

---

COMPORTAMENTO DE UM AUTÔMATO CELULAR  
SEM E COM RUÍDO ALEATÓRIO

MOISÉS LIMA DE MENEZES

Orientador: Prof. PhD. Andrei Toom  
Área de Concentração: Probabilidade

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do  
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, dezembro de 2003

---

# Universidade Federal de Pernambuco

## Mestrado em Estatística

04 de dezembro de 2003

(data)

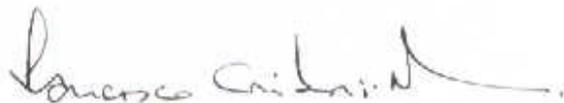
Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Moisés Lima de Menezes

intitulada

Comportamento de um autômato celular sem e com ruído aleatório

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

A. Toom

André Toom

 Prof. Francisco Cribari Neto  
Coordenador de Mestrado  
em Estatística da UFPE

orientador

Ramón Mendoza

Ramón Oreste Mendoza Ahumada

Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Klaus Leite Pinto Vasconcelos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

No barulho das usinas,  
Na sombra áspera e pálida que desce dos *sheds*,  
Um dia os homens desapareceram.  
No entanto  
Braços de ferro gesticulam enérgicos,  
Bocas, abertas, de fogo vociferam,  
Ouvem-se vozes telegráficas de comando.

Autômatos!

Os homens se encantaram,  
Se enlearam, se perderam  
Nas formas e movimentos dos grandes maquinismos?

Ou são as almas que trabalham,  
Almas forçadas, almas perdidas, almas penadas?

Oh! Com certeza os homens morreram  
E às máquinas legaram  
O sopro divino.

Joaquim Cardozo

À minha mãe, Judite Lima

# Agradecimentos

A Deus todo poderoso de quem sou criação e me concedeu dons necessários para que eu pudesse escrever esta dissertação.

Ao meu orientador Andrei Toom que, com sabedoria e tranqüilidade, soube me conduzir no desenvolvimento deste trabalho e teve participação fundamental.

Ao professor Klaus Vasconcellos que brilhantemente acrescentou sua colaboração ao indicar caminhos para soluções de problemas.

Aos meus pais que foram meus principais educadores. A minha irmã Laudicéa e meus irmãos Ricardo e Silvano.

A minha esposa Adriana, companheira em todos os momentos.

A minha amiga Keila Mara Cassiano que me mostrou força, me ensinou que viver é muito mais que simplesmente existir, que uma grande amizade se constrói ao longo do tempo e que o amor supera todas as barreiras.

A todos os professores do programa de mestrado em Estatística da UFPE, especial aos professores Francisco Cribari-Neto (Coordenador), Viviana Giampaoli, Alejandro Frery e Cláudia Lima. À secretária Valéria Bittencourt sempre disposta a ajudar.

Aos colegas da turma que dei os primeiros passos: Amanda, Carla, Diana, Michelli, Patrícia Leone, Carlos e Heráclito. Aos colegas da turma nova: André, Júnior, Lenaldo, Alvino, Cherubino, Fernando César, Andréa, Gecynalda, Sandra Pinheiro, Sandra Rêgo, Sílvia Torres, Tatiane e Renata.

A minha turma a qual convivi os momentos bons e superamos os momentos difíceis durante todo o mestrado e a qual devo eternamente: Patrícia Leal que mostrou alto astral; Tatiene, minha irmã do mestrado, que me mostrou amizade; Sílvia que me ensinou a converter tudo em alegria; Tarciana que me mostrou capacidade e respeito; Raydonal que me ensinou o que é personalidade e companheirismo; Gilson que me mostrou fraternidade; Felipe que ensinou a ser tranqüilo; Bartolomeu que me ensinou o que é parceria; João Marcelo que mostrou o que é determinação e especial a Cristina Morais por realizar um verdadeiro papel de mãe.

Agradecimento especial a Manoel Apolinário que me deu grande força, Mirele Moutinho que me indicou o curso e Alessandra Berenguer pela amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Trabalhamos com autômatos celulares de forma  $F_r D$ , onde  $F_r$  é um operador aleatório que age nas medidas no espaço  $\{0, \dots, m\}^{\mathbb{Z}^d}$  e  $D$  é um operador determinístico que age no mesmo espaço.  $F_r$  aumenta o estado de cada ponto em  $\mathbb{Z}^d$  com probabilidade  $r > 0$  independentemente e  $D$  é qualquer operador determinístico com interação local monótona e uniforme. Os elementos de  $\{0, \dots, m\}^{\mathbb{Z}^d}$  são chamados configurações. Chamamos ilhas as configurações onde o número de componentes com estado diferente de zero é finito. Dizemos que o operador  $D$  erode uma ilha  $x$  se existe  $t$  tal que  $D^t x = \text{“todos zeros”}$ . Chamamos um operador de erodente se ele erode todas ilhas. Nos casos  $m = 1$  e  $d = 1$  condições de erodentes foram pesquisadas por [T. 2001] e [G. 1976]. Chamamos  $D$  um erodente linear se existe  $c$  tal que  $D$  erode cada ilha em um tempo que não excede  $c$  vezes o diâmetro desta ilha. [T. 2001] e [G. 1976] mostram que nos casos acima todos os erodentes são lineares. Nesta tese consideramos o primeiro caso não pesquisado:  $m = 2$  e  $d = 2$  e descobrimos que neste caso existem erodentes não lineares. Concentramos nossa atenção num exemplo  $G$  deste tipo. O teorema 2 mostra que a superposição  $F_r G$  é ergódica para todos  $r > 0$ . Comparamos nosso processo com a metaestabilidade, fenômeno físico caracterizado pela capacidade de um estado de desequilíbrio permanecer por um longo período de tempo.

# Abstract

Elements of  $\{0, \dots, m\}^{\mathbb{Z}^d}$  are called configurations. We work with cellular automata, which can be presented as  $F_r D$ , where  $F_r$  is a *random* operator which acts on measures on the set of configurations and  $D$  is a *deterministic* operator which acts on configurations.  $F_r$  increases state of every point in  $\mathbb{Z}^d$  with probability  $r > 0$  independently and  $D$  is a uniform monotonic deterministic operator with local interaction. We call an *island* any configuration whose number of components with non-zero state is finite. We say that an operator  $D$  erodes an island  $x$  if there is  $t$  such that  $D^t x =$  “all zeros”. We say that an operator  $D$  is an *eroder* if it erodes all islands. In the cases  $m = 1$  and  $d = 1$  necessary and sufficient conditions for  $D$  to be an eroder were presented in [T. 2001] and [G. 1976]. We say that  $D$  is a linear eroder if there is  $c$  such that  $D$  erodes any island in a time which does not exceed  $c$  times diameter of this island. [T. 2001] and [G. 1976] show that in these cases all eroders are linear. In this thesis we consider the first case not studied before:  $m = 2$  and  $d = 2$  and find that in this case there are non-linear eroders. We concentrate our attention on an example  $G$  of this sort. Theorem 2 shows that superposition  $F_r G$  is ergodic for all  $r > 0$ . We compare our process with *metastability*, a physical phenomenon when a systems remains in a non-equilibrium state for a long time.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Operadores Determinísticos</b>	<b>5</b>
2.1	Propriedades Determinísticas	5
2.2	O Maior Exemplo	7
2.3	Teorema 1	8
2.4	demonstração do Teorema 1	9
2.4.1	demonstração do Item <i>a</i> ) do Teorema 1	10
2.4.2	demonstração do Item <i>b</i> ) do Teorema 1	12
<b>3</b>	<b>Teorema 2</b>	<b>13</b>
3.1	Outra Apresentação do Operador Aleatório $F_r$	15
3.2	Outra Descrição do Processo	16
3.3	Problema Clássico da Ruína do Jogador	17
3.4	demonstração do Item <i>a</i> ) do Teorema 2	28
3.5	Discussão	29
	<b>Apêndice</b>	<b>31</b>
	<b>Referências</b>	<b>33</b>

# 1 Introdução

Começamos com a seguinte definição geral de autômatos celulares ou AC. Consideramos qualquer conjunto finito ou contável  $S$ , o qual chamamos *espaço*. Tomemos um número natural  $m$  e chamemos  $M = \{0, 1, \dots, m\}$  o conjunto de *estados* de cada *componente*  $v \in S$ . Definimos *configuração* como uma função de  $S$  para  $M$  e seja  $M^S$  o *espaço de configurações* ou *espaço amostral*.

Chamemos um *cilindro fino* qualquer subconjunto de  $M^S$  da forma

$$c = \{x \in M^S : x_{v_1} = a_{v_1}, \dots, x_{v_n} = a_{v_n}\}, \quad (1.1)$$

onde  $x_{v_1}, \dots, x_{v_n}$  são componentes de  $x$  e  $a_{v_1}, \dots, a_{v_n}$  são constantes.

Usemos  $\sigma$ -álgebra gerada por cilindros finos, a saber a  $\sigma$ -álgebra minimal  $\Lambda$ , a qual inclui todos cilindros finos. Note que todo o espaço amostral  $M^S$  é um cilindro fino obtido da fórmula (1.1) quando  $n = 0$ . Logo  $\Lambda$  pode ser obtido tomando uniões e intersecções contáveis várias vezes começando em cilindros finos. Em [J. 2002] encontramos uma definição mais geral para um espaço amostral qualquer.

Agora vamos para distribuições probabilísticas em  $M^S$ . Se atribuímos valores para todos elementos da  $\sigma$ -álgebra  $\Lambda$  de maneira consistente, então temos uma *medida*. Usemos *medidas normalizadas*, cujo valor em todo espaço amostral  $M^S$  é um, como distribuições probabilísticas em  $M^S$ . Denotamos  $\mathcal{M}$  o conjunto das medidas normalizadas em  $M^S$  na  $\sigma$ -álgebra gerada por cilindros finos. Para cada  $i \in M$  chamemos  $\delta_i$  a medida concentrada na configuração “todos  $i$ ” aquela em que todos os componentes estão no estado  $i$ . Para quaisquer  $\nu, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathcal{M}$  dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \nu$$

se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(c) = \nu(c)$  para cada cilindro fino  $c$ .

