

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Daniel Luiz Fonseca de Aguiar

**Estimação Pontual e Intervalar dos Parâmetros da
Distribuição Lomax**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Estatística do Departamento de Estatística da Universidade
Federal de Pernambuco como requisito parcial para obten-
ção do grau de Mestre em Estatística.*

Orientador: *Prof. Dr. Francisco Cribari Neto*

Recife
28 de fevereiro de 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Aguilar, Daniel Luiz Fonseca de
Estimação pontual e intervalar dos parâmetros da
distribuição Lomax / Daniel Luiz Fonseca de Aguilar -
Recife: O Autor, 2012.

xiii, 111 folhas: il., fig., tab.

Orientador: Francisco Cribari Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN, Estatística, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Bootstrap. 2. Correção de Viés. 3. Distribuição Lomax. 4.
Simulação de Monte Carlo. I. Cribari Neto, Francisco
(orientador). II. Título.

519.54

CDD (23. ed.)

MEI2012 – 025

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

28 de fevereiro de 2012

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Daniel Luiz Fonseca Aguiar

intitulada

“Estimação Pontual e Intervalar dos Parâmetros da Distribuição Lomax”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Francisco Cribari Neto

orientador

Gauss Moutinho Cordeiro

Verônica Maria Cadena Lima (UFBA)

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

Dedico este trabalho a minha família.

Agradecimentos

- À minha família, que sempre me apoiaram e me incentivaram. Aos meus pais, João e Lucia, por serem um exemplo de vida que venho tentando seguir a cada dia. Aos meus irmãos, Oseias, Luciana, Carolina e Gabriela que mesmo com as confusões do dia-a-dia estavam próximos quando necessário. Por fim, aos meus sobrinhos Ana Lúcia, Caio, Maria Cecília e Joana (que nascerá em breve) pelas horas de alegrias juntos.
- Aos amigos e colegas que fiz durante neste dois anos, em especial Fernanda De Bastiani, Francisco Wiliam, Maria do Carmo, Mariana Araújo e Vinícius Quintas por todas as horas de estudos, pelo aprendizado e pela convivência.
- Ao meu orientador, Francisco Cribari Neto, pela dedicação, comprometimento e disponibilidade. Pela paciência e clareza na orientação. Pela cuidadosa leitura e pelas valiosas sugestões.
- À Valéria Bittencourt, pelo trabalho bem feito, pela atenção e por contagiar todos com sua alegria e positividade.
- Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFPE.
- Aos participantes da banca examinadora pelas sugestões.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

*Deixe-me ir preciso andar,
Vou por aí a procurar,
Rir pra nao chorar.*

*Deixe-me ir preciso andar,
Vou por aí a procurar,
Rir pra nao chorar.*

*Quero assistir o sol nascer,
Ver as águas dos rios correr,
Ouvir os pássaros cantar,
Eu quero nascer e quero viver...*

*Deixe-me ir preciso andar,
Vou por aí a procurar,
Rir pra não chorar.*

*Se alguém por mim perguntar,
Diga que eu só vou voltar,
Depois que eu me encontrar...*

*Quero assistir o sol nascer,
Ver as águas dos rios correr,
Ouvir os pássaros cantar,
Eu quero nascer e quero viver...*

*Deixe-me ir preciso andar,
Vou por aí a procurar,
Rir pra nao chorar.*

*Deixe-me ir preciso andar,
Vou por aí a procurar,
Rir pra nao chorar.*

—CARTOLA (Preciso Me Encontrar)

Resumo

A presente dissertação aborda estimação pontual e estimação intervalar dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax. No que tange à estimação pontual, consideramos esquemas analíticos e numéricos (bootstrap) de correção de viés, que são comparados através de simulação de Monte Carlo. Também analisamos via simulação diferentes estratégias (inclusive algumas baseadas em reamostragem de bootstrap) de estimação intervalar.

Palavras-chave: bootstrap, correção de viés, distribuição Lomax, intervalo de confiança, simulação de Monte Carlo.

Abstract

This thesis addresses point and interval estimation of the parameters that index Lomax distribution. We consider different analytical and numerical (bootstrap-based) bias correction strategies their relative merits are assessed through extensive Monte Carlo simulations. Stochastic simulation are also used to evaluate the small sample coverages of different confidence interval, including bootstrap-based confidence intervals.

Keywords: bias correction, bootstrap, confidence interval, Lomax distribution, Monte Carlo simulation.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
1.2	Organização da Dissertação	2
1.3	Suporte Computacional	2
1.4	Estimadores de Máxima Verossimilhança	3
1.5	Intervalos de Confiança Assintóticos	5
2	Distribuição Lomax	7
2.1	Introdução	7
2.2	Distribuição Lomax	8
2.3	Aspectos Inferenciais	9
3	Correção de Viés	13
3.1	Introdução	13
3.2	A Correção de Cox e Snell	14
3.2.1	Correção de Cox e Snell para os estimadores de máxima verossimilhança na distribuição Lomax	15
3.3	A Correção de Firth	16
3.3.1	Correção de Firth para os estimadores de máxima verossimilhança na distribuição Lomax	17
3.4	Correções por Bootstrap	18
4	Intervalo de Confiança	21
4.1	Introdução	21
4.2	Intervalo Bootstrap Percentil	22
4.3	Intervalo Bootstrap BC	23
4.4	Intervalo Bootstrap BCa	23
5	Resultados Numéricos	26
5.1	Introdução	26
5.2	Resultados e Discussão	27
5.2.1	Correção de viés	27
5.2.2	Estimação intervalar	42

6	Aplicações	97
6.1	Tamanhos de arquivos de computador	97
6.2	Precipitação	99
6.3	Consumo aparente de Petróleo	101
7	Conclusões	104
A	Cumulantes	105

Lista de Figuras

2.1	Densidades Lomax com diferentes valores para (α, λ) .	10
5.1	Histogramas das estimativas de α , quando $\alpha = 0.5, \lambda = 1.0, n = 35$	31
5.2	Histogramas das estimativas de λ , quando $\alpha = 0.5, \lambda = 1.0, n = 35$	31
5.3	Histogramas das estimativas de α , quando $\alpha = 1.1, \lambda = 1.0, n = 35$	36
5.4	Histogramas das estimativas de λ , quando $\alpha = 1.1, \lambda = 1.0, n = 35$	36
5.5	Histogramas das estimativas de α , quando $\alpha = 1.6, \lambda = 1.0, n = 35$	41
5.6	Histogramas das estimativas de λ , quando $\alpha = 1.6, \lambda = 1.0, n = 35$	41
6.1	Histograma dos dados de tamanho de arquivos	98
6.2	Histograma dos dados de precipitação	100
6.3	Histograma dos dados de consumo aparente de petróleo	103

Lista de Tabelas

5.1	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	28
5.2	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	29
5.3	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	30
5.4	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	33
5.5	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	34
5.6	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	35
5.7	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	38
5.8	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	39
5.9	Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	40
5.10	Medida de desempenho global dos estimadores de α	42
5.11	Medida de desempenho global dos estimadores de λ	42
5.12	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	43
5.13	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	44
5.14	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	45
5.15	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	46
5.16	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	47
5.17	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	48
5.18	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	49
5.19	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	50
5.20	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	52
5.21	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	53
5.22	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	54
5.23	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	55
5.24	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	56
5.25	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	57
5.26	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	58

5.27	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$	59
5.28	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	61
5.29	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	62
5.30	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	63
5.31	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	64
5.32	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	65
5.33	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	66
5.34	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	67
5.35	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	68
5.36	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	70
5.37	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	71
5.38	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	72
5.39	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	73
5.40	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	74
5.41	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	75
5.42	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	76
5.43	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$	77
5.44	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	79
5.45	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	80
5.46	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	81
5.47	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	82
5.48	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	83
5.49	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	84
5.50	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	85
5.51	Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	86
5.52	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	89
5.53	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	90
5.54	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	91
5.55	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	92
5.56	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	93
5.57	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	94
5.58	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	95
5.59	Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$	96
6.1	Medidas resumo; dados de tamanho de arquivos	97
6.2	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de tamanho de arquivos	98
6.3	Estimativas intervalares; dados de tamanho de arquivos	99
6.4	Medidas resumo; dados de precipitação	99
6.5	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de precipitação	100
6.6	Estimativas intervalares; dados de precipitação	101
6.7	Medidas resumo; dados de consumo de petróleo	102

6.8	Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de consumo de petróleo	102
6.9	Estimativas intervalares; dados de consumo de petróleo	103

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Introdução

A distribuição Lomax de parâmetros α e λ , inicialmente utilizada para modelar dados de insucesso empresarial, vem sendo usada também nas ciências biológicas, na modelagem de confiabilidade e em problemas de fila. A estimação dos parâmetros que indexam a distribuição é tipicamente feita por máxima verossimilhança. Contudo, estes estimadores podem ser bastante viesados quando o tamanho amostral é pequeno ou até mesmo moderado. Assim, é desejável a obtenção de estimadores com viés reduzido, ou seja, mais precisos em pequenas amostras.

O estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança em amostras finitas é uma importante área de pesquisa, em particular, a análise do viés destes estimadores, o qual mede a distância média entre o estimador e o verdadeiro valor do parâmetro. Frequentemente, o viés é utilizado para avaliar a “qualidade” de um estimador. Em grandes amostras esse viés não é problemático, pois em geral é de ordem $O(n^{-1})$, enquanto o respectivo erro-padrão é de ordem $O(n^{-1/2})$, em que n é o tamanho amostral. Todavia, em pequenas amostras a existência de viés pode ser problemática. A utilização de expressões que permitam a redução do viés tipicamente conduz a estimadores mais precisos do que os estimadores não corrigidos. Além do viés, o erro quadrático médio (EQM) também pode ser utilizado para avaliar a “qualidade” de um estimador $\hat{\theta}$ de θ . O EQM de $\hat{\theta}$ é dado por $\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$, e pode ser visto como sendo uma medida de dispersão de $\hat{\theta}$ em torno de θ , assim como a variância de uma variável aleatória mede a dispersão desta variável em torno de sua média.

Há, na literatura, uma grande quantidade de trabalhos que utilizam os diferentes métodos de correção de viés. Cox e Snell (1968) obtiveram uma expressão geral para o viés de primeira ordem dos estimadores de máxima verossimilhança, supondo amostras de observações independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas. Firth (1993) desenvolveu um método de correção sistemática a partir da modificação da função escore. Cordeiro e Klein (1994) apresentaram uma forma matricial para a expressão do viés de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança e a usaram na classe de modelos ARMA.

Cordeiro e Vasconcellos (1997) apresentaram uma fórmula geral para calcular o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança em uma ampla classe de modelos multivariados normais não-lineares. Cribari-Neto e Vasconcellos (2002) analisaram o comportamento, em amostras finitas, de três procedimentos alternativos para corrigir o viés de ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança da distribuição beta. Os autores concluíram que os dois métodos analíticos utilizados apresentaram melhor desempenho que o método numérico. Lemonte *et al.* (2007) estudaram o comportamento de cinco métodos de correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança da distribuição Birnbaum-Saunders.

Giles *et al.* (2011) analisaram o comportamento do viés dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax, com a utilização de correção baseada na expressão de uso geral dada por Cox e Snell (1968) e de correção baseada no método bootstrap. Um dos objetivos deste presente trabalho é analisar o comportamento do viés dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax fazendo uso das mesmas correções utilizadas por Giles *et al.* (2011), além de apresentar mais três correções, uma de forma analítica, baseada no método de David Firth (1993), e mais duas baseadas no método de bootstrap.

Além da obtenção de estimativas pontuais dos parâmetros também é desejável associar um grau de confiabilidade a estas estimativas. Para tanto, estimativas intervalares dos parâmetros são utilizadas. Intervalos de confiança podem ser obtidos através da distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, sendo que tais intervalos são necessariamente simétricos. O método bootstrap também pode ser utilizado para a construção de intervalos de confiança. Na presente dissertação, além de se analisar o comportamento de estimadores corrigidos também será considerada a estimação intervalar dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax através da construção de intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil e bootstrap BCa.

1.2 Organização da Dissertação

A presente dissertação está dividida em sete capítulos, incluindo esta introdução, e contém um apêndice. No segundo capítulo a distribuição Lomax é introduzida, apresentando suas principais características e propriedades, bem como uma breve apresentação da estimação pontual e testes de hipótese sobre os parâmetros. No terceiro capítulo, são apresentadas as correções de viés de Cox e Snell (1968), David Firth (1993) e o emprego do método bootstrap. Neste capítulo são fornecidas expressões para os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α e λ . Através da análise de viés, obtemos estimadores de máxima verossimilhança corrigidos por viés para os parâmetros que indexam a distribuição Lomax. No quarto capítulo é apresentado o emprego do método bootstrap para obtenção de estimativas intervalares dos parâmetros da lei Lomax. No quinto capítulo, com base em simulações de Monte Carlo para a distribuição Lomax, são investigados os comportamentos dos estimadores de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas. Também são analisadas as diferentes estimativas intervalares dos parâmetros desta distribuição. No sexto capítulo são apresentadas três aplicações a dados reais da metodologia utilizada. Por fim, no Capítulo 7, são expostas as principais conclusões do presente estudo.

1.3 Suporte Computacional

A plataforma computacional utilizada no desenvolvimento desta dissertação é composta pelas linguagens de programação Ox, R e \LaTeX .

A linguagem matricial de programação Ox (versão 6.21) para os sistemas operacionais Windows e Linux foi utilizada para realizar as avaliações numéricas apresentadas neste texto. Esta linguagem foi desenvolvida por Jurgen Doornik com base na linguagem de programação C

e está disponível gratuitamente para uso acadêmico em <http://www.doornik.com>. Para mais informações sobre a linguagem de programação Ox, ver Doornik (2009).

Os gráficos do presente trabalho foram produzidos no ambiente de programação R (versão 2.14.0) para o sistema operacional Windows. R é um sistema integrado para computação estatística e geração de gráficos que pode ser obtido gratuitamente em <http://www.r-project.org>. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Ihaka & Gentleman (1996), Cribari-Neto & Zarkos (1999) e Venables *et al.* (2009).

A presente dissertação foi digitada utilizando o sistema tipográfico L^AT_EX (Lamport, 1986), que consiste em uma série de macros e rotinas baseadas no sistema T_EX, criado por Donald Knuth, que facilitam a edição do texto. Particularmente, este volume foi tipografado na classe UFPETthesis, desenvolvida por Paulo G. S. da Fonseca e disponível em <http://www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis>.

1.4 Estimadores de Máxima Verossimilhança

Esta seção trata da estimação pontual de parâmetros associados a uma lei de probabilidade qualquer. Para tanto, o método da máxima verossimilhança será apresentado.

Seja $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ uma amostra aleatória de uma variável Y , representada pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, sendo Ω o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, \mathcal{A} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e \mathcal{P} uma medida de probabilidade definida nos elementos de \mathcal{A} . Suponha que uma função de probabilidade ou densidade $f(y; \theta)$ caracterize Y , e seja $f(y; \theta)$ conhecida, porém, envolvendo um vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ de parâmetros desconhecidos. A função $f(y; \theta)$ define uma família \mathcal{F} de distribuições de probabilidade. Por fim, seja $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ o espaço paramétrico representando o conjunto dos valores possíveis do vetor θ .

A função de verossimilhança, $L(\theta)$, é definida como sendo igual à função de probabilidade $f(y; \theta)$, embora tenha uma interpretação diferente, como função de θ para y conhecido. Logo, a função de verossimilhança baseada na observação $Y = y$ é dada por

$$L(\theta) \equiv L(\theta; y) = f(y; \theta), \quad \theta \in \Theta, \quad \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Quando as componentes de Y são mutuamente independentes para todas as distribuições em \mathcal{F} , o que ocorre frequentemente, a função de verossimilhança de θ pode ser escrita como

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_i(y_i; \theta),$$

em que f_i corresponde à densidade individual da i -ésima observação. Dada a função $L(\theta)$, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de θ é o valor que maximiza $L(\theta)$ em Θ . Formalmente, o estimador de máxima verossimilhança é definido como

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta)$$

Como a função logaritmo é monotona crescente, maximizar a função de verossimilhança ou o logaritmo da função de verossimilhança em Θ são processos equivalentes. Logo, é conveniente

trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, isto é,

$$\ell(\theta) \equiv \ell(\theta; y) = \log[L(\theta)] = \sum_{i=1}^n \log[f_i(y_i; \theta)].$$

A função escore $U(\theta) = (U_1(\theta), \dots, U_p(\theta))^T$ é definida como

$$U_r(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_r}, \quad r = 1, \dots, p,$$

ou seja,

$$U(\theta) = \nabla_{\theta} \ell(\theta),$$

em que $\nabla_{\theta} = (\partial/\partial \theta_1, \dots, \partial/\partial \theta_p)^T$ é o operador gradiente. A função escore descreve como a função de log-verossimilhança varia em Θ .

Seja $J(\theta) = -\partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta \partial \theta^T$ o negativo da matriz hessiana da função de log-verossimilhança; $J(\theta)$ é chamada de matriz de informação observada [Fisher (1925)]. Sob condições gerais de regularidade [ver Lehmann (1999) e Cordeiro (1999)] tem-se que

$$K(\theta) = \mathbb{E}_{\theta}[U(\theta)U(\theta)^T] = \mathbb{E}_{\theta}[J(\theta)],$$

em que o subscrito θ indica que a esperança matemática é calculada supondo que θ é o verdadeiro valor do parâmetro. A matriz $K(\theta)$ é chamada de matriz de informação (esperada) de Fisher de θ .

Sob condições gerais de regularidade, $\ell(\theta)$ é diferenciável em θ , $\hat{\theta}$ existe e satisfaz a equação de verossimilhança

$$U(\hat{\theta}) = \nabla_{\theta} \ell(\hat{\theta}) = 0. \quad (1.1)$$

Adicionalmente,

$$\ell(\hat{\theta}) \geq \ell(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

A equação de verossimilhança (1.1) pode ser expressa como

$$\sum_{i=1}^n \nabla_{\theta} \log\{f(y_i; \hat{\theta})\} = 0. \quad (1.2)$$

Lehmann & Casela (1998) mostram que, sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, obtido como raiz única da equação (1.2), apresenta as seguintes propriedades:

- É consistente;
- É assintoticamente eficiente, isto é, dentre todos os estimadores consistentes de θ , o estimador de máxima verossimilhança possui variância assintótica mínima;
- É invariante sob transformações biunívocas, isto é, se $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ e g é uma função bijetora de θ , então $g(\hat{\theta})$ é o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$;
- É distribuído assintoticamente como uma variável aleatória normal p -variada da forma: $\hat{\theta} \sim N_p(\theta, K(\theta)^{-1})$;
- É, em geral, viesado, embora seja assintoticamente não-viesado.

1.5 Intervalos de Confiança Assintóticos

Seja $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança de θ . Sob condições de regularidade,

$$n^{1/2}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N_p(0, K(\theta)^{-1}), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

De (1.3) tem-se que

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_r - \theta_r) \xrightarrow{D} N(0, K(\theta)^{rr}), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

em que $\hat{\theta}_r$ e θ_r são os r -ésimos elementos dos vetores $\hat{\theta}$ e θ , respectivamente, e $K(\theta)^{rr}$ é o elemento (r, r) da matriz $K(\theta)^{-1}$. É simples mostrar que

$$n^{1/2} \frac{(\hat{\theta}_r - \theta_r)}{[K(\theta)^{rr}]^{1/2}} \xrightarrow{D} N(0, 1), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, a quantidade

$$T = n^{1/2} \frac{(\hat{\theta}_r - \theta_r)}{[K(\theta)^{rr}]^{1/2}} \quad (1.4)$$

é assintoticamente pivotal, pois sua distribuição assintótica não depende de parâmetros desconhecidos. Tem-se, assim, que

$$P(T < z_\gamma) \approx \gamma \text{ e } P(T > z_{1-\gamma}) \approx \gamma,$$

o que implica

$$P(z_\gamma \leq T \leq z_{1-\gamma}) \approx 1 - 2\gamma, \quad (1.5)$$

em que z_γ e $z_{1-\gamma}$ são os percentis γ e $(1 - \gamma)$ da distribuição normal padrão, com $0 < \gamma < 0.5$. Substituindo (1.4) em (1.5), tem-se

$$P \left\{ z_\gamma \leq n^{1/2} \frac{\hat{\theta}_r - \theta_r}{[K(\theta)^{rr}]^{1/2}} \leq z_{1-\gamma} \right\} \approx 1 - 2\gamma.$$

Isolando o parâmetro θ_r na desigualdade, tem-se que

$$P \left\{ \hat{\theta}_r - z_{1-\gamma} n^{-1/2} [K(\theta)^{rr}]^{1/2} \leq \theta_r \leq \hat{\theta}_r - z_\gamma n^{-1/2} [K(\theta)^{rr}]^{1/2} \right\} \approx 1 - 2\gamma.$$

Como o valor de θ não é conhecido, avaliamos a matriz de informação no estimador $\hat{\theta}$, obtendo valores para $[K(\hat{\theta})^{rr}]^{1/2}$, $1 \leq r \leq p$. Desta maneira, o intervalo

$$\left(\hat{\theta}_r - z_{1-\gamma} n^{-1/2} [K(\hat{\theta})^{rr}]^{1/2}, \hat{\theta}_r - z_\gamma n^{-1/2} [K(\hat{\theta})^{rr}]^{1/2} \right)$$

é chamado de intervalo de confiança assintótico para θ_r com probabilidade de cobertura aproximadamente $1 - 2\gamma$, ou de nível de confiança de aproximadamente $100(1 - 2\gamma)\%$. Como a

função de densidade de uma variável aleatória normal padrão é simétrica em torno de zero, $z_{1-\gamma} = -z_\gamma$. Logo, os limites deste intervalo de confiança podem ser expressos como

$$\hat{\theta}_r - z_{1-\gamma} n^{-1/2} [K(\hat{\theta})^{rr}]^{1/2} \text{ e } \hat{\theta}_r + z_{1-\gamma} n^{-1/2} [K(\hat{\theta})^{rr}]^{1/2}.$$

Este intervalo pode ser bastante impreciso na prática, pois a quantidade T pode apresentar, em amostras finitas, distribuição assimétrica ou ser viesada com relação ao vetor nulo. Portanto, a probabilidade de cobertura do intervalo assintótico pode ser bastante diferente do valor nominal, pois este intervalo é, por construção, simétrico em torno de $\hat{\theta}_r$. Outra desvantagem deste método de construção de intervalo de confiança é a possibilidade do intervalo produzido abranger valores que não pertencem ao espaço paramétrico.

Distribuição Lomax

2.1 Introdução

A distribuição Lomax foi proposta por Lomax (1954) para modelar dados de insucesso empresarial. Conhecida também como distribuição Pareto II, ela pertence à classe de distribuições de taxa decrescente de falha; ver Chahkandi e Ganjali (2009). Além de ser utilizada para modelar dados de insucesso empresarial a distribuição Lomax também foi utilizada em outras áreas de conhecimento por diferentes autores. Harris (1968) utilizou esta distribuição em problemas de fila e Atkinson e Harrison (1978) a utilizaram para modelar dados de renda e de distribuição de riqueza. Bryson (1974) sugeriu sua utilização como mais uma alternativa, juntamente com as distribuições exponencial, Weibull, gama e lognormal, para a modelagem de distribuições de vida em que se supõe que os dados seguem distribuições de caudas pesadas. Balakrishnan e Ahsanullah (1994) obtiveram relações dos momentos da distribuição Lomax.

Há a utilização da distribuição Lomax na inferência bayesiana, como em Abd-Elfattah *et al.* (2007) que derivaram os estimadores bayesianos e não-bayesianos em distribuições de vida, utilizando a distribuição Lomax para a modelagem, quando as amostras apresentam censura do tipo-I. Os limites de previsão bayesianos para certa estatística de ordem da distribuição Lomax foram obtidos por Abd-Allah (2003) e Howladera e Hossainb (2002) obtiveram estimativa de sobrevivência bayesiana para dados censurados de falha da distribuição Lomax.

Extensões multivariadas da distribuição Lomax foram estudadas por Nayak (1987), que estudou algumas propriedades e utilidade desta distribuição em teoria de confiabilidade. Roy e Gupta (1996) apresentaram uma determinação única da distribuição Lomax bivariada através de resultados de caracterização, Petropoulos e Kourouklis (2004) trabalharam com a estimação dos quantis extremos da distribuição Lomax multivariada e Nadarajah (2005) apresentaram cinco distribuições Pareto-exponenciais, dentre elas a distribuição Lomax, e derivaram algumas propriedades destas distribuições. Mais recentemente, Holland *et al.* (2006) utilizaram a distribuição Lomax para modelar tamanhos de arquivos em computadores utilizados como servidores, Corbelini *et al.* (2007) ajustaram a distribuição Lomax em dados de tamanho de empresas, Ghitany *et al.* (2007) analisaram as propriedades de uma nova distribuição paramétrica gerada por Marshall e Olkin (1997) estendendo a família de distribuições aplicado ao modelo Lomax, Hassan e Al-Ghamdi (2009) utilizaram a distribuição Lomax para determinar o tempo ótimo de mudar o nível para os planos de estresse simples em um modelo de exposição cumulativa e Giles *et al.* (2011) analisaram os vieses dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax através de dois métodos de correção.

2.2 Distribuição Lomax

A função densidade de uma variável aleatória Y que segue distribuição Pareto I bi-paramétrica é dada por

$$f(y; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{y^{\alpha+1}}, \quad y > \lambda,$$

em que $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$. Assim como a distribuição Lomax, esta distribuição também é comumente utilizada para modelar a riqueza e a renda de uma população.

Uma variável aleatória Y é dita seguir distribuição Lomax com parâmetros α e λ se a sua função de densidade é dada por

$$f(y; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)^{-(1+\alpha)} = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(y + \lambda)^{\alpha+1}}, \quad y > 0, \quad (2.1)$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma e $\lambda > 0$ é o parâmetro de escala. É de fácil observação que se Y segue distribuição Lomax, então $Y + \lambda$ segue distribuição Pareto I, ou seja, é possível obter a distribuição Lomax a partir de uma translação da distribuição Pareto I bi-paramétrica.

Para a obtenção dos momentos da distribuição Lomax faz-se necessária a utilização da integral 3.241 número 4 de Gradshteyn and Ryzhik (2007). Com isso o r -ésimo momento é

$$\mathbb{E}(Y^r) = \frac{\alpha \lambda^r \Gamma(r+1) \Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \alpha > r, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

Logo, a média e a variância de Y são, respectivamente,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1,$$

$$\text{var}(Y) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2.$$

O coeficiente de assimetria da distribuição Lomax é dado por

$$\gamma_1 = \frac{2(1 + \alpha)}{\alpha - 3} \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \alpha > 3.$$

Respeitando a condição de existência, $\alpha > 3$, a distribuição Lomax é sempre assimétrica à direita, independentemente dos valores dos parâmetros. O coeficiente de excesso de curtose da distribuição Lomax é

$$\gamma_2 = \frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha - 3)(\alpha - 4)}, \quad \alpha > 4.$$

Respeitando a condição de existência, $\alpha > 4$, a distribuição Lomax é leptocúrtica, independentemente dos valores dos parâmetros.

Além da função densidade há outras formas de se caracterizar as distribuições de probabilidade. Para tanto, pode-se utilizar a função geratriz de momentos ou a função de distribuição;

vale notar que nem todas as distribuições de probabilidade possuem função geratriz de momentos. A função geratriz de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \alpha(-t\lambda)^\alpha e^{(-t\lambda)} \Gamma(-\alpha, -t\lambda), \quad t \leq 0,$$

em que $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$. $M_Y(t)$ é chamada de função geratriz de momentos, pois todos os momentos de Y podem ser obtidos por sucessivas diferenciações de $M_Y(t)$, ou seja

$$\mathbb{E}(Y^r) = \left. \frac{\partial^r M_Y(t)}{\partial t^r} \right|_{t=0}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

A função de distribuição de Y é dada por

$$F(y; \alpha, \lambda) = 1 - \left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Com ela pode-se obter qualquer quantil distribucional. Em particular, os três quartis são, respectivamente,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lambda \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{(1/\alpha)} - 1 \right], \\ Q_2 &= \lambda \left[2^{(1/\alpha)} - 1 \right], \\ Q_3 &= \lambda \left[4^{(1/\alpha)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Para gerar números aleatórios da distribuição Lomax pode-se utilizar o método da inversão. Se Y é uma variável aleatória com função de distribuição $G(y)$, então a variável aleatória $U = G(Y)$ é uniformemente distribuída em $(0, 1)$. Consequentemente, pode-se obter ocorrências de Y gerando-se números aleatórios da distribuição uniforme $(0, 1)$ e calculando $y = G^{-1}(u)$. Segue então que para a distribuição Lomax as ocorrências são obtidas através de

$$y = F^{-1}(u; \alpha, \lambda) = \lambda \left[u^{(-1/\alpha)} - 1 \right].$$

Vale ressaltar que se U é uniformemente distribuído em $(0, 1)$, então $1 - U$ também será uniformemente distribuído em $(0, 1)$.

Na Figura 2.1 encontram-se algumas densidades Lomax juntamente com os correspondentes valores de (α, λ) .

2.3 Aspectos Inferenciais

Sejam y_1, \dots, y_n variáveis aleatórias independentes, em que cada y_t , $t = 1, \dots, n$, segue a distribuição dada em (2.1). A estimação conjunta dos parâmetros pode ser realizada utilizando o método da máxima verossimilhança. Para isso, usa-se a função de log-verossimilhança baseada em uma amostra de n observações independentes. A função de log-verossimilhança é dada por

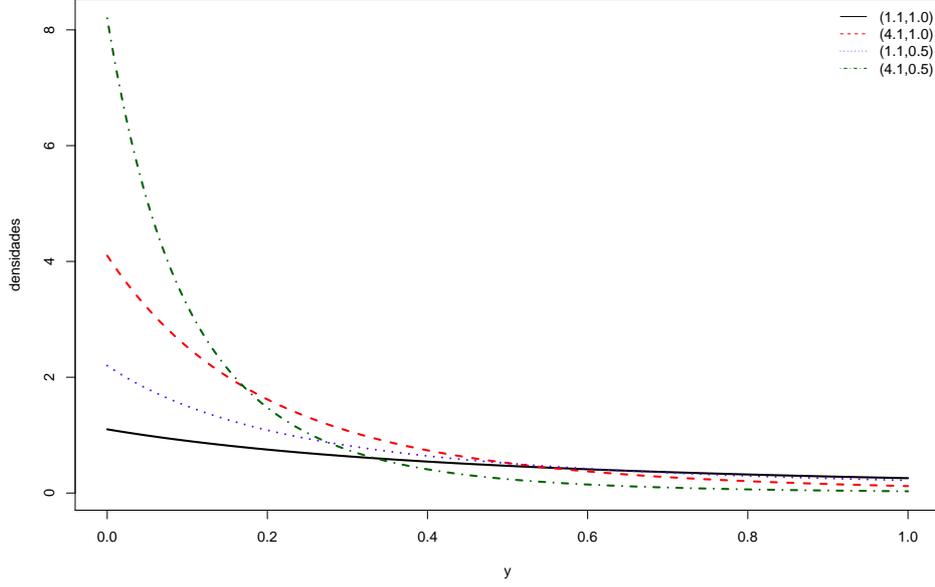


Figura 2.1 Densidades Lomax com diferentes valores para (α, λ) .

$$\ell(\alpha, \lambda) = n \log(\alpha) - n \log(\lambda) - (1 + \alpha) \sum_{t=1}^n \log\left(1 + \frac{y_t}{\lambda}\right). \quad (2.3)$$

A função escore, obtida pela diferenciação da função de log-verossimilhança com respeito aos parâmetros desconhecidos, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{t=1}^n \log\left(1 + \frac{y_t}{\lambda}\right), \\ \frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= -\frac{n}{\lambda} + \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{\lambda + y_t}\right). \end{aligned}$$

Não é possível expressar os estimadores de máxima verossimilhança em forma fechada. Portanto, faz-se necessário o uso de algoritmos de otimização não-linear (Newton, Quasi-Newton, etc.) para se obter as estimativas de máxima verossimilhança; para detalhes sobre otimização não-linear, ver Nocedal e Wright (1999).

A matriz hessiana (de segundas derivadas) é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\alpha^2} & \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{\lambda + y_t}\right) \\ \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{\lambda + y_t}\right) & \frac{n}{\lambda^2} - \frac{1 + \alpha}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{\lambda + y_t}\right) - \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{y_t}{(\lambda + y_t)^2}\right] \end{pmatrix}.$$

A matriz de informação de Fisher é (ver Apêndice A)

$$K = K(\alpha, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\alpha^2} & -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)} \\ -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)} & \frac{n\alpha}{\lambda^2(\alpha+2)} \end{pmatrix}.$$

Sejam $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ os estimadores de máxima verossimilhança de α e λ , respectivamente. Sob condições de regularidade e quando a amostra é grande, tem-se que, de forma aproximada,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix}, K^{-1} \right). \quad (2.4)$$

A matriz K^{-1} , avaliada em $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$, é utilizada para se obter erros-padrão assintóticos para os estimadores de máxima verossimilhança. Embora $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ sejam assintoticamente não-viciados, em pequenas amostras eles tipicamente apresentam viés, ou seja, apresentam erro sistemático.

Após a estimação dos parâmetros tipicamente são realizados teste de hipóteses e são calculados intervalos de confiança para os parâmetros. É possível construir testes e estimadores intervalares a partir da distribuição assintótica das estimativas dos parâmetros dadas em (2.4).

Considere o teste da hipótese nula $H_0 : \theta_i = \theta_i^{(0)}$ versus $H_1 : \theta_i \neq \theta_i^{(0)}$, em que $\theta = (\alpha, \lambda)^\top$, com $i = 1, 2$ e $\theta_i^{(0)}$ conhecido. A estatística de teste Wald é

$$\tau = \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i^{(0)}}{\text{ep}(\hat{\theta}_i)},$$

em que $\hat{\theta}_i$ é a estimativa de verossimilhança de θ_i e $\text{ep}(\hat{\theta}_i)$ é seu erro-padrão assintótico. Os valores críticos para o teste são obtidos da distribuição $N(0, 1)$, uma vez que, sob H_0 , $\tau \xrightarrow{D} N(0, 1)$, em que \xrightarrow{D} denota convergência em distribuição.

