



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

DARLESON LUIZ ALVES DE OLIVEIRA

**Aplicação de um Método de Volumes Finitos Não Convencional para a Simulação Numérica da Carga Hidráulica em Aquíferos Confinados Altamente Heterogêneos**

Caruaru

2025

DARLESON LUIZ ALVES DE OLIVEIRA

**Aplicação de um Método de Volumes Finitos Não Convencional para a Simulação Numérica da Carga Hidráulica em Aquíferos Confinados Altamente Heterogêneos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

**Área de Concentração:** Recursos Naturais e Meio Ambiente.

**Linha de Pesquisa:** Modelagem Matemática e Computacional Aplicada em Recursos Naturais

**Orientador:** Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras.

**Coorientador:** Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes

Caruaru

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Oliveira, Darleson Luiz Alves de.

Aplicação de um Método de Volumes Finitos não convencional para a simulação numérica da carga hidráulica em aquíferos confinados altamente heterogêneos / Darleson Luiz Alves de Oliveira. - Caruaru, 2025.

111f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2025.

Orientação: Fernando Raul Licapa Contreras.

Coorientação: Alessandro Romário Echevarria Antunes.

Inclui referências.

1. Águas subterrâneas; 2. Carga hidráulica; 3. MODFLOW; 4. Métodos dos Volumes Finitos; 5. MPFA-D. I. Contreras, Fernando Raul Licapa. II. Antunes, Alessandro Romário Echevarria. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

DARLESON LUIZ ALVES DE OLIVEIRA

**APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS NÃO CONVENCIONAL  
PARA A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CARGA HIDRÁULICA EM AQUÍFEROS  
CONFINADOS ALTAMENTE HETEROGÊNEOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico Agreste, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de concentração: Recursos Naturais e Meio Ambiente.

Aprovado em: 30/06/2025.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fernando Raul Licapa Contreras (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Gustavo Bono (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. José Eduardo Alamy Filho (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Uberlândia

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Adrian Torrico Siacara (Examinador Externo)  
Universidade de São Paulo

*Dedico este trabalho àqueles que acreditaram em mim, mesmo nos momentos de dúvida. Àqueles que, com palavras de incentivo, gestos de carinho e exemplos de vida, me mostraram que o conhecimento é uma poderosa ferramenta para transformar sonhos em realidade.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, minha eterna gratidão. Foi Ele quem me deu a oportunidade e a força para percorrer essa caminhada até aqui. Em cada desafio, foi sua presença que me sustentou, me colocou de pé e me surpreendeu com graça, ânimo e coragem. Tudo o que conquistei é reflexo do Seu amor e fidelidade.

À minha esposa, Eduarda Tuany, minha companheira de todas as horas, que esteve ao meu lado com ternura, apoio e incentivo constantes. Às minhas filhas, Maria Cecília e Antonella, por entenderem minha ausência nos momentos de estudo e, com doçura, respeitarem o silêncio que eu tanto precisava. Vocês são meu alicerce e minha maior motivação. Aos meus pais, Luiz Oliveira e Dulcinea, agradeço pelo apoio incondicional e por acreditarem em mim mesmo quando não compreendiam totalmente esse caminho. Aos meus sogros, Elias e Vandeca, pela preocupação, cuidado e pelo amor que sempre me ofereceram como se eu fosse um filho. A todos os familiares, amigos e conhecidos que, de alguma forma, torceram por mim, rezaram e acreditaram no meu potencial, minha sincera gratidão.

Durante esta jornada, tive o privilégio de fazer grandes amigos na universidade. Em especial, agradeço ao querido amigo José Thiago, por sua companhia, lealdade e apoio nos momentos mais desafiadores meu muito obrigado. Ao Dr. Alberto de Barros Lima, minha gratidão pela prontidão, generosidade e apoio desde o início desta trajetória acadêmica.

Um agradecimento muito especial ao meu orientador, professor Fernando Contreras, cuja orientação foi marcada por amizade, dedicação e profundo compromisso. Obrigado por caminhar comigo com paciência, por me instruir com sabedoria e por acreditar no meu potencial. Ao professor Alessandro Antunes, meu coorientador, agradeço pela atenção metódica, pelas valiosas contribuições e pelo zelo em cada detalhe, sempre guiando minha pesquisa rumo à profundidade e à excelência.

À Universidade Federal de Pernambuco e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, minha gratidão pela estrutura, apoio e oportunidades concedidas. A todos os professores e funcionários que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica e pessoal, meu reconhecimento e respeito. Enfim, este trabalho é dedicado a todos aqueles que, de alguma forma, caminharam comigo e contribuíram para a realização deste sonho. Que cada palavra aqui escrita também seja um tributo à fé, ao amor e ao apoio que me sustentaram até aqui.

*”Este é um fruto de um caminho trilhado com fé, esforço e esperança.”*

(Darleson Oliveira)

## RESUMO

Os aquíferos subterrâneos são estruturas geológicas complexas que envolvem a dinâmica dos fluidos, governada por modelos matemáticos que, em geral, não possuem soluções analíticas. No entanto, por meio de simulações computacionais, é possível estimar e compreender o comportamento dos fluidos nos aquíferos. Assim, a simulação numérica tornou-se uma ferramenta de suma importância, permitindo a obtenção de soluções aproximadas por meio de métodos numéricos. Usualmente, a obtenção da distribuição da carga hidráulica e do fluxo de águas subterrâneas é realizada por meio de softwares comerciais, como FEFLOW, MODFLOW 6 e HydroGeoSphere. Contudo, dependendo da complexidade do aquífero, da malha utilizada e da presença de fluidos multicomponentes, esses softwares podem não ser capazes de fornecer soluções aproximadas consistentes, uma vez que empregam métodos numéricos convencionais. No presente trabalho, a equação da carga hidráulica é aproximada utilizando um método dos volumes finitos não convencional, centrado na célula, com aproximação do fluxo por múltiplos pontos, denominado Multi-Point Flux Approximation with Stencil Diamond (MPFA-D) aplicado em domínios bidimensionais. Nesse método, o fluxos são aproximados utilizando variáveis centradas nas células (incógnitas) e variáveis centradas nos vértices (variáveis auxiliares). Essas variáveis auxiliares são interpoladas por meio de uma combinação linear das variáveis centradas nas células localizadas na vizinhança dos vértices. O método Multi-Point Flux Approximation with stencil Diamond (MPFA-D), anteriormente utilizado em simulações de poços de petróleo, foi adaptado neste trabalho para simular a carga hidráulica em poços tubulares bidimensionais. Esse método é especialmente eficaz para lidar com meios porosos heterogêneos e malhas poligonais arbitrárias, inclusive aquelas com geometrias distorcidas. Os resultados obtidos demonstram boa acurácia e robustez, evidenciando a capacidade do MPFA-D na simulação de aquíferos subterrâneos. .

**Palavras-chaves:** Águas Subterrâneas, Carga hidráulica, MODFLOW, Métodos dos Volumes Finitos, MPFA-D



## ABSTRACT

Underground aquifers are complex geological structures that involve fluid dynamics governed by mathematical models for which there are generally no analytical solutions. With the help of computer simulations, however, it is possible to estimate and understand the behavior of fluids in aquifers. Thus, numerical simulation has become an extremely important tool that allows approximate solutions to be obtained by numerical methods. Usually, the distribution of hydraulic head and groundwater flow is calculated using commercial software such as FE-FLOW, MODFLOW 6 and HydroGeoSphere. However, depending on the complexity of the aquifer, the mesh used and the presence of multicomponent fluids, these software may not be able to provide consistent approximate solutions as they use conventional numerical methods. In this work, the hydraulic head equation is approximated using an unconventional cell-centered finite volume method with multi-point flux approximation, called Multi-Point Flux Approximation with Stencil Diamond (MPFA-D) applied in two-dimensional domains. In this method, the fluxes are approximated by cell-centered variables (unknowns) and vertex-centered variables (auxiliary variables). These auxiliary variables are interpolated by a linear combination of the cell-centered variables near the vertices. The MPFA-D method, originally developed for petroleum well simulations, has been adapted in this work to model the hydraulic head in two-dimensional tubular wells. This method is well-suited for handling complex porous media and general polygonal meshes, including highly distorted grids. The results demonstrate the method's accuracy and robustness, confirming its suitability for simulating groundwater aquifers.

**Keywords:** Groundwater, Hydraulic head, MODFLOW, Finite Volume Methods, MPFA-D.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de Aquíferos. . . . .	26
Figura 2 – Representação esquemática do aquífero confinado e do aquitarde. . . . .	28
Figura 3 – Representação esquemática de um aquíclode. . . . .	28
Figura 4 – Representação ciclo hidrológico. . . . .	29
Figura 5 – Sistemas ciclo hidrológico. . . . .	30
Figura 6 – Porosidade. . . . .	31
Figura 7 – Lei de Darcy. . . . .	34
Figura 8 – Volume de Controle. . . . .	37
Figura 9 – esquema numérico do CVFD. . . . .	43
Figura 10 – Malha Poligonal, ilustrando o "Diamond Path". . . . .	49
Figura 11 – Região de interação para a interpolação LPEW. . . . .	53
Figura 12 – (a) Campo de carga hidráulica obtido pelos métodos CVFD e MPFA-D em $(m)$ e (b) Campo de carga hidráulica $(m)$ obtido apenas pelo método MPFA-D. Ambos os resultados correspondem a 40 volumes de controle ( $\Delta x = 0,5$ ). . . . .	57
Figura 13 – (a) carga hidráulica malha não uniforme 40 VC em $(m)$ e (b) carga hidráulica malha não uniforme 160 VC em $(m)$ . . . . .	58
Figura 14 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	60
Figura 15 – (a) Malha quadrilateral ortogonal e (b) malha quadrilateral distorcida, ambas com 3.200 VC. . . . .	60
Figura 16 – (a) Distribuição da carga hidráulica analítica em $(m)$ , (b) condutividade hidráulica em $(m/d)$ , ambos em uma malha quadrilateral distorcida, com 3.200 VC. . . . .	62
Figura 17 – Distribuição dos erros: (a) obtido pelo MPFA-D em $(m)$ e (b) obtido pelo CFVD em $(m)$ , para uma malha quadrilateral ortogonal, ambas com 3.200 VC. . . . .	63
Figura 18 – Distribuição dos erros: (a) obtido pelo MPFA-D em $(m)$ e (b) obtido pelo CFVD em $(m)$ , para uma malha quadrilateral distorcida, ambas com 3.200 VC. . . . .	64
Figura 19 – Canais paralelos. . . . .	65
Figura 20 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	66

Figura 21 – M1 - Malha quadrilateral ortogonal. . . . .	66
Figura 22 – M2 - Malha quadrilateral ortogonal não estruturada com distorções acentuadas. . . . .	66
Figura 23 – M3 - Malha triangular estruturada. . . . .	66
Figura 24 – M4 - Malha triangular não estruturada. . . . .	67
Figura 25 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M1 em $(m)$ . . . . .	68
Figura 26 – Campo de carga hidráulica gerado pela solução analítica, malha M1 em $(m)$ . . . . .	68
Figura 27 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M2 em $(m)$ . . . . .	69
Figura 28 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M3 em $(m)$ . . . . .	69
Figura 29 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M4 em $(m)$ . . . . .	69
Figura 30 – Perfil da carga hidráulica, em $(m)$ para $y = 5$ , considerando a imposição da condição de contorno de Dirichlet aplicada no baricentro das células. . . . .	70
Figura 31 – Perfil da carga hidráulica, em $(m)$ para $y = 5$ , considerando a imposição da condição de contorno de Dirichlet na face do contorno. . . . .	70
Figura 32 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	73
Figura 33 – Malha quadrilateral ortogonal (M1). . . . .	74
Figura 34 – Malha quadrilateral distorcida (M2). . . . .	74
Figura 35 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ obtido com os métodos CVFD e MPFA-D, malha M1. . . . .	75
Figura 36 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ gerado como MODFLOW 6, malha M1 em $(m)$ . . . . .	75
Figura 37 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ obtido com o método CVFD, malha M2. . . . .	76
Figura 38 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ obtido com o método MPFA-D, malha M2. . . . .	76
Figura 39 – Perfil da carga hidráulica $(m)$ . . . . .	77
Figura 40 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	79
Figura 41 – Malha quadrilateral ortogonal (M1). . . . .	79
Figura 42 – Malha quadrilateral distorcida (M2). . . . .	80
Figura 43 – Campo de condutividade hidráulica, malha M2 em $(m/d)$ . . . . .	80
Figura 44 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ obtido pelos métodos CVFD e MPFA-D, malha M1. . . . .	81
Figura 45 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ obtido com MODFLOW 6, malha M1. . . . .	81
Figura 46 – Campo de carga hidráulica em $(m)$ obtido com o método MPFA-D, malha M2. . . . .	82
Figura 47 – Perfil da carga hidráulica $(m)$ . . . . .	82
Figura 48 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	83

Figura 49 – (a) Malha quadrilateral ortogonal M1 e (b) quadrilateral distorcida M2, ambas com 25 volumes de controle. . . . .	84
Figura 50 – Perfil da carga hidráulica $y=0,5$ . . . . .	85
Figura 51 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1, e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos obtido com o método MPFA-D para $t = 10s$ . . .	86
Figura 52 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M2 obtido com o método CVFD para $t = 10s$ . . . . .	87
Figura 53 – (a) Erro para malha M2 obtido com o método MPFA-D, e (b) Erro para malha M2 obtido com o método CVFD para $t = 10s$ . . . . .	87
Figura 54 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1, e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos obtido com o método MPFA-D para $t = 100s$ . .	88
Figura 55 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M2 obtido com o método CVFD para $t = 100s$ . . . . .	88
Figura 56 – Erro para malha M2 obtido com o método MPFA-D, e (b) Erro para malha M2 obtido com o método CVFD para $t = 100s$ . . . . .	89
Figura 57 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1, e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos obtido com o método MPFA-D para $t = 1000s$ . .	89
Figura 58 – Campo de carga hidráulica para malha M2 obtido com o método CVFD para $t = 1000s$ . . . . .	90
Figura 59 – (a) Erro para malha M2 obtido com o método MPFA-D, e (b) Erro para malha M2 obtido com o método CVFD para $t = 1000s$ . . . . .	91
Figura 60 – Perfil da carga hidráulica para malha M1 obtido com o método MPFA-D e solução analítica. . . . .	91
Figura 61 – Perfil da carga hidráulica para malha M2 obtido com os métodos MPFA-D, Control Volume Finite Difference (CVFD) e solução analítica. . . . .	92
Figura 62 – Perfil da carga hidráulica aplicando zoom em $y=0,5$ . . . . .	93
Figura 63 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	94
Figura 64 – (a) Malha quadrilateral ortogonal - M1 e (b) quadrilateral distorcida - M2, ambas com 729 volumes de controle. . . . .	95
Figura 65 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1 e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos os resultados estão expressos em ( $m$ ) para $t = 20$ dias. . . . .	96

Figura 66 – Campo de carga hidráulica para malha M1, obtido pelo MODFLOW 6, resultado em ( $m$ ) para $t = 20$ dias. . . . .	96
Figura 67 – (a) Perfil da carga hidráulica e (b) Perfil ampliado da carga hidráulica. . . .	97
Figura 68 – Domínio físico e as condições de contorno. . . . .	98
Figura 69 – (a) Malha quadrilateral ortogonal - M1 e (b) quadrilateral distorcida - M2, ambas com 1089 volumes de controle. . . . .	99
Figura 70 – Campo de carga hidráulica para malha M1, obtido pelo MODFLOW 6, resultado em ( $m$ ) para $t = 20$ dias. . . . .	100
Figura 71 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1 e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos os resultados estão expressos em ( $m$ ) para $t = 20$ dias. . . . .	101
Figura 72 – (a) Perfil da carga hidráulica e (b) Perfil ampliado da carga hidráulica. . . .	102

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Erro ( $\epsilon$ ) e taxas de convergência unidimensional ( $R_h$ ) utilizando diferentes refinamentos de malha. . . . .	58
Tabela 2 – Refinamentos de malha no teste de convergência bidimensional. . . . .	60
Tabela 3 – Erro ( $\epsilon$ ) e taxas de convergência bidimensional ( $R_h$ ) utilizando diferentes refinamentos de malha. . . . .	63
Tabela 4 – Erros obtidos pelos métodos. . . . .	71
Tabela 5 – Valores mínimos da carga hidráulica em ( $m$ ) para M1 e malha M2. . . . .	97
Tabela 6 – Valores mínimos da carga hidráulica em ( $m$ ) para M1 e malha M2. . . . .	102
Tabela 7 – Poços de observação para diferentes casos. . . . .	103
Tabela 8 – Valores da carga hidráulica para $t = 20$ dias nos poços de observação e erros dos métodos MPFA-D e MODFLOW 6 para Malha M1. . . . .	104
Tabela 9 – Valores da carga hidráulica para $t = 20$ dias nos poços de observação e erros dos métodos MPFA-D e CVFD para Malha M2. . . . .	105

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<b>CCDC</b>	condição de contorno Dirichlet no eixo da célula
<b>CCDF</b>	condição de contorno Dirichlet na face
<b>CVFD</b>	Control Volume Finite Difference
<b>LPEW</b>	Linearity-Preserving Explicit Weighted
<b>MAE</b>	Erro Absoluto Médio
<b>MDF</b>	Método das diferenças finitas
<b>MEF</b>	Método dos elementos finitos
<b>MPFA</b>	Multi-Point Flux Approximation
<b>MPFA-L</b>	Multi-Point Flux Approximation - Linear
<b>MPFA-O</b>	Multi-point Flux Approximation with Optimization
<b>MPFA-H</b>	Multi-point flux approximation method based on harmonic points
<b>MPFA-D</b>	Multi-Point Flux Approximation with stencil Diamond
<b>MVF</b>	Método dos volumes finitos
<b>NL-TPFA</b>	Nonlinear Two Point Flux Approximation method
<b>RRMSE</b>	Erro Médio Quadrático Relativo
<b>VC</b>	Volumes de controle
<b>VCFVM</b>	Vertex Centered Finite Volume Method

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1	JUSTIFICATIVA . . . . .	19
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO . . . . .	20
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivo Geral</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Objetivos específicos</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>3</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS DOS AQUÍFEROS</b> . . . . .	<b>26</b>
3.1	TIPOS DE AQUÍFEROS . . . . .	26
<b>3.1.1</b>	<b>Fluxo das Águas</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Propriedades dos Aquíferos</b> . . . . .	<b>30</b>
3.2	LEI DE DARCY . . . . .	33
<b>4</b>	<b>EQUAÇÕES GOVERNANTES</b> . . . . .	<b>36</b>
4.1	EQUAÇÃO GERAL DE FLUXO . . . . .	39
<b>4.1.1</b>	<b>Condições de Contorno</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA</b> . . . . .	<b>43</b>
5.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM VOLUME DE CONTROLE (CVFD) . . . . .	43
5.2	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS COM APROXIMAÇÃO DE FLUXO POR MÚLTIPLOS PONTOS COM STENCIL DO TIPO DIAMANTE (MPFA- D) . . . . .	45
5.3	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CARGA HIDRÁULICA APLICADA A FLUXO DE ÁGUAS SUBTERRÂNEAS . . . . .	46
5.4	LEMA . . . . .	48
5.5	INTERPOLAÇÃO DAS VARIÁVEIS AUXILIARES . . . . .	52
5.6	MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL . . . . .	53
<b>6</b>	<b>TESTES COM MPFA-D EM AQUÍFEROS EM ESTADOS ESTÁCIO- NÁRIO</b> . . . . .	<b>55</b>
6.1	ERROS E TAXAS DE CONVERGÊNCIA . . . . .	55
6.2	DISTRIBUIÇÃO DA CARGA HIDRÁULICA EM UM AQUÍFERO AL- TAMENTE HETEROGÊNEO . . . . .	56



6.2.1	<b>Caso Unidimensional</b> . . . . .	<b>56</b>
6.2.2	<b>Caso Bidimensional</b> . . . . .	<b>59</b>
6.3	AQUÍFERO ISOTRÓPICO ENTRE DOIS CANAIS PARALELOS COM PRECIPITAÇÃO . . . . .	65
6.4	AQUÍFERO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO COM POÇOS DE BOMBE- AMENTO E RECARGA . . . . .	72
6.5	FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA EM REGIÃO HETEROGÊNEA E ANISOTRÓPICA COM FRONTEIRA FLUVIAL . . . . .	78
<b>7</b>	<b>TESTES UTILIZANDO O MÉTODO MPFA-D EM AQUÍFEROS EM ESTADO TRANSIENTE</b> . . . . .	<b>83</b>
7.1	AQUÍFERO COM FLUXO DE DARCY NÃO ESTACIONÁRIO E HOMO- GÊNEO . . . . .	83
7.2	AQUÍFERO CONFINADO ISOTRÓPICO COM UM POÇO DE BOMBE- AMENTO . . . . .	93
7.3	AQUÍFERO CONFINADO ISOTRÓPICO COM QUATRO POÇOS DE BOM- BEAMENTO . . . . .	98
7.4	ANÁLISE DOS ERROS . . . . .	102
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>106</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>107</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A América do Sul abriga alguns dos maiores aquíferos do planeta e o Brasil se destaca como um dos países com maior disponibilidade de água, tanto superficial quanto subterrânea. No entanto, essa abundância não é homogênea em todo o território nacional. Em regiões como o semiárido brasileiro, a escassez de água superficial impõe desafios significativos ao abastecimento. Como alternativa, a população recorre ao uso das águas subterrâneas, que desempenham um papel fundamental no consumo humano, na agricultura e na pecuária. A extração dessas águas ocorre por meio de poços tubulares, cuja quantidade tem crescido exponencialmente nas últimas décadas. Segundo dados do Instituto Trata Brasil (2023), em 2005 havia cerca de 300 mil poços tubulares no Brasil. Já em, em 2019, esse número já superava 2,5 milhões, dos quais aproximadamente 88% eram clandestinos. Ademais, estima-se que cerca de 18% da população brasileira dependa diretamente da extração de água subterrânea para suprir suas necessidades diárias.

A dependência das águas subterrâneas é particularmente evidente em comunidades carentes, tanto em pequenas cidades do interior quanto em áreas urbanas de grandes capitais. A precariedade do saneamento básico e as dificuldades de acesso à água tratada levam uma parcela significativa da população a recorrer a essas fontes hídricas. No entanto, a ausência de um gerenciamento adequado e a falta de controle na exploração desses recursos podem comprometer a qualidade e a sustentabilidade dos aquíferos, tornando-os vulneráveis à degradação e à contaminação.

O crescimento desordenado do número de poços perfurados no país evidencia a necessidade urgente de medidas preventivas e de estratégias de gestão mais eficientes. Além disso, questões sociais, como a desigualdade no acesso aos sistemas de abastecimento e tratamento de água, reforçam a importância da adoção de práticas sustentáveis. Segundo Muyinda (2014), a implementação de modelos preditivos contribui para a formulação de políticas públicas e o planejamento de ações que garantam o uso racional e seguro das águas subterrâneas, especialmente em comunidades mais dependentes desse recurso. Diante desse cenário, a aplicação de modelos matemáticos e numéricos configura-se como uma ferramenta essencial para compreender, prever e mitigar os problemas associados à exploração das águas subterrâneas.

A modelagem matemática e numérica permite a simulação de diferentes cenários de escoamento e contaminação das águas subterrâneas, viabilizando a avaliação dos impactos de fatores

ambientais e de intervenções antrópicas (Maus, 2011). De acordo com Bakker e Vicent (2022) A complexidade dos aquíferos e das interações entre as variáveis envolvidas exige abordagens matemáticas robustas, capazes de formular equações diferenciais que descrevam os fenômenos hidrodinâmicos com precisão. Tais equações são complementadas por condições de contorno que representam as características físicas e os limites dos sistemas aquíferos.

No contexto da análise de fluxos subterrâneos, a modelagem matemática tem se consolidado como uma ferramenta indispensável para o estudo do comportamento dos aquíferos e para o desenvolvimento de estratégias de gestão sustentável (Bertolazzi; Manzini, 2004; Campana, 2014). Por meio dessas modelagens, torna-se possível prever a resposta dos aquíferos a diferentes condições de extração, avaliar riscos de contaminação e propor soluções voltadas à conservação dos recursos hídricos subterrâneos.

Diante desse contexto, este estudo propõe o desenvolvimento de ferramentas computacionais voltadas à gestão e à tomada de decisões relacionadas aos aquíferos. A utilização de modelos matemáticos e numéricos apresenta-se como uma alternativa eficaz, especialmente frente às dificuldades inerentes à realização de experimentos laboratoriais. A complexidade geológica do solo, somada à presença de múltiplos componentes nos fluidos subterrâneos, torna a obtenção de dados experimentais uma tarefa desafiadora, o que reforça a relevância da proposta apresentada para a análise desses sistemas.

Os modelos numéricos empregados nesses estudos baseiam-se em diferentes métodos, entre os quais se destacam o Método dos elementos finitos (MEF), o Método das diferenças finitas (MDF) e o Método dos volumes finitos (MVF). Esses métodos são amplamente utilizados em simuladores comerciais devido à sua capacidade de resolver as equações diferenciais que governam o fluxo subterrâneo. O MEF destaca-se por sua eficiência na solução de problemas acoplados, como o transporte de contaminantes e a movimentação do lençol freático, embora apresente desafios relacionados à complexidade de implementação e à resolução de problemas não lineares (Muyinda, 2014).

Por outro lado, simuladores comerciais como FEFLOW, MODFLOW, HydroGeoSphere e HYDRUS empregam diferentes métodos numéricos, como o MEF, o MDF, o Método de Galerkin e o Método de Newton-Raphson. No entanto, a aplicação desses métodos em cenários complexos pode demandar um alto custo computacional, o que representa um desafio adicional na análise de grandes sistemas aquíferos.

Entre os métodos disponíveis, o MVF se destaca por sua flexibilidade na representação geométrica e por sua capacidade de garantir a conservação local das propriedades físicas do

sistema. Enquanto o MDF se baseia em derivadas aproximadas nos nós da malha, o que pode comprometer a precisão dos resultados, o MVF utiliza a formulação integral sobre volumes de controle, assegurando a conservação exata da massa em cada volume. Essa característica torna o método especialmente eficaz na simulação de fluxos em meios porosos altamente heterogêneos e anisotrópicos, além de possibilitar o uso de malhas não estruturadas na representação de domínios com geometrias complexas.

Neste estudo, foi adotado o Método dos Volumes Finitos não convencional para modelar numericamente a carga hidráulica. Essa abordagem, originalmente aplicada em simulações de escoamento em reservatórios de petróleo, foi, pela primeira vez, empregada na análise da carga hidráulica em aquíferos caracterizados por elevada heterogeneidade e anisotropia. O desenvolvimento de modelos computacionais voltados para esse tipo de aplicação representa um avanço significativo na gestão dos recursos hídricos subterrâneos, possibilitando uma abordagem mais precisa e eficiente para a tomada de decisões relacionadas à exploração e conservação desses recursos.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

O estado de Pernambuco, situado na região Nordeste do Brasil, enfrenta desafios crescentes no que se refere à disponibilidade e à gestão dos recursos hídricos. Com um território de aproximadamente 98 mil km<sup>2</sup>, distribuído entre zonas litorâneas úmidas e regiões semiáridas no interior, o estado apresenta uma distribuição desigual desses recursos: cerca de 89% de sua área territorial encontra-se nas sub-regiões do Sertão e Agreste, que concentram apenas 20% da disponibilidade hídrica estadual (Agência Pernambucana de Águas e Clima (APAC), 2020).

Em muitas áreas, a crescente demanda por águas subterrâneas é impulsionada por dois fatores principais: o clima predominantemente árido em determinadas regiões e a insuficiência de infraestrutura para a distribuição de água em outras (Marengo, 2008; ANA, 2019). Essa realidade é particularmente evidente no semiárido pernambucano, onde as reservas hídricas superficiais são escassas e, frequentemente, intermitentes. Nessas circunstâncias, os aquíferos tornam-se fontes cruciais para o abastecimento de populações urbanas e rurais.

O abastecimento público de água, fornecido pelas companhias responsáveis, revela-se frequentemente incapaz de atender à demanda crescente, tornando o uso de poços tubulares uma alternativa cada vez mais adotada. O crescimento populacional ao longo dos anos intensificou essa necessidade, levando o poder público a investir na perfuração de novos poços. No entanto,

grande parte dessas intervenções ocorre sem planejamento adequado e sem um sistema eficaz de monitoramento e gestão dos recursos hídricos. Paralelamente, a ausência de redes de esgotamento sanitário eficientes, o uso disseminado de fossas sépticas e a prática do descarte de esgoto a céu aberto agravam a contaminação das águas superficiais e subterrâneas, comprometendo a qualidade e a disponibilidade desse recurso essencial, especialmente para as populações mais vulneráveis.

Diante desse contexto, torna-se imprescindível o desenvolvimento de estratégias que possibilitem o gerenciamento sustentável dos aquíferos, assegurando tanto a segurança hídrica quanto a preservação ambiental. As ferramentas computacionais surgem como recursos essenciais nesse processo, permitindo simular e prever o comportamento dos sistemas hídricos subterrâneos de forma rápida e confiável. A aplicação dessas ferramentas possibilita a obtenção de dados relevantes sobre a carga hidráulica e os padrões de fluxo da água, fornecendo subsídios técnicos para uma tomada de decisão mais precisa. Essas ferramentas são compostas por algoritmos computacionais que, por sua vez, dependem de métodos numéricos.

Neste trabalho, propõe-se o desenvolvimento de um modelo computacional baseado no MVF para a simulação do fluxo de águas subterrâneas, cujo foco principal é analisar e compreender a dinâmica desses sistemas, possibilitando previsões mais precisas sobre o comportamento da carga hidráulica nos aquíferos. A longo prazo, espera-se que essa ferramenta possa ser utilizada por pesquisadores e gestores públicos como um instrumento de apoio à formulação de políticas e estratégias voltadas à gestão eficiente dos recursos hídricos. Além disso, este estudo busca incentivar o desenvolvimento de pesquisas na área de simulação computacional aplicada às águas subterrâneas, promovendo avanços tecnológicos e contribuindo para a expansão da literatura acadêmica no Brasil.

## 1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

### 1.2.1 Objetivo Geral

Investigar e aplicar um método numérico não convencional, fundamentado no método dos volumes finitos linear, para a simulação de escoamentos de águas subterrâneas em aquíferos altamente heterogêneos.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Para alcançar nosso objetivo geral, apresentamos alguns objetivos específicos:

- Compreender os conceitos fundamentais e as equações que regem o escoamento de águas subterrâneas em aquíferos;
- Estudar, adaptar e implementar códigos computacionais do método de volumes finitos linear, com ênfase no método MPFA-D, para aplicação na simulação da carga hidráulica.
- Avaliar a acurácia e a robustez do método proposto por meio da resolução de benchmarks.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A partir da década de 1960, com o advento dos computadores, a simulação numérica tornou-se uma ferramenta crucial no estudo do fluxo de águas subterrâneas e na dispersão de contaminantes em aquíferos (Muyinda, 2014). Essas técnicas possibilitam a previsão das trajetórias de fluxo e das concentrações de substâncias transportadas pela água que percola no subsolo (Alamy; Miranda; Salla, 2013). Segundo (Muyinda, 2014), as soluções numéricas têm como objetivo determinar a distribuição espaço-temporal das variáveis de estado do modelo, em pontos selecionados no espaço e no tempo.

Para Qian *et al.* (2023), a análise computacional de águas subterrâneas em âmbito regional é fundamental para a gestão e proteção desse recurso natural valioso. Dessa forma, é imprescindível o desenvolvimento de metodologias numéricas capazes de resolver com precisão as equações de fluxo de águas subterrâneas em tempos satisfatórios. Métodos numéricos, como o MDF, o MEF e o MVF, são amplamente utilizados para lidar com os complexos sistemas de águas subterrâneas, fornecendo soluções numéricas a partir de um conjunto de equações algébricas que resultam em valores discretos de carga hidráulica.

O MEF, em sua formulação clássica, teve sua aplicação inicial voltada para a análise e simulação de estruturas, embora não seja totalmente eficaz na preservação de propriedades, como a conservação de massa. No entanto, destaca-se pela vantagem de empregar malhas não estruturadas. Para Lotti *et al.* (2006), o MEF consiste em discretizar um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as propriedades originais de cada elemento. O método é amplamente aplicado na análise do fluxo de águas subterrâneas, bem como na dispersão e no controle de contaminantes.

Sheu e Chen (2002) destaca a notável eficácia do MEF na simulação de contaminantes, buscando obter dados sobre a concentração de substâncias governadas pela equação de advecção-difusão não estacionária com degradação linear unidimensional. A degradação linear em uma dimensão consiste em um processo no qual a taxa de degradação de uma substância contaminante é proporcional à quantidade presente ao longo de uma única direção espacial. Já Ye *et al.* (2004) empregou o Método dos Elementos Finitos em múltiplas escalas para resolver a equação de fluxo de água subterrânea em meios porosos heterogêneos. Por sua vez, Chen, Zhou e Jing (2009) apresenta um MEF acoplado para a análise de fluxo multifásico, permitindo a obtenção de soluções numéricas para as equações governantes totalmente acopladas. Isso inclui a consi-

deração de condições iniciais e de contorno do domínio, bem como a formulação de modelos constitutivos para o tensor de módulo tangencial que representa as propriedades elásticas do material em diferentes direções e para o tensor de condutividade hidráulica, que expressa a capacidade de um material permitir o escoamento de fluido em função do estresse aplicado.

Atualmente, diversos softwares comerciais utilizam o MEF, sendo o FEFLOW um dos mais populares. Este software é destinado à modelagem de fluxo e transporte subsuperficial em meios porosos (Trefry; Muffels, 2007). Embora ofereça recursos avançados, como a modelagem do fluxo de água subterrânea, transporte de solutos, transporte de calor e transporte reativo, o FEFLOW apresenta elevado custo de aquisição, demanda treinamento especializado e requer considerável capacidade computacional. Além disso, a formulação matemática do MEF é geralmente mais complexa do que a adotada pelo MDF. No MEF, a variável dependente como a carga hidráulica é representada por uma função contínua dentro de cada elemento, sendo o domínio subdividido em elementos com formas geométricas simples, como triângulos ou quadriláteros em problemas bidimensionais, ou tetraedros e hexaedros em problemas tridimensionais. Por outro lado, o MDF utiliza uma grade regular composta por pontos ou células igualmente espaçados, em que a carga hidráulica é definida nos pontos nodais e assumida constante por partes entre eles; além disso, o MDF pode ser formulado com centralização na célula (Anderson; Woessner; Hunt, 2015).

Igboekwe e Achi (2011) emprega o MDF para modelagem da carga hidráulica, ressaltando que, para obtenção de resultados mais precisos, são necessários maiores recursos computacionais. A modelagem permite prever os efeitos da recarga nos aquíferos subterrâneos. Alamy, Miranda e Salla (2013) aplicaram o MDF na simulação do escoamento de águas subterrâneas em aquíferos não confinados, sujeitos a singularidades como poços e córregos. Vazquez-Baez *et al.* (2019) destaca que, por meio do Método das Diferenças Finitas, é possível obter uma estimativa do fluxo subterrâneo e identificar a localização ideal para a exploração de aquíferos. A aplicação prática desse método revelou informações valiosas sobre os parâmetros hidráulicos em cenários reais.