Agora vamos para *autômatos celulares* como operadores lineares  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  de um tipo especial definido assim: para cada  $v \in S$  consideremos um conjunto finito  $V(v) \subset S$  o qual chamamos *vizinhança de  $v$* . Para qualquer conjunto finito  $W \subset S$ , definimos  $V(W) = \bigcup_{v \in W} V(v)$ . Escolhemos números não negativos  $\pi_v(b_v | a_{V(v)})$  chamados de *probabilidades de transição* com a condição

$$\sum_{b_v \in M} \pi_v(b_v | a_{V(v)}) = 1$$

e para cada  $\mu \in \mathcal{M}$  e cada  $W \subset S$  definimos o resultado da aplicação do operador  $P$  na medida  $\mu$  assim:

$$(P\mu)(y_v = b_v, v \in W) = \sum \mu(x_v = a_v, v \in V(W)) \prod_{v \in W} \pi_v(b_v | a_{V(v)}),$$

onde a soma é feita para todo  $a_j$ , com  $j \in V(W)$ .

Denotamos  $P^t\mu$  o resultado de  $t$  aplicações de  $P$  para qualquer medida  $\mu$ . Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t\mu$  existe e é o mesmo para todo  $\mu \in \mathcal{M}$ , então dizemos que o operador  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é *ergódico*. Segundo idéias da física estatística, vale a pena encontrar condições de ergodicidade de vários AC.

Mas esta definição é muito geral, de modo que o problema de encontrar condição de ergodicidade não tem solução algorítmica. Vamos considerar só autômatos celulares uniformes como explicamos a seguir. Seja  $S = \mathbb{Z}^d$  o espaço discreto  $d$ -dimensional, onde  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos números inteiros. Para cada vetor  $v \in \mathbb{Z}^d$  podemos definir translação

$$T_v : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$$

tal que  $T_v(a) = a + v$ . Logo, podemos definir translação no espaço de configurações:  $T_v : M^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow M^{\mathbb{Z}^d}$  tal que para cada configuração  $x$ ,

$$(T_v x)_w = x_{w-v}.$$

Dizemos que o operador  $P$  é uniforme se ele comuta com todas as translações, a saber

$$\forall v : PT_v = T_v P.$$

Todos autômatos celulares uniformes podem ser escritos da seguinte forma: temos  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$  e para cada  $v \in \mathbb{Z}^d$ , sua vizinhança é dada por

$$V(v) = \{v + v_1, \dots, v + v_n\}.$$

Também as probabilidades de transição são as mesmas para todo  $v$ . Todos AC definidos assim são uniformes neste sentido.

Porém, AC com esta definição ainda é geral demais. Kurdyumov [K. 1978] demonstrou que não existe nenhum algoritmo para decidir quais autômatos celulares definidos assim são ergódicos e quais não são. Este resultado é verdadeiro mesmo se  $d = 1$  e todas  $\pi_v$  tem só valores  $0, \frac{1}{2}$  ou  $1$ . Logo temos que reduzir nossa definição ainda mais.

Consideramos apenas operadores da forma  $F_r D$ , *i.e.* composição onde primeiro  $D$  age e depois  $F_r$  age. Aqui o operador aleatório  $F_r$  é muito especial, transformando o estado de qualquer componente em estado máximo com probabilidade  $r$  independentemente dos outros componentes, ou seja,

$$(F_r x)_v = \begin{cases} m, & \text{com probabilidade } r \\ x_v, & \text{com probabilidade } 1 - r \end{cases}$$

e  $D$  é um operador determinístico de  $M^{\mathbb{Z}^d}$  para  $M^{\mathbb{Z}^d}$  definido da seguinte forma: sejam  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$  e  $f : M^n \rightarrow M$ , então para cada  $v \in \mathbb{Z}^d$  definimos  $D : M^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow M^{\mathbb{Z}^d}$

por

$$(Dx)_v = f(x_{v+v_1}, \dots, x_{v+v_n}). \quad (1.2)$$

Mesmo assim nossos operadores ainda são muito gerais. Vamos aceitar uma suposição a mais, a saber, monotonicidade. Dizemos que  $x \prec y$  se  $\forall i : x_i \leq y_i$ . Dizemos que uma função  $f : M^n \rightarrow M$  é monótona se

$$x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Dizemos que o operador determinístico  $D : M^{\mathbf{Z}^d} \rightarrow M^{\mathbf{Z}^d}$  é monótono se

$$x \prec y \Rightarrow Dx \prec Dy.$$

Dizemos que uma função  $g : M^{\mathbf{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais, é monótona se

$$x \prec y \Rightarrow g(x) \leq g(y).$$

Dizemos que  $\mu_1 \prec \mu_2$  se  $\forall g$  monótona temos

$$E(g \mid \mu_1) \leq E(g \mid \mu_2),$$

onde  $E(g \mid \mu_1)$  é esperança de  $g$  condicionada a  $\mu_1$ . Dizemos que o operador aleatório  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é monótono se

$$\forall \mu_1 \prec \mu_2 : P\mu_1 \prec P\mu_2.$$

Agora vamos considerar somente operadores monótonos tais que  $f$  satisfaz a seguinte condição:

$$\forall a \in M : f(a, a, \dots, a) = a. \quad (1.3)$$

Sob esta condição, a medida  $\delta_m$  concentrada na configuração “todos  $m$ ” é invariante para todo  $F_r D$ . Vamos usar a seguinte condição equivalente de ergodicidade, a saber:

**Lema 1.1** *Seja  $D$  monótono satisfazendo a condição (1.3). Então, a ergodicidade de  $F_r D$  é equivalente à condição*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (F_r D)^t \delta_0 = \delta_m. \quad (1.4)$$

**Demonstração:** Inicialmente demonstramos que se  $F_r D$  é ergódico, então obtemos (1.4). É fácil ver que  $\delta_m$  é invariante para  $F_r D$ , então

$$\forall \mu : \lim_{t \rightarrow \infty} (F_r D)^t \mu = \delta_m,$$

inclusive para  $\mu = \delta_0$ . Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (F_r D)^t \delta_0 = \delta_m. \blacksquare$$

Agora demonstremos que se temos (1.4), então  $F_r D$  é ergódico. Está demonstrado em [D. 1990] que se  $D$  é monótono como operador determinístico, então ele também é monótono como operador aleatório. Também é evidente que a superposição de operadores aleatórios monótonos é também monótona. Logo  $F_r D$  é monótono. Como  $\forall \mu : \delta_0 \prec \mu$ , então

$$\forall t, \mu : (F_r D)^t \delta_0 \prec (F_r D)^t \mu.$$

Se para  $\delta_0$  o limite é  $\delta_m$  então para qualquer outra medida o limite também será  $\delta_m$ .  $\blacksquare$

O operador  $F_r$  é tão simples que toda a originalidade de cada operador  $F_r D$  é concentrada em  $D$ . Vamos pensar quais propriedades de  $D$  podem ser relevantes a ergodicidade de  $F_r D$ . Uma propriedade deste tipo é conhecida como “erodente”.

Chamemos uma configuração de *ilha* se o conjunto  $\{v \in S : x_v \neq 0\}$  é finito. Concordamos que o conjunto vazio não é finito, logo a configuração “todos zeros” não é uma ilha. A aplicação  $t$  vezes do operador  $D$  à configuração  $x$  será denotada por  $D^t x$ . Chamemos *tempo de sobrevivência* de uma ilha  $x$  e denotemos por  $t_D(x)$  o menor de todos  $t$  tais que  $D^t x =$  “todos zeros”, se tais  $t$  existem. Se tais  $t$  não existem, o tempo de sobrevivência é infinito pela definição. Dizemos que um operador determinístico  $D$  erode uma ilha  $x$  se existe  $t$  tal que  $D^t x =$  “todos zeros”. Dizemos que  $D$  é *erodente* se ele erode todas ilhas.

Em outras palavras, quando  $D$  é erodente a configuração “todos zeros” é “robusta”: cada desvio finito dela desaparece. Também dizemos que “todos zeros” é *estável* para uma família de operadores  $F_r D$ , onde  $r$  é um parâmetro entre 0 e 1, se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_t [(F_r D)^t \delta_0](x_v \neq 0) = 0.$$

Petri [P. 1979] demonstrou que sem a condição de monotonicidade não existe algoritmo para discriminar erodentes de não-erodentes, mesmo em dimensão 1. Usando a condição de que o operador determinístico  $D$  é monótono, Toom [T. 2001] apresentou uma condição de erodente para  $m = 1$ , ou seja,  $M = \{0, 1\}$  e também demonstrou que  $D$  é erodente  $\Leftrightarrow \exists r > 0$  tal que  $F_r D$  é não ergódico. Também usando condição de monotonicidade, Galperin [G. 1976] apresentou uma condição de erodente apenas para  $d = 1$ , *i.e.*, na reta, mas para qualquer  $m$ .

É claro que o primeiro caso não considerado por Toom nem por Galperin é quando  $M = \{0, 1, 2\}$  e  $d = 2$ . O nosso maior exemplo pertence a este caso, mas antes de apresentá-lo estudamos algumas propriedades úteis de operadores determinísticos.