A estatística de teste da razão de verossimilhanças é

$$\tau_{RV} = 2[\ell(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) - \ell(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})],$$

em que $\ell(\alpha, \lambda)$ é a função de log-verossimilhança e $(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})^\top$ é o estimador de máxima verossimilhança *restrito* de $(\alpha, \lambda)^\top$, que é calculado sob a hipótese nula.

A estatística escore é dada por

$$\tau_E = \tilde{U}^\top \tilde{K}^{-1} \tilde{U}.$$

Para o teste $H_0 : \theta_1 = \theta_1^{(0)}$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}$ a estatística de teste é

$$\tau_E = \tilde{U}_1^\top \tilde{K}^{11} \tilde{U}_1 = \left[\frac{n}{\tilde{\alpha}} - \sum_{t=1}^n \log \left(1 + \frac{y_t}{\tilde{\lambda}} \right) \right]^2 [\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1)]^2$$

enquanto que para o teste $H_0 : \theta_2 = \theta_2^{(0)}$ versus $H_1 : \theta_2 \neq \theta_2^{(0)}$ a estatística de teste é

$$\tau_E = \tilde{U}_2^\top \tilde{K}^{22} \tilde{U}_2 = \left[-\frac{n}{\tilde{\lambda}} + \frac{1 + \tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{\tilde{\lambda} + y_t} \right) \right]^2 \left[\frac{\tilde{\lambda}^2 (\tilde{\alpha} + 1)^2 (\tilde{\alpha} + 2)}{\tilde{\alpha}} \right],$$

em que U_i é o vetor escore referente a restrição sob H_0 e K^{ii} é o elemento (i, i) da matriz K^{-1} . Nas expressões acima, til indica avaliação nas estimativas restritas.

Sob certas condições de regularidade e sob H_0 , $\tau_{RV} \xrightarrow{D} \chi_m^2$ e $\tau_E \xrightarrow{D} \chi_m^2$, em que m é o número de restrições impostas pela hipótese nula. Os testes podem assim ser realizados com base em valores críticos oriundos da distribuição χ_m^2 . No caso do teste de $H_0 : \theta_i = \theta_i^{(0)}$, temos que $m = 1$.

O intervalo de confiança assintótico de cobertura $(1 - \gamma)$, $0 < \gamma < 1/2$, para θ_i , $i = 1, 2$, é dado por

$$\hat{\theta}_i \pm \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \text{ep}(\hat{\theta}_i),$$

em que $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função quantil normal padrão.

Correção de Viés

3.1 Introdução

O foco do presente capítulo é a correção de viés de estimadores de máxima verossimilhança. O estimador de máxima verossimilhança é tipicamente viesado, conduzindo assim a erros inferenciais sistemáticos que podem ser pronunciados em pequenas amostras. Serão apresentados a seguir quatro métodos para a redução do viés do estimador de máxima verossimilhança: a correção de Cox e Snell, a correção de David Firth e dois métodos de correção via bootstrap. A utilização do método bootstrap constitui uma alternativa atraente, pois evita a realização de difíceis cálculos analíticos. O método bootstrap pode ser utilizado na estimação de qualquer quantidade de interesse da inferência estatística, porém, é necessária a implementação de um procedimento computacional intensivo para seu uso.

As estimativas obtidas pelo método da máxima verossimilhança são consistentes, ou seja, convergem em probabilidade para os verdadeiros valores dos parâmetros, mas, tipicamente, em pequenos tamanhos amostrais os estimadores são viesados, como notado acima. Em grandes amostras esse viés não é problemático, pois em geral é de ordem $O(n^{-1})$, enquanto o respectivo erro-padrão é de ordem $O(n^{-1/2})$. A correção do viés dos estimadores de máxima verossimilhança pelo viés de ordem $O(n^{-1})$ pode melhorar as estimativas, principalmente em pequenas amostras.

Antes de apresentar as correções de viés é necessário definir a notação utilizada para alguns cumulantes e derivadas da função de log-verossimilhança. Para isso, a notação de Lawley (1956) será utilizada. Considere que $\ell(\theta_1, \dots, \theta_p)$ é o logaritmo da função de verossimilhança com relação ao vetor de parâmetros desconhecidos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$. As derivadas da função de log-verossimilhança são denotadas por $U_r = \frac{\partial \ell(\theta_1, \dots, \theta_p)}{\partial \theta_r}$, $U_{rt} = \frac{\partial^2 \ell(\theta_1, \dots, \theta_p)}{\partial \theta_r \partial \theta_t}$ e assim sucessivamente. Para os cumulantes a notação utilizada é $\kappa_{rt} = \mathbf{IE}(U_{rt})$, $\kappa_{rts} = \mathbf{IE}(U_{rts})$, $\kappa_{rt,s} = \mathbf{IE}(U_{rt}U_s)$, e assim por diante. As derivadas dos cumulantes são $\kappa_{rt}^{(l)} = \frac{\partial \kappa_{rt}}{\partial \theta_l}$. Aqui r, t, \dots indexam as componentes de θ .

O nosso interesse nas seções seguintes residirá, especificamente, na obtenção de estimativas corrigidas por viés para os parâmetros que indexam a distribuição Lomax. Tais estimadores são úteis para uso em aplicações práticas que empregam poucas observações, ou seja, quando o tamanho de amostra é pequeno. O objetivo das correções a serem apresentadas é reduzir o erro sistemático inerente à estimação dos parâmetros da lei Lomax.

3.2 A Correção de Cox e Snell

Cox e Snell (1968) mostraram que para amostras de observações que são independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas, o viés do estimador de máxima verossimilhança de θ_i é dado por

$$B(\hat{\theta}_i) = \mathbb{E}(\hat{\theta}_i - \theta_i) = \sum_{r,s,t} \kappa^{ir} \kappa^{st} \left(\frac{\kappa_{rst}}{2} + \kappa_{rs,t} \right) + O(n^{-2}), \quad (3.1)$$

em que $i, r, s, t = 1, 2, \dots, p$, κ^{ir} sendo o elemento (i, r) da inversa da matriz de informação de Fisher, $K = (-\kappa_{ir})$.

Em decorrência da identidade de Bartlett, $\kappa_{rs,t} + \kappa_{rst} - \kappa_{rs}^{(t)} = 0$, a equação em (3.1) pode ser re-expressa substituindo o termo $\frac{1}{2} \kappa_{rst} + \kappa_{rs,t}$ por $\kappa_{rs}^{(t)} - \frac{1}{2} \kappa_{rst}$, o que conduz a

$$B(\hat{\theta}_i) = \sum_{r,s,t} \kappa^{ir} \kappa^{st} \left(\kappa_{rs}^{(t)} - \frac{\kappa_{rst}}{2} \right) + O(n^{-2}). \quad (3.2)$$

Geralmente é mais fácil calcular o viés expresso em (3.2) do que aquele expresso em (3.1), pois ele não requer o cálculo de $\kappa_{rt,s}$. A partir de (3.2) pode-se definir um estimador de máxima verossimilhança corrigido $\tilde{\theta}_i$ para o parâmetro θ_i da seguinte forma:

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \hat{B}(\hat{\theta}_i), \quad i = 1, \dots, p,$$

em que $\hat{B}(\hat{\theta}_i)$ é o viés dado em (3.2), exceto pelo termo de ordem $O(n^{-2})$, com os parâmetros avaliados nas suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança.

O estimador corrigido dado acima tem a seguinte propriedade:

$$\mathbb{E}(\tilde{\theta}_i) = \theta_i + O(n^{-2}).$$

Note que para o estimador ajustado temos que $\mathbb{E}(\hat{\theta}_i) = \theta_i + O(n^{-1})$. Assim, o viés do estimador corrigido decai mais rapidamente para zero.

O viés apresentado em (3.2) pode ser expresso em forma matricial. Para isso define-se $a_{rs}^{(t)} = \kappa_{rs}^{(t)} - \frac{\kappa_{rst}}{2}$, para todo $r, s, t = 1, 2, \dots, p$. Colocando esses valores em uma matriz temos que

$$A^{(t)} = \{a_{rs}^{(t)}\}, \quad r, s, t = 1, 2, \dots, p,$$

e assim

$$A = [A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(p)}]. \quad (3.3)$$

Com isso, o viés do estimador de máxima verossimilhança de θ pode ser re-escrito como

$$B(\hat{\theta}) = K^{-1} A \text{vec}(K^{-1}) + O(n^{-2}), \quad (3.4)$$

em que $\text{vec}(K^{-1})$ é um vetor $p^2 \times 1$ composto pelas colunas da matriz K^{-1} empilhadas. A forma matricial do viés dada em (3.4) foi obtida por Cordeiro e Klein (1994).

Assim, o estimador de máxima verossimilhança corrigido para θ pode ser obtido através de

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \hat{K}^{-1} \hat{A} \text{vec}(\hat{K}^{-1}),$$

em que o “chapéu” indica avaliação nas estimativas de máxima verossimilhança.

3.2.1 Correção de Cox e Snell para os estimadores de máxima verossimilhança na distribuição Lomax

Nesta seção será apresentada a expressão matricial da correção de viés de Cox e Snell para o estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax, que foi obtida por Giles *et al.* (2011). Para isso, é necessário calcular alguns cumulantes e suas derivadas no caso Lomax; para detalhes, ver o Apêndice A. Os cumulantes são

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\lambda\lambda} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right] = -\frac{n\alpha}{\lambda^2(\alpha+2)}, \\
 \kappa_{\alpha\lambda} = \kappa_{\lambda\alpha} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} \right] = \frac{n}{\lambda(\alpha+1)}, \\
 \kappa_{\alpha\alpha} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} \right] = -\frac{n}{\alpha^2}, \\
 \kappa_{\lambda\lambda\lambda} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^3} \right] = \frac{4n\alpha}{\lambda^3(\alpha+3)}, \\
 \kappa_{\alpha\lambda\lambda} = \kappa_{\lambda\alpha\lambda} = \kappa_{\lambda\lambda\alpha} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda^2} \right] = -\frac{2n}{\lambda^2(\alpha+2)}, \\
 \kappa_{\lambda\alpha\alpha} = \kappa_{\alpha\lambda\alpha} = \kappa_{\alpha\alpha\lambda} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha^2} \right] = 0, \\
 \kappa_{\alpha\alpha\alpha} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^3} \right] = \frac{2n}{\alpha^3}.
 \end{aligned}$$

As derivadas dos cumulantes são

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} &= \frac{\partial \kappa_{\lambda\lambda}}{\partial \lambda} = \frac{2n\alpha}{\lambda^3(\alpha+2)}, \\
 \kappa_{\alpha\lambda}^{(\lambda)} &= \frac{\partial \kappa_{\alpha\lambda}}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda^2(\alpha+1)}, \\
 \kappa_{\alpha\alpha}^{(\lambda)} &= \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \lambda} = 0, \\
 \kappa_{\lambda\lambda}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\lambda\lambda}}{\partial \alpha} = -\frac{2n}{\lambda^2(\alpha+2)^2}, \\
 \kappa_{\alpha\lambda}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\alpha\lambda}}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)^2}, \\
 \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{2n}{\alpha^3}.
 \end{aligned}$$

Com estas quantidades pode-se obter a matriz A dada em (3.3) e, consequentemente, é

possível expressar a correção de viés de Cox e Snell na sua forma matricial. Os elementos da matriz A são dados por

$$\begin{aligned} a_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} &= \kappa_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} - 0.5\kappa_{\lambda\lambda\lambda} &= \frac{2n\alpha}{\lambda^3(\alpha+2)(\alpha+3)}, \\ a_{\lambda\alpha}^{(\lambda)} &= \kappa_{\lambda\alpha}^{(\lambda)} - 0.5\kappa_{\lambda\alpha\lambda} &= -\frac{n}{\lambda^2(\alpha+1)(\alpha+2)}, \\ a_{\alpha\alpha}^{(\lambda)} &= \kappa_{\alpha\alpha}^{(\lambda)} - 0.5\kappa_{\alpha\alpha\lambda} &= 0, \\ a_{\lambda\lambda}^{(\alpha)} &= \kappa_{\lambda\lambda}^{(\alpha)} - 0.5\kappa_{\lambda\lambda\alpha} &= \frac{n\alpha}{\lambda^2(\alpha+2)^2}, \\ a_{\lambda\alpha}^{(\alpha)} &= \kappa_{\lambda\alpha}^{(\alpha)} - 0.5\kappa_{\lambda\alpha\alpha} &= -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)^2}, \\ a_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} &= \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - 0.5\kappa_{\alpha\alpha\alpha} &= \frac{n}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que

$$A = n \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^3} & -\frac{1}{\lambda(\alpha+1)^2} & 0 & -\frac{1}{\lambda^2(\alpha+1)(\alpha+2)} \\ -\frac{1}{\lambda(\alpha+1)^2} & \frac{1}{\lambda^2(\alpha+2)^2} & -\frac{1}{\lambda^2(\alpha+1)(\alpha+2)} & \frac{2\alpha}{\lambda^3(\alpha+2)(\alpha+3)} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

A matriz de informação de Fisher é dada por

$$K = \begin{pmatrix} \frac{n}{\alpha^2} & -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)} \\ -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)} & \frac{n\alpha}{\lambda^2(\alpha+2)} \end{pmatrix},$$

com estas duas matrizes chegamos, então, ao estimador de máxima verossimilhança corrigido dos parâmetros da distribuição Lomax:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} - \hat{K}^{-1} \hat{A} \text{vec}(\hat{K}^{-1}). \quad (3.6)$$

3.3 A Correção de Firth

Firth (1993) introduziu uma forma diferente de reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhança. Os métodos de correção de viés tipicamente possuem natureza “corretiva”, ou seja, primeiro se calcula o estimador $\hat{\theta}$ para depois corrigi-lo. Na prática, particularmente em amostras de tamanhos pequeno ou médio, não é incomum que $\hat{\theta}$ seja infinito. Em tais casos os estimadores corrigidos através desses métodos não podem ser obtidos.

Com esta motivação, Firth (1993) propôs um novo método para redução de viés que não depende de obtenção prévia de $\hat{\theta}$. Seu método é um método de correção sistemática desenvolvido a partir da função escore. Quando a função de log-verossimilhança depende de um único parâmetro, θ , a função escore modificada é

$$U^*(\theta) = U(\theta) - i(\theta)B(\theta), \quad (3.7)$$

em que $-i(\theta)$ é a informação observada e $B(\theta)$ é o viés de primeira ordem de $\hat{\theta}$. Quando θ é um vetor de parâmetros $i(\theta)$ é a matriz de informação observada, porém é mais comum utilizar a matriz de informação esperada, ou seja, a matriz de informação de Fisher, K . O estimador corrigido de θ , $\bar{\theta}$, é o valor de θ que resolve o sistema

$$U^*(\theta) = 0.$$

Se $\kappa_{r,st} = 0$, para todo r, s, t , a função escore modificada pode ser simplificada, ficando da seguinte forma:

$$U^*(\theta) = U(\theta) + \frac{1}{2} \log |K|.$$

Aqui, tem-se uma função de verossimilhança modificada:

$$L^*(\theta) = L(\theta)|K|^{\frac{1}{2}},$$

em que $L(\theta)$ é a função de verossimilhança e $|K|^{\frac{1}{2}}$ é a priori de Jeffreys (1946). Isso ocorre, e.g., quando se faz estimação dos parâmetros canônicos de modelos pertencentes à família exponencial. Neste caso, as estimativas corrigidas podem ser obtidas diretamente da maximização da função de log-verossimilhança modificada.

3.3.1 Correção de Firth para os estimadores de máxima verossimilhança na distribuição Lomax

Nesta seção será apresentada a correção de viés de Firth (1993) para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax. Não é possível utilizar a forma simplificada da função escore modificada, pois a condição $\kappa_{r,st} = 0$, para todo r, s, t , não é satisfeita. Logo, para modificar a função escore deve-se utilizar a equação apresentada em (3.7).

A matriz de informação de Fisher, K , e o vetor de viés $B(\alpha, \lambda)$ são dados, respectivamente, por

$$K = \begin{pmatrix} \frac{n}{\alpha^2} & -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)} \\ -\frac{n}{\lambda(\alpha+1)} & \frac{n\alpha}{\lambda^2(\alpha+2)} \end{pmatrix} \text{ e } B(\alpha, \lambda) = K^{-1}A \text{ vec}(K^{-1}),$$

com a matriz A apresentada em (3.5). A função escore modificada, dada em (3.7), para a distribuição Lomax é da forma

$$\begin{aligned} U^*(\alpha, \lambda) &= U(\alpha, \lambda) - KB(\alpha, \lambda) = U(\alpha, \lambda) - KK^{-1}A \text{ vec}(K^{-1}) \\ &= U(\alpha, \lambda) - A \text{ vec}(K^{-1}). \end{aligned}$$

Os estimadores corrigidos $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ são obtidos através da resolução do sistema $U^*(\alpha, \lambda) = 0$. Da mesma forma que o estimador de máxima verossimilhança este estimador não pode ser expresso em forma fechada, portanto, faz-se necessário o uso de algoritmos de otimização não-linear (Newton, Quasi-Newton, etc.) para sua obtenção.

3.4 Correções por Bootstrap

Outra forma de se obter estimativas para o viés é através do método de reamostragem bootstrap, proposto por Efron (1979). A ideia por trás deste método é obter um grande número de subamostras a partir da amostra original e então extrair informações destas subamostras que sejam de interesse da inferência a ser realizada. Pode-se classificar o método bootstrap em duas classes de acordo com a forma como é realizado o processo de reamostragem: paramétrico ou não-paramétrico.

Considere uma amostra aleatória $y = (y_1, \dots, y_n)$ de uma variável aleatória Y com função de distribuição $F = F(\theta)$. Aqui, θ é o parâmetro que indexa a distribuição e é visto como um funcional de F , isto é, $\theta = t(F)$. Seja $\hat{\theta} = s(y)$ um estimador de θ utilizando a amostra acima.

Na versão paramétrica do bootstrap, as amostras $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ são obtidas a partir de $F(\hat{\theta})$, ou seja, da estimativa paramétrica da função de distribuição de Y .

Caso não se queira fazer suposições a respeito da forma da distribuição, pode-se utilizar a versão não-paramétrica do método bootstrap. Aqui as amostras bootstrap (pseudo-amostras) são retiradas da distribuição empírica da amostra original, \hat{F} , dada por

$$\hat{F}(y) = \frac{\#\{y_i \leq y\}}{n}.$$

Gerar dados da função de distribuição empírica equivale a obter observações utilizando amostragem com reposição dos dados originais.

A partir das R amostras bootstrap, isto é, das amostras artificiais, obtêm-se R réplicas de $\hat{\theta}$, que são utilizadas para a construção da função de distribuição empírica do estimador de máxima verossimilhança. Com esta estimativa da distribuição de $\hat{\theta}$ é possível obter um erro padrão para $\hat{\theta}$, construir intervalos de confiança para θ e corrigir o viés do estimador $\hat{\theta}$. O foco desta seção reside na obtenção de uma estimativa do viés por bootstrap. Para isso, seja $B_F(\hat{\theta})$ o viés do estimador $\hat{\theta}$, definido como

$$B_F(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_F[s(y)] - t(F),$$

em que y é obtido da variável aleatória Y , que possui função de distribuição acumulada F .

As estimativas de viés bootstrap paramétrico e não-paramétrico são obtidas substituindo F , a distribuição que gerou a amostra original, por $F_{\hat{\theta}}$ e \hat{F} , respectivamente. Desta maneira, para estas duas formas de bootstrap, os vieses são dados por

$$B_{F_{\hat{\theta}}}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{F_{\hat{\theta}}}[s(y^*)] - t(F_{\hat{\theta}}) \text{ e } B_{\hat{F}}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{\hat{F}}[s(y^*)] - t(\hat{F}).$$

Através das R amostras bootstrap, y^{*1}, \dots, y^{*R} , é possível aproximar os valores esperados $\mathbb{E}_{F_{\hat{\theta}}}[s(y^*)]$ e $\mathbb{E}_{\hat{F}}[s(y^*)]$ a partir da média das estimativas bootstrap de θ , ou seja, a partir de

$$\hat{\theta}^{*(\cdot)} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{\theta}^{*i}.$$

Sendo assim, as estimativas de bootstrap paramétrico e não-paramétrico do viés são dadas por

$$B_{F_{\hat{\theta}}}(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - t(F_{\hat{\theta}}) \text{ e } B_{\hat{F}}(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - t(\hat{F}),$$

respectivamente. A partir destas estimativas é possível definir estimadores corrigidos:

$$\check{\theta}_1 = \hat{\theta} - B_{F_{\hat{\theta}}}(\hat{\theta}) = 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^{*(\cdot)},$$

$$\check{\theta}_2 = \hat{\theta} - B_{\hat{F}}(\hat{\theta}) = 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^{*(\cdot)}.$$

MacKinnon e Smith (1998) denominam $\check{\theta}_1$ e $\check{\theta}_2$ de estimativas CBC (“Constant Bias Correcting”). Os autores notam que estas estimativas foram projetadas para funcionar bem quando a função de viés $B(\theta)$ é constante, ou seja, não depende de θ . Eles consideram uma situação em que o viés é uma função linear de θ , isto é, $B(\theta) = a + c\theta$. Neste caso é necessário obter os coeficientes a e c . Para tanto, são necessários dois pontos que pertençam à reta definida pela função e com eles pode-se obter os valores de a e c .

Para a estimação dos coeficientes a e c pode-se utilizar o procedimento descrito a seguir. Obtém-se $\hat{\theta} = s(y)$ a partir da amostra observada y . Com o esquema de bootstrap paramétrico obtém-se a estimativa bootstrap do viés, denotada por \hat{B} . Tal estimativa é dada por $\hat{\theta}^{*(\cdot)} - \hat{\theta}$. Em um segundo esquema bootstrap paramétrico utiliza-se o estimador de $\hat{\theta}$ corrigido, denotado por $\check{\theta}$. Calcula-se, no segundo esquema bootstrap, a estimativa bootstrap do viés, denotada por \tilde{B} , que é dada por $\check{\theta}^{*(\cdot)} - \check{\theta}$, em que $\check{\theta}^{*(\cdot)}$ é a média das réplicas bootstrap do estimador $\check{\theta}$.

A partir das estimativas $\hat{\theta}$ e $\check{\theta}$ e dos respectivos vieses estimados, \hat{B} e \tilde{B} , resolve-se o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas, \hat{a} e \hat{c} :

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{a} + \hat{c}\hat{\theta} \\ \tilde{B} = \hat{a} + \hat{c}\check{\theta} \end{cases}.$$

A solução é

$$\hat{a} = \hat{B} - \frac{\hat{B} - \tilde{B}}{\hat{\theta} - \check{\theta}} \hat{\theta} \quad \text{e} \quad \hat{c} = \frac{\hat{B} - \tilde{B}}{\hat{\theta} - \check{\theta}}.$$

Os coeficientes \hat{a} e \hat{c} convergem para a e c , sob condições razoáveis, à medida que o número de réplicas bootstrap aumenta. Para se garantir precisão na estimação destas quantidades é necessário que seja utilizada a mesma seqüência de números aleatórios nas simulações realizadas para a obtenção dos dois vieses, \hat{B} e \tilde{B} , isto é, a mesma seqüência de números aleatórios deve ser utilizada na geração das amostras bootstrap nas réplicas bootstrap para a obtenção dos estimadores $\hat{\theta}$ e $\check{\theta}$.

O estimador corrigido, $\check{\theta}_3$, é a solução da equação $\check{\theta}_3 = \hat{\theta} - (\hat{a} + \hat{c}\check{\theta}_3)$, que é dada por

$$\check{\theta}_3 = \frac{1}{1 + \hat{c}}(\hat{\theta} - \hat{a}).$$

A vantagem das correções de viés realizadas através de esquemas de reamostragem de bootstrap é que elas não envolvem a derivação de vieses de segunda ordem. A desvantagem clara é que reamostragem via bootstrap é computacionalmente intensiva. Outra desvantagem é que a estimativa corrigida dependerá do número de réplicas (número de pseudo-amostras) e da seqüência de números pseudo-aleatórios utilizada no esquema de reamostragem.

Giles *et al.* (2011) consideram correção de viés para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax a partir do enfoque de Cox e Snell

(1968) e também via bootstrap. A correção bootstrap utilizada foi a CBC com reamostragem feita de forma paramétrica. Nosso objetivo na presente dissertação é considerar outros esquemas de correção de viés para os mesmos estimadores, a saber: a correção CBC não-paramétrica, a correção preventiva de David Firth e a correção linear bootstrap. Os méritos relativos das diferentes correções serão avaliados via simulação de Monte Carlo. Também abordamos estimação intervalar, como descrito no próximo capítulo.

Intervalo de Confiança

4.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados mecanismos de estimação intervalar para os parâmetros que indexam a distribuição Lomax. Tipicamente investigadores desejam associar um grau de confiabilidade a suas estimativas e, assim, recorrem a *estimação intervalar*. Um intervalo de confiança é um intervalo do tipo

$$[l_1(x), l_2(x)],$$

tal que, a probabilidade deste intervalo conter o parâmetro de interesse θ seja igual a um valor pré-fixado $1 - 2\gamma$, com $0 < \gamma < 0.5$, ou seja

$$\mathbb{P}[l_1(X) \leq \theta \leq l_2(X)] = 1 - 2\gamma, \quad (4.1)$$

em que $1 - 2\gamma$ é o nível de confiança do intervalo, ou seja, $1 - 2\gamma$ é a probabilidade de cobertura. Adicionalmente, $l_1(X) < l_2(X)$, ambos sendo estatísticas (i.e., não dependem de quantidades desconhecidas). Intervalos de confiança que satisfazem a condição acima, ou seja, com probabilidade de cobertura igual ao nível de confiança, são ditos exatos. Contudo, nem sempre é possível construir intervalos exatos e por isto intervalos aproximados são utilizados na prática, isto é,

$$\mathbb{P}[l_1(X) < \theta < l_2(X)] \approx 1 - 2\gamma.$$

Neste caso, além do intervalo, os limites $l_1(x)$ e $l_2(x)$ também são ditos aproximados. Por este motivo, é de fundamental importância buscar estimativas intervalares precisas, ou seja, intervalos de confiança aproximados com pequenos erros de cobertura.

O objetivo nas próximas seções será, especificamente, descrever como estimativas intervalares podem ser obtidas para os parâmetros que indexam a distribuição Lomax. Para tanto intervalos de confiança baseados em estimativas de máxima verossimilhança, e no método bootstrap serão utilizados. Enfoque usual, baseado na distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança, produz intervalos de confiança forçosamente simétricos e podem produzir intervalos com valores impróprios para os parâmetros. Intervalos baseados no método bootstrap nem sempre são simétricos e geralmente cobrem apenas valores próprios para os parâmetros. Para uma descrição completa e detalhada sobre a construção de intervalos de confiança bootstrap, ver Davison & Hinkley (1997) e Efron & Tibshirani (1993).

4.2 Intervalo Bootstrap Percentil

Através do método bootstrap, paramétrico ou não-paramétrico, são geradas amostras bootstrap (y^{*1}, \dots, y^{*R}) e a partir delas obtêm-se as réplicas bootstrap de $\hat{\theta}$: $\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*R}$. Seja \hat{G} a função de distribuição empírica de $\hat{\theta}$ obtida através das R réplicas bootstrap. A partir dos percentis $\gamma/2$ e $1 - \gamma/2$ de \hat{G} é possível construir o intervalo de confiança percentil com nível aproximado de cobertura $1 - \gamma$, da forma

$$(\hat{G}^{-1}(\gamma/2), \hat{G}^{-1}(1 - \gamma/2)). \quad (4.2)$$

Por definição $\hat{G}^{-1}(\gamma/2) = \hat{\theta}^{*(\gamma/2)}$ e $\hat{G}^{-1}(1 - \gamma/2) = \hat{\theta}^{*(1-\gamma/2)}$. Logo, o intervalo percentil pode ser escrito como

$$(\hat{\theta}^{*(\gamma)}, \hat{\theta}^{*(1-\gamma)}). \quad (4.3)$$

O intervalo em (4.2) e (4.3) pode ser obtido como descrito a seguir. Gera-se R amostras bootstrap y^{*1}, \dots, y^{*R} e calcula-se as respectivas estimativas $\hat{\theta}^{*r} = s(y^{*r})$, $r = 1, \dots, R$. Em seguida, ordenamos as R réplicas de $\hat{\theta}$ e, a partir delas, obtêm-se os limites inferior e superior do intervalo percentil, que são as réplicas $R \times (\gamma/2)$ e $R \times (1 - \gamma/2)$, respectivamente, contanto que $R \times (\gamma/2)$ e $R \times (1 - \gamma/2)$ sejam inteiros. Se $R \times (\gamma/2)$ e $R \times (1 - \gamma/2)$ não forem inteiros o seguinte procedimento pode ser utilizado: assumindo que $0 < \gamma < 0.5$, seja $k = \lfloor (R+1) \times \gamma/2 \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a $(R+1) \times \gamma/2$; então, os limites inferior e superior do intervalo percentil serão o k -ésimo e o $(R+1-k)$ -ésimo elementos ordenados das R réplicas bootstrap, respectivamente.

O intervalo percentil dado em (4.2) garante a não inclusão de valores impróprios para o parâmetro de interesse no intervalo de confiança. Note também que este intervalo não é necessariamente simétrico em relação a $\hat{\theta}$.

Como destacado por Efron & Tibshirani (1993), o método percentil incorpora a transformação que normaliza perfeitamente a distribuição de $\hat{\theta}$. Suponha que $\hat{\theta}$ não tenha distribuição normal em amostras finitas e seja $\hat{\phi} = h(\hat{\theta})$ a transformação que normaliza a distribuição de $\hat{\theta}$, isto é,

$$\hat{\phi} \sim N(\phi, c^2),$$

em que c é algum desvio-padrão constante. Desta maneira, é possível construir um intervalo de confiança exato com probabilidade de cobertura $1 - \gamma$ para ϕ da forma

$$\left[\hat{\phi} - z_{(1-\frac{\gamma}{2})}c, \hat{\phi} + z_{(1-\frac{\gamma}{2})}c \right],$$

em que $z_{(1-\frac{\gamma}{2})}$ é o percentil $(1 - \gamma/2)$ da distribuição normal padrão. Assim, o intervalo percentil de $\hat{\theta}$ pode ser escrito da seguinte maneira

$$\left[h^{-1} \left(\hat{\phi} - z_{(1-\frac{\gamma}{2})}c \right), h^{-1} \left(\hat{\phi} + z_{(1-\frac{\gamma}{2})}c \right) \right],$$

sem necessariamente que se conheça a função normalizadora $h(\cdot)$. O método percentil possui uma desvantagem qual seja: o intervalo percentil resultante pode subestimar as caudas da distribuição bootstrap, pois este método utiliza a distribuição bootstrap e desconhece a distribuição normal de $\hat{\phi}$ para obter os limites de confiança.

4.3 Intervalo Bootstrap BC

O método anterior pode ser generalizado, com o objetivo de englobar uma classe maior de problemas, permitindo-se que a função normalizadora e estabilizadora da variância de $\hat{\theta}$, $\hat{\phi} = h(\hat{\theta})$, apresente viés constante ν_0 , isto é,

$$\frac{\hat{\phi} - \phi}{c} \sim N(-\nu_0, 1).$$

Assim, o intervalo de confiança exato com probabilidade de cobertura $1 - \gamma$ para o parâmetro ϕ é dado por

$$\left[\hat{\phi} + c\nu_0 - z_{(1-\gamma/2)}c, \hat{\phi} + c\nu_0 + z_{(1-\gamma/2)}c \right],$$

o qual pode ser transformado em um intervalo de confiança para θ aplicando-se a transformação inversa, $h^{-1}(\phi)$, aos limites inferior e superior.

O intervalo BC para θ , com nível de cobertura aproximado de $1 - \gamma$, é dado por

$$\left(\hat{G}^{-1} \left(\Phi(z_{[\gamma/2]}) \right), \hat{G}^{-1} \left(\Phi(z_{[1-\gamma/2]}) \right) \right), \quad (4.4)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada normal padrão e as quantidades $z_{[\gamma/2]}$ e $z_{[1-\gamma/2]}$ são iguais a

$$z_{[\gamma/2]} = 2\nu_0 + z_{(\gamma/2)} \quad \text{e} \quad z_{[1-\gamma/2]} = 2\nu_0 + z_{(1-\gamma/2)}.$$

Como o valor de ν_0 é desconhecido, é possível estimá-lo como

$$\hat{\nu}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\#(\hat{\theta}^{*r} < \hat{\theta})}{R} \right),$$

em que Φ^{-1} é a inversa da função de distribuição normal padrão, ou seja, é a função quantil normal padrão. A expressão de $\hat{\nu}_0$ é uma medida do viés da mediana da distribuição bootstrap com relação a $\hat{\theta}$.

Da mesma maneira que o método percentil, o método BC possui a vantagem de que a construção do intervalo é feita automaticamente, sem ser necessário o conhecimento da função $h(\cdot)$.

O intervalo em (4.4) foi denominado por Efron(1981) de BC (“Bias-Corrected”). Por ser um método intermediário entre o bootstrap percentil e o bootstrap BCa ele não foi considerado nas simulações de Monte Carlo realizadas neste trabalho.

4.4 Intervalo Bootstrap BCa

O intervalo de confiança BCa é uma extensão do intervalo BC, na medida em que permite que o erro padrão varie com θ . O intervalo BCa (“Bias-Corrected and Accelerated”) é baseado numa suposição mais geral, qual seja:

$$\hat{\phi} - \phi \sim N(-\nu_0(1 + a\phi), (1 + a\phi)^2),$$

em que $\phi = h(\theta)$ é uma transformação monótona. Desta maneira, em uma escala transformada, a estatística padronizada segue lei normal, podendo apresentar algum viés e, possivelmente, erro padrão variando linearmente com o parâmetro ϕ . Note que é possível obter a forma distribucional apresentada pelo método BC, a menos da constante c , ao se fazer $a = 0$ no método BCa.

Os métodos BC e BCa podem parecer semelhantes, contudo a diferença entre eles é grande. A transformação $\phi = h(\theta)$ do método BC deve produzir normalização e estabilização da variância de $\hat{\theta}$, enquanto que $h(\theta)$ no método BCa precisa apenas normalizar a distribuição de $\hat{\theta}$.