Tao *et al.* (2021) avalia os efeitos da recarga artificial em aquíferos. Já Lima (2001) aplicou o Método das Diferenças Finitas (MDF) para simular fluxos saturados em problemas lineares. Alguns simuladores comerciais utilizam o MDF, como o MODFLOW 6 e o ModelMuse este último é um simulador gratuito desenvolvido pelo U.S. Geological Survey. Esses softwares são amplamente empregados em estudos hidrogeológicos, incluindo avaliação de recursos hídricos subterrâneos, modelagem do transporte de contaminantes, previsão de subsidência do solo e



projeto de sistemas de remediação de águas subterrâneas. O MODFLOW 6 se destaca por ser de fácil acesso e por disponibilizar seu código-fonte publicamente (MODFLOW-USGS, 2023; Winston, 2009). Apesar da simplicidade de implementação, o MDF apresenta limitações em malhas irregulares, tornando-se menos adequado para domínios com geometrias complexas.

Para superar algumas limitações não abordadas pelos métodos MEF e MDF, o MVF destaca-se por representar adequadamente a física subjacente ao problema, possibilitando estimativas precisas da carga hidráulica. Segundo Maliska (2004), o MVF é fundamental por garantir a conservação local e global de propriedades físicas, como momento, energia e massa, especialmente em meios porosos, nos quais essas propriedades podem sofrer variações significativas em pequenas distâncias. Além disso, o método permite a aplicação em geometrias complexas e em malhas não estruturadas (Maliska, 2004; CHEN; HUAN; MA, 2006; Contreras *et al.*, 2016).

O MVF, baseado na integração das equações governantes do fluxo de fluidos sobre um volume de controle, destaca-se por sua adaptabilidade a malhas não uniformes e por garantir a conservação local das propriedades físicas (Muyinda, 2014). Segundo Sarma e Singh (2021), a simulação em aquíferos ocorre predominantemente sob duas perspectivas: a do fluxo e transporte de contaminantes e a dos modelos de fluxo, que detalham a distribuição espacial e temporal da carga hidráulica.

Os resultados do MVF obtidos por (Ambrus *et al.*, 2010), em conjunto com o Multi-Point Flux Approximation (MPFA) centrado na célula, utilizando duas entidades de volume de controle e uma região de interação, mostraram-se eficazes para aproximações de fluxo multiponto em malhas não estruturadas. No entanto, esse método apresenta limitações ao lidar com gradientes acentuados, devido à sua falta de monotonicidade incondicional. A monotonicidade refere-se à propriedade de um método numérico de preservar a ordem dos valores, evitando oscilações não físicas nos resultados. Outra metodologia baseada no Método dos Volumes Finitos, conforme aplicada por (Qian *et al.*, 2023) para abordar questões relacionadas à carga hidráulica, é o método de volumes finitos centrado no vértice (Vertex Centered Finite Volume Method (VCFVM)). Este método demonstrou desempenho significativo mesmo em malhas não conformes. Nessa abordagem, as incógnitas são atribuídas aos vértices, e o fluxo numérico entre dois vértices é expresso como uma função da carga hidráulica no vértice associado a uma superfície lateral, sendo essa superfície uma parte específica da rede de interação entre as cargas hidráulicas nos vértices.

Gao, Yi e Zheng (2021) introduziu o MPFA com malhas poligonais arbitrárias, considerando um fluxo conservativo, tanto local quanto globalmente. Já Gao *et al.* (2022) desenvolveu

---

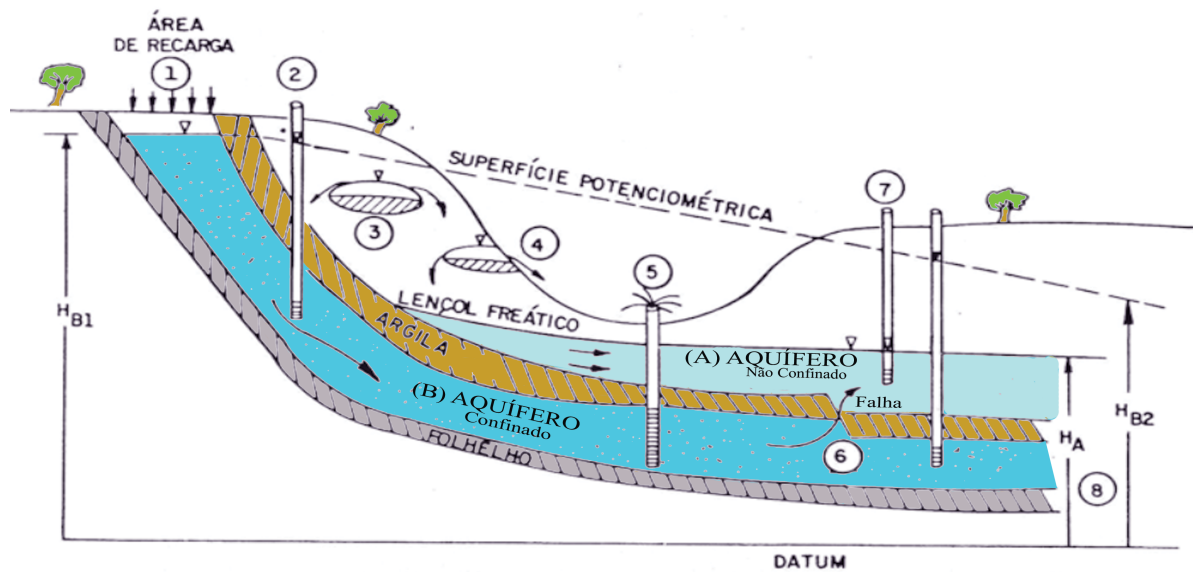
um modelo com MVF, similar ao MPFA, com incógnitas centradas na célula e malhas poligonais arbitrárias, aplicado ao fluxo de águas subterrâneas. Contreras *et al.* (2023b) propõe o MVF para o estudo do fluxo e transporte de contaminantes, utilizando um método não linear de aproximação de fluxo de dois pontos (Nonlinear Two Point Flux Approximation method (NL-TPFA)). Amaziane, Ossmani e Talali (2023) emprega o MVF com o MPFA upwind para discretização espacial com malhas não estruturadas, para análise da intrusão de águas salgadas em aquíferos costeiros. Recentemente, Contreras *et al.* (2023a) utilizou uma nova abordagem para resolver a equação da carga hidráulica, a qual foi discretizada por meio de um método não convencional de aproximação de fluxo multiponto centrado na célula com pontos harmônicos, denominado Multi-point flux approximation method based on harmonic points (MPFA-H). Este método mostrou grande potencial para simulações de águas subterrâneas.

Diante do exposto, este trabalho propõe a utilização do MVF linear com aproximação de fluxo por múltiplos pontos, utilizando um estêncil tipo diamante MPFA-D. Contreras *et al.* (2016) caracterizam esta formulação como linear, com variáveis primárias no centro de cada volume de controle e variáveis auxiliares nos vértices da malha computacional, interpoladas explicitamente. O resultado é uma combinação linear de variáveis centradas no volume de controle. Este método foi amplamente aplicado na simulação de reservatórios de petróleo.

### 3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DOS AQUÍFEROS

As águas subterrâneas correspondem à presença de água abaixo da superfície terrestre, situando-se sob o nível freático (Freeze; Cherry, 1979). Essas águas encontram-se em formações geológicas específicas denominadas aquíferos. Segundo (Cleary, 2007), um aquífero é uma formação geológica subterrânea capaz de armazenar e transmitir água sob gradientes hidráulicos naturais. De acordo com Muyinda (2014), um aquífero pode ser entendido como uma estrutura subterrânea composta por camadas ou estratos constituídos por materiais de elevada permeabilidade. Entre esses materiais, destacam-se as rochas sedimentares, o cascalho, a areia e outros depósitos porosos, que possuem a capacidade de reter água e permitir seu deslocamento por meio dos espaços vazios em sua estrutura. Assim, a organização desses elementos geológicos é fundamental para a constituição dos aquíferos, os quais desempenham um papel essencial na dinâmica e na disponibilidade dos recursos hídricos subterrâneos. Veja a Figura 1.

Figura 1 – Tipos de Aquíferos.



Fonte: Adaptado de Cleary (2007).

#### 3.1 TIPOS DE AQUÍFEROS

Os aquíferos são classificados, segundo a pressão da água que armazenam e os mecanismos de recarga, em duas categorias principais: confinados e não confinados Miranda (2012), Fetter (2001), Bear (1972). Os aquíferos não confinados, também denominados freáticos ou livres, caracterizam-se pela presença de uma zona de saturação cujo limite superior é a superfície freá-

tica, a qual corresponde à interface onde a pressão da água é igual à pressão atmosférica. Devido a essa configuração, esses aquíferos apresentam maior acessibilidade, sendo amplamente utilizados para o abastecimento público, a irrigação e atividades industriais Fetter (2001), Todd e Mays (2005).

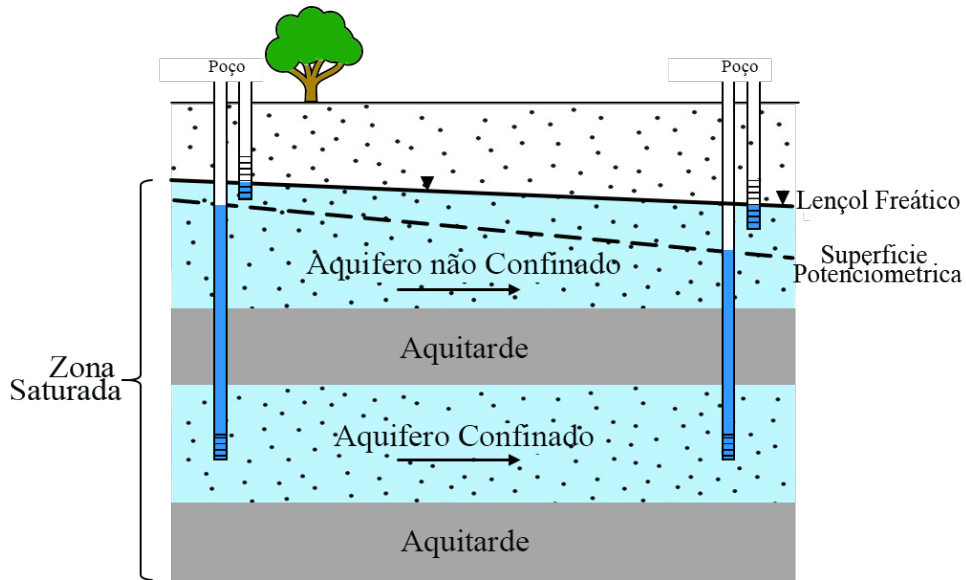
Adicionalmente, quanto às características da porosidade, os aquíferos podem ser classificados em porosos ou fraturados, conforme discutido por Ghelli (2018). Ressalta-se que, independentemente de serem confinados ou não confinados, os aquíferos podem apresentar comportamento típico de sistemas fraturados Feitosa *et al.* (2008). Nesses sistemas, a presença de descontinuidades estruturais, como falhas e fraturas, constitui vias preferenciais para o escoamento da água subterrânea, impactando diretamente tanto sua capacidade de armazenamento quanto sua dinâmica de fluxo.

Nos aquíferos fraturados confinados, a água é armazenada e conduzida por meio de uma rocha fraturada que se encontra sobreposta por uma camada impermeável, a qual impede a recarga direta a partir da superfície, mantendo a água sob pressão e, em diversas situações, possibilitando a ocorrência de poços artesianos. Por sua vez, os aquíferos fraturados não confinados ocorrem quando a rocha fraturada está diretamente exposta ou recoberta por material permeável, permitindo, assim, a recarga direta. Nesse contexto, o nível da água nas fraturas pode variar em função tanto da recarga natural quanto da extração realizada, tornando esses sistemas mais suscetíveis às variações ambientais Feitosa *et al.* (2008).

Essas distinções são fundamentais para a compreensão dos processos de armazenamento e escoamento da água subterrânea, além de serem indispensáveis para a formulação de estratégias eficazes de manejo sustentável dos recursos hídricos. Segundo Freeze e Cherry (2017), os aquíferos confinados estão localizados entre duas camadas aquitardes, como ilustrado na Figura 2. Nessas condições, a água encontra-se armazenada em formações geológicas permeáveis, submetida a pressões superiores à pressão atmosférica.

O aquitarde corresponde a uma unidade geológica caracterizada por camadas de baixa permeabilidade, que restringem o fluxo de água subterrânea entre aquíferos adjacentes. Embora não sejam capazes de fornecer vazões suficientes para a captação por meio de poços, os aquitardes possuem elevada capacidade de armazenamento, desempenhando um papel relevante na análise regional do fluxo subterrâneo (Cleary, 2007).

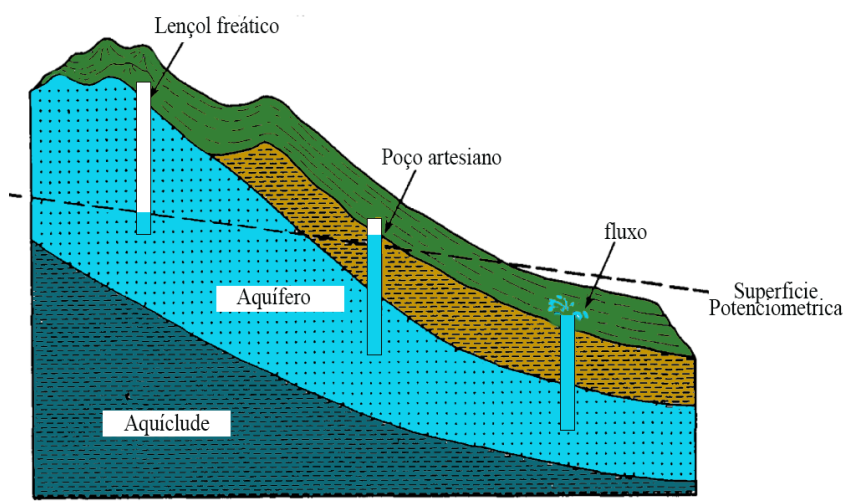
Figura 2 – Representação esquemática do aquífero confinado e do aquítarde.



Fonte: Adaptado de Cohen e Cherry (2020).

De acordo com Freeze e Cherry (2017), um aquíclode é uma unidade geológica saturada, porém incapaz de transmitir água, uma vez que se comporta como uma barreira impermeável que impede efetivamente o movimento da água subterrânea, conforme ilustrado na Figura 3. Normalmente, os aquíclodes são formados por materiais geológicos altamente compactos, como camadas de argila ou rochas com baixíssima permeabilidade, que bloqueiam a percolação da água através de sua matriz (Freeze; Cherry, 1979).

Figura 3 – Representação esquemática de um aquíclode.

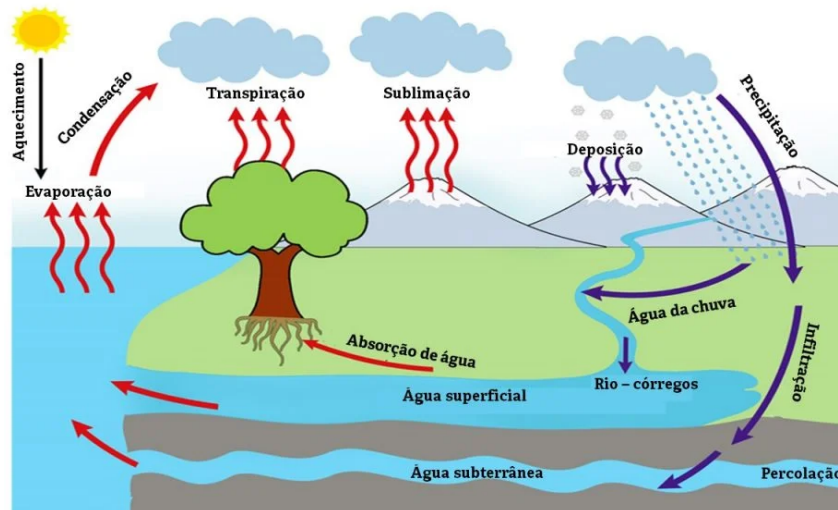


Fonte: Adaptado de Fetter (2001).

O armazenamento e a recarga dos aquíferos ocorrem em decorrência da precipitação, resultante do ciclo hidrológico (Ghelli, 2018). Esse ciclo consiste na circulação contínua da água

entre os oceanos, a atmosfera e a superfície terrestre. As águas provenientes das chuvas e do derretimento da neve abastecem as bacias hidrográficas e, ao infiltrarem no solo, promovem a recarga dos aquíferos, conforme ilustrado na Figura 4.

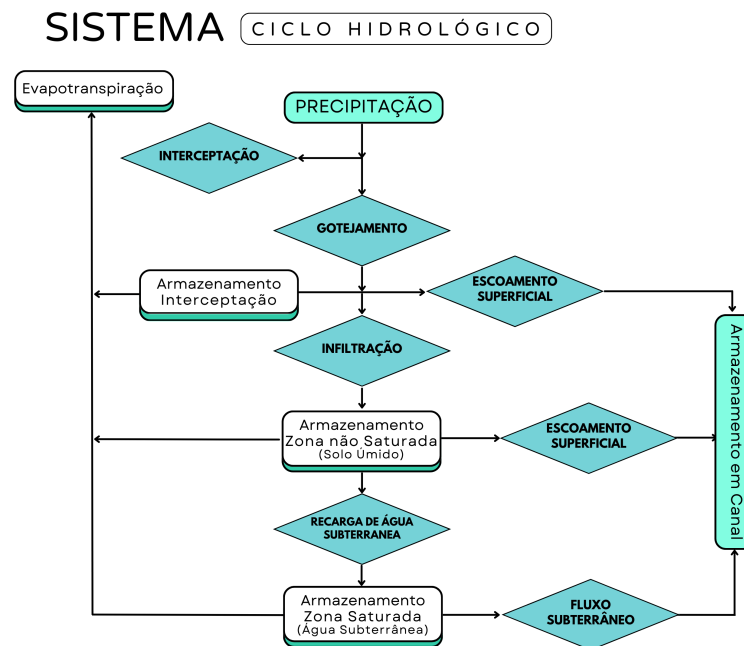
Figura 4 – Representação ciclo hidrológico.



Fonte: Santana (2023).

Segundo Freeze e Cherry (2017), o processo hidrológico subterrâneo não é apenas igualmente importante, mas pode ser considerado ainda mais crucial do que o processo superficial. Isso se deve ao fato de que a natureza dos materiais subterrâneos exerce um papel fundamental no controle das taxas de infiltração, influenciando tanto a temporalidade quanto a distribuição espacial do escoamento superficial.

Figura 5 – Sistemas ciclo hidrológico.



Fonte: Adaptado de Freeze e Cherry (2017).

### 3.1.1 Fluxo das Águas

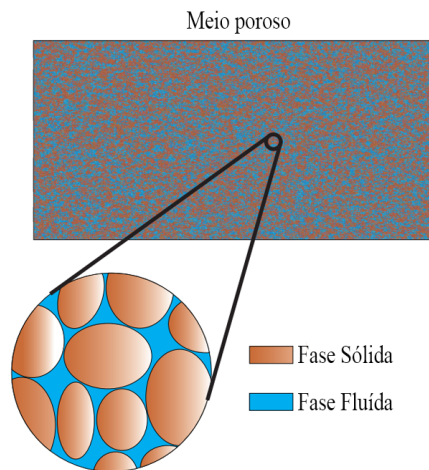
O movimento das águas subterrâneas ocorre em função da diferença de potencial hidráulico, ou carga hidráulica, presente no subsolo. Segundo Miranda (2012), a potencialidade de um aquífero está associada a parâmetros hidrogeológicos, tais como porosidade total, porosidade efetiva, espessura saturada, condutividade hidráulica, transmissividade, coeficiente de armazenamento, rendimento específico e velocidade de percolação. De acordo com Muyinda (2014), esses parâmetros possuem elevada relevância, pois, quando incorporados a modelos matemáticos, possibilitam a obtenção de soluções que contribuem significativamente para a compreensão da dinâmica do fluxo de água no interior dos aquíferos.

### 3.1.2 Propriedades dos Aquíferos

Os aquíferos possuem a capacidade de armazenar e transmitir água subterrânea, sendo que sua capacidade de transmissão pode ser quantificada numericamente por meio de propriedades hidrogeológicas específicas.

1. A porosidade ( $\phi$ ) é definida como a razão entre o volume de vazios e o volume total do material (Bear, 1972). Em um aquífero, essa propriedade representa os espaços vazios entre as partículas do subsolo, sendo fundamental para a capacidade de armazenamento e condução da água subterrânea (Domenico; Schwartz, 1998). Porosidades elevadas indicam maior aptidão para reter e transmitir água, impactando diretamente a eficiência do sistema aquífero. Conforme ilustrado na Figura 6, a representação do meio poroso evidencia a distinção entre a fase sólida, composta por solo e rocha, e a fase fluida, correspondente aos vazios saturados. Os níveis de porosidade podem ser determinados por meio da Equação 3.1 (Fetter, 2001).

Figura 6 – Porosidade.



Fonte: Adaptado de Maus (2011).

$$\phi = \frac{V_{\text{vazios}}}{V_{\text{total}}} \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1,  $V_{\text{vazios}}$  representa o volume dos espaços vazios no solo, por onde ocorre o fluxo da fase fluida, enquanto  $V_{\text{total}}$  corresponde ao volume total do material, englobando tanto a fase sólida quanto a fluida.

2. A carga hidráulica ( $h$ ) é definida com base no movimento da água em função do gradiente de energia, sendo esse movimento sempre direcionado de regiões de maior para menor potencial. A carga hidráulica corresponde à soma das energias potencial, de pressão e cinética, embora esta última geralmente seja desprezível em meios porosos (Miranda, 2012).

Com as seguintes componentes:



- Energia potencial por unidade de peso, também conhecida como altura manométrica, representada por  $z$ ;
- Carga piezométrica, representada por  $p/\gamma$ , sendo  $\gamma$  o peso específico da água;
- Carga cinética, representada por  $v^2/2g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

A carga hidráulica em um ponto pode ser definida como o somatório das cargas potencial, de pressão e cinética.

$$h = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \quad (3.2)$$

Onde:

- $h$  é a carga hidráulica;
- $z$  é a altura em relação a um ponto de referência;
- $p$  é a pressão do fluido;
- $\rho$  é a densidade do fluido;
- $\gamma$  é o peso específico da água;
- $v$  é a velocidade do fluido;
- $g$  é a aceleração da gravidade.

De acordo com Bear e Cheng (2010), em situações que envolvem o fluxo em meios porosos, a contribuição da energia cinética é significativamente menor que a da pressão, especialmente devido à baixa velocidade do fluido. Por esse motivo, o termo relativo à energia cinética pode ser desprezado na equação da carga hidráulica. Dessa forma, a Equação 3.2 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (3.3)$$

3.  $S$  é o coeficiente de armazenamento, definido como o volume de água que um aquífero libera ou armazena por unidade de área superficial (Ghelli, 2018). Esse coeficiente é utilizado para descrever as respostas do escoamento decorrentes das precipitações em bacias hidrográficas.

$$S = \frac{\Delta V}{\Delta \Theta} \quad (3.4)$$

- $S$  é o coeficiente de armazenamento;
- $\Delta V$  é a variação do volume de água retida pelo solo;
- $\Delta \Theta$  é a variação da umidade volumétrica do solo.

Essa equação expressa a relação entre a variação do volume de água retida pelo solo e a correspondente variação da umidade volumétrica do solo. O coeficiente de armazenamento é uma medida da capacidade do solo de reter água.

4.  $S_s$  é o armazenamento específico, definido como a quantidade de água que um material como solo ou aquífero pode armazenar por unidade de volume (Feitosa *et al.*, 2008). O parâmetro  $S_s$  caracteriza-se pela quantidade de água liberada ou absorvida por um aquífero em decorrência da variação unitária da carga hidráulica (Cleary, 2007). Esse parâmetro é fundamental em estudos hidrogeológicos, especialmente na formulação de modelos que consideram a capacidade de armazenamento do material como fator determinante para a compreensão da dinâmica das águas subterrâneas.

$$S_s = \frac{\Delta V}{V} \quad (3.5)$$

- $S_s$  é o armazenamento específico;
- $\Delta V$  é a variação do volume de água armazenada;
- $V$  é o volume do material.

O coeficiente de armazenamento refere-se à escala do aquífero como um todo, enquanto o armazenamento específico relaciona-se às propriedades intrínsecas do material que compõe o meio poroso.

5. O rendimento específico,  $S_y$ , é definido como a quantidade de água que um aquífero libera sob a ação da gravidade, isto é, a água que escoar livremente após a drenagem do aquífero (Miranda, 2012).

### 3.2 LEI DE DARCY

Henry Darcy, engenheiro francês do século XIX, formulou uma equação fundamental para a compreensão do movimento da água em meios porosos. A partir de experimentos, observou

que a taxa de fluxo (volume por unidade de tempo) é diretamente proporcional à área da seção transversal ( $A$ ) e à diferença de carga hidráulica ( $h_1 - h_2$ ) entre dois pontos (Feitosa *et al.*, 2008; Bear; Cheng, 2010).

A Lei de Darcy é expressa pela equação:

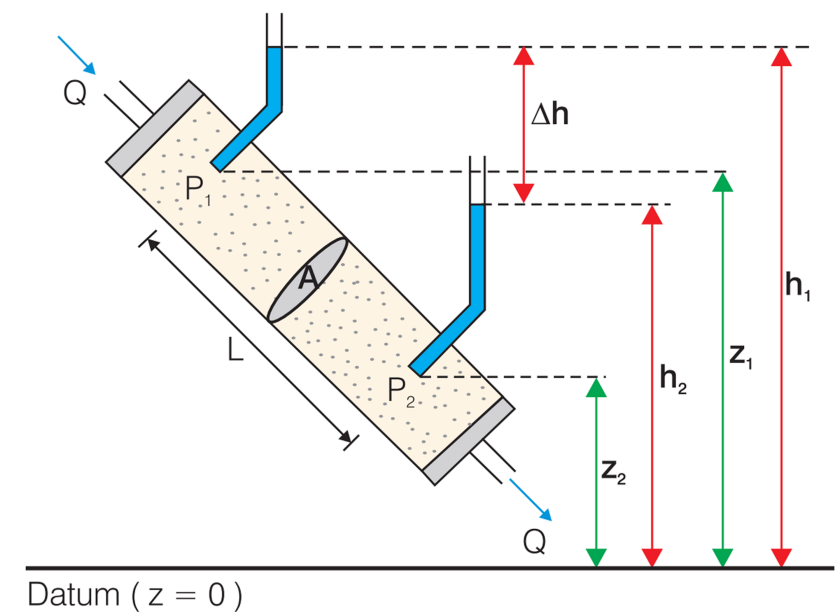
$$Q = K_s A \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (3.6)$$

Onde:

- $Q$  é a vazão entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  [ $L^3/T$ ];
- $K_s$  é a condutividade hidráulica do meio [ $L/T$ ];
- $A$  é a área da seção transversal do meio poroso [ $L^2$ ];
- $(h_1 - h_2)$  é a diferença de carga hidráulica entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  [ $L$ ];
- $L$  é a distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  [ $L$ ];
- $z_1$  e  $z_2$  são as cotas dos piezômetros nos respectivos pontos  $P_1$  e  $P_2$  [ $L$ ].

A Figura 7 ilustra a aplicação da Lei de Darcy.

Figura 7 – Lei de Darcy.



Fonte: Adaptado de Feitosa *et al.* (2008).

Substituindo  $(h_1 - h_2)$  por  $\Delta h$ , tem-se:

---

$$q = -K_s \frac{\Delta h}{L} \quad (3.7)$$

Onde:

- $q$  é o fluxo específico, ou vazão por unidade de área [L/T];
- $\Delta h$  é a variação da carga hidráulica ao longo do percurso [L];
- $L$  é a distância ao longo da qual ocorre o fluxo [L].

Em análises envolvendo volumes infinitesimais e equações diferenciais, é comum substituir o quociente  $\Delta h/L$  pelo gradiente  $\nabla h$ . O sinal negativo indica que o fluxo ocorre sempre na direção de menor potencial hidráulico.

Assim, a equação geral da Lei de Darcy torna-se:

$$q = -K_s \nabla h \quad (3.8)$$

Onde  $\nabla h$  representa o gradiente da carga hidráulica no espaço tridimensional  $(x, y, z)$ , e  $K_s$  é a condutividade hidráulica do meio, interpretada como um coeficiente de proporcionalidade entre o gradiente hidráulico e o fluxo.

#### 4 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Segundo Ghelli (2018), a equação que governa o escoamento subterrâneo baseia-se no princípio da conservação de massa, aplicado a um volume de controle infinitesimal do aquífero, conforme ilustrado na Figura 8. Nesse contexto, é necessário definir a equação para a descarga e o fluxo de massa de água. A descarga de massa corresponde à quantidade de massa que atravessa uma seção por unidade de tempo (Miranda, 2012).

$$\dot{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}}{\Delta t}, [MT^{-1}] \quad (4.1)$$

Na Equação 4.1,  $\dot{\mathfrak{M}}$  representa a descarga de massa de água, enquanto  $\mathfrak{M}$  corresponde à massa de água.

$$\mathfrak{M} = \rho \phi \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.2)$$

Consideram-se  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  como as dimensões do volume elementar nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, sendo  $\rho$  a densidade da água e  $\phi$  a porosidade do meio poroso.

Segundo Delleur (2007), o princípio do balanço de massa fundamenta-se na relação entre os fluxos que entram e saem de um sistema. Esse conceito estabelece que a variação no armazenamento é determinada pela diferença entre os fluxos volumétricos de entrada e de saída, refletindo o comportamento dinâmico do sistema em resposta a essas trocas. Conforme destacado por Freeze e Cherry (1979), essa abordagem é amplamente empregada em estudos de recursos hídricos, pois permite uma análise detalhada da interação entre os componentes do ciclo hidrológico e oferece uma base consistente para o gerenciamento e a modelagem de sistemas ambientais.

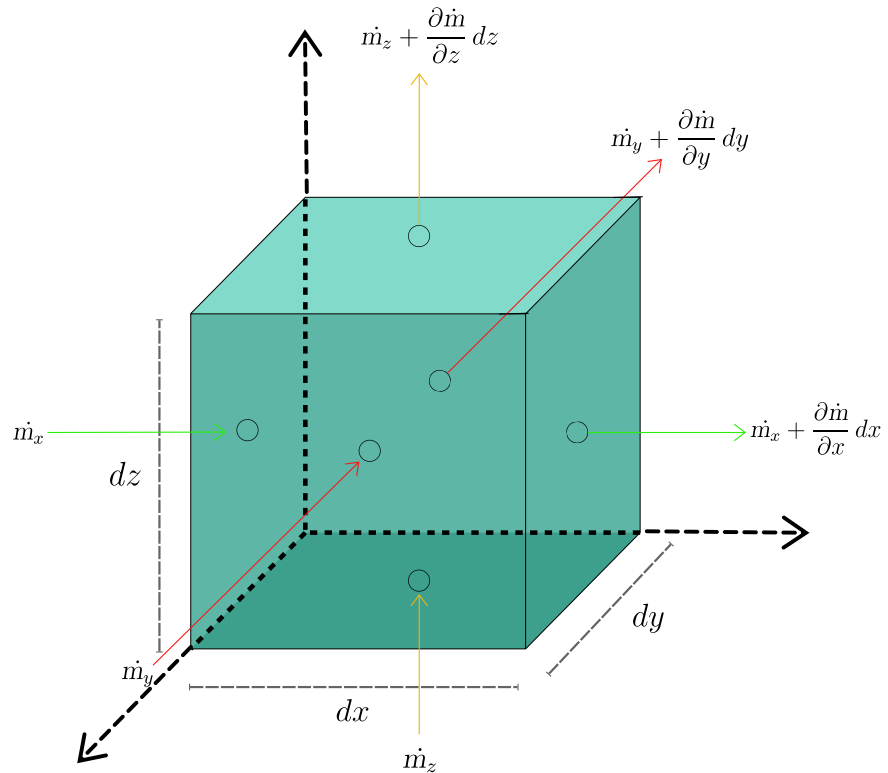
$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \text{entrada} - \text{saída} \quad (4.3)$$

O fluxo de massa, representado na Equação 4.4, é denotado por  $\dot{m}$  e corresponde à massa de água que escoar por unidade de tempo  $\Delta t$  e por unidade de área  $A$ :

$$\dot{m} = \frac{\mathfrak{M}}{\Delta t \cdot A} = \frac{\dot{\mathfrak{M}}}{A}, [MT^{-1}L^{-2}] \quad (4.4)$$

As informações que compõem a equação governante são obtidas a partir da análise do fluxo de massa no elemento infinitesimal do volume do aquífero, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Volume de Controle.



Fonte: Adaptado de Miranda (2012).

Segundo Muyinda (2014), o princípio da conservação de massa baseia-se no fluxo de entrada e saída de um sistema, resultando em um balanço que reflete a variação no armazenamento. Dessa forma, são analisados os fluxos de massa que atravessam as faces do elemento infinitesimal.

Aplicando esse princípio, tem-se:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{\mathcal{M}_{entra} - \mathcal{M}_{sai}}{dt} = \mathcal{M}_{entra} - \mathcal{M}_{sai} = \dot{m}_{entra} \cdot A_{entra} - \dot{m}_{sai} \cdot A_{sai} \quad (4.5)$$

As descargas de massa, reescritas em função do fluxo de massa e substituídas na Equação 4.5, resultam em:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{M}}{dt} = & \dot{m}_x dy dz + \dot{m}_y dx dz + \dot{m}_z dx dy - \left( \dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx \right) dy dz \\ & - \left( \dot{m}_y + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \left( \dot{m}_z + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz \right) dx dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

Na forma compacta, a Equação 4.6 é expressa por:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = - \left( \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (4.7)$$

Por outro lado, os autores (Wendland, 2003; Bear; Cheng, 2010; Muyinda, 2014) apresentam a Equação 4.7, conforme expressa a seguir na Equação 4.8.

$$-\left(\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.8)$$

O fluxo de massa  $\dot{m}_x$  na superfície do volume de controle é dado pelo produto da densidade  $\rho$  (massa por unidade de volume) pelo vetor fluxo  $\mathbf{q}$ , cujas componentes  $(q_x, q_y, q_z)$  representam as direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Dessa forma,  $\rho q_x$  corresponde ao fluxo de massa paralelo ao eixo  $x$ ,  $\rho q_y$  ao eixo  $y$ , e  $\rho q_z$  ao eixo  $z$ .

Para obter uma notação compacta utiliza-se o operador gradiente  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) [L^{-1}]$  obtendo-se a seguinte equação:

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.9)$$

Diante disso, ao reescrever a Equação 4.2, que representa a variação da massa com o tempo em um domínio infinitesimal, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (4.10)$$

Na Equação 4.10, as variáveis variam ao longo do tempo, incluindo a densidade da água  $\rho$ , a porosidade  $\phi$  e o volume de controle definido por  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Considerando que o meio poroso é incompressível, conforme discutido por (Delleur, 2007), assume-se neste trabalho que, sob condições naturais, apenas a deformação vertical é significativa, conforme descrito por Freeze e Cherry (1979). Dessa forma, apenas  $\Delta z$  varia com o tempo, enquanto  $\Delta x$  e  $\Delta y$  permanecem constantes. Assim, a Equação 4.10 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \phi \Delta x \Delta y \Delta z + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z + \rho \phi \frac{\partial (\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \quad (4.11)$$

Segundo Bear (1972), a compressibilidade tanto da água quanto do meio poroso pode ser expressa em função da variação da pressão da água. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} = \Delta z \alpha \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \beta \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes de compressibilidade do meio poroso e da água, respectivamente, e  $p$  representa a pressão da água.