## 2 Operadores Determinísticos

### 2.1 Propriedades Determinísticas

Temos algumas propriedades dos operadores determinísticos monótonos, a saber:

**Lema 2.1** *Um operador determinístico  $D$  é monótono se e somente se  $f$  em (1.2) é monótona.*

**demonstração:**

Numa direção: seja  $f$  monótona, demonstraremos que  $D$  é monótono. Tomemos configurações  $x$  e  $y$  tais que  $x \prec y$  e demonstremos que  $Dx \prec Dy$ . É claro que  $x_v \leq y_v$  para todo  $v \in \mathbb{Z}^d$ . Como  $f$  é monótona, então

$$f(x_{v+v_1}, \dots, x_{v+v_n}) \leq f(y_{v+v_1}, \dots, y_{v+v_n});$$

conseqüentemente  $(Dx)_v \leq (Dy)_v$ , então obtemos que  $Dx \prec Dy$ . Logo  $D$  é monótono. ■

Agora seja  $D$  monótono, então demonstraremos que  $f$  é monótona. Tomemos  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  tais que  $x_i \leq y_i, \forall i$  e demonstremos que

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n). \quad (2.1)$$

Tomemos configurações  $x$  e  $y$  tais que  $x_{v_1} = x_1, \dots, x_{v_n} = x_n$ ,  $y_{v_1} = y_1, \dots, y_{v_n} = y_n$  e  $x_v = y_v = 0$  para os demais  $v \in \mathbb{Z}^d$ . É claro que  $x \prec y$ . Logo  $Dx \prec Dy$ , então  $(Dx)_v \leq (Dy)_v$ , logo  $f(x_{v_1}, \dots, x_{v_n}) \leq f(y_{v_1}, \dots, y_{v_n})$ , então obtemos (2.1). Logo  $f$  é monótona. ■

**Lema 2.2** *Se  $x \prec y$  e  $D$  é monótono, então  $\forall t$ , temos  $D^t x \prec D^t y$ .*

**demonstração:**

Por indução. Sejam  $x$  e  $y$  configurações tais que  $x \prec y$ . Como  $D$  é monótono, então  $Dx \prec Dy$ . Assuma a hipótese de indução:  $D^t x \prec D^t y$ . Devemos mostrar que  $D^{t+1} x \prec D^{t+1} y$ . Temos que  $D^t x$  e  $D^t y$  são configurações e  $D$  é monótono, então  $D(D^t x) \prec D(D^t y)$ . Logo  $D^{t+1} x \prec D^{t+1} y$ . ■

**Lema 2.3** Se  $D_1$  e  $D_2$  são operadores monótonos, então sua superposição  $D_1D_2$  também é monótona.

**demonstração:**

Sejam  $x$  e  $y$  configurações tais que  $x \prec y$ , queremos demonstrar que  $D_1D_2x \prec D_1D_2y$ . Como  $D_1$  e  $D_2$  são monótonos, então  $D_1x \prec D_1y$ . Aplicando  $D_2$  obtemos  $D_1(D_2x) \prec D_1(D_2y)$ . Logo  $D_1D_2x \prec D_1D_2y$ . ■

**Lema 2.4** Se são dadas duas ilhas  $x, y$ , tais que  $x \prec y$ , então para cada operador monótono  $D$  temos

$$t_D(x) \leq t_D(y).$$

**demonstração:**

Pelo **lema 2.2** temos que  $x \prec y \Rightarrow D^t x \prec D^t y$  e isto vale para todo  $t$  inclusive para  $t = t_D(y)$ . Assim,

$$D^{t_D(y)} x \prec D^{t_D(y)} y.$$

Mas  $t_D(y)$  é a quantidade de vezes que  $D$  é aplicada à ilha  $y$  para que ela se torne “todos zeros”. É claro que se  $z \prec$  “todos zeros”, então  $z =$  “todos zeros”. Assim,  $D^{t_D(y)} x =$  “todos zeros”. Logo

$$t_D(x) \leq t_D(y). \blacksquare$$

Dado  $v = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ , a norma de  $v$ , denotada por  $|v|$ , é dada por

$$|v| = \sqrt{\sum_{k=1}^d i_k^2}.$$

Dados  $v$  e  $w$  em  $\mathbb{Z}^d$ , a *distância* entre  $v$  e  $w$ , denotada por  $\text{dist}(v, w)$ , é dada por

$$\text{dist}(v, w) = |v - w|.$$

Para cada ilha  $x$  denotamos *diâmetro* de  $x$  a maior distância entre  $v$  e  $w$ , com  $v, w \in \mathbb{Z}^d$  tais que  $x_v \neq 0$  e  $x_w \neq 0$ . É claro que o diâmetro de cada ilha é finito. “Todos zeros” não é ilha, então cada ilha tem diâmetro.

É claro que  $D$  é erodente  $\Leftrightarrow$  cada ilha tem tempo de sobrevivência finito. Chamemos  $D$  um erodente *linear* se existe  $c$  tal que para cada ilha seu tempo de

sobrevivência não excede  $c$  vezes seu diâmetro. Toom [T. 2001] e Galperin [G. 1976] mostraram que nos casos considerados por eles, a saber  $M = \{0, 1\}$  ou  $d = 1$ , cada erodente é linear. O primeiro caso não esgotado por eles é  $M = \{0, 1, 2\}$  e  $d = 2$ . Neste caso, diferentemente dos casos de Toom e Galperin, existem erodentes não lineares. O exemplo a seguir, o qual chamamos de *Maior exemplo*, mostra isto.

## 2.2 O Maior Exemplo

Tomemos  $M = \{0, 1, 2\}$  e  $d = 2$  e definimos um AC concreto  $G$  com  $n = 5$  vetores vizinhos

$$v_1 = (-1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (0, 0), v_4 = (0, -1), v_5 = (1, 0), \quad (2.2)$$

de modo que os componentes estão assim localizados:

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathcal{N} = x_{(0,1)} & \\ \hline \mathcal{O} = x_{(-1,0)} & \mathcal{C} = x_{(0,0)} & \mathcal{L} = x_{(1,0)} \\ \hline & \mathcal{S} = x_{(0,-1)} & \end{array}$$

sendo:  $\mathcal{O}$  - oeste,  $\mathcal{N}$  - norte,  $\mathcal{C}$  - centro,  $\mathcal{S}$  - sul e  $\mathcal{L}$  - leste.

Definimos uma função  $f : \{0, 1, 2\}^5 \rightarrow \{0, 1, 2\}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{C} = 2, \mathcal{N} \leq 1, \mathcal{L} = 0 \\ 0, & \text{se } \mathcal{C} = 1, \mathcal{S} = 0, \mathcal{L} = 0 \\ \mathcal{C}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Nosso AC  $G$  será assim definido :

$$(Gx)_v = f(x_{v+v_1}, x_{v+v_2}, x_{v+v_3}, x_{v+v_4}, x_{v+v_5}),$$

onde  $f$  é definida em ( 2.3 ) e  $v_1, \dots, v_5$  são definidos em ( 2.2 ).

**Lema 2.5** *O nosso exemplo  $G$  tem as seguintes propriedades:*

1.  $f(0, \dots, 0) = 0$ ,  $f(1, \dots, 1) = 1$  e  $f(2, \dots, 2) = 2$ ,
2.  $G(\text{"todos zeros"}) = \text{"todos zeros"}$ ,

$$G(\text{"todos uns"}) = \text{"todos uns"} \text{ e } G(\text{"todos dois"}) = \text{"todos dois"},$$

3. as configurações  $x, y, z, w$  tais que

$$x_v = \begin{cases} 2, & \text{se } i \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad y_v = \begin{cases} 2, & \text{se } j \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

$$z_v = \begin{cases} 2, & \text{se } i \geq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad w_v = \begin{cases} 2, & \text{se } j \geq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

onde  $v = (i, j)$ , são invariantes para  $G$ ,  $\forall n$ .

### demonstração:

A demonstração deste lema é feita aplicando o AC  $G$  às configurações e é deixada para o leitor. ■

Definimos *Ilha Retangular* como segue: dizemos que uma ilha é retangular e a denotamos por

$$Q(i_{\min}, i_{\max}, j_{\min}, j_{\max}), \quad (2.4)$$

se ela for dada por

$$x_{i,j} = \begin{cases} m, & \text{se } i_{\min} \leq i \leq i_{\max} \text{ e } j_{\min} \leq j \leq j_{\max} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Quando  $i_{\max} - i_{\min} = j_{\max} - j_{\min}$ , dizemos que a ilha (2.4) é *ilha quadrada*.

Pela uniformidade é suficiente considerar ilhas para as quais  $i_{\min} = j_{\min} = 0$  e neste caso usarmos a notação simplificada  $Q(i_{\max}, j_{\max})$ .

Tipicamente denotamos  $i_{\max} = q, j_{\max} = n$ , onde  $q \geq 0, n \geq 0$ . Logo

$$Q(i_{\max}, j_{\max}) = Q(q, n).$$

## 2.3 Teorema 1

O teorema a seguir mostra a importância do nosso exemplo, ou seja, mostra que nosso AC  $G$  é erodente, mas não linear.

**Teorema 1 .**

a) para cada ilha retangular  $Q(q, n)$  temos

$$t_G(Q(q, n)) = 2nq.$$

b) Para cada ilha  $x$  temos

$$t_G(x) \leq 2 (\text{diam}(x))^2.$$

O item b) deste teorema nos mostra que  $G$  é erodente enquanto o item a) mostra que ele é não linear.

## 2.4 demonstração do Teorema 1

Inicialmente consideramos alguns lemas, a saber:

**Lema 2.6** Para cada ilha  $x$  existem números inteiros  $i_{\min}, i_{\max}, j_{\min}, j_{\max}$  de modo que existe ilha retangular definida por  $Q = Q(i_{\min}, i_{\max}, j_{\min}, j_{\max})$  tal que

$$x \prec Q,$$

$$i_{\max} - i_{\min} \leq \text{diam}(x) \text{ e } j_{\max} - j_{\min} \leq \text{diam}(x).$$

e

$$\text{diam}(Q) \leq \sqrt{2} \text{diam}(x)$$

**demonstração:**

Denotamos  $i_{\min}$  e  $i_{\max}$  os valores mínimo e máximo, respectivamente, de  $i$  para os quais existe  $j$  tal que  $x_{i,j} \neq 0$ . Também denotamos  $j_{\min}$  e  $j_{\max}$  os valores mínimo e máximo, respectivamente, de  $j$  para os quais existe  $i$  tal que  $x_{i,j} \neq 0$ .

