



Rafael Marinho de Araújo

## **Análise de Antenas Cilíndricas Híbridas Embutidas via Método dos Momentos**



Universidade Federal de Pernambuco

Recife  
2025

Rafael Marinho de Araújo

**Análise de Antenas Cilíndricas Híbridas Embutidas via Método dos Momentos**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ciências da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

**Área de Concentração:** Engenharia da Computação

**Orientador:** Odilon Maroja da Costa Pereira Filho

Recife  
2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Araújo, Rafael Marinho de.

Análise de antenas cilíndricas híbridas embutidas via método dos momentos / Rafael Marinho de Araújo. - Recife, 2025.  
114f.: il.

Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Informática, Pós-Graduação em Ciências da Computação, 2025.

Orientação: Odilon Maroja da Costa Pereira Filho.

1. Antenas embutidas; 2. Antenas cilíndricas híbridas; 3. Método dos momentos; 4. Eletromagnetismo computacional; 5. Matlab. I. Pereira Filho, Odilon Maroja da Costa. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**Rafael Marinho de Araújo**

**“Análise de Antenas Cilíndricas Híbridas Embutidas via Método dos Momentos”**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Engenharia da Computação.

Aprovado em: 14/07/2025.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Stefan Michael Blawid  
Centro de Informática / UFPE

---

Prof. Dr. Daniel Basso Ferreira  
Departamento de Micro-ondas e Optoeletrônica / ITA

---

Prof. Dr. Odilon Maroja da Costa Pereira Filho  
Centro de Informática / UFPE  
**(orientador)**



# ABSTRACT

The demand for antennas that combine structural integration, high performance, and versatility drives research into innovative configurations. In this context, this dissertation presents the theoretical formulation, numerical implementation, and validation of a computational method for the analysis of embedded hybrid cylindrical antennas using the Method of Moments (MoM). These antennas combine the structural advantages of cylindrical conformal antennas with the performance enhancements of hybrid microstrip antennas, standing out for their ability to offer reduced cross-polarization and compensation of inductive reactance, crucial characteristics for optimizing performance in various applications.

Through the application of the equivalence principle, the interface between the dielectric cavity and the external environment is replaced by a surface of magnetic currents, allowing for the independent analysis of the cavity and free space. The dielectric cavity is thus modeled as a structure enclosed by perfect electric conductors, enabling the calculation of electromagnetic fields via resonant cavity methods and Green's functions in the Fourier domain. The surface magnetic current introduced in this transformation is discretized with sinusoidal basis functions in the angular and axial directions. The feeding probe is modeled as a conducting strip and incorporated into the MoM formulation, resulting in a linear system from which the input impedance and radiation patterns are obtained.

An original software, implemented in Matlab, was developed to automate the proposed analysis. The validation of this tool is performed through comparisons with HFSS simulations, showing excellent agreement in impedance results and radiation patterns. Additionally, a parametric study was conducted to analyze the impact of critical parameters on accuracy and execution time, demonstrating the robustness and computational efficiency of the proposed method.

**Keywords:** Embedded antennas, Hybrid cylindrical antennas, Method of Moments, Computational electromagnetics, Matlab.

# RESUMO

A demanda por antenas que combinem integração estrutural, alto desempenho e versatilidade impulsiona a pesquisa em configurações inovadoras. Neste contexto, esta dissertação apresenta a formulação teórica, implementação numérica e validação de um método computacional para a análise de antenas cilíndricas híbridas embutidas utilizando o Método dos Momentos (MoM). Essas antenas combinam as vantagens estruturais das antenas conformadas cilíndricas com os aprimoramentos de desempenho das antenas de microfita híbridas, destacando-se pela capacidade de oferecer redução da polarização cruzada e compensação da reatância indutiva, características cruciais para a otimização do desempenho em diversas aplicações.

Por meio da utilização do princípio da equivalência, a interface entre a cavidade dielétrica e o ambiente externo é substituída por uma superfície de correntes magnéticas, permitindo a análise independente da cavidade e do espaço livre. A cavidade dielétrica é, assim, modelada como uma estrutura fechada por condutores elétricos perfeitos, permitindo o cálculo dos campos eletromagnéticos via métodos de cavidade ressonante e funções de Green no domínio de Fourier. A corrente magnética superficial introduzida nessa transformação é discretizada com funções de base senoidais nas direções angular e axial. A ponta de prova de alimentação é modelada como uma fita condutora e incorporada à formulação do MoM, resultando em um sistema linear a partir do qual se obtêm a impedância de entrada e os diagramas de radiação.

Um software original, implementado em Matlab, foi desenvolvido para automatizar a análise proposta. A validação dessa ferramenta é realizada por meio de comparações com simulações no HFSS, apresentando excelente concordância nos resultados de impedância e diagramas de radiação. Adicionalmente, um estudo paramétrico foi conduzido para analisar o impacto de parâmetros críticos na acurácia e no tempo de execução, evidenciando a robustez e a eficiência computacional do método proposto.

**Palavras-chave:** Antenas embutidas, Antenas cilíndricas híbridas, Método dos Momentos, Eletromagnetismo computacional, Matlab.

# Agradecimentos

Enfim, a tão aguardada dissertação de mestrado saiu. Foram quase 3 anos intermináveis e me questioneei várias vezes se esse trabalho ia sair ou não. Agradeço à minha família e amigos pelo apoio constante e, principalmente, pela paciência de me ouvirem falar "estou quase terminando" há tanto tempo, e sinto muito por não estar tão presente quanto gostaria, mas foi por uma boa causa.

A meu orientador Odilon, obrigado por não desistir de mim. Sua paciência, nem a ciência explica, e sem você esta dissertação não sairia. Agradeço imensamente pelo apoio na parte teórica do trabalho, afinal, é um tema bastante complicado, e por todo o conhecimento passado. O que eu aprendi nesse trabalho, vai ficar comigo para sempre.

Um agradecimento especial ao Prof. Daniel pela ajuda e a paciência de eu ter pedido tantas vezes para executar o software no seu computador. Sua ajuda foi essencial para apresentar resultados mais completos e finalmente entendermos o motivo do modelo de fita apresentar reatância diferente do esperado.

# LISTA DE FIGURAS

1	Diferentes geometrias de antenas conformes. Fonte: Conformal Array	
	Antenna Theory and Design . . . . .	11
2	Antenas híbridas conformes cilíndricas . . . . .	12
3	Cavidade setorial cilíndrica. . . . .	14
4	Antena híbrida do tipo $M_z$ . . . . .	15
5	Antena híbrida do tipo $M_\phi$ . . . . .	15
6	Versor normal e campo elétrico na região interna. . . . .	17
7	Campo elétrico e versor normal na região externa. . . . .	18
8	Paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ . . . . .	19
9	Paredes $z = z_1$ e $z = z_2$ . . . . .	20
10	Parede $\rho = a$ . . . . .	21
11	Parede $\rho = b$ . . . . .	27
12	Campo elétrico e versor normal na região externa para a antena do tipo $M_\phi$ . . . . .	35
13	Discretização da corrente para $m = 1$ e $p$ arbitrário . . . . .	35
14	Função de base em diferentes valores de $m$ . . . . .	36
15	Geometria da fita de alimentação da antena. . . . .	38
16	Antena cilíndrica embutida no HFSS. . . . .	87
17	Cavidade cilíndrica e cabo coaxial em perfil . . . . .	89
18	Impedância de Entrada variando o valor de Pmax . . . . .	90
19	Impedância de entrada de M1P22 para diferentes valores de nMax, qMax e NKz . . . . .	91
20	Impedância de Entrada variando o valor de Mmax . . . . .	92
21	Impedância de Entrada variando o valor de NKz . . . . .	93
22	Impedância de Entrada variando o valor de qMax . . . . .	94
23	Impedância de Entrada variando o valor de nMax . . . . .	95
24	Impedância de Entrada do MoM comparada aos modelos do HFSS . . . . .	96
25	Componentes $\theta$ e $\phi$ do ganho do MoM comparado ao HFSS em $\theta = 90^\circ$ . . . . .	97
26	Componentes $\theta$ e $\phi$ do ganho do MoM comparado ao HFSS em $\phi = 0^\circ$ . . . . .	98
27	Componente $\theta$ do ganho em $\theta = 90^\circ$ para diferentes alturas do cilindro condutor . . . . .	99
28	Componente $\theta$ do ganho em $\phi = 0^\circ$ para diferentes alturas do cilindro condutor . . . . .	100
29	Ganho total do MoM comparado ao HFSS em $\theta = 90^\circ$ . . . . .	101

30	Ganho total do MoM comparado ao HFSS em $\phi = 0^\circ$ . . . . .	102
31	Tempo de execução do MoM comparado com o HFSS . . . . .	103
32	Tempo de execução do MoM para diferentes combinações de $M_{max}$ e $P_{max}$ . . . . .	104
33	Tempo de execução do MoM para diferentes valores de $n_{Max}$ . . . . .	104
34	Tempo de execução do MoM para diferentes valores de $NK_z$ . . . . .	105
35	Tempo de execução do MoM para diferentes valores de $q_{Max}$ . . . . .	106

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Correspondência entre os nomes das variáveis no código e os símbolos utilizados na formulação . . . . .	58
Tabela 2 – Dimensões da antena . . . . .	88
Tabela 3 – Dimensões do cabo coaxial . . . . .	88

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Formulação Teórica</b>	<b>14</b>
2.1	Geometria e propriedades elétricas . . . . .	14
2.2	Visão Geral . . . . .	16
2.3	Princípio da equivalência . . . . .	17
2.3.1	Corrente magnética na região interna . . . . .	17
2.3.2	Corrente magnética na região externa . . . . .	17
2.4	Campo eletromagnético na cavidade . . . . .	18
2.4.1	Componentes de Campo $TE_z$ . . . . .	18
2.4.1.1	Condições de contorno nas paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ . . . . .	19
2.4.1.2	Condições de contorno nas paredes $z = z_1$ e $z = z_2$ . . . . .	20
2.4.1.3	Condições de contorno na parede $\rho = a$ . . . . .	21
2.4.1.4	Transformada do potencial vetor elétrico . . . . .	21
2.4.2	Componentes de Campo $TM_z$ . . . . .	22
2.4.2.1	Condições de contorno nas paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ . . . . .	23
2.4.2.2	Condições de contorno nas paredes $z = z_1$ e $z = z_2$ . . . . .	23
2.4.2.3	Condições de contorno na parede $\rho = a$ . . . . .	23
2.4.2.4	Transformada do potencial vetor magnético . . . . .	23
2.4.3	Expansão do campo na cavidade . . . . .	24
2.4.3.1	Campo $E_\rho$ . . . . .	25
2.4.3.2	Campo $E_\phi$ . . . . .	25
2.4.3.3	Campo $E_z$ . . . . .	26
2.4.3.4	Campo $H_\rho$ . . . . .	26
2.4.3.5	Campo $H_\phi$ . . . . .	26
2.4.3.6	Campo $H_z$ . . . . .	27
2.4.4	Funções de Green no interior da cavidade . . . . .	27
2.4.4.1	Função de Green para $A_d$ . . . . .	28
2.4.4.2	Função de Green para $F_d$ . . . . .	29
2.5	Campo eletromagnético externo . . . . .	30
2.5.1	Componentes de Campo $TE_z$ . . . . .	30
2.5.2	Componentes de Campo $TM_z$ . . . . .	31
2.5.3	Expansão do campo externo . . . . .	31
2.5.4	Funções de Green na região externa . . . . .	32
2.5.4.1	Função de Green para $A_0$ . . . . .	33
2.5.4.2	Função de Green para $F_0$ . . . . .	33

