX_WEAK_CONV)) // criterio de convergencia
  {
    theta[0][i] = vp[1]; //estimador de maxima verossimilhanca de theta
    tau[0][i] = -vp[0]; //estimador de maxima verossimilhanca de tau

    decl digama = polygamma(theta[0][i],1);
    decl trigama = polygamma(theta[0][i],2);

    //estimadores corrigidos pelo vies
    theta[1][i] = theta[0][i] + 0.5*( ( 2 - digama*theta[0][i]+trigama*(theta[0][i])^2)/
        (sizer(s_MX)*(digama*theta[0][i]-1)^2) );
    tau[1][i] = tau[0][i] + 0.5*( (tau[0][i]*(3*digama+trigama*theta[0][i]-2*theta[0][i]*
        digama^2))/(sizer(s_MX)*(theta[0][i]*digama-1)^2));

    //metodologia preventiva de David Firth
    Estim_DF[0][i] = vpDF[1];
    Estim_DF[1][i] = -vpDF[0];

    //metodologia nmerica Bootstrap
    for(boot=0; boot < IB; ++boot)
    {
      s_MXb = s_MX[ranu(cn,1)*cn];
      vpb = ones(2,1); // initial values

      // Estimador de maxima verossimilhanca
      irb = MaxBFGS(fLgBoot, &vpb, &dfuncb, 0, TRUE);

      if( (irb == MAX_CONV) || (irb == MAX_WEAK_CONV) ) // criterio de convergencia
      {
        mBoot[0][boot] = vpb[1];
        mBoot[1][boot] = -vpb[0];
      }
      else
      {
        ++cfalhaboot; //contagem de falhas
        --boot;
      }
    }

    mBootMC[i] = meanr(mBoot);
  }
}

```

```

    emvboot[i] = 2.0*(theta[0][i] | tau[0][i]) - mBootMC[i];
  }
  else
  {
    ++cfalha; //contagem de falhas
    --i;
  }
}

} //fim do for

//Impressao dos resultados

Est_media[0] = meanr((theta[0][0] | (tau[0][0]));
Est_media[1] = meanr((theta[1][0] | (tau[1][0]));
Est_media[2] = meanr(emvboot);
Est_media[3] = meanr(Estim_DF);

Est_ep[0] = varr(theta[0][0] | tau[0][0]).^0.5;
Est_ep[1] = varr(theta[1][0] | tau[1][0]).^0.5;
Est_ep[2] = varr(emvboot).^0.5;
Est_ep[3] = varr(Estim_DF).^0.5;

//Saida para a distribuicao gama
if(dist==0){
  vies[0] = Est_media[0] - (-1/mu | phi);
  vies[1] = Est_media[1] - (-1/mu | phi);
  vies[2] = Est_media[2] - (-1/mu | phi);
  vies[3] = Est_media[3] - (-1/mu | phi);

  EQM[0] = Est_ep[0]^2 + vies[0]^2 ;
  EQM[1] = Est_ep[1]^2 + vies[1]^2 ;
  EQM[2] = Est_ep[2]^2 + vies[2]^2 ;
  EQM[3] = Est_ep[3]^2 + vies[3]^2 ;

  ViesRel[0] = vies[0] ./ (-1/mu | phi);
  ViesRel[1] = vies[1] ./ (-1/mu | phi);
  ViesRel[2] = vies[2] ./ (-1/mu | phi);
  ViesRel[3] = vies[3] ./ (-1/mu | phi);

  println("\n\n\t\t Distribuicao Gama");
  print( "\n\nNUM. DE OBSERVACOES: ", cn );
  print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE MC: ", cfalha );
  print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE BOOTSTRAP: ", cfalhaboot );
  print("\nValor dos parametros: ", -1/mu | phi);
  print( "\nEstimativa da media: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
    {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_media);
  print( "\nEstimativa do erro padrao: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
    {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_ep);
  print( "\nVies Relativo das estimativas: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
    {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, ViesRel);
  print( "\nErro Quadratico Medio: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
    {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, EQM);
}

//Saida para a distribuicao normal inversa
if(dist==1){
  vies[0] = Est_media[0] - (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);

```

```

vies[] [1] = Est_media[] [1] - (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);
vies[] [2] = Est_media[] [2] - (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);
vies[] [3] = Est_media[] [3] - (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);