Substituindo  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  na Equação 4.11, obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \phi \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \beta \frac{\partial p}{\partial t} \phi \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.13)$$

Como apenas  $\Delta z$  varia com o tempo:

$$\frac{\partial(\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} = \Delta x \Delta y \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \quad (4.14)$$

Substituindo  $\frac{\partial \Delta z}{\partial t}$  da equação 4.12:

$$\frac{\partial(\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.15)$$

Agora, substituimos os resultados na Equação 4.11:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \rho \beta \frac{\partial p}{\partial t} \phi \Delta x \Delta y \Delta z + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z + \rho \phi \Delta x \Delta y \Delta z \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.16)$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \rho \left[ \phi (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.17)$$

Combinando a Equação 4.17 com a Equação 4.8, tem-se:

$$-\left( \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) = \rho \left[ (\alpha + \phi \beta) \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (4.18)$$

Reescrevendo de forma compacta:

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = \rho \left[ (\alpha + \phi \beta) \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (4.19)$$

Tem-se, portanto, a equação geral da continuidade, que considera a variação no armazenamento de água como resultado dos fluxos de entrada e saída que atravessam o volume de controle.

#### 4.1 EQUAÇÃO GERAL DE FLUXO

A equação geral do fluxo é derivada pela combinação da Lei de Darcy, em sua forma simplificada, com a equação da conservação de massa (4.19). Esta última considera a conservação de massa por meio do termo de divergência  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{q})$ , que representa a variação de massa entrando e saindo de um volume de controle, juntamente com o termo no lado direito da equação, que modela o armazenamento ou a compressibilidade.



Para simplificar, divide-se a Equação 4.19 por  $\rho$ , assumindo que a densidade  $\rho$  é constante no meio poroso:

$$-\nabla \cdot q = (\alpha + \phi\beta) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.20)$$

Substituindo  $q$ , conforme definido pela Lei de Darcy, na Equação 4.19 e realizando as manipulações matemáticas subsequentes, obtém-se:

$$-\nabla \cdot (-K_s \nabla h) = (\alpha + \phi\beta) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.21)$$

O termo  $-\nabla \cdot (-K_s \nabla h)$  é simplificado pela eliminação dos sinais negativos, já que  $-(-K_s) = K_s$ . Dessa forma, a equação geral do fluxo pode ser expressa como:

$$-\nabla \cdot (-K_s \nabla h) = (\alpha + \phi\beta) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.22)$$

Considerando que as águas subterrâneas saturam completamente o meio poroso, seja  $\theta$  o teor de umidade e  $\phi$  a porosidade. Nesse caso, o teor de água é equivalente à fração do material saturado. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = (1 - \phi)\alpha \frac{\partial p}{\partial t} = (1 - \phi)\alpha \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.23)$$

Combinando as Equações 4.22 e 4.23, chega-se à seguinte forma da equação geral de fluxo:

$$-\nabla \cdot (-K_s \nabla h) = \rho g \theta (\alpha + \phi\beta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.24)$$

Entende-se a Equação 4.24 como a equação fundamental para o fluxo de água subterrânea. Essa equação permite calcular a carga hidráulica,  $h$ , em função das propriedades do meio poroso e da água. Assim, reescreve-se a Equação 4.22 da seguinte forma:

$$-\nabla \cdot (-K_s \nabla h) = \mu_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.25)$$

onde  $\mu_e = \rho g (\alpha + \phi\beta)$  é o armazenamento específico, que depende da compressibilidade do meio poroso e da água.

Conforme a Equação 4.26,  $M$  representa a espessura do aquífero. Para os casos de aquíferos confinados, a equação pode ser reescrita explicitando a espessura da seguinte forma:

$$-\nabla \cdot (-K_s M \nabla h) = \mu_e M \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.26)$$

Incluindo o termo fonte, que pode representar sumidouro, evaporação, precipitação e/ou recarga, na Equação 4.25, obtém-se:

$$-\nabla \cdot (-K_s M \nabla h) = \mu_e M \frac{\partial h}{\partial t} + f(x) \quad (4.27)$$

Na Equação 4.27,  $x$  representa o vetor de coordenadas no domínio bidimensional, por exemplo,  $x = (x, y)$ . A variável  $h$ , na Equação 4.28, representa a altura do nível da água, sendo especialmente relevante para aquíferos não confinados, também denominados aquíferos freáticos. Essa formulação permite uma descrição mais precisa dos processos de movimentação da água em condições naturais, fornecendo subsídios importantes para estudos hidrológicos e aplicações práticas.

$$-\nabla \cdot (-K_s(h) \nabla h) = \mu_d \frac{\partial h}{\partial t} + f(x) \quad (4.28)$$

Os termos presentes na equação possuem os seguintes significados:

- $\mu_d$ : rendimento específico do aquífero, que representa a capacidade de liberação de água por unidade de volume, decorrente da compressibilidade do material e da expansão da água.
- $K_s(h)$ : coeficiente de transmissibilidade do aquífero, que depende do nível da água  $h$ . Esse coeficiente indica a capacidade do meio poroso de transmitir água. A transmissibilidade  $K_s(h)$  varia com o nível  $h$ , pois a porosidade e a condutividade hidráulica podem depender da saturação do solo ou da rocha.

O termo à esquerda,  $\nabla \cdot (K_s(h) \nabla h)$ , representa o fluxo de água devido ao gradiente hidráulico, considerando que a condutividade hidráulica varia com o nível  $h$ . Já o termo à direita,  $\mu_d \frac{\partial h}{\partial t}$ , corresponde à variação temporal do nível da água, influenciada pelo armazenamento específico  $\mu_d$ .

A equação da carga hidráulica no estado estacionário é dada por:

$$-\nabla \cdot (-K_s \nabla h) = f(x) \quad (4.29)$$

### 4.1.1 Condições de Contorno

Para que a equação da carga hidráulica esteja bem definida do ponto de vista matemático, impõem-se as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$h(x,t) = h_D, \quad \text{em } \Gamma_D \times [0,t] \quad (4.30)$$

$$-K\nabla h \cdot \vec{n} = g_N, \quad \text{em } \Gamma_N \times [0,t] \quad (4.31)$$

$$h(x,t) = h_0, \quad \text{em } \Omega \text{ e } t = 0 \quad (4.32)$$

Onde:  $K = K_s M$  é o coeficiente de transmissibilidade do aquífero.

$$K_s = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

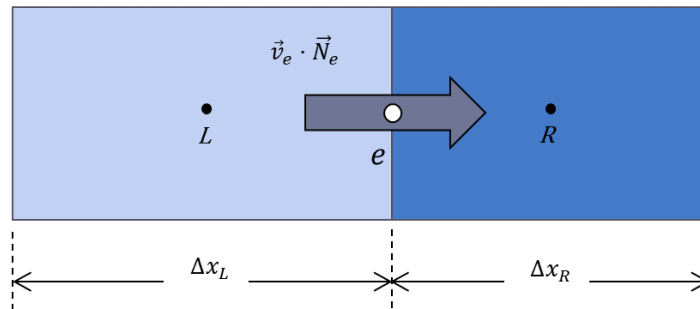
## 5 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

### 5.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM VOLUME DE CONTROLE (CVFD)

O método das Diferenças Finitas em Volume de Controle CVFD foi amplamente utilizado na simulação de escoamentos em meios porosos, sendo amplamente aplicado, por exemplo, na modelagem de reservatórios petrolíferos Edwards e Rogers (1998), Arnold *et al.* (2002), Hajibeygi, Karvounis e Jenny (2011), Eymard, Guichard e Masson (2012). O método CVFD calcula o fluxo através de uma interface  $\vec{e}$  com base na aplicação da Lei de Darcy, considerando o gradiente da carga hidráulica e as propriedades hidráulicas dos subdomínios adjacentes, sobretudo a permeabilidade. Dessa forma, é possível obter expressões para o fluxo normal à interface que garantem continuidade e coerência física nas trocas entre os volumes de controle.

A Figura 9 ilustra o esquema numérico do método CVFD aplicado à discretização do fluxo entre dois volumes de controle vizinhos em uma malha unidimensional.

Figura 9 – esquema numérico do CVFD.



Adaptado de Souza (2015).

Segundo Edwards e Rogers (1998) a quantificação do fluxo normal à interface é feita a partir de expressões distintas para cada lado da interface: esquerdo  $L$  e direito  $R$ , conforme apresentado nas equações a seguir:

$$(\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e)_L = -2K_L \left( \frac{h_e - h_L}{\Delta x_L} \right) \quad (5.1)$$

$$(\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e)_R = 2K_R \left( \frac{h_R - h_e}{\Delta x_R} \right) \quad (5.2)$$

Essas expressões envolvem duas variáveis principais: a carga hidráulica no ponto auxiliar  $h_e$ , situado sobre a interface, e os valores de carga nos centros dos volumes de controle adjacentes.

A determinação de  $h_e$  é fundamental para garantir a continuidade do fluxo através da interface, sendo esse o próximo passo da formulação.

De acordo com Souza (2015) A continuidade do fluxo impõe que a vazão proveniente de um dos lados da interface deve ser igual, em módulo e oposta em direção, àquela que entra pelo outro lado. Isso pode ser expresso por meio da seguinte relação:

$$(\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e)_L = -(\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e)_R \quad (5.3)$$

o que, ao se substituir as equações (5.1) e (5.2), conduz à equação:

$$-2K_L \left( \frac{h_e - h_L}{\Delta x_L} \right) = -2K_R \left( \frac{h_R - h_e}{\Delta x_R} \right) \quad (5.4)$$

A resolução da equação (5.4) fornece uma expressão explícita para a carga hidráulica no ponto intermediário  $h_e$ :

$$h_e = \frac{\frac{h_L K_L}{\Delta x_L} + \frac{h_R K_R}{\Delta x_R}}{\frac{K_L}{\Delta x_L} + \frac{K_R}{\Delta x_R}} \quad (5.5)$$

A Equação 5.5 representa uma média harmônica ponderada dos valores de carga hidráulica, levando em consideração tanto a permeabilidade quanto a distância de cada subdomínio ao ponto  $e$ . Substituindo  $h_e$  em uma das expressões de fluxo (por exemplo, na equação (5.1)), obtém-se a forma final do fluxo através da interface:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e = -\frac{2K_R K_L}{K_R \Delta x_L + K_L \Delta x_R} (h_R - h_L) \quad (5.6)$$

A equação (5.6) evidencia que o fluxo na interface depende diretamente da diferença de carga hidráulica entre os volumes de controle vizinhos, sendo ponderado pelas permeabilidades e pelas dimensões desses volumes. O método CVFD empregado neste trabalho foi adaptado de (Souza, 2015). Esta formulação é particularmente robusta e eficiente quando aplicada a malhas estruturadas, sendo amplamente empregada em modelagens de escoamento subterrâneo em meios porosos.

Entretanto, como evidenciado por Keilegavlen e Aavatsmark (2011), esse método perde consistência em malhas não estruturadas ou geometricamente distorcidas, comprometendo a precisão dos resultados em simulações mais complexas. De modo semelhante, Contreras *et al.* (2023b) destaca que o CVFD apresenta limitações quanto à flexibilidade para trabalhar com

malhas não estruturadas e tensores de difusão completos, o que pode resultar em perda de precisão, além de dificultar a convergência.

## 5.2 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS COM APROXIMAÇÃO DE FLUXO POR MÚLTIPLOS PONTOS COM STENCIL DO TIPO DIAMANTE (MPFA-D)

O Método dos Volumes Finitos (MVF) foi proposto por McDonald em 1971, inicialmente aplicado à resolução de problemas bidimensionais. Com o avanço das técnicas, esse método foi ampliado para lidar com problemas tridimensionais, mostrando-se uma ferramenta bastante vantajosa, especialmente pela sua flexibilidade para tratar geometrias complexas. O MVF pode ser utilizado tanto com malhas estruturadas quanto não estruturadas, proporcionando boas aproximações em diversas situações.

Esse método destaca-se como uma técnica poderosa para a aproximação de fluxos em superfícies de controle. A aplicação do Teorema da Divergência de Gauss permite resolver o problema ao transformar a integral de volume, associada aos volumes de controle (Volumes de controle (VC)), em uma integral de superfície desses volumes. Essa abordagem numérica possibilita uma aproximação precisa dos fluxos nas superfícies de controle, resultando em uma integral que representa fielmente a integral original, conforme descrito por (Contreras, 2012).

Para resolver as equações governantes previamente estabelecidas, utiliza-se o método de volumes finitos não clássico. Esse método consiste na subdivisão do domínio contínuo, denominado  $\Omega$ , em um número finito de volumes de controle. A discretização do domínio  $\Omega$  é realizada considerando as faces, os centroides e os próprios volumes de controle, que frequentemente possuem formas poligonais, o que possibilita a aplicação eficaz da metodologia.

O método de aproximação de fluxo com múltiplos pontos (MPFA) surgiu como uma alternativa mais robusta ao tradicional método de volumes finitos com diferenças centradas (CVFD), o qual é limitado a malhas ortogonais e a campos de permeabilidade alinhados à malha. Desenvolvido a partir do final da década de 1990, especialmente por pesquisadores do Instituto Norueguês de Pesquisa em Computação (SINTEF), o MPFA foi proposto para garantir a consistência e a conservação local de massa em simulações numéricas de escoamento em meios porosos altamente heterogêneos e anisotrópicos. Um dos principais idealizadores da técnica é (Aavatsmark, 2002), cuja contribuição é amplamente reconhecida na literatura especializada.

Ao contrário do CVFD, que utiliza apenas dois pontos para calcular o fluxo através de uma face, o MPFA considera múltiplos pontos em torno de cada interface, permitindo uma formu-

lação que incorpora variações espaciais mais complexas da permeabilidade e da geometria da malha. Isso o torna particularmente adequado para simulações em malhas não estruturadas e para meios com anisotropia não alinhada.

Com o avanço das pesquisas, diversas variantes do método MPFA foram desenvolvidas, incluindo o Multi-point Flux Approximation with Optimization (MPFA-O), o Multi-Point Flux Approximation - Linear (MPFA-L) e, mais recentemente, o MPFA-D, que surgiu no início da década de 2010. O MPFA-D foi inicialmente utilizado por Gao e Wu (2010) para discretizar a equação de pressão e, posteriormente, adaptado por Contreras *et al.* (2016) e Souza *et al.* (2018) para simulações de escoamento bifásico em reservatórios de petróleo. Esse método emprega um stencil do tipo diamante para construir células auxiliares ao redor das interfaces dos volumes de controle, o que permite capturar com maior precisão os efeitos da anisotropia e as distorções geométricas da malha (Edwards; Rogers, 1998).

Dessa forma, o MPFA-D representa uma evolução significativa das aproximações de fluxo em meios porosos, combinando a capacidade de lidar com complexidade geométrica e heterogeneidade com estabilidade numérica, sendo uma técnica promissora em simulações hidrodinâmicas e de reservatórios.

Embora tradicionalmente utilizado em simulações de escoamento em reservatórios de petróleo, o MPFA-D é aqui, pela primeira vez, implementado para a modelagem de escoamento em aquíferos no contexto de águas subterrâneas. As malhas para esse tipo de simulação podem ser geradas por softwares como o *Gmsh*. O código numérico associado ao método pode ser implementado em diversas linguagens de programação, como *MATLAB*, *Python* e *Julia*, proporcionando flexibilidade e acessibilidade para aplicações acadêmicas e de pesquisa.

Na seção a seguir, apresenta-se a formulação matemática do método, bem como o processo de discretização e sua aplicação no contexto do escoamento subterrâneo.

### 5.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CARGA HIDRÁULICA APLICADA A FLUXO DE ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

Escrevendo a Equação 4.27 da carga hidráulica de forma genérica, obtém-se:

$$\mu_e M \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{v} - f(x), \vec{v} = -K_s M \nabla h \quad (5.7)$$

ou ainda reescrevendo assim:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q, \text{ onde } \vec{v} = -K_s M \nabla h \quad (5.8)$$

A modelagem matemática de problemas relacionados ao fluxo em meios porosos é amplamente fundamentada em equações diferenciais parciais que descrevem os fenômenos de transporte de massa. Dentre as equações fundamentais, destaca-se a conservação de massa combinada com a Lei de Darcy, que fornece uma descrição precisa do escoamento. Para viabilizar a implementação numérica dessa modelagem, é necessária a discretização da equação governante.

Para compreender melhor os fenômenos físicos e sua implementação numérica, integra-se a Equação 5.7 no tempo e no espaço, resultando em sua formulação integral:

$$\int_t \int_{\Omega} \mu_e \frac{\partial h}{\partial t} dV dt = - \int_t \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dV dt - \int_t \int_{\Omega} f(x) dV dt \quad (5.9)$$

Essa formulação permite analisar as contribuições acumuladas de cada termo ao longo do tempo e do domínio, separando-os em componentes que podem ser tratados de forma independente na etapa de discretização.

A resolução numérica requer a discretização dos termos da equação. Para o termo do fluxo, utiliza-se o Teorema da Divergência, que estabelece que a integral volumétrica da divergência de um campo vetorial pode ser transformada em uma integral de contorno:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (5.10)$$

Para cada volume de controle  $k$ , define-se  $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ . Aplicando essa propriedade ao termo do fluxo na equação governante, obtém-se:

$$\int_t \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{v}) d\Omega dt = \int_t \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla \cdot \vec{v} dV_k dt = \sum_k \int_t \int_{\partial\Omega_k} \nabla \cdot \vec{v} dV_k dt = \int_t \int_{\partial\Omega_k} \vec{v} \cdot \vec{n} dA dt \quad (5.11)$$

Onde  $|e|$  representa a área (ou norma) da face  $e$ . No contexto da discretização numérica, a integral de contorno é aproximada pela soma dos fluxos normais nas interfaces  $e$  dos volumes de controle:

$$\int_t \int_{\partial\Omega_k} \vec{v} \cdot \vec{n} dA dt = \Delta t \sum_{e \in \partial\Omega_k} \vec{v}_e \cdot \vec{N}_e; \quad \vec{v}_e = \frac{1}{|e|} \int \vec{v} dA; \quad \vec{N}_e = |e| \vec{n} \quad (5.12)$$

O termo de variação temporal  $\frac{\partial h}{\partial t}$  é aproximado pelo método de Euler implícito, que utiliza a diferença finita entre os valores da carga hidráulica nos instantes  $n + 1$  e  $n$ :



$$\int_t \int_{\Omega} \mu_e \frac{\partial h}{\partial t} dV dt = \mu_e (h^{n+1} - h^n) V_k \quad (5.13)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, o termo fonte é considerado constante dentro de cada volume de controle  $V_k$  e pode ser aproximado por:

$$\int_t \int_{\Omega} f(x,t) dV dt = \Delta t (\bar{f}(x) V_k) \quad (5.14)$$

Combinando os termos discretizados, obtém-se a equação final que representa a variação do armazenamento, os fluxos nas interfaces dos volumes de controle e as contribuições dos termos fonte no intervalo de tempo considerado:

$$\mu_e (h^{n+1} - h^n) V_k = -\Delta t \left( \sum_{e \in \partial \Omega_k} \vec{v}_e \cdot \vec{N}_e \right)^{n+1} - \Delta t (\bar{f}(x) V_k)^n \quad (5.15)$$

A equação discretizada 5.15 é resolvida iterativamente para cada intervalo de tempo, por meio do método de Euler implícito, utilizando condições iniciais e de contorno adequadas para determinar os valores de  $h^{n+1}$  em todo o domínio.

$$V_k \lambda h^{n+1} + \Delta t \left( \sum_{e \in \partial \Omega_k} \vec{v}_e \cdot \vec{N}_e \right)^{n+1} = \lambda V_k h^n - \Delta t \bar{f} V_k, \quad \lambda = \mu_e M \quad (5.16)$$

Por sua vez, na Equação 5.16, o parâmetro  $\lambda$  representa a capacidade do meio de armazenar e liberar água conforme a carga hidráulica varia no tempo. A variável  $\vec{v}_e$  corresponde à velocidade aproximada na interface  $e$ . Considera-se que  $e = (IJ)$  corresponde à superfície de controle, ou seja, à face formada pelos nós  $I$  e  $J$ . O vetor  $\vec{N}_e$  representa a área normal à face  $e$ . A soma dos fluxos normais sobre todas as faces define o balanço de massa no volume de controle.

A vazão através da face é dada pelo produto escalar  $\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e$ . Essa aproximação pode ser realizada por diversos métodos de volumes finitos, lineares ou não lineares. De acordo com os objetivos deste trabalho, optou-se pela aproximação linear, utilizando o método MPFA-D.

#### 5.4 LEMA

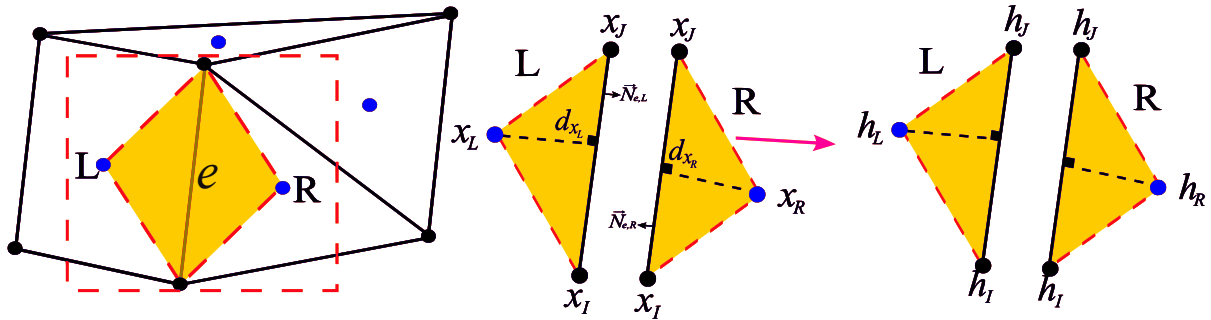
Sendo  $h$  a função da carga hidráulica definida sobre o triângulo  $\triangle ABC$  cujo vértices estão enumerados no sentido anti-horário, obtém-se:

$$\vec{\nabla} h \cong \frac{h_A - h_B}{|AB|} \vec{AB} + \frac{\Re \vec{AB}}{|AB|^2} [(h_B - h_A) ctg \angle BCA + (h_C - h_A) ctg \angle ABC] \quad (5.17)$$

Onde:

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \text{ com } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Figura 10 – Malha Poligonal, ilustrando o "Diamond Path".



Elaborado pelo autor.

Adota-se a seguinte notação para uma determinada face em 2-D, conforme representado na Figura 10.

Os elementos são denotados por  $L$  e  $R$ :  $L$  está localizado à esquerda, enquanto  $R$  está localizado à direita. O vetor normal à face  $IJ$  é denotado por  $\vec{N}_{IJ} = \vec{N}_e$ . Assim, para a face do elemento  $L$ , tem-se  $\vec{N}_{x_I x_J} = \vec{N}_{e,L}$ , e para a face do elemento  $R$ ,  $\vec{N}_{x_J x_I} = \vec{N}_{e,R}$ .

$$\vec{N}_{e,L} = \mathfrak{R} \overrightarrow{x_I x_J}, \quad \text{assim como} \quad \vec{N}_{e,R} = \mathfrak{R} \overrightarrow{x_J x_I},$$

Sendo esses os vetores normais às faces  $\overrightarrow{x_I x_J}$  e  $\overrightarrow{x_J x_I}$ , onde  $e$  representa as bordas dessas faces, obtém-se:

$$\vec{N}_{e,R} = -\vec{N}_{e,L}.$$

A distância dos baricentros em relação à face é representada por  $d_{x,L}$  para o baricentro do elemento  $L$  e por  $d_{x,R}$  para o baricentro do elemento  $R$ . A permeabilidade do elemento  $L$  é denotada por  $K(L) = K_L$ . A carga hidráulica no baricentro do elemento  $L$  é representada por  $h(L) = h_L$ , assim como  $h(R) = h_R$  corresponde à carga hidráulica no baricentro do elemento  $R$ . Além disso, a carga hidráulica nos vértices  $x_I$  e  $x_J$  é denotada, respectivamente, por  $h_I$  e  $h_J$ .

Reescrevendo o lema da Equação (5.17), tem-se:

$$\vec{\nabla} h \cong \frac{\vec{N}_e}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \left( (h_I - h_L) \cot \angle x_I x_J x_L + (h_J - h_L) \cot \angle x_L x_I x_J \right) + (h_J - h_I) \frac{\overrightarrow{x_I x_J}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \quad (5.18)$$

Para decompor o tensor de transmissibilidade na base formada pelos vetores  $\overrightarrow{x_I x_J}$  e  $\vec{N}_e$ , utiliza-se uma combinação linear, resultando na seguinte equação:

$$K^T(\vec{N}_e) = K_e^{(t)} \overrightarrow{x_I x_J} + K_e^{(n)} \vec{N}_e \quad (5.19)$$

Sendo  $K^T$  a componente tangencial do tensor de transmissibilidade, e  $K_e^{(t)}$  e  $K_e^{(n)}$  os componentes tangencial e normal da permeabilidade, respectivamente, ao realizar-se a pré-multiplicação da Equação (5.18) pelo vetor  $\overrightarrow{x_I x_J}$ , obtém-se:

$$K_e^{(t)} = \frac{(\vec{N}_e)^T K(\overrightarrow{x_I x_J})}{|\overrightarrow{x_I x_J}|^2} \quad (5.20)$$

da mesma forma multiplicando por  $(\vec{N}_e)$

$$K_e^{(n)} = \frac{\vec{N}_e^T K \vec{N}_e}{|\overrightarrow{x_I x_J}|^2} \quad (5.21)$$

Substituindo a Equação (5.18) na Equação (5.8) e realizando a multiplicação pelo vetor  $\vec{N}_{e,L}$ , obtém-se, após algumas manipulações matemáticas, a seguinte expressão:

$$\vec{v} \cdot \vec{N}_e \cong -K_{e,L}^{(n)} ((h_I - h_L) \cot \angle x_I x_J x_L + (h_J - h_L) \cot \angle x_L x_I x_J) - K_{e,L}^{(t)} (h_J - h_I) \quad (5.22)$$

Considerando as relações trigonométricas, obtém-se as seguintes equações:

$$\cot \angle x_I x_J x_L = \frac{\overrightarrow{(x_J x_L)} \cdot \overrightarrow{(x_I x_J)}}{|\overrightarrow{x_I x_J}| d_{x,L} x_I x_J} \quad (5.23)$$

$$\cot \angle x_L x_I x_J = \frac{\overrightarrow{(x_I x_L)} \cdot \overrightarrow{(x_I x_J)}}{|\overrightarrow{x_I x_J}| d_{x,L} x_I x_J} \quad (5.24)$$

Ao substituir na Equação (5.17) forma-se a seguinte equação:

$$\vec{v} \cdot \vec{N}_e \cong -K_{e,L}^{(n)} \left( (h_I - h_L) \frac{\overrightarrow{(x_J x_L)} \cdot \overrightarrow{(x_I x_J)}}{|\overrightarrow{x_I x_J}| d_{x,L}} + \frac{\overrightarrow{(x_I x_L)} \cdot \overrightarrow{(x_I x_J)}}{|\overrightarrow{x_I x_J}| d_{x,L}} \right) - K_{e,L}^{(t)} (h_J - h_I) \quad (5.25)$$

Sendo a vazão na face  $e$  aproximada, a partir do elemento  $x_L$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d_{x,L}}{K_{e,L}^{(n)}} \int_e \vec{v} \cdot \vec{N}_{e,L} dA \cong & -\frac{1}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \left( (h_I - h_L) \frac{\overrightarrow{(x_J x_L)} \cdot \overrightarrow{(x_I x_J)}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} + (h_J - h_L) \frac{\overrightarrow{(x_I x_L)} \cdot \overrightarrow{(x_I x_J)}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \right) \\ & - (h_J - h_I) \frac{K_{e,L}^t}{K_{e,L}^n} d_{x,L} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Reescrevendo de maneira análoga para  $\angle x_R x_I x_J$ , obtém-se:

$$\frac{d_{x,R}}{K_{e,R}^{(n)}} \int_e \vec{v} \cdot \vec{N}_{e,L} dA \cong - \frac{1}{|\overrightarrow{x_J x_I}|} \left( (h_J - h_R) \frac{\overrightarrow{x_J x_R} \cdot \overrightarrow{x_J x_I}}{|\overrightarrow{x_J x_I}|} + (h_I - h_R) \frac{\overrightarrow{x_I x_R} \cdot \overrightarrow{x_I x_J}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \right) - (h_I - h_J) \frac{K_{e,R}^t}{K_{e,R}^n} d_{x,R} \quad (5.27)$$

Ao considerar a continuidade do fluxo na face ( $e$ ), resulta:

$$\int_e \vec{v} \cdot \vec{N}_{e,L} dA = - \int_e \vec{v} \cdot N_{e,R} dA \quad (5.28)$$

Somando as Equações (5.26) e (5.27) por meio da Equação (5.28), verifica-se:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e = \mathfrak{K}_e [h_R - h_L - \mathfrak{D}_e (h_J - h_I)] \quad (5.29)$$

Sendo  $\mathfrak{D}_e$  e  $\mathfrak{K}_e$  as projeções do tensor da transmissibilidade nas direções normal e tangencial, respectivamente, tem-se:

$$\mathfrak{K}_e = \frac{K_{e,L}^{(n)} K_{e,R}^{(n)}}{K_{e,L}^{(n)} d_{x,R} + K_{e,R}^{(n)} d_{x,L}} \quad (5.30)$$

$$\mathfrak{D}_e = \frac{\overrightarrow{x_L x_R} \cdot \overrightarrow{x_I x_J}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|^2} - \frac{1}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \left( \frac{K_{e,L}^{(t)}}{K_{e,L}^n} d_{x,L} + \frac{K_{e,R}^{(t)}}{K_{e,R}^n} d_{x,R} \right) \quad (5.31)$$

Quando uma superfície de controle  $\vec{e}$  está sobre  $\Gamma_D$ , a carga hidráulica e o fluxo é dado por:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e = \mathfrak{K}_e \left[ h_L + \frac{1}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \left( \mathfrak{g}_D(I) \left( \frac{K_{e,L}^t}{K_{e,L}^n} d_{x,L} - \frac{\overrightarrow{x_J x_L} \cdot \overrightarrow{x_J x_I}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \right) - \mathfrak{g}_D(J) \left( \frac{K_{e,L}^t}{K_{e,L}^n} d_{x,L} + \frac{\overrightarrow{x_I x_L} \cdot \overrightarrow{x_I x_J}}{|\overrightarrow{x_I x_J}|} \right) \right) \right] \quad (5.32)$$

Quando o termo de transmissibilidade é apresentado da seguinte forma:

$$\mathfrak{K}_e = \frac{K_{e,L}^{(n)}}{d_{x,L}} |\vec{e}|, \quad (5.33)$$

Quando o contorno coincide com a fronteira de Neumann, o fluxo é dado por:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{N}_e = \mathfrak{g}_N |\vec{e}| \quad (5.34)$$

A carga hidráulica nos nós é dada a partir das Equações (5.32) e (5.34), onde as funções escalares  $\mathfrak{g}_D(J)$  e  $\mathfrak{g}_D(I)$  estão definidas em  $\Gamma_D$ , e o fluxo específico em  $\Gamma_N$  é dado por  $\mathfrak{g}_N$ .

## 5.5 INTERPOLAÇÃO DAS VARIÁVEIS AUXILIARES

De acordo com Contreras *et al.* (2016), as variáveis auxiliares localizadas nos vértices são descritas como combinações lineares das variáveis centradas nas células, o que torna a expressão do fluxo completamente centrada na célula.

Este trabalho apresenta um tipo de interpolação proposto por Gao e Wu (2010) e utilizado por Contreras (2012) e Contreras *et al.* (2016). Os pesos da interpolação são obtidos sem a necessidade de resolver sistemas lineares locais, e o cálculo dos pesos admite tensores de permeabilidade arbitrários, além de não depender da topologia da malha nem das descontinuidades do material poroso.

Existem outras propostas para calcular os pesos de interpolação elaboradas por diversos autores, tais como Gao e Wu (2010), Contreras *et al.* (2016), Contreras, Lyra e Carvalho (2019) e Contreras *et al.* (2023a). Esses trabalhos relatam que tais interpolações não apresentam robustez considerável quando aplicadas a meios anisotrópicos e heterogêneos (que apresentam descontinuidade).

No entanto, ao adotar uma interpolação ponderada explícita com preservação de linearidade (Linearity-Preserving Explicit Weighted (LPEW)) e derivar a equação 5.35 como uma equação de continuidade ao longo das regiões de interação que contornam cada vértice da malha ligando os pontos médios das bordas adjacentes obtém-se uma abordagem mais adequada.

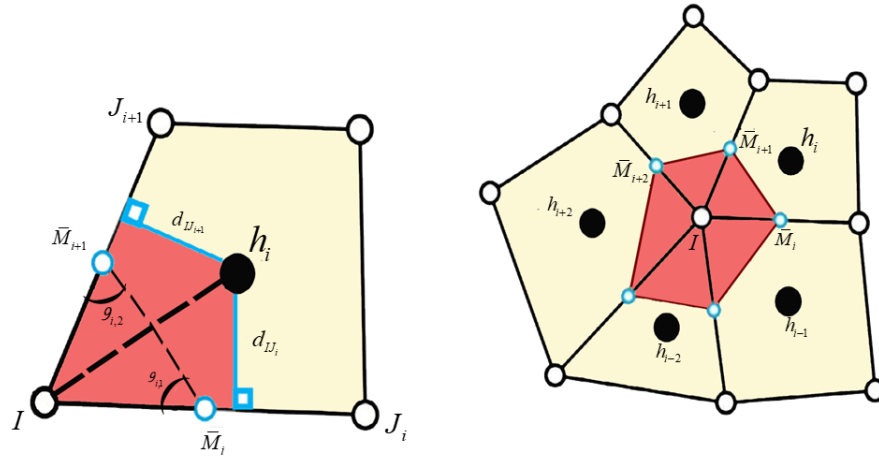
No presente contexto,  $h_I$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$h_I = \sum_{i=1}^{ncv} w_i h_i \quad (5.35)$$

$w_i$  é o peso para cada volume de controle ( $i$ )

$$w_i = \bar{\omega}_i / \sum_{i=1}^{ncv} \bar{\omega}_i \quad (5.36)$$

Figura 11 – Região de interação para a interpolação LPEW.



Adaptado de Contreras *et al.* (2016).

## 5.6 MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL

Considerando a Equação (5.16) obtém-se:

$$\sum_{e \in \partial \Omega_k} \vec{v}_e \cdot \vec{N}_e = \bar{f}_k, \quad \bar{f}_k = f_k V_k \quad (5.37)$$

O sistema de equações lineares é construído a partir da Equação (5.37). Para cada interface do volume de controle  $L$ , a seguinte equação linear é obtida após o processo de interpolação:

$$\sum_i T_i h_i = \sum_i Q_{L,i} \quad (5.38)$$

Onde  $i$  representa os volumes de controle vizinhos ao volume de controle  $L$ , incluindo o próprio  $L$ ;  $T_i$  são as transmissibilidades que envolvem pesos e outros parâmetros físico-geométricos; e  $Q_{L,i}$  são os termos que englobam as fontes e as condições de contorno associadas.

Aplicando esse procedimento a todos os volumes de controle  $L$ , obtém-se o seguinte sistema linear global:

$$T^G h^G = Q^G \quad (5.39)$$

em que  $T^G$  é a matriz global de transmissibilidade,  $h^G$  é o vetor global das cargas hidráulicas e  $Q^G$  é o vetor global dos termos independentes, sendo o sobrescrito  $G$  utilizado para indicar grandezas globais no sistema.

## 6 TESTES COM MPFA-D EM AQUÍFEROS EM ESTADOS ESTACIONÁRIO

### 6.1 ERROS E TAXAS DE CONVERGÊNCIA

A avaliação da acurácia de métodos numéricos é fundamental para garantir a confiabilidade dos resultados obtidos em simulações computacionais. Neste trabalho, utilizam-se métricas baseadas na norma  $L_2$  para quantificar os erros associados à carga hidráulica ( $\varepsilon_h$ ) e ao fluxo ( $\varepsilon_q$ ), permitindo uma análise rigorosa da aproximação numérica em relação à solução analítica.