O intervalo de confiança bootstrap BCa com probabilidade de cobertura de aproximadamente $1 - \gamma$ para θ é dado por

$$\left(\hat{G}^{-1}(\Phi(z_{[\gamma/2]}^*)), \hat{G}^{-1}(\Phi(z_{[1-\gamma/2]}^*)) \right), \quad (4.5)$$

em que

$$z_{[\gamma/2]}^* = v_0 + \frac{v_0 + z_{(\gamma/2)}}{1 - a(v_0 + z_{(\gamma/2)})} \quad \text{e} \quad z_{[1-\gamma/2]}^* = v_0 + \frac{v_0 + z_{(1-\gamma/2)}}{1 - a(v_0 + z_{(1-\gamma/2)})}.$$

A constante a mede a razão de mudança do erro padrão de $\hat{\theta}$ com respeito ao verdadeiro valor do parâmetro. Chamamos de constantes de correção de viés e constante de aceleração as quantidades v_0 e a , respectivamente. A constante a tipicamente não é conhecida e, via bootstrap paramétrico, pode ser estimada como

$$\hat{a} = \frac{1}{6} \text{Skew}(\ell'(\hat{\theta})) |_{\theta=\hat{\theta}},$$

em que $\text{Skew}(\cdot)$ denota o coeficiente de assimetria e $\ell'(\hat{\theta})$ é a derivada da função log-verossimilhança avaliada em $\hat{\theta}$. Na forma não-paramétrica do bootstrap a constante a é estimada como

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)})^3}{6[\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)})^2]^{3/2}}.$$

Aqui, $\hat{\theta}_{(i)}$ são réplicas jackknife do estimador $\hat{\theta}$ e são calculadas retirando o i -ésimo elemento da amostra observada y_1, \dots, y_n por vez e $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ é a média das n réplicas jackknife. Embora esta expressão seja utilizada na forma não-paramétrica de bootstrap ela foi utilizada neste trabalho de mestrado também como uma aproximação do caso paramétrico.

Os limites do intervalo bootstrap BCa com probabilidade de cobertura de aproximadamente $1 - \gamma$ são os percentis δ_1 e δ_2 da distribuição bootstrap para $\hat{\theta}$ dados por

$$\delta_1 = \Phi \left[\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_{\gamma/2}}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_{\gamma/2})} \right] \quad \text{e} \quad \delta_2 = \Phi \left[\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_{1-\gamma/2}}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_{1-\gamma/2})} \right].$$

Usualmente os intervalos de confiança BCa são mais precisos do que os intervalos do tipo percentil, pois a probabilidade do valor verdadeiro de θ estar acima ou abaixo dos limites superior

e inferior, respectivamente, dos intervalos BCa encontram-se tipicamente mais próximas do valor nominal $\gamma/2$.

Quando v_0 e a são iguais a zero, os limites de confiança dos intervalos BCa e percentil são iguais. Quando apenas a é igual a zero os limites de confiança dos intervalos BCa e BC coincidem.

A grande quantidade de réplicas bootstrap requerida é a maior desvantagem do método BCa. Usualmente, são empregadas entre 1000 e 2000 réplicas bootstrap, aumentando assim o custo computacional relativamente a outros métodos bootstrap.

Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados de avaliações numéricas sobre o comportamento em pequenas amostras dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax, bem como de suas versões corrigidas por viés. Serão apresentados também resultados numéricos sobre estimação pontual. Para a avaliação da qualidade das estimativas pontuais algumas medidas foram utilizadas, sendo elas o viés, o viés relativo, definido como $100 \times (\text{viés} / \text{valor verdadeiro do parâmetro})\%$, e o erro quadrático médio (EQM), que é obtido pela soma do quadrado do viés e da variância.

Os seguintes estimadores foram avaliados: estimador de máxima verossimilhança, $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$; a versão corrigida via Cox e Snell (1968), $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$; a versão corrigida de David Firth (1993), $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$; o estimador corrigido via bootstrap paramétrico, $\check{\theta}_1 = (\check{\alpha}_1, \check{\lambda}_1)$; o estimador corrigido via bootstrap não-paramétrico, $\check{\theta}_2 = (\check{\alpha}_2, \check{\lambda}_2)$; e o estimador corrigido via bootstrap linear, $\check{\theta}_3 = (\check{\alpha}_3, \check{\lambda}_3)$.

Para avaliar o desempenho global dos seis diferentes estimadores foi utilizada uma medida apresentada por Cribari-Neto e Vasconcellos (2002). Estes autores denominaram esta medida de *IRBSQ* (“Integrated Relative Bias Squared Norm”) e ela, adaptada aos resultados apresentados neste trabalho, é dada por

$$IRBSQ_{(k,n)} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 (r_{k,n,h})^2},$$

em que $r_{k,n,h}$ corresponde ao viés relativo do k -ésimo estimador ($k = 1, \dots, 6$), no n -ésimo tamanhos amostral e no h -ésimo ($h = 1, 2, 3$) conjunto de parâmetros utilizados para realizar a simulação.

Os intervalos de confiança assintótico, bootstrap percentil e bootstrap BCa foram avaliados neste trabalho. Para se diferenciar os intervalos bootstrap, segundo o esquema de reamostragem, a notação ‘BP’ e ‘BPN’ foi utilizada, em que ‘BP’ é a notação para o bootstrap paramétrico e ‘BPN’ é a notação para o bootstrap não-paramétrico. Foram avaliados intervalos com níveis nominais de cobertura iguais a 0.90, 0.95 e 0.99, denotados nas tabelas por “Nominal”.

Para todos os métodos de estimação intervalar calculou-se a amplitude média dos intervalos, indicada nas tabelas por “Amplitude”, a cobertura, denotada por “Cobertura (%)”, a não cobertura à esquerda, apresentada nas tabela por “Esquerda(%)”, e a não cobertura à direita, denotada por “Direita(%)”.

Os resultados foram obtidos através de simulações de Monte Carlo. Foram realizadas 10000 réplicas de Monte Carlo considerando diferentes tamanhos amostrais ($n = 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500$) e diferentes valores dos parâmetros. Para a estimação via bootstrap foram utilizadas 1000 réplicas, ou seja, $R = 1000$.

O parâmetro λ foi fixado em 1.0, pois, como foi reportado em Giles *et al.* (2011) as magnitudes do viés relativo e do erro quadrático médio para as estimativas são invariantes ao valor deste parâmetro. Para o parâmetro de forma α os valores utilizados foram (0.5, 1.1, 1.6), que são valores próximos aos utilizados por Giles *et al.* (2011). Estes autores apresentaram resultados de correção de viés para os parâmetros da lei Lomax com α igual a 1.1 e 2.1, sendo tais valores próximos aos reportados por Corbellini *et al.* (2007), que apresentaram estimativas de α no intervalo (0.96, 1.06), e aos reportados por Holand *et al.* (2006), que apresentaram estimativas de α no intervalo (0.5, 3.3). Como notado no Capítulo 2, a existência dos momentos da distribuição Lomax está condicionada ao valor do parâmetro α , os valores 1.1 e 1.6 para tal parâmetro garantem que o primeiro momento existe, ao passo que quando $\alpha = 0.5$ nenhum momento existe.

Para gerar as amostras da lei Lomax utilizou-se o gerador de números pseudo-aleatórios uniformes “multiply-with-carry”, de período aproximado 2^{60} , desenvolvido por George Marsaglia; para mais detalhes, ver Marsaglia (1997). A estimação dos parâmetros α e λ foi realizada através de maximização numérica da função de log-verossimilhança utilizando o método quasi-Newton BFGS com primeiras derivadas analíticas, que está implementado na linguagem de programação Ox [Doornik (2009)] através da função MaxBFGS. Para a estimação dos parâmetros α e λ realizada por meio da função *escore* modificada, ou seja, utilizando a correção de Firth (1993), utilizou-se o algoritmo de Newton-Raphson através da função SolveNLE, que também está implementada na linguagem de programação Ox.

5.2 Resultados e Discussão

5.2.1 Correção de viés

Nesta seção encontram-se os resultados das simulações referentes à correção de viés dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax. As Figuras presentes nesta seção apresentam os histogramas obtidos das estimativas de algum dos estimadores considerados para ambos os parâmetros, utilizando os seguintes valores $n = 35$ e $R = 1000$, nos histogramas a linha em vermelho representa o verdadeiro valor do parâmetro.

As Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 referem-se à simulação cujos verdadeiros valores dos parâmetros α e λ são 0.5 e 1.1. Para o parâmetro α todos os estimadores corrigidos apresentam boa redução no viés relativamente ao estimador não corrigido, principalmente os estimadores $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ que apresentam os menores vieses em todos os tamanhos amostrais. Por exemplo, com $n = 50$ os vieses de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são -0.0059 e -0.0070 , respectivamente, enquanto os vieses de $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são -0.0132 , -0.0119 e -0.0127 , respectivamente; e para $\hat{\alpha}$ o viés é 0.0319.

Para o parâmetro λ somente quando $n \leq 50$ os estimadores $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\lambda}$ apresentam viés inferior ao viés apresentado pelo estimador não corrigido; os outros estimadores considerados apresentam viés superior ao viés apresentado pelo estimador não corrigido. Por exemplo, com

$n = 40$ o viés de $\hat{\lambda}$ é 0.1401, e os vieses dos estimadores corrigidos $\bar{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são -0.1045 , -0.1276 , -0.1722 , -0.1635 e -0.2407 , respectivamente. Com o aumento do tamanho amostral, em geral, nenhum dos estimadores corrigidos apresenta redução no viés do estimador de máxima verossimilhança. Por exemplo, com $n = 80$ o estimador $\hat{\lambda}$ apresenta viés igual a 0.0507, ao passo que os vieses dos outros estimadores corrigidos são -0.0647 , -0.0691 , -0.0865 , -0.0882 e -0.1615 para $\bar{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$, respectivamente. Dentre todos os estimadores corrigidos o estimador $\check{\lambda}_3$ é o que apresenta os piores resultados no que tange ao viés, como pode-se observar nos resultados apresentados logo acima.

No que tange o EQM tem-se que, quando $n \leq 100$, todos os estimadores corrigidos considerados para o parâmetro α apresentam EQM's menores do que o estimador $\hat{\alpha}$, em amostras maiores todos os estimadores considerados apresentam valores semelhantes de EQM. Por exemplo, com $n = 90$ os EQM's dos estimadores corrigidos, $\bar{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ ficam em torno

Tabela 5.1 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
35	$\hat{\theta}$	0.0475	9.4949	0.0307	0.1739	17.3895	0.4675
	$\bar{\theta}$	-0.0096	-1.9154	0.0179	-0.1121	-11.2135	0.2389
	$\tilde{\theta}$	-0.0129	-2.5756	0.0167	-0.1442	-14.4217	0.2225
	$\check{\theta}_1$	-0.0229	-4.5806	0.0217	-0.1920	-19.2049	0.3533
	$\check{\theta}_2$	-0.0176	-3.5198	0.0241	-0.1729	-17.2860	0.4004
	$\check{\theta}_3$	-0.0212	-4.2301	0.0220	-0.2488	-24.8823	0.3396
40	$\hat{\theta}$	0.0387	7.7425	0.0248	0.1401	14.0106	0.3872
	$\bar{\theta}$	-0.0097	-1.9403	0.0157	-0.1045	-10.4537	0.2202
	$\tilde{\theta}$	-0.0119	-2.3880	0.0150	-0.1276	-12.7603	0.2093
	$\check{\theta}_1$	-0.0209	-4.1809	0.0179	-0.1722	-17.2227	0.2909
	$\check{\theta}_2$	-0.0176	-3.5247	0.0192	-0.1635	-16.3476	0.3197
	$\check{\theta}_3$	-0.0198	-3.9543	0.0181	-0.2407	-24.0681	0.3155
45	$\hat{\theta}$	0.0347	6.9317	0.0216	0.1247	12.4725	0.3412
	$\bar{\theta}$	-0.0078	-1.5537	0.0146	-0.0912	-9.1222	0.2087
	$\tilde{\theta}$	-0.0094	-1.8791	0.0142	-0.1086	-10.8583	0.2015
	$\check{\theta}_1$	-0.0171	-3.4244	0.0154	-0.1518	-15.1822	0.2375
	$\check{\theta}_2$	-0.0152	-3.0325	0.0163	-0.1508	-15.0805	0.2552
	$\check{\theta}_3$	-0.0163	-3.2648	0.0156	-0.2299	-22.9921	0.2015
50	$\hat{\theta}$	0.0319	6.3839	0.0185	0.1053	10.5346	0.3038
	$\bar{\theta}$	-0.0059	-1.1736	0.0131	-0.0867	-8.6716	0.1970
	$\tilde{\theta}$	-0.0070	-1.4079	0.0128	-0.1000	-9.9980	0.1927
	$\check{\theta}_1$	-0.0132	-2.6380	0.0137	-0.1323	-13.2253	0.2240
	$\check{\theta}_2$	-0.0119	-2.3736	0.0143	-0.1336	-13.3559	0.2389
	$\check{\theta}_3$	-0.0127	-2.5317	0.0138	-0.2132	-21.3214	0.1918

Tabela 5.2 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
55	$\hat{\theta}$	0.0249	4.9820	0.0157	0.0821	8.2112	0.2475
	$\bar{\theta}$	-0.0086	-1.7213	0.0117	-0.0891	-8.9106	0.1710
	$\tilde{\theta}$	-0.0095	-1.8974	0.0115	-0.0996	-9.9594	0.1683
	$\check{\theta}_1$	-0.0154	-3.0849	0.0121	-0.1303	-13.0270	0.1873
	$\check{\theta}_2$	-0.0144	-2.8891	0.0125	-0.1327	-13.2657	0.1972
	$\check{\theta}_3$	-0.0151	-3.0138	0.0122	-0.2114	-21.1417	0.1641
60	$\hat{\theta}$	0.0261	5.2269	0.0141	0.0863	8.6275	0.2233
	$\bar{\theta}$	-0.0046	-0.9188	0.0106	-0.0715	-7.1503	0.1579
	$\tilde{\theta}$	-0.0054	-1.0702	0.0105	-0.0804	-8.0395	0.1553
	$\check{\theta}_1$	-0.0113	-2.2562	0.0107	-0.1108	-11.0767	0.1621
	$\check{\theta}_2$	-0.0103	-2.0677	0.0111	-0.1123	-11.2274	0.1699
	$\check{\theta}_3$	-0.0110	-2.2055	0.0107	-0.1945	-19.4513	0.1380
70	$\hat{\theta}$	0.0205	4.1038	0.0110	0.0579	5.7883	0.1722
	$\bar{\theta}$	-0.0053	-1.0502	0.0087	-0.0743	-7.4269	0.1311
	$\tilde{\theta}$	-0.0058	-1.1505	0.0087	-0.0804	-8.0426	0.1305
	$\check{\theta}_1$	-0.0105	-2.1078	0.0087	-0.1052	-10.5160	0.1335
	$\check{\theta}_2$	-0.0099	-1.9872	0.0089	-0.1064	-10.6383	0.1377
	$\check{\theta}_3$	-0.0104	-2.0815	0.0087	-0.1843	-18.4326	0.1170
80	$\hat{\theta}$	0.0172	3.4321	0.0093	0.0507	5.0657	0.1403
	$\bar{\theta}$	-0.0051	-1.0294	0.0077	-0.0647	-6.4679	0.1114
	$\tilde{\theta}$	-0.0055	-1.0932	0.0076	-0.0691	-6.9105	0.1109
	$\check{\theta}_1$	-0.0085	-1.6930	0.0075	-0.0865	-8.6505	0.1100
	$\check{\theta}_2$	-0.0081	-1.6161	0.0076	-0.0882	-8.8235	0.1130
	$\check{\theta}_3$	-0.0084	-1.6733	0.0075	-0.1615	-16.1547	0.0970
90	$\hat{\theta}$	0.0138	2.7527	0.0080	0.0389	3.8891	0.1273
	$\bar{\theta}$	-0.0058	-1.1537	0.0068	-0.0625	-6.2459	0.1051
	$\tilde{\theta}$	-0.0060	-1.2098	0.0068	-0.0661	-6.6133	0.1044
	$\check{\theta}_1$	-0.0079	-1.5886	0.0067	-0.0773	-7.7323	0.1036
	$\check{\theta}_2$	-0.0076	-1.5121	0.0067	-0.0780	-7.7961	0.1056
	$\check{\theta}_3$	-0.0079	-1.5742	0.0067	-0.1468	-14.6755	0.0906
100	$\hat{\theta}$	0.0134	2.6814	0.0070	0.0365	3.6465	0.1086
	$\bar{\theta}$	-0.0041	-0.8250	0.0061	-0.0547	-5.4735	0.0912
	$\tilde{\theta}$	-0.0043	-0.8699	0.0060	-0.0577	-5.7657	0.0910
	$\check{\theta}_1$	-0.0059	-1.1711	0.0060	-0.0662	-6.6211	0.0905
	$\check{\theta}_2$	-0.0056	-1.1232	0.0060	-0.0671	-6.7083	0.0912
	$\check{\theta}_3$	-0.0058	-1.1616	0.0060	-0.1316	-13.1562	0.0801

Tabela 5.3 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
150	$\hat{\theta}$	0.0069	1.3893	0.0041	0.0171	1.7063	0.0664
	$\bar{\theta}$	-0.0044	-0.8853	0.0038	-0.0428	-4.2771	0.0602
	$\tilde{\theta}$	-0.0045	-0.9077	0.0038	-0.0442	-4.4171	0.0601
	$\check{\theta}_1$	-0.0054	-1.0795	0.0038	-0.0491	-4.9100	0.0599
	$\check{\theta}_2$	-0.0052	-1.0439	0.0038	-0.0490	-4.9027	0.0602
	$\check{\theta}_3$	-0.0054	-1.0780	0.0038	-0.0986	-9.8571	0.0553
200	$\hat{\theta}$	0.0057	1.1498	0.0030	0.0154	1.5400	0.0508
	$\bar{\theta}$	-0.0027	-0.5498	0.0028	-0.0297	-2.9652	0.0469
	$\tilde{\theta}$	-0.0028	-0.5600	0.0028	-0.0304	-3.0358	0.0469
	$\check{\theta}_1$	-0.0031	-0.6264	0.0028	-0.0321	-3.2115	0.0467
	$\check{\theta}_2$	-0.0030	-0.6089	0.0028	-0.0324	-3.2373	0.0469
	$\check{\theta}_3$	-0.0031	-0.6254	0.0028	-0.0709	-7.0890	0.0431
250	$\hat{\theta}$	0.0044	0.8760	0.0023	0.0110	1.0966	0.0403
	$\bar{\theta}$	-0.0024	-0.4742	0.0022	-0.0249	-2.4926	0.0379
	$\tilde{\theta}$	-0.0024	-0.4824	0.0022	-0.0254	-2.5435	0.0379
	$\check{\theta}_1$	-0.0029	-0.5828	0.0022	-0.0272	-2.7230	0.0380
	$\check{\theta}_2$	-0.0028	-0.5608	0.0022	-0.0270	-2.7036	0.0381
	$\check{\theta}_3$	-0.0029	-0.5830	0.0022	-0.0597	-5.9656	0.0357
300	$\hat{\theta}$	0.0036	0.7273	0.0019	0.0118	1.1848	0.0334
	$\bar{\theta}$	-0.0020	-0.3962	0.0018	-0.0182	-1.8184	0.0316
	$\tilde{\theta}$	-0.0020	-0.4005	0.0018	-0.0185	-1.8489	0.0316
	$\check{\theta}_1$	-0.0025	-0.5040	0.0018	-0.0211	-2.1125	0.0321
	$\check{\theta}_2$	-0.0025	-0.4959	0.0018	-0.0214	-2.1374	0.0321
	$\check{\theta}_3$	-0.0025	-0.5045	0.0018	-0.0498	-4.9751	0.0306
400	$\hat{\theta}$	0.0024	0.4760	0.0014	0.0096	0.9639	0.0250
	$\bar{\theta}$	-0.0018	-0.3626	0.0014	-0.0129	-1.2870	0.0240
	$\tilde{\theta}$	-0.0018	-0.3649	0.0014	-0.0130	-1.3044	0.0240
	$\check{\theta}_1$	-0.0019	-0.3789	0.0014	-0.0133	-1.3331	0.0240
	$\check{\theta}_2$	-0.0019	-0.3721	0.0014	-0.0134	-1.3443	0.0240
	$\check{\theta}_3$	-0.0019	-0.3787	0.0014	-0.0342	-3.4235	0.0229
500	$\hat{\theta}$	0.0022	0.4422	0.0011	0.0083	0.8327	0.0211
	$\bar{\theta}$	-0.0011	-0.2282	0.0011	-0.0097	-0.9682	0.0204
	$\tilde{\theta}$	-0.0011	-0.2296	0.0011	-0.0098	-0.9788	0.0204
	$\check{\theta}_1$	-0.0013	-0.2700	0.0011	-0.0104	-1.0408	0.0205
	$\check{\theta}_2$	-0.0013	-0.2619	0.0011	-0.0104	-1.0450	0.0205
	$\check{\theta}_3$	-0.0014	-0.2701	0.0011	-0.0278	-2.7762	0.0197

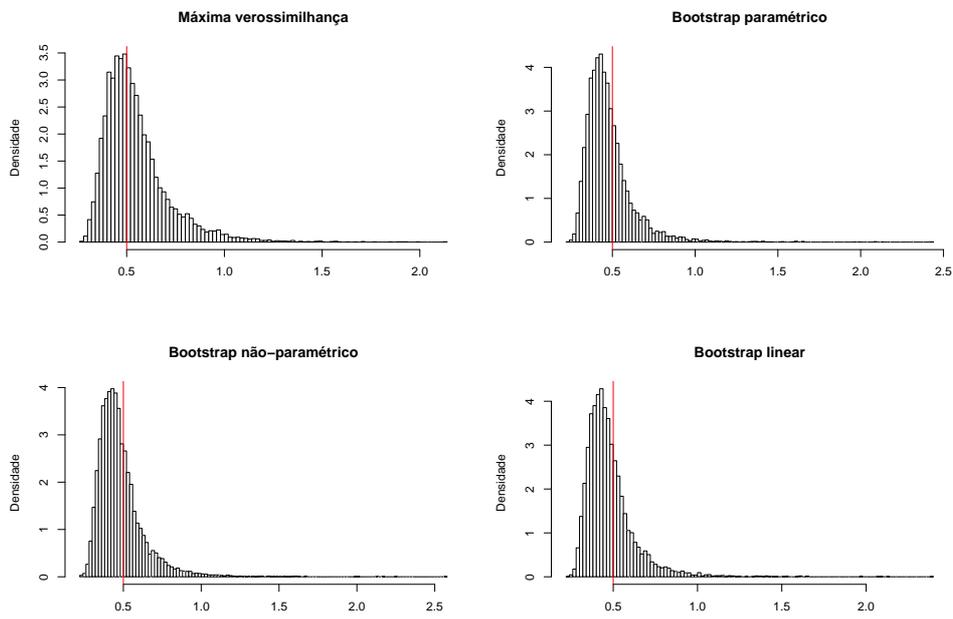


Figura 5.1 Histogramas das estimativas de α , quando $\alpha = 0.5$, $\lambda = 1.0$, $n = 35$

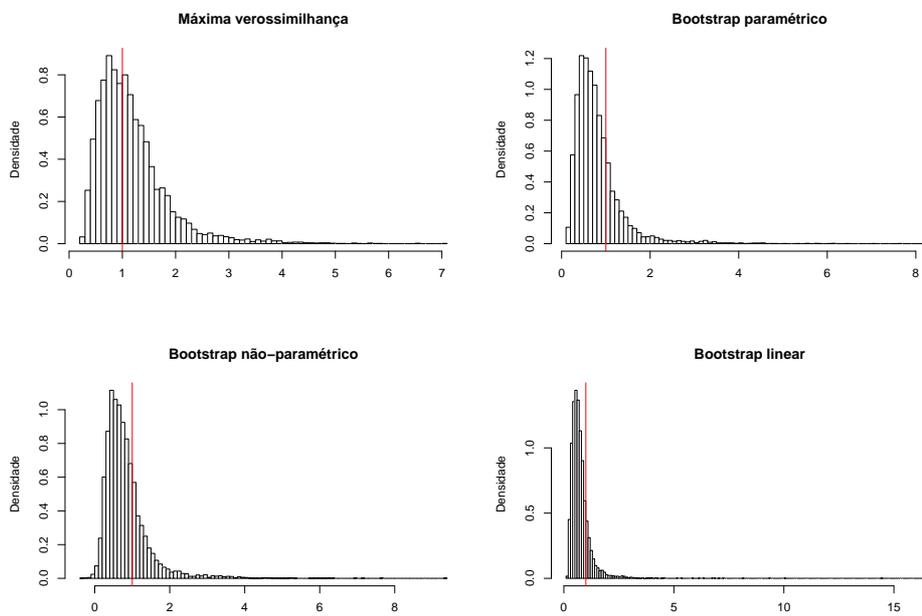


Figura 5.2 Histogramas das estimativas de λ , quando $\alpha = 0.5$, $\lambda = 1.0$, $n = 35$

de 0.0067 e o EQM de $\hat{\alpha}$ é igual a 0.0080. O comportamento apresentado para o parâmetro λ é praticamente o mesmo; com exceção de $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ que, em pequenas amostras, apresentam EQM's ligeiramente maiores de que os EQM's apresentados pelos outros estimadores corrigidos considerados. Por exemplo, com $n = 45$ os EQM's dos estimadores $\hat{\lambda}$, $\check{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 0.3412, 0.2087, 0.2015, 0.2375, 0.2552 e 0.2015, respectivamente.

Nas Figuras 5.1 e 5.2 encontram-se histogramas das estimativas de alguns estimadores considerados para os parâmetros α e λ . Observa-se que todos os histogramas apresentam assimetria à direita. Na Figura 5.1 pode-se observar que o histograma das estimativas de $\hat{\alpha}$ está concentrado em torno do real valor do parâmetro. Já os outros histogramas não apresentam concentração em torno do verdadeiro valor do parâmetro, porém, a área de concentração está próxima do verdadeiro valor do parâmetro. Nota-se também que, exceto por valores extremos (note as escalas dos gráficos), os histogramas referentes aos estimadores corrigidos apresentam menor dispersão. Na Figura 5.2 nenhum dos histogramas está concentrado em torno do real valor do parâmetro e todos os histogramas incluem estimativas relativamente grande, o que confirma graficamente o grande valor do viés destes estimadores.

Nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 encontram-se os resultados de simulação em que os verdadeiros valores para os parâmetros α e λ são 1.1 e 1.0. Todos os estimadores corrigidos apresentam viés inferior ao viés apresentado pelo estimador não corrigido, $\hat{\alpha}$, com destaque para o estimador $\bar{\alpha}$, que em pequenos tamanhos amostrais apresenta os menores vieses. Por exemplo, com $n = 55$ o viés do estimador $\bar{\alpha}$ é 0.0081 e os vieses dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\check{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são 0.2016, -0.0283 , -0.0309 , -0.0532 e -0.0379 , respectivamente. Quando $n \geq 150$ não há grande diferença entre o viés apresentado pelos estimadores corrigidos. Por exemplo, com $n = 150$ o viés de $\hat{\alpha}$ é 0.0580 e os vieses dos estimadores corrigidos $\bar{\alpha}$, $\check{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são 0.0033, 0.0014, -0.0035 , -0.0017 e -0.0031 , respectivamente.

Para o parâmetro λ todos os estimadores corrigidos apresentam viés inferior ao viés apresentado pelo estimador não corrigido, com destaque para os estimadores $\check{\lambda}$ e $\bar{\lambda}$, que em amostras pequenas e médias apresentam os menores vieses. Por exemplo, com $n = 50$ o viés do estimador $\bar{\lambda}$ é 0.0605 e os vieses dos estimadores $\hat{\lambda}$, $\check{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 0.4322, -0.0336 , 0.1210, 0.1658 e 0.1698, respectivamente. Com o aumento do tamanho amostral os estimadores corrigidos via reamostragem bootstrap passam a apresentar comportamento semelhante ao estimadores corrigidos analiticamente. Por exemplo, com $n = 200$ o viés do estimador $\hat{\lambda}$ é igual a 0.0713 e os vieses dos estimadores $\check{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 0.0074, 0.0055, 0.0001, 0.0015 e 0.0051, respectivamente.

No que tange o EQM tem-se que, quando $n \leq 50$, os estimadores $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ apresentam EQM maiores do que o estimador $\hat{\alpha}$, em amostras maiores estes estimadores passam a apresentar EQM menor do que o estimador não corrigido. Adicionalmente, os estimadores $\check{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ apresentam em amostras pequenas e médias os menores EQM's. Quando $n \geq 150$ não há grande diferença no EQM dos estimadores corrigidos. Por exemplo, com $n = 70$ os EQM's dos estimadores corrigidos, $\bar{\alpha}$, $\check{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são 0.0842, 0.0709, 0.1367, 0.1473 e 0.1373, respectivamente, enquanto o estimador de $\hat{\alpha}$ é 0.1782. Este mesmo comportamento acontece com os estimadores considerados para o parâmetro λ . Por exemplo, com $n = 40$ os EQM's dos estimadores $\hat{\lambda}$, $\check{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 1.1944, 0.2482, 0.1735, 1.4004, 1.4619 e 1.6657, respectivamente.

Nas Figuras 5.3 e 5.4 encontram-se histogramas das estimativas de alguns estimadores considerados para os parâmetros α e λ . A assimetria à direita dos histogramas das estimativas de ambos os parâmetros está clara nas duas figuras. Na Figura 5.3 pode-se observar que os histogramas das estimativas dos estimadores corrigidos não apresentam concentração em torno do verdadeiro valor do parâmetro, porém, a área de concentração está próxima do verdadeiro valor do parâmetro, em contra partida o histograma das estimativas de $\hat{\alpha}$ está concentrado em torno do real valor do parâmetro. Tem-se que, exceto por valores extremos (note a escala dos gráficos), os histogramas referentes aos estimadores corrigidos apresentam dispersão menor. Na Figura 5.4 o histograma das estimativas de $\hat{\lambda}$ está concentrado em torno do real valor do parâmetro, o que não acontece com os histogramas das estimativas dos estimadores corrigidos. A dispersão apresentada, exceto por valores extremos (observe a escala dos gráficos) pelo histograma das estimativas de $\hat{\lambda}$ é superior a dispersão dos outros histogramas.