2.6	Funções de base $M_\phi(\phi, z)$ senoidais . . . . .	34
2.6.1	Transformada seno-cosseno na cavidade . . . . .	36
2.6.2	Transformada exponencial-Fourier no exterior . . . . .	37
2.7	Excitação . . . . .	38
2.8	Condições de contorno do campo $H_\phi$ . . . . .	39
2.9	Elementos da matriz $[Z]$ . . . . .	40
2.9.1	Campo interno . . . . .	40
2.9.2	Campo externo . . . . .	42
2.10	Elementos da matriz $[V]$ . . . . .	44
2.11	Impedância de Entrada . . . . .	46
2.12	Diagramas de radiação . . . . .	50
2.12.1	Campo $E_\theta$ . . . . .	50
2.12.2	Campo $E_\phi$ . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Implementação</b>	<b>53</b>
3.1	mom.m - Função <i>main</i> . . . . .	54
3.2	params.m - Estrutura com constantes físicas e parâmetros . . . . .	56
3.3	buildVMat.m - Construção da matriz $V$ . . . . .	60
3.4	buildZMat.m - Construção da matriz $Z$ . . . . .	61
3.5	V.m - Elementos da matriz $V$ . . . . .	62
3.6	Hphi_in_proj.m - Projeção interna do campo magnético . . . . .	63
3.7	Hphi_out_proj.m - Projeção externa do campo magnético . . . . .	64
3.8	E.m . . . . .	65
3.9	I3_p.m . . . . .	65
3.10	J_vf_Tss.m - Transformada seno-seno da corrente volumétrica na fita de alimentação . . . . .	66
3.11	drho_G_Mphi_TAd.m - Derivada em relação a $\rho$ da transformada $A_d$ da função de Green em $M_\phi$ . . . . .	67
3.12	G_Mphi_TFd.m - Transformada $F_d$ da função de Green em $M_\phi$ . . . . .	68
3.13	cinv.m . . . . .	68
3.14	dH2.m - Derivada da função de Hankel do segundo tipo . . . . .	69
3.15	dJ.m - Derivada da função de Bessel do primeiro tipo . . . . .	69
3.16	I4_p.m . . . . .	69
3.17	M_phi_mp_Tef.m . . . . .	70
3.18	Green_Mphi.m . . . . .	71
3.19	theta_1.m . . . . .	73
3.20	theta_3_rho.m . . . . .	75
3.21	theta_5.m . . . . .	77
3.22	theta_7_rho.m . . . . .	78



3.23	<code>z_in_f.m</code> . . . . .	81
3.24	<code>z_in_m.m</code> . . . . .	81
3.25	<code>Efields.m</code> - Campo elétrico radiado pela antena . . . . .	82
3.26	<code>gain.m</code> . . . . .	83
3.27	<code>radpat.m</code> . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>87</b>
4.1	Impedância de entrada do MoM em diferentes parametrizações . . . . .	89
4.1.1	Variando $P_{max}$ . . . . .	90
4.1.2	Variando $M_{max}$ . . . . .	91
4.1.3	Variando $NK_z$ . . . . .	92
4.1.4	Variando $q_{Max}$ . . . . .	93
4.1.5	Variando $n_{Max}$ . . . . .	94
4.2	Impedância de entrada do MoM e dos modelos do HFSS . . . . .	95
4.3	Diagramas de radiação do MoM e dos modelos do HFSS . . . . .	96
4.3.1	Componentes $\theta$ e $\phi$ do ganho . . . . .	97
4.3.2	Ganho total . . . . .	100
4.4	Tempo de execução . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>107</b>
5.1	Contribuições . . . . .	107
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Análise assintótica das funções <math>\Theta_n</math></b>	<b>109</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>112</b>

# 1

## INTRODUÇÃO

As antenas de microfita conformadas constituem uma classe de antenas projetadas para se adaptar à superfície do dispositivo, sendo bastante utilizadas em aplicações aeroespaciais, em que o baixo arrasto dessas antenas é particularmente desejado [1]. Existem estudos desse tipo de antena nos mais diversos formatos, entretanto, os mais comuns são cilindros [2, 3, 4, 5] e esferas [6, 7, 8, 9]. Na indústria aeroespacial, por exemplo, as antenas cilíndricas podem ser incluídas no corpo de foguetes e aviões [10, 11, 12]. Destacam-se duas categorias de antena nas quais as antenas de microfita conformadas podem se encaixar: antenas *flush-mounted* (embutidas) [13], nas quais a antena é instalada rente ao dispositivo, minimizando o arrasto e o impacto visual; e antenas *cavity-backed* [3], nas quais a antena é instalada sobre uma cavidade, melhorando alguns aspectos das antenas de microfita tradicionais, como banda e diretividade. A Figura 1 mostra algumas geometrias de antenas conformes.

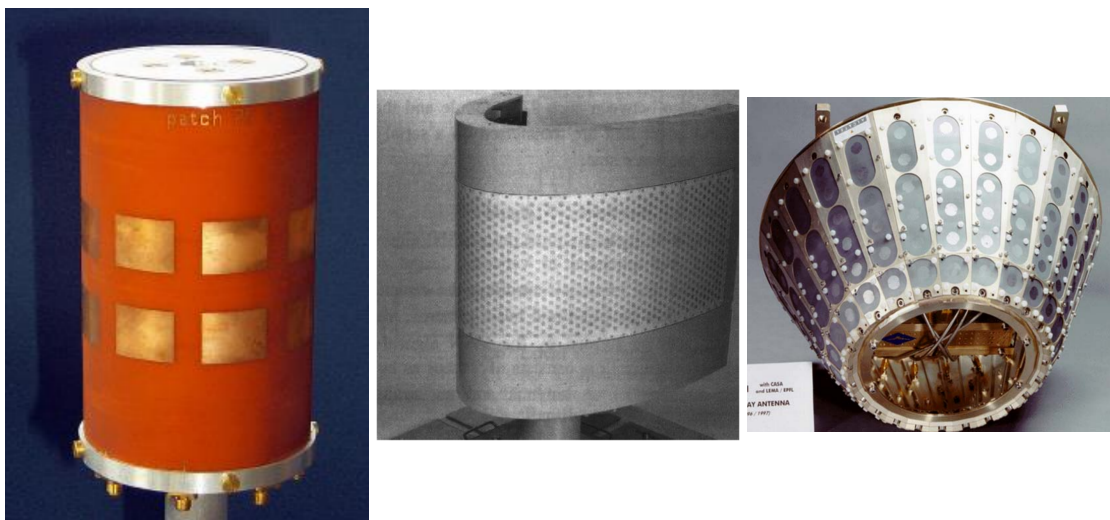


Figura 1: Diferentes geometrias de antenas conformes. Fonte: Conformal Array Antenna Theory and Design

Antenas de microfita híbridas de *patch* retangular [14] possuem duas de suas bordas aterradas, em contraste com o projeto tradicional, na qual nenhuma das bordas está aterrada. Esse tipo de antena foi desenvolvido para superar limitações das antenas de microfita tradicionais

quando um substrato mais espesso é utilizado, i.e., alta polarização cruzada e alta reatância indutiva [15].

Polarização cruzada refere-se à componente ortogonal à polarização principal de uma antena. Por exemplo, se a antena for projetada para ter polarização horizontal, a polarização cruzada será a vertical. Uma antena com baixa polarização cruzada oferece várias vantagens, como uma melhor qualidade de sinal, maior isolamento entre canais (possibilitando a utilização de multiplexação por divisão de polarização) e maior eficiência.

A impedância de entrada refere-se à relação entre a tensão e a corrente na porta de alimentação da antena. Este parâmetro é fundamental, pois o ideal é que a impedância de entrada esteja ajustada (casada) com a impedância da linha de transmissão para garantir a máxima eficiência.

Ao aterrar as bordas opostas do *patch*, a antena ganha a propriedade de baixa polarização cruzada, e o problema de alta reatância indutiva é solucionado [16]. Esses comportamentos são observados nas simulações apresentadas no capítulo Resultados. A Figura 2 mostra duas configurações de antenas híbridas conformes cilíndricas.



Figura 2: Antenas híbridas conformes cilíndricas

Antenas cilíndricas híbridas embutidas [17] são uma combinação de antenas de microfita conformadas cilíndricas e antenas de microfita híbridas, oferecendo os benefícios das duas técnicas. Dada a relevância desse tipo de antena, este trabalho tem como objetivo desenvolver um software para calcular as características de impedância de entrada e diagrama de radiação, dadas as propriedades eletromagnéticas e geométricas de uma antena desse tipo. A vantagem de criar um solucionador novo específico para um tipo de antena é que se espera um tempo de execução menor do que um solucionador geral, como discutido na Sessão 4.4. Além disso, o solucionador fica livre de restrições de exportação, desde que uma linguagem de código livre seja utilizada na implementação, que um software comercial tem dado o uso óbvio para desenvolver armas [18]. Por fim, mesmo que nenhum desses pontos fosse relevante, a documentação em si do processo de criação de um solucionador personalizado e a associação de várias técnicas analíticas do eletromagnetismo têm grande valor didático.

No capítulo Formulação Teórica, é feita uma análise da antena utilizando diversas técnicas analíticas e o método numérico do Método dos Momentos (MoM) [19]. Na Seção

2.3, é aplicado o princípio da equivalência [20] para fechar a cavidade dielétrica da antena com um condutor perfeito, o que é compensado pela adição de uma corrente magnética na região fechada. Na Seção 2.3, é utilizado o método da cavidade ressonante [21] para calcular o campo eletromagnético no domínio de Fourier dentro da cavidade, dadas as condições de contorno nas paredes da cavidade. Em seguida, as funções de Green na cavidade são calculadas, um requisito para utilizar o modelo da corrente superficial na presença de um dielétrico [22]. A interpretação física da função de Green é que, com ela, é possível calcular o campo elétrico a partir de um impulso unitário de corrente na superfície. Na Seção 2.5, o campo eletromagnético externo é obtido impondo a condição de radiação e, então, as funções de Green na região externa são calculadas. Na Seção 2.6, é introduzida a função de base escolhida para ser utilizada com o MoM e a corrente magnética, introduzida na Seção 2.3 ao aplicar o princípio da equivalência, é discretizada. Na Seção 2.7, a corrente volumétrica na ponta de prova de alimentação é definida. Para modelar a ponta de prova coaxial, foi utilizado o modelo de fita condutora [23]. Na Seção 2.8, as condições de contorno da componente  $\phi$  do campo  $H$  são utilizadas em conjunto com o produto simétrico com a função de teste, que, por conveniência, é a mesma função utilizada como função de base, para originar uma equação no formato de sistema linear, na qual a matriz  $Z$  tem seus termos oriundos dos campos excitados pela corrente magnética, enquanto a matriz  $V$  tem seus termos oriundos da excitação da antena, proveniente da corrente volumétrica na fita condutora. Ao resolver esse sistema, os pesos da matriz  $d$  são determinados, e a partir deles a corrente superficial, e então o diagrama de radiação e impedância de entrada podem ser calculados. As equações para os elementos das matrizes  $Z$  e  $V$  são apresentadas na Seção 2.9 e Seção 2.10, respectivamente. Na Seção 2.11, as equações para a impedância de entrada são apresentadas. A impedância é separada em duas partes, uma oriunda da corrente magnética superficial, e a outra da corrente elétrica na fita condutora. Na Seção 2.12, as equações para os diagramas de radiação são apresentadas.

O capítulo Implementação descreve a implementação do software escrito em Matlab, que, utilizando a formulação do capítulo 2, computa a impedância de entrada e diagrama de radiação da antena.

O capítulo Resultados apresenta os resultados obtidos comparando-os com dois modelos no HFSS [24], um com excitação feita com fita de corrente, e outro com um cabo coaxial. As dimensões e características eletromagnéticas utilizadas na antena são as de Ribeiro Filho. [14]. Um estudo sobre a influência dos parâmetros de precisão utilizados no software é feito, mostrando o impacto que eles têm na impedância de entrada e no tempo de execução.

# 2

## FORMULAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Geometria e propriedades elétricas

Uma antena cilíndrica embutida é construída posicionando uma superfície condutiva em uma cavidade setorial cilíndrica, que por sua vez é preenchida com um material dielétrico. A cavidade está inserida em um cilindro condutor elétrico perfeito de raio  $b$  e altura infinita, e é definida pelos limites angulares  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , radiais  $a$  a  $b$  e axiais  $z_1$  a  $z_2$ . O dielétrico possui permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r$  e tangente de perdas  $\tan\delta$ . A permeabilidade magnética do material é considerada igual à permeabilidade do vácuo  $\mu_0$ . A figura 3 contém uma representação da cavidade.

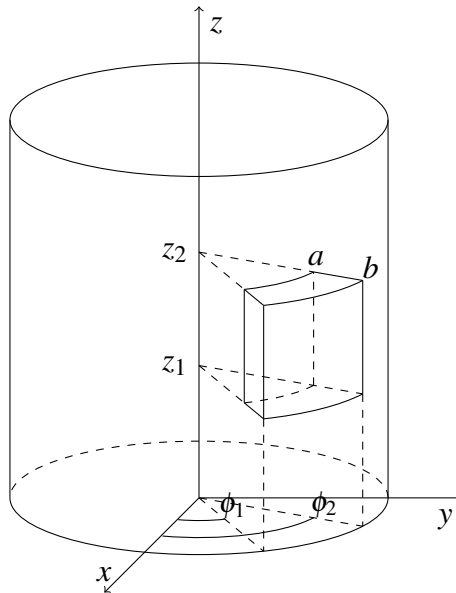


Figura 3: Cavidade setorial cilíndrica.