O erro associado à carga hidráulica é definido como:

$$\varepsilon_h = \left( \frac{\sum_{\Omega_k \in \Omega} (h_k - h_{k,exata})^2 V_k}{\sum_{\Omega_k \in \Omega} V_k} \right)^{1/2} \quad (6.1)$$

onde:

- $h_k$  é o valor da carga hidráulica obtido numericamente no baricentro do volume de controle  $\Omega_k$ ,
- $h_{k,exata}$  é a correspondente solução analítica,
- $V_k$  é o volume do controle  $\Omega_k$ ,
- e a somatória é realizada sobre todo o domínio computacional  $\Omega$ .

Essa métrica fornece uma medida global do erro distribuído espacialmente, ponderando os desvios quadráticos pelas dimensões dos volumes de controle. A norma  $L_2$ , por sua natureza, é particularmente adequada para capturar o comportamento médio dos erros, suavizando oscilações locais.

Para avaliar o comportamento dos erros em relação ao refinamento da malha, calcula-se a taxa de convergência  $R_h$ , a qual indica como o erro decresce à medida que o espaçamento entre os elementos da malha é reduzido. Essa taxa é obtida por meio da seguinte expressão:

$$R_h = \frac{\log \left( \frac{\varepsilon_h(d_2)}{\varepsilon_h(d_1)} \right)}{\log \left( \frac{d_2}{d_1} \right)} \quad (6.2)$$

onde:

- $d_1$  e  $d_2$  são os tamanhos característicos (ou espaçamentos médios) de duas malhas sucessivas com diferentes níveis de refinamento, sendo  $d_2 < d_1$ ,



- $\varepsilon_h(d_1)$  e  $\varepsilon_h(d_2)$  são os erros associados a cada malha.

Valores de  $R_h$  próximos à ordem teórica do método numérico indicam boa conformidade com o comportamento esperado de convergência. Por exemplo, métodos de segunda ordem tendem a apresentar  $R_h \approx 2$  quando submetidos a refinamentos sistemáticos.

Esse tipo de análise é essencial não apenas para validar a implementação numérica, mas também para demonstrar a robustez do esquema de discretização empregado, especialmente em contextos com forte heterogeneidade ou condições de contorno complexas.

Para a realização dos experimentos computacionais e simulações abordados neste trabalho, foi utilizado um computador pessoal com o sistema operacional *Windows 11 Home Single Language*, versão 22H2, instalado em 28 de novembro de 2023. O equipamento conta com um processador *Intel(R) Core(TM) i3-6006U*, com frequência de 2,00 GHz, aliado a uma memória RAM de 8 GB, sendo 7,88 GB disponíveis para uso. O sistema operacional é baseado em arquitetura de 64 bits (x64), o que garante a compatibilidade com os principais softwares científicos utilizados ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

## 6.2 DISTRIBUIÇÃO DA CARGA HIDRÁULICA EM UM AQUÍFERO ALTAMENTE HETEROGÊNEO

### 6.2.1 Caso Unidimensional

Esta solução foi adaptada de Alecsa *et al.* (2020), com o objetivo de avaliar as taxas de convergência de métodos numéricos em um problema unidimensional com solução analítica conhecida, dada por:

$$h(x) = 3 + \text{sen}(x), \quad x \in [0, 20]. \quad (6.3)$$

As condições de contorno do tipo Dirichlet associadas à equação 6.3 são:

$$h(0) = 3, \quad h(20) = 3 + \text{sen}(20). \quad (6.4)$$

A condutividade hidráulica  $K(x)$  e o termo fonte  $f(x)$  são definidos pelas expressões 6.5 e 6.6, de modo a garantir um meio heterogêneo com padrão oscilatório e periódico:

$$K(x) = C_1 \exp \left( C_2 \sum_{k=1}^N \cos(\varphi + 2\pi(\bar{k}_1 x + k_2)) \right), \quad (6.5)$$

$$f(x) = C_1 \exp \left( C_2 \sum_{k=1}^N \cos(\varphi + 2\pi(\bar{k}_1 x + k_2)) \right) \times \left[ C_2 \sum_{k=1}^N 2\pi\bar{k}_1 \sin(\varphi + 2\pi(\bar{k}_1 x + k_2)) \cos(x) - \sin(x) \right]. \quad (6.6)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  controlam a magnitude e a amplitude das funções  $K(x)$  e  $f(x)$ , respectivamente. A seguir, essas constantes são definidas separadamente para melhor clareza:

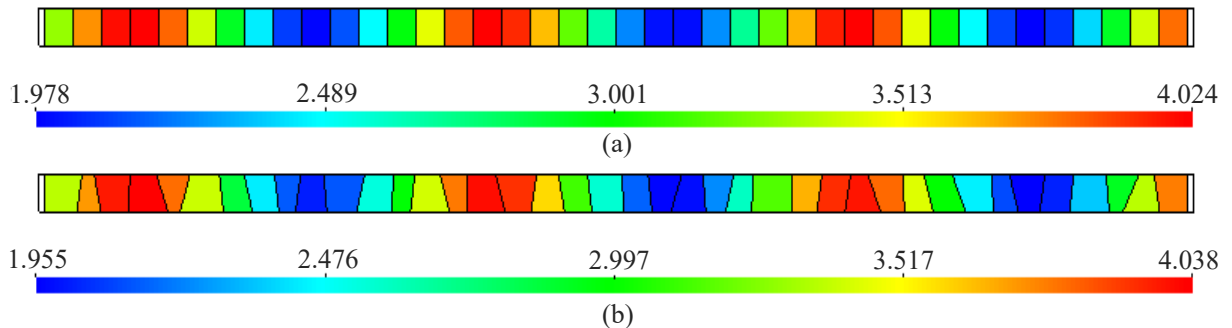
$$C_1 = \langle K \rangle \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right), \quad (6.7)$$

$$C_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}, \quad (6.8)$$

A equação (6.7) define  $C_1$  como um fator de escala que ajusta a magnitude média da condutividade hidráulica, baseado na média esperada  $\langle K \rangle$  e na variância  $\sigma^2$  de uma distribuição gaussiana. Já a equação (6.8) define  $C_2$  como um parâmetro que controla a amplitude das oscilações, levando em conta a variância e o número de termos  $N$  na soma.

Neste trabalho, foram utilizados os valores  $\sigma = 0,1$  e  $N = 100$ , caracterizando um meio moderadamente heterogêneo. Para avaliar o desempenho numérico, foram utilizadas cinco malhas uniformes, com espaçamentos  $\Delta x = (1), (0,5), (0,25),$  e  $(0,125)$ , gerando malhas com 20, 40, 80 e 160 volumes de controle. Além disso, foram construídas malhas não uniformes com o mesmo número de volumes, mas com espaçamentos gerados aleatoriamente.

Figura 12 – (a) Campo de carga hidráulica obtido pelos métodos CVFD e MPFA-D em  $(m)$  e (b) Campo de carga hidráulica  $(m)$  obtido apenas pelo método MPFA-D. Ambos os resultados correspondem a 40 volumes de controle ( $\Delta x = 0,5$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 12 apresenta a distribuição da carga hidráulica obtida pelos métodos CVFD e MPFA-D. Em malhas uniformes (a), ambos os métodos forneceram resultados similares. No

entanto, quando aplicados a malhas não uniformes (b), o método MPFA-D demonstrou maior acurácia em relação à solução analítica, com melhor representação da carga hidráulica, especialmente em regiões com variações mais acentuadas.

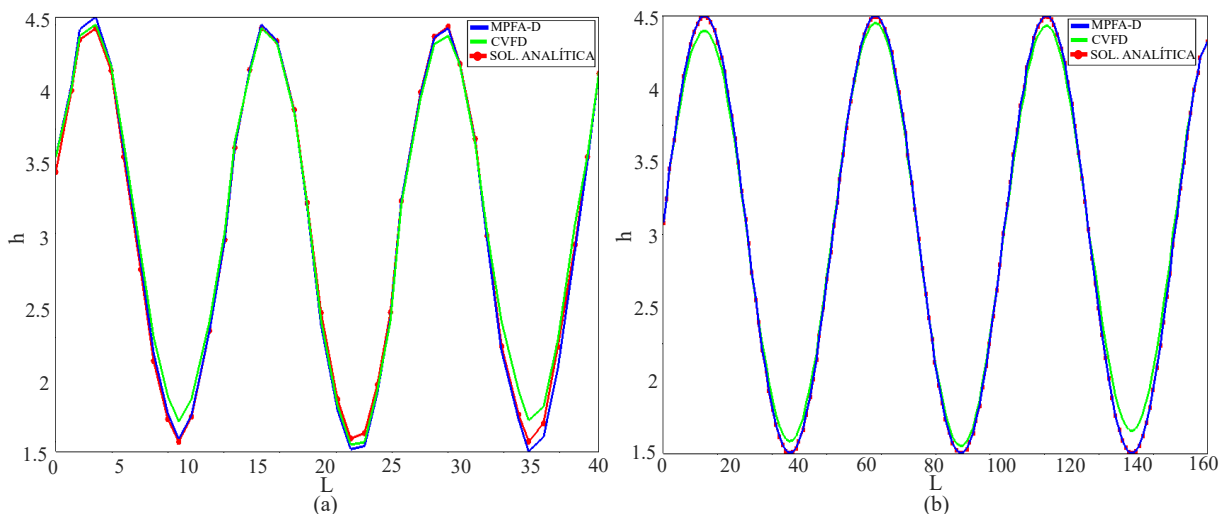
Tabela 1 – Erro ( $\epsilon$ ) e taxas de convergência unidimensional ( $R_h$ ) utilizando diferentes refinamentos de malha.

		Erro	20 VC	40 VC	80 VC	160 VC
Malha uniforme	MPFA-D/CVFD	$\epsilon$	0,4685	0,0230	0,0056	0,0014
		$R_h$	--	4,3483	2,0381	2,0000
Malha não uniforme	MPFA-D	$\epsilon$	0,1258	0,0348	0,0081	0,0016
		$R_h$	--	1,8540	2,1031	2,3399
	CVFD	$\epsilon$	0,1299	0,0545	0,0490	0,0404
		$R_h$	--	1,2531	0,1535	0,2784

A Tabela 1 mostra os erros calculados pela equação (6.1) e as taxas de convergência pela equação (6.2). Em malhas uniformes, ambos os métodos alcançaram excelente acurácia, com erro reduzido de 0,4685 (20 volumes) para 0,0014 (160 volumes), e taxas de convergência superiores a 4, caracterizando superconvergência nos refinamentos iniciais.

Por outro lado, em malhas não uniformes, o método MPFA-D manteve boa acurácia, com erro reduzido de 0,1258 para 0,0016 e taxas próximas de 2. O método CVFD, entretanto, apresentou desempenho inferior, com erro decrescendo apenas de 0,1299 para 0,0404 e taxas inconsistentes. Isso evidencia maior estabilidade e robustez do método MPFA-D em malhas complexas, enquanto o CVFD mostrou-se eficaz apenas em malhas uniformes.

Figura 13 – (a) carga hidráulica malha não uniforme 40 VC em ( $m$ ) e (b) carga hidráulica malha não uniforme 160 VC em ( $m$ ).



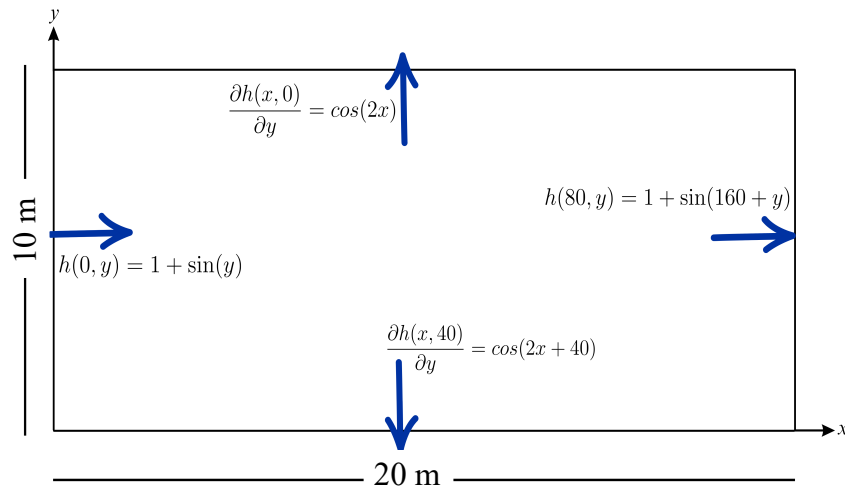
A Figura 13 reforça essas observações ao comparar as soluções obtidas com os métodos CVFD e MPFA-D com a solução analítica. Na Figura 13(a), com uma malha mais grosseira, ambos os métodos apresentam desvios notáveis em relação à solução de referência, sobretudo em regiões onde o gradiente hidráulico é mais pronunciado. Entretanto, o método MPFA-D exibe desempenho superior ao capturar com maior fidelidade os picos e vales da função analítica, evidenciando sua capacidade de representar adequadamente os efeitos locais mesmo com resolução limitada. Com o refinamento da malha para 160 volumes de controle, conforme ilustrado na Figura 13(b), o método MPFA-D demonstra acurácia ainda mais elevada, praticamente coincidindo com a solução analítica ao longo de todo o domínio. Esse resultado destaca a robustez do método na resolução de problemas com elevada variabilidade espacial, validando sua aplicabilidade em meios heterogêneos complexos. Em contraste, embora o método CVFD também apresente melhorias com o refinamento, ele continua apresentando limitações em regiões de transição abrupta, refletindo menor sensibilidade a variações locais. Esses achados corroboram as análises anteriores e reforçam a superioridade do método MPFA-D em contextos que exigem maior resolução espacial e fidelidade na representação da carga hidráulica.

### 6.2.2 Caso Bidimensional

Este problema foi adaptado de Alecsa *et al.* (2020) e, em nosso contexto, tem como objetivo realizar uma avaliação comparativa da acurácia do método MPFA-D. Trata-se de um problema em regime estacionário que consiste em determinar a distribuição da carga hidráulica em um aquífero altamente heterogêneo. Os erros e taxas de convergência dos métodos MPFA-D e CVFD são obtidos a partir de refinamentos sucessivos da malha, considerando que a condutividade hidráulica permanece constante ao longo dos refinamentos.

O domínio físico é um retângulo com as seguintes dimensões:  $\Omega = [0, 10] \times [0, 20]$ , conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Domínio físico e as condições de contorno.



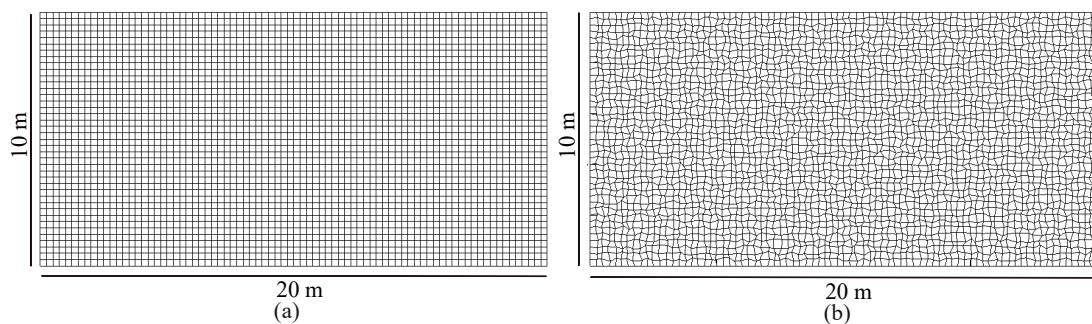
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para avaliar os erros e taxas de convergência dos métodos MPFA-D e CVFD, foram utilizados quatro refinamentos de malhas, descritos na Tabela 2. Os refinamentos foram aplicados tanto em malhas quadrilaterais ortogonais quanto em malhas quadrilaterais distorcidas, como mostrado na Figura 15.

Tabela 2 – Refinamentos de malha no teste de convergência bidimensional.

Refinamentos	Número de Volumes de Controle (VC)
10 x 20	200
20 x 40	800
40 x 80	3.200
80 x 160	12.800

Figura 15 – (a) Malha quadrilateral ortogonal e (b) malha quadrilateral distorcida, ambas com 3.200 VC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, a condutividade hidráulica  $K(x, y)$  é uma função exponencial dada por:

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} k_{(x,y)} & 0 \\ 0 & k_{(x,y)} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$k(x, y) = C_1 \exp \left( C_2 \sum_{i=1}^N \cos(\phi_i + 2\pi(k_{i,1}x + k_{i,2}y)) \right) \quad (6.10)$$

A solução analítica do modelo matemático é dada pela seguinte função:

$$h(x, y) = 1 + \text{sen}(2x + y) \quad (6.11)$$

Esta solução permite uma comparação direta com a solução numérica, oferecendo um meio rigoroso para avaliar a precisão e a confiabilidade da formulação e dos códigos desenvolvidos.

Substituindo os valores de  $K$  e  $h$  na equação (4.29), obtém-se o termo de fonte:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 2C_1C_2 \sum_{i=1}^N -2\pi k_{i,1} \text{sen}(\phi_i + 2(xk_{i,1} + yk_{i,2})\pi) \\ & \cdot \exp \left( C_2 \sum_{i=1}^N \cos(\phi_i + 2(xk_{i,1} + yk_{i,2})\pi) \right) \cos(2x + y) \\ & - 5C_1 \exp \left( C_2 \sum_{i=1}^N \cos(\phi_i + 2(xk_{i,1} + yk_{i,2})\pi) \right) \text{sen}(2x + y) \\ & + C_1C_2 \sum_{i=1}^N -2\pi k_{i,2} \text{sen}(\phi_i + 2(xk_{i,1} + yk_{i,2})\pi) \\ & \cdot \exp \left( C_2 \sum_{i=1}^N \cos(\phi_i + 2(xk_{i,1} + yk_{i,2})\pi) \right) \cos(2x + y) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Onde  $k_{i,1}$  e  $k_{i,2}$  são os coeficientes que indicam a frequência espacial do  $i$ -ésimo termo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Esses valores controlam as oscilações no campo de condutividade hidráulica.

Como mostrado na Figura 14, as condições de contorno de Dirichlet são dadas por:

$$h(0, y) = 1 + \text{sen}(y), \quad \forall y \in [0, 40], \quad (6.13)$$

$$h(L_x, 80) = 1 + \text{sen}(160 + y), \quad \forall y \in [0, 40]. \quad (6.14)$$

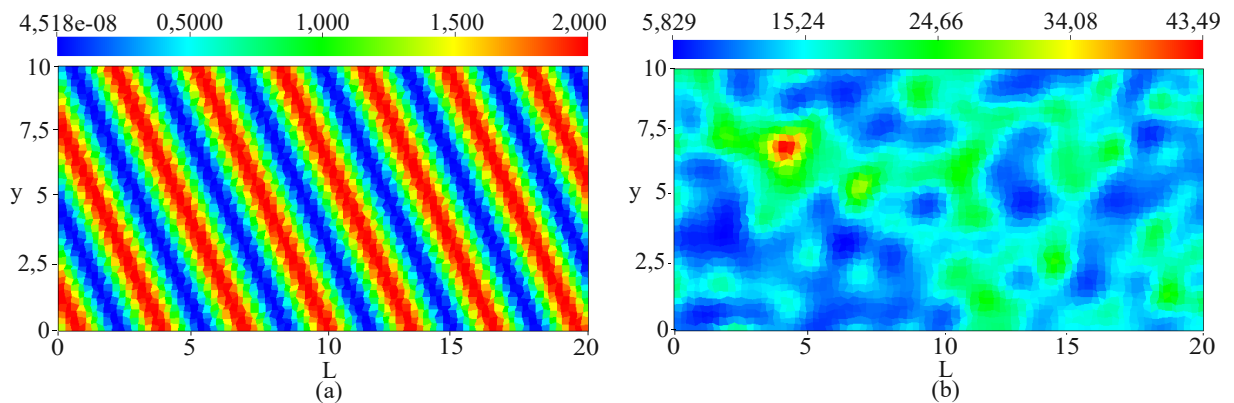
E as condições de contorno de Neumann são:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, 0) = \cos(2x), \quad \forall x \in [0, 80] \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, 40) = \cos(2x + 40), \quad \forall x \in [0, 80]. \quad (6.16)$$

De acordo com Contreras, Lyra e Carvalho (2019), a solução numérica da equação (4.29) para a carga hidráulica em regime estacionário deve apresentar taxa de convergência de segunda ordem. Nesse sentido, na Tabela 3 observam-se as taxas de convergência dos métodos MPFA-D e CVFD.

Figura 16 – (a) Distribuição da carga hidráulica analítica em (m), (b) condutividade hidráulica em (m/d), ambos em uma malha quadrilateral distorcida, com 3.200 VC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O campo da solução analítica e a condutividade hidráulica são apresentados na Figura 16, para uma malha quadrilateral distorcida com 3.200 VC. Os resultados numéricos obtidos pelos métodos MPFA-D e CVFD devem seguir o mesmo padrão da solução analítica para os diferentes refinamentos de malha.

Para a malha quadrilateral ortogonal, os métodos MPFA-D e CVFD apresentaram erros e taxas de convergência similares em todos os refinamentos da malha, pois o método MPFA-D se reduz ao método CVFD nesse tipo de malha, conforme observado na segunda e terceira linha da Tabela 3.

Como esperado, para cada refinamento da malha, os erros diminuem aproximadamente quatro vezes, resultando em taxas de convergência de segunda ordem (veja a Tabela 3). Isso demonstra que, a cada refinamento da malha, a solução numérica converge para a solução analítica.

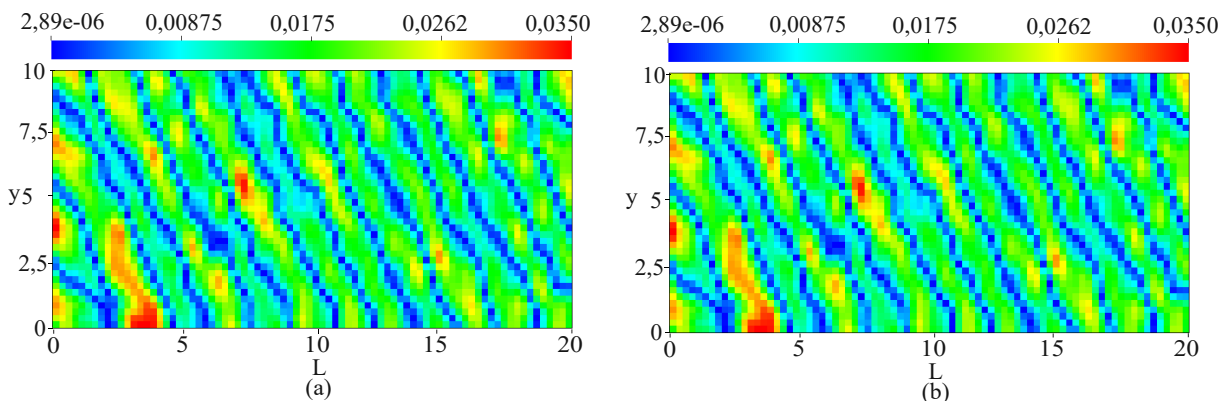
Tabela 3 – Erro ( $\epsilon$ ) e taxas de convergência bidimensional ( $R_h$ ) utilizando diferentes refinamentos de malha.

		Erro	200 VC	800 VC	3.200 VC	12.800 VC
Malha quadrilateral ortogonal	MPFA-D/CVFD	$\epsilon$	0,8282	0,0654	0,0159	0,0039
		$R_h$	--	3,6626	2,0403	2,0275
Malha quadrilateral distorcida	MPFA-D	$\epsilon$	0,9961	0,1546	0,0448	0,0055
		$R_h$	--	2,6878	1,7870	3,0260
	CVFD	$\epsilon$	0,9019	0,1797	0,0695	0,0358
		$R_h$	--	2,3274	1,3705	0,9571

Em contraste, o método CVFD, aplicado em malhas quadrilaterais distorcidas, apresentou um erro de 0,1797 para 800 VC, que foi reduzido para 0,0695 com 3.200 VC. A razão do erro foi de aproximadamente 2,5 vezes, resultando em uma ordem de convergência de 1,3705. Além disso, para a malha com 12.800 VC, o erro foi de 0,0358, e a razão do erro diminuiu para cerca de 1,9 vezes, indicando que essa razão decresce conforme a malha é refinada, resultando em uma ordem de convergência cada vez menor.

De acordo com Aavatsmark (2002), essa discrepância ocorre porque o método pressupõe que o fluxo ocorre diretamente entre os centros de dois volumes de controle adjacentes, desconsiderando a complexidade geométrica da malha e a orientação do tensor de permeabilidade. Em malhas distorcidas, o fluxo real pode seguir caminhos inclinados ou curvados, o que o método CVFD não consegue capturar adequadamente.

Na Figura 17, observa-se que os erros em uma malha quadrilateral ortogonal são os mesmos para ambos os métodos, MPFA-D e CVFD.

Figura 17 – Distribuição dos erros: (a) obtido pelo MPFA-D em ( $m$ ) e (b) obtido pelo CFVD em ( $m$ ), para uma malha quadrilateral ortogonal, ambas com 3.200 VC.

Fonte: Elaborado pelo autor.

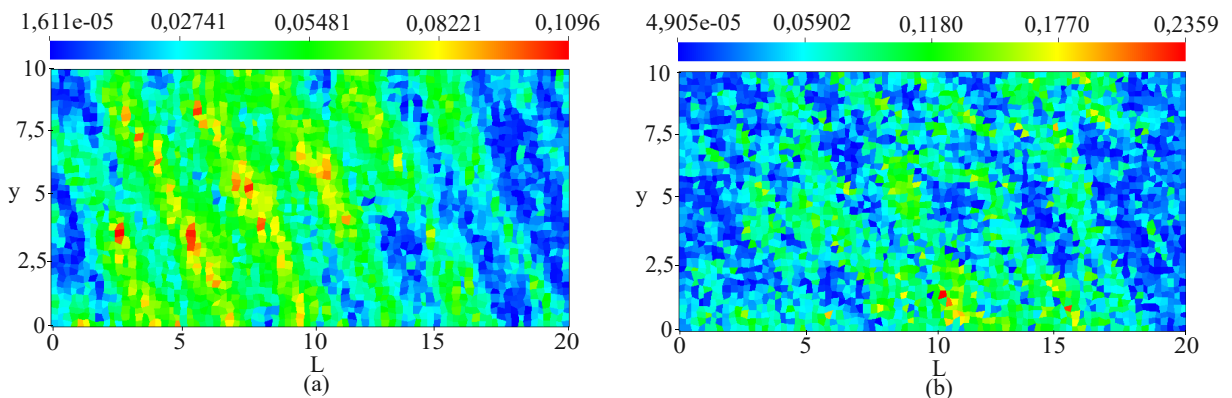
Por outro lado, o método MPFA-D demonstrou um desempenho superior, especialmente ao



ser aplicado em malhas quadrilaterais distorcidas, conforme pode ser observado na Tabela 3. Neste cenário, o método apresentou uma redução significativa dos erros à medida que a malha foi refinada, atingindo uma ordem de convergência próxima de 2 (superconvergência).

Segundo Chou e Ye (2007), a superconvergência observada nos resultados dos métodos numéricos manifesta-se quando as soluções numéricas alcançam uma ordem de acurácia mais elevada do que a esperada, especialmente em malhas refinadas. Chou e Ye (2007) destaca ainda que a superconvergência é um fenômeno desejável em simulações numéricas, pois permite obter resultados mais precisos sem a necessidade de aumentar significativamente a complexidade computacional, o que torna essa característica valiosa em métodos como o MPFA-D.

Figura 18 – Distribuição dos erros: (a) obtido pelo MPFA-D em ( $m$ ) e (b) obtido pelo CFVD em ( $m$ ), para uma malha quadrilateral distorcida, ambas com 3.200 VC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, na Figura 18, observa-se que os erros máximo e mínimo obtidos pelo método MPFA-D para uma malha quadrilateral distorcida são menores do que os do método CVFD, evidenciando, dessa forma, sua maior precisão nesse tipo de malha.

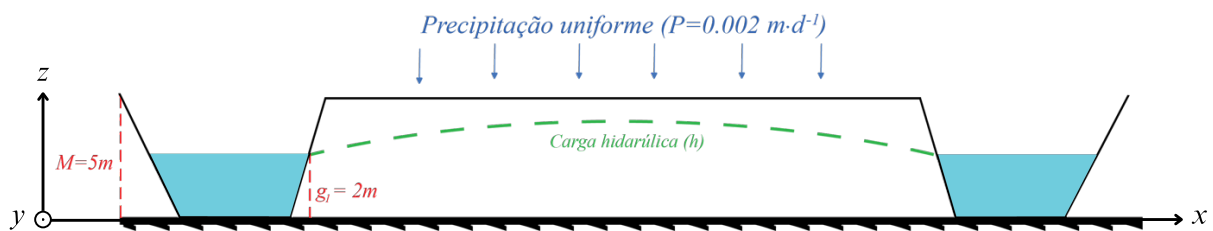
Assim, a taxa de convergência superior a 3 na malha com 12.800 VC evidencia a eficácia do método, reforçando sua relevância para simulações de aquíferos altamente heterogêneos e o uso de malhas distorcidas. Essa superconvergência ressalta a acurácia do MPFA-D na discretização de problemas complexos.

### 6.3 AQUÍFERO ISOTRÓPICO ENTRE DOIS CANAIS PARALELOS COM PRECIPITAÇÃO

Este problema foi adaptado de (Qian *et al.*, 2023). Considera-se um aquífero não confinado localizado entre dois canais paralelos, com o objetivo de avaliar a acurácia do método. O aquífero é homogêneo e isotrópico, e os canais paralelos estão separados por uma distância de 40 metros. O rendimento específico é  $\mu_d = 0,1$ . A precipitação uniforme é dada por  $P = 0,002 \text{ m} \cdot \text{d}^{-1}$ , atuando como um termo de fonte no domínio físico. A condutividade hidráulica saturada é estabelecida em:

$$K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ m} \cdot \text{d}^{-1} \quad (6.17)$$

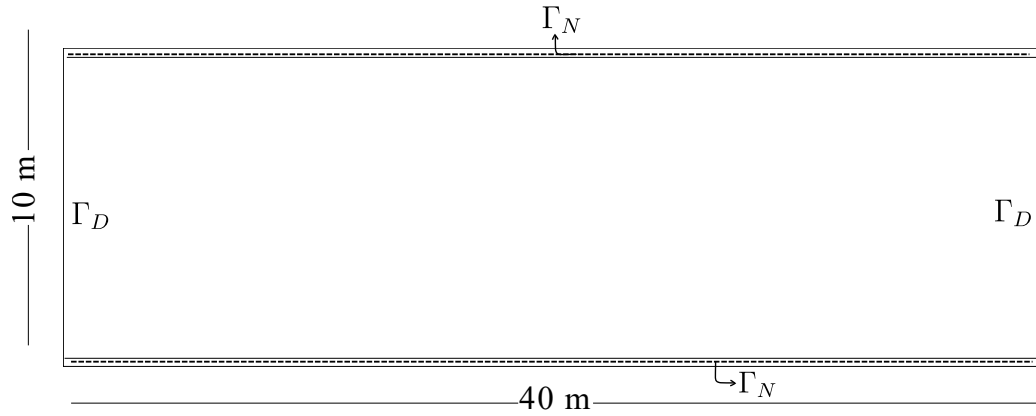
Figura 19 – Canais paralelos.



Fonte: Adaptado de Qian *et al.* (2023).

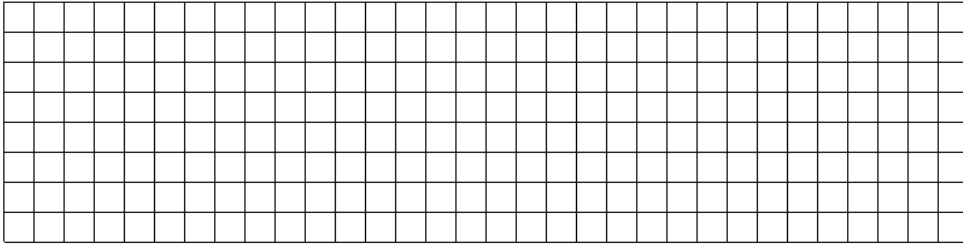
As condições de contorno de Neumann são aplicadas na base e no topo do aquífero, sendo consideradas como sem fluxo. Nas laterais esquerda e direita, adotam-se condições de contorno de Dirichlet, com carga hidráulica constante de 2 m, conforme ilustrado na Figura 20. O domínio do problema é representado por um retângulo com dimensões  $10 \times 40$ , com espaçamentos  $\Delta x = 1,25 \text{ m}$  e  $\Delta y = 1,25 \text{ m}$ . As malhas utilizadas neste problema são apresentadas nas Figuras 21, 22, 23 e 24.

Figura 20 – Domínio físico e as condições de contorno.



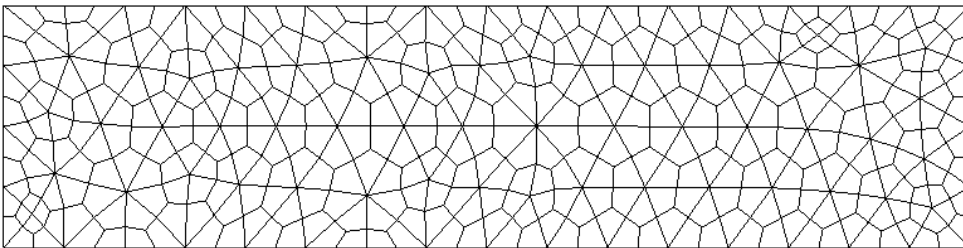
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – M1 - Malha quadrilateral ortogonal.



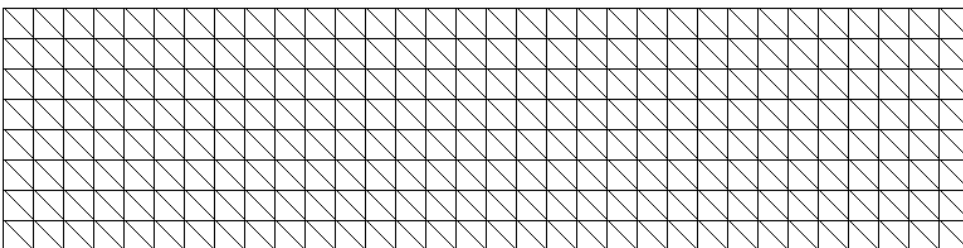
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 – M2 - Malha quadrilateral ortogonal não estruturada com distorções acentuadas.



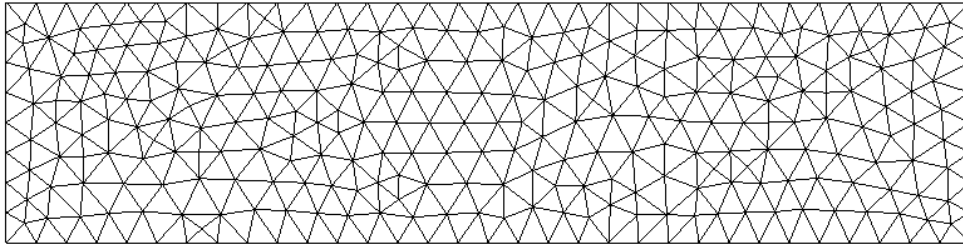
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – M3 - Malha triangular estruturada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24 – M4 - Malha triangular não estruturada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A equação apresentada na Equação (6.18), conforme descrito por Qian *et al.* (2023), fornece uma solução analítica no estado de equilíbrio. Essa expressão permite calcular a carga hidráulica  $h(x)$  em função da posição  $x$ , sendo  $h_1$  a carga hidráulica no canal do lado direito e  $h_2$  a carga hidráulica do lado esquerdo, considerando a distância entre os canais  $l$ , a precipitação  $P$  e a condutividade hidráulica  $K$ . A equação é derivada da teoria de fluxo em meios porosos, refletindo a interação entre a carga hidráulica e as características do aquífero. Além disso, serve como base de comparação para avaliar a acurácia dos resultados obtidos pelos métodos numéricos, como o MPFA-D.

$$h(x)^2 = (h_1)^2 + \frac{(h_2)^2 - (h_1)^2}{l}x + \frac{P}{K} \times (lx - x^2), \quad (6.18)$$

A solução analítica para este problema tem como objetivo avaliar a acurácia do MPFA-D no tratamento de termos de fonte e sumidouro não pontuais, considerando os dados relevantes, como os níveis de água no aquífero e a precipitação.