EQM[] [0] = Est_ep[] [0]^2 + vies[] [0]^2 ;
EQM[] [1] = Est_ep[] [1]^2 + vies[] [1]^2 ;
EQM[] [2] = Est_ep[] [2]^2 + vies[] [2]^2 ;
EQM[] [3] = Est_ep[] [3]^2 + vies[] [3]^2 ;

ViesRel[] [0] = vies[] [0] ./ (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);
ViesRel[] [1] = vies[] [1] ./ (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);
ViesRel[] [2] = vies[] [2] ./ (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);
ViesRel[] [3] = vies[] [3] ./ (-phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);

println("\n\n\t\t Distribuiçao Normal Inversa");
print( "\n\nNUM. DE OBSERVACOES: ", cn );
print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE MC: ", cfalha );
print( "\nValor dos parametros: ", -phi/(2.0*mu^2) | -phi/2.0);
print( "\nEstimativa da media: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_media);
print( "\nEstimativa do erro padrao: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_ep);
print( "\nVies Relativo das estimativas: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, ViesRel);
print( "\nErro Quadratico Medio: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, EQM);
}

//Saida para a distribuicao log-beta-inversa
if(dist==2){
vies[] [0] = Est_media[] [0] - (-mu | phi);
vies[] [1] = Est_media[] [1] - (-mu | phi);
vies[] [2] = Est_media[] [2] - (-mu | phi);
vies[] [3] = Est_media[] [3] - (-mu | phi);

EQM[] [0] = Est_ep[] [0]^2 + vies[] [0]^2 ;
EQM[] [1] = Est_ep[] [1]^2 + vies[] [1]^2 ;
EQM[] [2] = Est_ep[] [2]^2 + vies[] [2]^2 ;
EQM[] [3] = Est_ep[] [3]^2 + vies[] [3]^2 ;

ViesRel[] [0] = vies[] [0] ./ (-mu | phi);
ViesRel[] [1] = vies[] [1] ./ (-mu | phi);
ViesRel[] [2] = vies[] [2] ./ (-mu | phi);
ViesRel[] [3] = vies[] [3] ./ (-mu | phi);

println("\n\n\t\t Distribuicao -Log-Beta");
print( "\n\nNUM. DE OBSERVACOES: ", cn );
print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE MC: ", cfalha );
print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE BOOTSTRAP: ", cfalhaboot );
print( "\nValor dos parametros: ", -mu | phi);
print( "\nEstimativa da media: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_media);
print( "\nEstimativa do erro padrao: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_ep);
print( "\nVies Relativo das estimativas: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, ViesRel);
print( "\nErro Quadratico Medio: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, EQM);
}

```

```

}

//Saida para a distribuicao log-gama
if(dist==3){
vies[] [0] = Est_media[] [0]-(phi | -1/mu);
vies[] [1] = Est_media[] [1]-(phi | -1/mu);
vies[] [2] = Est_media[] [2]-(phi | -1/mu);
vies[] [3] = Est_media[] [3]-(phi | -1/mu);

EQM[] [0] = Est_ep[] [0].^2 + vies[] [0].^ 2 ;
EQM[] [1] = Est_ep[] [1].^2 + vies[] [1].^ 2 ;
EQM[] [2] = Est_ep[] [2].^2 + vies[] [2].^ 2 ;
EQM[] [3] = Est_ep[] [3].^2 + vies[] [3].^ 2 ;

ViesRel[] [0] = vies[] [0] ./ (phi | -1/mu);
ViesRel[] [1] = vies[] [1] ./ (phi | -1/mu);
ViesRel[] [2] = vies[] [2] ./ (phi | -1/mu);
ViesRel[] [3] = vies[] [3] ./ (phi | -1/mu);

println("\n\n\t\t Distribuicao Log-Gama");
print( "\n\nNUM. DE OBSERVACOES: ", cn );
print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE MC: ", cfalha );
print( "\nNUM. FALHA REPLICACAO DE BOOTSTRAP: ",cfalhaboot );
print("\nValor dos parametros: ",phi | -1/mu);
print( "\nEstimativa da media: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_media);
print( "\nEstimativa do erro padrao: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, Est_ep);
print( "\nVies Relativo das estimativas: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, ViesRel);
print( "\nErro Quadratico Medio: ", "%12.4f", "%r", {"theta", "tau"}, "%c",
      {"EMV", "V. COR.", "BOOT", "MODIFICADO"}, EQM);
}
}
}
}