O *patch* é então impressa na superfície da cavidade, no raio  $b$ . O escopo deste trabalho são as antenas híbridas, que, no caso de um *patch* retangular, possuem duas bordas opostas aterradas, i.e, em contato com o corpo condutor do cilindro. Existem duas configurações possíveis de aterramento: bordas superior e inferior, ou bordas laterais. Dependendo dessa escolha, ao aplicar o princípio da equivalência, a direção da corrente magnética na superfície será diferente.

Denominamos então a antena do tipo  $M_z$  como possuindo bordas superior e inferior aterradas e, portanto, corrente magnética na direção  $z$ , enquanto a antena do tipo  $M_\phi$  possui as bordas laterais aterradas e corrente magnética na direção  $\phi$ . O estudo das antenas do tipo  $M_z$  foi feito em [25]. O foco deste trabalho são as antenas do tipo  $M_\phi$ , porém uma formulação geral para correntes em uma direção arbitrária é apresentada. Em ambos os casos, a corrente é aproximada como estando somente em uma direção, quando na realidade isso não acontece, especialmente conforme o tamanho da abertura da cavidade aumenta.

Formalmente, a antena tipo  $M_z$  está localizada entre  $z_1$  e  $z_2$  na direção  $z$  e entre os ângulos  $\phi_{1a}$  e  $\phi_{2a}$ , enquanto a antena  $M_\phi$  está localizada entre  $z_{1a}$  e  $z_{2a}$  na direção  $z$  e entre os ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

As figuras 4 e 5 representam as antenas do tipo  $M_z$  e  $M_\phi$ , respectivamente.

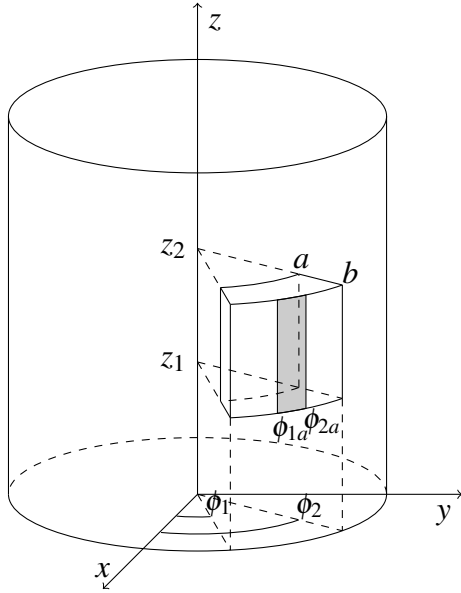


Figura 4: Antena híbrida do tipo  $M_z$

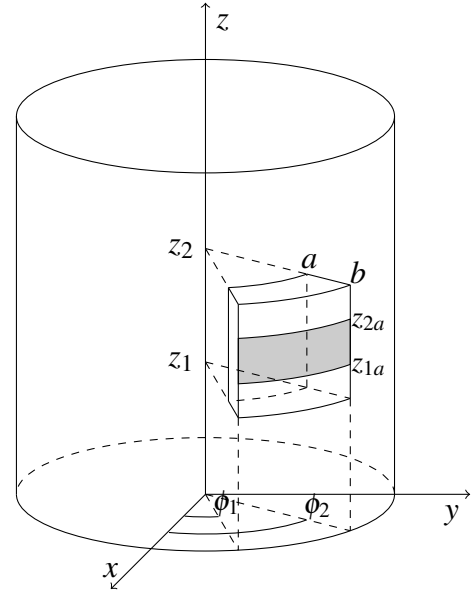


Figura 5: Antena híbrida do tipo  $M_\phi$

Formalmente, a geometria da cavidade é definida através das seguintes equações:

$$\begin{cases} a \leq \rho \leq b \\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Já a antena do tipo  $M_\phi$  é definida por:

$$\begin{cases} \rho = b \\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \\ z_{1a} \leq z \leq z_{2a} \end{cases} \quad (2.2)$$

A partir das equações anteriores, definimos:

$$\begin{cases} L = z_2 - z_1 \\ \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

## 2.2 Visão Geral

As próximas seções deste capítulo detalham a formulação teórica para a análise da antena descrita na seção anterior.

Na Seção 2.3, abordaremos o princípio da equivalência [20], que transforma o problema original em um problema equivalente ao fechar a cavidade dielétrica com um condutor perfeito e separar a antena em uma região interna (cavidade) e uma região externa (espaço livre). Com essa modificação, faz-se necessário acrescentar correntes magnéticas na região fechada, a fim de manter o campo externo igual ao problema original.

Na Seção 2.4, utilizaremos a cavidade fechada na seção anterior para aplicar o método da cavidade ressonante [21] e calcular o campo eletromagnético dentro da cavidade e, então, calcular as funções de Green. Esse último passo é um requisito para aplicar o método da corrente superficial [22] e é análogo a aplicar um impulso unitário de corrente magnética na superfície para calcular os campos resultantes.

Na Seção 2.5, o campo eletromagnético externo é calculado impondo a condição de radiação e as funções de Green externas são calculadas.

Na Seção 2.6 o Método dos Momentos (MoM) [19] é apresentado. A corrente magnética introduzida na Seção 2.3 é discretizada, o que é um requisito do MoM, e a função de base é definida.

Na Seção 2.7, a alimentação da antena é definida. A antena é alimentada por uma ponta de prova coaxial modelada como uma fita condutora perfeita [23] portando uma corrente volumétrica.

Na Seção 2.8, aplicam-se as condições de contorno na interface da cavidade com o espaço livre para obter uma relação entre o campo magnético interno e externo. Então, aplicando o produto simétrico do campo com a função de teste (a mesma que a função de base), chegamos a uma formulação em formato de sistema linear com 3 matrizes: a matriz de impedância  $Z$ , matriz de coeficientes  $d$  e matriz de tensões  $V$ . Os elementos das matrizes  $Z$  e  $V$  são calculados, respectivamente, na Seção 2.9 e Seção 2.10, e ao resolver o sistema, obtêm-se os elementos da matriz  $d$ , a partir da qual se calcula a corrente na antena, e a impedância de entrada e o diagrama de radiação são derivados.

Por fim, na Seção 2.11, a impedância de entrada é calculada somando as contribuições da corrente magnética na superfície com a corrente na fita condutora utilizada na alimentação da antena; e na Seção 2.12, o diagrama de radiação é calculado.

## 2.3 Princípio da equivalência

O princípio da equivalência [20] (3-5) afirma que fontes que produzem o mesmo campo em uma certa região são equivalentes nessa região. Portanto, é possível criar uma estrutura equivalente alterando as propriedades da interface antenna-exterior de forma que o campo externo permaneça o mesmo, mas, do ponto de vista matemático, o problema se torna mais fácil de ser resolvido.

É com esse intuito que o princípio da equivalência é utilizado aqui. A superfície da cavidade ( $\rho = b$ ) é substituída por uma superfície condutora elétrica perfeita. Dessa forma, a cavidade passa a possuir todas as 6 interfaces com condutores elétricos perfeitos, o que será aproveitado nas Seções 2.4.1 e 2.4.2. Para manter o campo externo igual ao da configuração original, é necessário introduzir uma corrente magnética na superfície da cavidade conforme [20] (3-15):

$$\vec{M} = \vec{E} \times \hat{n} \quad (2.4)$$

Onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\hat{n}$  é o versor normal.

### 2.3.1 Corrente magnética na região interna

Internamente, o vetor normal da superfície está na direção radial negativa ( $-\rho$ ) e o campo elétrico é tangencial à superfície numa direção arbitrária, i.e. possui componentes axial ( $z$ ) e angular ( $\phi$ ), conforme ilustrado na Figura 6:

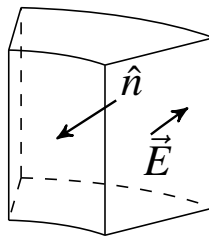


Figura 6: Versor normal e campo elétrico na região interna.

Portanto, pela equação (2.4):

$$\vec{M}_i = \vec{E}(b, \phi, z) \times (-\hat{a}_\rho) = \hat{a}_\rho \times \vec{E}(b, \phi, z) = \vec{M} \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Corrente magnética na região externa

Analogamente à região interna, o vetor normal agora está na direção radial positiva e o campo elétrico continua o mesmo, como ilustrado na Figura 7:



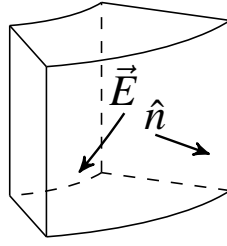


Figura 7: Campo elétrico e versor normal na região externa.

Novamente pela equação (2.4):

$$\vec{M}_e = \vec{E}(b, \phi, z) \times \hat{a}_\rho = (-\hat{a}_\rho) \times \vec{E}(b, \phi, z) = -\vec{M} \quad (2.6)$$

Nota-se que as correntes magnéticas no interior e no exterior são de mesma magnitude, porém em sentidos opostos.

## 2.4 Campo eletromagnético na cavidade

Ao construir o problema equivalente, como demonstrado na seção anterior, a possibilidade de calcular os campos eletromagnéticos no interior da cavidade se abre. Isso é alcançado utilizando as equações [20] (5-18, 5-19) para os campos  $TM_z$  (transversal magnético na direção  $z$ ) e  $TE_z$  (transversal elétrico na direção  $z$ ) respectivamente. Os modos transversais ocorrem quando o campo eletromagnético está confinado em um guia ou cavidade, e são caracterizados por uma componente do campo estando num plano perpendicular, i.e. transversal, à direção de propagação. A direção arbitrária da corrente magnética faz com que ambos os modos possam aparecer, dependendo da geometria da antena. Por exemplo, a antena híbrida do tipo  $M_z$  possui corrente magnética apenas na direção  $z$  [25] (3.2, 3.3) e, com isso, produz apenas campo  $TE_z$ . Já a antena do tipo  $M_\phi$  possui corrente na direção  $\phi$ , que, por não ser uma direção cartesiana, gera ambos os campos  $TE_z$  e  $TM_z$ .

As subseções 2.4.1 e 2.4.2 a seguir mostram o procedimento para calcular os campos.

### 2.4.1 Componentes de Campo $TE_z$

A componente  $TE_z$  dos campos, gerados através de potenciais vetores  $\vec{F} = F_{zd}(\rho, \phi, z)\hat{a}_z$ , estará presente em ambos os campos excitados por correntes magnéticas  $M_z$  e  $M_\phi$ . Nota-se que o subscrito "d" indica que uma equação está relacionada à região interna; inclusive, a permissividade elétrica do dielétrico preenchendo a cavidade é definida como  $\epsilon_d = \epsilon_r \epsilon_0$ . A partir disso, é possível calcular todas as componentes do campo eletromagnético através das equações [20] (5-19):

$$\begin{cases} E_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{z_d}}{\partial \phi} & H_\rho = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F_{z_d}}{\partial \rho \partial z} \\ E_\phi = \frac{\partial F_{z_d}}{\partial \rho} & H_\phi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F_{z_d}}{\partial \phi \partial z} \\ E_z = 0 & H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) F_{z_d} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$k_d = \omega \sqrt{\mu \epsilon_d}$$

No interior da cavidade, o potencial vetor elétrico satisfaz a equação de onda em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 F_{z_d} + k_d^2 F_{z_d} = 0 \quad (2.8)$$

E pode ser solucionado por separação de variáveis [20] (5-9):

$$F_{z_d}(\rho, \phi, z) = B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) h(v\phi) h(k_{z_d} z) \quad (2.9)$$

Onde  $h(v\phi)$  e  $h(k_{z_d} z)$  são funções harmônicas,  $B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho)$  é uma combinação de funções de Bessel e  $k_d^2 = k_{z_d}^2 + k_{\rho_d}^2$ . O sobrescrito TE indica que essa função é relativa ao campo TE.

#### 2.4.1.1 Condições de contorno nas paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$

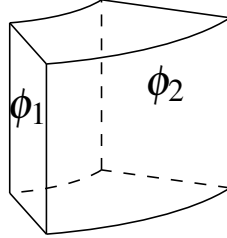


Figura 8: Paredes  $\phi = \phi_1$  e  $\phi = \phi_2$ .