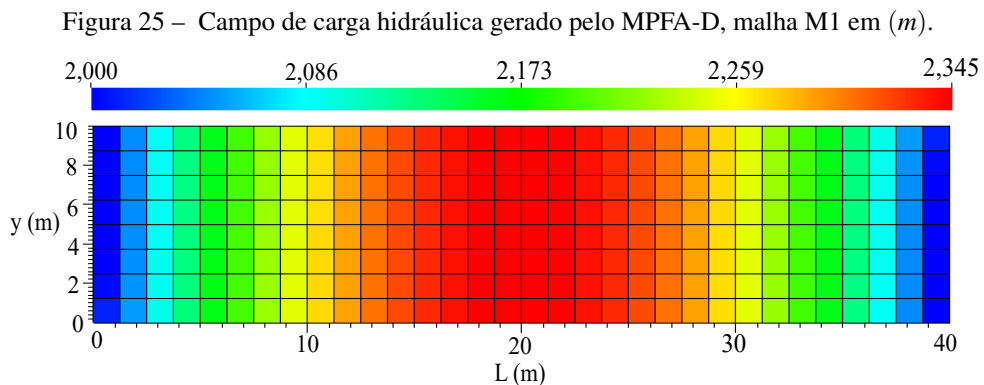
O resultado obtido pelo método MPFA-D foi comparado com a solução analítica e com os resultados gerados pelo MODFLOW 6 e pelo CVFD. A escolha de utilizar uma solução analítica como referência justifica-se por sua capacidade de fornecer um padrão confiável de avaliação, permitindo que a acurácia do método MPFA-D seja verificada de maneira rigorosa.

Os testes com o método MPFA-D também foram realizados utilizando diferentes tipos de malhas, com o objetivo de avaliar seu desempenho em diversas configurações. Foram consideradas duas abordagens para a imposição das condições de contorno de Dirichlet: condição de contorno Dirichlet na face (CCDF), que aplica a condição de contorno na face do elemento, e condição de contorno Dirichlet no eixo da célula (CCDC), que a impõe nos baricentros das células. Os resultados evidenciam a eficácia do método MPFA-D em termos de acurácia, especialmente nas malhas mais complexas.

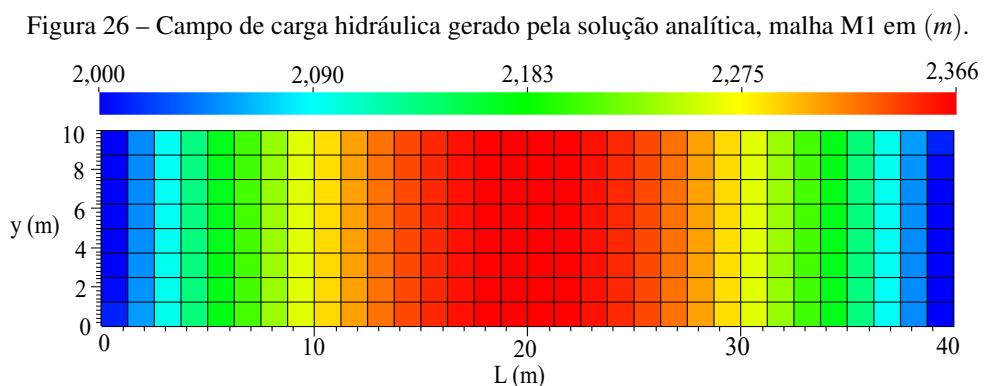
A Figura 21 apresenta a malha quadrilateral ortogonal, que segue um padrão regular e estruturado, sendo frequentemente utilizada devido à sua simplicidade geométrica. A Figura 22 exibe uma malha quadrilateral ortogonal não estruturada, a qual introduz desafios adicionais para os métodos numéricos, devido à variação significativa nos ângulos e tamanhos dos elementos. Em contrapartida, a Figura 23 representa uma malha triangular estruturada, em que os elementos triangulares seguem uma distribuição regular. Por fim, a Figura 24 ilustra uma malha triangular não estruturada, na qual os triângulos apresentam uma distribuição mais livre, sem a organização típica das malhas estruturadas.

Essas variações nas malhas visam verificar a acurácia e a robustez do método MPFA-D quando aplicado a geometrias que fogem do padrão ortogonal e estruturado, explorando situações mais complexas e realistas de simulação numérica.

O campo da carga hidráulica apresentado na Figura 25 corresponde à malha M1. Além disso, o perfil da carga hidráulica para essa mesma malha é ilustrado na Figura 30, onde também é possível observar os perfis obtidos pela solução analítica e pelo MODFLOW 6.

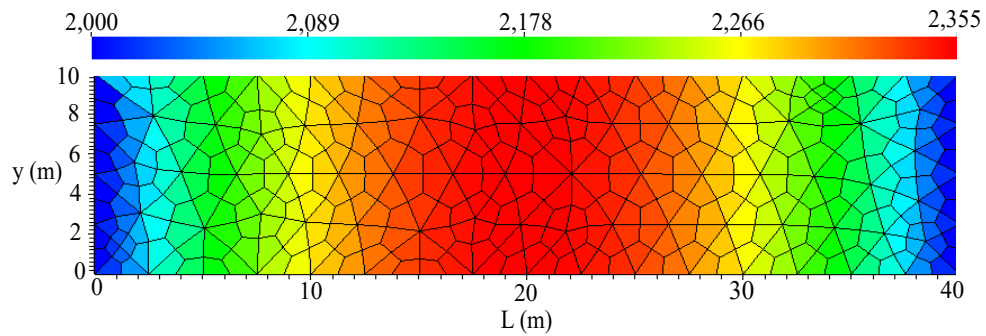


Fonte: Elaborado pelo autor.



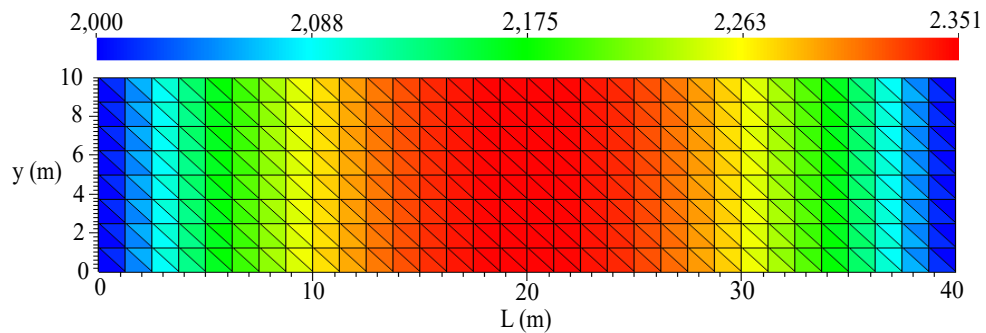
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M2 em (m).



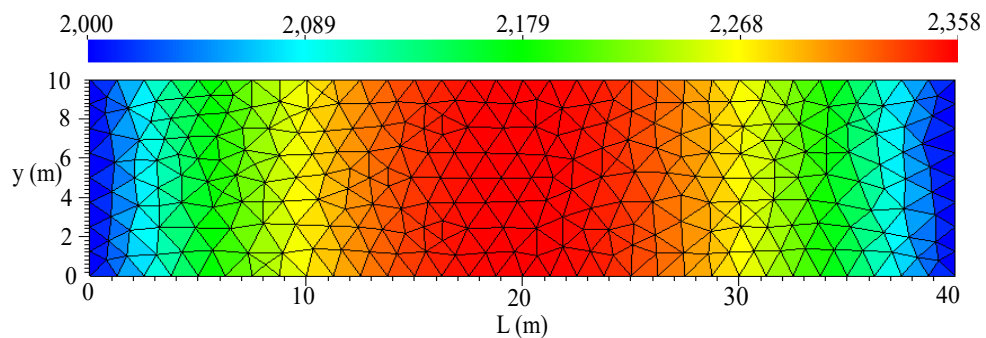
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M3 em (m).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 – Campo de carga hidráulica gerado pelo MPFA-D, malha M4 em (m).



Fonte: Elaborado pelo autor.

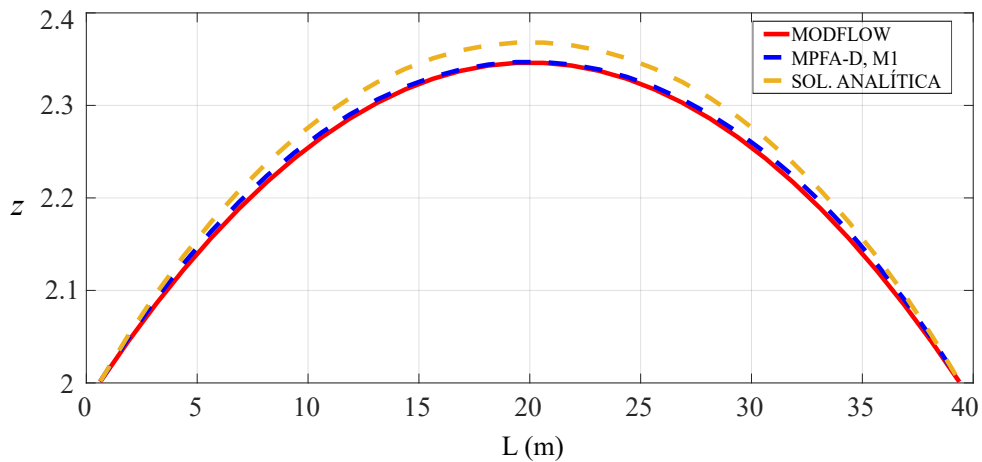
Além disso, o campo de carga hidráulica obtido pela solução analítica utilizando a malha M1 está representado na Figura 26. A Figura 27 exibe o campo correspondente à malha M2, enquanto a Figura 28 apresenta os resultados para a malha M3. Por fim, a Figura 29 mostra o campo de carga hidráulica associado à malha M4.

As Figuras 25 e 30 desempenham um papel fundamental na visualização do comportamento da carga hidráulica dentro do domínio analisado. A Figura 25 apresenta a distribuição espacial

da carga, evidenciando que os valores máximos se concentram na região central do domínio, enquanto os valores mínimos são observados nas extremidades. Essa representação gráfica permite compreender o comportamento da carga hidráulica ao longo do espaço considerado.

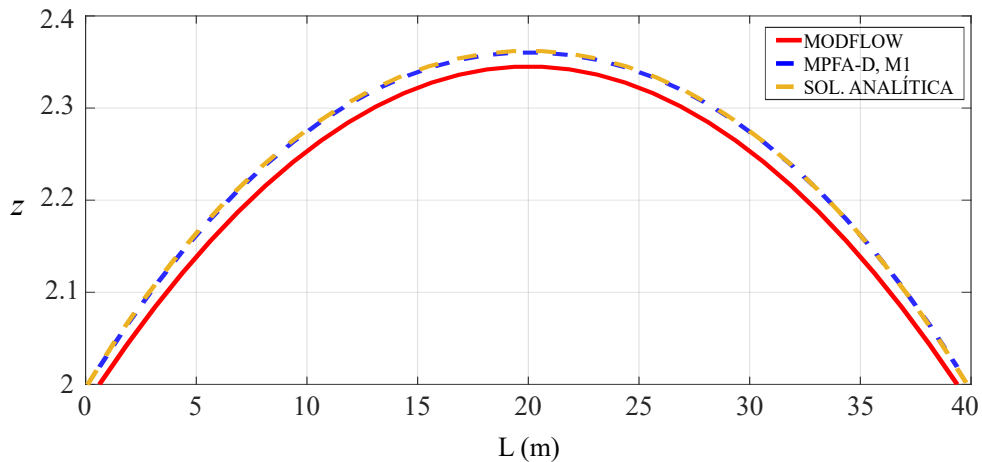
Por outro lado, a Figura 30 ilustra a variação da carga hidráulica sob a imposição das condições de contorno de Dirichlet aplicadas nos baricentros das células. Essa análise é essencial para compreender as implicações das condições de contorno sobre as variáveis do sistema.

Figura 30 – Perfil da carga hidráulica, em (m) para  $y = 5$ , considerando a imposição da condição de contorno de Dirichlet aplicada no baricentro das células.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 – Perfil da carga hidráulica, em (m) para  $y = 5$ , considerando a imposição da condição de contorno de Dirichlet na face do contorno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 31 apresenta o perfil da carga hidráulica quando as condições de contorno de Dirichlet são aplicadas nas faces dos elementos. Essa abordagem alternativa permite uma análise mais abrangente do desempenho do método MPFA-D, destacando as diferenças resultantes da forma de imposição das condições de contorno.

Tabela 4 – Erros obtidos pelos métodos.

		M1	M2	M3	M4
CVFD (CCDC)	MAE	0.0206	0.0114	0.0247	0.0098
	RRMSE	0.0095	0.0055	0.0124	0.0046
MPFA-D (CCDC)	MAE	0.0206	0.0115	0.0160	0.0112
	RRMSE	0.0095	0.0054	0.0072	0.0051
MPFA-D (CCDF)	MAE	$8.5448 \times 10^{-5}$	0.0030	$1.3144 \times 10^{-4}$	$1.3837 \times 10^{-4}$
	RRMSE	$4.5523 \times 10^{-5}$	0.0020	$6.6989 \times 10^{-5}$	$7.2311 \times 10^{-5}$

A Tabela 4 apresenta uma comparação dos erros obtidos pelos métodos MPFA-D e CVFD em diferentes configurações de malha. Para a malha M1, que é uma malha quadrilateral ortogonal, ambos os métodos apresentaram o mesmo erro médio absoluto (Erro Absoluto Médio (MAE)) de 0,0206 e um erro relativo da raiz do erro quadrático médio (Erro Médio Quadrático Relativo (RRMSE)) de 0,0095.

Na malha M2, que apresenta uma leve distorção, o desempenho do método MPFA-D sob a condição de contorno CCDC se destacou. O método CVFD obteve um MAE de 0,0114 e um RRMSE de 0,0055, enquanto o MPFA-D alcançou um MAE de 0,0115 e um RRMSE de 0,0054. Esses resultados evidenciam a capacidade do MPFA-D de manter elevada acurácia mesmo em malhas com distorção.

Na malha M3, que é uma malha triangular estruturada, o método MPFA-D também se destacou de forma notável. O CVFD apresentou um MAE de 0,0247 e um RRMSE de 0,0124, enquanto o MPFA-D, sob a condição de contorno CCDC, obteve um MAE de 0,0160 e um RRMSE de 0,0072, demonstrando que o método MPFA-D é capaz de lidar com malhas triangulares de forma acurada.

Por fim, na malha M4, que é uma malha triangular não estruturada, o método CVFD apresentou um MAE de 0,0098 e um RRMSE de 0,0046, enquanto o MPFA-D, com a condição CCDC, obteve um MAE de 0,0112 e um RRMSE de 0,0051. Esses resultados confirmam que o MPFA-D mantém um desempenho competitivo mesmo em configurações triangulares não estruturadas.

A Tabela 4 também apresenta os erros obtidos pelo método MPFA-D com a condição de contorno CCDF. Para as malhas M1, M2, M3 e M4, o MPFA-D com a condição de Dirichlet aplicada nas faces (CCDF) resultou em erros bastante reduzidos quando comparados aos obtidos com a aplicação nos baricentros (CCDC). Esses resultados reforçam a alta acurácia do método MPFA-D. Portanto, os dados apresentados confirmam a relevância do MPFA-D como



um método confiável e eficaz para a simulação de aquíferos em cenários que envolvem termos de precipitação.

#### 6.4 AQUÍFERO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO COM POÇOS DE BOMBEAMENTO E RECARGA

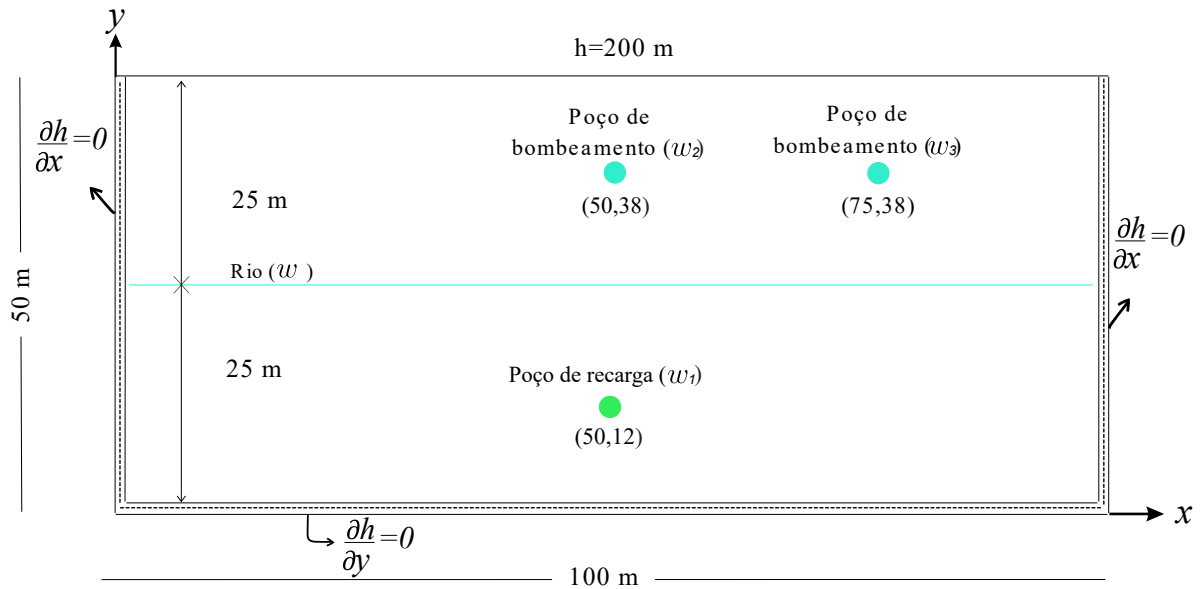
Neste estudo, adaptado de Sajedeh, Mahnaz e Saleh (2023), investiga-se o comportamento de um aquífero anisotrópico e homogêneo, definido em um domínio  $\Omega = [50 \times 100]$  m, com espessura de 1 m. O tensor de condutividade hidráulica é definido por:

$$K = \begin{bmatrix} 1.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m/d \quad (6.19)$$

O aquífero contém três poços: dois poços de bombeamento e um poço de recarga, além de um rio que atravessa todo o domínio, situado em  $x \in [0, 100]$  m e  $y = 25$  m.

Para o poço de recarga, atribuiu-se o parâmetro  $w_1$ , que possui uma taxa de injeção de 900 m<sup>3</sup>/dia, promovendo a entrada de água no sistema aquífero. Os dois poços de bombeamento realizam a extração de água: o poço  $w_2$  opera com uma taxa de bombeamento de 200 m<sup>3</sup>/dia, e o poço  $w_3$  com uma taxa de 450 m<sup>3</sup>/dia. Essas vazões refletem diferentes demandas e reposições de água no aquífero, impactando diretamente a distribuição da carga hidráulica. Veja a Figura 32.

Figura 32 – Domínio físico e as condições de contorno.

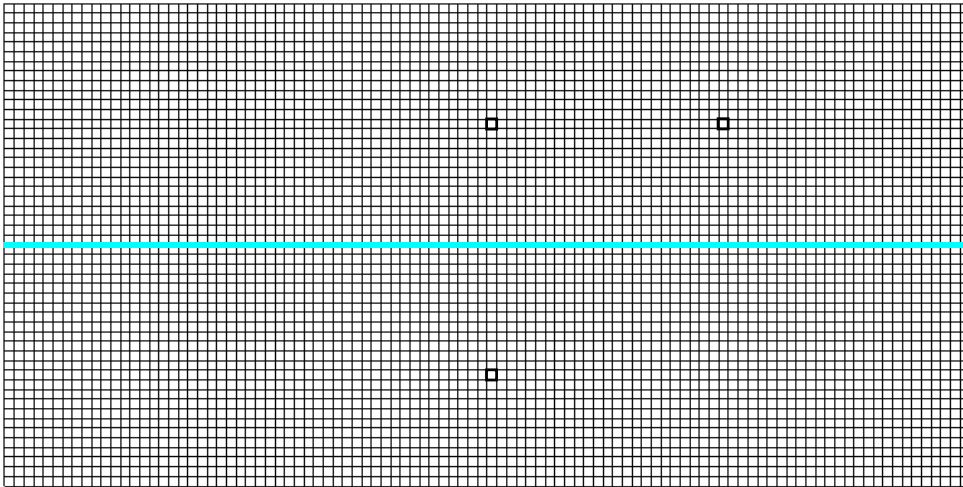


Fonte: Elaborado pelo autor.

Além dos poços, um rio desempenha papel importante no comportamento da carga hidráulica. Esse rio está localizado na coordenada  $y = 25$  m e produz uma taxa de infiltração de  $w_0 = 0,5 \text{ m}^3/\text{dia}/\text{m}$ .

As condições de contorno de Dirichlet e Neumann aplicadas ao problema estão ilustradas na Figura 32, que apresenta o domínio e a disposição das propriedades físicas mencionadas, incluindo os poços de recarga e bombeamento, bem como o rio. Este cenário de fluxo em regime estacionário é utilizado para estudar o comportamento hidráulico em uma configuração que simula condições reais de recursos hídricos subterrâneos, levando em consideração a anisotropia, que impacta diretamente o comportamento do fluxo.

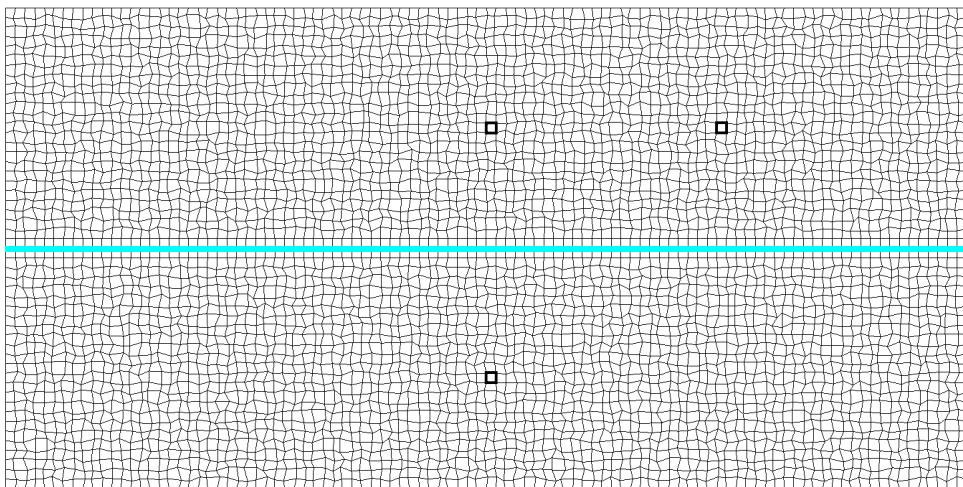
Figura 33 – Malha quadrilateral ortogonal (M1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O domínio foi discretizado utilizando uma malha quadrilateral ortogonal, conforme ilustrado na Figura 33.

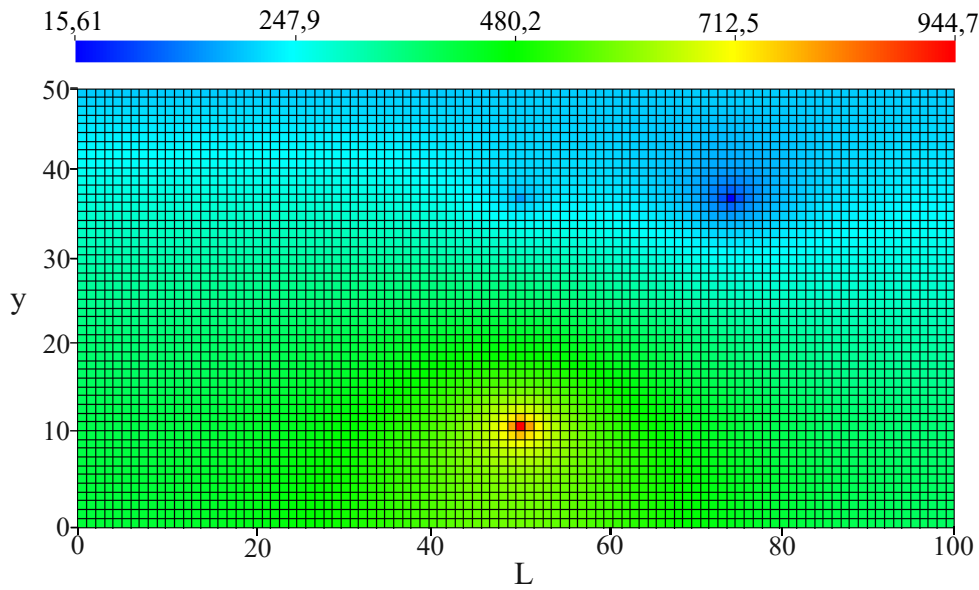
Figura 34 – Malha quadrilateral distorcida (M2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, uma malha distorcida foi aplicada, conforme mostrado na Figura 34. Ambas as malhas possuem 50 espaçamentos na direção  $y$  e 100 espaçamentos na direção  $x$ , resultando em um total de 5000 VC, com  $\Delta x = 1m$  e  $\Delta y = 1m$ .

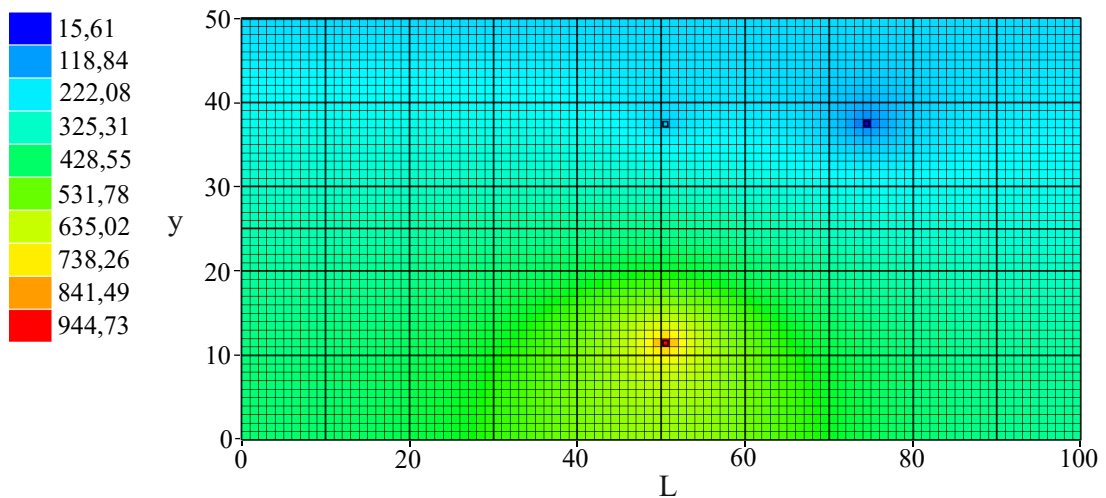
Figura 35 – Campo de carga hidráulica em (m) obtido com os métodos CVFD e MPFA-D, malha M1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É evidente a similaridade nos resultados da carga hidráulica ao comparar os métodos MPFA-D, CVFD e o MODFLOW 6 quando simulados na malha M1. Esse comportamento, conforme ilustrado nas Figuras 35 e 36, pode ser atribuído à regularidade geométrica da malha M1. A estrutura uniforme dessa malha minimiza a introdução de erros numéricos associados à representação das propriedades hidráulicas, permitindo que os métodos converjam para soluções equivalentes.

Figura 36 – Campo de carga hidráulica em (m) gerado como MODFLOW 6, malha M1 em (m).

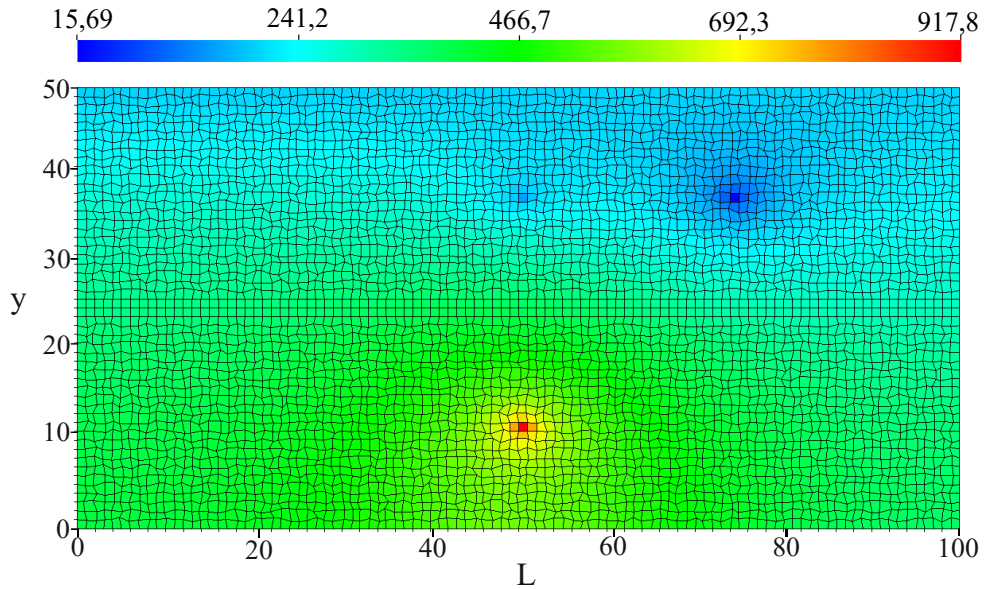


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 37, o método CVFD apresenta valores mínimos e máximos da carga hidráulica ligeiramente superiores, mesmo utilizando a mesma configuração de malha. Essa diferença,

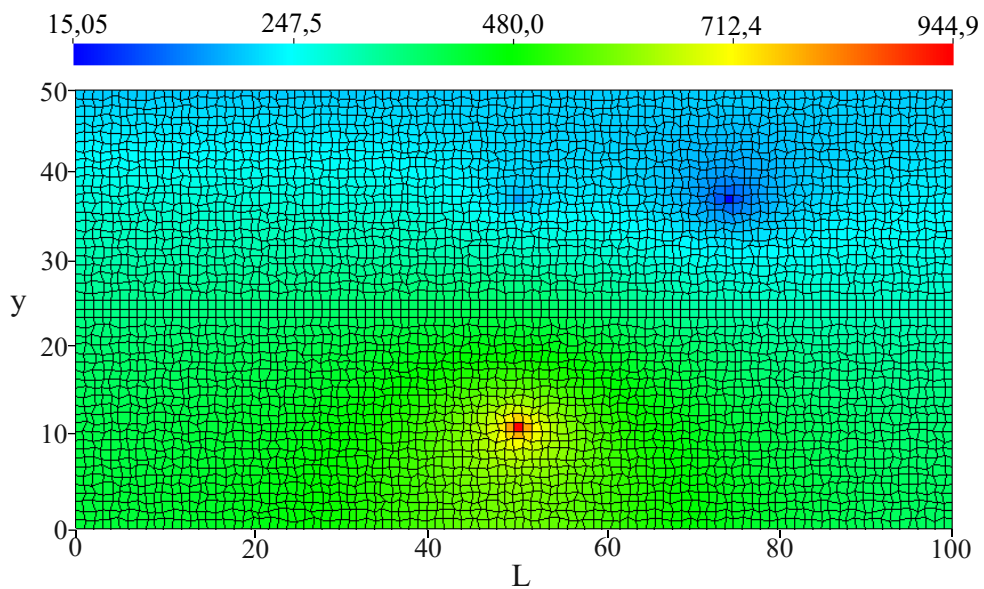
embora sutil, reforça a robustez do MPFA-D em cenários com geometrias menos regulares, enquanto o CVFD demonstra maior sensibilidade às distorções da malha.

Figura 37 – Campo de carga hidráulica em ( $m$ ) obtido com o método CVFD, malha M2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Campo de carga hidráulica em ( $m$ ) obtido com o método MPFA-D, malha M2.

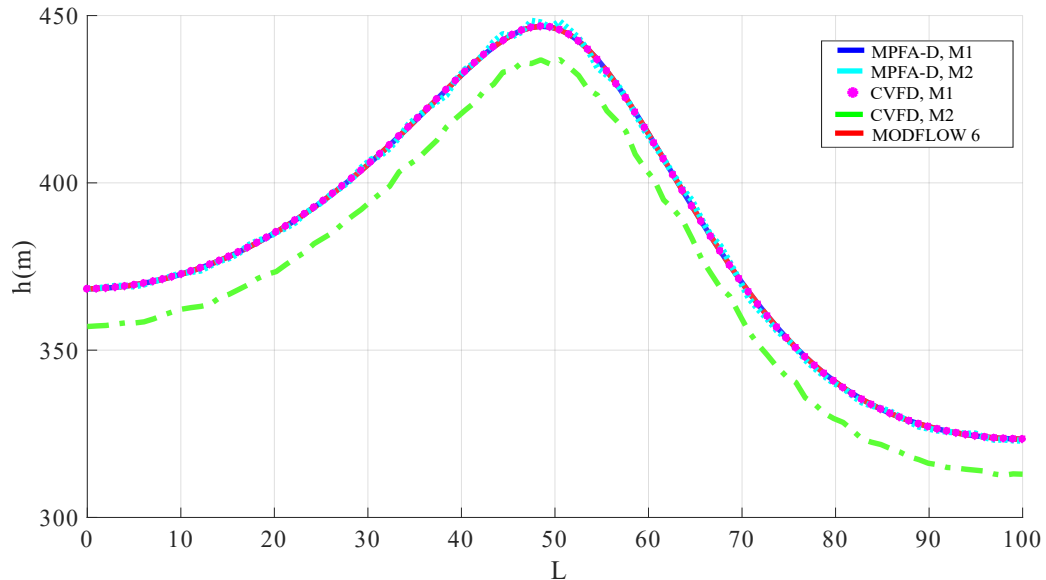


Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível observar na Figura 38 que o método MPFA-D mantém sua acurácia ao registrar os valores mínimos e máximos da carga hidráulica para a malha M2. Esses resultados evidenciam a capacidade do MPFA-D de preservar sua precisão mesmo em malhas mais complexas ou

distorcidas, destacando-o como uma abordagem mais confiável para aplicações em geometrias irregulares.

Figura 39 – Perfil da carga hidráulica (m).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 39, que apresenta a carga hidráulica ao longo de  $y = 22\text{ m}$ , evidencia que o método MPFA-D sofreu poucas alterações nos resultados com a utilização da malha M2. Para a malha M1, os resultados obtidos pelos métodos analisados são similares, indicando boa consistência em malhas quadrilaterais ortogonais.

No entanto, ao aplicar os métodos na malha M2, observa-se uma discrepância nos resultados do método CVFD, que apresentou uma redução nos valores máximo e mínimo da carga hidráulica. Por outro lado, o MPFA-D é menos afetado pela distorção da malha. Essa diferença é claramente visível na Figura 39, onde a linha tracejada verde evidencia a divergência entre os resultados dos métodos MPFA-D e CVFD.