É claro que  $x \prec Q$ . Agora vamos demonstrar que  $i_{\max} - i_{\min} \leq \text{diam}(x)$  e que  $j_{\max} - j_{\min} \leq \text{diam}(x)$ . Pela definição existem  $j_1$  e  $j_2$  tais que  $y_{i_{\min}, j_1} \neq 0$  e  $y_{i_{\max}, j_2} \neq 0$ . Logo  $\text{diam}(x)$  não pode ser menor que a distância entre os pontos  $(i_{\min}, j_1)$  e  $(i_{\max}, j_2)$ , a saber

$$\sqrt{(i_{\max} - i_{\min})^2 + (j_2 - j_1)^2}.$$

Assim,

$$\text{diam}(x) \geq \sqrt{(i_{\max} - i_{\min})^2 + (j_2 - j_1)^2} \geq i_{\max} - i_{\min}.$$

De forma análoga demonstramos que

$$\text{diam}(x) \geq j_{\max} - j_{\min}. \blacksquare$$

Agora provemos que  $\text{diam}(Q) \leq \sqrt{2} \text{diam}(x)$ . Denotamos  $i_{\max} - i_{\min} = n$  e  $j_{\max} - j_{\min} = q$ . Assim, temos  $\text{diam}(Q) = \sqrt{n^2 + q^2}$ . Seja  $d = \text{diam}(x)$ , logo  $q \leq d$ . Seja  $n \leq q$  (o caso  $n > q$  é análogo), então  $n^2 \leq q^2$ , logo

$$n^2 + q^2 \leq 2q^2 \leq 2d^2.$$

Logo

$$\sqrt{n^2 + q^2} \leq \sqrt{2} d.$$

Conseqüentemente

$$\text{diam}(Q) \leq \sqrt{2} \text{diam}(x). \blacksquare$$

**Lema 2.7** *Se um operador é monótono e erode toda ilha retangular, então ele erode toda ilha.*

**demonstração:**

No **lema 2.6** demonstramos que para cada ilha  $x$  existe ilha retangular  $Q$  tal que  $x \prec Q$ . Pelo **lema 2.4** temos que

$$t_D(x) \leq t_D(Q)$$

se  $D$  é monótono. Como  $D$  erode toda ilha retangular e  $t_D(x) \leq t_D(Q)$ , então  $D$  erode toda ilha.  $\blacksquare$

### 2.4.1 demonstração do Item a) do Teorema 1

Seja ilha retangular definida como  $Q = Q(i_{\min}, i_{\max}, j_{\min}, j_{\max})$  dada por

$$x_{i,j} = \begin{cases} 2, & \text{se } i_{\min} \leq i \leq i_{\max} \text{ e } j_{\min} \leq j \leq j_{\max} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e assumamos, sem perda de generalidade, que

$$i_{\min} = j_{\min} = 0, \quad i_{\max} = q, \quad j_{\max} = n.$$

Assim, temos  $Q = Q(q, n)$  dada por

$$x_{i,j} = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq i \leq q \text{ e } 0 \leq j \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ao aplicarmos o autômato celular  $G$  à ilha  $Q(q, n)$  obtemos as seguintes modificações:

$\forall t \in [0, n]$  temos

$$(G^t x)_{i,j} = \begin{cases} 2, & \text{se } (0 \leq i \leq q \text{ e } 0 \leq j \leq n - t) \\ & \text{ou } (0 \leq i \leq q - 1 \text{ e } n - t \leq j \leq n) \\ 1, & \text{se } q - 1 \leq i \leq q \text{ e } n - t \leq j \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e  $\forall t \in [n, 2n]$  temos

$$(G^t x)_{i,j} = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq i \leq q - 1 \text{ e } 0 \leq j \leq n \\ 1, & \text{se } q - 1 \leq i \leq q \text{ e } t - n \leq j \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

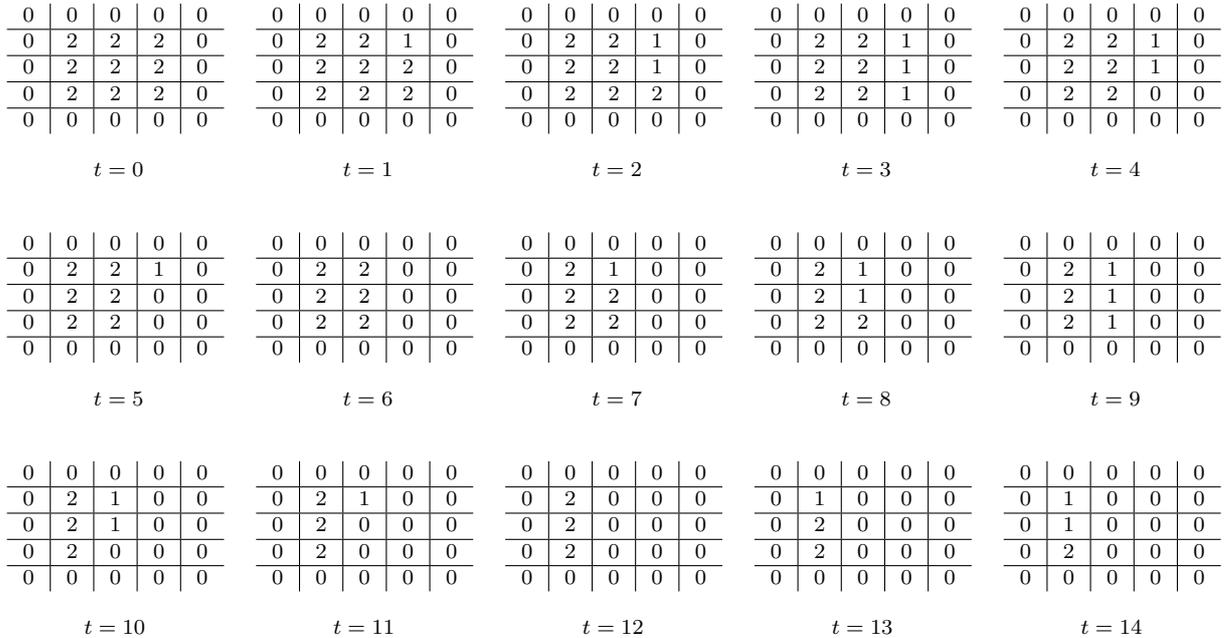
Após  $2n$  passos de tempo a configuração se torna uma ilha  $Q(q_1, n)$ , onde  $q_1 = q - 1$ . O processo torna a se repetir até  $q_{q-1} = q - q_1$ , ou seja,  $q_{q-1} = q - (q - 1) = 1$ . Assim, o tempo de sobrevivência da ilha é dado por  $\underbrace{2n + 2n \dots + 2n}_{q\text{-vezes}} = 2nq$ . Ou seja,

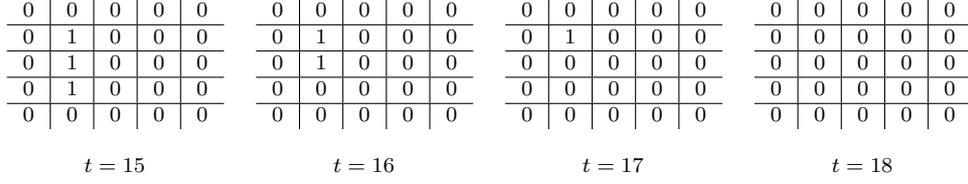
$$t_G(Q) = 2nq. \blacksquare$$

Para o caso da ilha quadrada  $Q(n, n)$ , o tempo de sobrevivência é dado por

$$t_G(Q) = 2n^2.$$

A **figura 2.1** abaixo ilustra como ocorre o processo em que a ilha quadrada  $Q(3, 3)$  torna-se “todos zeros” aplicando o nosso AC  $G$ .





**Figura 2.1** Evolução da ilha quadrada  $Q(3,3)$  ao longo do tempo aplicando o AC  $G$ .

Podemos observar na figura 2.1 que o tempo de sobrevivência da ilha é dado por  $t_G(Q(3,3)) = 18$ . Ou seja,  $t = 2n^2$ , sendo  $n = 3$ .

## 2.4.2 demonstração do Item b) do Teorema 1

Pelo **lema 2.6**, temos que para cada ilha  $x$  existe ilha retangular  $Q = Q(q, n)$  tal que  $x \prec Q$  e também pelo **lema 2.6** temos que

$$n \leq \text{diam}(x) \text{ e } q \leq \text{diam}(x).$$

Como  $n \geq 0$  e  $q \geq 0$ , então

$$nq \leq (\text{diam}(x))^2,$$

logo

$$2nq \leq 2(\text{diam}(x))^2.$$

Mas pelo item a) do **teorema 1** temos que  $2nq = t_G(Q)$ , então  $t_G(Q) \leq 2(\text{diam}(x))^2$ . Mas pelo **lema 2.4** temos

$$x \prec Q \Rightarrow t_D(x) \leq t_D(Q)$$

para todo operador monótono  $D$ , inclusive para o operador  $G$ . Logo

$$t_G(x) \leq t_G(Q).$$

Então

$$t_G(x) \leq t_G(Q) \leq 2(\text{diam}(x))^2.$$

Conseqüentemente

$$t_G(x) \leq 2(\text{diam}(x))^2. \blacksquare$$

O teorema a seguir trata a condição (1.4) de ergodicidade para o nosso exemplo  $G$ .

### 3 Teorema 2

A partir de agora denotamos o espaço de configurações  $M^{\mathbb{Z}^2}$  por  $\Omega$  e as configurações por  $\omega$ .

**Teorema 2** . Denotamos  $\mu_T = (F_r G)^T \delta_0$  . Então para qualquer  $r > 0$  , temos:

- a)  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(\omega_{0,0}^1 = 2) = 1$  , onde  $\omega_{0,0}$  é componente da configuração  $\omega \in \Omega$  .
- b)  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \delta_2$ .
- c) O operador  $F_r G$  é ergódico.
- d) A configuração “todos zeros” não é estável para  $F_r G$ .

O item d) é consequência evidente do item b) e, devido ao **lema 1.1**, o item c) também é consequência do item b) . Logo é suficiente demonstrar o item b) . Seja o lema a seguir:

**Lema 3.1** *Sejam  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  medidas uniformes em  $\Omega$  . Então*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(\omega_{0,0} = 2) = 1$$

se e somente se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \delta_2.$$

**demonstração:**

Numa direção: seja  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \delta_2$  , então,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(c) = \delta_2(c)$  para todo cilindro fino  $c$  . Em particular para

$$c_F = \{\omega_{v_1} = \omega_{v_2} = \dots = \omega_{v_n} = 2\},$$

onde  $F = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^2$  . Logo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(\omega_{0,0} = 2) = 1. \blacksquare$$

---

<sup>1</sup>Devido a uniformidade, é possível fazermos uma translação de tal forma que seja suficiente observarmos o estado do componente no ponto  $(0, 0)$  .