As paredes  $\phi = \phi_1$  e  $\phi = \phi_2$  são condutoras elétricas perfeitas, portanto, os campos tangenciais  $E_z$  e  $E_\rho$  são nulos nessas regiões. Sendo assim:

$$E_z = E_\rho = 0 \Big|_{\phi_1, \phi_2} \quad (2.10)$$

Pelas equações (2.7) e (2.9), isso implica:

$$\frac{dh(v\phi)}{d\phi} = 0 \Big|_{\phi_1, \phi_2} \quad (2.11)$$

Lembrando que as funções  $h$  são harmônicas, então devem conter uma combinação de senos e cossenos. Tendo isso em mente, chegamos à seguinte equação:

$$h(v\phi) = \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \quad (2.12)$$

Onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$ . Nota-se que a solução deveria incluir um coeficiente, porém ele foi omitido, pois ao juntar as 3 partes da solução de  $F_z$ , todos os coeficientes serão reunidos em apenas um.

#### 2.4.1.2 Condições de contorno nas paredes $z = z_1$ e $z = z_2$

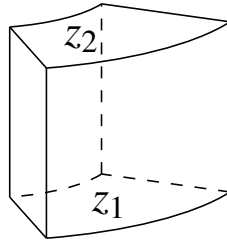


Figura 9: Paredes  $z = z_1$  e  $z = z_2$ .

Nestas paredes, os campos tangenciais  $E_\phi$  e  $E_\rho$  são nulos. Pelas equações (2.7) e (2.9):

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho} B_v^{TE}(k_{\rho d} \rho) \frac{d}{d\phi} h(v\phi) h(k_{zd} z) = 0 \Big|_{z_1, z_2} \\ E_\phi &= \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = \frac{d}{d\rho} B_v^{TE}(k_{\rho d} \rho) h(v\phi) h(k_{zd} z) = 0 \Big|_{z_1, z_2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Isso implica:

$$h(k_{zd} z) = 0 \Big|_{z_1, z_2} \quad (2.14)$$

Assim como no caso anterior,  $h_z$  é uma função harmônica, logo:

$$h(k_{zd} z) = \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.15)$$

Onde  $q \in \mathbb{N}^*$ , o conjunto dos números naturais não nulos, e  $k_{zd} = \frac{q\pi}{L}$ .

### 2.4.1.3 Condições de contorno na parede $\rho = a$

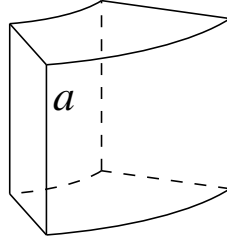


Figura 10: Parede  $\rho = a$ .

Nesta parede, os campos tangenciais  $E_\phi$  e  $E_z$  são nulos. Logo, pelas equações (2.7) e (2.9):

$$E_\phi = \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = \frac{d}{d\rho} B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) h(v\phi) h(k_{z_d} z) = 0 \Big|_{\rho=a} \quad (2.16)$$

O que implica:

$$\frac{d}{d\rho} B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) = 0 \Big|_{\rho=a} \quad (2.17)$$

A função  $B_v$  é uma combinação de funções de Bessel. Com isso, chegamos à seguinte equação:

$$B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) = d_{nq} \left( J_v(k_{\rho_d} \rho) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J_v'(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} \rho) \right) \quad (2.18)$$

Onde  $d_{nq}$  é um coeficiente que engloba os coeficientes omitidos de  $h$  e  $h_z$ . O valor de  $d_{nq}$  é determinado pela fonte, como será visto na seção 2.4.4 equação (2.63).  $J_v$  é a função de Bessel do primeiro tipo e  $H_v^{(2)}$  é a função de Hankel do segundo tipo. A função de Hankel do segundo tipo é uma combinação das funções de Bessel do primeiro tipo  $J_v$  e do segundo tipo  $Y_v$ , expressa como  $H_v^{(2)} = J_v - iY_v$ . A função de Hankel é utilizada ao longo da formulação para deixar as equações mais compactas.

### 2.4.1.4 Transformada do potencial vetor elétrico

Substituindo (2.12), (2.15) e (2.18) em (2.9):

$$F_{z_d}(\rho, \phi, z) = B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.19)$$

Onde  $v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$  e  $k_{\rho_d}^2 = k_d^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$

Incluindo todos os possíveis valores de  $n$  e  $q$ , obtemos a solução geral da equação de onda (2.8) no interior da cavidade:

$$F_{z_d}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.20)$$

Definimos então as transformadas cosseno-seno da equação (2.20):

$$\begin{aligned} F(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \hat{F}^{cs}(\rho, n, q) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \\ \hat{F}^{cs}(\rho, n, q) &= \frac{\epsilon_n}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} F(\rho, \phi, z) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\text{Onde } \epsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}$$

Comparando (2.20) (2.21), concluímos que:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) &= B_v^{TE}(k_{\rho_d} \rho) \\ &= d_{nq} \left[ J_v(k_{\rho_d} \rho) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J_v'(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} \rho) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.4.2 Componentes de Campo $TM_z$

A componente  $\phi$  da corrente magnética também gera um potencial vetor magnético na direção  $z$  ( $\vec{A} = A_{z_d}(\rho, \phi, z)\hat{a}_z$ ), além do potencial vetor elétrico na direção  $z$  que leva ao campo  $TE_z$ . O procedimento para o campo  $TM_z$  é análogo ao do campo  $TE_z$ , porém utilizando a equação [20] (5-18):

$$\begin{cases} E_\rho = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{\partial^2 A_{z_d}}{\partial \rho \partial z} & H_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{z_d}}{\partial \phi} \\ E_\phi = \frac{1}{j\omega\epsilon_d \rho} \frac{\partial^2 A_{z_d}}{\partial \phi \partial z} & H_\phi = -\frac{\partial A_{z_d}}{\partial \rho} \\ E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) A_{z_d} & H_z = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$k_d = \omega \sqrt{\mu \epsilon_d}$$

Analogamente à equação (2.9), temos que:

$$A_{z_d}(\rho, \phi, z) = B_v^{TM}(k_{\rho_d} \rho) h(v\phi) h(k_{z_d} z) \quad (2.24)$$

Onde o sobrescrito TM indica que a equação é relativa ao campo TM.

### 2.4.2.1 Condições de contorno nas paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$

Os campos  $E_z$  e  $E_\rho$  são nulos nessas paredes. Sendo assim, pelas equações (2.23) e (2.24):

$$h(\nu\phi) = 0 \Big|_{\phi_1, \phi_2} \quad (2.25)$$

Resolvendo a equação, chegamos a:

$$h(\nu\phi) = \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \quad (2.26)$$

Onde  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $\nu = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$ .

### 2.4.2.2 Condições de contorno nas paredes $z = z_1$ e $z = z_2$

Nestas paredes, os campos tangenciais  $E_\phi$  e  $E_\rho$  são nulos. Pelas equações (2.23) e (2.24):

$$\frac{d}{dz}h(k_{zd}z) = 0 \Big|_{z_1, z_2} \quad (2.27)$$

Portanto:

$$h(k_{zd}z) = \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.28)$$

Onde  $q \in \mathbb{N}$  e  $k_{zd} = \frac{q\pi}{L}$ .

### 2.4.2.3 Condições de contorno na parede $\rho = a$

Nesta parede, os campos tangenciais  $E_\phi$  e  $E_z$  são nulos. Logo, pelas equações (2.23) e (2.24):

$$B_V^{TM}(k_{\rho_d}\rho) = 0 \Big|_{\rho=a} \quad (2.29)$$

Logo:

$$B_V^{TM}(k_{\rho_d}\rho) = f_{nq} \left( J_\nu(k_{\rho_d}\rho) H_\nu^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_\nu(k_{\rho_d}a) H_\nu^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right) \quad (2.30)$$

Onde  $f_{nq}$  é análogo a  $d_{nq}$  e é definido pela equação (2.56).

### 2.4.2.4 Transformada do potencial vetor magnético

Substituindo (2.26), (2.28) e (2.30) em (2.24):

$$A_{z_d}(\rho, \phi, z) = B_V^{TM}(k_{\rho_d}\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.31)$$

Onde  $v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$  e  $k_{\rho_d}^2 = k_d^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$

A solução geral é:

$$A_{z_d}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} B_v^{TM}(k_{\rho_d}\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.32)$$

Definimos então as transformadas seno-cosseno da equação (2.32):

$$\begin{aligned} A(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \hat{A}^{sc}(\rho, n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \\ \hat{A}^{sc}(\rho, n, q) &= \frac{\epsilon_q}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} A(\rho, \phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\text{Onde } \epsilon_q = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 2 & q \neq 0 \end{cases}$$

De forma geral, a notação utilizada para nomear as transformadas segue a convenção de utilizar o nome do núcleo sobre  $\phi$  seguido do nome do núcleo sobre  $z$ , abreviando para a primeira letra do nome ao lado do símbolo de chapéu. Nesse caso, seguindo a ordem dos núcleos sobre  $\phi$  e  $z$ , temos seno seguido de cosseno, o que dá à transformada o nome seno-cosseno, abreviado para  $sc$  e anotado na equação como  $\hat{\square}^{sc}$ .

Comparando (2.32) (2.33), concluímos que:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) &= B_v^{TM}(k_{\rho_d}\rho) \\ &= f_{nq} \left[ J_v(k_{\rho_d}\rho) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

### 2.4.3 Expansão do campo na cavidade

Agora que os vetores potenciais magnético e elétrico foram definidos, é possível determinar todas as 6 componentes do campo eletromagnético na cavidade através das equações (2.7), (2.20), (2.22), (2.23), (2.32) e (2.34). A seguir é apresentado o cálculo completo para o campo  $E_\rho$ . Para os demais campos, o processo é análogo, portanto as contas são apresentadas de forma simplificada.

### 2.4.3.1 Campo $E_\rho$

Das equações (2.7) e (2.23) temos que:

$$E_{\rho_d} = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{\partial^2 A_{z_d}}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{z_d}}{\partial \phi} \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.20), (2.22), (2.32) e (2.34):

$$E_{\rho_d} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) \frac{q\pi}{L} + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.36)$$

Nota-se que a equação (2.36) é uma transformada seno-seno:

$$E_{\rho_d}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \hat{E}_{\rho_d}^{ss}(\rho, n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right)$$

$$\hat{E}_{\rho_d}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{2}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} E_{\rho_d}(\rho, \phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \quad (2.37)$$

Comparando as equações (2.36) e (2.37):

$$\boxed{\hat{E}_{\rho_d}^{ss}(\rho, n, q) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)} \quad (2.38)$$

### 2.4.3.2 Campo $E_\phi$

$$E_{\phi_d} = \frac{1}{j\omega\epsilon_d \rho} \frac{\partial^2 A_{z_d}}{\partial \phi \partial z} + \frac{\partial F_{z_d}}{\partial \rho} \Rightarrow$$

$$E_{\phi_d} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) \frac{n\pi}{\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} + \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \right] \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.39)$$

Identificando a transformada cosseno-seno:

$$\boxed{\hat{E}_{\phi_d}^{cs}(\rho, n, q) = \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) + \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)} \quad (2.40)$$



### 2.4.3.3 Campo $E_z$

$$E_{z_d} = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) A_{z_d} \Rightarrow$$

$$E_{z_d} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\epsilon_d} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.41)$$

Identificando a transformada seno-cosseno:

$$\boxed{\hat{E}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) = \frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\epsilon_d} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q)} \quad (2.42)$$

### 2.4.3.4 Campo $H_\rho$

$$H_{\rho_d} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{z_d}}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F_{z_d}}{\partial \rho \partial z} \Rightarrow$$

$$H_{\rho_d} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{A}_{z_d}^{cs} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \frac{q\pi}{L} \right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.43)$$

Identificando a transformada cosseno-cosseno:

$$\boxed{\hat{H}_{\rho_d}^{cc}(\rho, n, q) = \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{A}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)} \quad (2.44)$$

### 2.4.3.5 Campo $H_\phi$

$$H_{\phi_d} = -\frac{\partial A_{z_d}}{\partial \rho} + \frac{1}{j\omega\mu\rho} \frac{\partial^2 F_{z_d}}{\partial \phi \partial z} \Rightarrow$$

$$H_{\phi_d} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \right] \cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.45)$$

Identificando a transformada seno-cosseno:

$$\hat{H}_{\phi_d}^{sc}(\rho, n, q) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \quad (2.46)$$

#### 2.4.3.6 Campo $H_z$

$$H_{z_d} = \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_{z_d} \Rightarrow \quad (2.47)$$

$$H_{z_d} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\mu} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right)$$

Identificando a transformada cosseno-seno:

$$\hat{H}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) = \frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\mu} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \quad (2.48)$$

### 2.4.4 Funções de Green no interior da cavidade

Agora que temos todos os campos na cavidade, podemos utilizar a condição de contorno na superfície  $\rho = b$  para calcular as funções de Green na cavidade. Uma função de Green representa a resposta ao impulso de um operador diferencial linear e é particularmente útil para resolver equações diferenciais lineares. Se temos um operador linear  $\mathbf{L}$ , uma função de Green  $\mathbf{G}$  é solução de  $\mathbf{L}\mathbf{G} = \delta$ , onde  $\delta$  é a função delta de Dirac.