Tabela 5.4 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
35	$\hat{\theta}$	0.3274	29.7669	0.5430	0.6505	65.0525	1.6214
	$\bar{\theta}$	-0.0164	-1.4930	0.1122	0.0539	5.3923	0.2658
	$\tilde{\theta}$	-0.1566	-14.2330	0.0884	-0.2100	-21.0006	0.2659
	$\check{\theta}_1$	0.1638	14.8929	0.7539	0.3394	33.9440	2.1675
	$\check{\theta}_2$	0.2016	18.3240	0.7563	0.4066	40.6610	2.2664
	$\check{\theta}_3$	0.1697	15.4304	0.6939	0.4400	43.9982	3.5733
40	$\hat{\theta}$	0.2705	24.5941	0.4232	0.5338	53.3797	1.1944
	$\bar{\theta}$	-0.0122	-1.1136	0.1081	0.0498	4.9773	0.2482
	$\tilde{\theta}$	-0.1033	-9.3942	0.0677	-0.1206	-12.0608	0.1735
	$\check{\theta}_1$	0.0938	8.5247	0.5296	0.2054	20.5400	1.4004
	$\check{\theta}_2$	0.1265	11.4966	0.5357	0.2618	26.1835	1.4619
	$\check{\theta}_3$	0.1017	9.2488	0.4958	0.2714	27.1372	1.6657
45	$\hat{\theta}$	0.2499	22.7153	0.3823	0.4838	48.3776	1.0734
	$\bar{\theta}$	-0.0006	-0.0517	0.1079	0.0577	5.7717	0.2511
	$\tilde{\theta}$	-0.0675	-6.1379	0.0661	-0.0680	-6.8047	0.1604
	$\check{\theta}_1$	0.0687	6.2481	0.4400	0.1599	15.9868	1.1912
	$\check{\theta}_2$	0.0993	9.0265	0.4561	0.2116	21.1608	1.2746
	$\check{\theta}_3$	0.0772	7.0139	0.4172	0.2186	21.8571	1.4319
50	$\hat{\theta}$	0.2272	20.6589	0.3333	0.4322	43.2197	0.9248
	$\bar{\theta}$	0.0072	0.6533	0.1045	0.0605	6.0488	0.2450
	$\tilde{\theta}$	-0.0427	-3.8818	0.0722	-0.0336	-3.3641	0.1720
	$\check{\theta}_1$	0.0504	4.5775	0.3611	0.1210	12.1046	0.9673
	$\check{\theta}_2$	0.0772	7.0145	0.3766	0.1658	16.5782	1.0403
	$\check{\theta}_3$	0.0580	5.2727	0.3437	0.1698	16.9777	1.1112

Tabela 5.5 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
55	$\hat{\theta}$	0.2016	18.3237	0.2845	0.3769	37.6852	0.7522
	$\bar{\theta}$	0.0081	0.7360	0.1018	0.0536	5.3551	0.2323
	$\tilde{\theta}$	-0.0283	-2.5694	0.0691	-0.0148	-1.4846	0.1544
	$\check{\theta}_1$	0.0309	2.8084	0.2834	0.0797	7.9694	0.7077
	$\check{\theta}_2$	0.0532	4.8328	0.2963	0.1152	11.5232	0.7579
	$\check{\theta}_3$	0.0379	3.4498	0.2749	0.1199	11.9858	0.8521
60	$\hat{\theta}$	0.1760	15.9989	0.2452	0.3299	32.9867	0.6413
	$\bar{\theta}$	0.0047	0.4266	0.0955	0.0445	4.4512	0.2147
	$\tilde{\theta}$	-0.0227	-2.0605	0.0708	-0.0073	-0.7305	0.1538
	$\check{\theta}_1$	0.0139	1.2609	0.2336	0.0503	5.0254	0.5810
	$\check{\theta}_2$	0.0328	2.9842	0.2471	0.0799	7.9901	0.6297
	$\check{\theta}_3$	0.0200	1.8166	0.2277	0.0849	8.4857	0.6387
70	$\hat{\theta}$	0.1507	13.6959	0.1782	0.2730	27.2995	0.4384
	$\bar{\theta}$	0.0111	1.0121	0.0842	0.0433	4.3307	0.1852
	$\tilde{\theta}$	-0.0047	-0.4267	0.0709	0.0133	1.3261	0.1525
	$\check{\theta}_1$	0.0029	0.2642	0.1367	0.0225	2.2497	0.3020
	$\check{\theta}_2$	0.0164	1.4892	0.1473	0.0427	4.2682	0.3329
	$\check{\theta}_3$	0.0078	0.7096	0.1373	0.0465	4.6530	0.2890
80	$\hat{\theta}$	0.1299	11.8102	0.1508	0.2354	23.5392	0.3670
	$\bar{\theta}$	0.0113	1.0238	0.0785	0.0407	4.0670	0.1735
	$\tilde{\theta}$	0.0006	0.0523	0.0693	0.0202	2.0174	0.1506
	$\check{\theta}_1$	0.0019	0.1760	0.1142	0.0204	2.0378	0.2511
	$\check{\theta}_2$	0.0115	1.0473	0.1218	0.0338	3.3759	0.2722
	$\check{\theta}_3$	0.0053	0.4821	0.1145	0.0382	3.8242	0.2408
90	$\hat{\theta}$	0.1088	9.8935	0.1167	0.1942	19.4205	0.2794
	$\bar{\theta}$	0.0078	0.7070	0.0671	0.0294	2.9376	0.1474
	$\tilde{\theta}$	0.0006	0.0579	0.0625	0.0155	1.5480	0.1359
	$\check{\theta}_1$	-0.0040	-0.3657	0.0831	0.0070	0.7036	0.1818
	$\check{\theta}_2$	0.0043	0.3913	0.0888	0.0185	1.8471	0.1958
	$\check{\theta}_3$	-0.0016	-0.1443	0.0839	0.0217	2.1693	0.1714
100	$\hat{\theta}$	0.0932	8.4688	0.0993	0.1645	16.4541	0.2316
	$\bar{\theta}$	0.0047	0.4282	0.0615	0.0210	2.0966	0.1335
	$\tilde{\theta}$	-0.0005	-0.0480	0.0583	0.0107	1.0722	0.1261
	$\check{\theta}_1$	-0.0056	-0.5072	0.0726	0.0024	0.2360	0.1558
	$\check{\theta}_2$	0.0002	0.0212	0.0769	0.0098	0.9761	0.1658
	$\check{\theta}_3$	-0.0039	-0.3523	0.0731	0.0145	1.4546	0.1466

Tabela 5.6 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
150	$\hat{\theta}$	0.0580	5.2687	0.0522	0.0975	9.7490	0.1244
	$\bar{\theta}$	0.0033	0.2989	0.0391	0.0095	0.9521	0.0894
	$\tilde{\theta}$	0.0014	0.1311	0.0386	0.0058	0.5780	0.0881
	$\check{\theta}_1$	-0.0035	-0.3224	0.0396	-0.0016	-0.1599	0.0922
	$\check{\theta}_2$	-0.0017	-0.1525	0.0404	0.0005	0.0518	0.0936
	$\check{\theta}_3$	-0.0031	-0.2830	0.0397	0.0053	0.5308	0.0874
200	$\hat{\theta}$	0.0445	4.0462	0.0358	0.0713	7.1295	0.0843
	$\bar{\theta}$	0.0046	0.4209	0.0289	0.0074	0.7390	0.0664
	$\tilde{\theta}$	0.0037	0.3380	0.0288	0.0055	0.5517	0.0660
	$\check{\theta}_1$	0.0002	0.0208	0.0287	0.0001	0.0141	0.0662
	$\check{\theta}_2$	0.0015	0.1333	0.0290	0.0015	0.1505	0.0668
	$\check{\theta}_3$	0.0004	0.0352	0.0287	0.0051	0.5089	0.0635
250	$\hat{\theta}$	0.0312	2.8364	0.0267	0.0482	4.8179	0.0619
	$\bar{\theta}$	0.0001	0.0099	0.0228	-0.0015	-0.1474	0.0519
	$\tilde{\theta}$	-0.0004	-0.0379	0.0227	-0.0026	-0.2576	0.0518
	$\check{\theta}_1$	-0.0027	-0.2489	0.0225	-0.0062	-0.6200	0.0514
	$\check{\theta}_2$	-0.0019	-0.1721	0.0227	-0.0053	-0.5294	0.0518
	$\check{\theta}_3$	-0.0027	-0.2423	0.0225	-0.0022	-0.2188	0.0497
300	$\hat{\theta}$	0.0273	2.4843	0.0220	0.0437	4.3712	0.0516
	$\bar{\theta}$	0.0016	0.1447	0.0192	0.0025	0.2524	0.0444
	$\tilde{\theta}$	0.0013	0.1163	0.0192	0.0018	0.1848	0.0443
	$\check{\theta}_1$	-0.0004	-0.0330	0.0191	-0.0007	-0.0677	0.0441
	$\check{\theta}_2$	0.0002	0.0147	0.0192	-0.0003	-0.0283	0.0442
	$\check{\theta}_3$	-0.0003	-0.0294	0.0191	0.0026	0.2575	0.0429
400	$\hat{\theta}$	0.0202	1.8361	0.0154	0.0317	3.1654	0.0365
	$\bar{\theta}$	0.0012	0.1125	0.0140	0.0013	0.1341	0.0327
	$\tilde{\theta}$	0.0010	0.0939	0.0140	0.0009	0.0915	0.0327
	$\check{\theta}_1$	0.0001	0.0108	0.0139	-0.0004	-0.0445	0.0325
	$\check{\theta}_2$	0.0005	0.0461	0.0139	-0.0000	-0.0025	0.0326
	$\check{\theta}_3$	0.0001	0.0122	0.0139	0.0020	0.2022	0.0319
500	$\hat{\theta}$	0.0145	1.3190	0.0119	0.0218	2.1782	0.0279
	$\bar{\theta}$	-0.0005	-0.0448	0.0110	-0.0022	-0.2167	0.0257
	$\tilde{\theta}$	-0.0006	-0.0558	0.0110	-0.0024	-0.2423	0.0257
	$\check{\theta}_1$	-0.0012	-0.1068	0.0110	-0.0032	-0.3197	0.0256
	$\check{\theta}_2$	-0.0009	-0.0829	0.0110	-0.0030	-0.3008	0.0256
	$\check{\theta}_3$	-0.0012	-0.1061	0.0110	-0.0012	-0.1175	0.0252

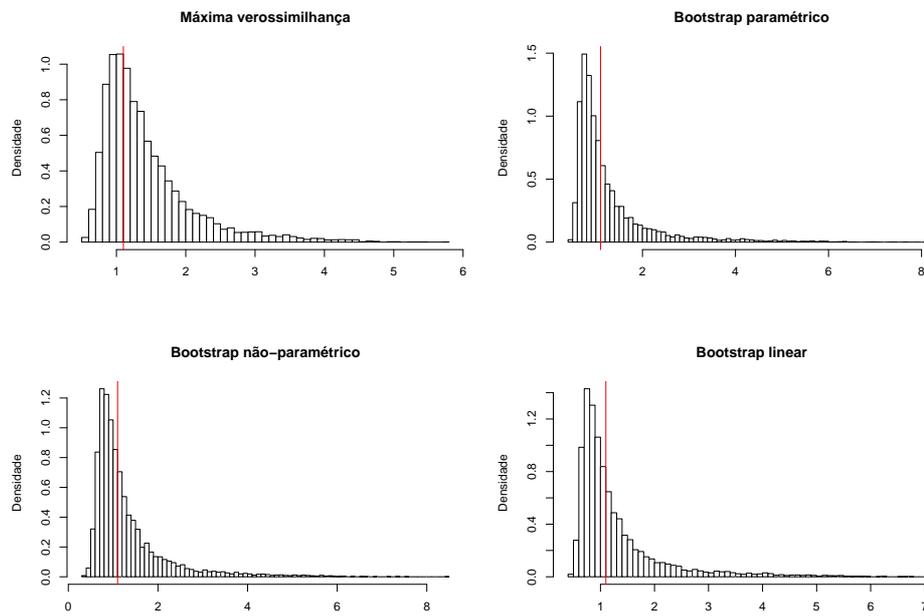


Figura 5.3 Histogramas das estimativas de α , quando $\alpha = 1.1$, $\lambda = 1.0$, $n = 35$

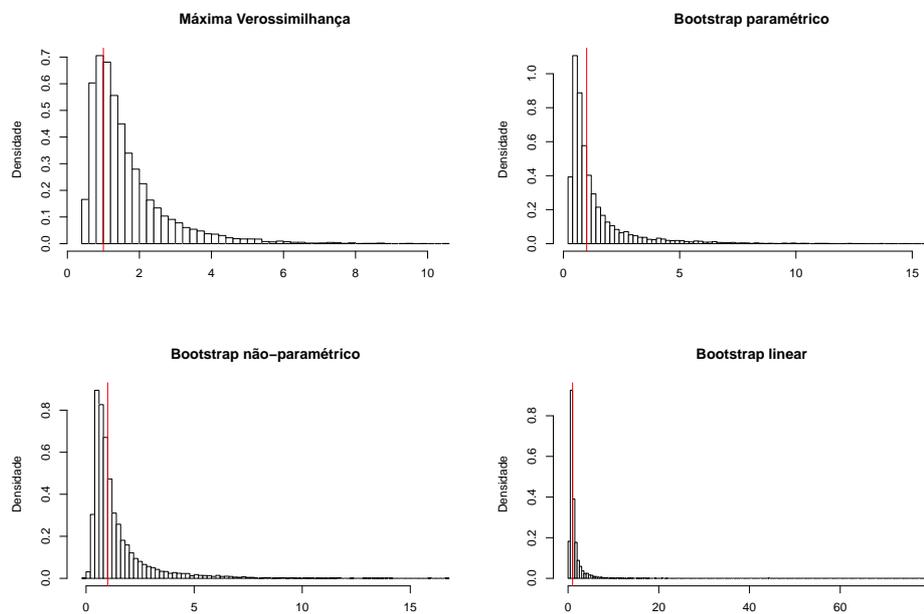


Figura 5.4 Histogramas das estimativas de λ , quando $\alpha = 1.1$, $\lambda = 1.0$, $n = 35$

Nas Tabelas 5.7, 5.8 e 5.9 encontram-se os resultados de simulação em que os verdadeiros valores para os parâmetros α e λ são 1.6 e 1.0. Todos os estimadores corrigidos, no geral, apresentam viés inferior ao viés apresentado pelo estimador não corrigido, $\hat{\alpha}$, com destaque para os estimadores $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, que em pequenos e médios tamanhos amostrais apresentam os menores vieses. Por exemplo, com $n = 60$ o viés do estimador $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são 0.0510 e -0.1128 , respectivamente, e os vieses dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são 0.4808, 0.3729, 0.3928 e 0.3693, respectivamente. Quando $n \geq 150$ não há grande diferença entre o viés apresentado pelos estimadores corrigidos. Por exemplo, com $n = 300$ o viés de $\hat{\alpha}$ é 0.2015 e os vieses dos estimadores corrigidos $\bar{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são 0.1340, 0.1291, 0.1217, 0.1218 e 0.1221, respectivamente.

Para o parâmetro λ todos os estimadores corrigidos apresentam viés inferior ao viés apresentado pelo estimador não corrigido, com destaque para o estimador $\tilde{\lambda}$, que em amostras pequenas e médias apresenta os menores vieses. Por exemplo, com $n = 45$ o viés do estimador $\tilde{\lambda}$ é -0.1193 e os vieses dos estimadores $\hat{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 0.9846, 0.2814, 0.8620, 0.9016 e 0.8898, respectivamente. Quando $n \geq 150$ não há grande diferença entre o viés apresentado pelos estimadores corrigidos. Por exemplo, com $n = 250$ o viés de $\hat{\lambda}$ é 0.4256 e os vieses dos estimadores corrigidos $\bar{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 0.33113, 0.3232, 0.3153, 0.3183 e 0.3386, respectivamente.

No que tange o EQM tem-se que em pequenos e médios tamanhos amostrais os estimadores $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ apresentam EQM maiores do que o estimador $\hat{\alpha}$. Apenas, em grandes tamanhos amostrais estes estimadores passam a apresentar EQM menores do que o estimador não corrigido, apresentado EQM's semelhantes aos outros dois estimadores corrigidos. Adicionalmente, os estimadores $\tilde{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ apresentam, no geral, os menores valores de EQM. Por exemplo, com $n = 90$ os EQM's dos estimadores corrigidos, $\bar{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\check{\alpha}_1$, $\check{\alpha}_2$ e $\check{\alpha}_3$ são 0.1867, 0.1256, 0.5434, 0.5542 e 0.5325, respectivamente, enquanto o estimador de $\hat{\alpha}$ é 0.5124. Este mesmo comportamento acontece com os estimadores considerados para o parâmetro λ . Por exemplo, com $n = 100$ os EQM's dos estimadores $\hat{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$, $\check{\lambda}_1$, $\check{\lambda}_2$ e $\check{\lambda}_3$ são 0.7845, 0.3043, 0.2233, 0.6959, 0.7154 e 0.7045, respectivamente.

Nas Figuras 5.5 e 5.6 encontram-se histogramas das estimativas de alguns estimadores considerados para os parâmetros α e λ . Observa-se que todos os histogramas apresentam assimetria. Na Figura 5.5 pode-se observar que os histogramas referentes aos estimadores corrigidos não estão concentrados em torno do verdadeiro valor do parâmetro, já o histograma das estimativas de $\hat{\alpha}$ está concentrado em torno do real valor do parâmetro. Na Figura 5.6 nenhum dos histogramas está concentrado em torno do real valor do parâmetro e todos os histogramas apresentam estimativas relativamente grandes, o que confirma graficamente o grande valor do viés destes estimadores.

Nas Tabelas 5.10 e 5.11 encontram-se os resultados para a medida de desempenho global *IRBSQ*. Os números da Tabela 5.10 indicam que o estimador $\bar{\alpha}$ apresenta o melhor desempenho global, especialmente nos menores tamanhos amostrais. O estimador $\tilde{\alpha}$ apresenta bom desempenho em médios tamanhos amostrais e em grandes tamanhos amostrais os desempenhos de todos os estimadores corrigidos são semelhantes. Em todas as situações os estimadores corrigidos apresentam melhor desempenho do que o estimador de máxima verossimilhança.

Os resultados da Tabela 5.11 indicam que em pequenos tamanhos amostrais os estimadores

$\bar{\lambda}$ e $\tilde{\lambda}$ apresentam os melhores desempenhos globais. Da mesma forma que para o parâmetro α , em grandes tamanhos amostrais todos os estimadores corrigidos apresentam desempenhos globais semelhantes. Em médios tamanhos amostrais o estimador $\tilde{\lambda}$ apresenta o melhor desempenho global entre todos os estimadores. Tem-se também que todos os estimadores corrigidos apresentam melhor desempenho global do que o estimador de máxima verossimilhança.

Tabela 5.7 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
35	$\hat{\theta}$	0.5197	32.4825	0.9755	1.0557	105.5732	2.1565
	$\bar{\theta}$	-0.1367	-8.5434	0.1595	0.2012	20.1179	0.2037
	$\tilde{\theta}$	-0.5795	-36.2195	0.4763	-0.4047	-40.4729	0.4645
	$\check{\theta}_1$	0.5100	31.8751	1.8020	0.9934	99.3358	3.3402
	$\check{\theta}_2$	0.5259	32.8678	1.6846	1.0208	102.0824	3.2445
	$\check{\theta}_3$	0.4898	30.6107	1.5965	1.0214	102.1353	3.2709
40	$\hat{\theta}$	0.5119	31.9917	0.9333	1.0072	100.7210	1.9366
	$\bar{\theta}$	-0.0866	-5.4100	0.1617	0.2408	24.0764	0.2292
	$\tilde{\theta}$	-0.4330	-27.0625	0.2599	-0.2236	-22.3599	0.1947
	$\check{\theta}_1$	0.4891	30.5667	1.6618	0.9250	92.5038	2.8486
	$\check{\theta}_2$	0.5041	31.5039	1.5636	0.9528	95.2781	2.7821
	$\check{\theta}_3$	0.4722	29.5100	1.4878	0.9458	94.5799	2.6602
45	$\hat{\theta}$	0.5243	32.7675	0.9951	0.9846	98.4621	1.8967
	$\bar{\theta}$	-0.0350	-2.1897	0.1747	0.2814	28.1402	0.2667
	$\tilde{\theta}$	-0.3429	-21.4341	0.2297	-0.1193	-11.9262	0.1897
	$\check{\theta}_1$	0.4513	28.2083	1.6436	0.8620	86.2029	2.6753
	$\check{\theta}_2$	0.4781	29.8814	1.5828	0.9016	90.1611	2.6534
	$\check{\theta}_3$	0.4412	27.5746	1.4826	0.8898	88.9776	2.5017
50	$\hat{\theta}$	0.5111	31.9445	0.9361	0.9387	93.8694	1.7228
	$\bar{\theta}$	-0.0001	-0.0068	0.1820	0.3042	30.4247	0.2840
	$\tilde{\theta}$	-0.2483	-15.5205	0.1315	-0.0152	-1.5162	0.0976
	$\check{\theta}_1$	0.4244	26.5245	1.4777	0.8062	80.6245	2.3420
	$\check{\theta}_2$	0.4482	28.0152	1.4377	0.8417	84.1738	2.3421
	$\check{\theta}_3$	0.4171	26.0663	1.3516	0.8344	83.4388	2.1918

Tabela 5.8 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
55	$\hat{\theta}$	0.4958	30.9856	0.8588	0.9019	90.1941	1.5601
	$\bar{\theta}$	0.0284	1.7760	0.1853	0.3261	32.6077	0.2990
	$\tilde{\theta}$	-0.1709	-10.6789	0.0927	0.0711	7.1116	0.0799
	$\check{\theta}_1$	0.3969	24.8054	1.2980	0.7570	75.6951	2.0165
	$\check{\theta}_2$	0.4193	26.2060	1.2679	0.7898	78.9785	2.0197
	$\check{\theta}_3$	0.3919	24.4955	1.2011	0.7860	78.5975	1.8884
60	$\hat{\theta}$	0.4808	30.0492	0.7991	0.8700	87.0030	1.4591
	$\bar{\theta}$	0.0510	3.1867	0.1873	0.3426	34.2563	0.3137
	$\tilde{\theta}$	-0.1128	-7.0485	0.0813	0.1333	13.3257	0.0910
	$\check{\theta}_1$	0.3729	23.3066	1.1692	0.7161	71.6120	1.8249
	$\check{\theta}_2$	0.3928	24.5507	1.1445	0.7466	74.6559	1.8330
	$\check{\theta}_3$	0.3693	23.0830	1.0900	0.7473	74.7284	1.7270
70	$\hat{\theta}$	0.4542	28.3882	0.7140	0.8135	81.3488	1.2736
	$\bar{\theta}$	0.0850	5.3105	0.1994	0.3655	36.5524	0.3371
	$\tilde{\theta}$	-0.0313	-1.9586	0.0950	0.2177	21.7714	0.1404
	$\check{\theta}_1$	0.3343	20.8954	0.9711	0.6506	65.0562	1.4895
	$\check{\theta}_2$	0.3508	21.9259	0.9523	0.6756	67.5648	1.4943
	$\check{\theta}_3$	0.3330	20.8103	0.9190	0.6833	68.3324	1.4284
80	$\hat{\theta}$	0.4058	25.3596	0.5798	0.7350	73.5036	1.0253
	$\bar{\theta}$	0.0950	5.9384	0.1882	0.3619	36.1928	0.3173
	$\tilde{\theta}$	0.0141	0.8800	0.1102	0.2599	25.9850	0.1764
	$\check{\theta}_1$	0.2728	17.0527	0.7248	0.5643	56.4334	1.1044
	$\check{\theta}_2$	0.2882	18.0147	0.7213	0.5870	58.7018	1.1209
	$\check{\theta}_3$	0.2735	17.0959	0.6960	0.5986	59.8554	1.0734
90	$\hat{\theta}$	0.3806	23.7904	0.5124	0.6912	69.1202	0.8970
	$\bar{\theta}$	0.1081	6.7585	0.1867	0.3664	36.6428	0.3143
	$\tilde{\theta}$	0.0474	2.9654	0.1256	0.2902	29.0222	0.2065
	$\check{\theta}_1$	0.2202	13.7603	0.5434	0.5008	50.0813	0.8535
	$\check{\theta}_2$	0.2370	14.8147	0.5542	0.5237	52.3673	0.8794
	$\check{\theta}_3$	0.2235	13.9707	0.5325	0.5396	53.9623	0.8540
100	$\hat{\theta}$	0.3556	22.2261	0.4432	0.6531	65.3149	0.7845
	$\bar{\theta}$	0.1159	7.2429	0.1777	0.3685	36.8534	0.3043
	$\tilde{\theta}$	0.0693	4.3291	0.1314	0.3102	31.0199	0.2233
	$\check{\theta}_1$	0.1957	12.2337	0.4402	0.4639	46.3910	0.6959
	$\check{\theta}_2$	0.2090	13.0605	0.4483	0.4820	48.2038	0.7154
	$\check{\theta}_3$	0.1990	12.4378	0.4341	0.5019	50.1947	0.7045

Tabela 5.9 Medidas de precisão de estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Estimador	Estimativa de α			Estimativa de λ		
		Viés	Viés Relativo	EQM	Viés	Viés Relativo	EQM
150	$\hat{\theta}$	0.2738	17.1122	0.2645	0.5216	52.1629	0.4733
	$\bar{\theta}$	0.1265	7.9091	0.1417	0.3506	35.0581	0.2483
	$\tilde{\theta}$	0.1083	6.7695	0.1273	0.3281	32.8051	0.2225
	$\check{\theta}_1$	0.1237	7.7300	0.1931	0.3459	34.5869	0.3107
	$\check{\theta}_2$	0.1304	8.1475	0.2004	0.3564	35.6410	0.3244
	$\check{\theta}_3$	0.1261	7.8812	0.1937	0.3810	38.1041	0.3338
200	$\hat{\theta}$	0.2429	15.1819	0.1901	0.4666	46.6582	0.3497
	$\bar{\theta}$	0.1363	8.5167	0.1162	0.3442	34.4213	0.2123
	$\tilde{\theta}$	0.1262	7.8898	0.1096	0.3319	33.1936	0.2004
	$\check{\theta}_1$	0.1234	7.7139	0.1257	0.3292	32.9236	0.2196
	$\check{\theta}_2$	0.1263	7.8964	0.1306	0.3346	33.4613	0.2279
	$\check{\theta}_3$	0.1247	7.7945	0.1264	0.3574	35.7430	0.2401
250	$\hat{\theta}$	0.2182	13.6394	0.1534	0.4256	42.5586	0.2836
	$\bar{\theta}$	0.1353	8.4555	0.1023	0.3313	33.1293	0.1882
	$\tilde{\theta}$	0.1286	8.0384	0.0984	0.3232	32.3197	0.1811
	$\check{\theta}_1$	0.1215	7.5946	0.1009	0.3153	31.5331	0.1814
	$\check{\theta}_2$	0.1227	7.6689	0.1040	0.3183	31.8302	0.1864
	$\check{\theta}_3$	0.1222	7.6392	0.1014	0.3386	33.8615	0.1986
300	$\hat{\theta}$	0.2015	12.5952	0.1247	0.3998	39.9774	0.2401
	$\bar{\theta}$	0.1340	8.3723	0.0879	0.3233	32.3339	0.1694
	$\tilde{\theta}$	0.1291	8.0675	0.0854	0.3174	31.7442	0.1646
	$\check{\theta}_1$	0.1217	7.6055	0.0832	0.3092	30.9179	0.1592
	$\check{\theta}_2$	0.1218	7.6095	0.0843	0.3105	31.0485	0.1613
	$\check{\theta}_3$	0.1221	7.6311	0.0835	0.3287	32.8739	0.1735
400	$\hat{\theta}$	0.1782	11.1403	0.0929	0.3628	36.2788	0.1873
	$\bar{\theta}$	0.1289	8.0540	0.0700	0.3074	30.7379	0.1420
	$\tilde{\theta}$	0.1260	7.8756	0.0688	0.3040	30.3951	0.1396
	$\check{\theta}_1$	0.1221	7.6301	0.0674	0.2997	29.9664	0.1366
	$\check{\theta}_2$	0.1220	7.6228	0.0680	0.3003	30.0253	0.1376
	$\check{\theta}_3$	0.1222	7.6398	0.0675	0.3140	31.3975	0.1465
500	$\hat{\theta}$	0.1658	10.3599	0.0741	0.3416	34.1623	0.1588
	$\bar{\theta}$	0.1269	7.9313	0.0581	0.2982	29.8248	0.1262
	$\tilde{\theta}$	0.1249	7.8064	0.0574	0.2959	29.5862	0.1246
	$\check{\theta}_1$	0.1222	7.6398	0.0562	0.2930	29.3037	0.1225
	$\check{\theta}_2$	0.1218	7.6128	0.0564	0.2932	29.3167	0.1229
	$\check{\theta}_3$	0.1223	7.6441	0.0563	0.3044	30.4386	0.1300

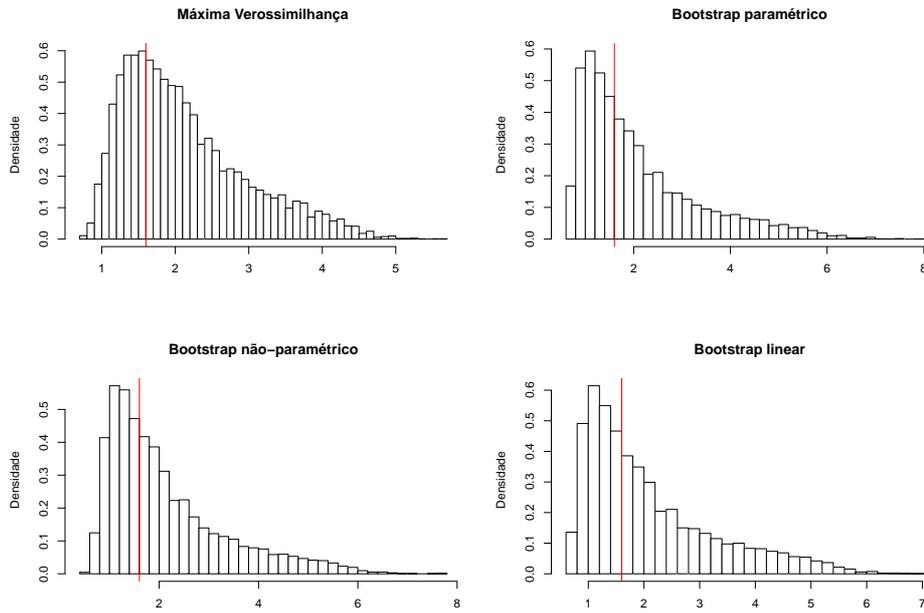


Figura 5.5 Histogramas das estimativas de α , quando $\alpha = 1.6$, $\lambda = 1.0$, $n = 35$

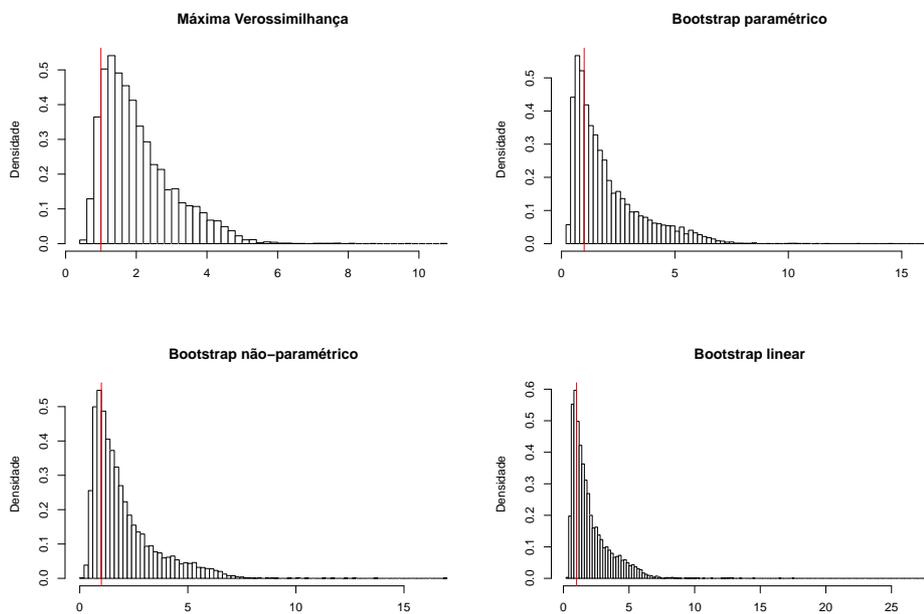


Figura 5.6 Histogramas das estimativas de λ , quando $\alpha = 1.6$, $\lambda = 1.0$, $n = 35$

Tabela 5.10 Medida de desempenho global dos estimadores de α

n	$\hat{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\tilde{\alpha}$	$\check{\alpha}_1$	$\check{\alpha}_2$	$\check{\alpha}_3$
35	26.0214	5.1279	22.5171	20.4842	21.8209	19.9416
50	22.2710	0.7755	9.2725	15.6148	16.7301	15.4236
70	18.3513	3.1796	1.3344	12.1261	12.7399	12.0817
100	13.8192	4.2160	2.5495	7.1015	7.5683	7.2151
250	8.0591	4.8895	4.6494	4.4000	4.4406	4.4255
500	6.0350	4.5811	4.5091	4.4140	4.3981	4.4165

Tabela 5.11 Medida de desempenho global dos estimadores de λ

n	$\hat{\lambda}$	$\bar{\lambda}$	$\tilde{\lambda}$	$\check{\lambda}_1$	$\check{\lambda}_2$	$\check{\lambda}_3$
35	72.2955	13.6571	27.6108	61.6134	64.2208	65.7941
50	59.9733	18.5961	6.1529	47.6856	50.1280	50.6783
70	49.6534	21.6794	13.4218	38.0699	39.5659	40.9501
100	38.9447	21.5447	18.2266	27.0556	28.1043	29.9706
250	24.7363	19.1815	18.7181	18.2769	18.4459	19.8514
500	19.7695	17.2289	17.0915	16.9302	16.9376	17.6468

5.2.2 Estimação intervalar

Nesta seção são apresentados os resultados referentes às simulações relativas à estimação intervalar dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax.

As Tabelas 5.12 a 5.19 apresentam os resultados das simulações realizadas para estimação intervalar do parâmetro α , quando os valores verdadeiros dos parâmetros são de $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$.

As amplitudes médias dos intervalos de confiança percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram maiores do que as amplitudes médias dos outros estimadores intervalares considerados, para os três níveis nominais de confiança e em amostras pequenas e médias ($n < 150$). Por exemplo, ao nível nominal de 99% e quando $n = 45$ o intervalo assintótico apresenta amplitude média de 0.6592, enquanto as amplitudes médias dos intervalos BCa e percentil foram 0.7109 e 0.9398, respectivamente, utilizando a versão paramétrica da reamostragem bootstrap, e 0.6884 e 0.9320 quando se utiliza a versão não-paramétrica. Além disso, pode-se observar que não há grande diferença entre as amplitudes médias dos intervalos de confiança assintótico e BCa.

Todos os intervalos apresentam, em grandes amostras ($n \geq 150$), amplitudes médias semelhantes. Por exemplo, com $n = 200$ e ao nível de confiança de 90% as amplitudes médias do intervalo percentil paramétrico e não-paramétrico são de 0.1859 e 0.1844, respectivamente, enquanto que as amplitudes médias dos intervalos assintótico e BCa, paramétrico e não-paramétrico, foram iguais a 0.1789, 0.1804 e 0.1786, respectivamente. Vale notar também que com o aumento do tamanho amostral as amplitudes médias dos intervalos de confiança diminuem.