Agora na outra direção: seja  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(\omega_{0,0} = 2) = 1$ . Demonstraremos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \delta_2.$$

Temos  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \delta_2$  se  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(c) = \delta_2(c)$ , para cada cilindro fino  $c$  como em (1.1) e

$$\delta_2(\omega_{v_1} = a_1, \dots, \omega_{v_n} = a_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_1 = \dots = a_n = 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}. \quad (3.1)$$

Para cada conjunto finito  $F = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^2$  denotemos

$$c_F = \{\omega : \omega_{v_1} = \omega_{v_2} = \dots = \omega_{v_n} = 2\} \subset \Omega.$$

Notemos que

$$\Omega \setminus c_F = \bigcup_{a_1, \dots, a_n} \{\omega : \omega_{v_1} = a_1, \dots, \omega_{v_n} = a_n\}, \quad (3.2)$$

onde  $a_i \neq 2$ , para pelo menos um  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Logo

$$\Omega \setminus c_F \subseteq \bigcup_k \{\omega : \omega_{v_k} \neq 2\}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Conseqüentemente

$$\mu_T(\Omega \setminus c_F) = 1 - \mu_T(c_F) \leq \sum_{k=1}^n \mu_T(\omega_{v_k} \neq 2).$$

Logo  $\mu_T(\Omega \setminus c_F) \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow \infty$ . Então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(c_F) = \delta_2(c_F) = 1.$$

Agora demonstraremos que  $\mu_T(c) \rightarrow \delta_2(c)$  quando  $T \rightarrow \infty$  para cada cilindro fino  $c$ . Consideramos dois casos:

1.  $c = c_F$ ;

Neste caso, todos os cálculos já foram feitos, sendo suficiente substituir  $c_F$  por  $c$ . Então teremos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(c) = \delta_2(c). \quad (3.3)$$

2.  $c$  é um dos cilindros em (3.2);

Para este caso, se tomamos qualquer cilindro fino  $c$  com suporte  $F$  temos

$$\mu_T(c) \leq \mu_T(\Omega \setminus c_F).$$

Como  $\mu_T(\Omega \setminus c_F) \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow \infty$ , então  $\mu_T(c) \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow \infty$ . Logo obtemos (3.3)

Assim, para cada cilindro fino  $c$ , obtemos (3.3).

Conseqüentemente

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \delta_2. \blacksquare$$

Devido ao **lema 3.1**, o item *b)* do teorema 2 é conseqüência do item *a)* do teorema 2. Logo é suficiente demonstrar o item *a)* do teorema 2.

Para isto sejam  $r > 0$  e  $\varepsilon > 0$  escolhidos. Segundo a definição de limite, precisamos apresentar  $t_0$  tal que

$$\forall T \geq t_0 : P(\omega_{0,0}^T = 2) \geq 1 - \varepsilon, \quad (3.4)$$

onde  $P(\omega_{0,0}^T = 2)$  é a probabilidade de o componente no ponto  $(0,0)$  estar no estado 2 no tempo  $T$ .

Nossa demonstração é baseada na idéia de “*critical droplet*”. Em nosso caso, o “*critical droplet*” é um retângulo em  $\mathbb{Z}^2$  bastante grande e “cheio” de dois. Pelo fato de este retângulo ser grande, o tempo para ele aparecer com probabilidade pelo menos  $1 - \frac{\varepsilon}{2}$  é muito grande, mas finito. Demonstramos também que uma vez que tal retângulo aparece, ele nunca desaparece com probabilidade pelo menos  $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Agora vamos para estimações concretas. Para isto descrevemos nosso processo e apresentamos alguns conceitos e propriedades de operadores aleatórios.

### 3.1 Outra Apresentação do Operador Aleatório $F_r$

O operador  $F_r$  já foi definido mas precisamos apresentá-lo de outra maneira. Usamos  $\Gamma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$  espaço de  $2 - D$  configurações de estados de variáveis auxiliares. Denotamos  $\gamma \in \Gamma$  os elementos de  $\Gamma$  e  $\gamma_v$  os componentes em  $\gamma$ . Usamos também medida-produto  $\pi$  no espaço auxiliar  $\Gamma$  tal que

$$\pi : \gamma_v = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } r \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - r. \end{cases}$$

Para cada medida  $\mu \in \mathcal{M}$  definimos a medida  $F_r\mu$  como induzida pelo produto das medidas  $\mu$  e  $\pi$  definida por:

$$\omega_v = \begin{cases} m, & \text{se } \gamma_v = 1 \\ x_v, & \text{se } \gamma_v = 0, \end{cases}$$

onde  $x_v$  são coordenadas do espaço onde a medida original  $\mu$  é definida,  $\gamma_v$  são coordenadas do espaço onde a medida auxiliar  $\pi$  é definida e  $\omega_v$  são coordenadas do espaço onde a medida induzida  $F_r\mu$  é definida.

## 3.2 Outra Descrição do Processo

Seja  $\bar{\Omega} = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^2 \cdot \mathbb{Z}^+}$  espaço de  $3 - D$  configurações de estados de componentes. Denotamos  $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$  os elementos de  $\bar{\Omega}$  e chamamos eles de  $3 - D$  configurações. Denotamos  $\omega_v^t$  cada componente da configuração  $\bar{\omega}$ , onde  $t \in \mathbb{Z}_+$  e  $v \in \mathbb{Z}^2$ .

Seja  $\bar{\Gamma} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2 \cdot \mathbb{Z}^+}$  espaço de  $3 - D$  configurações de estados de variáveis auxiliares. Denotamos  $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$  os elementos de  $\bar{\Gamma}$  e  $\gamma_v^t$  componentes em  $\bar{\gamma}$ .

Seja  $\bar{\pi}$  distribuição (medida) em  $\bar{\Gamma}$  tal que todos  $\gamma_v^t$  são v.a. i.i.d. e

$$\bar{\pi} : \gamma_v^t = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } r \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - r. \end{cases}$$

Seja  $P$  distribuição em  $\bar{\Omega}$  induzida pela distribuição  $\bar{\pi}$  em  $\bar{\Gamma}$  definida indutivamente por base de indução

$$\forall i, j, \omega_{i,j}^0 \equiv 0$$

e passo de indução

$$\omega_{i,j}^{t+1} = \begin{cases} m, & \text{se } \gamma_{i,j}^{t+1} = 1 \\ G(T_{-v}(\omega^t)), & \text{c.c.} \end{cases},$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $G$  é o operador que é o nosso maior exemplo,  $T_{-v}$  é uma translação em  $\omega^t$  e  $v = (i, j)$ .

Fazemos algumas definições em conexão com esta descrição. A saber:

**Definição 3.1** .

- a)  $\underline{\mathcal{A}}[t_1 + 1, \infty)$  :  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\gamma_{i,j}^t$  para todos  $t \geq t_1 + 1$ .
- b)  $\underline{\mathcal{A}}[1, t_1 - 1]$  :  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\gamma_{i,j}^t$  para todos  $t \leq t_1 - 1$ .
- c)  $\underline{\omega}^t$  : configuração no tempo  $t$ . A saber  $(\omega_{i,j}^t)$  para todos  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 3.2** *Propriedade Markoviana*: o comportamento do processo nos tempos “futuros”  $t_1 + 1, t_1 + 2, \dots$  dados os comportamentos nos tempos “passados”  $1, \dots, t_1 - 1$  e no tempo “presente”  $t_1$  só depende do estado presente [A. 1975].

Em outras palavras:

$\forall E_{\text{futuro}} \in \mathcal{A}[t_1 + 1, \infty)$ ,  $\forall E_{\text{passado}} \in \mathcal{A}[1, t_1 - 1]$  e  $\forall \omega^{t_1} \in \bar{\omega}$  temos

$$P(E_{\text{futuro}} \mid \omega^{t_1}, E_{\text{passado}}) = P(E_{\text{futuro}} \mid \omega^{t_1}),$$

onde  $E_{\text{futuro}}$  e  $E_{\text{passado}}$  são eventos.

É consequência direta da definição do nosso processo que ele tem a propriedade markoviana.

A seguir apresentamos o *problema clássico da ruína do jogador* que é ferramenta essencial para a demonstração de que um “critical droplet” bastante grande nunca desaparece com probabilidade grande.

### 3.3 Problema Clássico da Ruína do Jogador

Considere um jogador (ou apostador) que ganha ou perde um real com probabilidades  $p$  e  $q$ , respectivamente (conseqüentemente  $q = 1 - p$ ). Seja seu capital inicial igual a  $z$ . O jogo prossegue até que o capital do jogador seja reduzido a zero, isto é, até o jogador estar arruinado. Estamos interessados na probabilidade de que o jogador vá à ruína [F. 1965].

Fazendo uma analogia à física, a interpretação mais flexível é em torno do movimento da variável pontual ou “partícula” no eixo  $-x$ . No tempo 0 a partícula se encontra na posição inicial  $z$  e nos tempos  $1, 2, 3, \dots$  ela se move uma unidade de passo na direção positiva ou negativa dependendo se o processo correspondente resulta em sucesso ou fracasso. A posição da partícula no tempo  $n$  representa o capital do jogador na conclusão do  $n$ -ésimo passo. O processo termina quando a partícula chega a 0. Descrevemos isto dizendo que a partícula realizou um *passeio aleatório* com barreira em 0. Este passeio aleatório está restrito às possíveis posições  $1, 2, 3, \dots$ . Físicos usam o modelo de passeio aleatório como aproximação grosseira para a difusão ou o movimento browniano unidimensional, onde a partícula física é exposta a um grande número de colisões moleculares que lho conferem um movimento aleatório. O caso  $p > q$  corresponde a um deslocamento para a direita, quando os choques da esquerda são mais prováveis. Trabalharemos com este caso.

**Lema 3.2** *No problema da ruína do jogador, seja  $R(z)$  a probabilidade de o jogador*

finalmente chegar a ruína, então

$$R(z) = \left(\frac{q}{p}\right)^z.$$

### demonstração:

Após o primeiro passo, a fortuna do jogador é  $z+1$  ou  $z-1$  e, portanto, devemos ter

$$R(z) = qR(z-1) + pR(z+1) \quad (3.5)$$

se  $z > 1$ . Se fazemos  $R(z) = \lambda^z$ , então teremos que  $R(z-1) = \lambda^{z-1}$  e  $R(z+1) = \lambda^{z+1}$ . Assim, a probabilidade de ruína partindo de  $z$  descrita em (3.5) pode ser escrita como

$$\lambda^z = q\lambda^{z-1} + p\lambda^{z+1}. \quad (3.6)$$

Dividindo (3.6) por  $\lambda^{z-1}$  obtemos a expressão

$$\lambda = q + p\lambda^2$$

que, reorganizando, resulta na seguinte equação do 2º grau:  $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$ .