O método CVFD apresenta maior sensibilidade a malhas distorcidas devido à sua dependência da ortogonalidade e à precisão na estimativa de fluxos e gradientes, resultando em inconsistências na carga hidráulica. Em contraste, o MPFA-D demonstra maior robustez ao considerar explicitamente a geometria da malha, mostrando-se mais adequado para situações com distorções.

Mais uma vez, esses resultados reforçam que o MPFA-D é mais robusto para lidar com geometrias complexas, evidenciando sua adequação para modelar cenários reais com maior precisão.

## 6.5 FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA EM REGIÃO HETEROGÊNEA E ANISOTRÓPICA COM FRONTEIRA FLUVIAL

Este caso foi adaptado de Sajedeh, Mahnaz e Saleh (2023) e considera uma região caracterizada pela heterogeneidade e anisotropia, com uma fronteira limitada pelo lado esquerdo, onde há a presença de um rio. O domínio de estudo é representado por uma área retangular  $\Omega$ , com dimensões de 105 metros na direção  $y$  e 420 metros na direção  $x$ , subdividido em três seções ao longo da direção  $x$ , cada uma com propriedades distintas de permeabilidade, ou condutividade hidráulica, conforme ilustrado na Figura 40.

A condutividade hidráulica é dada por:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix} m/d \quad (6.20)$$

A condutividade hidráulica  $K_1$  dada na Matiz 6.20 está entre  $0 < x < 150$  metros.

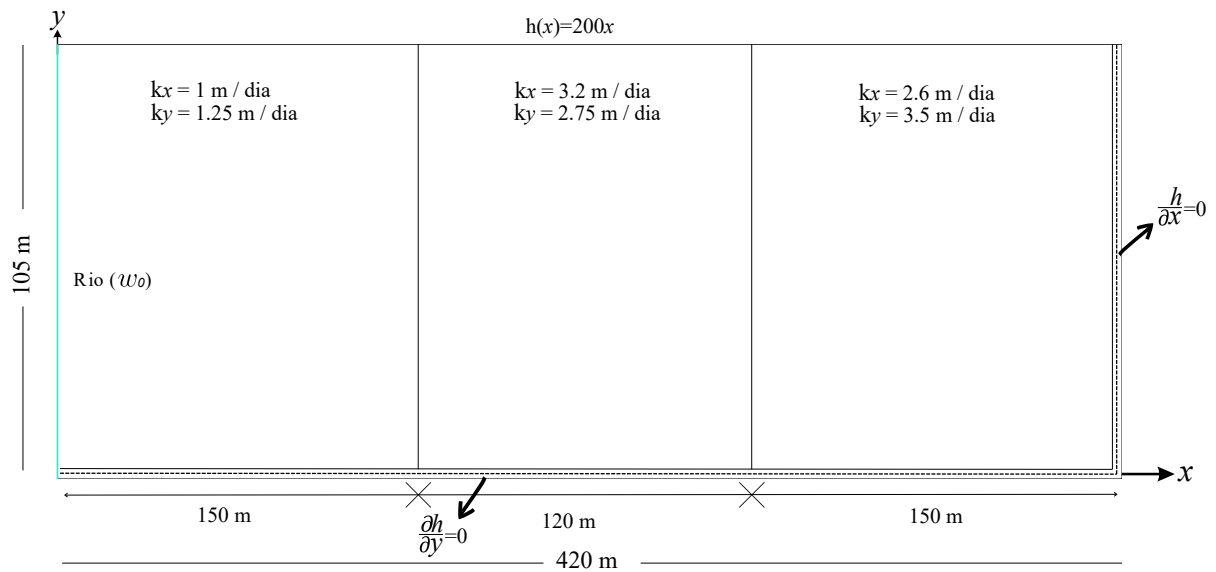
$$K_2 = \begin{bmatrix} 3.2 & 0 \\ 0 & 2.75 \end{bmatrix} m/d \quad (6.21)$$

A condutividade hidráulica  $K_2$  dada na Matiz 6.21 está entre  $150 < x < 270$  metros.

$$K_3 = \begin{bmatrix} 2,6 & 0 \\ 0 & 3,5 \end{bmatrix} m/d \quad (6.22)$$

A condutividade hidráulica  $K_3$ , apresentada na Matriz 6.22, está associada à região  $270 < x < 420$  metros. Portanto, essa divisão do domínio em três seções com diferentes propriedades hidráulicas é crucial para capturar os distintos padrões de fluxo no domínio. Cada seção influencia de maneira particular a dinâmica do fluxo, ocasionando variações significativas nas velocidades e direções do movimento da água, as quais são diretamente afetadas pelas propriedades do solo.

Figura 40 – Domínio físico e as condições de contorno.

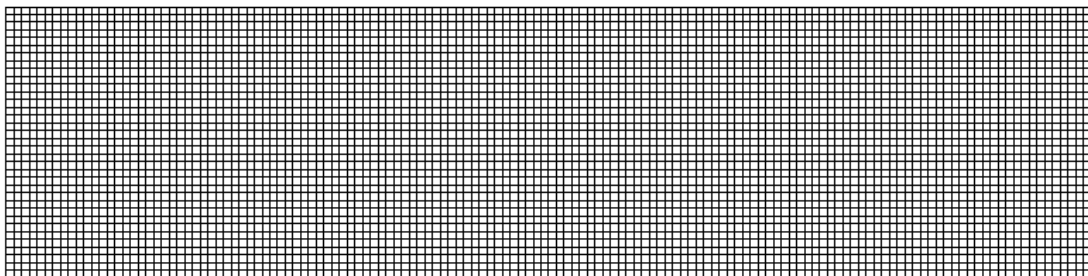


Fonte: Elaborado pelo autor.

As condições de contorno do sistema são estabelecidas de forma a refletir as características do domínio estudado. Na lateral direita, são impostas condições de Neumann com fluxo nulo nessa fronteira; de maneira semelhante, a base do domínio também é considerada sem fluxo.

Em contrapartida, a lateral esquerda do domínio, que é adjacente a um corpo hídrico (rio), apresenta uma taxa de infiltração constante de 0,24 m/dia. Essa infiltração é fundamental, pois demonstra a influência direta do rio sobre o aquífero, contribuindo para a recarga do sistema. Adicionalmente, na parte superior do domínio, aplica-se uma condição de contorno de Dirichlet que impõe uma carga hidráulica variável, expressa pela equação  $h = 200 \cdot \frac{x}{m}$ , indicando que a carga hidráulica aumenta linearmente ao longo da direção  $x$ .

Figura 41 – Malha quadrilateral ortogonal (M1).



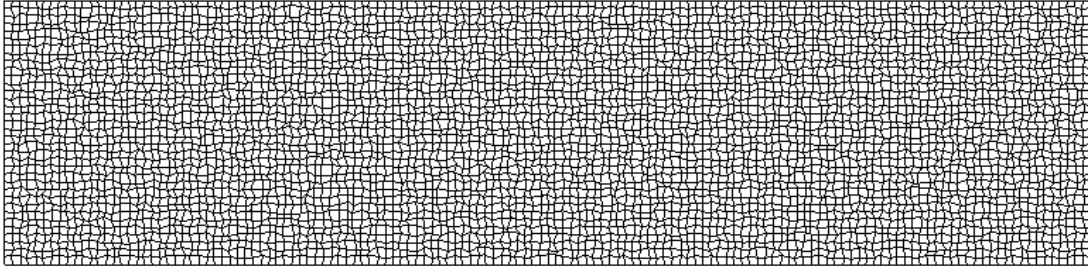
Fonte: Elaborado pelo autor.

A malha computacional utilizada está ilustrada na Figura 41 e na Figura 42. Essas malhas são compostas por 35 elementos na direção  $y$  e 140 elementos na direção  $x$ , resultando em um



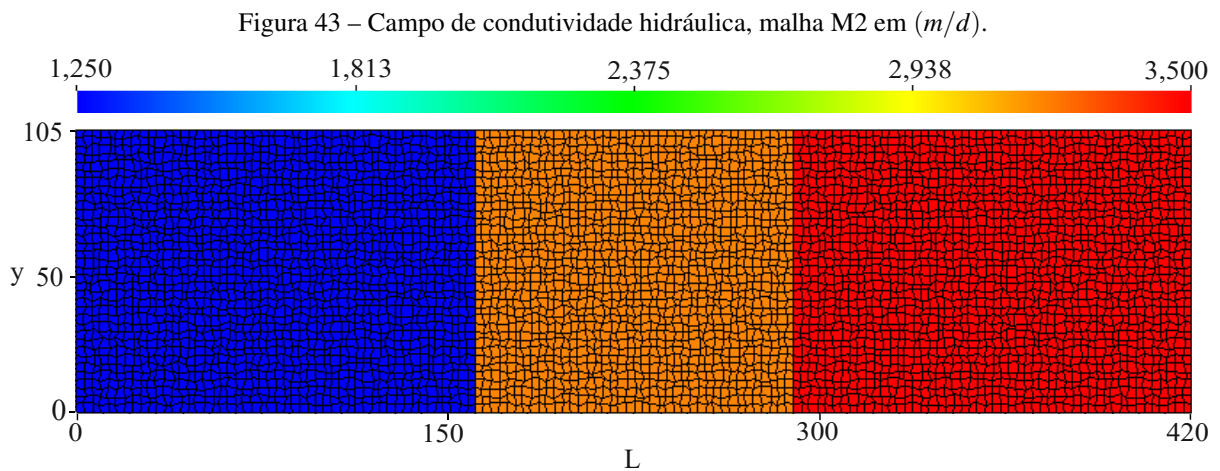
total de 4900 elementos, com espaçamentos  $\Delta x = 3$  e  $\Delta y = 3$ .

Figura 42 – Malha quadrilateral distorcida (M2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

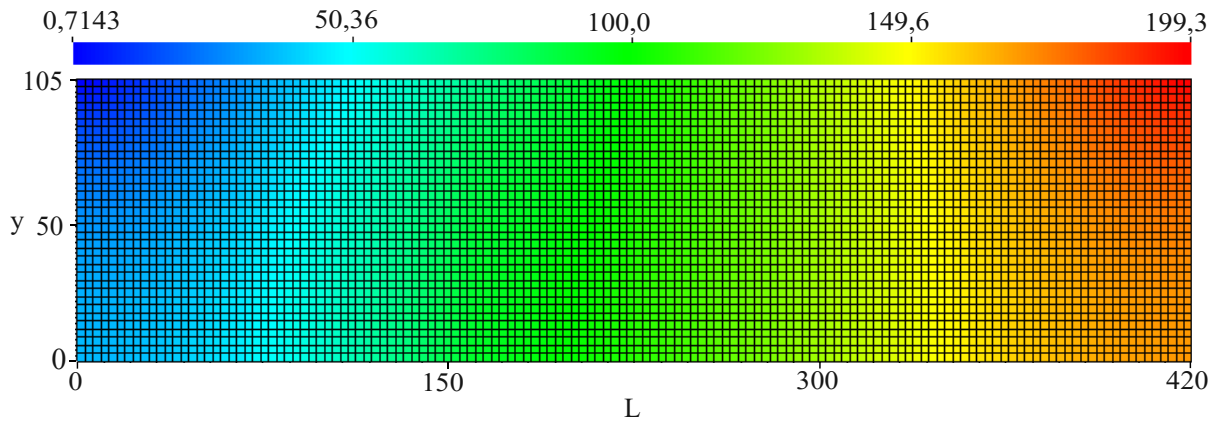
Na Figura 43, observa-se o campo de condutividades hidráulicas no domínio estudado. As cores ilustram as diferentes regiões do campo: a área em azul indica os menores valores de condutividade hidráulica, onde o fluxo é reduzido, enquanto as tonalidades que variam de laranja a vermelho destacam regiões com condutividade mais elevada, sugerindo maior intensidade de fluxo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa variação reflete as características heterogêneas do subsolo, evidenciando áreas com menor permeabilidade, o que resulta em um fluxo de água subterrânea mais lento nessas regiões. Em contraste, áreas com maior permeabilidade facilitam o movimento da água, tanto na direção horizontal quanto vertical, devido à maior capacidade do solo de transmiti-la. Na última porção do domínio, embora a água ainda se mova com certa facilidade, especialmente na direção vertical, a taxa de permeabilidade é inferior à observada na segunda seção, o que restringe um pouco seu fluxo.

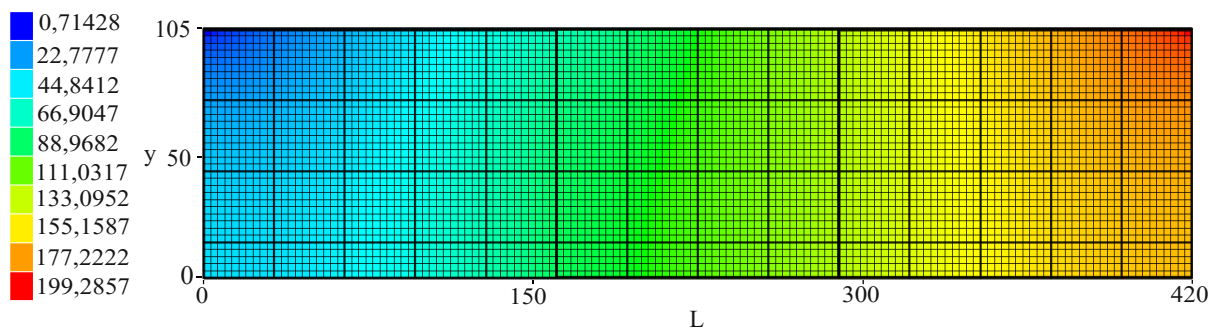
Figura 44 – Campo de carga hidráulica em (m) obtido pelos métodos CVFD e MPFA-D, malha M1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise dos resultados apresentados na Figura 44 evidencia a distribuição do campo de carga hidráulica obtida pelos métodos CVFD e MPFA-D, enquanto a Figura 45 mostra os resultados gerados pelo MODFLOW 6. Para a malha M1, observa-se uma concordância significativa entre os métodos, apresentando valores máximos e mínimos da carga hidráulica praticamente idênticos.

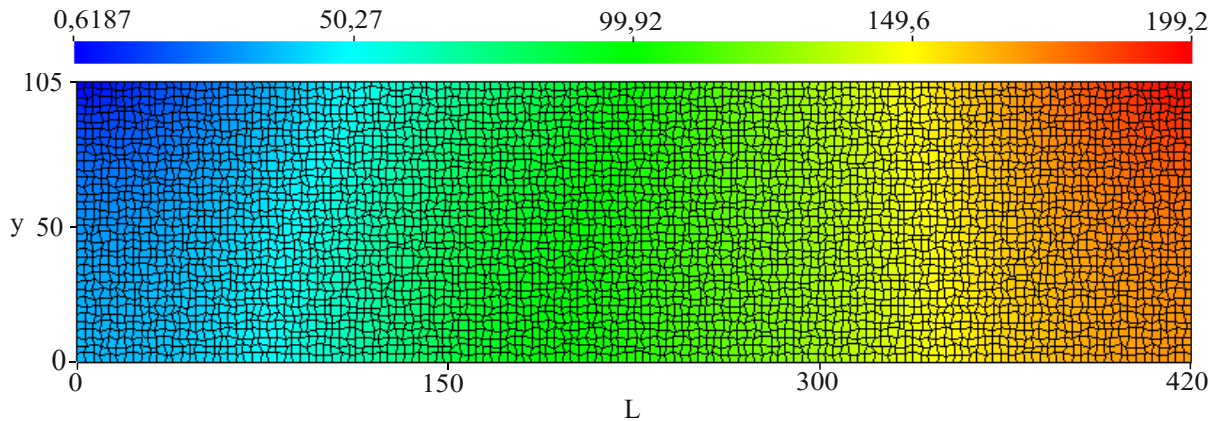
Figura 45 – Campo de carga hidráulica em (m) obtido com MODFLOW 6, malha M1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No entanto, ao aplicar os métodos em malhas mais complexas, como a malha M2, observa-se um aumento nas diferenças entre os resultados, conforme ilustrado na Figura 46. Apesar dessas variações nos valores globais, tanto o CVFD quanto o MPFA-D mostram-se relativamente pouco afetados, mantendo uma boa concordância em suas soluções.

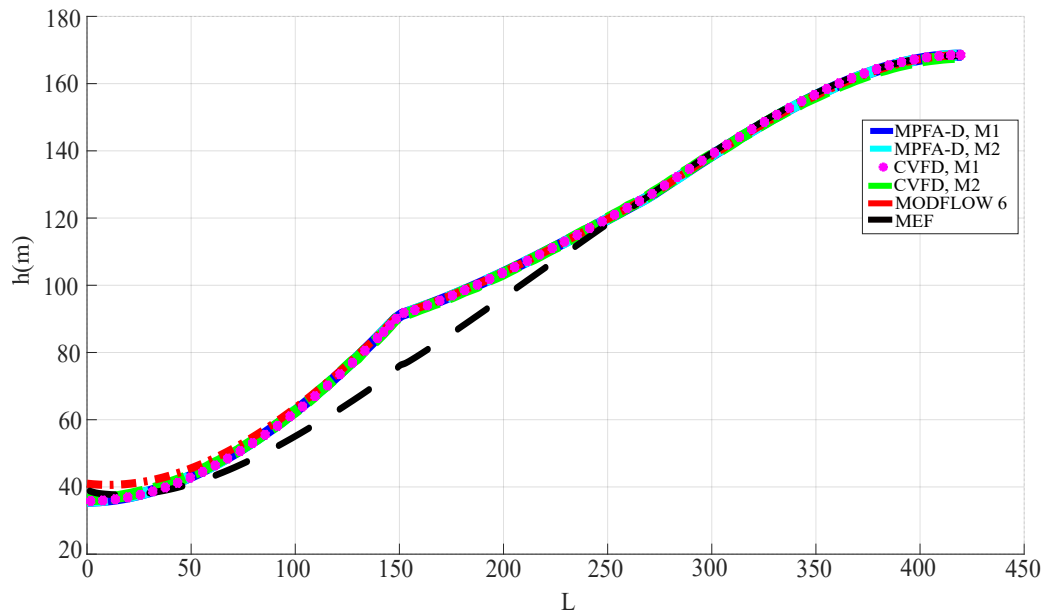
Figura 46 – Campo de carga hidráulica em (m) obtido com o método MPFA-D, malha M2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Contudo, o método MPFA-D demonstra desempenho ligeiramente superior ao CVFD em termos de robustez numérica. Essa vantagem é evidenciada na Figura 47, onde o MPFA-D reproduz com maior precisão o perfil da carga hidráulica, sobretudo em regiões com geometria mais complexa. A linha preta tracejada representa uma solução de referência adicional, obtida por meio do MEF, conforme apresentado por Sajede, Mahnaz e Saleh (2023).

Figura 47 – Perfil da carga hidráulica (m).



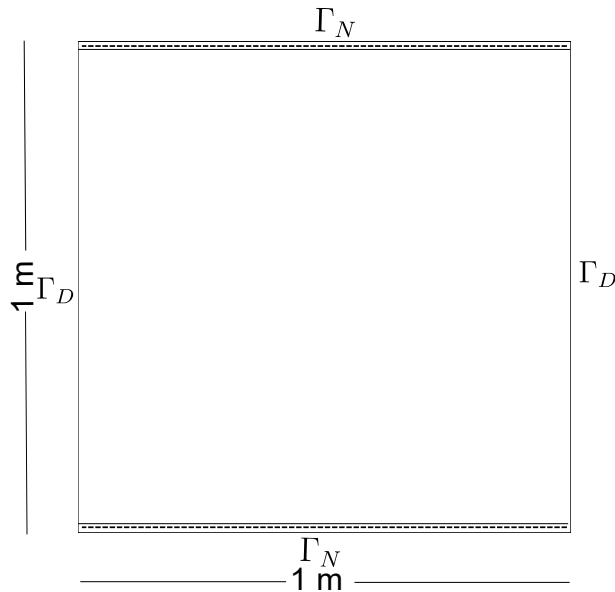
Elaborado pelo autor.

## 7 TESTES UTILIZANDO O MÉTODO MPFA-D EM AQUÍFEROS EM ESTADO TRANSIENTE

### 7.1 AQUÍFERO COM FLUXO DE DARCY NÃO ESTACIONÁRIO E HOMOGENEO

Este caso, adaptado de Wang, Zhou e Feng (2021), avalia a convergência do método MPFA-D proposto neste estudo, considerando um domínio  $\Omega = [1 \times 1]$ , ou seja, uma área de  $1,00\text{m}^2$ . Na face esquerda do domínio são impostas condições de contorno de Dirichlet com carga hidráulica de 10 m, enquanto na face direita a carga hidráulica é de 2 m. As condições de contorno de Neumann, que representam fluxo nulo, são aplicadas no topo e na base do aquífero. O coeficiente de elasticidade é  $\mu_e = 0,01$ , e a condição inicial para a carga hidráulica é zero. O domínio analisado está ilustrado na Figura 48.

Figura 48 – Domínio físico e as condições de contorno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Este problema possui a seguinte solução analítica para o fluxo em estado transiente, expressa como:

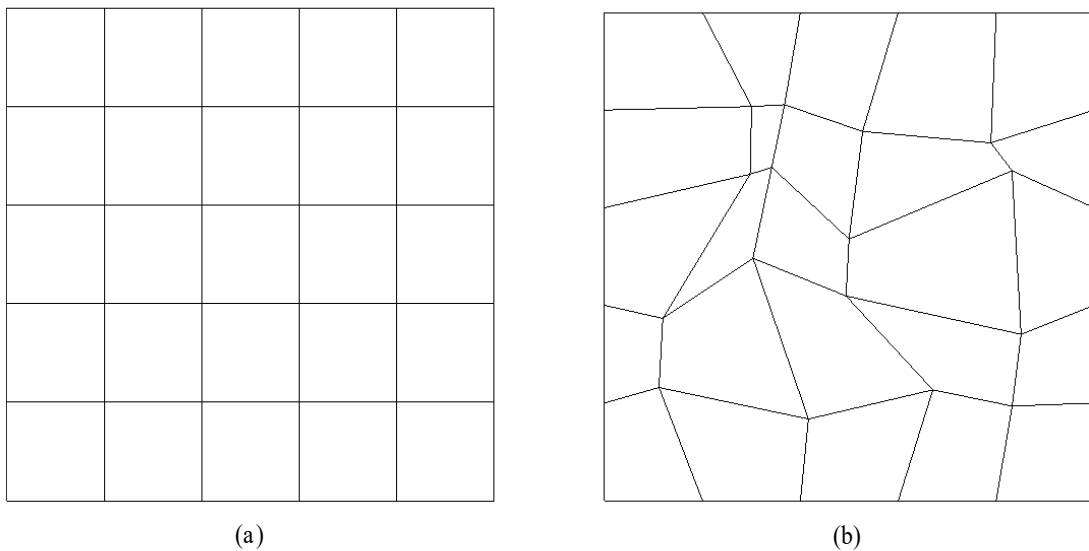
$$h(x, y, t) = 10 - 8x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \text{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 Kt / \mu_e} \quad (7.1)$$

Onde  $t$  é o tempo, e a condutividade hidráulica é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix} \text{ m.s}^{-1} \quad (7.2)$$

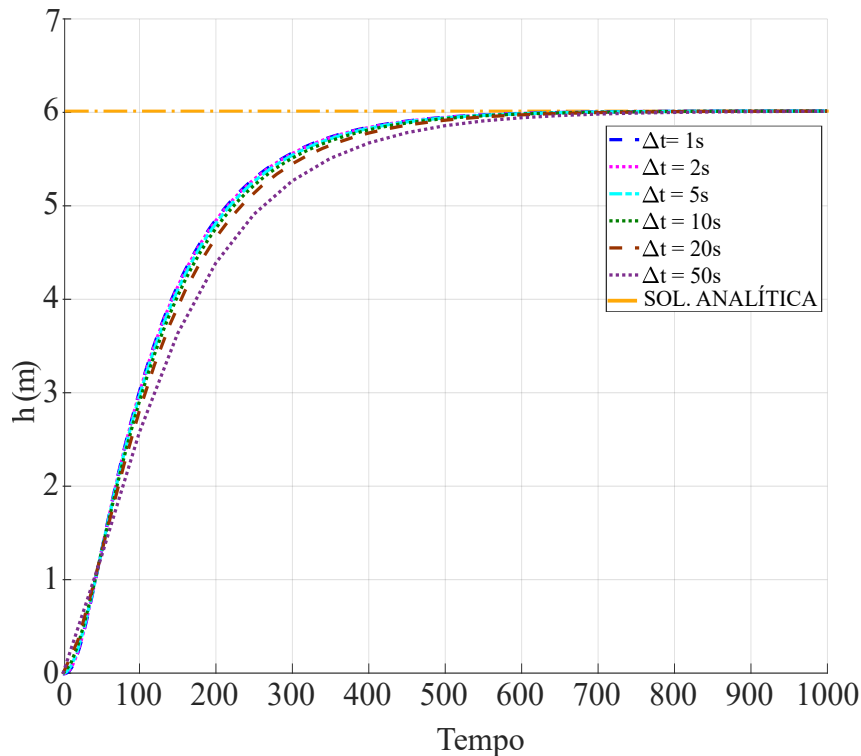
A malha computacional utilizada neste estudo está apresentada na Figura 49. A configuração dessa malha foi escolhida para testar a robustez e a acurácia do nosso método, levando em consideração malha estruturadas e distorcidas.

Figura 49 – (a) Malha quadrilateral ortogonal M1 e (b) quadrilateral distorcida M2, ambas com 25 volumes de controle.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste estudo, foram gerados diversos campos e perfis da carga hidráulica com base nas malhas M1 e M2, considerando a aplicação dos métodos MPFA-D e CVFD.

Figura 50 – Perfil da carga hidráulica  $y=0,5$ .

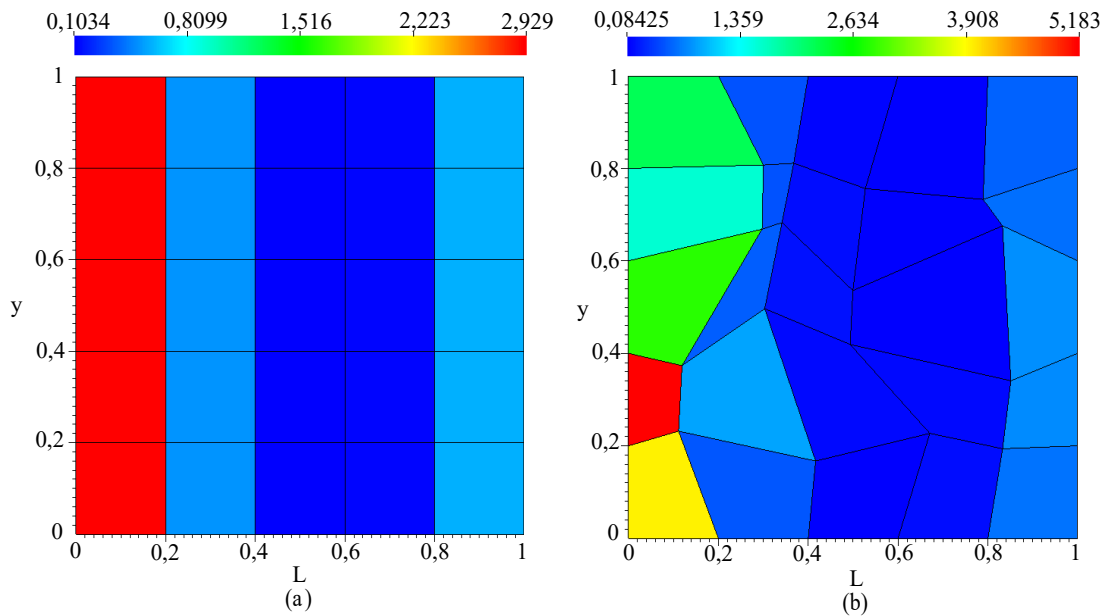
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 50 ilustra a evolução do perfil da carga hidráulica obtido pelo método MPFA-D, considerando diferentes passos de tempo ao longo de um período total de 1000 segundos. Foram analisados os passos de tempo em  $\Delta t = 1s, 2s, 5s, 10s, 20s$  e  $50s$ , com foco na variação da carga hidráulica no ponto  $(x = 0,5; y = 0,5)$ . Essa análise permite compreender como diferentes passos de tempo influenciam os resultados ao longo do tempo. Observa-se que os passos de tempo inferiores a 10 segundos, apresentam maior proximidade com a solução analítica, evidenciando uma melhor representação do comportamento esperado, porém quanto mais refinado o passo de tempo maior o custo computacional. Assim, o passo de tempo  $\Delta t = 10s$  destaca-se como uma escolha intermédia para a simulação.

Os campos da carga hidráulica obtidos pelo método MPFA-D com as malhas M1 e M2 estão ilustrados na Figura 51, a Figura 51-a corresponde à malha M1, e a Figura 51-b representa a malha M2, respectivamente. A malha apresentada na Figura 51-b foi intencionalmente distorcida para permitir a análise dos efeitos da orientação da malha sobre o comportamento do método numérico. Optou-se por não realizar o refinamento da malha, a fim de possibilitar uma observação mais clara e direta dos efeitos do método. Esses campos foram obtidos para o tempo de simulação  $t = 10$  segundos, com passo de tempo  $\Delta t = 10s$ . A malha representada na figura 51-b Não estruturada e distorcida para que através e dela conseguisse observar os efeitos

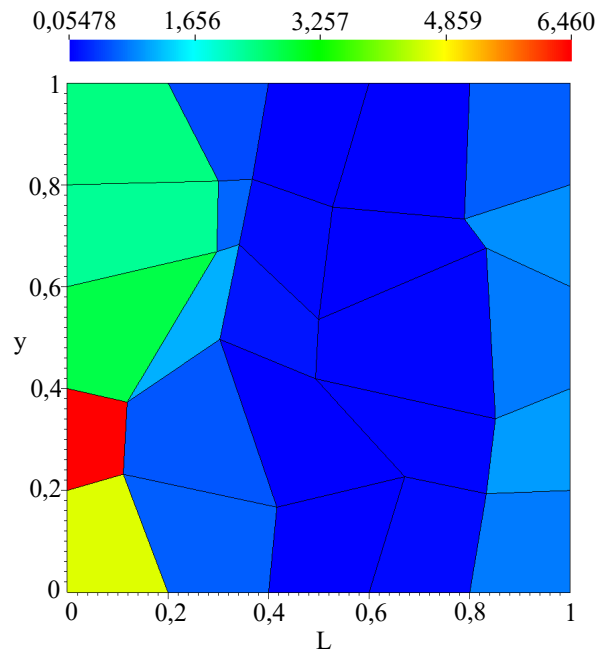
do método através do efeito de orientação de malha e mesma não é refinada com o propósito de verificar.

Figura 51 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1, e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos obtido com o método MPFA-D para  $t = 10s$ .

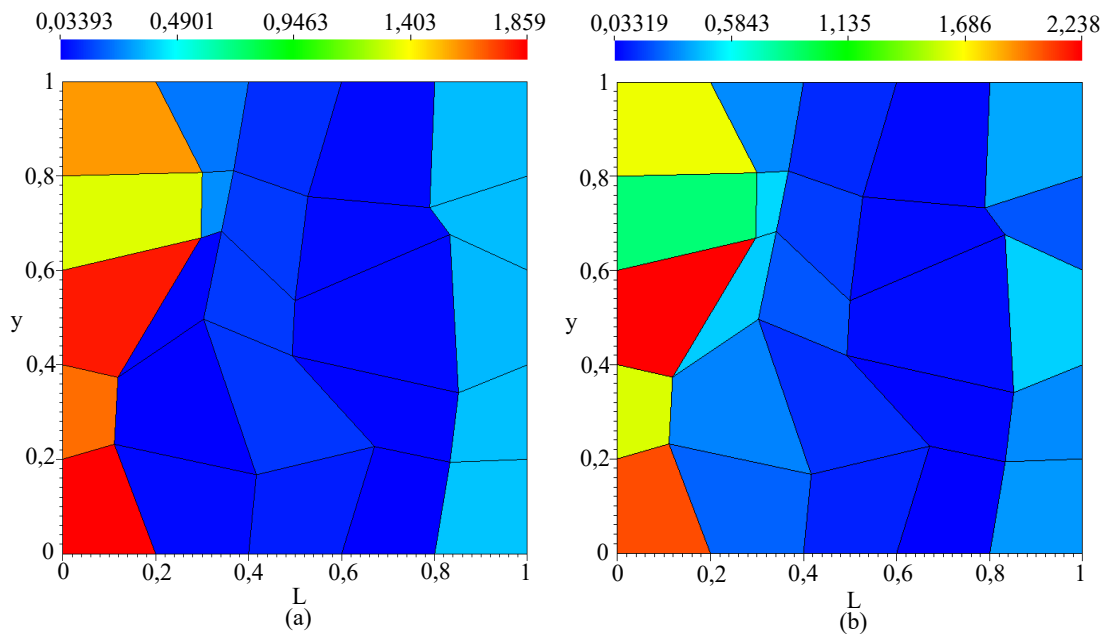


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como abordado nas seções anteriores, para a malha M1 os métodos MPFA-D e CVFD apresentam resultados similares. É importante notar que ocorreram oscilações numéricas, atribuídas à baixa quantidade de elementos na direção  $x$ . Essas oscilações desaparecem com o uso de malhas mais refinadas. Portanto, para este problema, em relação ao método CVFD, a análise será restrita aos resultados obtidos com a malha M2, conforme ilustrado na Figura 52.

Figura 52 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M2 obtido com o método CVFD para  $t = 10s$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 53 – (a) Erro para malha M2 obtido com o método MPFA-D, e (b) Erro para malha M2 obtido com o método CVFD para  $t = 10s$ .

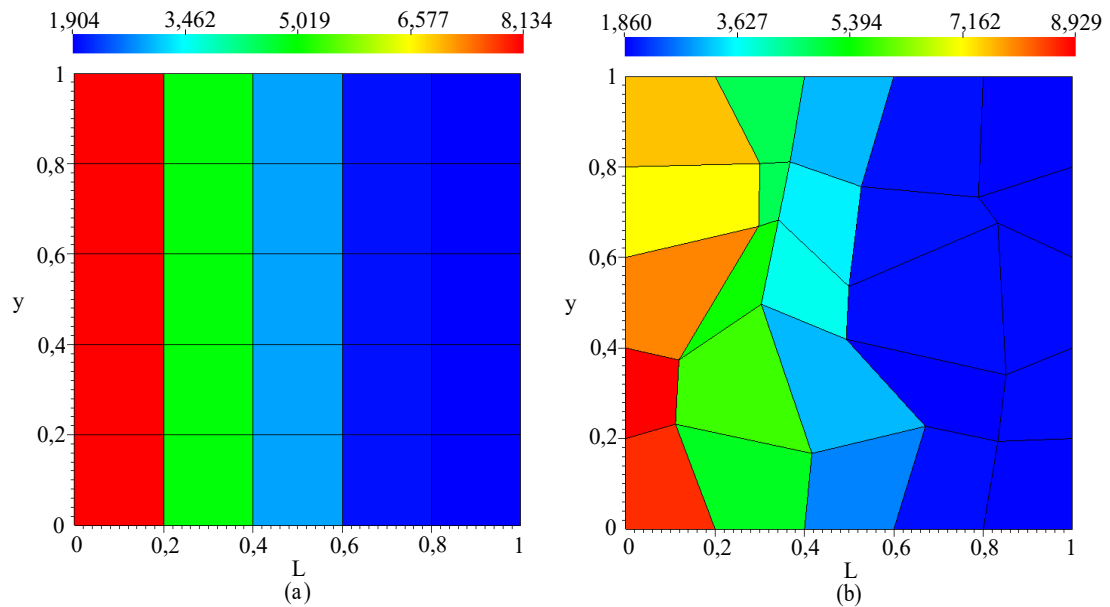
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os erros obtidos para  $\Delta t = 10$  e  $t = 10$ , utilizando a malha M2, foram analisados com base em dois métodos distintos. A Figura 53-a apresenta os erros associados ao método MPFA-D, destacando as características específicas deste modelo. Em contrapartida, a Figura 53-b ilus-



tra os erros referentes ao método CVFD, possibilitando uma comparação direta entre os dois métodos.