Tabela 5.12 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
35	90	assintótico	0.5078	94.48	0.00	5.52
		percentil - BP	0.6271	85.82	13.14	1.04
		BCa - BP	0.5121	88.24	6.73	5.03
		percentil - BNP	0.6039	84.02	14.59	1.39
		BCa - BNP	0.4832	86.15	8.08	5.77
	95	assintótico	0.6050	96.48	0.00	3.52
		percentil - BP	0.7938	90.84	8.86	0.30
		BCa - BP	0.6294	94.01	3.76	2.23
		percentil - BNP	0.7684	89.41	10.01	0.58
		BCa - BNP	0.5947	92.33	4.96	2.71
	99	assintótico	0.7952	98.78	0.00	1.22
		percentil - BP	1.1934	96.22	3.78	0.00
		BCa - BP	0.8568	97.90	1.78	0.32
		percentil - BNP	1.1596	95.18	4.73	0.09
		BCa - BNP	0.8128	97.17	2.33	0.50
40	90	assintótico	0.4601	92.62	1.02	6.36
		percentil - BP	0.5578	86.40	12.45	1.15
		BCa - BP	0.4654	89.27	6.02	4.71
		percentil - BNP	0.5417	84.21	14.05	1.74
		BCa - BNP	0.4432	86.80	7.42	5.78
	95	assintótico	0.5483	96.42	0.00	3.58
		percentil - BP	0.7026	91.40	8.23	0.37
		BCa - BP	0.5704	94.57	3.33	2.10
		percentil - BNP	0.6857	89.75	9.64	0.61
		BCa - BNP	0.5445	92.77	4.41	2.82
	99	assintótico	0.7205	98.70	0.00	1.30
		percentil - BP	1.0484	96.61	3.37	0.02
		BCa - BP	0.7740	98.00	1.58	0.42
		percentil - BNP	1.0285	95.53	4.40	0.07
		BCa - BNP	0.7418	97.39	1.98	0.63

Tabela 5.13 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
45	90	assintótico	0.4209	91.98	1.62	6.40
		percentil - BP	0.5076	87.43	11.45	1.12
		BCa - BP	0.4294	89.32	5.54	5.14
		percentil - BNP	0.4962	85.50	12.88	1.62
		BCa - BNP	0.4129	87.59	6.64	5.77
	95	assintótico	0.5016	96.29	0.00	3.71
		percentil - BP	0.6365	92.15	7.61	0.24
		BCa - BP	0.5254	94.63	3.05	2.32
		percentil - BNP	0.6254	90.75	8.75	0.50
		BCa - BNP	0.5066	93.09	4.01	2.90
	99	assintótico	0.6592	98.94	0.00	1.06
		percentil - BP	0.9398	96.78	3.21	0.01
		BCa - BP	0.7109	98.37	1.24	0.39
		percentil - BNP	0.9320	95.86	4.09	0.05
		BCa - BNP	0.6884	97.63	1.85	0.52
50	90	assintótico	0.3926	92.14	1.97	5.89
		percentil - BP	0.4623	87.45	11.15	1.40
		BCa - BP	0.3989	89.33	5.40	5.27
		percentil - BNP	0.4552	85.54	12.45	2.01
		BCa - BNP	0.3867	87.54	6.68	5.78
	95	assintótico	0.4678	96.51	0.00	3.49
		percentil - BP	0.5760	92.34	7.15	0.51
		BCa - BP	0.4869	94.54	2.70	2.76
		percentil - BNP	0.5700	90.74	8.50	0.76
		BCa - BNP	0.4728	92.91	3.94	3.15
	99	assintótico	0.6148	98.77	0.00	1.23
		percentil - BP	0.8388	97.21	2.77	0.02
		BCa - BP	0.6550	98.25	1.06	0.69
		percentil - BNP	0.8356	96.08	3.80	0.12
		BCa - BNP	0.6390	97.48	1.64	0.88

Tabela 5.14 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
55	90	assintótico	0.3743	92.07	2.42	5.51
		percentil - BP	0.4348	87.22	11.28	1.50
		BCa - BP	0.3796	89.01	5.50	5.49
		percentil - BNP	0.4282	85.89	12.37	1.74
		BCa - BNP	0.3687	87.66	6.49	5.85
	95	assintótico	0.4460	96.59	0.23	3.18
		percentil - BP	0.5400	91.97	7.55	0.48
		BCa - BP	0.4628	94.18	2.83	2.99
		percentil - BNP	0.5338	90.77	8.47	0.76
		BCa - BNP	0.4502	92.90	3.80	3.30
	99	assintótico	0.5861	98.92	0.00	1.08
		percentil - BP	0.7802	97.13	2.83	0.04
		BCa - BP	0.6222	98.04	1.23	0.73
		percentil - BNP	0.7774	96.26	3.64	0.10
		BCa - BNP	0.6070	97.52	1.64	0.84
60	90	assintótico	0.3529	92.12	2.55	5.33
		percentil - BP	0.4066	87.95	10.82	1.23
		BCa - BP	0.3582	89.08	5.24	5.68
		percentil - BNP	0.3988	86.20	11.94	1.86
		BCa - BNP	0.3470	87.42	6.51	6.07
	95	assintótico	0.4205	96.60	0.34	3.06
		percentil - BP	0.5038	92.79	6.79	0.42
		BCa - BP	0.4363	94.68	2.71	2.61
		percentil - BNP	0.4961	91.42	7.93	0.65
		BCa - BNP	0.4232	93.17	3.73	3.10
	99	assintótico	0.5526	99.04	0.00	0.96
		percentil - BP	0.7257	97.43	2.54	0.03
		BCa - BP	0.5864	98.56	0.98	0.46
		percentil - BNP	0.7187	96.51	3.39	0.10
		BCa - BNP	0.5703	97.92	1.44	0.64

Tabela 5.15 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
70	90	assintótico	0.3236	91.62	3.08	5.30
		percentil - BP	0.3660	87.34	10.75	1.91
		BCa - BP	0.3282	90.28	5.47	4.25
		percentil - BNP	0.3606	86.05	11.74	2.21
		BCa - BNP	0.3200	88.46	6.52	5.02
	95	assintótico	0.3856	95.98	0.65	3.37
		percentil - BP	0.4509	92.39	6.94	0.67
		BCa - BP	0.3985	95.03	2.86	2.11
		percentil - BNP	0.4457	91.16	7.86	0.98
		BCa - BNP	0.3888	94.18	3.41	2.41
	99	assintótico	0.5067	98.80	0.00	1.20
		percentil - BP	0.6422	97.26	2.68	0.06
		BCa - BP	0.5337	98.74	0.92	0.34
		percentil - BNP	0.6398	96.64	3.17	0.19
		BCa - BNP	0.5220	98.19	1.38	0.43
80	90	assintótico	0.2975	91.16	3.25	5.59
		percentil - BP	0.3312	87.79	10.43	1.78
		BCa - BP	0.3027	89.92	5.36	4.72
		percentil - BNP	0.3269	86.35	11.41	2.24
		BCa - BNP	0.2963	88.79	6.30	4.91
	95	assintótico	0.3545	95.95	0.79	3.26
		percentil - BP	0.4059	92.77	6.51	0.72
		BCa - BP	0.3664	95.05	2.81	2.14
		percentil - BNP	0.4017	91.71	7.37	0.92
		BCa - BNP	0.3590	94.08	3.56	2.36
	99	assintótico	0.4659	98.98	0.00	1.02
		percentil - BP	0.5704	97.56	2.35	0.09
		BCa - BP	0.4909	98.71	0.89	0.40
		percentil - BNP	0.5675	96.83	3.03	0.14
		BCa - BNP	0.4820	98.33	1.27	0.40

Tabela 5.16 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
90	90	assintótico	0.2775	91.32	3.38	5.30
		percentil - BP	0.3045	88.47	9.33	2.20
		BCa - BP	0.2820	90.21	5.26	4.53
		percentil - BNP	0.3005	87.35	10.24	2.41
		BCa - BNP	0.2765	89.11	5.99	4.90
	95	assintótico	0.3307	95.82	1.03	3.15
		percentil - BP	0.3718	93.08	6.08	0.84
		BCa - BP	0.3407	95.12	2.55	2.33
		percentil - BNP	0.3676	92.37	6.60	1.03
		BCa - BNP	0.3343	94.25	3.19	2.56
	99	assintótico	0.4346	98.96	0.00	1.04
		percentil - BP	0.5170	97.91	2.01	0.08
		BCa - BP	0.4572	98.82	0.75	0.43
		percentil - BNP	0.5141	97.18	2.63	0.19
		BCa - BNP	0.4493	98.29	1.13	0.58
100	90	assintótico	0.2605	91.11	3.34	5.55
		percentil - BP	0.2824	89.05	8.82	2.13
		BCa - BP	0.2639	90.53	4.78	4.69
		percentil - BNP	0.2792	87.73	9.73	2.54
		BCa - BNP	0.2597	89.16	5.62	5.22
	95	assintótico	0.3104	95.86	1.02	3.12
		percentil - BP	0.3436	93.76	5.37	0.87
		BCa - BP	0.3184	95.33	2.31	2.36
		percentil - BNP	0.3402	92.83	6.09	1.08
		BCa - BNP	0.3133	94.34	2.96	2.70
	99	assintótico	0.4079	98.92	0.02	1.06
		percentil - BP	0.4735	98.07	1.88	0.05
		BCa - BP	0.4267	98.78	0.66	0.56
		percentil - BNP	0.4710	97.60	2.28	0.12
		BCa - BNP	0.4205	98.49	0.96	0.55

Tabela 5.17 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
150	90	assintótico	0.2085	90.17	3.69	6.14
		percentil - BP	0.2199	88.66	8.50	2.84
		BCa - BP	0.2106	90.18	4.81	5.01
		percentil - BNP	0.2172	87.69	9.16	3.15
		BCa - BNP	0.2076	88.95	5.57	5.48
	95	assintótico	0.2484	95.39	1.27	3.34
		percentil - BP	0.2655	93.88	4.90	1.22
		BCa - BP	0.2530	95.06	2.39	2.55
		percentil - BNP	0.2623	93.20	5.37	1.43
		BCa - BNP	0.2494	94.34	2.89	2.77
	99	assintótico	0.3265	98.83	0.12	1.05
		percentil - BP	0.3593	98.42	1.47	0.11
		BCa - BP	0.3401	99.07	0.45	0.48
		percentil - BNP	0.3558	98.05	1.81	0.14
		BCa - BNP	0.3351	98.77	0.65	0.58
200	90	assintótico	0.1789	89.91	4.22	5.87
		percentil - BP	0.1859	88.79	7.91	3.30
		BCa - BP	0.1804	89.53	5.18	5.29
		percentil - BNP	0.1844	88.16	8.41	3.43
		BCa - BNP	0.1786	88.88	5.55	5.57
	95	assintótico	0.2132	94.84	1.67	3.49
		percentil - BP	0.2236	93.89	4.66	1.45
		BCa - BP	0.2163	94.63	2.54	2.83
		percentil - BNP	0.2219	93.23	5.13	1.64
		BCa - BNP	0.2142	94.16	2.91	2.93
	99	assintótico	0.2803	98.83	0.12	1.05
		percentil - BP	0.2999	98.42	1.38	0.20
		BCa - BP	0.2916	98.90	0.47	0.63
		percentil - BNP	0.2977	98.10	1.65	0.25
		BCa - BNP	0.2891	98.68	0.66	0.66

Tabela 5.18 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
250	90	assintótico	0.1593	90.51	3.86	5.63
		percentil - BP	0.1638	89.65	7.22	3.13
		BCa - BP	0.1599	89.83	4.82	5.35
		percentil - BNP	0.1625	88.99	7.77	3.24
		BCa - BNP	0.1584	89.17	5.22	5.61
	95	assintótico	0.1898	95.51	1.47	3.02
		percentil - BP	0.1966	94.62	4.11	1.27
		BCa - BP	0.1915	95.07	2.25	2.68
		percentil - BNP	0.1951	94.23	4.35	1.42
		BCa - BNP	0.1898	94.64	2.52	2.84
	99	assintótico	0.2495	99.04	0.15	0.81
		percentil - BP	0.2623	98.86	1.01	0.13
		BCa - BP	0.2585	99.05	0.39	0.56
		percentil - BNP	0.2600	98.60	1.17	0.23
		BCa - BNP	0.2558	98.80	0.50	0.70
300	90	assintótico	0.1451	90.17	4.46	5.37
		percentil - BP	0.1487	89.22	7.55	3.23
		BCa - BP	0.1458	89.90	5.11	4.99
		percentil - BNP	0.1478	88.89	7.75	3.36
		BCa - BNP	0.1447	89.40	5.36	5.24
	95	assintótico	0.1730	95.17	1.81	3.02
		percentil - BP	0.1783	94.26	4.31	1.43
		BCa - BP	0.1745	95.13	2.43	2.44
		percentil - BNP	0.1771	93.94	4.54	1.52
		BCa - BNP	0.1732	94.60	2.75	2.65
	99	assintótico	0.2273	99.09	0.10	0.81
		percentil - BP	0.2372	98.57	1.16	0.27
		BCa - BP	0.2357	99.20	0.27	0.53
		percentil - BNP	0.2357	98.53	1.19	0.28
		BCa - BNP	0.2337	99.11	0.37	0.52

Tabela 5.19 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
400	90	assintótico	0.1250	90.45	4.40	5.15
		percentil - BP	0.1273	89.51	7.14	3.35
		BCa - BP	0.1257	90.44	4.91	4.65
		percentil - BNP	0.1267	89.42	7.03	3.55
		BCa - BNP	0.1251	89.82	5.23	4.95
	95	assintótico	0.1490	95.48	1.77	2.75
		percentil - BP	0.1524	94.77	3.72	1.51
		BCa - BP	0.1504	95.33	2.25	2.42
		percentil - BNP	0.1517	94.54	3.91	1.55
		BCa - BNP	0.1496	94.89	2.54	2.57
	99	assintótico	0.1958	99.05	0.21	0.74
		percentil - BP	0.2018	98.62	1.09	0.29
		BCa - BP	0.2026	99.06	0.38	0.56
		percentil - BNP	0.2011	98.69	1.02	0.29
		BCa - BNP	0.2016	98.98	0.47	0.55
500	90	assintótico	0.1116	89.86	4.79	5.35
		percentil - BP	0.1131	89.08	7.31	3.61
		BCa - BP	0.1119	89.50	5.41	5.09
		percentil - BNP	0.1125	88.80	7.46	3.74
		BCa - BNP	0.1112	89.21	5.55	5.24
	95	assintótico	0.1330	95.03	1.99	2.98
		percentil - BP	0.1351	94.57	3.79	1.64
		BCa - BP	0.1337	94.70	2.49	2.81
		percentil - BNP	0.1344	94.19	4.06	1.75
		BCa - BNP	0.1329	94.33	2.68	2.99
	99	assintótico	0.1748	98.89	0.26	0.85
		percentil - BP	0.1784	98.70	1.01	0.29
		BCa - BP	0.1794	98.86	0.38	0.76
		percentil - BNP	0.1774	98.50	1.14	0.36
		BCa - BNP	0.1783	98.67	0.50	0.83

O intervalo assintótico apresenta, em quase todos os tamanhos amostrais, cobertura maior do que o nível nominal, ao se analisar os resultados dos níveis nominais de 90% e 95%. Por exemplo, com $n = 60$ as coberturas observadas foram 92.12% e 96.60% para os intervalos com nível nominal de 90% e 95%, respectivamente. Ao se analisar os resultados do nível nominal de 99% do intervalo assintótico nota-se que as coberturas encontram-se próximas ao nível nominal. Por exemplo, com $n = 40$ a cobertura para este intervalo foi de 98.70%.

A cobertura do intervalo de confiança BCa paramétrico em geral encontra-se mais próxima dos níveis nominais em todos os tamanhos amostrais. Tem-se também que o intervalo de confiança percentil não-paramétrico é o que apresenta, em geral, coberturas mais distantes dos níveis nominais. Por exemplo, com $n = 50$ e ao nível nominal de 95% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 94.54%, as coberturas dos intervalos de confiança percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram 92.34% e 90.74%, respectivamente, e para os intervalos assintótico e BCa não-paramétrico as coberturas nominais foram 96.51% e 92.91%, respectivamente.

Ao se analisar as probabilidades observadas de não cobertura tem-se que os intervalos de confiança percentil paramétrico e não-paramétrico apresentam valores muito superiores para não cobertura à esquerda (“Esquerda(%)”) do que para a não cobertura à direita (“Direita(%)”). Em contrapartida, o intervalo de confiança assintótico apresenta maiores valores para “Direita(%)” do que para “Esquerda(%)” e os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, são os que apresentam valores mais próximos para estas duas probabilidades. Por exemplo, com $n = 50$ e ao nível nominal de 95%, as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)” do intervalo assintótico foram 0.00% e 3.49%, respectivamente, enquanto que para os intervalos percentil elas foram 7.15% e 0.51% utilizando a versão paramétrica e 8.50% e 0.76% utilizando a versão não-paramétrica. Para o intervalo BCa paramétrico os resultados foram 2.70% e 2.76%, para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente, e para o intervalo BCa não-paramétrico os resultados foram 3.94% e 3.15%, para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”.

As Tabelas 5.20 a 5.27 apresentam os resultados das simulações realizadas para estimação intervalar do parâmetro λ , quando os valores verdadeiros dos parâmetros são de $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$.

Em tamanhos amostrais pequenos e médios ($n < 150$) os intervalos de confiança percentil, paramétrico e não-paramétrico, apresentam as maiores amplitudes médias dentre todas as cinco estimativas intervalares consideradas, para os três níveis nominais de confiança. Por exemplo, ao nível nominal de 99% e com $n = 70$ o intervalo assintótico apresenta amplitude média de 2.4086, enquanto as amplitudes médias dos intervalos BCa e percentil foram 2.7590 e 3.2397, respectivamente, utilizando a versão paramétrica de bootstrap e 2.7743 e 3.2849 utilizando a versão não-paramétrica. Adicionalmente, pode-se observar que não há grande diferença entre as amplitudes médias dos intervalos de confiança assintótico e BCa.

Todos os intervalos apresentam, em grandes amostras ($n \geq 150$), amplitudes semelhantes. Por exemplo, com $n = 250$ e ao nível de confiança de 90% as amplitudes médias do intervalo percentil foram de 0.7541 e 0.7524 para a versão paramétrica e não-paramétrica de bootstrap, respectivamente, enquanto as amplitudes médias dos intervalos assintótico e BCa, paramétrico e não-paramétrico, foram 0.7241, 0.7323 e 0.7305, respectivamente. Vale notar também que com o aumento do tamanho amostral as amplitudes médias dos intervalos de confiança dimi-

Tabela 5.20 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
35	90	assintótico	2.5386	91.48	0.00	8.52
		percentil - BP	3.1942	87.83	10.77	1.40
		BCa - BP	2.5617	88.05	6.14	5.81
		percentil - BNP	3.1544	87.24	11.06	1.70
		BCa - BNP	2.5028	87.13	6.46	6.41
	95	assintótico	3.0250	93.65	0.00	6.35
		percentil - BP	4.0335	92.85	6.66	0.49
		BCa - BP	3.1801	93.33	3.51	3.16
		percentil - BNP	3.9876	92.47	6.89	0.64
		BCa - BNP	3.1132	92.49	3.93	3.58
	99	assintótico	3.9755	96.72	0.00	3.28
		percentil - BP	5.9177	98.18	1.78	0.04
		BCa - BP	4.5452	98.09	1.06	0.85
		percentil - BNP	5.8373	97.43	2.48	0.09
		BCa - BNP	4.4578	97.51	1.36	1.13
40	90	assintótico	2.2819	91.11	0.00	8.89
		percentil - BP	2.8496	88.12	10.48	1.40
		BCa - BP	2.3381	88.14	5.66	6.20
		percentil - BNP	2.8303	87.51	10.72	1.77
		BCa - BNP	2.2966	87.43	6.11	6.46
	95	assintótico	2.7191	93.52	0.00	6.48
		percentil - BP	3.5976	93.41	6.14	0.45
		BCa - BP	2.9046	93.56	3.14	3.30
		percentil - BNP	3.5805	92.69	6.62	0.69
		BCa - BNP	2.8586	93.09	3.45	3.46
	99	assintótico	3.5735	96.68	0.00	3.32
		percentil - BP	5.3247	98.15	1.78	0.07
		BCa - BP	4.1701	98.39	0.88	0.73
		percentil - BNP	5.3159	97.79	2.14	0.07
		BCa - BNP	4.1215	98.03	1.09	0.88

Tabela 5.21 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
45	90	assintótico	2.0461	91.20	0.02	8.78
		percentil - BP	2.5811	88.50	9.68	1.82
		BCa - BP	2.1319	89.63	4.72	5.65
		percentil - BNP	2.5920	87.77	10.03	2.20
		BCa - BNP	2.1154	89.01	5.09	5.90
	95	assintótico	2.4380	93.86	0.00	6.14
		percentil - BP	3.2620	93.70	5.66	0.64
		BCa - BP	2.6513	94.50	2.50	3.00
		percentil - BNP	3.2947	93.26	5.87	0.87
		BCa - BNP	2.6403	93.93	2.92	3.15
	99	assintótico	3.2041	96.78	0.00	3.22
		percentil - BP	4.8800	98.21	1.67	0.12
		BCa - BP	3.8365	98.83	0.48	0.69
		percentil - BNP	4.9627	97.81	2.02	0.17
		BCa - BNP	3.8533	98.48	0.74	0.78
50	90	assintótico	1.8835	91.43	0.07	8.50
		percentil - BP	2.3199	88.65	9.09	2.26
		BCa - BP	1.9581	90.07	4.46	5.47
		percentil - BNP	2.3455	88.22	9.23	2.55
		BCa - BNP	1.9564	89.52	4.78	5.70
	95	assintótico	2.2443	93.79	0.00	6.21
		percentil - BP	2.9103	94.01	5.09	0.90
		BCa - BP	2.4229	94.66	2.36	2.98
		percentil - BNP	2.9566	93.57	5.38	1.05
		BCa - BNP	2.4311	94.16	2.79	3.05
	99	assintótico	2.9495	96.60	0.00	3.40
		percentil - BP	4.2677	98.46	1.43	0.11
		BCa - BP	3.4668	98.80	0.52	0.68
		percentil - BNP	4.3613	97.90	1.92	0.18
		BCa - BNP	3.5030	98.43	0.82	0.75

Tabela 5.22 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
55	90	assintótico	1.7908	91.45	0.27	8.28
		percentil - BP	2.1743	88.17	9.60	2.23
		BCa - BP	1.8590	89.98	4.90	5.12
		percentil - BNP	2.1926	87.97	9.57	2.46
		BCa - BNP	1.8574	89.22	5.37	5.41
	95	assintótico	2.1339	94.11	0.00	5.89
		percentil - BP	2.7236	93.47	5.51	1.02
		BCa - BP	2.2976	94.85	2.43	2.72
		percentil - BNP	2.7583	92.91	5.95	1.14
		BCa - BNP	2.3020	94.09	2.89	3.02
	99	assintótico	2.8044	96.84	0.00	3.16
		percentil - BP	3.9832	98.39	1.44	0.17
		BCa - BP	3.2833	98.71	0.63	0.66
		percentil - BNP	4.0518	97.83	1.86	0.31
		BCa - BNP	3.3133	98.47	0.75	0.78
60	90	assintótico	1.6769	91.44	0.35	8.21
		percentil - BP	2.0178	88.52	9.14	2.34
		BCa - BP	1.7394	90.07	4.89	5.04
		percentil - BNP	2.0230	87.80	9.67	2.53
		BCa - BNP	1.7305	88.96	5.44	5.60
	95	assintótico	1.9981	94.27	0.00	5.73
		percentil - BP	2.5203	93.58	5.27	1.15
		BCa - BP	2.1464	94.86	2.42	2.72
		percentil - BNP	2.5367	92.87	5.93	1.20
		BCa - BNP	2.1403	94.29	2.83	2.88
	99	assintótico	2.6259	96.98	0.00	3.02
		percentil - BP	3.6763	98.17	1.59	0.24
		BCa - BP	3.0634	98.88	0.38	0.74
		percentil - BNP	3.7216	97.89	1.90	0.21
		BCa - BNP	3.0713	98.73	0.54	0.73

Tabela 5.23 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
70	90	assintótico	1.5380	91.26	0.87	7.87
		percentil - BP	1.8036	88.30	9.67	2.03
		BCa - BP	1.5838	90.08	5.28	4.64
		percentil - BNP	1.8136	87.72	9.92	2.36
		BCa - BNP	1.5808	89.34	5.54	5.12
	95	assintótico	1.8327	94.57	0.00	5.43
		percentil - BP	2.2393	93.64	5.57	0.79
		BCa - BP	1.9452	95.42	2.49	2.09
		percentil - BNP	2.2595	93.29	5.73	0.98
		BCa - BNP	1.9469	94.45	3.06	2.49
	99	assintótico	2.4086	97.59	0.00	2.41
		percentil - BP	3.2397	98.41	1.44	0.15
		BCa - BP	2.7590	98.99	0.50	0.51
		percentil - BNP	3.2849	98.09	1.73	0.18
		BCa - BNP	2.7743	98.86	0.59	0.55
80	90	assintótico	1.3950	91.00	0.96	8.04
		percentil - BP	1.6026	88.59	8.90	2.51
		BCa - BP	1.4380	90.07	5.00	4.93
		percentil - BNP	1.6144	88.39	9.07	2.54
		BCa - BNP	1.4398	89.65	5.25	5.10
	95	assintótico	1.6622	94.58	0.06	5.36
		percentil - BP	1.9804	94.00	5.10	0.90
		BCa - BP	1.7600	94.98	2.47	2.55
		percentil - BNP	2.0015	93.49	5.36	1.15
		BCa - BNP	1.7667	95.10	2.46	2.44
	99	assintótico	2.1845	97.51	0.00	2.49
		percentil - BP	2.8342	98.36	1.48	0.16
		BCa - BP	2.4848	99.07	0.42	0.51
		percentil - BNP	2.8827	98.42	1.40	0.18
		BCa - BNP	2.5073	98.91	0.50	0.59

Tabela 5.24 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
90	90	assintótico	1.2918	90.98	1.21	7.81
		percentil - BP	1.4596	89.08	7.96	2.96
		BCa - BP	1.3325	90.34	4.77	4.89
		percentil - BNP	1.4671	88.53	8.54	2.93
		BCa - BNP	1.3330	89.91	5.15	4.94
	95	assintótico	1.5393	94.72	0.02	5.26
		percentil - BP	1.7955	94.08	4.71	1.21
		BCa - BP	1.6263	95.06	2.34	2.60
		percentil - BNP	1.8097	93.72	4.81	1.47
		BCa - BNP	1.6306	94.76	2.51	2.73
	99	assintótico	2.0229	97.40	0.00	2.60
		percentil - BP	2.5385	98.54	1.25	0.21
		BCa - BP	2.2811	99.04	0.35	0.61
		percentil - BNP	2.5789	98.36	1.38	0.26
		BCa - BNP	2.3001	98.89	0.45	0.66
100	90	assintótico	1.2125	90.72	1.46	7.82
		percentil - BP	1.3503	89.45	7.71	2.84
		BCa - BP	1.2461	90.16	4.83	5.01
		percentil - BNP	1.3578	89.34	7.77	2.89
		BCa - BNP	1.2487	89.84	5.07	5.09
	95	assintótico	1.4448	94.55	0.27	5.18
		percentil - BP	1.6546	94.13	4.53	1.34
		BCa - BP	1.5167	95.14	2.34	2.52
		percentil - BNP	1.6676	93.98	4.58	1.44
		BCa - BNP	1.5223	94.91	2.64	2.45
	99	assintótico	1.8988	97.70	0.00	2.30
		percentil - BP	2.3164	98.58	1.18	0.24
		BCa - BP	2.1150	98.97	0.48	0.55
		percentil - BNP	2.3454	98.22	1.46	0.32
		BCa - BNP	2.1320	98.75	0.65	0.60

Tabela 5.25 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
150	90	assintótico	0.9541	90.33	2.11	7.56
		percentil - BP	1.0241	89.75	7.02	3.23
		BCa - BP	0.9714	90.38	4.68	4.94
		percentil - BNP	1.0257	89.39	7.18	3.43
		BCa - BNP	0.9708	89.80	4.88	5.32
	95	assintótico	1.1370	94.61	0.49	4.90
		percentil - BP	1.2418	94.84	3.72	1.44
		BCa - BP	1.1738	95.18	2.31	2.51
		percentil - BNP	1.2450	94.37	4.02	1.61
		BCa - BNP	1.1748	94.79	2.50	2.71
	99	assintótico	1.4943	98.09	0.00	1.91
		percentil - BP	1.6973	98.59	1.14	0.27
		BCa - BP	1.6116	98.96	0.44	0.60
		percentil - BNP	1.7054	98.54	1.13	0.33
		BCa - BNP	1.6156	98.80	0.50	0.70
200	90	assintótico	0.8140	90.11	2.42	7.47
		percentil - BP	0.8570	89.49	6.80	3.71
		BCa - BP	0.8265	89.80	4.89	5.31
		percentil - BNP	0.8563	89.20	6.98	3.82
		BCa - BNP	0.8251	89.64	4.95	5.41
	95	assintótico	0.9699	94.56	0.65	4.79
		percentil - BP	1.0341	94.60	3.76	1.64
		BCa - BP	0.9958	95.03	2.40	2.57
		percentil - BNP	1.0342	94.44	3.84	1.72
		BCa - BNP	0.9947	94.85	2.52	2.63
	99	assintótico	1.2748	98.16	0.01	1.83
		percentil - BP	1.3967	98.76	0.88	0.36
		BCa - BP	1.3550	99.02	0.40	0.58
		percentil - BNP	1.4003	98.65	0.97	0.38
		BCa - BNP	1.3563	99.00	0.40	0.60

Tabela 5.26 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
250	90	assintótico	0.7241	90.35	2.52	7.13
		percentil - BP	0.7541	89.47	6.65	3.88
		BCa - BP	0.7323	90.01	4.57	5.42
		percentil - BNP	0.7524	89.28	6.76	3.96
		BCa - BNP	0.7305	89.61	4.76	5.63
	95	assintótico	0.8629	94.76	0.76	4.48
		percentil - BP	0.9078	94.81	3.34	1.85
		BCa - BP	0.8806	94.99	2.21	2.80
		percentil - BNP	0.9056	94.88	3.37	1.75
		BCa - BNP	0.8781	94.73	2.29	2.98
	99	assintótico	1.1340	98.35	0.03	1.62
		percentil - BP	1.2192	98.95	0.72	0.33
		BCa - BP	1.1938	99.01	0.36	0.63
		percentil - BNP	1.2159	98.65	0.91	0.44
		BCa - BNP	1.1900	98.89	0.43	0.68
300	90	assintótico	0.6581	90.66	3.08	6.26
		percentil - BP	0.6787	89.93	6.72	3.35
		BCa - BP	0.6613	89.85	5.01	5.14
		percentil - BNP	0.6791	89.73	6.88	3.39
		BCa - BNP	0.6612	89.74	4.97	5.29
	95	assintótico	0.7841	95.21	0.98	3.81
		percentil - BP	0.8158	94.86	3.68	1.46
		BCa - BP	0.7943	94.79	2.49	2.72
		percentil - BNP	0.8167	94.64	3.77	1.59
		BCa - BNP	0.7947	94.72	2.59	2.69
	99	assintótico	1.0306	98.68	0.03	1.29
		percentil - BP	1.0914	98.78	0.93	0.29
		BCa - BP	1.0742	99.04	0.40	0.56
		percentil - BNP	1.0930	98.77	0.89	0.34
		BCa - BNP	1.0748	98.99	0.43	0.58

Tabela 5.27 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 0.5$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
400	90	assintótico	0.5643	89.92	3.47	6.61
		percentil - BP	0.5781	89.67	6.36	3.97
		BCa - BP	0.5691	89.94	4.94	5.12
		percentil - BNP	0.5789	89.55	6.49	3.96
		BCa - BNP	0.5693	89.79	5.15	5.06
	95	assintótico	0.6724	95.08	1.07	3.85
		percentil - BP	0.6931	94.65	3.48	1.87
		BCa - BP	0.6822	94.91	2.50	2.59
		percentil - BNP	0.6939	94.53	3.54	1.93
		BCa - BNP	0.6827	94.89	2.54	2.57
	99	assintótico	0.8837	98.68	0.04	1.28
		percentil - BP	0.9226	98.88	0.71	0.41
		BCa - BP	0.9177	99.05	0.33	0.62
		percentil - BNP	0.9238	98.95	0.67	0.38
		BCa - BNP	0.9182	99.07	0.38	0.55
500	90	assintótico	0.5030	90.15	3.29	6.56
		percentil - BP	0.5121	89.48	6.29	4.23
		BCa - BP	0.5057	89.67	4.98	5.35
		percentil - BNP	0.5123	89.15	6.42	4.43
		BCa - BNP	0.5058	89.45	5.05	5.50
	95	assintótico	0.5994	94.76	1.21	4.03
		percentil - BP	0.6130	94.57	3.20	2.23
		BCa - BP	0.6057	94.61	2.45	2.94
		percentil - BNP	0.6133	94.47	3.33	2.20
		BCa - BNP	0.6057	94.45	2.56	2.99
	99	assintótico	0.7877	98.54	0.07	1.39
		percentil - BP	0.8134	98.81	0.76	0.43
		BCa - BP	0.8125	98.87	0.43	0.70
		percentil - BNP	0.8133	98.78	0.73	0.49
		BCa - BNP	0.8124	98.85	0.49	0.66

nuem.

Observa-se que o intervalo de confiança assintótico apresenta, ao nível nominal de 90% e em quase todos os tamanhos amostrais, cobertura maior do que o nível nominal. Por exemplo, com $n = 80$ a cobertura observada foi de 91.00%. Para o nível nominal de 99% o intervalo assintótico apresenta valores mais distantes do nível nominal.

Os intervalos de confiança BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam, em geral, as coberturas mais próximas dos níveis nominais em todos os tamanhos amostrais. Adicionalmente, não há grande diferença entre as coberturas observadas dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico. Por exemplo, com $n = 60$ e ao nível nominal de 95% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 94.86%, as coberturas dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram iguais a 93.58% e 92.87%, respectivamente, e para os intervalos assintótico e BCa não-paramétrico as coberturas nominais foram 94.27% e 94.29%, respectivamente.

O mesmo comportamento apresentado pelas probabilidades observadas de não cobertura nos intervalos de confiança para o parâmetro α acontece nos intervalos de confiança para o parâmetro λ , ou seja, os intervalos de confiança percentil, paramétrico e não-paramétrico, apresentam valores muito superiores para “Esquerda(%)” em comparação a “Direita(%)”. Em contrapartida, o intervalo de confiança assintótico apresenta maiores valores para “Direita(%)” do que para “Esquerda(%)” e os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, são os que apresentam valores mais próximos para estas duas probabilidades. Por exemplo, com $n = 60$ e ao nível nominal de 95% as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)” do intervalo assintótico foram 0.00% e 5.73%, respectivamente, enquanto que para os intervalos percentil foram 5.27% e 1.15% utilizando a versão paramétrica e 5.93% e 1.20% utilizando a versão não-paramétrica. Para o intervalo BCa paramétrico os resultados foram 2.42% e 2.72%, para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente, e para o intervalo BCa não-paramétricos resultados foram 2.83% e 2.88% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente.

As Tabelas 5.28 a 5.35 apresentam os resultados das simulações realizadas para estimação intervalar do parâmetro α , quando os valores verdadeiros dos parâmetros são de $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$.

No geral, os intervalos de confiança percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram os que apresentaram as maiores amplitudes médias entre todos os estimadores intervalares considerados, para os três níveis nominais de confiança e em amostras pequenas e médias ($n < 150$). Por exemplo, ao nível nominal de 95% e quando $n = 60$ o intervalo assintótico apresenta amplitude média de 1.5463, enquanto as amplitudes médias dos intervalos BCa e percentil foram 1.6026 e 1.9849, respectivamente, utilizando a versão paramétrica de bootstrap e 1.5070 e 1.8959 utilizando a versão não-paramétrica. Além disso, pode-se observar que não há grande diferença entre as amplitudes médias dos intervalos de confiança assintótico e BCa.