Mas  $q = 1 - p$ , logo

$$p\lambda^2 - \lambda + 1 - p = 0,$$

que é equivalente a

$$(p\lambda^2 - p) - (\lambda - 1) = 0,$$

que implica em

$$p(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) = 0.$$

Mas  $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ , então temos

$$(\lambda - 1)(p(\lambda + 1) - 1) = 0,$$

nos deixando duas soluções:  $\lambda_1 = 1$  e,  $p\lambda_2 + p - 1 = 0$ . Como  $1 - p = q$ , então  $p - 1 = -q$ . Logo, temos  $p\lambda_2 - q = 0$ , ou seja,

$$\lambda_2 = \frac{q}{p}.$$

Assim, temos:

$$R(z) = k_0\lambda_1^z + k_1\lambda_2^z = k_0 + k_1\left(\frac{q}{p}\right)^z.$$

Mas  $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$ , então  $k_0 = 0$ . Logo

$$R(z) = k_1\left(\frac{q}{p}\right)^z.$$

Mas  $R(0) = 1$ , então  $k_1 = 1$ , ou seja

$$R(z) = \left(\frac{q}{p}\right)^z. \blacksquare$$

**Definição 3.3** Dado o espaço amostral  $\Delta$ , os eventos  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Delta$  compõem um sistema Completo de Eventos se

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \Delta \text{ e } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset.$$

**Teorema da Probabilidade Total:** Seja o espaço amostral  $\Delta$ , sejam  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Delta$  um sistema completo de eventos e seja  $B$  outro evento. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i). \quad (3.7)$$

**Lema 3.3** Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_{t_0}, A_*$  um sistema completo de eventos e seja o evento  $B$ . Sabendo que  $P(A_*) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  e  $\forall i = 1, \dots, t_0, P(B | A_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , então

$$P(B) \leq \varepsilon.$$

**demonstração:**

Por (3.7) temos que

$$P(B) = \left( \sum_{i=1}^{t_0} P(B | A_i)P(A_i) \right) + P(B | A_*)P(A_*). \quad (3.8)$$

Na primeira parcela de (3.8) temos

$$\sum_{i=1}^{t_0} P(B | A_i)P(A_i) \leq \sum_{i=1}^{t_0} \frac{\varepsilon}{2} P(A_i) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{t_0} P(A_i),$$

mas  $A_1, \dots, A_*$  compõem um sistema completo de eventos, então

$$\sum_{i=0}^{t_0} P(A_i) + P(A_*) = 1.$$

Conseqüentemente  $\sum_{i=1}^{t_0} P(A_i) \leq 1$ . Assim,

$$\sum_{i=1}^{t_0} P(B | A_i)P(A_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na segunda parcela de (3.8) temos

$$P(B | A_*)P(A_*) \leq P(B | A_*)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $P(B | A_*) \leq 1$ , então

$$P(B | A_*)P(A_*) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$P(B) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

**Lema 3.4** *Seja  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , onde todos  $X_i$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ , são v.a. i.i.d. e*

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } r \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - r. \end{cases}$$

*Então, para cada  $d \in (0, \frac{1}{2})$  temos*

$$P(X \leq d \cdot n) \leq \left( \left( \frac{r}{d} \right)^d \cdot \left( \frac{1-r}{1-d} \right)^{1-d} \right)^n.$$

**demonstração:**

Temos que  $X$  tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $r$ . Ou seja,

$$X \sim B(n, r).$$

Deste modo,

$$P(X \leq d \cdot n) = \sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} \cdot F(k),$$

onde  $C_k^n$  representa a combinação de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  e

$$F(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \leq d \cdot n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Seja  $\psi(k) = b^{k-d \cdot n}$ , onde  $0 \leq b \leq 1$ . Então

$$F(k) \leq \psi(k).$$

Logo

$$\sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} \cdot F(k) \leq \sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} \cdot \psi(k).$$

Mas

$$\sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} \cdot \psi(k) = \sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} b^{k-d \cdot n},$$

então

$$\sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} \cdot F(k) \leq \sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} b^{k-d \cdot n} = b^{-d \cdot n} \sum_{k=0}^n C_k^n (rb)^k (1-r)^{n-k}.$$

Mas

$$\sum_{k=0}^n C_k^n (rb)^k (1-r)^{n-k} = (rb + 1 - r)^n.$$

Então

$$\sum_{k=0}^n C_k^n r^k (1-r)^{n-k} \cdot F(k) \leq (b^{-d} (rb + 1 - r))^n.$$

Conseqüentemente

$$P(X \leq d \cdot n) \leq (b^{-d} (rb + 1 - r))^n.$$

Mas precisamos encontrar o menor valor de  $(b^{-d} (rb + 1 - r))^n$ . Para isto vamos minimizar a função

$$f(b) = b^{-d} (rb + 1 - r), \quad (3.9)$$

derivando  $f(b)$ , igualando a zero e obtendo o valor de  $b$  que minimiza esta função. obtemos

$$b = \frac{d(1-r)}{r(1-d)}. \quad (3.10)$$

Substituindo ( 3.10 ) em ( 3.9 ) obtemos

$$f\left(\frac{d(1-r)}{r(1-d)}\right) = \left(\frac{d(1-r)}{r(1-d)}\right)^{-d} \cdot \left(r \frac{d(1-r)}{r(1-d)} + 1 - r\right) = \left(\frac{r}{d}\right)^d \cdot \left(\frac{1-r}{1-d}\right)^{1-d}.$$

Assim,

$$P(X \leq d \cdot n) \leq \left( \left(\frac{r}{d}\right)^d \cdot \left(\frac{1-r}{1-d}\right)^{1-d} \right)^n. \blacksquare$$

Aplicando o lema acima ao caso particular  $d = \frac{r}{2}$ , obtemos

$$P\left(X \leq \frac{r}{2}n\right) \leq \left(2 \left(\frac{1-r}{2-r}\right)^{1-\frac{r}{2}}\right)^n.$$

**Lema 3.5** Para cada  $r \in (0, 1)$  existe  $n$  natural tal que

$$P(X \leq 2) \leq \left(2 \left(\frac{1-r}{2-r}\right)^{1-\frac{r}{2}}\right)^{2n}.$$

**demonstração:**

Vimos no **lema 3.4** que

$$P(X \leq \frac{r}{2}t) \leq \left( 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} \right)^t,$$

onde para  $t = 2n$  temos

$$P(X \leq nr) \leq \left( 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} \right)^{2n}.$$

Quando tomamos  $n$  suficientemente grande, ou seja,  $n \geq \frac{2}{r}$ , obtemos que  $nr \geq 2$ , conseqüentemente  $P(X \leq nr) \geq P(X \leq 2)$ . Assim,

$$P(X \leq 2) \leq \left( 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} \right)^{2n}. \blacksquare$$

**Lema 3.6** Denotamos  $\theta(r) = 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}}$ , então  $\forall r \in (0, 1)$  temos

$$\theta(r) < 1.$$

**demonstração:**

Seja  $\theta(r) = 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}}$ ,  $0 < r < 1$ , logo  $\frac{\theta(r)}{2} = \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}}$ . Temos que  $\theta(0) = 1$  e  $\theta(1) = 0$ . Se provarmos que  $\theta(r)$  é decrescente, então provaremos que  $\theta(r) < 1$ . Seja

$$\ln \left( \frac{\theta}{2} \right) = \left( 1 - \frac{r}{2} \right) [\ln(1-r) - \ln(2-r)]$$

e seja  $x = \frac{r}{2}$ , então  $x \in (0, \frac{1}{2})$ . Logo

$$f(x) = (1-x)[\ln(1-2x) - \ln(2-2x)].$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -[\ln(1-2x) - \ln(2-2x)] + (1-x) \left[ \frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{2-2x} \right] \\ &= \ln(2-2x) - \ln(1-2x) + (1-2x) \left[ \frac{-2}{1-2x} + \frac{1}{1-x} \right] \\ &= \ln \left( \frac{2-2x}{1-2x} \right) + \left[ \frac{-2(1-x)}{1-2x} + \frac{1-x}{1-x} \right] \end{aligned}$$

$$= \ln \left( \frac{2-2x}{1-2x} \right) - \left[ \frac{2-2x}{1-2x} - 1 \right].$$

Fazendo  $\frac{2-2x}{1-2x} = u$ , temos que  $u > 0$  e  $u \neq 1$ .

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln u - (u - 1)$$

Mas, sabemos que

$$\ln u < u - 1, \text{ com } u > 0, u \neq 1.$$

Então

$$\ln u - (u - 1) < 0.$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0.$$

Assim,  $\theta(\frac{r}{2})$  é decrescente. Conseqüentemente  $\theta(r)$  é decrescente. Logo  $\theta(r) < 1$ . ■

**Lema 3.7** Para cada  $r \in (0, 1)$  existe  $n$  natural tal que

$$\left( 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} \right)^{2n} \leq \frac{1}{3}. \quad (3.11)$$

**demonstração:**

Vimos no **lema 3.6** que  $0 < 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} < 1$ , quando  $0 < r < 1$ . Logo  $2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}}$  pode ser escrito da forma  $\frac{1}{a}$ , onde  $a > 1$ . Assim, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} \right)^{2n} = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} \right)^{2n} = 0.$$

Assim, existe  $n$  tal que

$$\left( 2 \left( \frac{1-r}{2-r} \right)^{1-\frac{r}{2}} \right)^{2n} \leq \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

**Lema 3.8** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $q$  tal que

$$\left( \frac{1}{2} \right)^q < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.12)$$

**demonstração:**

É suficiente tomarmos  $q > 1 - \log_2 \varepsilon$ . Assim,  $1 - q < \log_2 \varepsilon$ , que resulta em  $2^{1-q} < \varepsilon$  e conseqüentemente  $2^{-q} < \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja,  $\left(\frac{1}{2}\right)^q < \frac{\varepsilon}{2}$ . ■

**Lema 3.9** Para cada  $r \in (0, 1)$ ,  $n > 0$ ,  $q > 0$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $t_0$  tal que

$$(1 - r^{nq})^{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.13)$$

**demonstração:**

Temos que  $0 < r < 1$ , então  $0 < r^{nq} < 1$  e conseqüentemente  $0 < 1 - r^{nq} < 1$ . Assim,  $1 - r^{nq}$  pode ser escrito como  $\frac{1}{a}$ , com  $a > 1$ . Logo

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} (1 - r^{nq})^{t_0} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{t_0} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{t_0}} = 0.$$

Logo existe  $t_0$  tal que  $(1 - r^{nq})^{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . ■

**Definição 3.4** Para cada  $k, e \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  definimos  $H_{k,e} \subset \mathbb{Z}^2$  como

$$H_{k,e} = \{(i, j) : -k - e \leq i < -k, 0 \leq j \leq n\},$$

onde  $n$  é dimensão do critical droplet.