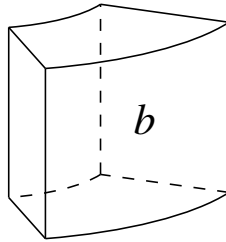


Figura 11: Parede  $\rho = b$

Da equação (2.5), temos:

$$\vec{M}_i = -\hat{n} \times \vec{E}_d = \hat{a}_\rho \times [E_{\phi_d} \hat{a}_\phi + E_{z_d} \hat{a}_z] = E_{\phi_d} \hat{a}_z - E_{z_d} \hat{a}_\phi \Big|_{\rho=b} \quad (2.49)$$

Assim como o campo elétrico, a corrente magnética  $\vec{M}_i$  também tem componentes na direção  $\phi$  e  $z$ :

$$\vec{M}_i = M_z \hat{a}_z + M_\phi \hat{a}_\phi \quad (2.50)$$

Comparando as últimas duas equações, concluímos que:

$$\begin{cases} M_z = +E_{\phi_d} \big|_{\rho=b} \\ M_{\phi} = -E_{z_d} \big|_{\rho=b} \end{cases} \quad (2.51)$$

Aplicando a transformada cosseno-seno na equação de  $M_z$  e utilizando a equação (2.40), temos que:

$$\begin{aligned} \hat{M}_z^{cs}(n, q) &= \hat{E}_{\phi_d}^{cs}(b, n, q) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{A}_{z_d}^{sc}(b, n, q) + \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(b, n, q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Agora, aplicando a transformada seno-cosseno na equação de  $M_{\phi}$  e utilizando a equação (2.42), temos que:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\phi}^{sc}(n, q) &= -\hat{E}_{z_d}^{sc}(b, n, q) \\ &= -\frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\epsilon_d} \hat{A}_{z_d}^{sc}(b, n, q) \end{aligned} \quad (2.53)$$

#### 2.4.4.1 Função de Green para $A_d$

A partir das equações (2.34) e (2.53):

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\phi}^{sc}(n, q) &= -\frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\epsilon_d} B_v^{TM}(k_{\rho_d} b) \\ &= -\frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\epsilon_d} f_{nq} \left[ J_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} b) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Definimos  $\Theta_5$  como:

$$\Theta_5(n, q) = J_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} b) \quad (2.55)$$

Reformulando a equação (2.54), isolamos  $f_{nq}$ :

$$f_{nq} = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}^2 \Theta_5(n, q)} \hat{M}_{\phi}^{sc}(n, q) \quad (2.56)$$

Substituindo  $f_{nq}$  na equação (2.34):

$$\begin{aligned} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) &= -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}^2 \Theta_5(n, q)} \hat{M}_{\phi}^{sc}(n, q) \left[ J_v(k_{\rho_d} \rho) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} \rho) \right] \\ &= \boxed{\hat{G}_{M_{\phi}}^{A_d}(\rho, n, q) \hat{M}_{\phi}^{sc}(n, q)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Onde a transformada da função de Green é:

$$\hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(\rho, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}^2 \Theta_5(n, q)} \left[ J_v(k_{\rho_d}\rho) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.58)$$

#### 2.4.4.2 Função de Green para $F_d$

Utilizando as equações (2.22), (2.34) e (2.52):

$$\begin{aligned} \hat{M}_z^{cs}(n, q) = & -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} f_{nq} \left[ J_v(k_{\rho_d}b) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}b) \right] \\ & + d_{nq} k_{\rho_d} \left[ J'_v(k_{\rho_d}b) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J'_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}b) \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

Definimos  $\Theta_1$  como:

$$\Theta_1(n, q) = J'_v(k_{\rho_d}b) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J'_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}b) \quad (2.60)$$

Substituindo  $\Theta_1$  e  $\Theta_5$  na equação (2.59):

$$\hat{M}_z^{cs}(n, q) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} f_{nq} \Theta_5(n, q) + d_{nq} k_{\rho_d} \Theta_1(n, q) \quad (2.61)$$

Nota-se que:

$$f_{nq} \Theta_5(n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}^2} \hat{M}_\phi^{sc}(n, q) \quad (2.62)$$

Substituindo em (2.61) e isolando  $d_{nq}$ :

$$d_{nq} = \frac{\hat{M}_z^{cs}(n, q)}{k_{\rho_d} \Theta_1(n, q)} - \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \frac{\hat{M}_\phi^{sc}(n, q)}{k_{\rho_d}^3 \Theta_1(n, q)} \quad (2.63)$$

Substituindo na equação (2.22):

$$\begin{aligned} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) = & \left[ \frac{\hat{M}_z^{cs}(n, q)}{k_{\rho_d} \Theta_1(n, q)} - \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \frac{\hat{M}_\phi^{sc}(n, q)}{k_{\rho_d}^3 \Theta_1(n, q)} \right] \cdot \\ & \cdot \left[ J_v(k_{\rho_d}\rho) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J'_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \\ = & \boxed{\hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(\rho, n, q) \hat{M}_\phi^{sc}(n, q) + \hat{G}_{M_z}^{F_d}(\rho, n, q) \hat{M}_z^{cs}(n, q)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Onde as transformadas das funções de Green são:

$$\hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(\rho, n, q) = -\frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \frac{1}{k_{\rho_d}^3 \Theta_1(n, q)} \left[ J_V(k_{\rho_d}\rho) H_V^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_V'(k_{\rho_d}a) H_V^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.65)$$

$$\hat{G}_{M_z}^{F_d}(\rho, n, q) = \frac{1}{k_{\rho_d} \Theta_1(n, q)} \left[ J_V(k_{\rho_d}\rho) H_V^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_V'(k_{\rho_d}a) H_V^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.66)$$

## 2.5 Campo eletromagnético externo

O campo eletromagnético externo, assim como o interno, pode possuir modos  $TE_z$  e  $TM_z$  por conta da direção arbitrária da corrente magnética na superfície. Sendo assim, é necessário expandir ambos os modos, como será mostrado nesta seção. Nota-se que o subscrito 0 denota entidades externas à cavidade.

### 2.5.1 Componentes de Campo $TE_z$

Para o campo  $TE_z$  temos um potencial vetor elétrico  $\vec{F} = F_{z_0} \hat{a}_z$  que satisfaz a equação de onda em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 F_{z_0} + k_0^2 F_{z_0} = 0 \quad k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (2.67)$$

A solução de  $F_{z_0}$  por separação de variáveis é dada por [20] (5-14):

$$F_{z_0}(\rho, \phi, z) = H_n^{(2)}(k_{\rho_0}\rho) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} \quad (2.68)$$

Onde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $k_z \in \mathbb{R}$  e  $k_{\rho_0} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ . A função de Hankel do segundo tipo foi escolhida por ser a única função de Bessel que satisfaz a condição de radiação. Para a função harmônica em  $\phi$ ,  $n$  tem de ser inteiro para garantir a continuidade do campo angularmente. Para a função harmônica em  $z$ , não há restrição, portanto, o número pode ser real.

Somando todos os possíveis valores de  $n$  e integrando sobre  $k_z$  chegamos à solução geral de  $\vec{F}$ :

$$F_{z_0}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0}\rho) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \quad (2.69)$$

Definindo o par de transformadas exponencial-Fourier:

$$\begin{aligned}
F_{z_0}(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \\
\hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_{z_0}(\rho, \phi, z) e^{jn\phi} e^{jk_z z} d\phi dk_z
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Comparando (2.69) e (2.70):

$$\hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = f_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) \tag{2.71}$$

O Sobrescrito *ef* antecedido do símbolo de chapéu denota a transformada exponencial-Fourier.

### 2.5.2 Componentes de Campo $TM_z$

Para o campo  $TM_z$ , os cálculos são análogos ao do campo  $TE_z$ , porém utilizando o potencial vetor magnético  $\vec{A} = A_{z_0} \hat{a}_z$ .

A solução por separação de variáveis é:

$$A_{z_0}(\rho, \phi, z) = H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} \tag{2.72}$$

A solução geral é:

$$A_{z_0}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \tag{2.73}$$

Definindo o par de transformadas exponencial-Fourier:

$$\begin{aligned}
A_{z_0}(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \\
\hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A_{z_0}(\rho, \phi, z) e^{jn\phi} e^{jk_z z} d\phi dk_z
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Comparando (2.73) e (2.74):

$$\hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = g_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) \tag{2.75}$$

### 2.5.3 Expansão do campo externo

O cálculo para o campo externo é análogo ao do campo interno, com a ressalva de que, no domínio da transformada exponencial-Fourier, as derivadas  $\partial/\partial\phi$  e  $\partial/\partial z$  são substituídas, respectivamente, por  $-jn$  e  $-jk_z$ . Portanto, as 6 componentes do campo exterior são:

$$\hat{E}_{\rho_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{k_z}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) + \frac{jn}{\rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.76)$$

$$\hat{E}_{\phi_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega \epsilon_0 \rho} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) + \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.77)$$

$$\hat{E}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{k_{\rho_0}^2}{j\omega \epsilon_0} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.78)$$

$$\hat{H}_{\rho_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{jn}{\rho} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) - \frac{k_z}{\omega \mu_0} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.79)$$

$$\hat{H}_{\phi_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega \mu_0 \rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.80)$$

$$\hat{H}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{k_{\rho_0}^2}{j\omega \mu_0} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.81)$$

### 2.5.4 Funções de Green na região externa

A partir dos campos calculados na seção anterior, aplicamos a condição de contorno na superfície  $\rho = b$  para calcular as funções de Green para a região externa.

Da equação (2.6), lembramos que a corrente magnética externa  $\vec{M}_e$  tem sentido oposto à corrente magnética interna  $\vec{M}_i$ . Portanto, das equações (2.49) e (2.50), temos que:

$$\vec{M}_e = -M_z \hat{a}_z - M_\phi \hat{a}_\phi = -E_\phi \hat{a}_z + E_z \hat{a}_\phi \Big|_{\rho=b} \quad (2.82)$$

Isolando as componentes em  $z$  e  $\phi$ :

$$\begin{cases} M_z = +E_{\phi_0} \Big|_{\rho=b} \\ M_\phi = -E_{z_0} \Big|_{\rho=b} \end{cases} \quad (2.83)$$

Aplicando a transformada exponencial-Fourier a ambas as equações:

$$\begin{cases} \hat{M}_z^{ef}(n, k_z) = +\hat{E}_{\phi_0}^{ef}(b, n, k_z) \\ \hat{M}_\phi^{ef}(n, k_z) = -\hat{E}_{z_0}^{ef}(b, n, k_z) \end{cases} \quad (2.84)$$

Utilizando as equações (2.77) e (2.78) em (2.84):

$$\hat{M}_z^{ef}(n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega \epsilon_0 b} \hat{A}_{z_0}^{ef}(b, n, k_z) + \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(b, n, k_z) \quad (2.85)$$

$$\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) = -\frac{k_{\rho_0}^2}{j\omega\epsilon_0} \hat{A}_{z_0}^{ef}(b, n, k_z) \quad (2.86)$$

#### 2.5.4.1 Função de Green para $A_0$

Da equação (2.75) e (2.85):

$$\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) = -\frac{k_{\rho_0}^2}{j\omega\epsilon_0} g_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b) \quad (2.87)$$

Isolando  $g_{nk_z}$ :

$$g_{nk_z} = -\frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) \quad (2.88)$$

Substituindo  $g_{nk_z}$  de volta na equação (2.75):

$$\begin{aligned} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) &= -\frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) \\ &= \boxed{\hat{G}_{M_{\phi}}^{A_0}(\rho, n, k_z) \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z)} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Onde:

$$\boxed{\hat{G}_{M_{\phi}}^{A_0}(\rho, n, k_z) = -\frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}^2} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)}} \quad (2.90)$$

#### 2.5.4.2 Função de Green para $F_0$

Substituindo as equações (2.71) e (2.86) em (2.85), temos:

$$\hat{M}_z^{ef}(n, k_z) = -\frac{nk_z}{bk_{\rho_0}^2} \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) + f_{nk_z} k_{\rho_0} H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b) \quad (2.91)$$

Isolando  $f_{nk_z}$ :

$$f_{nk_z} = -\frac{nk_z}{bk_{\rho_0}^3} \frac{\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} + \frac{\hat{M}_z^{ef}(n, k_z)}{k_{\rho_0} H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.92)$$