Todos os intervalos apresentam, em grandes amostras ($n \geq 150$), amplitudes semelhantes. Por exemplo, com $n = 400$ e ao nível de confiança de 90% as amplitudes médias dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram 0.4086 e 0.4050, respectivamente, enquanto as amplitudes médias dos intervalos assintótico e BCa, paramétrico e não-paramétrico, foram 0.3910, 0.3959 e 0.3920, respectivamente. Vale notar também que com o aumento do tamanho

Tabela 5.28 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
35	90	assintótico	2.0101	92.86	0.00	7.14
		percentil - BP	2.0491	87.19	12.09	0.72
		BCa - BP	1.7008	84.75	10.61	4.64
		percentil - BNP	1.8907	85.05	13.76	1.19
		BCa - BNP	1.5388	82.11	12.05	5.84
	95	assintótico	2.3952	95.19	0.00	4.81
		percentil - BP	2.5482	92.54	7.34	0.12
		BCa - BP	2.0646	90.16	7.67	2.17
		percentil - BNP	2.3700	90.52	9.05	0.43
		BCa - BNP	1.8830	88.17	8.79	3.04
	99	assintótico	3.1479	97.86	0.00	2.14
		percentil - BP	3.5580	98.46	1.54	0.00
		BCa - BP	2.7460	95.62	4.14	0.24
		percentil - BNP	3.3448	96.83	3.07	0.10
		BCa - BNP	2.5367	95.01	4.48	0.51
40	90	assintótico	1.8034	93.21	0.00	6.79
		percentil - BP	1.9304	86.90	12.30	0.80
		BCa - BP	1.6032	85.74	9.98	4.28
		percentil - BNP	1.7971	84.85	13.76	1.39
		BCa - BNP	1.4674	83.61	11.06	5.33
	95	assintótico	2.1489	95.63	0.00	4.37
		percentil - BP	2.4165	92.05	7.72	0.23
		BCa - BP	1.9557	91.06	6.91	2.03
		percentil - BNP	2.2651	90.47	9.10	0.43
		BCa - BNP	1.8003	89.40	7.94	2.66
	99	assintótico	2.8241	98.04	0.00	1.96
		percentil - BP	3.4364	97.75	2.23	0.02
		BCa - BP	2.6254	96.31	3.35	0.34
		percentil - BNP	3.2437	96.39	3.55	0.06
		BCa - BNP	2.4401	95.56	3.91	0.53

Tabela 5.29 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
45	90	assintótico	1.6326	93.50	0.00	6.50
		percentil - BP	1.8595	86.81	12.37	0.82
		BCa - BP	1.5432	87.15	8.69	4.16
		percentil - BNP	1.7308	84.87	13.70	1.43
		BCa - BNP	1.4140	85.28	9.62	5.10
	95	assintótico	1.9454	95.78	0.00	4.22
		percentil - BP	2.3583	92.14	7.68	0.18
		BCa - BP	1.8934	92.17	5.74	2.09
		percentil - BNP	2.2037	90.44	9.03	0.53
		BCa - BNP	1.7420	90.66	6.63	2.71
	99	assintótico	2.5567	98.29	0.00	1.71
		percentil - BP	3.4696	97.38	2.61	0.01
		BCa - BP	2.5853	96.91	2.80	0.29
		percentil - BNP	3.2661	96.53	3.42	0.05
		BCa - BNP	2.3922	96.51	2.98	0.51
50	90	assintótico	1.4948	92.99	0.00	7.01
		percentil - BP	1.7393	86.90	11.89	1.21
		BCa - BP	1.4370	87.39	7.78	4.83
		percentil - BNP	1.6402	85.17	12.92	1.91
		BCa - BNP	1.3331	85.45	8.75	5.80
	95	assintótico	1.7811	95.26	0.00	4.74
		percentil - BP	2.2096	91.94	7.72	0.34
		BCa - BP	1.7683	92.54	5.25	2.21
		percentil - BNP	2.0907	90.59	8.74	0.67
		BCa - BNP	1.6457	91.14	5.87	2.99
	99	assintótico	2.3408	98.07	0.00	1.93
		percentil - BP	3.2819	97.17	2.81	0.02
		BCa - BP	2.4256	97.18	2.38	0.44
		percentil - BNP	3.1179	96.59	3.35	0.06
		BCa - BNP	2.2697	96.73	2.56	0.71

Tabela 5.30 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
55	90	assintótico	1.3914	93.63	0.00	6.37
		percentil - BP	1.6532	86.79	12.27	0.94
		BCa - BP	1.3732	88.07	7.58	4.35
		percentil - BNP	1.5648	84.99	13.48	1.53
		BCa - BNP	1.2810	86.22	8.77	5.01
	95	assintótico	1.6580	95.82	0.00	4.18
		percentil - BP	2.1023	91.84	7.89	0.27
		BCa - BP	1.6909	93.05	5.05	1.90
		percentil - BNP	1.9949	90.31	9.15	0.54
		BCa - BNP	1.5821	91.93	5.69	2.38
	99	assintótico	2.1790	98.52	0.00	1.48
		percentil - BP	3.1390	97.10	2.87	0.03
		BCa - BP	2.3329	97.64	2.07	0.29
		percentil - BNP	2.9842	96.38	3.57	0.05
		BCa - BNP	2.1887	97.31	2.25	0.44
60	90	assintótico	1.2977	93.14	0.00	6.86
		percentil - BP	1.5614	86.68	12.05	1.27
		BCa - BP	1.3005	87.89	7.47	4.64
		percentil - BNP	1.4858	84.82	13.31	1.87
		BCa - BNP	1.2188	86.45	8.14	5.41
	95	assintótico	1.5463	95.63	0.00	4.37
		percentil - BP	1.9849	91.55	8.10	0.35
		BCa - BP	1.6026	93.22	4.64	2.14
		percentil - BNP	1.8959	90.36	9.00	0.64
		BCa - BNP	1.5070	91.87	5.41	2.72
	99	assintótico	2.0321	98.20	0.00	1.80
		percentil - BP	2.9773	96.98	3.00	0.02
		BCa - BP	2.2148	97.75	1.89	0.36
		percentil - BNP	2.8540	95.97	3.94	0.09
		BCa - BNP	2.0883	97.20	2.31	0.49

Tabela 5.31 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
70	90	assintótico	1.1403	93.91	0.00	6.09
		percentil - BP	1.3937	87.36	11.40	1.24
		BCa - BP	1.1698	89.40	6.30	4.30
		percentil - BNP	1.3384	85.91	12.32	1.77
		BCa - BNP	1.1066	88.03	7.15	4.82
	95	assintótico	1.3587	96.12	0.00	3.88
		percentil - BP	1.7754	92.42	7.25	0.33
		BCa - BP	1.4442	94.34	3.71	1.95
		percentil - BNP	1.7099	91.20	8.14	0.66
		BCa - BNP	1.3685	93.13	4.38	2.49
	99	assintótico	1.7857	98.52	0.00	1.48
		percentil - BP	2.6908	97.18	2.78	0.04
		BCa - BP	2.0068	98.23	1.46	0.31
		percentil - BNP	2.5980	96.60	3.37	0.03
		BCa - BNP	1.9046	97.83	1.71	0.46
80	90	assintótico	1.0298	93.22	0.00	6.78
		percentil - BP	1.2527	87.69	10.75	1.56
		BCa - BP	1.0676	89.61	5.78	4.61
		percentil - BNP	1.2114	86.01	11.77	2.22
		BCa - BNP	1.0187	87.81	6.75	5.44
	95	assintótico	1.2270	96.03	0.00	3.97
		percentil - BP	1.5920	92.72	6.74	0.54
		BCa - BP	1.3174	94.54	3.22	2.24
		percentil - BNP	1.5426	91.65	7.58	0.77
		BCa - BNP	1.2578	93.48	3.82	2.70
	99	assintótico	1.6126	98.45	0.00	1.55
		percentil - BP	2.4166	97.72	2.22	0.06
		BCa - BP	1.8341	98.45	1.24	0.31
		percentil - BNP	2.3467	97.18	2.71	0.11
		BCa - BNP	1.7510	98.03	1.46	0.51

Tabela 5.32 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
90	90	assintótico	0.9523	93.16	0.00	6.84
		percentil - BP	1.1428	87.25	11.01	1.74
		BCa - BP	0.9878	88.91	6.17	4.92
		percentil - BNP	1.1095	85.87	11.86	2.27
		BCa - BNP	0.9482	87.71	7.11	5.18
	95	assintótico	1.1348	95.81	0.00	4.19
		percentil - BP	1.4460	92.42	6.96	0.62
		BCa - BP	1.2161	94.20	3.56	2.24
		percentil - BNP	1.4092	91.26	7.81	0.93
		BCa - BNP	1.1679	93.19	4.15	2.66
	99	assintótico	1.4914	98.58	0.00	1.42
		percentil - BP	2.1903	97.32	2.65	0.03
		BCa - BP	1.6900	98.40	1.19	0.41
		percentil - BNP	2.1393	96.74	3.17	0.09
		BCa - BNP	1.6229	98.00	1.47	0.53
100	90	assintótico	0.8829	93.20	0.00	6.80
		percentil - BP	1.0475	87.41	10.65	1.94
		BCa - BP	0.9149	89.12	5.85	5.03
		percentil - BNP	1.0221	85.90	11.69	2.41
		BCa - BNP	0.8829	87.76	6.68	5.56
	95	assintótico	1.0520	95.76	0.00	4.24
		percentil - BP	1.3196	92.51	6.79	0.70
		BCa - BP	1.1242	94.42	3.20	2.38
		percentil - BNP	1.2909	91.49	7.52	0.99
		BCa - BNP	1.0858	93.45	3.79	2.76
	99	assintótico	1.3826	98.36	0.00	1.64
		percentil - BP	1.9777	97.63	2.33	0.04
		BCa - BP	1.5577	98.57	0.92	0.51
		percentil - BNP	1.9381	96.95	2.94	0.11
		BCa - BNP	1.5040	98.17	1.20	0.63

Tabela 5.33 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
150	90	assintótico	0.6794	91.98	1.65	6.37
		percentil - BP	0.7660	88.61	9.00	2.39
		BCa - BP	0.6973	90.21	4.77	5.02
		percentil - BNP	0.7554	87.27	10.10	2.63
		BCa - BNP	0.6827	89.45	5.40	5.15
	95	assintótico	0.8095	96.20	0.04	3.76
		percentil - BP	0.9459	93.65	5.46	0.89
		BCa - BP	0.8476	95.38	2.23	2.39
		percentil - BNP	0.9362	93.09	5.77	1.14
		BCa - BNP	0.8308	94.55	2.83	2.62
	99	assintótico	1.0640	98.70	0.00	1.30
		percentil - BP	1.3587	98.22	1.71	0.07
		BCa - BP	1.1574	98.92	0.63	0.45
		percentil - BNP	1.3507	97.96	1.90	0.14
		BCa - BNP	1.1361	98.67	0.75	0.58
200	90	assintótico	0.5739	90.80	2.54	6.66
		percentil - BP	0.6288	88.52	8.62	2.86
		BCa - BP	0.5865	89.77	4.96	5.27
		percentil - BNP	0.6205	87.99	9.04	2.97
		BCa - BNP	0.5766	88.91	5.47	5.62
	95	assintótico	0.6839	95.58	0.49	3.93
		percentil - BP	0.7689	93.59	5.22	1.19
		BCa - BP	0.7094	94.82	2.50	2.68
		percentil - BNP	0.7599	92.93	5.64	1.43
		BCa - BNP	0.6975	94.11	3.03	2.86
	99	assintótico	0.8988	98.67	0.00	1.33
		percentil - BP	1.0726	98.09	1.75	0.16
		BCa - BP	0.9634	98.87	0.59	0.54
		percentil - BNP	1.0633	97.74	2.00	0.26
		BCa - BNP	0.9480	98.55	0.73	0.72

Tabela 5.34 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
250	90	assintótico	0.5080	90.81	3.01	6.18
		percentil - BP	0.5460	88.30	8.84	2.86
		BCa - BP	0.5173	90.20	4.94	4.86
		percentil - BNP	0.5406	87.67	9.13	3.20
		BCa - BNP	0.5104	89.08	5.57	5.35
	95	assintótico	0.6054	95.52	0.85	3.63
		percentil - BP	0.6640	93.82	4.97	1.21
		BCa - BP	0.6237	94.93	2.41	2.66
		percentil - BNP	0.6579	93.21	5.52	1.27
		BCa - BNP	0.6158	94.26	2.98	2.76
	99	assintótico	0.7956	98.84	0.00	1.16
		percentil - BP	0.9142	98.32	1.59	0.09
		BCa - BP	0.8466	98.96	0.59	0.45
		percentil - BNP	0.9084	98.09	1.75	0.16
		BCa - BNP	0.8350	98.88	0.58	0.54
300	90	assintótico	0.4588	90.62	3.42	5.96
		percentil - BP	0.4871	88.89	8.12	2.99
		BCa - BP	0.4658	89.69	5.36	4.95
		percentil - BNP	0.4823	88.10	8.66	3.24
		BCa - BNP	0.4606	88.99	5.76	5.25
	95	assintótico	0.5467	95.27	1.14	3.59
		percentil - BP	0.5901	93.64	5.01	1.35
		BCa - BP	0.5609	94.89	2.61	2.50
		percentil - BNP	0.5845	93.23	5.34	1.43
		BCa - BNP	0.5545	94.39	2.88	2.73
	99	assintótico	0.7185	98.85	0.02	1.13
		percentil - BP	0.8045	98.13	1.64	0.23
		BCa - BP	0.7607	98.84	0.56	0.60
		percentil - BNP	0.7986	97.88	1.79	0.33
		BCa - BNP	0.7523	98.53	0.73	0.74

Tabela 5.35 Estimacão intervalar para α , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
400	90	assintótico	0.3910	91.26	3.03	5.71
		percentil - BP	0.4086	90.19	6.81	3.00
		BCa - BP	0.3959	90.85	4.34	4.81
		percentil - BNP	0.4050	89.37	7.37	3.26
		BCa - BNP	0.3920	90.18	4.75	5.07
	95	assintótico	0.4659	95.64	1.14	3.22
		percentil - BP	0.4924	94.87	3.76	1.37
		BCa - BP	0.4753	95.37	2.28	2.35
		percentil - BNP	0.4885	94.35	4.04	1.61
		BCa - BNP	0.4708	94.93	2.48	2.59
	99	assintótico	0.6123	98.98	0.05	0.97
		percentil - BP	0.6640	98.62	1.18	0.20
		BCa - BP	0.6437	99.23	0.33	0.54
		percentil - BNP	0.6584	98.51	1.27	0.22
		BCa - BNP	0.6376	98.98	0.45	0.57
500	90	assintótico	0.3481	90.44	3.87	5.69
		percentil - BP	0.3605	89.45	7.31	3.24
		BCa - BP	0.3518	89.87	5.13	5.00
		percentil - BNP	0.3581	88.80	7.80	3.40
		BCa - BNP	0.3492	89.61	5.21	5.18
	95	assintótico	0.4148	95.30	1.49	3.21
		percentil - BP	0.4333	94.37	4.17	1.46
		BCa - BP	0.4219	94.92	2.66	2.42
		percentil - BNP	0.4307	93.97	4.38	1.65
		BCa - BNP	0.4188	94.51	2.87	2.62
	99	assintótico	0.5452	98.98	0.11	0.91
		percentil - BP	0.5803	98.56	1.21	0.23
		BCa - BP	0.5712	99.08	0.37	0.55
		percentil - BNP	0.5771	98.35	1.34	0.31
		BCa - BNP	0.5664	98.90	0.52	0.58

amostral as amplitudes médias dos intervalos de confiança diminuam.

O intervalo assintótico apresenta, em todos os tamanhos amostrais, cobertura maior do que o nível nominal, ao se analisar os resultados dos níveis nominais de 90% e 95%. Por exemplo, com $n = 80$ as coberturas foram 93.22% e 96.03% para os níveis nominais de 90% e 95%, respectivamente. Ao se analisar os resultados dos níveis nominais de 99% do intervalo assintótico tem-se que as coberturas encontram-se próximas ao nível nominal. Por exemplo, com $n = 45$ a cobertura observada para este intervalo foi de 98.29.

Em pequenas amostras ($n \leq 50$) o intervalo BCa paramétrico não apresenta os melhores resultados em relação à cobertura, mas com o aumento do tamanho amostral sua cobertura encontra-se mais próxima dos níveis nominal em todos os tamanhos amostrais. Tem-se também que, quando $n > 50$, o intervalo de confiança percentil não-paramétrico é o que apresenta, em geral, valores mais distantes dos níveis nominais. Por exemplo, com $n = 70$ e ao nível nominal de 95% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 94.34%, as coberturas dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram 92.42% e 91.20%, respectivamente; para os intervalos assintótico e BCa não-paramétrico as coberturas foram 96.12% e 93.13%, respectivamente.

Ao se analisar a não cobertura tem-se que em pequenos e médios tamanhos amostrais ($n < 150$) todos os intervalos apresentam diferenças entre as não coberturas. Os intervalos percentil e BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam maiores valores para “Esquerda(%)” do que para “Direita(%)”, em contrapartida o intervalo assintótico apresenta maiores valores para “Direita(%)” do que para “Esquerda(%)”. Em grandes amostras ($n \geq 150$) os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, passam a apresentar valores próximos para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”. Por exemplo, com $n = 80$ e ao nível nominal de 95% as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)” do intervalo assintótico foram 0.00% e 3.97%, respectivamente, enquanto que para os intervalos percentil foram 6.74% e 0.54% utilizando a versão paramétrica e 7.58% e 0.77% utilizando a versão não-paramétrica. Para o intervalo BCa paramétrico os resultados foram 3.22% e 2.24% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente; e para o intervalo BCa não-paramétrico os resultados foram 3.82% e 2.70% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente.

As Tabelas 5.36 a 5.43 apresentam os resultados das simulações realizadas para estimação intervalar do parâmetro λ , quando os valores verdadeiros dos parâmetros são de $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$.

Os intervalos de confiança percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram os que apresentaram, em geral, as maiores amplitudes médias entre todos os estimadores intervalares considerados, para os três níveis nominais de confiança e em amostras pequenas e médias ($n < 150$). Por exemplo, ao nível nominal de 90% e com $n = 45$ o intervalo assintótico apresenta amplitude média de 2.6141, enquanto as amplitudes médias dos intervalos BCa e percentil foram 2.5447 e 3.0035, respectivamente, utilizando a versão paramétrica de bootstrap e 2.4089 e 2.8639 utilizando a versão não-paramétrica. Adicionalmente, pode-se observar que não há grande diferença entre a amplitude média dos intervalos de confiança assintótico e BCa.

Todos os intervalos apresentam, em grandes amostras ($n \geq 150$), amplitudes semelhantes. Por exemplo, com $n = 300$ e ao nível de confiança de 90% as amplitudes média do intervalo percentil são 0.7513 e 0.7492, respectivamente para a versão paramétrica e não-paramétrica

Tabela 5.36 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
35	90	assintótico	3.2502	90.69	0.00	9.31
		percentil - BP	3.3443	90.08	8.83	1.09
		BCa - BP	2.8648	84.99	9.52	5.49
		percentil - BNP	3.1601	89.00	9.41	1.59
		BCa - BNP	2.6778	83.87	10.03	6.10
	95	assintótico	3.8728	93.09	0.00	6.91
		percentil - BP	4.1903	95.50	4.15	0.35
		BCa - BP	3.5140	90.17	6.80	3.03
		percentil - BNP	3.9684	93.97	5.36	0.67
		BCa - BNP	3.2946	89.52	7.05	3.43
	99	assintótico	5.0898	95.91	0.00	4.09
		percentil - BP	6.0244	99.56	0.41	0.03
		BCa - BP	4.8585	95.99	3.38	0.63
		percentil - BNP	5.6829	98.46	1.42	0.12
		BCa - BNP	4.5743	95.57	3.45	0.98
40	90	assintótico	2.9134	90.84	0.00	9.16
		percentil - BP	3.1459	89.44	9.33	1.23
		BCa - BP	2.6939	86.26	8.85	4.89
		percentil - BNP	2.9935	88.43	9.84	1.73
		BCa - BNP	2.5408	85.37	8.93	5.70
	95	assintótico	3.4715	93.40	0.00	6.60
		percentil - BP	3.9691	94.41	5.08	0.51
		BCa - BP	3.3235	91.40	6.12	2.48
		percentil - BNP	3.7786	93.51	5.67	0.82
		BCa - BNP	3.1398	90.52	6.40	3.08
	99	assintótico	4.5623	96.41	0.00	3.59
		percentil - BP	5.8246	99.05	0.87	0.08
		BCa - BP	4.6635	96.52	2.86	0.62
		percentil - BNP	5.5292	97.99	1.92	0.09
		BCa - BNP	4.4117	96.17	3.08	0.75

Tabela 5.37 Estimção intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
45	90	assintótico	2.6141	91.62	0.00	8.38
		percentil - BP	3.0035	88.41	10.03	1.56
		BCa - BP	2.5447	87.52	7.82	4.66
		percentil - BNP	2.8639	88.03	10.07	1.90
		BCa - BNP	2.4089	86.64	8.19	5.17
	95	assintótico	3.1149	93.77	0.00	6.23
		percentil - BP	3.8149	94.35	5.10	0.55
		BCa - BP	3.1620	92.48	5.07	2.45
		percentil - BNP	3.6397	93.30	5.81	0.89
		BCa - BNP	2.9918	92.03	5.22	2.75
	99	assintótico	4.0937	96.56	0.00	3.44
		percentil - BP	5.6846	98.92	1.03	0.05
		BCa - BP	4.5067	97.35	2.05	0.60
		percentil - BNP	5.4007	98.47	1.39	0.14
		BCa - BNP	4.2570	97.17	2.01	0.82
50	90	assintótico	2.3904	91.28	0.00	8.72
		percentil - BP	2.8031	88.61	9.45	1.94
		BCa - BP	2.3647	88.30	6.86	4.84
		percentil - BNP	2.6909	87.92	9.79	2.29
		BCa - BNP	2.2504	87.40	7.21	5.39
	95	assintótico	2.8484	93.65	0.00	6.35
		percentil - BP	3.5738	94.22	5.04	0.74
		BCa - BP	2.9447	92.83	4.41	2.76
		percentil - BNP	3.4340	93.53	5.53	0.94
		BCa - BNP	2.8029	92.38	4.62	3.00
	99	assintótico	3.7434	96.32	0.00	3.68
		percentil - BP	5.3783	98.71	1.24	0.05
		BCa - BP	4.2283	97.54	1.80	0.66
		percentil - BNP	5.1612	98.11	1.73	0.16
		BCa - BNP	4.0234	97.46	1.78	0.76

Tabela 5.38 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
55	90	assintótico	2.2058	91.65	0.00	8.35
		percentil - BP	2.6468	88.74	9.57	1.69
		BCa - BP	2.2510	88.46	6.76	4.78
		percentil - BNP	2.5541	87.74	10.12	2.14
		BCa - BNP	2.1533	87.74	7.21	5.05
	95	assintótico	2.6284	94.18	0.00	5.82
		percentil - BP	3.3815	93.67	5.65	0.68
		BCa - BP	2.8069	93.58	4.13	2.29
		percentil - BNP	3.2626	93.13	6.02	0.85
		BCa - BNP	2.6829	92.75	4.51	2.74
	99	assintótico	3.4543	97.02	0.00	2.98
		percentil - BP	5.1379	98.78	1.15	0.07
		BCa - BP	4.0565	97.81	1.78	0.41
		percentil - BNP	4.9337	98.22	1.67	0.11
		BCa - BNP	3.8759	97.63	1.73	0.64
60	90	assintótico	2.0527	91.52	0.00	8.48
		percentil - BP	2.4923	88.17	9.99	1.84
		BCa - BP	2.1211	88.70	6.44	4.86
		percentil - BNP	2.4132	87.55	10.27	2.18
		BCa - BNP	2.0315	87.83	6.93	5.24
	95	assintótico	2.4460	93.91	0.00	6.09
		percentil - BP	3.1851	93.63	5.67	0.70
		BCa - BP	2.6458	93.74	4.00	2.26
		percentil - BNP	3.0835	92.99	6.06	0.95
		BCa - BNP	2.5356	93.03	4.23	2.74
	99	assintótico	3.2145	96.74	0.00	3.26
		percentil - BP	4.8719	98.51	1.43	0.06
		BCa - BP	3.8443	98.04	1.44	0.52
		percentil - BNP	4.7026	98.10	1.82	0.08
		BCa - BNP	3.6806	97.80	1.54	0.66

Tabela 5.39 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
70	90	assintótico	1.7951	91.85	0.00	8.15
		percentil - BP	2.2128	88.67	9.43	1.90
		BCa - BP	1.8908	89.79	5.53	4.68
		percentil - BNP	2.1592	88.28	9.56	2.16
		BCa - BNP	1.8273	88.93	6.10	4.97
	95	assintótico	2.1390	94.21	0.00	5.79
		percentil - BP	2.8259	93.85	5.41	0.74
		BCa - BP	2.3618	94.53	3.31	2.16
		percentil - BNP	2.7674	93.33	5.76	0.91
		BCa - BNP	2.2827	94.14	3.45	2.41
	99	assintótico	2.8111	97.23	0.00	2.77
		percentil - BP	4.3520	98.51	1.44	0.05
		BCa - BP	3.4489	98.44	1.12	0.44
		percentil - BNP	4.2648	98.27	1.60	0.13
		BCa - BNP	3.3309	98.35	1.13	0.52
80	90	assintótico	1.6215	91.95	0.00	8.05
		percentil - BP	1.9877	88.55	9.22	2.23
		BCa - BP	1.7223	89.70	5.47	4.83
		percentil - BNP	1.9556	88.23	9.33	2.44
		BCa - BNP	1.6766	89.21	5.55	5.24
	95	assintótico	1.9322	94.30	0.00	5.70
		percentil - BP	2.5309	93.92	5.16	0.92
		BCa - BP	2.1485	94.64	2.97	2.39
		percentil - BNP	2.4946	93.65	5.29	1.06
		BCa - BNP	2.0913	94.42	3.10	2.48
	99	assintótico	2.5393	97.11	0.00	2.89
		percentil - BP	3.8961	98.46	1.38	0.16
		BCa - BP	3.1404	98.52	0.97	0.51
		percentil - BNP	3.8325	98.16	1.63	0.21
		BCa - BNP	3.0508	98.44	1.08	0.48

Tabela 5.40 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
90	90	assintótico	1.4938	92.01	0.01	7.98
		percentil - BP	1.8036	88.25	9.58	2.17
		BCa - BP	1.5824	89.37	5.79	4.84
		percentil - BNP	1.7800	87.62	9.90	2.48
		BCa - BNP	1.5491	89.04	5.94	5.02
	95	assintótico	1.7800	94.36	0.00	5.64
		percentil - BP	2.2887	93.60	5.42	0.98
		BCa - BP	1.9686	94.67	3.12	2.21
		percentil - BNP	2.2636	93.18	5.73	1.09
		BCa - BNP	1.9270	94.29	3.29	2.42
	99	assintótico	2.3393	97.51	0.00	2.49
		percentil - BP	3.4932	98.29	1.55	0.16
		BCa - BP	2.8683	98.55	0.88	0.57
		percentil - BNP	3.4654	98.25	1.57	0.18
		BCa - BNP	2.8024	98.59	0.89	0.52
100	90	assintótico	1.3775	91.82	0.09	8.09
		percentil - BP	1.6415	88.32	9.15	2.53
		BCa - BP	1.4535	89.61	5.44	4.95
		percentil - BNP	1.6251	87.75	9.42	2.83
		BCa - BNP	1.4279	89.08	5.61	5.31
	95	assintótico	1.6414	94.57	0.00	5.43
		percentil - BP	2.0707	93.50	5.24	1.26
		BCa - BP	1.8026	94.77	2.76	2.47
		percentil - BNP	2.0553	93.26	5.43	1.31
		BCa - BNP	1.7716	94.40	2.87	2.73
	99	assintótico	2.1572	97.37	0.00	2.63
		percentil - BP	3.1263	98.45	1.35	0.20
		BCa - BP	2.6111	98.68	0.78	0.54
		percentil - BNP	3.0994	98.45	1.36	0.19
		BCa - BNP	2.5584	98.50	0.82	0.68

Tabela 5.41 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
150	90	assintótico	1.0535	91.52	0.94	7.54
		percentil - BP	1.1918	89.01	7.97	3.02
		BCa - BP	1.0928	90.36	4.67	4.97
		percentil - BNP	1.1880	88.96	7.80	3.24
		BCa - BNP	1.0834	89.92	4.82	5.26
	95	assintótico	1.2553	94.95	0.03	5.02
		percentil - BP	1.4718	94.19	4.48	1.33
		BCa - BP	1.3366	95.20	2.21	2.59
		percentil - BNP	1.4715	93.84	4.67	1.49
		BCa - BNP	1.3262	94.52	2.55	2.93
	99	assintótico	1.6498	97.70	0.00	2.30
		percentil - BP	2.1102	98.67	1.13	0.20
		BCa - BP	1.8817	98.97	0.48	0.55
		percentil - BNP	2.1201	98.47	1.26	0.27
		BCa - BNP	1.8720	98.99	0.52	0.49
200	90	assintótico	0.8834	90.72	1.61	7.67
		percentil - BP	0.9712	88.60	7.71	3.69
		BCa - BP	0.9105	89.69	4.70	5.61
		percentil - BNP	0.9667	88.41	7.84	3.75
		BCa - BNP	0.9036	89.25	4.96	5.79
	95	assintótico	1.0527	94.52	0.22	5.26
		percentil - BP	1.1879	94.03	4.25	1.72
		BCa - BP	1.1062	94.70	2.30	3.00
		percentil - BNP	1.1834	93.62	4.52	1.86
		BCa - BNP	1.0984	94.24	2.55	3.21
	99	assintótico	1.3835	97.58	0.00	2.42
		percentil - BP	1.6567	98.36	1.30	0.34
		BCa - BP	1.5350	98.87	0.48	0.65
		percentil - BNP	1.6571	98.27	1.32	0.41
		BCa - BNP	1.5272	98.75	0.54	0.71

Tabela 5.42 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
250	90	assintótico	0.7834	90.65	2.41	6.94
		percentil - BP	0.8448	89.22	7.47	3.31
		BCa - BP	0.8032	90.18	4.88	4.94
		percentil - BNP	0.8426	88.90	7.67	3.43
		BCa - BNP	0.7994	89.54	5.28	5.18
	95	assintótico	0.9335	94.91	0.55	4.54
		percentil - BP	1.0278	94.19	4.25	1.56
		BCa - BP	0.9726	94.94	2.51	2.55
		percentil - BNP	1.0260	93.98	4.48	1.54
		BCa - BNP	0.9683	94.81	2.61	2.58
	99	assintótico	1.2269	98.33	0.00	1.67
		percentil - BP	1.4172	98.44	1.33	0.23
		BCa - BP	1.3407	98.97	0.55	0.48
		percentil - BNP	1.4173	98.23	1.48	0.29
		BCa - BNP	1.3356	98.90	0.55	0.55
300	90	assintótico	0.7058	90.23	2.64	7.13
		percentil - BP	0.7513	89.55	7.16	3.29
		BCa - BP	0.7208	90.09	5.00	4.91
		percentil - BNP	0.7492	89.27	7.26	3.47
		BCa - BNP	0.7179	89.46	5.27	5.27
	95	assintótico	0.8410	95.04	0.75	4.21
		percentil - BP	0.9100	94.13	4.22	1.65
		BCa - BP	0.8705	94.83	2.68	2.49
		percentil - BNP	0.9084	94.05	4.36	1.59
		BCa - BNP	0.8672	94.84	2.61	2.55
	99	assintótico	1.1053	98.38	0.00	1.62
		percentil - BP	1.2430	98.40	1.28	0.32
		BCa - BP	1.1936	98.90	0.58	0.52
		percentil - BNP	1.2421	98.47	1.25	0.28
		BCa - BNP	1.1899	99.11	0.43	0.46

Tabela 5.43 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.1$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
400	90	assintótico	0.6003	90.79	2.75	6.46
		percentil - BP	0.6282	89.57	6.86	3.57
		BCa - BP	0.6102	90.38	4.76	4.86
		percentil - BNP	0.6260	89.37	6.93	3.70
		BCa - BNP	0.6076	90.15	4.92	4.93
	95	assintótico	0.7153	95.27	0.70	4.03
		percentil - BP	0.7571	94.73	3.58	1.69
		BCa - BP	0.7344	95.20	2.35	2.45
		percentil - BNP	0.7553	94.64	3.55	1.81
		BCa - BNP	0.7315	94.84	2.47	2.69
	99	assintótico	0.9401	98.57	0.00	1.43
		percentil - BP	1.0220	98.78	0.87	0.35
		BCa - BP	0.9992	99.13	0.33	0.54
		percentil - BNP	1.0202	98.59	0.99	0.42
		BCa - BNP	0.9952	99.08	0.36	0.56
500	90	assintótico	0.5335	90.37	3.05	6.58
		percentil - BP	0.5527	89.39	6.65	3.96
		BCa - BP	0.5406	89.89	4.96	5.15
		percentil - BNP	0.5520	89.39	6.63	3.98
		BCa - BNP	0.5395	89.60	5.12	5.28
	95	assintótico	0.6357	94.98	1.00	4.02
		percentil - BP	0.6648	94.59	3.73	1.68
		BCa - BP	0.6497	95.05	2.34	2.61
		percentil - BNP	0.6642	94.42	3.76	1.82
		BCa - BNP	0.6482	94.87	2.49	2.64
	99	assintótico	0.8355	98.73	0.03	1.24
		percentil - BP	0.8911	98.78	0.83	0.39
		BCa - BP	0.8794	98.98	0.46	0.56
		percentil - BNP	0.8904	98.73	0.89	0.38
		BCa - BNP	0.8780	99.05	0.40	0.55

de bootstrap, enquanto as amplitudes médias dos intervalos assintótico e BCa, paramétrico e não-paramétrico, foram iguais a 0.7058, 0.7513 e 0.7492, respectivamente. Vale notar também que com o aumento do tamanho amostral as amplitudes médias dos intervalos de confiança diminuem.

Observa-se que o intervalo de confiança assintótico apresenta, ao nível nominal de 90% e em quase todos os tamanhos amostrais, cobertura maior do que o nível nominal. Por exemplo, com $n = 55$ a cobertura foi de 91.65%. Além disso, ao nível nominal de 99% este mesmo intervalo apresenta, no geral, os piores resultados, principalmente em amostras de tamanho médio ($50 < n < 150$).