// Rodape da saida
print( "\n\t\t DATA DO TERMINO DA EXECUCAO: ", date() );
print( "\n\t\t HORA DO TERMINO DA EXECUCAO: ", time(), "\n" );
println("\n\t\t TEMPO DE EXECUCAO: ", timespan(tempoexec));
print( "\n" );
} //fim do programa

```

Referências

- [1] Bartlett, M.S. (1953). Approximate confidence intervals I. *Biometrika*, **40**, 12-19.
- [2] Bowman, K.O. e Shenton, L.R. (1965). Biases and covariance of maximum likelihood estimates. *Report K-1633 Union Carbide Corporation*, Oak Ridge.
- [3] Cordeiro, G.M. e Cribari-Neto, F. (1998). On bias reduction in exponential and non-exponential family regression models. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **27**, 485-500.
- [4] Cordeiro, G.M. e Klein, R. (1994). Bias correction in ARMA models. *Statistics and Probability Letters*, **19**, 169-176.
- [5] Cordeiro, G.M. e McCullagh, P. (1991). Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **53**, 629-643.
- [6] Cordeiro, G.M. e Vasconcellos, K.L.P. (1997). Bias correction for a class of multivariate nonlinear models. *Statistics and Probability Letters*, **35**, 155-164.
- [7] Cordeiro, G.M. e Vasconcellos, K.L.P. (1999). Second-order biases of the maximum likelihood estimates in von Mises regression models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 901-910.
- [8] Cox, D.R. e Snell, E.J. (1968). A general definition of residuals (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **30**, 248-275.
- [9] Cribari-Neto, F., Botter, D.A., Cordeiro, G.M., Ferrari, S.L.P. (1998). Bias reduction in one-parameter exponential family models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **27**, 761-782.
- [10] Cribari-Neto, F., Vasconcellos, K.L.P. (2001). Nearly unbiased maximum likelihood estimation for the beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **72**, 107-118.
- [11] Dey, D. K., Gelfand, A.E. e Pen, F. (1997). Overdispersed generalized linear models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **64**, 93-107.
- [12] Doornik, J.A. (2001). *Ox: an Object-Oriented Matrix Programming Language*, 4^a ed. Londres: Timberlake Consultants & Oxford: <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik>.
- [13] Dudewicz, E.J. e Mishra, S.N. (1998). *Modern Mathematical Statistics*, 2^a ed. New York: Wiley.
- [14] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**, 1-26.

- [15] Ferrari, S.L.P., Botter, D.A., Cordeiro, G.M. e Cribari-Neto, F. (1996). Second and third order bias reduction for one-parameter family models. *Statistics and Probability Letters*, **30**, 339-345.
- [16] Ferrari, S.L.P. e Cribari-Neto, F. (1998). On bootstrap and analytical bias corrections. *Economics Letters*, **58**, 7-15.
- [17] Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, **80**, 27-38.
- [18] Fisher, R.A. (1925). *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd.
- [19] Gelfand, A.E. e Dalal, S.R. (1990). A note on overdispersed exponential families. *Biometrika*, **77**, 55-64.
- [20] Haldane, J.B.S. e Smith, S.M. (1956). The sampling distribution of a maximum likelihood estimate. *Biometrika*, **63**, 96-103.
- [21] Lindsay, B.G. (1986). Exponential family mixture models. *Annals of Statistics*, **14**, 124-137.
- [22] Nelder, J.A. e Wedderburn, R.W. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society A*, **135**, 370-384.
- [23] Press, W.H., Teukolsky, A.A., Vetterling, W.T. e Flannery, B.P. (1992). *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*, 2nd ed. New York: Cambridge University Press.
- [24] Shenton, L.R. e Bowman, K.O. (1962). *Maximum Likelihood Estimation in Small Samples*. London: Griffin.
- [25] Shenton, L.R. e Wallington, P.A. (1962). The bias of moment with an application to the negative binomial distribution. *Biometrika*, **49**, 193-204.
- [26] Vasconcellos, K.L.P. e Cordeiro, G.M. (1997). Approximate bias for multivariate nonlinear heteroscedastic regressions. *Braz. J. Prob. Statist.*, **11**, 141-159.