Observe que se  $e = 0$ , então  $H_{k,e}$  é vazio. Também para cada  $\omega \in \Omega$  e  $k, e \in \mathbb{Z}_+$  definimos o conjunto  $C \subseteq \mathbb{Z}_+$  da seguinte forma:

$$C = \{e \in \mathbb{Z}_+ : \forall (i, j) \in H_{k,e} : \omega_{i,j} = 2\}.$$

Observe que o conjunto  $C$  é sempre não-vazio, uma vez que ele possui 0. Também para cada  $k \in \mathbb{Z}_+$ , definimos

$$\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

tal que  $\varphi_k(\omega)$  é definida como o máximo (talvez infinito) do conjunto  $C$ .

**Lema 3.10** Seja  $\varphi_k(\omega_0) = e > 0$ . Então  $(F_r G)^{2n} \omega_0$  pode ser representado como

$$p\mu_1 + (1 - p)\mu_2, \quad (3.14)$$

onde

a)  $p \geq \frac{2}{3}$ .

b)  $\mu_1$  é concentrada nas configurações  $\omega$  tais que  $\varphi_{k+1}(\omega) \geq e + 1$ .

c)  $\mu_2$  é concentrada nas configurações  $\omega$  tais que  $\varphi_{k+1}(\omega) \geq e - 1$ .

**demonstração:**

Para cada  $l \in [1, n]$  definimos o  $l$ -ésimo “trecho” como sendo o conjunto

$$T_l = \{(i, j) : -k - X \leq i < -k, j = l \text{ e } \omega_{(i,j)}^t = 2\},$$

onde  $X$  é a variável aleatória menor comprimento de trecho com distribuição binomial com parâmetros  $r, 2n$  e  $P(X < 2) \leq \left(2 \left(\frac{1-r}{2-r}\right)^{1-\frac{r}{2}}\right)^{2n}$  e denotamos  $A$  o evento “todos os trechos têm comprimento maior ou igual a 2”. Então definimos  $\mu_1, \mu_2$  e  $p$  como segue:  $\mu_1$  igual à medida  $(F_r G)^{2n} \omega_0$  sob condição que  $A$  ocorre,  $\mu_2$  igual à medida  $(F_r G)^{2n} \omega_0$  sob a condição de que  $A$  não ocorre e denotamos  $p$  como a probabilidade de  $A$  ocorrer.

Agora seja o *Teorema da Probabilidade Total*: dada uma medida  $\mu$  em um espaço  $\Delta$  e um evento  $A \subseteq \Delta$ , sempre temos

$$\mu = p(A) \mu|_A + [1 - p(A)] \mu|_{\bar{A}},$$

onde  $\mu|_A$  é a medida  $\mu$  dado que o evento  $A$  ocorreu e  $\mu|_{\bar{A}}$  é a medida  $\mu$  dado que o evento  $A$  não ocorreu.

Então, usando as definições citadas anteriormente e o teorema da probabilidade total, obtemos (3.14). ■

Agora demonstremos o item a) do lema 3.10. Temos que

$$P(X < 2) \leq \left(2 \left(\frac{1-r}{2-r}\right)^{1-\frac{r}{2}}\right)^{2n},$$

onde  $X$  tem distribuição binomial com parâmetros  $r$  e  $2n$ . Como  $p$  é a probabilidade de todos os trechos terem comprimento maior ou igual a 2, então  $1 - p$  é a probabilidade de pelo menos um trecho ter comprimento menor que 2. Como  $X$  é a variável menor comprimento de trecho, então  $P(X < 2) = 1 - p$ . Assim, usando os resultados dos lemas 3.5 e 3.7, obtemos  $1 - p \leq \frac{1}{3}$ . Logo  $p \geq \frac{2}{3}$ . ■

Agora demonstremos o item b) do lema 3.10. Temos inicialmente que

$$H_{k,e} = \{(i, j) : -k - e \leq i < -k, 0 \leq j \leq n\}.$$

Logo  $\varphi_k(\omega) = -k - (-k - e)$ . Ou seja,  $\varphi_k(\omega) = e$ ,  $e > 0$ .

Após  $2n$  passos de tempo, temos

$$H_{k+1,e} = \{(i, j) : -k - e - X \leq i < -k - 1, 0 \leq j \leq n\},$$

onde  $\varphi_{k+1}(\omega) = -k - 1 - (-k - e - X) = e + X - 1$ .

Se  $A$  ocorre, então  $X \geq 2$ . Assim,

$$\varphi_{k+1}(\omega) \geq e + 2 - 1 = e + 1.$$

Ou seja, como  $\mu_1$  é a medida condicionada a  $A$  ocorrer, então  $\mu_1$  é concentrada nas configurações  $\omega$  tais que  $\varphi_{k+1}(\omega) \geq e + 1$ . ■

Agora demonstremos o item c) do lema 3.10. Temos inicialmente  $\varphi_k(\omega) = e$  e após  $2n$  passos de tempo obtemos  $\varphi_{k+1}(\omega) = e + X - 1$  como vimos no item b). Suponha que ocorra o caso extremo onde o operador aleatório não “funciona”, ou seja,  $A$  não ocorre e  $X = 0$ , o que implica que não temos trechos. Neste caso

$$\varphi_{k+1}(\omega) = e - 1. \quad (3.15)$$

Suponha agora que  $A$  não ocorre e  $X > 0$ , ou seja,  $0 < X < 2$ . Neste caso

$$e - 1 < \varphi_{k+1}(\omega) < e + 1. \quad (3.16)$$

Logo, por (3.15) e (3.16) obtemos

$$\varphi_{k+1}(\omega) \geq e - 1.$$

Ou seja, como  $\mu_2$  é a medida condicionada a  $A$  não ocorrer, então  $\mu_2$  é concentrada nas configurações  $\omega$  tais que  $\varphi_{k+1}(\omega) \geq e - 1$ . ■

**Definição 3.5** *Dado qualquer  $t_0$  natural:*

a) Para cada  $1 \leq t \leq t_0$ , denotamos  $V_{t,t_0} \subseteq \mathbb{Z}^2$  o conjunto

$$V_{t,t_0} = \left\{ (i, j) : \left( \frac{t_0 - t}{2n} \right) \leq i \leq \left( \frac{t_0 - t}{2n} \right) + q, 0 \leq j < n \right\}.$$

b) Denotamos  $E_{t,t_0} \subseteq \bar{\Gamma}$  o evento

$$E_{t,t_0} = \{ \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma} : \forall v \in V_{t,t_0} : \gamma_v^t = 1 \}. \quad (3.17)$$

c) Denotamos  $E'_{t,t_0} \subseteq \bar{\Gamma}$  o evento

$$E'_{t,t_0} = \bigcap_{i=1}^{t-1} (\bar{\Gamma} \setminus E_{i,t_0}) \cap E_{t,t_0}. \quad (3.18)$$

O lema seguinte mostra que um “critical droplet” aparece com probabilidade grande se o tempo é suficientemente grande.

**Lema 3.11** Para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0$  tal que (3.13) é verdadeira e  $T \geq t_0$ , temos

$$P(\omega_{0,0}^T = 2 \mid E'_{t,t_0}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

**demonstração:**

Fazemos translação na escala de tempo tal que  $t$  torna-se 1. Logo o evento  $E'_{t,t_0}$  torna-se em

$$\gamma_{i,j}^1 = 1,$$

se  $-q \leq i < 0$  e  $0 \leq j < n$ .

Definimos o conjunto  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Z}$  assim:  $q \in \mathcal{Q}$  se

$$(-m - q \leq i < -m, 0 \leq j < n) \Rightarrow \omega_{i,j}^{2mn} = 2.$$

Seja  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  e seja  $U_m$  variável aleatória no tempo  $t = 2mn$  tal que

$$U_m = \begin{cases} \max q, & \text{se } q \in \mathcal{Q} \\ 0, & \text{se } \mathcal{Q} \text{ é vazio} \end{cases}.$$

Se  $U_m = q$ , então pelo **lema 3.10** temos que  $U_{m+1}$  tem distribuição

$$\succ \begin{cases} q + 1 & \text{com probabilidade } \geq \frac{2}{3} \\ q - 1 & \text{com probabilidade } \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Assim, pelo **lema 3.2** temos

$$P(\text{arruinar iniciando em } q) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^q.$$

Então

$$P(\text{nunca arruinar iniciando em } q) \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^q.$$

Agora escolhamos  $q$  tal que (3.12) é verdadeira. Então

$$\left(\frac{1}{2}\right)^q \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conseqüentemente

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^q \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo

$$P(\text{nunca arruinar iniciando em } q) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$P(\text{nunca arruinar iniciando em } q \mid E'_{t,t_0}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas “nunca arruinar iniciando em  $q$ ” implica em  $\omega_{0,0}^T = 2$ . Então

$$P(\omega_{0,0}^T = 2 \mid E'_{t,t_0}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

### 3.4 demonstraçãõ do item a) do Teorema 2

Inicialmente, baseado no **lema 3.7** escolhamos  $n$  tal que (3.11) é verdadeira. Em seguida, baseado no **lema 3.8** escolhamos  $q$  tal que (3.12) é verdadeira. Os números  $n$  e  $q$  são dimensões de nosso “critical droplet” - o retângulo tão grande que, se ele está tão “cheio” de dois num tempo, a probabilidade de ele nunca desaparecer é grande. Após isto, baseado no **lema 3.9** escolhamos  $t_0$  tal que (3.13) é verdadeira e demonstremos (3.4). Seja  $E_{t,t_0}$  como definido em (3.17). O evento  $E_{t,t_0}$  é garantia que o “critical droplet” aparece no tempo  $t$ . Observe que  $E_{t,t_0}$ ,  $t = 1, \dots, t_0$ , são independentes. Os  $E'_{t,t_0}$  definidos em (3.18) formam um sistema completo de eventos. O evento  $E'_{t,t_0}$  significa que o tempo  $t$  é o primeiro quando um “critical droplet” aparece. Seja

$$E_* = \Gamma \setminus \bigcup_{t=1}^{t_0} E'_{t,t_0} = \Gamma \setminus \bigcup_{t=1}^{t_0} E_{t,t_0}.$$

O evento  $E_*$  significa que nenhum “critical droplet” aparece até o tempo  $t_0$ .