Em pequenas amostras ($n \leq 50$) o intervalo BCa paramétrico não apresenta os melhores resultados em relação à cobertura, mas com o aumento do tamanho amostral sua cobertura encontra-se mais próxima dos níveis nominal em todos os tamanhos amostrais. Nota-se também que, quando $n > 50$, o intervalo de confiança percentil não-paramétrico é o que apresenta, em geral, coberturas mais distantes dos níveis nominais. Por exemplo, com $n = 90$ e ao nível nominal de 95% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 94.67%, a cobertura dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, foram 93.60% e 93.18%, respectivamente, e para os intervalos assintótico e BCa não-paramétrico as coberturas foram 94.36% e 94.29%, respectivamente.

Ao se analisar a não cobertura tem-se que até $n = 80$ todos os intervalos apresentam diferenças notáveis entre as duas probabilidades de não coberturas. Os intervalos percentil e BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam maiores valores para “Esquerda(%)” do que para “Direita(%)”, em contrapartida o intervalo assintótico apresenta maiores valores para “Direita(%)” do que para “Esquerda(%)”. Com o aumento do tamanho amostral os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, passam a apresentar valores próximos para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”. Por exemplo, com $n = 90$ e ao nível nominal de 95% as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)” do intervalo assintótico foram iguais a 0.00% e 5.64%, respectivamente, enquanto que para os intervalos percentil foram 5.52% e 0.98% utilizando a versão paramétrica e 5.73% e 1.09% utilizando a versão não-paramétrica. Para o intervalo BCa paramétrico os resultados foram 3.12% e 2.21% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente, e para o intervalo BCa não-paramétrico os resultados foram 3.29% e 2.42% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente.

As Tabelas 5.44 a 5.51 apresentam os resultados das simulações sobre a estimação intervalar do parâmetro α , quando os valores verdadeiros dos parâmetros são de $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$.

Em pequenas amostras ($n < 55$) o intervalo assintótico apresentou as maiores amplitudes médias entre todos os estimadores intervalares considerados, para os três níveis nominais de confiança. Quando $55 \leq n \leq 200$, a amplitude média do intervalo assintótico se assemelha às amplitudes médias dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, ou seja, estes três intervalos apresentam as maiores amplitudes médias, para os três níveis nominais de confiança. Por exemplo, com $n = 70$ e ao nível nominal de 99% o intervalo assintótico apresenta amplitude média de 3.5614, enquanto as amplitudes médias dos intervalos BCa e percentil foram 3.0507 e 3.6352, respectivamente, utilizando a versão paramétrica de bootstrap e 2.9037 e 3.5134 utilizando a versão não-paramétrica.

Quando $n > 200$, todos os intervalos apresentam valores próximos para a amplitude média.

Tabela 5.44 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
35	90	assintótico	3.5279	91.47	0.00	8.53
		percentil - BP	2.7285	97.62	2.09	0.29
		BCa - BP	2.3352	80.91	13.29	5.80
		percentil - BNP	2.5104	93.48	5.51	1.01
		BCa - BNP	2.1127	77.45	14.58	7.97
	95	assintótico	4.2038	94.12	0.00	5.88
		percentil - BP	3.2597	99.93	0.05	0.02
		BCa - BP	2.7735	87.47	9.74	2.79
		percentil - BNP	3.0466	97.45	2.31	0.24
		BCa - BNP	2.5334	85.04	10.68	4.28
	99	assintótico	5.5247	97.29	0.00	2.71
		percentil - BP	4.1781	100.00	0.00	0.00
		BCa - BP	3.5235	94.39	5.16	0.45
		percentil - BNP	3.9992	99.79	0.21	0.00
		BCa - BNP	3.2836	93.26	5.83	0.91
40	90	assintótico	3.1804	91.73	0.00	8.27
		percentil - BP	2.5447	96.23	3.21	0.56
		BCa - BP	2.2015	82.43	12.63	4.94
		percentil - BNP	2.3767	92.71	5.87	1.42
		BCa - BNP	2.0167	79.67	13.91	6.42
	95	assintótico	3.7897	94.46	0.00	5.54
		percentil - BP	3.0328	99.74	0.14	0.12
		BCa - BP	2.6136	88.18	9.39	2.43
		percentil - BNP	2.8697	96.97	2.60	0.43
		BCa - BNP	2.4180	86.42	10.24	3.34
	99	assintótico	4.9805	97.32	0.00	2.68
		percentil - BP	3.8591	100.00	0.00	0.00
		BCa - BP	3.3108	94.52	5.01	0.47
		percentil - BNP	3.7231	99.72	0.26	0.02
		BCa - BNP	3.1210	93.70	5.48	0.82

Tabela 5.45 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
45	90	assintótico	3.0945	92.01	0.00	7.99
		percentil - BP	2.6379	94.00	5.34	0.66
		BCa - BP	2.3770	83.03	12.12	4.85
		percentil - BNP	2.4490	91.02	7.63	1.35
		BCa - BNP	2.1771	80.66	13.12	6.22
	95	assintótico	3.6873	94.30	0.00	5.70
		percentil - BP	3.2589	97.92	1.93	0.15
		BCa - BP	2.8563	88.79	8.99	2.22
		percentil - BNP	3.0419	95.69	3.83	0.48
		BCa - BNP	2.6320	87.02	9.71	3.27
	99	assintótico	4.8459	97.46	0.00	2.54
		percentil - BP	4.5101	99.99	0.01	0.00
		BCa - BP	3.7364	94.95	4.68	0.37
		percentil - BNP	4.2635	99.33	0.63	0.04
		BCa - BNP	3.4736	94.26	5.16	0.58
50	90	assintótico	2.9895	92.24	0.00	7.76
		percentil - BP	2.6264	90.98	8.20	0.82
		BCa - BP	2.3254	83.07	12.11	4.82
		percentil - BNP	2.4536	88.72	9.72	1.56
		BCa - BNP	2.1381	80.75	13.25	6.00
	95	assintótico	3.5622	94.80	0.00	5.20
		percentil - BP	3.2257	96.45	3.34	0.21
		BCa - BP	2.7943	88.77	8.90	2.33
		percentil - BNP	3.0418	94.36	5.01	0.63
		BCa - BNP	2.5880	87.06	9.86	3.08
	99	assintótico	4.6815	97.48	0.00	2.52
		percentil - BP	4.4337	99.91	0.08	0.01
		BCa - BP	3.6579	94.78	4.80	0.42
		percentil - BNP	4.2322	98.81	1.16	0.03
		BCa - BNP	3.4269	94.10	5.20	0.70

Tabela 5.46 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
55	90	assintótico	2.8332	92.66	0.00	7.34
		percentil - BP	2.6017	89.38	9.67	0.95
		BCa - BP	2.2633	83.71	11.95	4.34
		percentil - BNP	2.4365	87.60	10.94	1.46
		BCa - BNP	2.0870	81.62	12.82	5.56
	95	assintótico	3.3759	95.16	0.00	4.84
		percentil - BP	3.1800	94.81	4.86	0.33
		BCa - BP	2.7232	89.04	8.87	2.09
		percentil - BNP	3.0050	93.36	6.07	0.57
		BCa - BNP	2.5288	87.68	9.57	2.75
	99	assintótico	4.4367	97.93	0.00	2.07
		percentil - BP	4.3091	99.77	0.22	0.01
		BCa - BP	3.5652	94.99	4.53	0.48
		percentil - BNP	4.1224	98.70	1.21	0.09
		BCa - BNP	3.3483	94.53	4.79	0.68
60	90	assintótico	2.5530	92.33	0.00	7.67
		percentil - BP	2.4489	89.84	9.02	1.14
		BCa - BP	2.0983	85.08	10.36	4.56
		percentil - BNP	2.3074	88.16	10.16	1.68
		BCa - BNP	1.9488	82.93	11.38	5.69
	95	assintótico	3.0421	95.00	0.00	5.00
		percentil - BP	2.9874	95.12	4.64	0.24
		BCa - BP	2.5280	90.23	7.46	2.31
		percentil - BNP	2.8355	93.88	5.54	0.58
		BCa - BNP	2.3624	89.08	7.88	3.04
	99	assintótico	3.9980	97.58	0.00	2.42
		percentil - BP	3.9937	99.67	0.30	0.03
		BCa - BP	3.3015	95.66	3.86	0.48
		percentil - BNP	3.8426	98.82	1.16	0.02
		BCa - BNP	3.1247	95.29	4.03	0.68

Tabela 5.47 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
70	90	assintótico	2.2742	92.59	0.00	7.41
		percentil - BP	2.2459	89.03	9.86	1.11
		BCa - BP	1.9426	85.47	10.08	4.45
		percentil - BNP	2.1310	87.34	10.92	1.74
		BCa - BNP	1.8213	83.48	11.02	5.50
	95	assintótico	2.7099	95.08	0.00	4.92
		percentil - BP	2.7328	94.30	5.39	0.31
		BCa - BP	2.3405	90.94	6.92	2.14
		percentil - BNP	2.6106	93.33	6.09	0.58
		BCa - BNP	2.2038	89.55	7.61	2.84
	99	assintótico	3.5614	98.00	0.00	2.00
		percentil - BP	3.6352	99.43	0.54	0.03
		BCa - BP	3.0507	96.09	3.46	0.45
		percentil - BNP	3.5134	98.47	1.45	0.08
		BCa - BNP	2.9037	95.79	3.65	0.56
80	90	assintótico	2.0623	92.98	0.00	7.02
		percentil - BP	2.1232	88.85	9.80	1.35
		BCa - BP	1.8337	86.76	8.77	4.47
		percentil - BNP	2.0259	87.26	10.75	1.99
		BCa - BNP	1.7312	85.07	9.49	5.44
	95	assintótico	2.4574	95.39	0.00	4.61
		percentil - BP	2.5935	93.96	5.60	0.44
		BCa - BP	2.2139	91.87	5.93	2.20
		percentil - BNP	2.4889	92.63	6.55	0.82
		BCa - BNP	2.1002	90.59	6.66	2.75
	99	assintótico	3.2295	98.00	0.00	2.00
		percentil - BP	3.4810	98.78	1.21	0.01
		BCa - BP	2.9031	96.71	2.93	0.36
		percentil - BNP	3.3732	98.15	1.73	0.12
		BCa - BNP	2.7808	96.27	3.08	0.65

Tabela 5.48 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
90	90	assintótico	1.9636	92.76	0.00	7.24
		percentil - BP	2.1034	86.98	11.41	1.61
		BCa - BP	1.8331	86.53	8.81	4.66
		percentil - BNP	2.0150	85.45	12.37	2.18
		BCa - BNP	1.7356	84.88	9.70	5.42
	95	assintótico	2.3398	95.26	0.00	4.74
		percentil - BP	2.6190	92.58	6.87	0.55
		BCa - BP	2.2321	91.76	5.90	2.34
		percentil - BNP	2.5182	91.25	8.00	0.75
		BCa - BNP	2.1179	90.58	6.56	2.86
	99	assintótico	3.0750	98.01	0.00	1.99
		percentil - BP	3.7203	97.80	2.15	0.05
		BCa - BP	3.0000	96.61	2.85	0.54
		percentil - BNP	3.5925	97.12	2.72	0.16
		BCa - BNP	2.8605	96.27	3.10	0.63
100	90	assintótico	1.7808	92.76	0.00	7.24
		percentil - BP	1.9848	87.50	11.05	1.45
		BCa - BP	1.7142	87.83	7.45	4.72
		percentil - BNP	1.9039	86.13	11.94	1.93
		BCa - BNP	1.6275	86.41	8.14	5.45
	95	assintótico	2.1220	95.14	0.00	4.86
		percentil - BP	2.4683	92.73	6.83	0.44
		BCa - BP	2.0910	92.74	5.06	2.20
		percentil - BNP	2.3755	91.92	7.40	0.68
		BCa - BNP	1.9902	91.78	5.48	2.74
	99	assintótico	2.7888	98.22	0.00	1.78
		percentil - BP	3.4857	97.75	2.19	0.06
		BCa - BP	2.8207	97.42	2.16	0.42
		percentil - BNP	3.3664	97.23	2.62	0.15
		BCa - BNP	2.6970	97.12	2.40	0.48

Tabela 5.49 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
150	90	assintótico	1.3164	93.09	0.00	6.91
		percentil - BP	1.5404	88.28	9.63	2.09
		BCa - BP	1.3458	89.47	5.41	5.12
		percentil - BNP	1.4972	86.72	10.59	2.69
		BCa - BNP	1.2989	88.43	5.96	5.61
	95	assintótico	1.5686	95.32	0.00	4.68
		percentil - BP	1.9225	93.18	6.03	0.79
		BCa - BP	1.6484	94.35	3.09	2.56
		percentil - BNP	1.8716	92.19	6.64	1.17
		BCa - BNP	1.5912	93.59	3.52	2.89
	99	assintótico	2.0614	98.25	0.00	1.75
		percentil - BP	2.7658	97.73	2.17	0.10
		BCa - BP	2.2596	98.35	1.14	0.51
		percentil - BNP	2.6960	97.24	2.62	0.14
		BCa - BNP	2.1827	98.09	1.28	0.63
200	90	assintótico	1.0821	92.55	0.65	6.80
		percentil - BP	1.2494	88.47	9.25	2.28
		BCa - BP	1.1206	90.16	4.89	4.95
		percentil - BNP	1.2253	87.43	9.77	2.80
		BCa - BNP	1.0922	89.03	5.48	5.49
	95	assintótico	1.2894	95.81	0.00	4.19
		percentil - BP	1.5545	93.69	5.53	0.78
		BCa - BP	1.3691	95.24	2.48	2.28
		percentil - BNP	1.5264	92.80	6.00	1.20
		BCa - BNP	1.3342	94.36	2.81	2.83
	99	assintótico	1.6946	98.58	0.00	1.42
		percentil - BP	2.2430	98.07	1.79	0.14
		BCa - BP	1.8884	98.96	0.62	0.42
		percentil - BNP	2.2067	97.76	2.07	0.17
		BCa - BNP	1.8407	98.76	0.74	0.50

Tabela 5.50 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
250	90	assintótico	0.9498	92.05	1.52	6.43
		percentil - BP	1.0703	89.00	8.78	2.22
		BCa - BP	0.9807	90.44	4.83	4.73
		percentil - BNP	1.0524	88.01	9.39	2.60
		BCa - BNP	0.9608	89.39	5.46	5.15
	95	assintótico	1.1318	96.18	0.00	3.82
		percentil - BP	1.3214	94.01	5.22	0.77
		BCa - BP	1.1941	95.31	2.44	2.25
		percentil - BNP	1.3011	93.25	5.69	1.06
		BCa - BNP	1.1690	94.65	2.94	2.41
	99	assintótico	1.4875	98.87	0.00	1.13
		percentil - BP	1.8860	98.23	1.68	0.09
		BCa - BP	1.6428	99.10	0.51	0.39
		percentil - BNP	1.8616	97.84	2.01	0.15
		BCa - BNP	1.6075	98.89	0.64	0.47
300	90	assintótico	0.8545	91.46	2.30	6.24
		percentil - BP	0.9458	89.06	8.49	2.45
		BCa - BP	0.8793	90.02	5.07	4.91
		percentil - BNP	0.9334	88.08	9.10	2.82
		BCa - BNP	0.8642	89.30	5.78	4.92
	95	assintótico	1.0183	96.24	0.18	3.58
		percentil - BP	1.1613	93.78	5.13	1.09
		BCa - BP	1.0672	95.15	2.59	2.26
		percentil - BNP	1.1481	93.05	5.74	1.21
		BCa - BNP	1.0490	94.48	3.08	2.44
	99	assintótico	1.3382	98.80	0.00	1.20
		percentil - BP	1.6393	98.03	1.83	0.14
		BCa - BP	1.4650	98.95	0.51	0.54
		percentil - BNP	1.6273	97.84	2.01	0.15
		BCa - BNP	1.4404	98.81	0.64	0.55

Tabela 5.51 Estimação intervalar para α , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
400	90	assintótico	0.7243	90.93	2.80	6.27
		percentil - BP	0.7777	89.08	8.01	2.91
		BCa - BP	0.7389	90.12	4.99	4.89
		percentil - BNP	0.7689	88.65	8.30	3.05
		BCa - BNP	0.7291	89.34	5.49	5.17
	95	assintótico	0.8630	95.64	0.61	3.75
		percentil - BP	0.9458	94.13	4.60	1.27
		BCa - BP	0.8921	95.19	2.51	2.30
		percentil - BNP	0.9362	93.59	5.04	1.37
		BCa - BNP	0.8802	94.68	2.87	2.45
	99	assintótico	1.1343	98.80	0.00	1.20
		percentil - BP	1.3027	98.43	1.36	0.21
		BCa - BP	1.2163	99.07	0.43	0.50
		percentil - BNP	1.2926	98.17	1.61	0.22
		BCa - BNP	1.2000	98.93	0.58	0.49
500	90	assintótico	0.6375	90.82	2.86	6.32
		percentil - BP	0.6746	89.58	7.36	3.06
		BCa - BP	0.6488	90.31	4.81	4.88
		percentil - BNP	0.6685	89.27	7.48	3.25
		BCa - BNP	0.6420	89.87	4.95	5.18
	95	assintótico	0.7596	95.61	0.87	3.52
		percentil - BP	0.8170	94.29	4.34	1.37
		BCa - BP	0.7808	95.10	2.40	2.50
		percentil - BNP	0.8103	94.00	4.43	1.57
		BCa - BNP	0.7729	94.67	2.71	2.62
	99	assintótico	0.9983	98.89	0.00	1.11
		percentil - BP	1.1142	98.56	1.28	0.16
		BCa - BP	1.0632	98.97	0.47	0.56
		percentil - BNP	1.1071	98.42	1.41	0.17
		BCa - BNP	1.0523	99.02	0.48	0.50

Por exemplo, com $n = 400$ e ao nível de confiança de 90% as amplitudes médias do intervalo percentil, paramétrico e não-paramétrico, são 0.7777 e 0.7689, respectivamente, enquanto que as amplitudes médias dos intervalos assintótico e BCa, paramétrico e não-paramétrico, foram iguais a 0.7389, 0.7291 e 0.7243, respectivamente. Vale notar também que com o aumento do tamanho amostral as amplitudes médias dos intervalos de confiança diminuem.

Em todos os tamanhos amostrais e ao nível nominal de 90% o intervalo assintótico apresenta cobertura maior do que o nível nominal. Além disso, em pequenas amostras ($n < 55$) os intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, também apresentam coberturas maiores do que o nível nominal, mas para estes dois intervalos isto ocorre para todos os níveis nominais estudados. Por exemplo, com $n = 45$ e ao nível nominal de 90% a cobertura do intervalo assintótico foi 92.01%, do intervalo percentil paramétrico foi 94.00% e do intervalo percentil não-paramétrico foi 91.02%.

Os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam as menores coberturas em pequenos tamanhos amostrais, mas com o aumento do tamanho amostral as coberturas desses dois intervalos ficam próximas ao nível nominal. Por exemplo, com $n = 45$ e ao nível nominal de 90% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi de 83.03% e do intervalo BCa não-paramétrico foi de 80.66%; já com $n = 150$ e ao nível nominal de 90% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 89.47% e a do intervalo BCa não-paramétrico foi 88.43%, enquanto que para os intervalos assintótico e percentil, paramétrico e não-paramétrico, as coberturas foram 93.09%, 88.28% e 86.72%, respectivamente.

Todos os estimadores intervalares considerados apresentam valores diferentes para as duas não coberturas em pequenos e médios tamanhos amostrais ($n < 150$). Os intervalos percentil e BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam maiores valores para “Esquerda(%)” do que para “Direita(%)”, em contrapartida o intervalo assintótico apresenta maiores valores para “Direita(%)” do que para “Esquerda(%)”. Em grandes amostras ($n \geq 150$) os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, passam a apresentar valores próximos para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”. Por exemplo, com $n = 150$ e ao nível nominal de 90% as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)” do intervalo assintótico foram 0.00% e 6.91%, respectivamente, enquanto que para os intervalos percentil foram 9.63% e 2.09% utilizando a versão paramétrica e 10.59% e 2.69% utilizando a versão não-paramétrica. Para o intervalo BCa paramétrico os resultados foram 5.41% e 5.12% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente, e para o intervalo BCa não-paramétrico os resultados foram 5.96% e 5.61% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente.

As Tabelas 5.52 a 5.59 apresentam os resultados relativos à estimação intervalar do parâmetro λ , quando os valores verdadeiros dos parâmetros são de $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$.

Em pequenas amostras ($n < 55$) o intervalo assintótico apresentou as maiores amplitudes médias entre todos os estimadores intervalares considerados, para os três níveis nominais de confiança. Quando $55 \leq n \leq 200$, a amplitude média do intervalo assintótico passa a ser semelhante às amplitudes médias dos intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, ou seja, estes três intervalos apresentam as maiores amplitudes médias, para os três níveis nominais de confiança. Por exemplo, com $n = 60$ e ao nível nominal de 90% o intervalo assintótico apresenta amplitude média de 2.4576, enquanto as amplitudes médias dos intervalos BCa e percentil foram 2.0703 e 2.3383 utilizando a versão paramétrica de bootstrap e 1.9612 e 2.2467

utilizando a versão não-paramétrica, respectivamente.

Quando $n > 200$, todos os intervalos apresentam valores próximos para a amplitude média. Por exemplo, com $n = 300$ e ao nível nominal de confiança de 95% as amplitudes médias do intervalo percentil foram 1.0972 e 1.0899, respectivamente para a versão paramétrica e não-paramétrica de bootstrap, enquanto as amplitudes médias dos intervalos assintótico e BCa, paramétrico e não-paramétrico, foram 0.9606, 1.0180 e 1.0080, respectivamente. Vale notar também que com o aumento do tamanho amostral as amplitudes médias dos intervalos de confiança diminuem.

Quando $n \leq 80$ os intervalos percentil, paramétrico e não-paramétrico, apresentam coberturas maiores do que o nível nominal. O intervalo assintótico em tamanhos amostrais médio e grande ($n \geq 55$) apresenta cobertura observada maior do que o nível nominal, para o nível nominal de 90%. Por exemplo, com $n = 60$ e ao nível nominal de 90% a cobertura do intervalo assintótico foi 90.80%, a do intervalo percentil paramétrico foi 91.57% e a do intervalo percentil não-paramétrico foi 90.44%.

Os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam os menores valores para a cobertura em pequenos tamanhos amostrais, mas com o aumento do tamanho amostral as coberturas desses dois intervalos ficam próximas ao nível nominal. Por exemplo, com $n = 60$ e ao nível nominal de 90% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 85.19% e a do intervalo BCa não-paramétrico foi 84.10%; já com $n = 150$ e ao nível nominal de 90% a cobertura do intervalo BCa paramétrico foi 89.64% e a do intervalo BCa não-paramétrico foi 89.36%, enquanto que para os intervalos assintótico e percentil, paramétrico e não-paramétrico, as coberturas foram 92.19%, 88.67% e 87.74%, respectivamente.

Todos os estimadores intervalares considerados apresentam valores diferentes para as probabilidades de não coberturas em pequenos e médios tamanhos amostrais ($n < 150$). Os intervalos percentil e BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam maiores valores para “Esquerda(%)” do que para “Direita(%)”, em contrapartida o intervalo assintótico apresenta maiores valores para “Direita(%)” do que para “Esquerda(%)”. Em grandes amostras ($n \geq 150$) os intervalos BCa, paramétrico e não-paramétrico, passam a apresentar valores próximos para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”. Por exemplo, com $n = 150$ e ao nível nominal de 90% as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)” do intervalo assintótico foram 0.00% e 7.81%, respectivamente, enquanto que para os intervalos percentil foram 8.74% e 2.59% utilizando a versão paramétrica e 9.24% e 3.02% utilizando a versão não-paramétrica. Para o intervalo BCa paramétrico os resultados foram 5.37% e 4.99% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente, e para o intervalo BCa não-paramétrico os resultados foram 5.37% e 5.27% para as probabilidades “Esquerda(%)” e “Direita(%)”, respectivamente.

Tabela 5.52 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
35	90	assintótico	3.3931	89.30	0.00	10.70
		percentil - BP	2.6507	97.69	1.69	0.62
		BCa - BP	2.4182	81.10	12.35	6.55
		percentil - BNP	2.5117	94.55	3.94	1.51
		BCa - BNP	2.2356	78.74	13.12	8.14
	95	assintótico	4.0431	91.87	0.00	8.13
		percentil - BP	3.2126	99.52	0.31	0.17
		BCa - BP	2.8980	87.47	9.05	3.48
		percentil - BNP	3.0570	97.92	1.58	0.50
		BCa - BNP	2.6898	85.63	9.66	4.71
	99	assintótico	5.3135	95.40	0.00	4.60
		percentil - BP	4.3356	99.99	0.00	0.01
		BCa - BP	3.8206	94.40	4.81	0.79
		percentil - BNP	4.1359	99.75	0.19	0.06
		BCa - BNP	3.5675	93.70	5.02	1.28
40	90	assintótico	3.0706	89.90	0.00	10.10
		percentil - BP	2.5014	96.50	2.27	1.23
		BCa - BP	2.3134	82.42	11.85	5.73
		percentil - BNP	2.3896	94.09	4.17	1.74
		BCa - BNP	2.1605	80.87	12.43	6.70
	95	assintótico	3.6588	92.34	0.00	7.66
		percentil - BP	3.0405	99.15	0.47	0.38
		BCa - BP	2.7762	88.36	8.72	2.92
		percentil - BNP	2.9160	97.55	1.69	0.76
		BCa - BNP	2.6061	87.19	9.24	3.57
	99	assintótico	4.8085	95.43	0.00	4.57
		percentil - BP	4.1410	99.95	0.04	0.01
		BCa - BP	3.6712	94.88	4.44	0.68
		percentil - BNP	3.9837	99.66	0.22	0.12
		BCa - BNP	3.4799	94.43	4.63	0.94

Tabela 5.53 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
45	90	assintótico	2.9957	89.92	0.00	10.08
		percentil - BP	2.6293	94.25	4.40	1.35
		BCa - BP	2.4042	83.26	11.20	5.54
		percentil - BNP	2.4901	92.51	5.79	1.70
		BCa - BNP	2.2498	81.91	11.69	6.40
	95	assintótico	3.5696	92.62	0.00	7.38
		percentil - BP	3.2493	98.63	1.00	0.37
		BCa - BP	2.9141	89.18	7.91	2.91
		percentil - BNP	3.0878	96.67	2.68	0.65
		BCa - BNP	2.7349	88.12	8.44	3.44
	99	assintótico	4.6913	95.79	0.00	4.21
		percentil - BP	4.4992	99.92	0.05	0.03
		BCa - BP	3.9117	95.48	3.94	0.58
		percentil - BNP	4.3083	99.62	0.31	0.07
		BCa - BNP	3.6991	95.10	4.09	0.81
50	90	assintótico	2.8630	90.42	0.00	9.58
		percentil - BP	2.5524	92.87	5.61	1.52
		BCa - BP	2.2810	83.39	11.26	5.35
		percentil - BNP	2.4315	91.51	6.62	1.87
		BCa - BNP	2.1429	82.22	11.86	5.92
	95	assintótico	3.4115	93.04	0.00	6.96
		percentil - BP	3.1249	97.98	1.58	0.44
		BCa - BP	2.7595	89.24	8.01	2.75
		percentil - BNP	2.9925	96.18	3.02	0.80
		BCa - BNP	2.6001	88.39	8.40	3.21
	99	assintótico	4.4835	95.98	0.00	4.02
		percentil - BP	4.2617	99.92	0.04	0.04
		BCa - BP	3.6959	95.40	4.00	0.60
		percentil - BNP	4.1111	99.41	0.49	0.10
		BCa - BNP	3.5143	94.98	4.13	0.89

Tabela 5.54 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
55	90	assintótico	2.7141	91.18	0.00	8.82
		percentil - BP	2.4849	91.98	6.67	1.35
		BCa - BP	2.2027	84.33	11.07	4.60
		percentil - BNP	2.3747	90.75	7.31	1.94
		BCa - BNP	2.0764	83.19	11.37	5.44
	95	assintótico	3.2341	93.46	0.00	6.54
		percentil - BP	3.0274	97.31	2.30	0.39
		BCa - BP	2.6654	89.70	7.97	2.33
		percentil - BNP	2.9107	95.77	3.44	0.79
		BCa - BNP	2.5230	89.01	8.11	2.88
	99	assintótico	4.2503	96.88	0.00	3.12
		percentil - BP	4.0723	99.83	0.12	0.05
		BCa - BP	3.5670	95.44	4.07	0.49
		percentil - BNP	3.9464	99.25	0.62	0.13
		BCa - BNP	3.4052	95.16	4.09	0.75
60	90	assintótico	2.4576	90.80	0.00	9.20
		percentil - BP	2.3383	91.57	6.82	1.61
		BCa - BP	2.0703	85.19	9.83	4.98
		percentil - BNP	2.2467	90.44	7.61	1.95
		BCa - BNP	1.9612	84.10	10.28	5.62
	95	assintótico	2.9285	93.32	0.00	6.68
		percentil - BP	2.8509	96.56	2.84	0.60
		BCa - BP	2.5083	90.50	6.92	2.58
		percentil - BNP	2.7507	95.63	3.54	0.83
		BCa - BNP	2.3835	89.99	7.10	2.91
	99	assintótico	3.8486	96.42	0.00	3.58
		percentil - BP	3.8466	99.87	0.09	0.04
		BCa - BP	3.3571	95.85	3.55	0.60
		percentil - BNP	3.7317	99.27	0.60	0.13
		BCa - BNP	3.2274	95.72	3.63	0.65

Tabela 5.55 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
70	90	assintótico	2.1793	91.30	0.00	8.70
		percentil - BP	2.1561	91.05	7.27	1.68
		BCa - BP	1.9164	85.96	9.15	4.89
		percentil - BNP	2.0752	89.83	7.97	2.20
		BCa - BNP	1.8247	84.83	9.71	5.46
	95	assintótico	2.5968	93.57	0.00	6.43
		percentil - BP	2.6329	96.12	3.24	0.64
		BCa - BP	2.3235	91.44	6.21	2.35
		percentil - BNP	2.5452	95.17	3.91	0.92
		BCa - BNP	2.2200	90.67	6.44	2.89
	99	assintótico	3.4128	96.66	0.00	3.34
		percentil - BP	3.5649	99.57	0.30	0.13
		BCa - BP	3.1174	96.42	3.00	0.58
		percentil - BNP	3.4706	99.27	0.61	0.12
		BCa - BNP	3.0075	96.29	3.09	0.62
80	90	assintótico	1.9739	91.57	0.00	8.43
		percentil - BP	2.0254	89.48	8.49	2.03
		BCa - BP	1.7927	86.70	8.51	4.79
		percentil - BNP	1.9617	89.18	8.48	2.34
		BCa - BNP	1.7193	85.95	8.73	5.32
	95	assintótico	2.3520	93.91	0.00	6.09
		percentil - BP	2.4782	95.56	3.73	0.71
		BCa - BP	2.1772	92.02	5.64	2.34
		percentil - BNP	2.4079	94.79	4.25	0.96
		BCa - BNP	2.0919	91.44	5.88	2.68
	99	assintótico	3.0911	96.78	0.00	3.22
		percentil - BP	3.3537	99.38	0.54	0.08
		BCa - BP	2.9287	97.02	2.60	0.38
		percentil - BNP	3.2749	98.98	0.88	0.14
		BCa - BNP	2.8378	96.77	2.64	0.59

Tabela 5.56 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
90	90	assintótico	1.8760	91.85	0.00	8.15
		percentil - BP	2.0176	88.61	9.34	2.05
		BCa - BP	1.7765	87.23	8.11	4.66
		percentil - BNP	1.9560	87.94	9.73	2.33
		BCa - BNP	1.7062	86.27	8.53	5.20
	95	assintótico	2.2354	94.26	0.00	5.74
		percentil - BP	2.5048	93.94	5.20	0.86
		BCa - BP	2.1744	92.24	5.38	2.38
		percentil - BNP	2.4343	93.87	5.15	0.98
		BCa - BNP	2.0908	91.92	5.43	2.65
	99	assintótico	2.9378	97.11	0.00	2.89
		percentil - BP	3.5214	98.76	1.11	0.13
		BCa - BP	2.9975	97.14	2.38	0.48
		percentil - BNP	3.4315	98.65	1.21	0.14
		BCa - BNP	2.0908	91.92	2.45	0.54
100	90	assintótico	1.6983	91.44	0.00	8.56
		percentil - BP	1.8851	88.64	9.33	2.03
		BCa - BP	1.6534	88.11	7.08	4.81
		percentil - BNP	1.8333	88.22	9.17	2.61
		BCa - BNP	1.5951	87.49	7.32	5.19
	95	assintótico	2.0237	93.98	0.00	6.02
		percentil - BP	2.3376	94.05	5.09	0.86
		BCa - BP	2.0268	93.23	4.50	2.27
		percentil - BNP	2.2771	93.64	5.21	1.15
		BCa - BNP	1.9594	92.76	4.58	2.66
	99	assintótico	2.6596	97.07	0.00	2.93
		percentil - BP	3.2723	98.75	1.15	0.10
		BCa - BP	2.7980	97.57	1.90	0.53
		percentil - BNP	3.1892	98.41	1.43	0.16
		BCa - BNP	2.7131	97.49	1.92	0.59

Tabela 5.57 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
150	90	assintótico	1.2536	92.19	0.00	7.81
		percentil - BP	1.4656	88.67	8.74	2.59
		BCa - BP	1.2980	89.64	5.37	4.99
		percentil - BNP	1.4396	87.74	9.24	3.02
		BCa - BNP	1.2668	89.36	5.37	5.27
	95	assintótico	1.4937	94.66	0.00	5.34
		percentil - BP	1.8277	93.83	5.09	1.08
		BCa - BP	1.5976	94.70	2.91	2.39
		percentil - BNP	1.7957	93.41	5.19	1.40
		BCa - BNP	1.5588	94.04	3.22	2.74
	99	assintótico	1.9631	97.54	0.00	2.46
		percentil - BP	2.6138	98.30	1.54	0.16
		BCa - BP	2.2492	98.49	1.00	0.51
		percentil - BNP	2.5685	98.22	1.51	0.27
		BCa - BNP	2.1958	98.48	0.95	0.57
200	90	assintótico	1.0246	92.28	0.29	7.43
		percentil - BP	1.1849	89.06	8.25	2.69
		BCa - BP	1.0727	90.26	4.86	4.88
		percentil - BNP	1.1717	88.67	8.34	2.99
		BCa - BNP	1.0564	89.62	5.15	5.23
	95	assintótico	1.2209	94.99	0.00	5.01
		percentil - BP	1.4727	94.09	4.74	1.17
		BCa - BP	1.3178	95.35	2.34	2.31
		percentil - BNP	1.4584	93.51	5.00	1.49
		BCa - BNP	1.2979	94.78	2.47	2.75
	99	assintótico	1.6045	98.01	0.00	1.99
		percentil - BP	2.1175	98.74	1.08	0.18
		BCa - BP	1.8620	99.09	0.46	0.45
		percentil - BNP	2.0977	98.49	1.31	0.20
		BCa - BNP	1.8335	99.01	0.44	0.55

Tabela 5.58 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
250	90	assintótico	0.8971	91.89	0.91	7.20
		percentil - BP	1.0134	88.95	8.10	2.95
		BCa - BP	0.9359	90.45	4.79	4.76
		percentil - BNP	1.0043	88.46	8.24	3.30
		BCa - BNP	0.9243	89.96	5.12	4.92
	95	assintótico	1.0691	95.37	0.01	4.62
		percentil - BP	1.2517	94.22	4.46	1.32
		BCa - BP	1.1446	95.51	2.23	2.26
		percentil - BNP	1.2418	93.66	4.84	1.50
		BCa - BNP	1.1311	95.06	2.33	2.61
	99	assintótico	1.4050	98.06	0.00	1.94
		percentil - BP	1.7866	98.55	1.20	0.25
		BCa - BP	1.6103	99.14	0.42	0.44
		percentil - BNP	1.7750	98.52	1.23	0.25
		BCa - BNP	1.5894	99.10	0.43	0.47
300	90	assintótico	0.8061	91.51	1.56	6.93
		percentil - BP	0.8931	88.83	8.15	3.02
		BCa - BP	0.8360	90.28	5.03	4.69
		percentil - BNP	0.8866	88.30	8.48	3.22
		BCa - BNP	0.8273	89.59	5.36	5.05
	95	assintótico	0.9606	95.55	0.07	4.38
		percentil - BP	1.0972	94.11	4.51	1.38
		BCa - BP	1.0180	95.47	2.24	2.29
		percentil - BNP	1.0899	93.69	4.79	1.52
		BCa - BNP	1.0080	94.98	2.54	2.48
	99	assintótico	1.2624	98.24	0.00	1.76
		percentil - BP	1.5482	98.53	1.21	0.26
		BCa - BP	1.4237	99.09	0.37	0.54
		percentil - BNP	1.5434	98.49	1.31	0.20
		BCa - BNP	1.4091	99.16	0.40	0.44

Tabela 5.59 Estimação intervalar para λ , quando $\alpha = 1.6$ e $\lambda = 1.0$

n	Nominal	Intervalo	Amplitude	Cobertura (%)	Esquerda (%)	Direita (%)
400	90	assintótico	0.6825	91.29	2.09	6.62
		percentil - BP	0.7329	89.64	7.15	3.21
		BCa - BP	0.7001	90.69	4.75	4.56
		percentil - BNP	0.7288	89.38	7.34	3.28
		BCa - BNP	0.6951	90.46	4.84	4.70
	95	assintótico	0.8132	95.62	0.40	3.98
		percentil - BP	0.8918	94.42	4.06	1.52
		BCa - BP	0.8477	95.24	2.38	2.38
		percentil - BNP	0.8872	94.26	4.10	1.64
		BCa - BNP	0.8415	94.98	2.57	2.45
	99	assintótico	1.0688	98.42	0.00	1.58
		percentil - BP	1.2288	98.75	1.02	0.23
		BCa - BP	1.1685	99.04	0.47	0.49
		percentil - BNP	1.2252	98.53	1.12	0.35
		BCa - BNP	1.1608	98.95	0.52	0.53
500	90	assintótico	0.6002	90.72	2.35	6.93
		percentil - BP	0.6350	89.48	6.93	3.59
		BCa - BP	0.6130	90.20	4.75	5.05
		percentil - BNP	0.6329	89.49	6.96	3.55
		BCa - BNP	0.6099	89.81	4.89	5.30
	95	assintótico	0.7151	95.24	0.53	4.23
		percentil - BP	0.7691	94.70	3.72	1.58
		BCa - BP	0.7401	95.38	2.18	2.44
		percentil - BNP	0.7664	94.56	3.83	1.61
		BCa - BNP	0.7363	95.30	2.32	2.38
	99	assintótico	0.9983	98.89	0.00	1.38
		percentil - BP	1.0489	98.86	0.92	0.22
		BCa - BP	1.0136	99.19	0.36	0.45
		percentil - BNP	1.0460	98.82	0.97	0.21
		BCa - BNP	1.0080	99.09	0.45	0.46

CAPÍTULO 6

Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas três aplicações a dados reais da metodologia apresentada nos capítulos anteriores.