Substituindo de volta na equação (2.71):



$$\begin{aligned}\hat{F}_{z0}^{ef}(\rho, n, k_z) &= \left[ -\frac{nk_z}{bk_{\rho_0}^3} \frac{\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} + \frac{\hat{M}_z^{ef}(n, k_z)}{k_{\rho_0} H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \right] H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) \\ &= \hat{G}_{M_{\phi}}^{F_0}(\rho, n, k_z) \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) + \hat{G}_{M_z}^{F_0}(\rho, n, k_z) \hat{M}_z^{ef}(n, k_z)\end{aligned}\quad (2.93)$$

Onde as transformadas das funções de Green são:

$$\hat{G}_{M_{\phi}}^{F_0}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{bk_{\rho_0}^3} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.94a)$$

$$\hat{G}_{M_z}^{F_0}(\rho, n, k_z) = \frac{1}{k_{\rho_0}} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.94b)$$

Na presença de corrente magnética apenas na direção  $\phi$ , a equação se resume a:

$$\hat{F}_{z0}^{ef}(\rho, n, k_z) = \hat{G}_{M_{\phi}}^{F_0}(\rho, n, k_z) \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z) \quad (2.95)$$

## 2.6 Funções de base $M_{\phi}(\phi, z)$ senoidais

As funções de base são a essência do Método dos Momentos. Segundo Harrington [19], o Método dos Momentos permite solucionar uma equação linear no formato  $L(f) = g$ , onde  $L$  é um operador integral,  $f$  é uma função desconhecida e  $g$  é um termo de excitação (e.g, tensão elétrica) [19] (1-1). A função  $f$  é aproximada por uma combinação linear de coeficientes a serem determinados e uma função de base  $f_k$  arbitrária. Matematicamente, isso é dado pelas equações [19] (1-21, 1-22):

$$f = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k \Rightarrow \sum_{k=1}^K \alpha_k L(f_k) = g \quad (2.96)$$

Existem diversas possibilidades de funções de base (e.g. pulso, triangular, senoidal, etc.). Já que os campos internos são senoidais, escolheu-se utilizar funções de base senoidais [26], o que acaba simplificando as equações dos campos internos excitados por cada função de base.

Como indicado pelo somatório na equação (2.96), para aplicar o Método dos Momentos, é necessário realizar uma discretização em  $N$  partes. Neste caso, o que é discretizado é a corrente magnética, de forma que ela seja constante por partes, ou seja, ao longo da direção que ela é discretizada, em cada parte ela é constante nessa direção (vide a Figura 14 abaixo para uma representação visual).

Agora se faz necessário definir a geometria do *patch* da antena. Como explicado, o foco desse trabalho é nas antenas do tipo  $M_{\phi}$ . Nessa geometria observa-se a presença de corrente

magnética apenas na direção  $\phi$ , visto que o campo elétrico está na direção  $z$ , como ilustrado na Figura 12 para o lado externo (para o lado interno o vetor normal  $\hat{n}$  está na direção  $-\hat{a}_\rho$ ). Logo, aplicando as equações 2.5 e 2.6 do princípio da equivalência, fica evidente a direção da corrente magnética. Sendo assim, a corrente é discretizada de forma que ela seja constante na direção  $z$  e tenha variação senoidal em  $\phi$ .

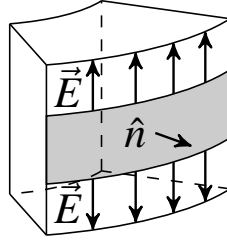


Figura 12: Campo elétrico e vetor normal na região externa para a antena do tipo  $M_\phi$ .

Nota-se que a parte condutora elétrica na superfície não entra nessa discretização, visto que não há corrente magnética nessa região. As linhas pontilhadas na Figura 13 ilustram a discretização, onde cada segmento vai de  $z = z_{1p}$  a  $z = z_{2p}$ , para  $p \in [1, N]$ .

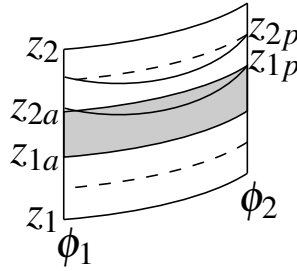


Figura 13: Discretização da corrente para  $m = 1$  e  $p$  arbitrário

Visto que o campo elétrico é nulo em  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , a função de base senoidal tem de ser nula tanto em  $\phi_1$  quanto em  $\phi_2$ . Tendo essa restrição em mente, chegamos à seguinte equação:

$$M_{\phi mp}(\phi, z) = \sin \left[ \frac{m\pi}{\Delta\phi} (\phi - \phi_1) \right] \quad z_{1p} \leq z \leq z_{2p} \quad (2.97)$$

Onde  $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ ,  $z_{1p} \leq z \leq z_{2p}$  e  $m \in \mathbb{N}^*$ . A variável  $m$  representa os diferentes harmônicos que a função de base pode assumir, conforme ilustrado na Figura 14.

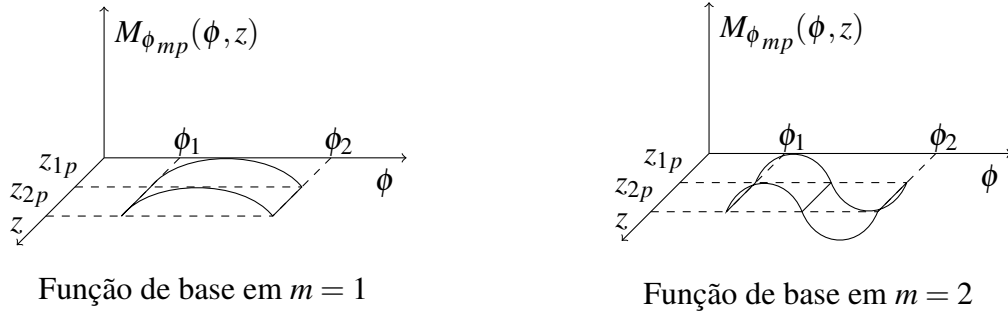


Figura 14: Função de base em diferentes valores de  $m$ .

Portanto, da equação (2.96) com todos os valores possíveis de  $m$  e  $p$ , temos que a corrente magnética na direção  $\phi$  é aproximada por:

$$M_{\phi}(\phi, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} M_{\phi mp}(\phi, z) \quad (2.98)$$

Onde  $M$  é a quantidade de harmônicas e  $P$  a quantidade de segmentos. O Capítulo 4 explora como a impedância de entrada e o diagrama de radiação se comportam para diferentes valores de  $M$  e  $P$ .

### 2.6.1 Transformada seno-cosseno na cavidade

Adiante, será necessário ter a transformada seno-cosseno da função de base em relação ao interior da cavidade. A partir da equação (2.33), temos:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\phi mp}^{sc}(n, q) &= \frac{\epsilon_q}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} M_{\phi mp}(\phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \\ &= \frac{\epsilon_q}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\left(\frac{m\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) d\phi \cdot \\ &\quad \cdot \int_{z_{1p}}^{z_{2p}} \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz \end{aligned} \quad (2.99)$$

A integral em  $\phi$  pode ser facilmente calculada utilizando a ortogonalidade entre as funções seno [27], ou seja, a integral será diferente de 0 apenas quando  $m = n$ . A integral em  $z$ , que denominaremos de  $I_{3p}(q)$ , pode ser resolvida por substituição de variáveis. Nota-se que para  $q = 0$  teríamos uma divisão por 0, porém o integrando se torna 1 e a solução da integral é trivial. Resolvendo a equação (2.99):

$$\hat{M}_{\phi mp}^{sc}(n, q) = \frac{\epsilon_q}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \frac{\Delta\phi}{2} \delta_{mn} I_{3p}(q) = \frac{\epsilon_q}{L} \delta_{mn} I_{3p}(q) \quad (2.100)$$

Onde:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (2.101)$$

$$I_{3p}(q) = \begin{cases} (z_{2p} - z_{1p}) & q = 0 \\ \frac{L}{q\pi} \left[ \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_{2p} - z_1)\right) - \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_{1p} - z_1)\right) \right] & q \neq 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

### 2.6.2 Transformada exponencial-Fourier no exterior

A transformada exponencial-Fourier da função de base também será necessária posteriormente. Da equação (2.70), temos:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\phi mp}^{ef}(n, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} M_{\phi mp}(\phi, z) e^{jn\phi} e^{jk_z z} d\phi dk_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\left(\frac{m\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) e^{jn\phi} d\phi \int_{z_{1p}}^{z_{2p}} e^{jk_z z} dk_z \end{aligned} \quad (2.103)$$

A solução da integral em  $z$  é trivial e a denominaremos de  $I_{4p}(k_z)$ :

$$I_{4p}(k_z) = \frac{e^{jk_z z_{2p}} - e^{jk_z z_{1p}}}{jk_z} \quad (2.104)$$

Já a integral em  $\phi$  é calculada com substituição de variável e utilizando a equação (14.518) do Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas [28]:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} \quad (2.105)$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\left(\frac{m\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) e^{jn\phi} d\phi = \frac{e^{jn\phi_1}}{\left(\frac{m\pi}{\Delta\phi}\right)^2 - n^2} \frac{m\pi}{\Delta\phi} \left[ 1 - (-1)^m e^{jn\Delta\phi} \right] \quad (2.106)$$

Substituindo as equações (2.104) e (2.106) na equação (2.103), temos:

$$\hat{M}_{\phi mp}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{jn\phi_1}}{\left(\frac{m\pi}{\Delta\phi}\right)^2 - n^2} \frac{m\pi}{\Delta\phi} \left[1 - (-1)^m e^{jn\Delta\phi}\right] I_{4p}(k_z) \quad (2.107)$$

## 2.7 Excitação

A excitação da superfície condutora da antena é assumida como sendo feita por um *probe* interno. O *probe* é modelado como uma fita condutora [23], ou seja, a altura ao longo de  $z$  é infinitesimalmente pequena. A fita se estende de  $\rho = a$  até  $\rho = b$ , possui largura angular  $\Delta\phi_f$  e está centrada em  $z_f$  e  $\phi_f$ . A Figura 15 ilustra a fita de alimentação.

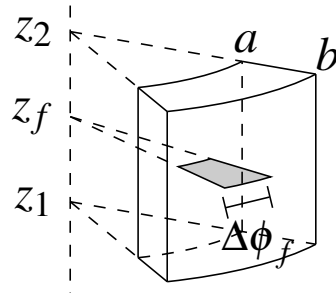


Figura 15: Geometria da fita de alimentação da antena.

Dada a largura angular e o centro da antena, podemos calcular os ângulos iniciais e finais da fita:

$$\begin{cases} \phi_{1f} = \phi_f - \frac{\Delta\phi_f}{2} \\ \phi_{2f} = \phi_f + \frac{\Delta\phi_f}{2} \end{cases} \quad (2.108)$$

A partir da largura angular, também podemos calcular a largura média da fita:

$$W_f = \frac{a+b}{2} \Delta\phi_f \quad (2.109)$$

As correntes superficiais e volumétricas na fita, ambas na direção  $\rho$ , são, respectivamente, definidas como:

$$J_{sf}(\rho, \phi) = \frac{I_0}{\rho \Delta\phi_f} \quad (2.110)$$

$$J_{vf}(\rho, \phi, z) = \frac{I_0}{\rho \Delta\phi_f} \delta(z - z_f) \quad (2.111)$$

Nas Seções 2.10 e 2.11, é necessário ter a transformada seno-seno da densidade volumétrica de corrente. Portanto, a partir da equação (2.37) temos:

$$\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{2}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} J_{vf}(\rho, \phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \quad (2.112)$$

Resolvendo a integral, chegamos a:

$$\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{4I_0}{n\pi L \rho \Delta\phi_f} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{1f} - \phi_1)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{2f} - \phi_1)\right) \right] \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_f - z_1)\right) \quad (2.113)$$

## 2.8 Condições de contorno do campo $H_\phi$

Das equações de Maxwell, sabemos que na ausência de corrente elétrica superficial, o campo magnético tangencial na interface é contínuo. Isso implica:

$$\vec{H}_\phi(M_\phi) + \vec{H}_\phi(J_{vf}) = \vec{H}_\phi(M_\phi) \quad (2.114)$$

Nota-se que isso só é válido em  $z_1 < z < z_{1a}$  e  $z_{2a} < z < z_2$  que é a região da interface com dielétrico. Na região metálica, há correntes superficiais e a equação acima estaria incompleta. O sobrescrito  $<$  denota campo dentro da cavidade, enquanto  $>$  denota campo externo. Ou seja, o campo interno devido às correntes  $M_\phi$  e  $J_{vf}$  é igual ao campo externo devido a  $M_\phi$ .