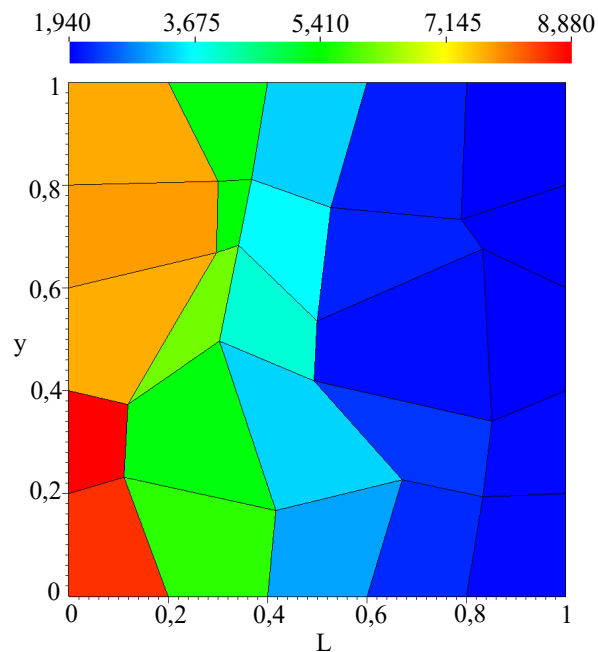
Figura 54 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1, e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos obtido com o método MPFA-D para  $t = 100s$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por sua vez, a Figura 54-a apresenta o campo da carga hidráulica no instante  $t = 100$  segundos, com passo de tempo  $\Delta t = 10$ .

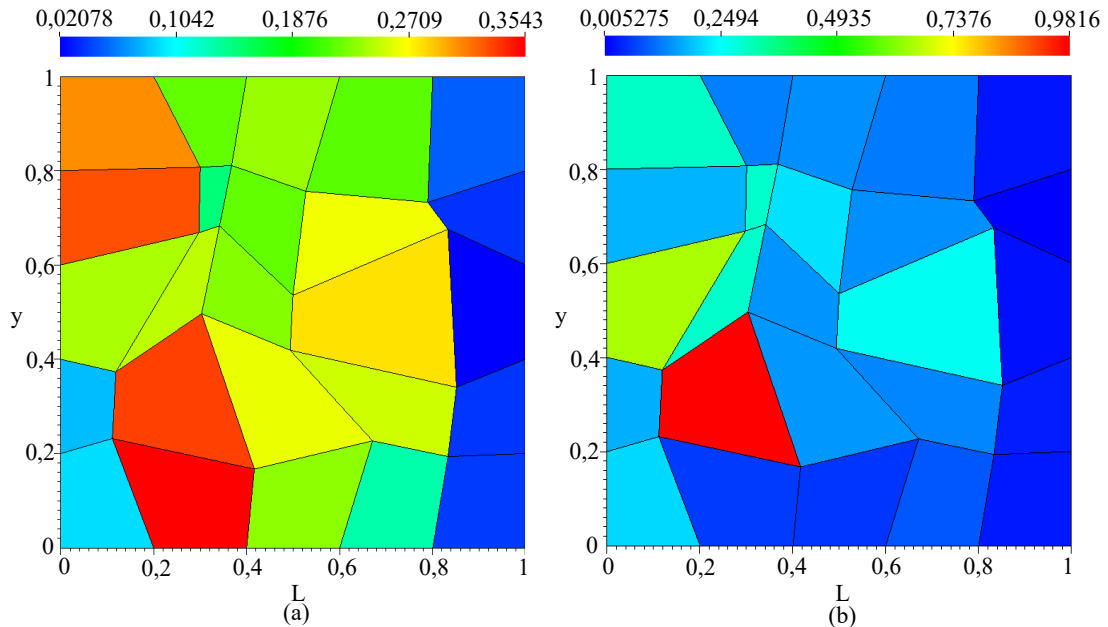
Figura 55 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M2 obtido com o método CVFD para  $t = 100s$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Adota-se, para a Figura 55, um passo de tempo  $\Delta t = 10$  e tempo de simulação  $t = 100$  segundos, tanto para as malhas M1 quanto para M2.

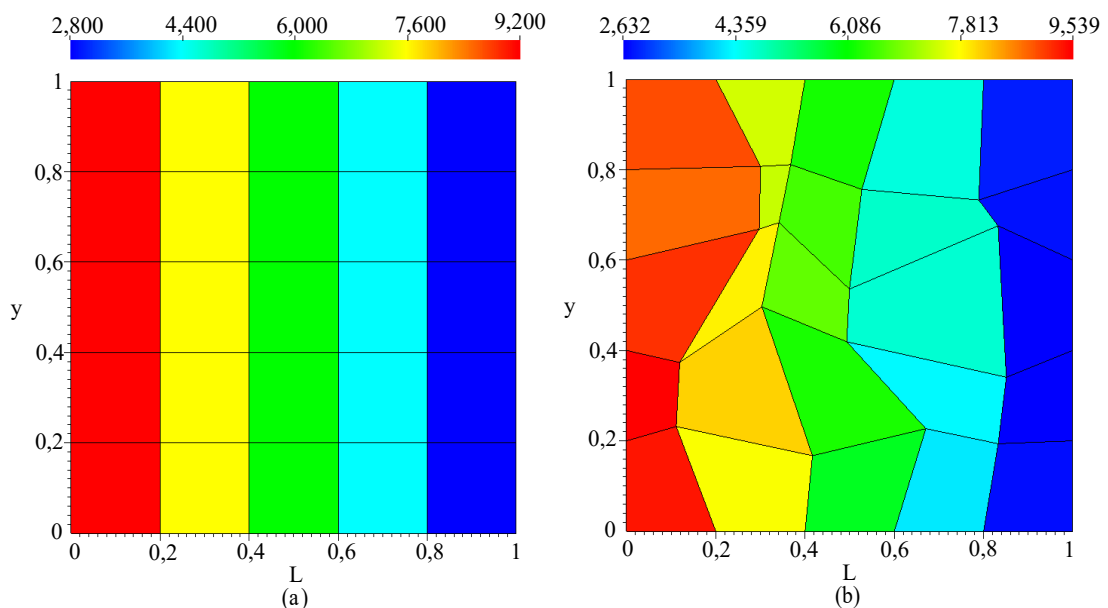
Figura 56 – Erro para malha M2 obtido com o método MPFA-D, e (b) Erro para malha M2 obtido com o método CVFD para  $t = 100s$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para  $\Delta t = 10$  e  $t = 100$ , os erros obtidos na malha M2 são apresentados. A Figura 56-a exibe os erros do MPFA-D, enquanto a Figura 56-b mostra os erros do CVFD, permitindo uma comparação entre ambos.

Figura 57 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1, e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos obtido com o método MPFA-D para  $t = 1000s$ .

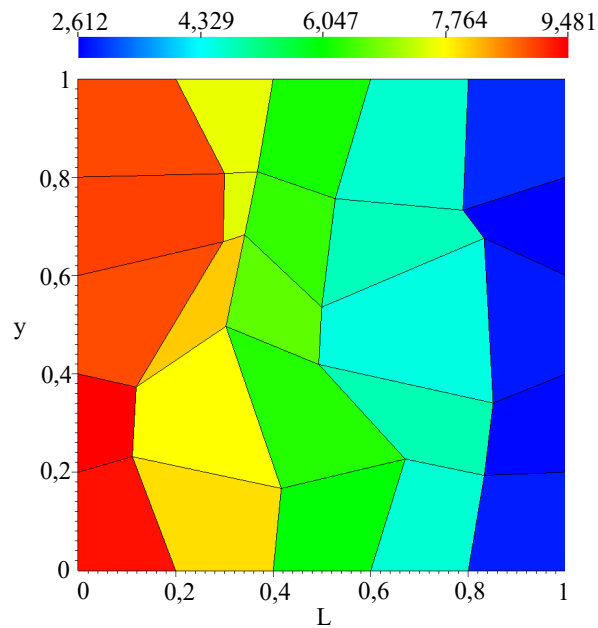


Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, apresenta-se a Figura 57, que ilustra o campo da carga hidráulica obtido pelo método MPFA-D para as malhas M1 e M2, respectivamente. O tempo de simulação foi  $t = 1000$  segundos, com passo de tempo  $\Delta t = 10$ .

Na Figura 58, é possível analisar o campo da carga hidráulica gerado pelo método CVFD.

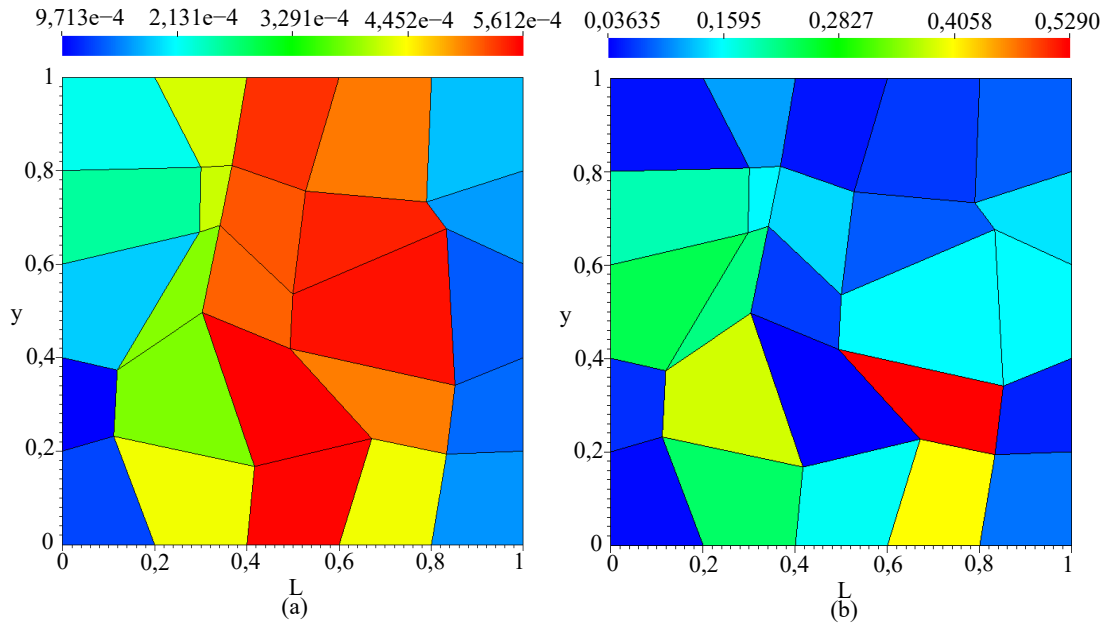
Figura 58 – Campo de carga hidráulica para malha M2 obtido com o método CVFD para  $t = 1000s$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 59-a apresenta os erros do método MPFA-D, enquanto a Figura 59-b exibe os erros do método CVFD, permitindo uma comparação entre ambos.

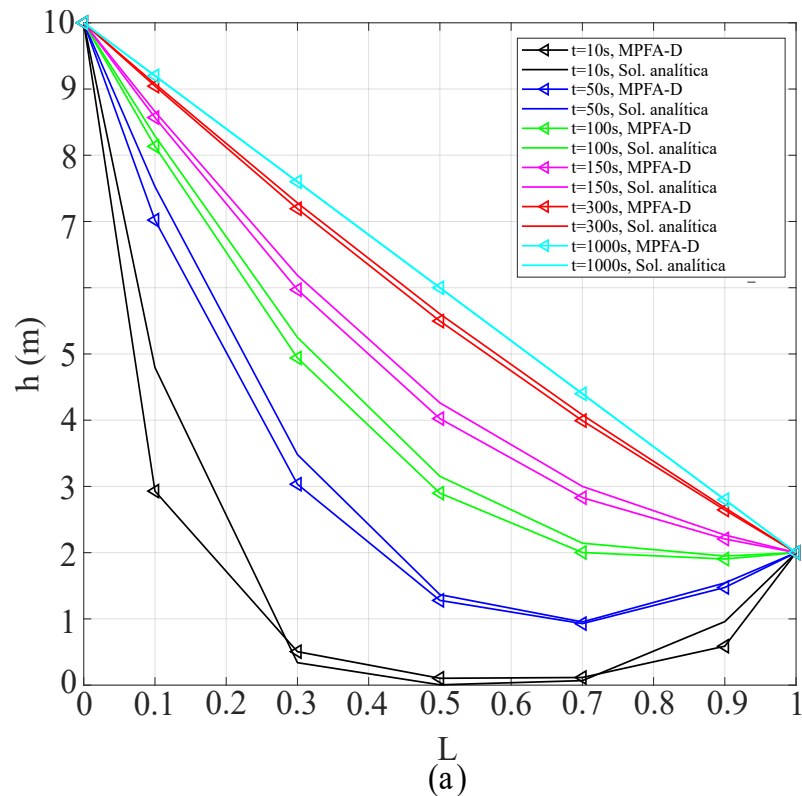
Figura 59 – (a) Erro para malha M2 obtido com o método MPFA-D, e (b) Erro para malha M2 obtido com o método CVFD para  $t = 1000s$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os erros também foram analisados para  $\Delta t = 10$  e  $t = 1000$ , utilizando a malha M2.

Figura 60 – Perfil da carga hidráulica para malha M1 obtido com o método MPFA-D e solução analítica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

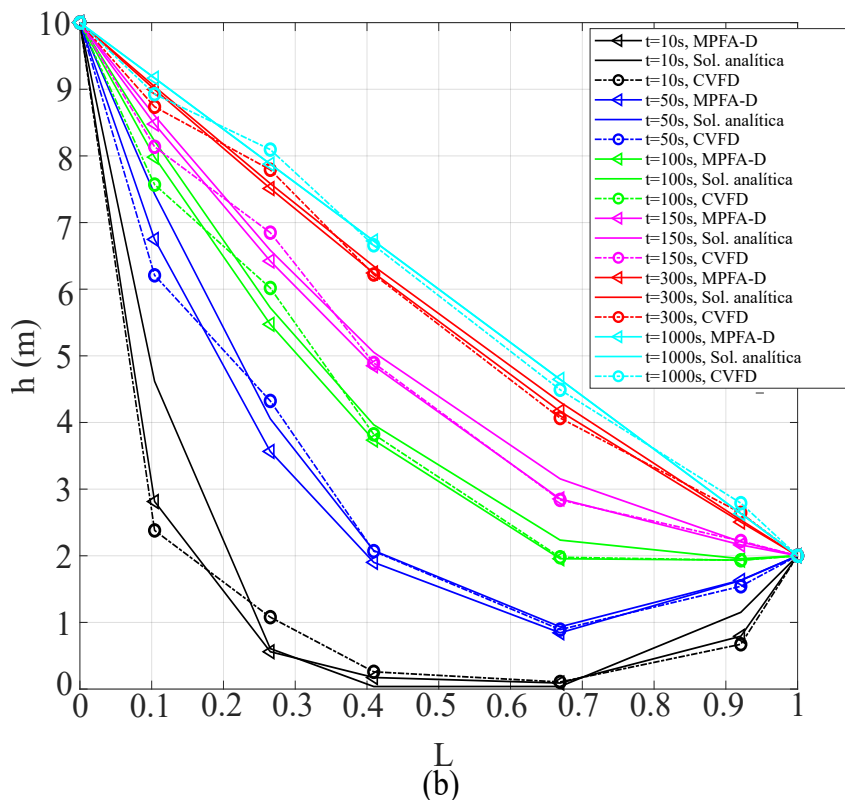
A Figura 60 mostra a evolução da carga hidráulica ao longo do tempo para a malha M1,

comparando os resultados obtidos pelo método MPFA-D com a solução analítica descrita na equação 7.1. As análises foram realizadas em diferentes instantes de tempo, incluindo  $t = 10s$ ,  $50s$ ,  $150s$ ,  $300s$  e  $1000s$ .

Os resultados indicam que o método MPFA-D apresenta uma convergência progressiva em direção à solução analítica, especialmente à medida que o tempo de simulação se aproxima de  $t = 1000s$ .

A Figura 61, gerada com a malha M2, apresenta os resultados comparativos entre os métodos MPFA-D, CVFD e a solução analítica. Observa-se que o método CVFD exibe maior discrepância em relação à solução analítica e ao MPFA-D, especialmente em função das características adversas da malha. Em contrapartida, o método MPFA-D demonstra maior similaridade com a solução analítica, mesmo sob condições de malha não estruturada ou distorcida, mantendo sua precisão à medida que o tempo avança.

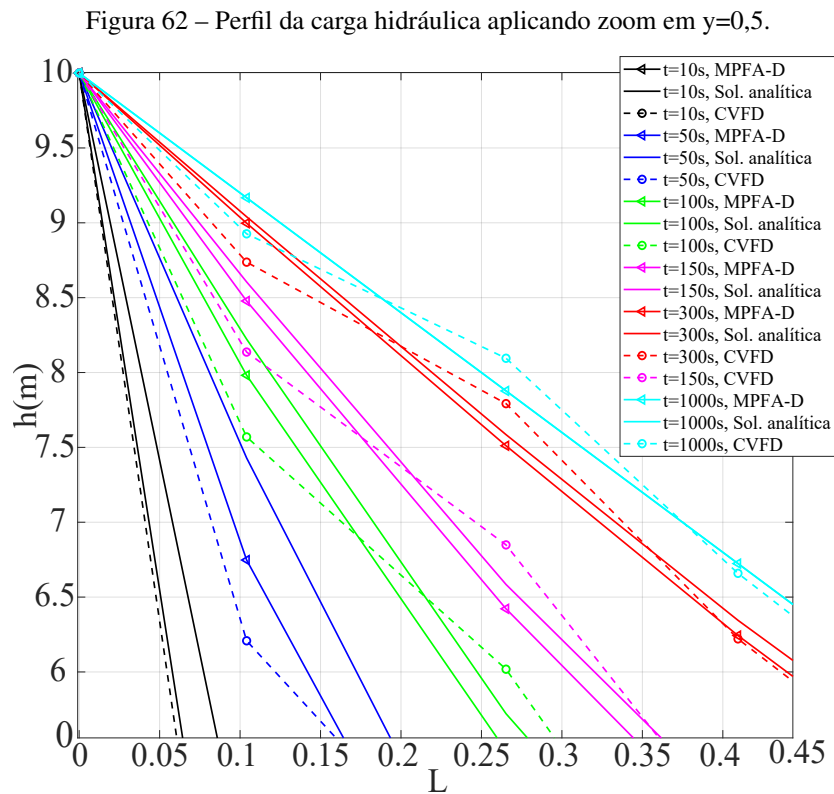
Figura 61 – Perfil da carga hidráulica para malha M2 obtido com os métodos MPFA-D, CVFD e solução analítica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 62 apresenta uma versão ampliada da Figura 61, permitindo uma análise mais detalhada dos resultados. Essa ampliação evidencia as discrepâncias observadas entre os perfis das linhas obtidos para diferentes tempos de simulação no teste proposto. Entre os métodos analisados, o CVFD demonstra diferenças mais acentuadas em relação ao MPFA-D.

Por outro lado, observa-se que o MPFA-D apresenta uma convergência gradual em direção à solução analítica à medida que o tempo de simulação aumenta. Esse comportamento é especialmente notável em  $t = 1000s$ , momento em que os resultados do MPFA-D se tornam praticamente equivalentes à solução analítica, enquanto o CVFD ainda exibe discrepâncias significativas.



Esses resultados evidenciam a robustez do método MPFA-D, que se destaca por sua capacidade de manter uma boa aproximação com a solução analítica em situações desafiadoras. Tal vantagem torna o método particularmente eficaz em aplicações que exigem alta acurácia e adaptação a características locais complexas, reafirmando sua superioridade em relação ao CVFD em malhas não convencionais.

## 7.2 AQUÍFERO CONFINADO ISOTRÓPICO COM UM POÇO DE BOMBEAMENTO

O problema em questão aborda um aquífero confinado em regime transiente, adaptado de Qian *et al.* (2023), com o objetivo de analisar o comportamento da carga hidráulica em um aquífero homogêneo e isotrópico, utilizando o método MPFA-D. O domínio físico do problema é representado por uma área quadrada de  $1\text{Km}^2$ , com dimensões  $\Omega = [0, 1000] \times [0, 1000]$ , e pos-

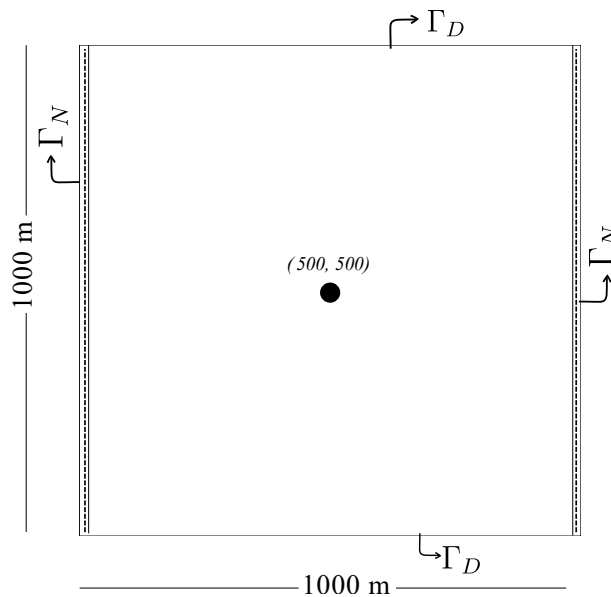
sui um poço de bombeamento localizado no centro do domínio, conforme ilustrado na Figura 63. Esse domínio é adequado para a modelagem numérica de aquíferos confinados bidimensionais, permitindo o estudo da propagação da carga hidráulica e do impacto do poço, bem como das condições de contorno, sobre o comportamento do fluxo das águas subterrâneas.

O poço de bombeamento está localizado nas coordenadas  $(x,y) = (500,500)$  e opera com uma taxa de bombeamento de  $10 \text{ m}^3/\text{dia}$ . Nas fronteiras superior e inferior do domínio, são aplicadas condições de contorno de Dirichlet, com a carga hidráulica fixada em 100 m, conforme ilustrado na Figura 63. Nas fronteiras laterais, esquerda e direita, aplicam-se condições de contorno de Neumann com fluxo nulo, garantindo que não haja variação lateral do fluxo, também ilustrado na Figura 63. A carga hidráulica inicial é fixada em 100 m em todo o domínio.

O coeficiente de elasticidade do aquífero é  $\mu_e = 0,001$ , e a espessura do aquífero é  $M = 3 \text{ m}$ . Para este estudo, não são considerados os efeitos de precipitação e evapotranspiração. O aquífero é assumido homogêneo e isotrópico, com um período de análise de 20 dias e passo de tempo  $\Delta t = 0,01$ . A condutividade hidráulica, igual nas direções  $x$  e  $y$ , é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 33.33 & 0 \\ 0 & 33.33 \end{bmatrix} \text{ m.d}^{-1} \quad (7.3)$$

Figura 63 – Domínio físico e as condições de contorno.



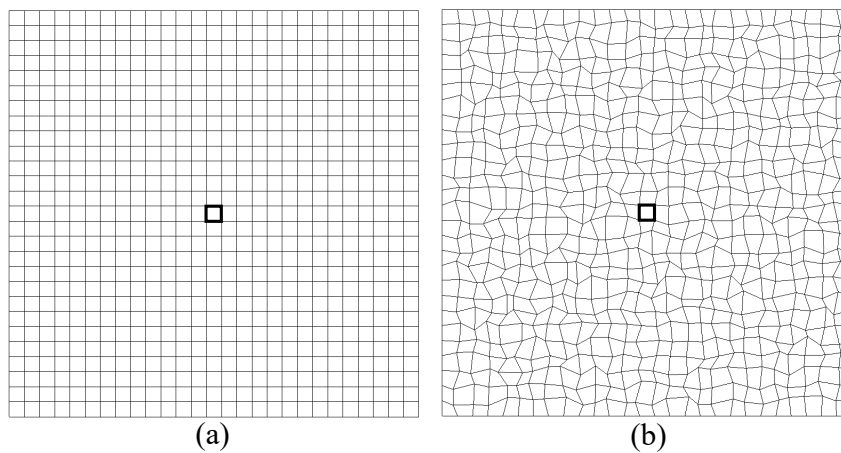
Fonte: Elaborado pelo autor.

A discretização do domínio foi realizada utilizando uma malha quadrilateral com espaça-

mento  $\Delta x = 37,03$  e  $\Delta y = 37,03$ . Foram consideradas tanto malhas quadrilaterais ortogonais quanto malhas quadrilaterais distorcidas, conforme ilustrado na Figura 64. A escolha de malhas ortogonais e distorcidas visa comparar o desempenho dos métodos numéricos nesses tipos de malha, uma vez que isso pode influenciar diretamente a acurácia dos resultados obtidos.

Neste problema, a solução de referência é fornecida pelo MODFLOW 6, utilizando uma malha quadrilateral ortogonal de  $27 \times 27$  elementos. Além disso, as dimensões do poço de bombeamento permanecem inalteradas mesmo ao considerar malhas distorcidas. A malha quadrilateral ortogonal é denominada M1, enquanto a malha quadrilateral distorcida é denominada M2.

Figura 64 – (a) Malha quadrilateral ortogonal - M1 e (b) quadrilateral distorcida - M2, ambas com 729 volumes de controle.



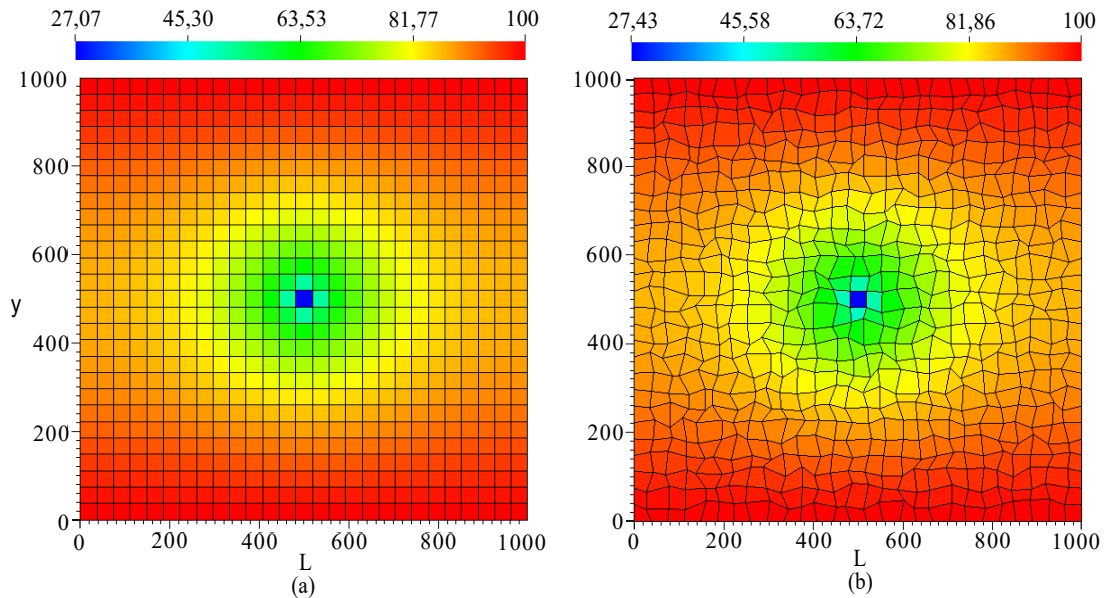
Fonte: Elaborado pelo autor.

A solução numérica para o aquífero confinado será obtida a partir da equação (4.27), utilizando as condições de contorno descritas na Seção 4.1.1.

O campo de carga hidráulica para um aquífero confinado isotrópico com um poço de bombeamento é ilustrado de forma comparativa em duas configurações de malha distintas na Figura 65. Como apresentado na Figura 65-a, a análise dos resultados obtidos com malhas quadrilaterais ortogonais revela que o método de aproximação de fluxo multiponto MPFA-D e o método CVFD apresentam resultados altamente concordantes com o resultado de referência obtido pelo MODFLOW. Essa similaridade sugere que os métodos são eficazes na representação do comportamento do fluxo hidráulico sob condições de contorno específicas.



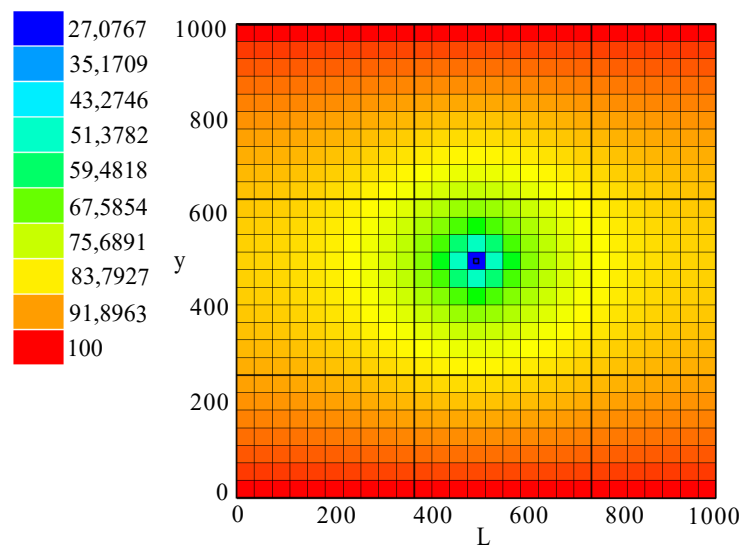
Figura 65 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1 e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos os resultados estão expressos em (m) para  $t = 20$  dias.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em contrapartida, a Figura 65-b exibe o mesmo campo, porém utilizando uma malha quadrilateral distorcida, evidenciando o impacto que a distorção da malha pode causar na distribuição da carga pelo método CVFD. A Figura 66 apresenta o campo hidráulico gerado a partir da malha M1, obtido pelo MODFLOW.

Figura 66 – Campo de carga hidráulica para malha M1, obtido pelo MODFLOW 6, resultado em (m) para  $t = 20$  dias.

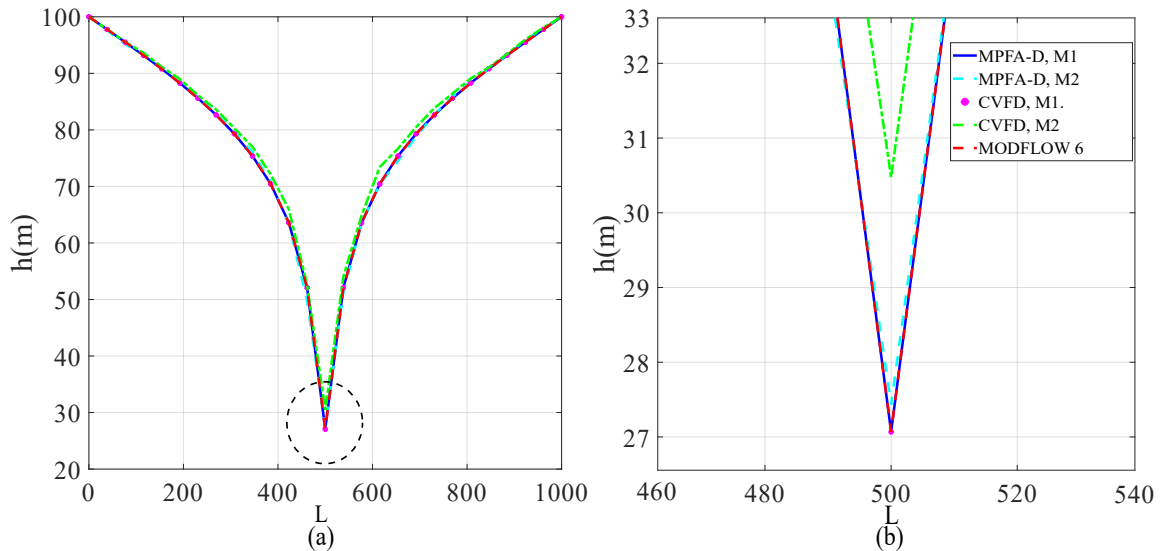


Fonte: Elaborado pelo autor.

O perfil da carga hidráulica é detalhado nas Figuras 67-a e 67-b, onde se observam, respectivamente, a malha quadrilateral ortogonal e a malha quadrilateral distorcida. Esses perfis

oferecem uma visão clara do comportamento da carga no aquífero ao utilizar diferentes tipos de malhas. As restrições impostas pela presença de aquíferos vizinhos são claramente evidenciadas, indicando a interdependência entre sistemas hídricos adjacentes.

Figura 67 – (a) Perfil da carga hidráulica e (b) Perfil ampliado da carga hidráulica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, a Figura 67 destaca a influência do poço de bombeamento, onde se observa uma significativa redução da carga hidráulica, resultado direto da extração de água.

Entretanto, quando se utilizam malhas quadrilaterais distorcidas, o método MPFA-D demonstra um desempenho superior, conforme observado na Figura 67-b. Essa superioridade pode ser atribuída à capacidade do MPFA-D de lidar com geometrias complexas e suas nuances, proporcionando uma representação mais fiel do comportamento hidráulico em aquíferos confinados.

Tabela 5 – Valores mínimos da carga hidráulica em ( $m$ ) para M1 e malha M2.

	MPFA-D, M1	MPFA-D, M2	CVFD, M1	CVFD, M2	MODFLOW 6, M1
$h_{min}$	27,0673	27,4338	27,0673	30,4768	27,0673

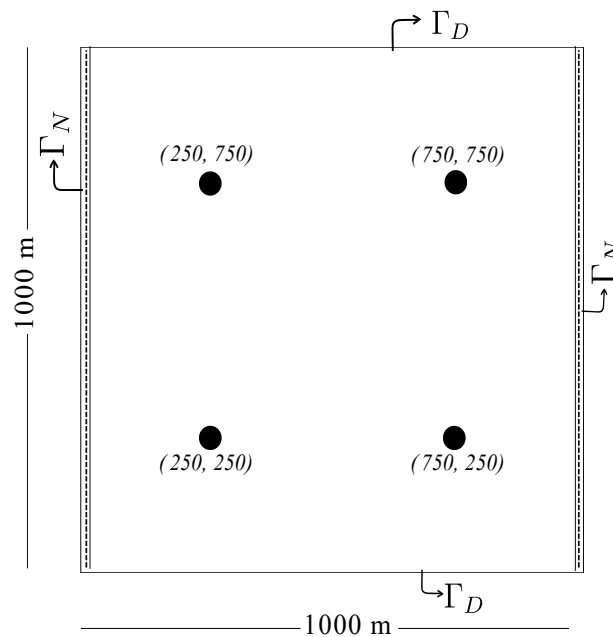
A Tabela 5 apresenta dados relevantes sobre os valores máximos e mínimos da carga hidráulica. Em relação à carga hidráulica mínima, na malha quadrilateral ortogonal, os métodos MPFA-D e CVFD apresentam valores muito semelhantes, próximos aos obtidos pelo MODFLOW 6. Por outro lado, na malha distorcida, o valor mínimo mais próximo da solução de referência foi obtido pelo método MPFA-D, evidenciando que a distorção da malha afetou significativamente o desempenho do método CVFD, conforme ilustrado na Figura 67-b.