6.1 Tamanhos de arquivos de computador

Os dados utilizados nesta seção referem-se a tamanhos de arquivos de computador (em bytes) com extensão *.ini presentes em um computador com sistema operacional Windows. Estes dados foram utilizados por Giles *et al.* (2011) como exemplo ilustrativo para a distribuição Lomax. Ao todo são 269 observações e podem ser obtidos em <http://web.uvic.ca/~dgiles/downloads/data>.

Na Tabela 6.1 encontram-se algumas medidas descritivas dos dados. Nota-se que os tamanhos dos arquivos variam de 2 bytes a 2435152 bytes e estes arquivos possuem em média 25554.33 bytes. A Figura 6.1 apresenta o histograma dos dados. Nota-se um comportamento assimétrico e há uma grande concentração no primeiro intervalo. É possível também observar esta assimetria através com o valor do terceiro quartil, que é igual a 3803, ou seja, 75% das observações estão concentradas até o valor de 3803.

Na Tabela 6.2 encontram-se as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e suas versões corrigidas. Observa-se que todas as estimativas corrigidas, tanto para o parâmetro α quanto para o parâmetro λ , são menores do que as correspondentes estimativas não corrigidas, indicando assim que há superestimação quando se usa a máxima verossimilhança.

A Tabela 6.3 apresenta as estimativas intervalares dos níveis nominais de 90%, 95%, 99%. Observa-se que não há grande diferença nos limites inferiores e superiores dos intervalos de

Tabela 6.1 Medidas resumo; dados de tamanho de arquivos

Medida	Valor
Mínimo	2.00
Q_1	80.00
Média	25554.33
Mediana	223.00
Q_3	3803.00
Máximo	2435152.00
Desvio-Padão	172636.80

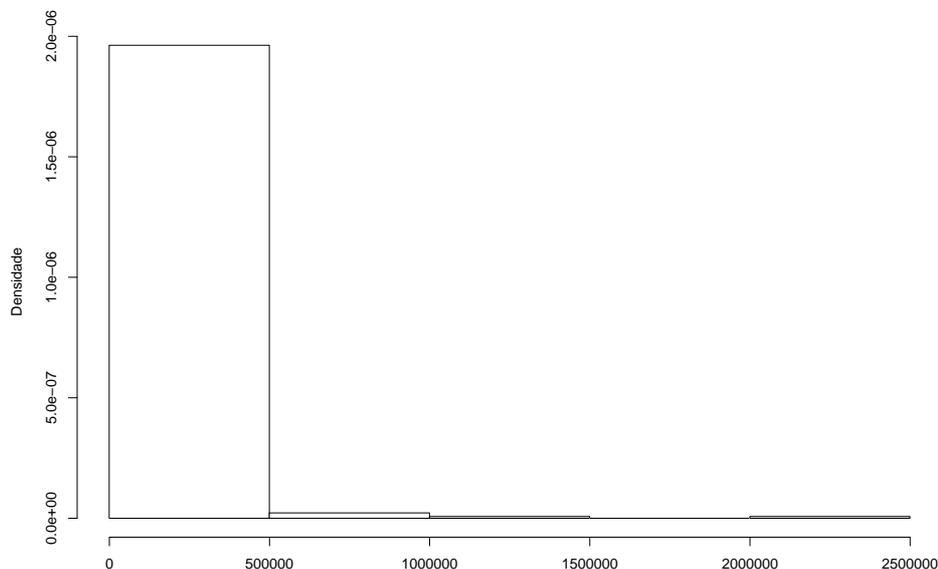


Figura 6.1 Histograma dos dados de tamanho de arquivos

confiança para o parâmetro α . Para o parâmetro λ os intervalos construídos via bootstrap paramétrico apresentam valores semelhantes para os limites inferior e superior, o mesmo acontecendo para os intervalos construídos via bootstrap não-paramétrico. O intervalo de confiança assintótico apresenta comportamento diferente dos outros intervalos.

Tabela 6.2 Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de tamanho de arquivos

Estimador	Parâmetro	
	α	λ
$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$	0.4978	128.3090
$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$	0.4917	124.0340
$\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$	0.4928	124.9376
$\check{\theta}_1 = (\check{\alpha}_1, \check{\lambda}_1)$	0.4949	126.0003
$\check{\theta}_2 = (\check{\alpha}_2, \check{\lambda}_2)$	0.4899	124.1684
$\check{\theta}_3 = (\check{\alpha}_3, \check{\lambda}_3)$	0.4901	124.2964

Tabela 6.3 Estimativas intervalares; dados de tamanho de arquivos

Nominal	Intervalo	α	λ
90	assintótico	(0.4230;0.5726)	(85.1358; 171.4823)
	percentil - BP	(0.4334;0.5917)	(92.1932; 181.5050)
	BCa - BP	(0.4247;0.5701)	(91.0198; 179.6640)
	percentil - BNP	(0.4500;0.5610)	(106.1229; 160.0015)
	BCa - BNP	(0.4429;0.5482)	(105.5692; 158.7546)
95	assintótico	(0.4087;0.5869)	(76.8650; 179.7531)
	percentil - BP	(0.4247;0.6116)	(86.3372; 192.8951)
	BCa - BP	(0.4116;0.5921)	(85.5804; 191.7855)
	percentil - BNP	(0.4429;0.5701)	(102.7310; 168.8865)
	BCa - BNP	(0.4315;0.5616)	(100.9623; 167.1355)
99	assintótico	(0.3807;0.6149)	(60.7001; 195.9180)
	percentil - BP	(0.3898;0.6536)	(73.5820; 233.0652)
	BCa - BP	(0.3721;0.6317)	(73.0829; 221.7888)
	percentil - BNP	(0.4236;0.5934)	(94.8830; 185.0570)
	BCa - BNP	(0.3997;0.5764)	(91.7438; 184.3485)

6.2 Precipitação

Nesta seção utiliza-se os dados referentes a um estudo meteorológico realizado na Flórida no período de 1968 a 1970. Estes dados foram analisados por Simpson (1972) e, posteriormente, por Bryson (1974). São ao todo 26 observações. Algumas medidas descritivas dos dados são apresentadas na Tabela 6.4. Nota-se que os dados variam de 4 a 2745.60 e o valor médio é 39267.42. Na Figura 6.2 encontra-se o histograma dos dados. Há assimetria à direita no histograma, com grande concentração no intervalo de 0 a 500. Esta assimetria também pode ser observada pelo valor do terceiro quartil, que é igual a 406, isto é, 75% das observações estão concentradas até o valor 406.

Na Tabela 6.5 encontram-se as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e

Tabela 6.4 Medidas resumo; dados de precipitação

Medidas	Valor
Mínimo	4.10
Q_1	98.13
Média	442.0231
Mediana	221.60
Q_3	406.00
Máximo	2745.60
Desvio-Padão	650.77

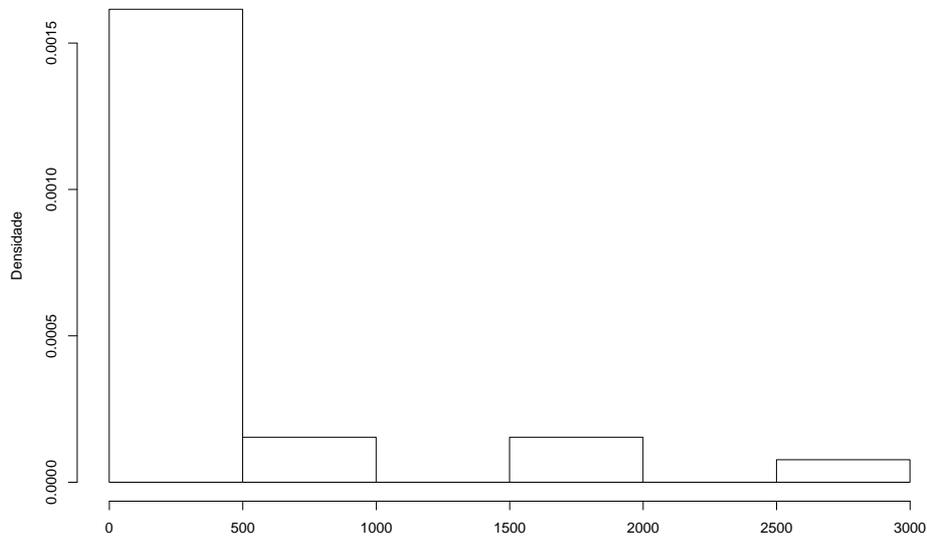


Figura 6.2 Histograma dos dados de precipitação

suas versões corrigidas. Para ambos os parâmetros todas as estimativas corrigidas são inferiores à correspondente estimativa de máxima verossimilhança. Isto é, todas apontam para a mesma direção, indicando que os estimadores corrigidos trabalham para reduzir o viés. Mais especificamente, as estimativas corrigidas indicam que as estimativas de máxima verossimilhança estão superestimadas.

A Tabela 6.6 apresenta as estimativas intervalares. Observa-se que, para o parâmetro λ , em todos os níveis nominais o intervalo de confiança assintótico inclui valores negativos para o limite inferior, ou seja, valores impróprios para o parâmetro. O mesmo acontece com o intervalo assintótico para o parâmetro α com níveis nominais de 95% e 99%. Os intervalos construídos via bootstrap, paramétrico e não-paramétrico, apresentam comportamentos distintos, conside-

Tabela 6.5 Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de precipitação

Estimador	Parâmetro	
	α	λ
$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$	1.9216	455.1268
$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$	0.9939	138.5836
$\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$	1.2648	240.4075
$\check{\theta}_1 = (\check{\alpha}_1, \check{\lambda}_1)$	1.5978	344.9324
$\check{\theta}_2 = (\check{\alpha}_2, \check{\lambda}_2)$	1.6499	346.8129
$\check{\theta}_3 = (\check{\alpha}_3, \check{\lambda}_3)$	1.7325	380.9238

Tabela 6.6 Estimativas intervalares; dados de precipitação

Nominal	Intervalo	α	λ
90	assintótico	(0.1106; 3.7326)	(-157.6354; 1067.8881)
	percentil - BP	(1.0126; 4.2959)	(151.1049; 1330.6195)
	BCa - BP	(0.9465; 4.0504)	(139.2360; 1302.2395)
	percentil - BNP	(1.0107; 4.3447)	(127.5530; 1246.4227)
	BCa - BNP	(0.9323; 3.9816)	(118.2076; 1221.8976)
95	assintótico	(-0.2364; 4.0795)	(-275.0243; 1185.2770)
	percentil - BP	(0.9321; 4.7726)	(114.3023; 1503.0190)
	BCa - BP	(0.8532; 4.4200)	(99.8059; 1477.8275)
	percentil - BNP	(0.9034; 5.0141)	(103.8609; 1372.7008)
	BCa - BNP	(0.8143; 4.5706)	(96.1497; 1329.6374)
99	assintótico	(-0.9144; 4.7576)	(-504.4542; 1414.7069)
	percentil - BP	(0.7307; 5.5441)	(67.0913; 1774.4760)
	BCa - BP	(0.6602; 5.0052)	(59.5168; 1745.9477)
	percentil - BNP	(0.7520; 5.7909)	(64.0786; 1728.5273)
	BCa - BNP	(0.5440; 5.4096)	(54.5907; 1560.5565)

rando ambos os parâmetros.

6.3 Consumo aparente de Petróleo

Os dados desta seção correspondem ao consumo aparente (resultado da soma da produção com as importações, menos as exportações) de petróleo brasileiro anual, no período de 1935 a 2007. São ao todo 73 observações, em escala de mil metros cúbicos, que podem ser obtidas em <http://www.ipeadata.gov.br/>.

Na Tabela 6.7 encontram-se algumas medidas descritivas dos dados. Observa-se que o consumo aparente médio de petróleo é 39267.42 mil metros cúbicos, tem-se também que o consumo aparente de petróleo variou de 3 mil metros cúbicos a 101058 mil metros cúbicos. O histograma dos dados está apresentado na Figura 6.3. O histograma apresenta assimetria à direita, com uma grande concentração no intervalo de 0 a 20000.

Na Tabela 6.8 encontram-se as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e suas versões corrigidas. Para ambos os parâmetros as estimativas dos estimadores corrigidos $\check{\theta}_1, \check{\theta}_2, \check{\theta}_3$ são inferiores à estimativa de máxima verossimilhança. Já o estimador $\check{\theta}_1$ apresenta estimativas que extrapolam a estimativa de máxima verossimilhança. Ou seja, a maioria das estimativas corrigidas indica que as estimativas de máxima verossimilhança estão superestimadas e uma estimativa corrigida indica que as estimativas de máxima verossimilhança estão subestimadas.

A Tabela 6.9 apresenta as estimativas intervalares dos parâmetros α e λ . Observa-se que, para o parâmetro λ e ao nível nominal de 99%, o intervalo de confiança assintótico inclui valores negativos, ou seja, valores impróprios para o parâmetro. Para o parâmetro α os intervalos

Tabela 6.7 Medidas resumo; dados de consumo de petróleo

Medidas	Valor
Mínimo	3.00
Q_1	181.00
Média	39267.42
Mediana	31460.00
Q_3	68520.00
Máximo	101058.00
Desvio-Padão	35182.21

Tabela 6.8 Estimativas de máxima verossimilhança e suas versões corrigidas; dados de consumo de petróleo

Estimador	Parâmetro	
	α	λ
$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$	0.2151	84.3993
$\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$	0.2089	71.8518
$\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$	0.2052	65.3355
$\check{\theta}_1 = (\check{\alpha}_1, \check{\lambda}_1)$	0.2169	92.7805
$\check{\theta}_2 = (\check{\alpha}_2, \check{\lambda}_2)$	0.2090	68.8096
$\check{\theta}_3 = (\check{\alpha}_3, \check{\lambda}_3)$	0.2092	71.0983

construídos via bootstrap paramétrico apresentam valores semelhantes para os limites inferior e superior, o mesmo acontecendo para os intervalos construídos via bootstrap não-paramétrico. O intervalo de confiança assintótico apresenta comportamento diferente dos demais intervalos.

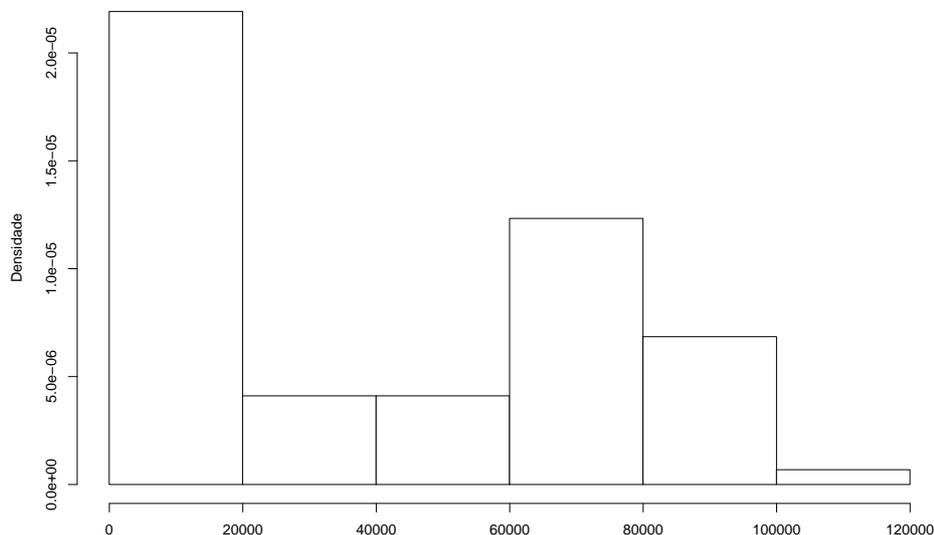


Figura 6.3 Histograma dos dados de consumo aparente de petróleo

Tabela 6.9 Estimativas intervalares; dados de consumo de petróleo

Nominal	Intervalo	α	λ
90	assintótico	(0.1648;0.2654)	(21.0440; 147.7546)
	percentil - BP	(0.1750;0.2799)	(40.8425; 192.2819)
	BCa - BP	(0.1703;0.2696)	(34.3678; 163.9195)
	percentil - BNP	(0.1939;0.2377)	(30.9746; 154.4859)
	BCa - BNP	(0.1912;0.2349)	(27.2373; 134.4861)
95	assintótico	(0.1552;0.2751)	(8.9068; 159.8918)
	percentil - BP	(0.1693;0.2934)	(34.9817; 223.3101)
	BCa - BP	(0.1635;0.2825)	(29.8459; 189.1409)
	percentil - BNP	(0.1903;0.2423)	(28.1029; 186.6011)
	BCa - BNP	(0.1876;0.2384)	(24.1518; 151.2638)
99	assintótico	(0.1363;0.2939)	(-14.8147; 183.6133)
	percentil - BP	(0.1583;0.3331)	(27.5561; 328.7955)
	BCa - BP	(0.1487;0.3176)	(21.7923; 240.0209)
	percentil - BNP	(0.1845;0.2504)	(22.2822; 222.5990)
	BCa - BNP	(0.1805;0.2470)	(18.4215; 196.7724)

Conclusões

No desenvolvimento desta dissertação, foram apresentadas características e propriedades da distribuição Lomax. Foram apresentadas duas correções analíticas para o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α e λ . Adicionalmente, dois métodos de correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança por bootstrap foram apresentados. A metodologia bootstrap também foi utilizada para obtenção de estimativas intervalares para os parâmetros da distribuição Lomax. Com esta finalidade, os métodos bootstrap BCa e percentil foram apresentados. Adicionalmente, foi considerado o intervalo de confiança assintótico, construído a partir da distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança.

Os resultados das simulações de Monte Carlo mostraram que os estimadores de máxima verossimilhança são bastante viesados, principalmente em pequenas amostras. Logo, é necessária a utilização de alguma correção de viés. Os resultados obtidos demonstram que, no geral, as correções de viés são eficazes em todos os tamanhos amostrais, sendo que as correções analíticas de Cox e Snell (1968) e Firth (1993) apresentam os melhores desempenhos. Desta forma, é recomendável a utilização da correção analítica de Cox e Snell (1968), ou a correção analítica de Firth (1993).

Foram analisados os comportamentos de diferentes estimativas intervalares. Observou-se que, em pequenas e médias amostras, os intervalos de confiança BCa, paramétrico e não-paramétrico, apresentam os melhores resultados. Estes intervalos apresentaram as coberturas mais próximas dos níveis nominais considerados; adicionalmente os intervalos BCa apresentaram, juntamente com o intervalo assintótico, as menores amplitudes. Além disso, os intervalos BCa apresentaram uma bilateralidade mais definida do que os outros intervalos. Em grandes amostras não há grande diferença entre as coberturas dos estimadores intervalares considerados; todos apresentam boa aproximação dos níveis nominais. Desta maneira, é aconselhável a utilização do intervalo BCa, paramétrico ou não-paramétrico, em pequenas e médias amostras; em grandes amostras a escolha do estimador intervalar fica a critério do pesquisador, visto que nesta situação não há grande diferença entre os estimadores intervalares considerados.

Cumulantes

Neste apêndice serão apresentadas as quantidades necessárias, obtidas por Giles *et al.* (2011), ao cálculo da correção de viés do estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Lomax, utilizando a expressão geral de Cox e Snell (1968) apresentada na Seção 3.2.

A função de log-verossimilhança Lomax, a partir de uma amostra aleatória, é dada por

$$\ell(\alpha, \lambda) = n \log(\alpha) - n \log(\lambda) - (1 + \alpha) \sum_{t=1}^n \log\left(1 + \frac{y_t}{\lambda}\right).$$

As derivadas de primeira ordem são

$$U_\alpha = \frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{t=1}^n \log\left(1 + \frac{y_t}{\lambda}\right),$$

$$U_\lambda = \frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{\lambda + y_t}\right).$$

As derivadas de segunda e terceira ordem são

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2} - \frac{1 + \alpha}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda}\right) - \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2},$$

$$\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^3} = -\frac{2n}{\lambda^3} - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda^3} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda}\right) - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2}\right]$$

$$- \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^3}\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2} \right], \\ \frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^3} &= \frac{2n}{\alpha^3}.\end{aligned}$$

Para calcular a esperança destas derivadas é necessário o cálculo de $\mathbb{E}[Y(\lambda + Y)^{-1}]$. Para tanto, seja Y uma variável aleatória da lei Lomax com parâmetros α e λ . Então

$$\mathbb{E}[Y(\lambda + Y)^{-1}] = \frac{\alpha \lambda^{1-r}}{(\alpha + r)(\alpha + r - 1)},$$

com $r = 1, 2, 3, \dots$ e $\alpha + r > 1$. Esse resultado segue de

$$\mathbb{E}[Y(\lambda + Y)^{-1}] = \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda + y} \right) \frac{\alpha \lambda^\alpha}{y^{\alpha+1}} dy = \alpha \lambda^\alpha \int_0^\infty y(\lambda + y)^{-(r+\alpha+1)} dy.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \lambda + y$ tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y(\lambda + Y)^{-1}] &= \alpha \lambda^\alpha \int_\lambda^\infty (x - \lambda) x^{-(r+\alpha+1)} dx \\ &= \alpha \lambda^\alpha \left[\int_\lambda^\infty x^{-(r+\alpha)} dx - \lambda \int_\lambda^\infty x^{-(r+\alpha+1)} dx \right] \\ &= \alpha \lambda^\alpha \left\{ \left[x^{1-r-\alpha} (r + \alpha - 1)^{-1} \right]_\lambda^\infty - \lambda \left[x^{-(r+\alpha)} (r + \alpha)^{-1} \right]_\lambda^\infty \right\} \\ &= \alpha \lambda^\alpha \left[\lambda^{1-r-\alpha} (r + \alpha - 1)^{-1} - \lambda^{1-r-\alpha} (r + \alpha)^{-1} \right] \\ &= \frac{\alpha \lambda^{1-r}}{(\alpha + r)(\alpha + r - 1)}.\end{aligned}$$

esta expressão só é positiva somente se $\alpha + r > 1$.

Os cumulantes são obtidos tomando-se a esperança das derivadas obtidas acima, segue abaixo o cálculo da esperança

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{n}{\lambda^2} - \frac{1 + \alpha}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) - \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2} \right) \right] \\ &= \frac{n}{\lambda^2} - \frac{1 + \alpha}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) - \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2} \right] \\ &= \frac{n}{\lambda^2} - \frac{1 + \alpha}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) - \frac{1 + \alpha}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\alpha}{\lambda(2 + \alpha)(1 + \alpha)} \right] \\ &= \frac{n\alpha}{\lambda^2(2 + \alpha)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) = \frac{n}{\lambda(1 + \alpha)}, \\
 \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} \right] &= -\frac{n}{\alpha^2}, \\
 \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^3} \right] &= -\frac{2n}{\lambda^3} - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda^3} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^3} \right] \\
 &= -\frac{2n}{\lambda^3} - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda^3} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\alpha}{\lambda(2 + \alpha)(1 + \alpha)} \right] \\
 &\quad - \frac{2(1 + \alpha)}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\alpha}{\lambda^2(3 + \alpha)(2 + \alpha)} \right] \\
 &= \frac{4n\alpha}{\lambda^3(3 + \alpha)}, \\
 \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda^2} \right] &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{y_t}{y_t + \lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{y_t}{(y_t + \lambda)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) - \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\alpha}{\lambda(2 + \alpha)(1 + \alpha)} \right] \\
 &= -\frac{2n}{\lambda^2(2 + \alpha)} \\
 \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha^2} \right] &= 0, \\
 \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^3} \right] &= \frac{2n}{\alpha^3}.
 \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] ABD-ELFATTAH, A., ALABOUD, F., AND ALHARBY, A. On sample size estimation for Lomax ditribution. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences 1* (2007), 373–378.
- [2] ABD-ELLAH, A. Bayesian one sample prediction bounds for the Lomax distribution. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 30* (2003), 101–109.
- [3] ATKINSON, A. B., AND HARRISON, A. J. *Distribution of Personal Wealth in Britain*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [4] BALAKRISHNAN, N., AND AHSANULLAH, M. Relations for single and product moments of record values from Lomax distribution. *Sankhya B 56* (1994), 140–146.
- [5] BRYSON, M. C. Heavy-tailed distributions: Properties and tests. *Technometrics 16* (1974), 61–68.
- [6] CHAHKANDI, M., AND GANJALI, M. On some lifetime distributions with decreasing failure rate. *Computational Statistics and Data Analysis 53* (2009), 4433–4440.
- [7] CORBELLINI, A., CROSATO, L., GANUGI, P., AND MAZZOLI, M. Fitting Pareto II distributions on firm size: Statistical methodology and economic puzzles. Paper presented at the International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis, 2007.
- [8] CORDEIRO, G. M. *Introdução à Teoria Assintótica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999.
- [9] CORDEIRO, G. M., AND KLEIN, R. Bias correction in ARMA models. *Statistics and Probability Letters 19* (1994), 169–176.
- [10] CORDEIRO, G. M., AND VASCONCELLOS, K. L. P. Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters 35* (1997), 155–164.
- [11] COX, D. R., AND SNELL, E. J. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society B 30* (1968), 248–275.
- [12] CRIBARI-NETO, F., AND ZARKOS, S. G. R: Yet another econometric programming environment. *Journal of Applied Econometrics 4* (1999), 319–329.
- [13] DAVISON, A. C., AND HINKLEY, D. V. *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge University Press, New York, 1997.

- [14] DOORNIK, J. A. *Ox: an Object-Oriented Matrix Language*, 4th ed. Timberlake Consultants Press and Oxford: <http://www.doornik.com>, 2009.
- [15] EFRON, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics* 7 (1979), 1–26.
- [16] EFRON, B. Nonparametric standart errors and confidence intervals. *Canadian Journal of Statistics* 9 (1981), 139–172.
- [17] EFRON, B., AND TIBSHIRANI, R. J. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall, New York, 1993.
- [18] FIRTH, D. Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika* 80 (1993), 27–38.
- [19] FISHER, R. A. Theory of statistical estimation. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society* 22 (1925), 700–725.
- [20] GHITANY, M., AL-AWADHI, F., AND ALKHALFAN, L. Marshall–Olkin extended Lomax distribution and its application to censored data. *Communication in Statistics – Theory and Methods* 36 (2007), 1855–1866.
- [21] GILES, D., FENG, H., AND GODWIN, R. On the bias of the maximum likelihood estimator for the two-parameter Lomax distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods* (2011). forthcoming.
- [22] GRADSHTEYN, I., AND RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York, 2007.
- [23] HARRIS, C. M. The Pareto distribution as a queue service discipline. *Operations Research* 16 (1968), 307–313.
- [24] HASSAN, A. S., AND AL-GHAMDI, A. S. Optimum step stress accelerated life testing for Lomax distribution. *Journal of Applied Sciences Research* 5 (2009), 2153–2164.
- [25] HOGG, R. V., AND KLUGMAN, S. A. On the estimation of long-tailed skewed distributions with actuarial applications. *Journal of Econometrics* 23 (1983), 91–102.
- [26] HOLLAND, O., GOLAUP, A., AND AGHVAMI, A. H. Traffic characteristics of aggregated module downloads for mobile terminal reconfiguration. *IEEE Proceedings – Communications* 135 (2006), 683–690.
- [27] HOWLADERA, H. A., AND HOSSAINB, M. A. Bayesian survival estimation of Pareto distribution of the second kind based on failure-censored data. *Computational Statistics and Data Analysis* 38 (2002), 301–314.
- [28] IHAKA, R., AND GENTLEMAN, R. R: A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 5 (1996), 299–314.

- [29] JEFFREYS, H. An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of the Royal Society A* 186 (1946), 453–461.
- [30] LAMPORT, L. *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison-Wesley Professional, 1986.
- [31] LAWLEY, D. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika* 43 (1956), 295–303.
- [32] LEHMANN, E. L. *Elements of Large-Sample Theory*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [33] LEHMANN, E. L., AND CASELLA, E. *Theory of Point Estimation*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [34] LEMONTE, A. J., CRIBARI-NETO, F., AND VASCONCELLOS, K. L. P. Improved statistical inference for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis* 51 (2007), 4656–4681.
- [35] LOMAX, H. S. Business failures: Another example of the analysis of failure data. *Journal of the American Statistical Association* 49 (1954), 847–852.
- [36] MACKINNON, J. G., AND SMITH, JR., A. A. Approximate bias correction in econometrics. *Journal of Econometrics* 85 (1998), 205–230.
- [37] MARSAGLIA, G. A random number generator for C. Discussion paper, posting on Usenet newsgroup sci.stat.math, Sept. 1997.
- [38] MARSHALL, A., AND OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika* 84 (1997), 641–652.
- [39] NADARAJAH, S. Sums, products, and ratios for the bivariate Lomax distribution. *Computational Statistics and Data Analysis* 49 (2005), 109–129.
- [40] NAYAK, T. Multivariate Lomax distribution: Properties and usefulness in reliability theory. *Journal of Applied Probability* 24 (1987), 170–177.
- [41] NOCEDAL, J., AND WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [42] PETROPOULOS, C., AND KOUROUKLIS, S. Improved estimation of extreme quantiles in the multivariate Lomax (Pareto II) distribution. *Metrika*, 60 (2004), 15–24.
- [43] ROY, D., AND GUPTA, R. Bivariate extension of Lomax and finite range distributions through characterization approach. *Journal of Multivariate Analysis* 59 (1996), 22–33.
- [44] SIMPSON, J. Use of the gamma distribution in single-cloud rainfall analysis. *Monthly Weather Review* 100 (1972), 309–312.

- [45] VENABLES, W. N., SMITH, D. M., AND THE R DEVELOPMENT CORE TEAM. *An Introduction to R*, 2nd ed. Network Theory Limited, 2009.