Estimamos a probabilidade:

$$P(E_*) = (1 - r^{nq})^{t_0}.$$

Assim, pela escolha de  $t_0$  tal que (3.13) é verdadeira obtemos

$$P(E_*) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$\sum_{t=1}^{t_0} P(E'_{t,t_0}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.19)$$

Pelo **lema 3.11**, temos que

$$P(\omega_{0,0}^T = 2 \mid E'_{t,t_0}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas, por (3.7) temos

$$P(\omega_{0,0}^T = 2) = \sum_{t=1}^{t_0} P(\omega_{0,0}^T = 2 \mid E'_{t,t_0}) P(E'_{t,t_0}) + P(\omega_{0,0}^T = 2 \mid E_*) P(E_*).$$

Logo

$$P(\omega_{0,0}^T = 2) \geq \sum_{t=1}^{t_0} P(\omega_{0,0}^T = 2 \mid E'_{t,t_0}) P(E'_{t,t_0}).$$

Logo, através do **lema 3.11**, obtemos

$$P(\omega_{0,0}^T = 2) \geq \sum_{t=1}^{t_0} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) P(E'_{t,t_0}) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{t=1}^{t_0} P(E'_{t,t_0}).$$

Assim, por (3.19) obtemos

$$P(\omega_{0,0}^T = 2) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq 1 - \varepsilon.$$

Então para todos  $T \geq t_0$ ,

$$\mu_T(\omega_{0,0} = 2) \geq 1 - \varepsilon. \blacksquare$$

### 3.5 Discussão

Por encontrar dificuldades no estudo teórico de comportamento de autômatos celulares, por várias vezes foram considerados exemplos para estes estudos. O artigo [GKL. 1978] apresentou um exemplo uni-dimensional que é erodente para “zeros” e “uns” ao mesmo tempo. Seu comportamento na presença de ruído aleatório ainda não foi examinado, mas o pressentimento geral é de que nem “todos zeros” nem “todos uns” é estável.

O artigo [T. 1976] apresentou o primeiro exemplo de erodente para o qual “todos zeros” não tem estabilidade. O nosso exemplo pode ser considerado como seu análogo bi-dimensional com a diferença de ser erodente não linear. O único erodente não linear até agora foi visto em [T. 2002] com espaço contínuo. Logo, esta tese apresenta o primeiro exemplo publicado de um erodente não linear com espaço discreto.

Em [T. 1979] foi demonstrada estabilidade de “todos zeros” se  $D$  é erodente. O item  $d)$  de nosso teorema 2 mostra que em nosso exemplo não há estabilidade de “todos zeros” ainda que  $G$  seja erodente. A revisão [T. 1995] apresenta estes e vários outros exemplos e resultados.

Nosso teorema 2 mostra que  $\delta_2$  é única medida invariante de operador  $F_r G$  para qualquer  $r > 0$ . Contudo, convergência para esta medida parece bastante lenta. Neste sentido nosso processo tem uma aparência com um fenômeno físico conhecido como *metaestabilidade*, que é a capacidade de um estado de desequilíbrio persistir por um longo período de tempo. A transição para o equilíbrio acontece através do surgimento do “*critical droplet*”. O tempo necessário para o “critical droplet” aparecer é muito grande mas logo que ele aparece, o sistema rapidamente vai para o equilíbrio. A metaestabilidade é caracterizada por múltiplas tentativas fracassadas de mudar para o equilíbrio. Em nosso caso o estado de desequilíbrio é “todos zeros”, o estado de equilíbrio é “todos dois” e “critical droplet” é o retângulo grande cheio de dois.

Na física muitos exemplos importantes de metaestabilidade são conhecidos: diamantes em temperatura ambiente são metaestáveis porque a transformação de fase para o grafite estável é extremamente lenta. Em temperaturas superiores, a razão de transformação de fase é aumentada e o diamante será transformado em grafite; DNA, RNA e proteínas também são metaestáveis; Em eletrônica “*flip-flop*”, que são circuitos oscilantes, são mecanismos que sofrem metaestabilidade.

Metaestabilidade é um fenômeno de grande importância para a descrição de transição de fase. Uma aproximação rigorosa vem de [L. 1971], onde metaestabilidade é caracterizada como uma lenta evolução da média sobre o processo para o valor da estabilidade do equilíbrio.

# Apêndice

## Principais Notações

- $c$ : cilindro fino  
 $\mathcal{C}$ : ponto de localização de componente: “centro”  
 $c_F$ : conjunto  $\{\omega_{v_1} = \dots = \omega_{v_n} = 2\}$   
 $D$ : operador geral determinístico  
 $F_r$ : operador aleatório que age nas medidas em  $M^{\mathbb{Z}^d}$   
 $G$ : nosso autômato celular que é o maior exemplo  
 $\mathcal{L}$ : ponto de localização de componente: “leste”  
 $M$ : conjunto de estados de componentes  
 $m$ : elemento máximo de  $M$   
 $\mathcal{M}$ : conjunto das medidas normalizadas em  $\Omega$   
 $M^{\mathbb{Z}^d}$ : espaço geral de configurações  
 $n$ : número natural: largura da ilha retangular  
 $\mathcal{N}$ : ponto de localização de componente: “norte”  
 $\mathcal{O}$ : ponto de localização de componente: “oeste”  
 $P$ : operador  
 $Q(q, n)$ : ilha retangular com dimensões  $q$  e  $n$   
 $q$ : número natural: comprimento de ilha retangular  
 $r$ : probabilidade de cada componente em  $\mathbb{Z}^d$  aumentar sob ação de  $F_r$   
 $\mathcal{S}$ : ponto de localização de componente: “sul”  
 $t$ : variável tempo  
 $T_v$ : translação de configurações e medidas  
 $x$ : configuração em  $M^{\mathbb{Z}^d}$   
 $\mathbb{Z}^d$ : espaço discreto  $d$ -dimensional  
 $\Gamma$ : espaço de  $2 - D$  configurações de estados de variáveis auxiliares  
 $\bar{\Gamma}$ : espaço de  $3 - D$  configurações de estados de variáveis auxiliares  
 $\gamma$ :  $2 - D$  configuração em  $\Gamma$   
 $\bar{\gamma}$ :  $3 - D$  configuração em  $\bar{\Gamma}$   
 $\gamma_v$ :  $2 - D$  componente em  $\gamma$   
 $\gamma_v^t$ :  $3 - D$  componente em  $\bar{\gamma}$   
 $\delta_i$ : medida em  $\mathcal{M}$  concentrada em “todos  $i$ ”  
 $\mu$ : medida qualquer em  $\mathcal{M}$   
 $\nu$ : medida qualquer em  $\mathcal{M}$   
 $\pi$ : medida-produto em  $\Gamma$   
 $\bar{\pi}$ : medida-produto em  $\bar{\Gamma}$   
 $\Omega$ : espaço de  $2 - D$  configurações de componentes  
 $\bar{\Omega}$ : espaço de  $3 - D$  configurações de estados de componentes

$\omega$  : 2 -  $D$  configuração em  $\Omega$   
 $\bar{\omega}$  : 3 -  $D$  configuração em  $\bar{\Omega}$   
 $\omega_v$  : 2 -  $D$  componente em  $\omega$   
 $\omega_v^t$  : 3 -  $D$  componente em  $\bar{\omega}$   
 $\omega^t$  :  $\omega^t = (\omega_{i,j}^t)$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$

# Referências

- [A. 1975] Ash, Robert & Gardner, Melvin. *Topics in Stochastic Processes*. Academic Press - New York - San Francisco - London - 1975.
- [D. 1990] Dobrushin, R. L., Kryukov, V. I. and Toom, A. L. *Stochastic Cellular Systems: Ergodicity, Memory, Morphogenesis*. Manchester University Press - Manchester and New York - pp. 17-31 - 1990.
- [F. 1965] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Applications*. Volume 1 second edition - Wiley & Sons Inc. - New York - London - 1965.
- [GKL. 1978] Gács, P., Kurdyumov, G. L. and Levin, L. A. One-dimensional Homogeneous Media Which Erode Finite Islands. *PIT* 14. 3 - pp. 92-96 - 1978.
- [G. 1976] Galperin, G. Homogeneous Local Monotone Operators with Memory. *Doklady of Soviet Acad. of Sciences* - 288 - pp. 277-280 - 1976.
- [K. 1978] Kurdyumov, G. L. An Algorithm-Theoretic Method in Studying Homogeneous Random Networks, In: Dobrushin, R. L., Kryukov, V. I. and Toom, A. L. (editors). *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology. Lecture Notes in Mathematics* - 653 - Springer - pp. 37-55 - 1978. - 1975.
- [J. 2002] James, Barry. *Probabilidade: um Curso em Nível Intermediário*. (2ª edição) Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro - 2002.
- [L. 1971] Lebowitz, J. L. and Penrose, O. Rigorous Treatment of metastable States in the Van Der Waals-Maxwell Theory. *Journal of Statistical Physics* **3** - pp. 211-236 - 1971.
- [P. 1979] Petri, N. The Unsolvability of the Problem of Discerning of Annuling Iterative Nets. *Studies in the Theory of Algorithms and Mathematical Logic*, Moscow - Nauka - 1979.
- [T. 1976] Toom, Andrei. Unstable Multicomponent Systems. *PIT*, 12 - pp. 33-37. - 1976.
- [T. 1979] Toom, Andrei. Stable and Attractive Trajectories in Multicomponent Systems. *Adv. Probab.*, 6 - pp. 549-575. - 1979.
- [T. 1995] Toom, Andrei. Cellular Automata With Errors: Problems for Students of Probability. *Topics in Contemporary Probability and Its applications*. CRC Press Boca Raton - New York - London - Tokyo - pp. 117-157 - 1995.

- [T. 2001] Toom, Andrei. *Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares*. 23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA - RJ - 2001.
- [T. 2002] Toom, Andrei. On Critical Values for Some Random processes with Local Interaction in  $R^2$ . *In and Out of Equilibrium: Probability with a Physics Flavor*. - 51 - Birkhäuser - Boston -Basel - Berlin - pp. 309-319 - 2002.