Substituindo a equação (2.98) na equação (2.114), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \vec{H}_\phi(M_{\phi mp}) + \vec{H}_\phi(J_{vf}) &= \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \vec{H}_\phi(M_{\phi mp}) \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \left[ \vec{H}_\phi(M_{\phi mp}) - \vec{H}_\phi(M_{\phi mp}) \right] &= -\vec{H}_\phi(J_{vf}) \end{aligned} \quad (2.115)$$

A equação acima é análoga à equação (2.96). Segundo Harrington [19], é necessário determinar um produto simétrico  $\langle f, g \rangle$  adequado para o problema seguindo as restrições impostas em [19](1-2, 1-3, 1-4). Podemos utilizar a equação [19](1-11) como base e ajustar o intervalo de integração para o domínio das funções na equação (2.114):

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi, z) g(\phi, z) b dz d\phi \quad (2.116)$$

Visto que estamos avaliando o produto simétrico em  $\rho = b$ , o termo  $b$  é adicionado à equação. Agora precisamos definir uma função de peso para ser utilizada no produto simétrico, como mostra a equação [19](1-23). Por conveniência, é utilizada a mesma função que a função de base (2.97):

$$M_{\phi st}(\phi, z) = \sin \left[ \frac{s\pi}{\Delta\phi} (\phi - \phi_1) \right] \quad z_{1t} \leq z \leq z_{2t} \quad (2.117)$$

Onde  $s$  e  $t$  são análogos a  $m$  e  $p$  e aplicam-se as mesmas restrições aos intervalos de  $\phi$ ,  $z$ ,  $s$  e  $t$ .

Aplicando o produto simétrico (2.116) em (2.115) e (2.117), temos:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \left[ \left\langle \overset{<}{H}_{\phi}(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle - \left\langle \overset{>}{H}_{\phi}(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle \right] = - \left\langle \overset{<}{H}_{\phi}(J_{vf}), M_{\phi st} \right\rangle \quad (2.118)$$

Podemos representar a equação acima em uma forma matricial:

$$[Z][d] = [V] \quad (2.119)$$

Onde:

$$Z_{st,mp} = \left\langle \overset{<}{H}_{\phi}(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle - \left\langle \overset{>}{H}_{\phi}(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle \quad (2.120)$$

$$V_{st} = - \left\langle \overset{<}{H}_{\phi}(J_{vf}), M_{\phi st} \right\rangle \quad (2.121)$$

Denominamos a matriz  $Z$  como matriz de impedâncias e  $V$  como matriz de tensões (não confundir com as propriedades físicas impedância e tensão). Os subscritos  $st, mp$  e  $st$  indicam as coordenadas nas matrizes, sendo  $Z$  e  $d$  matrizes quadradas de dimensões  $(M \cdot P) \times (M \cdot P)$  e  $V$  uma matriz coluna com  $M \cdot P$  linhas. Para converter os valores de  $s$ ,  $t$ ,  $m$  e  $p$  para o número da linha e da coluna, respectivamente, utilizam-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} linha &= (s - 1) * P + t \\ coluna &= (m - 1) * P + p \end{aligned} \quad (2.122)$$

O próximo passo é determinar os elementos das matrizes  $V$  e  $Z$ , para então encontrar a matriz  $d$  ao resolver o sistema linear da equação (2.119). Por fim, com a matriz  $d$  calculada, é possível determinar a impedância de entrada e o diagrama de radiação da antena.

## 2.9 Elementos da matriz $[Z]$

A equação da matriz de impedâncias (2.120) tem uma componente referente ao campo  $\overset{<}{H}_{\phi}$  interno e outra referente ao campo  $\overset{>}{H}_{\phi}$  externo. Já que os termos são independentes entre si, podemos calculá-los individualmente.

### 2.9.1 Campo interno

Da equação (2.46)

$$\hat{H}_{\phi_d}^{sc}(\rho, n, q) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)$$

calculamos a transformada inversa pela equação (2.33):

$$H_{\phi_d}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_d}^{sc}(\rho, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.123)$$

As transformadas de  $A_{z_d}$  e  $F_{z_d}$  são dadas pelas equações (2.57) e (2.64). No caso de  $F_{z_d}$ , estamos apenas interessados na parte referente a  $M_{\phi}$ . Substituindo na equação acima:

$$\hat{H}_{\phi}(M_{\phi_{mp}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_{\phi}}^{A_d}(\rho, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{G}_{M_{\phi}}^{F_d}(\rho, n, q) \right] \cdot \hat{M}_{\phi_{mp}}^{sc}(n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.124)$$

Calculando o produto simétrico (2.116) com  $\rho = b$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{H}_{\phi}(M_{\phi_{mp}}), M_{\phi_{st}} \right\rangle &= \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \hat{H}_{\phi}(M_{\phi_{mp}}) M_{\phi_{st}}(\phi, z) b dz d\phi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_{\phi}}^{A_d}(b, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{G}_{M_{\phi}}^{F_d}(b, n, q) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \hat{M}_{\phi_{mp}}^{sc}(n, q) \cdot b \cdot \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} M_{\phi_{st}}(\phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \end{aligned} \quad (2.125)$$

Nota-se que a integral tem o mesmo formato da equação (2.33). Com isso:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{H}_{\phi}(M_{\phi_{mp}}), M_{\phi_{st}} \right\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{b\Delta\phi}{2} \frac{L}{\epsilon_q} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_{\phi}}^{A_d}(b, n, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{G}_{M_{\phi}}^{F_d}(b, n, q) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \hat{M}_{\phi_{mp}}^{sc}(n, q) \cdot \hat{M}_{\phi_{st}}^{sc}(n, q) \end{aligned} \quad (2.126)$$

A transformada seno-cosseno de  $M_{\phi}$  é dada pela equação (2.100). A transformada em  $mn$  possui a função  $\delta_{mn}$  enquanto a transformada em  $st$  possui a função  $\delta_{sn}$ , o que significa que os somatórios só terão valores não nulos quando  $m = s = n$ . Por conta disso, podemos remover o somatório em  $n$  já que dado um par  $m, s$  qualquer, apenas um valor de  $n$  resultará em um valor não nulo no somatório. Analogamente, podemos substituir  $n$  na equação por  $m$  ou  $s$ , no caso foi escolhido substituir  $n$  por  $m$ .



$$\left\langle \hat{H}_\phi(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{b\Delta\phi}{2} \frac{\epsilon_q}{L} \delta_{ms} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(b, m, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{m\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(b, m, q) \right] \cdot I_{3p}(q) I_{3t}(q) \quad (2.127)$$

A transformada da função de Green  $G_{M_\phi}$  para  $A_d$  é dada pela equação (2.58), a partir da qual calculamos a derivada em  $\rho$ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(b, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}^2 \Theta_5(n, q)} \left[ J'_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} b) \right] \quad (2.128)$$

Definindo  $\Theta_7(n, q)$  como:

$$\Theta_7(n, q) = J'_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} b) \quad (2.129)$$

Chegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(b, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}^2} \frac{\Theta_7(n, q)}{\Theta_5(n, q)} \quad (2.130)$$

Definindo  $\Theta_3(n, q)$  como:

$$\Theta_3(n, q) = J_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J'_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} b) \quad (2.131)$$

E substituindo na equação (2.65):

$$\hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(b, n, q) = -\frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \frac{1}{k_{\rho_d}^3} \frac{\Theta_3(n, q)}{\Theta_1(n, q)} \quad (2.132)$$

## 2.9.2 Campo externo

Da equação (2.80):

$$\hat{H}_{\phi_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0\rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z)$$

calculamos a transformada inversa através da equação (2.70):

$$H_{\phi_0}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0\rho} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) \right] e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \quad (2.133)$$

Substituindo as equações (2.89) e (2.95):

$$\begin{aligned} \hat{H}_\phi(M_{\phi mp}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(\rho, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0\rho} \hat{G}_{M_\phi}^{F_0}(\rho, n, k_z) \right] \cdot \\ & \cdot \hat{M}_{\phi mp}^{ef}(n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \end{aligned} \quad (2.134)$$

Tomando o produto simétrico (2.116) em  $\rho = b$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{H}_\phi(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & b \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b} \hat{G}_{M_\phi}^{F_0}(b, n, k_z) \right] \cdot \\ & \cdot \hat{M}_{\phi mp}^{ef}(n, k_z) \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} M_{\phi st}(\phi, z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} d\phi dz \right) dk_z \end{aligned} \quad (2.135)$$

A integral dupla em  $\phi$  e  $z$  é dada pela equação (2.103). Substituindo na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{H}_\phi(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & (2\pi)^2 b \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b} \hat{G}_{M_\phi}^{F_0}(b, n, k_z) \right] \cdot \\ & \cdot \hat{M}_{\phi mp}^{ef}(n, k_z) \hat{M}_{\phi st}^{ef}(-n, -k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.136)$$

Lembrando que a transformada exponencial-Fourier de  $M_\phi$  é dada pela equação (2.107).

A partir da equação (2.90), calculamos a derivada da função de Green para  $A_0$  em relação a  $\rho$ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(\rho, n, k_z) = \frac{-j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}} \frac{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}b)} \quad (2.137)$$

Nota-se que a equação (2.137) é uma função par em relação a  $n$  e  $k_z$ , enquanto a equação (2.94a) da função de Green para  $F_0$  é ímpar em relação a  $n$  e  $k_z$ . Portanto, a combinação de funções de Green na equação (2.136) é par, visto que o termo

$$\frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b}$$

é ímpar em  $n$  e  $k_z$ . Lembre-se que a multiplicação de funções ímpares resulta em uma função par e que a soma de funções de mesma paridade mantém a paridade. Podemos explorar a paridade das funções para mudar os limites inferiores do somatório e integral na equação (2.136) para 1 e 0, respectivamente. O termo do somatório referente a  $n = 0$  é separado da equação, já que não faz sentido pensar na paridade em  $n$ , nesse caso. Levando esses pontos em consideração, temos que:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{H}_\phi(M_{\phi_{mp}}), M_{\phi_{st}} \right\rangle &= \int_0^\infty (2\pi)^2 b \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(b, 0, k_z) \right] \cdot \\
&\cdot \left[ \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(0, k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(0, -k_z) + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(0, -k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(0, k_z) \right] dk_z + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty (2\pi)^2 b \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b} \hat{G}_{M_\phi}^{F_0}(b, n, k_z) \right] \cdot \\
&\cdot \left[ \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(n, k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(-n, -k_z) + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(n, -k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(-n, k_z) + \right. \\
&+ \left. \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(-n, k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(n, -k_z) + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(-n, -k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(n, k_z) \right] dk_z
\end{aligned} \quad (2.138)$$

Embora a equação tenha ficado mais extensa, o somatório da integral é uma operação bem custosa computacionalmente, então diminuir o intervalo de integração pela metade <sup>1</sup> compensa na implementação da equação.