A escolha do método pode influenciar significativamente os resultados em cenários reais, especialmente quando diferentes configurações de malha são utilizadas. Idealmente, esses resultados não deveriam variar, uma vez que representam o mesmo fenômeno físico. Portanto, a seleção do método apropriado é crucial para simulações de aquíferos com geometrias complexas.

### 7.3 AQUÍFERO CONFINADO ISOTRÓPICO COM QUATRO POÇOS DE BOMBEAMENTO

Este problema foi inicialmente proposto por Qian *et al.* (2023). O objetivo é avaliar o comportamento dos métodos MPFA-D e CVFD diante da influência de vários poços de bombeamento. Similar ao problema anterior, as dimensões do domínio são dadas por  $\Omega = [0, 1000] \times [0, 1000]$ , conforme ilustrado na Figura 68. Dessa forma, o domínio representa uma área total de  $1\text{Km}^2$ , oferecendo um cenário adequado para testar a robustez dos métodos numéricos.

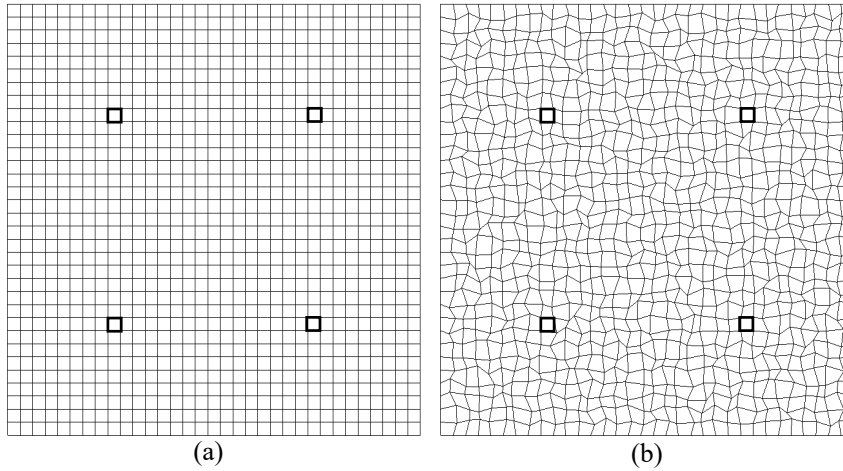
Figura 68 – Domínio físico e as condições de contorno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A malha utilizada para a discretização do domínio possui um refinamento de  $33 \times 33$ , totalizando 1089 VC, com espaçamento  $\Delta x = 30,303$  e  $\Delta y = 30,303$ . O uso desse tipo de malha permite uma boa representação do domínio discreto, proporcionando maior resolução nas regiões onde ocorrem maiores variações do gradiente. A Figura 69 ilustra as duas configurações de malhas adotadas, nas quais os poços de bombeamento mantêm as mesmas dimensões.

Figura 69 – (a) Malha quadrilateral ortogonal - M1 e (b) quadrilateral distorcida - M2, ambas com 1089 volumes de controle.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O aquífero em análise contém quatro poços, cada um operando com uma taxa de bombeamento de  $2.500 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$  durante um período de 20 dias, com passo de tempo  $\Delta t = 0,01$ . As localizações dos poços são:  $w_1 = (250, 250)$ ,  $w_2 = (750, 250)$ ,  $w_3 = (750, 750)$  e  $w_4 = (250, 750)$ . Para este estudo, a carga hidráulica inicial é fixada em 100m, e a espessura do aquífero é  $M = 3 \text{ m}$ . A condutividade hidráulica adotada para o aquífero é descrita como:

$$K = \begin{bmatrix} 33,33 & 0 \\ 0 & 33,33 \end{bmatrix} \text{ m.d}^{-1} \quad (7.4)$$

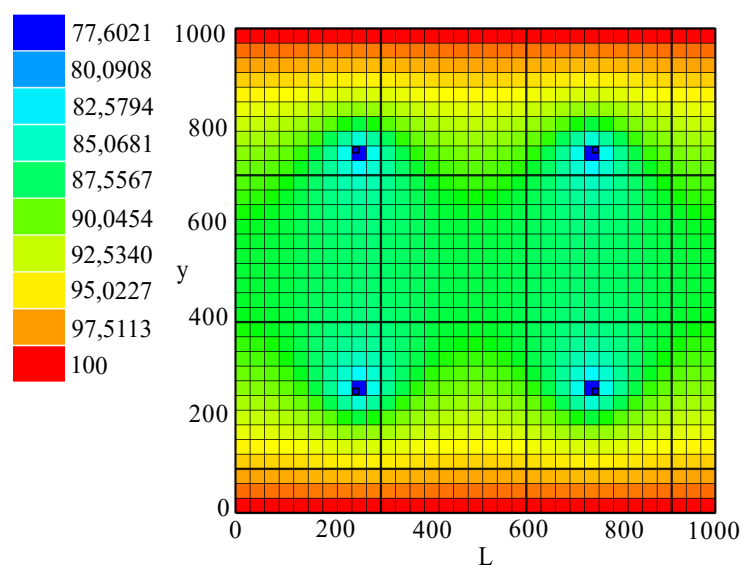
As condições de Dirichlet são aplicadas no topo e na base do domínio, onde a carga hidráulica é fixada em 100 metros. Isso implica que a carga nessas regiões permanece constante ao longo do tempo, sem variações. Nas fronteiras laterais, esquerda e direita do domínio, são aplicadas condições de Neumann com fluxo nulo, o que significa que não ocorre transferência de água através desses contornos. Tal imposição é equivalente a estabelecer que o gradiente da carga hidráulica na direção normal às fronteiras laterais é zero, ou seja, não há variação lateral do fluxo.

Esse conjunto de condições de contorno configura um sistema em equilíbrio, no qual as fronteiras superior e inferior são mantidas fixas, enquanto as laterais atuam como barreiras impermeáveis, sem troca de fluxo. Essa configuração é especialmente adequada para descrever aquíferos confinados ou sistemas de fluxo subterrâneo com fronteiras rígidas e sem influência de fluxos externos laterais, permitindo, assim, uma análise detalhada do comportamento da água

no interior do domínio. De maneira similar ao caso anterior, a solução de referência é fornecida pelo MODFLOW 6.

A Figura 70 apresenta o campo de carga hidráulica gerado a partir da malha M1 pelo software MODFLOW 6, servindo como solução de referência para as comparações entre os métodos. As regiões de maiores e menores cargas são claramente visíveis nas áreas próximas aos poços e nas bordas da malha, reforçando a confiabilidade do modelo gerado.

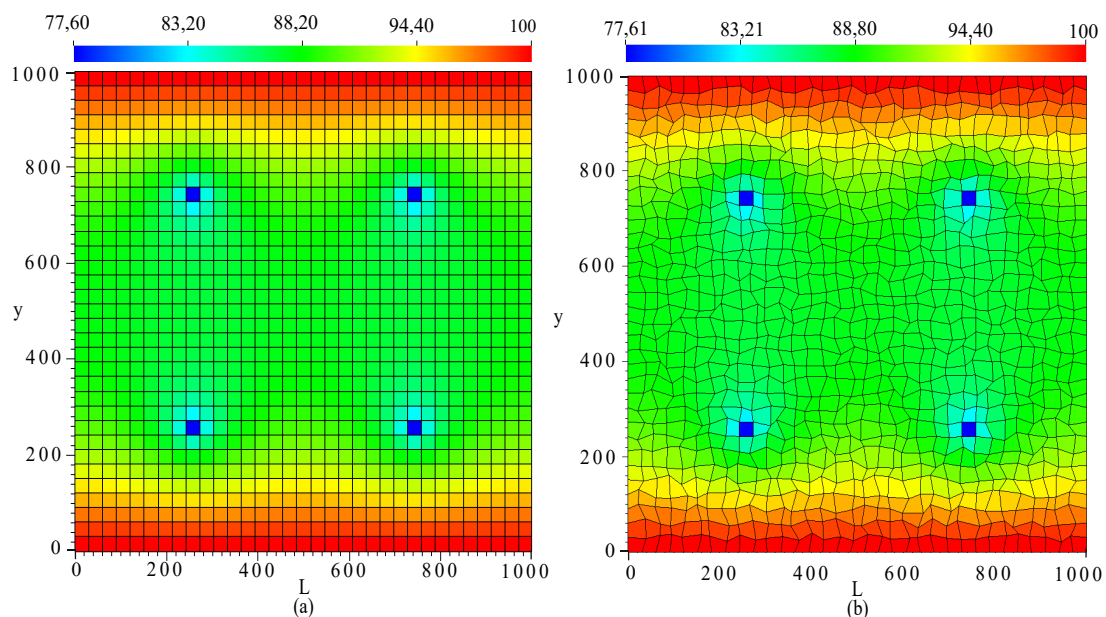
Figura 70 – Campo de carga hidráulica para malha M1, obtido pelo MODFLOW 6, resultado em (m) para  $t = 20$  dias.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O campo de carga hidráulica para um aquífero confinado isotrópico com quatro poços de bombeamento é ilustrado de forma comparativa em duas configurações de malha distintas, apresentadas nas Figuras 71-a e 71-b.

Figura 71 – (a) Campo de carga hidráulica para malha M1 e (b) campo de carga hidráulica para malha M2, ambos os resultados estão expressos em (m) para  $t = 20$  dias.



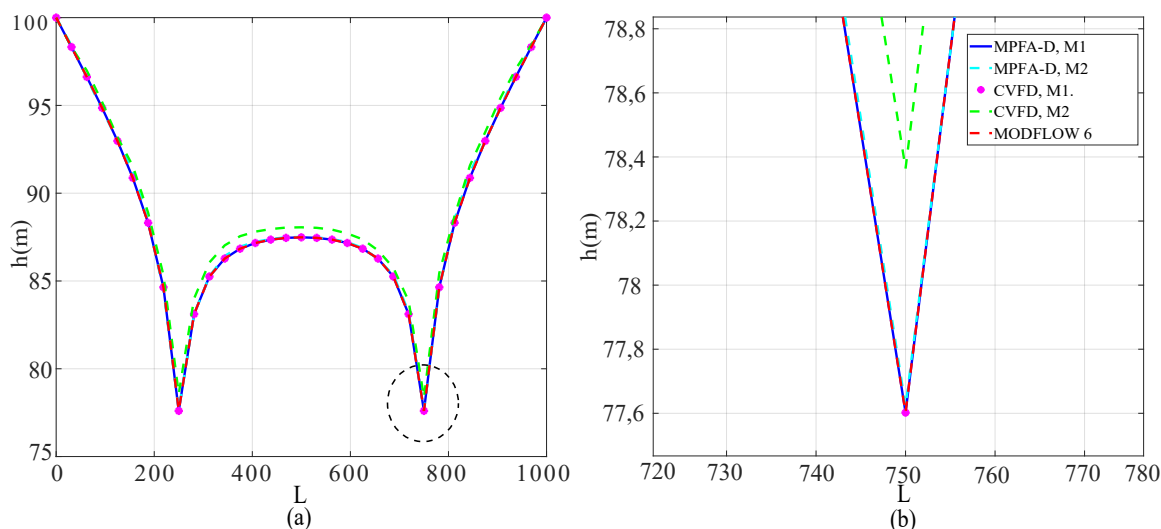
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 71-a, a análise dos resultados obtidos com a malha quadrilateral ortogonal M1, utilizando o método de aproximação de fluxo multiponto MPFA-D, revela uma concordância significativa com os resultados do CVFD.

Além disso, a similaridade entre esses métodos e o resultado de referência obtido pelo MODFLOW, mostrado na Figura 70 na malha M1, indica que ambos são eficazes na representação do comportamento da carga hidráulica para as condições de contorno impostas. Por outro lado, a Figura 71-b exibe o campo de carga hidráulica obtido com uma malha quadrilateral distorcida M2. Nesse cenário, observa-se um impacto significativo da distorção da malha na distribuição da carga hidráulica, especialmente no método CVFD, que apresenta maior sensibilidade às irregularidades da malha.

Em contraste, o método MPFA-D demonstra uma performance mais robusta, mantendo sua acurácia mesmo diante das variações impostas pela distorção. Essa robustez destaca a capacidade do MPFA-D em lidar de forma mais eficaz com malhas irregulares, quando comparado ao CVFD.

Figura 72 – (a) Perfil da carga hidráulica e (b) Perfil ampliado da carga hidráulica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Valores mínimos da carga hidráulica em ( $m$ ) para M1 e malha M2.

	MPFA-D, M1	MPFA-D, M2	CVFD, M1	CVFD, M2	MODFLOW 6, M1
$h_{min}$	77,6022	77,61	77,6021	78,06	77,6021

Na Tabela 6, observa-se que os métodos respeitam o valor máximo da carga hidráulica imposto pela condição de contorno de Dirichlet.

No caso de  $h_{min}$ , o método MPFA-D apresentou uma leve variação entre a malha ortogonal (77,6022) e a malha distorcida (77,61), evidenciando sua robustez mesmo em malhas distorcidas. Já o método CVFD, embora tenha exibido comportamento semelhante na malha ortogonal (77,6021), apresentou uma variação maior na malha distorcida (78,06), indicando maior sensibilidade à distorção.

Por sua vez, o MODFLOW 6 manteve uma carga mínima consistente de 77,6021, valor próximo ao obtido pelo MPFA-D na malha M1. Esses resultados reforçam a superioridade do método MPFA-D em relação ao CVFD, especialmente em cenários com malhas distorcidas, ressaltando a importância da escolha do método adequado para garantir a acurácia das simulações.

#### 7.4 ANÁLISE DOS ERROS

Para avaliar a acurácia do método MPFA-D em relação ao modelo de referência MODFLOW 6, foram empregados dois indicadores estatísticos: o erro absoluto médio (MAE) e o

erro quadrático médio relativo (RRMSE).

O MAE tem como objetivo quantificar a média das diferenças absolutas entre os valores simulados pelo método MPFA-D ( $f_i$ ) e os valores de referência fornecidos pelo MODFLOW 6 ( $y_i$ ). A equação utilizada para o cálculo do MAE é dada por:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i - y_i| \quad (7.5)$$

Essa métrica permite avaliar o desvio médio dos resultados em relação ao modelo de referência, sendo que valores próximos de zero indicam maior acurácia.

De forma complementar, o RRMSE fornece uma análise relativa do erro, uma vez que normaliza o valor calculado pela média dos dados de referência. Essa característica torna o RRMSE particularmente relevante, pois permite interpretar o desempenho do método MPFA-D de forma proporcional, independentemente da escala dos dados utilizados. A equação que define o RRMSE é expressa por:

$$RRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_i - y_i)^2}{n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \quad (7.6)$$

Além disso, por envolver o quadrado das diferenças, o RRMSE é mais sensível a erros elevados, destacando discrepâncias pontuais mais acentuadas.

A aplicação dessas métricas foi realizada sobre os resultados de carga hidráulica obtidos nos poços de observação, considerando três cenários distintos: aquífero confinado com um poço, aquífero confinado com quatro poços e aquífero não confinado com um poço. Nos dois primeiros cenários, os resultados indicaram valores extremamente baixos para ambas as métricas, demonstrando que o método MPFA-D apresenta elevado nível de acurácia quando comparado ao MODFLOW 6. A localização dos poços de observação está descrita na Tabela 7.

Tabela 7 – Poços de observação para diferentes casos.

Número dos poços de observação	Aquífero confinado e não confinado		Aquífero confinado com 4 poços de bombeamento	
	x	y	x	y
1	250	250	125	125
2	500	250	250	125
3	750	250	375	125
4	250	500	125	250
5	750	500	375	250
6	250	750	125	375
7	500	750	250	375
8	750	750	375	375

Fonte: Elaborado pelo autor.



A Tabela 8 apresenta os valores da carga hidráulica obtidos nos poços de observação para os três cenários mencionados. Em cada caso, os resultados foram comparados entre o método MPFA-D e o software MODFLOW 6, adotado como modelo de referência.

Tabela 8 – Valores da carga hidráulica para  $t = 20$  dias nos poços de observação e erros dos métodos MPFA-D e MODFLOW 6 para Malha M1.

Casos	Métodos	Poços de observação								Erros	
		1	2	3	4	5	6	7	8	MAE	RRMSE
Aquífero confinado com um poço	MODFLOW 6	89,3689	85,5940	89,3689	81,8664	81,8664	89,3689	85,5940	89,3689	–	–
	MPFA-D	89,3689	85,5940	89,3689	81,8664	81,8664	89,3689	85,5940	89,3689	3,75E-06	7,79E-06
Aquífero confinado com 4 poços	MODFLOW 6	94,0480	92,9764	93,9568	89,2093	89,0596	88,0231	86,8375	87,8628	–	–
	MPFA-D	94,0480	92,9764	93,9568	89,2093	89,0596	88,0231	86,8375	87,8628	6,25E-06	8,76E-06

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso do aquífero confinado com um poço, observa-se que os valores de carga hidráulica obtidos pelo método MPFA-D são praticamente idênticos aos calculados pelo MODFLOW 6, com diferenças apenas na quinta casa decimal. Essa proximidade é refletida nos baixos valores dos indicadores de erro, com um erro absoluto médio (MAE) da ordem de  $10^{-6}$ , mais precisamente  $3,75E-6$ , e um erro quadrático médio relativo (RRMSE) também da ordem de  $10^{-6}$ , correspondente a  $7,08E-6$ . Esses resultados evidenciam a elevada acurácia do método MPFA-D nesse cenário.

Para o cenário do aquífero confinado com quatro poços, o comportamento se mantém semelhante. As cargas hidráulicas simuladas pelo MPFA-D coincidem com aquelas obtidas pelo MODFLOW 6 em praticamente todas as casas decimais, apresentando variações desprezíveis. Novamente, os valores dos erros permanecem extremamente baixos, com um MAE de  $6,25E-6$  e um RRMSE de  $8,76E-6$ , ambos da ordem de  $10^{-6}$ . Esses resultados confirmam a robustez e a precisão do método MPFA-D, mesmo em condições com maior complexidade hidráulica.

Os resultados demonstram que o método MPFA-D possui excelente desempenho em simulações de aquíferos confinados, com erros praticamente desprezíveis quando comparado ao MODFLOW 6. Contudo, nos cenários de aquífero não confinado, observa-se um aumento dos erros, indicando que o método, embora ainda apresente resultados razoáveis, requer aprimoramentos ou adaptações específicas para garantir maior acurácia nesse tipo de problema.

A Tabela 9 apresenta os valores da carga hidráulica simulada nos poços de observação, bem como os erros médios (MAE) e o erro quadrático relativo da raiz (RRMSE) dos métodos CVFD e MPFA-D aplicados à Malha M2, em duas diferentes configurações de aquífero: confinado com um poço e confinado com quatro poços.

Tabela 9 – Valores da carga hidráulica para  $t = 20$  dias nos poços de observação e erros dos métodos MPFA-D e CVFD para Malha M2.

Casos	Métodos	Poços de observação								Erros	
		1	2	3	4	5	6	7	8	MAE	RRMSE
Aquífero confinado com um poço	MPFA-D	89,47742	85,87033	89,37291	82,04010	81,75687	89,30026	85,81925	89,57405	–	–
	CVFD	90,06525	86,42521	90,19652	82,84291	82,77504	89,53802	86,13058	89,80683	5,71E-01	7,32E-01
Aquífero confinado com 4 poços	MPFA-D	94,19474	93,39570	94,01838	89,15860	88,94892	88,05399	86,87178	87,90526	–	–
	CVFD	94,60413	93,87562	94,36530	89,92869	89,44571	88,63996	87,54114	88,44847	5,38E-01	6,12E-01

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como se percebe nos problemas discutidos nas seções anteriores, o método CVFD apresenta discrepâncias significativas em relação ao MPFA-D quando aplicado a malhas distorcidas, como a malha M2. Por essa razão, a análise comparativa entre os métodos CVFD e MPFA-D, considerando este último como referência, evidencia a superioridade do MPFA-D em termos de acurácia, especialmente em configurações com malhas distorcidas.

No cenário do aquífero confinado com um poço, os resultados obtidos com o CVFD apresentaram um MAE de 5,71E-01 e um RRMSE de 7,32E-01, em comparação aos valores de referência calculados com o MPFA-D. Embora representem uma boa aproximação, esses valores indicam uma leve superestimação por parte do CVFD.

No caso com quatro poços de observação, o comportamento se manteve: o CVFD apresentou um MAE de 5,38E-01 e um RRMSE de 6,12E-01, revelando novamente pequenas discrepâncias em relação ao MPFA-D. Tais diferenças, embora numericamente sutis, tornam-se significativas em malhas distorcidas, nas quais a preservação da anisotropia e da heterogeneidade é essencial para uma modelagem acurada da carga hidráulica.

O método MPFA-D, por sua vez, demonstrou maior robustez e acurácia na reprodução dos campos de carga hidráulica, mesmo em regiões com geometrias irregulares. Sua capacidade de operar com malhas não ortogonais o torna particularmente vantajoso em relação ao CVFD, cujas aproximações tendem a se degradar sob essas condições. Dessa forma, os resultados apresentados na Tabela 9 reforçam o desempenho superior do MPFA-D, consolidando-o como uma alternativa mais precisa e confiável para aplicações que exigem alta fidelidade espacial na modelagem de escoamentos subterrâneos.

## 8 CONCLUSÕES

O presente estudo analisou o desempenho dos métodos MPFA-D, CVFD e MODFLOW 6 na simulação do fluxo subterrâneo, com ênfase em meios heterogêneos. Os resultados evidenciaram que o método MPFA-D apresenta maior robustez e acurácia, especialmente em malhas quadrilaterais distorcidas, nas quais superou o desempenho do CVFD e do MODFLOW 6.

Nos testes de convergência bidimensional, verificou-se que os métodos apresentaram taxas de convergência semelhantes em malhas ortogonais. No entanto, ao se empregar malhas distorcidas, o método MPFA-D demonstrou uma taxa de convergência mais acurada, indicando maior capacidade de lidar com geometrias complexas. Esse comportamento se deve ao fato de que o CVFD e o MODFLOW 6 assumem que o fluxo ocorre diretamente entre os centros dos volumes de controle adjacentes, o que limita sua precisão em malhas com alta complexidade geométrica.

A análise em diferentes tipos de malha, incluindo triangulares estruturadas e não estruturadas, também evidenciou um desempenho mais consistente do método MPFA-D. Em particular, ao se utilizar a condição de contorno de Dirichlet aplicada diretamente nas faces dos elementos (CCDF), observou-se uma redução significativa nos erros, reforçando a eficácia do MPFA-D na discretização de problemas que envolvem termos de fonte e sumidouro. Nos experimentos envolvendo fluxo em estado transiente, constatou-se que o método MPFA-D obteve uma melhor aproximação da solução analítica, especialmente em simulações de longa duração. Em contraste, o CVFD e o MODFLOW 6 apresentaram discrepâncias mais acentuadas, sobretudo em malhas distorcidas, indicando menor robustez na resolução de problemas dinâmicos.

Ao considerar cenários com poços de bombeamento, recarga e interação com rios, verificou-se que o método MPFA-D capturou com maior precisão os gradientes de carga hidráulica, resultando em distribuições mais realistas do campo da carga hidráulica. Essa capacidade é fundamental para a modelagem de sistemas hídricos subterrâneos, nos quais a precisão na representação do fluxo impacta diretamente a gestão eficiente dos recursos hídricos. Dessa forma, os resultados obtidos demonstram que o método MPFA-D se configura como uma alternativa mais eficiente para a modelagem de fluxos subterrâneos, especialmente em domínios complexos e com malhas não convencionais. Sua capacidade superior de representar adequadamente as condições do meio poroso o torna uma ferramenta valiosa para estudos hidrogeológicos e simulações computacionais de aquíferos.

## REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Computational Geosciences*, Springer, v. 6, p. 405–432, 2002.
- Agência Pernambucana de Águas e Clima (APAC). *Plano Estadual de Recursos Hídricos de Pernambuco (PSH-PE)*. 2020. Disponível em: [https://www.apac.pe.gov.br/images/media/1691532233\\_relatorio%20PSHPE.pdf](https://www.apac.pe.gov.br/images/media/1691532233_relatorio%20PSHPE.pdf). Acesso em: 15 de Maio 2025.
- ALAMY, F. J. E.; MIRANDA, M. C. d.; SALLA, M. R. Um modelo para simulação de escoamentos em aquíferos subjacentes a zonas urbanas. *RBRH Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 18, n. 4, p. 255–264, 2013.
- ALECSA, C. D.; BOROS, I.; FRANK, F.; KNABNER, P.; NECHITA, M.; PRECHTEL, A.; RUPP, A.; SUCIU, N. Numerical benchmark study for flow in highly heterogeneous aquifers. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 138, p. 103558, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2020.103558>.
- AMAZIANE, B.; OSSMANI, M. E.; TALALI, K. Convergence of a multi-point flux approximation finite volume scheme for a sharpdiffuse interfaces model for seawater intrusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 418, 2023.
- AMBRUS, J.; MALISKA, C. R.; HURTADOS, F. S. V.; SILVA, d. A. F. C. Finite volume methods with multi-point flux approximation with unstructured grids for diffusion problems. *SINMEC - Computational Fluid Dynamics Lab Mechanical Engineering Department*, Federal University of Santa Catarina, 2010.
- ANA. *Relatório Anual de Recursos Hídricos*. Brasília, DF: [s.n.], 2019. Agência Nacional de Águas.
- ANDERSON, M. P.; WOESSNER, W. W.; HUNT, R. J. *APPLIED GROUNDWATER MODELING - Simulation Of Flow and Advective Transport. 2ª Edition*. [S.l.]: Elsevier, 2015. ISBN 9780120581030.
- ARNOLD, D. N.; BREZZI, F.; COCKBURN, B.; MARINI, L. D. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 39, n. 5, p. 1749–1779, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0036142901384162>.
- BAKKER, M.; VICENT, P. *Analytical Groundwater Modeling*. [S.l.]: CRC Press/Balkema, 2022. Theory and Applications using Python.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: Dover Publications, 1972. ISBN 978-0-486-65675-5.
- BEAR, J.; CHENG, A. H.-D. *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-1-4020-6681-8.
- BERTOLAZZI, E.; MANZINI, G. A finite volume method for transport of contaminants in porous media. *Applied numerical mathematics*, Elsevier, v. 49, n. 3-4, p. 291–305, 2004.
- CAMPANA, F. M. V. *Modelagem e Simulação do Transporte e Remediação de Poluentes em Aquíferos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

- CHEN, Y.; ZHOU, C.; JING, L. Modeling coupled thm processes of geological porous media with multiphase flow: Theory and validation against laboratory and field scale experiments. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, p. 13081329, 2009.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Philadelphia: Society for industrial and Applied Mathematics, 2006. ISBN 0-89871-606-3.
- CHOU, S.-H.; YE, X. Superconvergence of finite volume methods for the second order elliptic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Elsevier, v. 196, p. 3706–3712, 2007.
- CLEARY, D. W. *Águas Subterrâneas*. Florida: Clean Environment Brasil, 2007.
- COHEN, A. J.; CHERRY, J. A. *Conceptual and Visual Understanding of Hydraulic Head and Groundwater Flow*. Canada: Groundwater Project, 2020.
- CONTRERAS, F. R. L. *Um Método de volumes finitos centrado na célula para a simulação de escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo hete-rogêneos e anisotrópico*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.
- CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. d. A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (mpfa-ql) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media. *Applied Mathematical Modelling*, v. 70, p. 659–676, 2019.
- CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; SOUZA, M. R. A.; CARVALHO, D. K. E. d. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016.
- CONTRERAS, F. R. L.; OLIVEIRA, D. L. A.; LYRA, P. R. M.; ANTUNES, A. R. E.; CARVALHO, D. K. E. A Multipoint Flux Approximation Method Based on Harmonic Points to Simulate Highly Heterogeneous and Anisotropic Aquifers. *Proceedings of the XLIV Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, CILANCE*, 2023.
- CONTRERAS, F. R. L.; VAZ, U. A. O.; PACHECO, G. L. S. S.; ANTUNES, A. R. E.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A high-resolution multidimensional finite volume scheme coupled to a nonlinear two-point flux approximation method for the numerical simulation of groundwater contaminant transport using unstructured 2d meshes. *Advances in Water Resources*, v. 181, 2023.
- DELLEUR, J. W. *THE HAND BOOK OF GROUNDWATER ENGINEERING*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, NW, 2007. second edition. ISBN ISBN13: 9780849343162.
- DOMENICO, P. A.; SCHWARTZ, F. W. *Physical and Chemical Hydrogeology*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998.
- EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Computational Geosciences*, v. 2, p. 259–290, 1998.

EYMARD, R.; GUICHARD, C.; MASSON, R. Grid orientation effect in coupled finite volume schemes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 33, p. 582–608, 2012. Disponível em: <http://imajna.oxfordjournals.org/cgi/authordata?d=10.1093/imanum/drs016&k=929ef8d7>.

FEITOSA, F. A. C.; J., M. F.; FEITOSA, C. E.; DEMTRIO, J. G. A. *Hidrogeologia: Conceitos e aplicações*. [S.l.]: CPRM Serviço Geológico Nacional, 2008. v. 3a Edição Revisada e Ampliada. 77-91 p.

FETTER, C. W. *Applied Hydrogeology*. Prentice-Hall, New Jersey, EUA: Elsevier, 2001. ISBN 0-13-088239-9.

FREEZE, R. A.; CHERRY, J. A. *Groundwater*. Nenglewood Cliffs, Nova Jersey, EUA.: Prentice Hall, 1979. ISBN 0-13-365312-9.

FREEZE, R. A.; CHERRY, J. A. *Água Subterrânea*. São Paulo: Instituto Água Sustentável, 2017. ISBN 978-85-94189-00-4.

GAO, Y.; DU, E.; YI, S.; HAN, Y.; ZHENG, C. An improved numerical model for groundwater flow simulation with mpfa method on arbitrary polygon grids. *Journal of Hydrology*, v. 606, 2022.

GAO, Y.; YI, S.; ZHENG, C. Efficient simulation of groundwater solute transport using the multipoint flux approximation method with arbitrary polygon grids. *Journal of Hydrology*, v. 601, 2021.

GAO, Z.; WU, J. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS*, 2010.

GHELLI, C. A. *Construção de um Modelo Computacional Para Simulação do Transporte de Poluentes em Aquíferos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Uberlândia, 2018.

HAJIBEYGI, H.; KARVOUNIS, D.; JENNY, P. A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method. *Journal of Computational Physics*, v. 230, p. 8729–8743, 2011.

IGBOEKWE, M. U.; ACHI, N. J. Finite difference method of modelling groundwater flow. *Journal of Water Resource and Protection*, v. 3, p. 192–198, 2011.

Instituto Trata Brasil. *Águas Subterrâneas*. 2023. Disponível em: <https://tratabrasil.org.br/principais-estatisticas/agua>. Acesso em: 26 Agosto. 2023.

KEILEGAVLEN, E.; AAVATSMARK, I. Monotonicity for mpfa methods on triangular grids. *Computational Geosciences*, Springer Science+Business Media, v. 15, p. 3–16, 2011.

LIMA, G. B. d. S. *RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM HIDROLOGIA SUBTERRÂNEA UTILIZANDO O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA MALHAS ARBITRÁRIAS*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) — Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília - DF, 2001.

LOTTI, R. S.; MACHADO, A. W.; MAZZIERO, E. T.; JR., J. L. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. *R Dental Press Ortodon Ortop Facial*, ACM, v. 11, n. 2, p. 35–43, 2006.

MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Florianópolis: Grupo Gen-LTC, 2004.

MARENGO, J. A. Água e mudanças climáticas. *Estudos Avançados*, v. 22, n. 63, p. 83–96, mai./ago. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-40142008000200006>.

MAUS, V. W. *Modelagem computacional aplicada ao transporte de contaminantes em águas subterrâneas*. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) — Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2011.

MIRANDA, M. C. *Modelagem e Simulação do Escoamento em Aquíferos Livres Sotopostos a Zonas Urbanas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Minas Gerais, 2012.

MODFLOW-USGS. *MODFLOW and Related Programs. Organization for MODFLOW development*. 2023. Disponível em: <https://github.com/MODFLOWUSGS/modflow6/tree/develop/.mf6minsim>. Acesso em: 03 Janeiro. 2024.

MUYINDA, N. *A Finite Volume Transient Groundwater Flow*. Dissertação (Mestrado Matemática) — Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação de Ciências em Modelagem Matemática da Universidade Makerere, África Oriental, 2014.

QIAN, Y.; ZHU, Y.; ZHANG, X.; WU, J.; YE, M.; MAO, W.; WU, J.; HUANG, J.; YANG, J. A local grid-refined numerical groundwater model based on the vertex-centred finite-volume method. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 173, p. 1–18, 2023.

SAJEDEH, F.; MAHNAZ, G.; SALEH, H. Numerical model of seepage flows by reformulating finite element method based on new spherical hankel shape functions. *Applied Water Science*, 2023.

SANTANA, G. P. *Ciclo da água: definição, importância e etapas*. 2023. Disponível em: <https://clubedaquimica.com/2023/04/17/ciclo-da-agua-definicao-importancia-e-etapas/>. Acesso em: 20 Setembro. 2023.

SARMA, R.; SINGH, S. K. Simulating contaminant transport in unsaturated and saturated groundwater zones. *Department of Environmental Engineering, Delhi Technological University, New Delhi, India, Water Environment Federation*, p. 1–14, 2021.

SHEU, T. W. H.; CHEN, Y. H. Finite element analysis of contaminant transport in groundwater. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 127, p. 223–43, 2002. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(00\)00160-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(00)00160-0).

SOUZA, M. R. A.; CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A higher-resolution flow-oriented scheme with an adaptive correction strategy for distorted meshes coupled with a robust mpfa-d method for the numerical simulation of two-phase flow in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *SPE Journal*, v. 23, n. 6, p. 2351–2375, 2018.

SOUZA, M. R. d. A. *Simulação numérica de escoamento bifásico em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos utilizando um método de volumes finitos verdadeiramente multidimensional com aproximação de alta ordem*. Tese (Tese (Doutorado em Ciências de Engenharia Civil)) — Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia

---

e Geociências, Recife, Pernambuco, Brasil, 2015. Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo. Orientador: Paulo Roberto Maciel Lyra.

TAO, Z.; CUI, Z.; YU, J.; KHAYATNEZHAD, M. Finite difference modelings of groundwater flow for constructing artificial recharge structures. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, v. 46, p. 1503–1514, 2021.

TODD, D. K.; MAYS, L. W. *Groundwater Hydrology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005.

TREFRY, M. G.; MUFFELS, C. Feflow: A finite-element ground water flow and transport modeling tool. *Groundwater*, v. 45, n. 5, p. 525–528, 2007.

VAZQUEZ-BAEZ, V.; RUBUI-ARELLANO, A.; D., G.-T.; RODRÍGUEZ., M. I. Modeling an aquifer: Numerical solution to the groundwater flow equation. *Hindawi - Mathematical Problems in Engineering*, v. 2019, n. ID 1613726, p. 9, 2019.

WANG, Y.; ZHOU, L.; FENG, D. An improved numerical manifold method model for groundwater flow problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021.

WENDLAND, E. *Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas*. [S.l.]: Laboratório de Hidráulica Computacional, Departamento de Hidráulica e Saneamento, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo - LHC - SHS - EESC - USP, 2003.

WINSTON, R. B. *A Graphical User Interface for MODFLOW2005 and PHAST*. [S.l.]: U.S. Geological Survey, Reston, Virginia, 2009. Section A, Ground WaterBook 6, Modeling Techniques.

YE, S.; XUE, Y.; WU, J.; XIE, C. Application of the multiscale finite element method to groundwater flow in heterogeneous porous media. *Developments in Water Science*, Elsevier, v. 55, n. Part 1, p. 337–348, 2004. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0167-5648\(04\)80062-5](https://doi.org/10.1016/S0167-5648(04)80062-5).