## 2.10 Elementos da matriz [V]

Calculando o produto simétrico (2.116) da equação (2.121):

$$V_{st} = - \left\langle \hat{H}_\phi(J_{vf}), M_{\phi_{st}} \right\rangle = - \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{H}_\phi(J_{vf})(b, \phi, z) M_{\phi_{st}}(\phi, z) b dz d\phi \quad (2.139)$$

Podemos utilizar o teorema da reciprocidade de Harrington [20](3-8) para mudar os termos na equação. O teorema da reciprocidade afirma que é possível trocar a excitação (corrente elétrica e magnética) de lugar com os campos eletromagnéticos gerados por tal excitação sem alterar a resposta no sistema. Ou seja, se temos correntes  $J^a$  e  $M^a$  gerando campos  $E^a$  e  $H^a$ , e correntes  $J^b$  e  $M^b$  gerando campos  $E^b$  e  $H^b$ , podemos trocar os termos de posição sem alterar o resultado. Formalmente, isso é descrito pela equação (3-36) de Harrington [20]:

$$\iiint_v (E^a J^b - H^a M^b) d\tau = \iiint_v (E^b J^a - H^b M^a) d\tau \quad (2.140)$$

O teorema da reciprocidade nos permite alterar o tipo de excitação e campo a depender das condições do problema. No nosso caso, podemos trocar o campo magnético por um campo elétrico e também trocar a corrente  $J_{vf}$  de posição com a corrente  $M_{\phi_{st}}$ . Para isso, distribuímos as entidades eletromagnéticas da seguinte forma:

<sup>1</sup>Matematicamente, os intervalos  $(-\infty, \infty)$  e  $[0, \infty)$  possuem o mesmo comprimento, porém na implementação o limite superior é limitado por um parâmetro finito, então na prática o intervalo da equação (2.138) é a metade do que seria na equação (2.136)

$$\begin{array}{cc}
\text{conjunto "a"} & \text{conjunto "b"} \\
\left\{ \begin{array}{l} J^a = J_{vf} \hat{a}_\rho \\ M^a = 0 \\ H^a = \hat{H}_\phi(J_{vf}) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} J^b = 0 \\ M^b = M_{\phi st}(\phi, z) \delta(\rho - b) \hat{a}_\phi \\ E^b = \hat{E}_\rho(M_{\phi st}) \end{array} \right.
\end{array} \quad (2.141)$$

O teorema da reciprocidade pede por correntes volumétricas, então criamos uma a partir da densidade superficial  $M_{\phi st}$  adicionando o impulso unitário. Substituindo os valores acima na equação (2.140) chegamos a:

$$\iiint_v \left( 0 - \hat{H}_\phi(J_{vf}) M_{\phi st}(\phi, z) \delta(\rho - b) \right) d\tau = \iiint_v \left( \hat{E}_\rho(M_{\phi st}) J_{vf} - 0 \right) d\tau \quad (2.142)$$

Observa-se que o lado esquerdo da equação anterior é igual à equação (2.139). Sendo assim, concluímos que:

$$V_{st} = \iiint_v \hat{E}_\rho(M_{\phi st}) J_{vf} d\tau \quad (2.143)$$

Da equação (2.38):

$$\hat{E}_{\rho d}^{ss}(\rho, n, q) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{A}_{zd}^{sc}(\rho, n, q) + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{F}_{zd}^{cs}(\rho, n, q)$$

Substituindo as transformadas dos potenciais vetores magnético e elétrico pelas equações (2.57) e (2.64) respectivamente:

$$\hat{E}_{\rho d}^{ss}(\rho, n, q) = \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(\rho, n, q) + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(\rho, n, q) \right] \hat{M}_{\phi st}^{sc}(n, q) \quad (2.144)$$

Tomando a transformada inversa pela equação (2.37), temos:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_\rho(M_{\phi st}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} & \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(\rho, n, q) + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(\rho, n, q) \right] \hat{M}_{\phi st}^{sc}(n, q) \cdot \\
& \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right)
\end{aligned} \quad (2.145)$$

Substituindo na equação (2.143):

$$\begin{aligned}
V_{st} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} & \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(\rho, n, q) + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(\rho, n, q) \right] \hat{M}_{\phi st}^{sc}(n, q) \cdot \\
& \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) J_{vf}(\rho, \phi, z) \rho d\rho d\phi dz
\end{aligned} \quad (2.146)$$

Isolando os termos em  $\phi$  e  $z$ , podemos utilizar a equação (2.112) para substituir a integral:

$$V_{st} = \frac{\Delta\phi}{2} \frac{L}{2} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial\rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_d}(\rho, n, q) + \frac{n\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{G}_{M\phi}^{F_d}(\rho, n, q) \right] \cdot \hat{M}_{\phi st}^{sc}(n, q) \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, q) \rho d\rho \quad (2.147)$$

Substituindo a equação (2.100), onde  $mp$  é trocado por  $st$ , na equação (2.147) chegamos a:

$$V_{st} = \frac{\Delta\phi}{2} \frac{L}{2} \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial\rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_d}(\rho, s, q) + \frac{s\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{G}_{M\phi}^{F_d}(\rho, s, q) \right] \cdot \frac{\epsilon_q}{L} I_{3t}(q) \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, s, q) \rho d\rho \quad (2.148)$$

Lembrando que a função  $\delta$  da equação (2.100) faz com que seja possível eliminar o somatório duplo, visto que o valor da expressão só é diferente de 0 quando  $n = q$ .

Podemos calcular a derivada da função de Green a partir da equação (2.58):

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_d}(\rho, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d} \Theta_5(n, q)} \left[ J'_v(k_{\rho_d}\rho) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.149)$$

Nota-se a semelhança da expressão entre colchetes com  $\Theta_7$  (2.129), porém com  $b$  trocado por  $\rho$ . Chamemos então essa expressão de  $\Theta_{7\rho}$ :

$$\Theta_{7\rho}(\rho, n, q) = J'_v(k_{\rho_d}\rho) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}\rho) \quad (2.150)$$

Chegamos à forma final da derivada:

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_d}(\rho, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}} \frac{\Theta_{7\rho}(\rho, n, q)}{\Theta_5(n, q)} \quad (2.151)$$

Analogamente para  $\Theta_3$  (2.131), definimos  $\Theta_{3\rho}$  como:

$$\Theta_{3\rho}(\rho, n, q) = J_v(k_{\rho_d}\rho) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J'_v(k_{\rho_d}a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \quad (2.152)$$

E substituindo na equação (2.65):

$$\hat{G}_{M\phi}^{F_d}(\rho, n, q) = -\frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \frac{1}{k_{\rho_d}^3} \frac{\Theta_{3\rho}(\rho, n, q)}{\Theta_1(n, q)} \quad (2.153)$$

## 2.11 Impedância de Entrada

A impedância de entrada da antena pode ser calculada utilizando a equação (7-90) de Harrington [20]:

$$Z_{in} = -\frac{1}{|I|^2} \iint \vec{E} \cdot \vec{J}_s^* ds \quad (2.154)$$

Para nosso caso, o campo elétrico tem duas partes: uma gerada pela corrente magnética na superfície e outra gerada pela corrente no *probe*. Essa corrente é volumétrica, e não superficial como a da equação do Harrington, por isso, a integral é modificada para uma integral tripla:

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_0^2} \iiint_v \left[ \vec{E}(\vec{M}_s) + \vec{E}(\vec{J}_{v_f}) \right] \cdot \vec{J}_{v_f} dv \quad (2.155)$$

Podemos separar a impedância entre as contribuições devido à corrente magnética e devido à corrente no *probe*:

$$Z_{in} = Z_{in}^M + Z_{in}^f \quad (2.156)$$

Onde cada componente é definida como:

$$\begin{cases} Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \iiint_v \vec{E}(\vec{M}_s) \cdot \vec{J}_{v_f} dv & (2.157a) \\ Z_{in}^f = -\frac{1}{I_0^2} \iiint_v \vec{E}(\vec{J}_{v_f}) \cdot \vec{J}_{v_f} dv & (2.157b) \end{cases}$$

Para determinar a componente proveniente da corrente magnética, substituímos a equação (2.98) na equação (2.157a):

$$\begin{aligned} Z_{in}^M &= -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \iiint_v \vec{E}(M_{\phi mp}) \cdot \vec{J}_{v_f} dv \\ &= -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \iiint_v E_\rho(M_{\phi mp}) J_{v_f} dv \end{aligned} \quad (2.158)$$

Comparando com a equação dos elementos da matriz  $V$  (2.143), vemos que a integral tripla é a própria equação (2.143), portanto:

$$Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} V_{mp} \quad (2.159)$$

A componente da impedância proveniente da corrente elétrica é chamada de auto-impedância do *probe* e podemos calculá-la de forma aproximada como a impedância da cavidade fechada. Esta técnica é utilizada, pois oferece um bom balanço entre simplicidade e precisão. Ela desconsidera vários mecanismos, porém para substratos finos e frequência de operação próxima da frequência de ressonância da cavidade, a precisão é boa o suficiente. A cavidade possui material dielétrico de permissividade  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  e paredes condutoras perfeitas. Radialmente, a cavidade é muito pequena em comparação às outras dimensões, então aproximamos o campo como constante em  $\rho$  [21]. Portanto, como os campos tangenciais  $E_\phi$  e  $E_z$  têm de ser 0 nas superfícies  $\rho = a$  e  $\rho = b$ , mas o campo não varia com  $\rho$ , isso implica que  $E_\phi$  e  $E_z$  são 0 em toda a cavidade. Além disso, como a derivada do campo em relação a  $\rho$  é 0, a equação de onda homogênea perde uma das componentes e se torna:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_\rho(\phi, z) = 0 \quad (2.160)$$

As soluções para a equação de onda homogênea são os campos modais dentro da cavidade, e podemos resolver por separação de variáveis:

$$E_\rho(\phi, z) = h(\nu\phi)h(k_{z_d}z) \quad (2.161)$$

A condição de contorno em  $z = z_1$ ,  $z = z_2$  é  $E_\rho(\phi, z) = 0$ , assim como em  $\phi = \phi_1$  e  $\phi = \phi_2$ . Sendo assim, os modos  $nq$  do campo na cavidade são dados por:

$$E_{\rho_{nq}}(\phi, z) = A_{nq} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.162)$$

Onde  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $q \in \mathbb{N}^*$ . Substituindo na equação de onda, temos:

$$\left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{nq}^2 \right) E_{\rho_{nq}} = 0 \quad (2.163)$$

Onde  $\rho_0 = (a + b)/2$  e  $k_{nq}$  são dados por:

$$k_{nq} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\rho_0 \Delta\phi}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2} \quad (2.164)$$

No interior da cavidade, o campo também deve satisfazer a equação de onda com fontes:

$$\left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) E_\rho = j\omega\mu J_{\nu_f} \quad (2.165)$$

Sendo que  $E_\rho$  é obtido expandindo o campo nos modos  $nq$ :

$$\begin{aligned} E_\rho(\phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} E_{\rho_{nq}}(\phi, z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{nq} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \end{aligned} \quad (2.166)$$

Substituindo a equação (2.166) em (2.165) e usando a equação (2.163) para substituir as derivadas, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (k_d^2 - k_{nq}^2) A_{nq} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) = j\omega\mu J_{\nu_f} \quad (2.167)$$

Agora, multiplicando ambos os lados pelas funções seno com variáveis trocadas por  $n'$  e  $q'$  e integrando em  $\phi$  e  $z$ , temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (k_d^2 - k_{nq}^2) A_{nq} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) d\phi \int_{z_1}^{z_2} \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \sin\left(\frac{q'\pi}{L}(z - z_1)\right) dz \\
= j\omega\mu \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} J_{vf} \sin\left(\frac{n'\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q'\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi
\end{aligned} \quad (2.168)$$

As integrais na esquerda podem ser solucionadas com a ortogonalidade entre as funções seno, enquanto a integral da direita é dada pela equação (2.112):

$$A_{n'q'}(k_d^2 - k_{n'q'}^2) = j\omega\mu \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n', q') \quad (2.169)$$

Substituindo  $n'$  e  $q'$  por  $n$  e  $q$ , temos:

$$A_{nq} = \frac{j\omega\mu}{(k_d^2 - k_{nq}^2)} \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q) \quad (2.170)$$

Substituindo na equação (2.166):

$$E_\rho(\phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{(k_d^2 - k_{nq}^2)} \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (2.171)$$

Substituindo na equação (2.157b):

$$\begin{aligned}
Z_{in}^f &= -\frac{1}{I_0^2} \iiint_v E_\rho(\phi, z) J_{vf} dv \\
&= -\frac{1}{I_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{(k_d^2 - k_{nq}^2)} \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q) \cdot \\
&\quad \cdot \int_a^b \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} J_{vf}(\rho_0, \phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \rho_0 dz d\phi d\rho
\end{aligned} \quad (2.172)$$

Como foi assumido que não há variação do campo elétrico em  $\rho$ , a integral nessa variável se torna  $(b - a)$ . A integral dupla restante é dada pela equação (2.112). Portanto:

$$Z_{in}^f = -\frac{1}{I_0^2} \frac{j\omega\mu\Delta\phi L}{4} (b - a) \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q)\right)^2}{k_d^2 - k_{nq}^2} \quad (2.173)$$

Lembrando que a transformada seno-seno da densidade de corrente volumétrica devido ao *probe* é dada pela equação (2.113).



## 2.12 Diagramas de radiação

Para obter o diagrama de radiação é necessário calcular as componentes  $\theta$  e  $\phi$  do campo elétrico distante. Essas equações são dadas por Harrington [20] (3-97):

$$\begin{cases} E_\theta = -j\omega\mu A_\theta - jk_0 F_\phi \\ E_\phi = -j\omega\mu A_\phi + jk_0 F_\theta \end{cases} \quad (2.174)$$

Da seção 2.5 Campo eletromagnético externo, vemos que os vetores potenciais magnético e elétrico só têm componente na direção  $z$ , ou seja, em coordenadas esféricas possuem apenas componentes na direção  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_{z_0} \hat{a}_z \Rightarrow A_\theta = -A_{z_0} \sin \theta \\ \vec{F} &= F_{z_0} \hat{a}_z \Rightarrow F_\theta = -F_{z_0} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.175)$$

Substituindo na equação (2.174):

$$\begin{cases} E_\theta = j\omega\mu A_{z_0} \sin \theta \\ E_\phi = -jk_0 F_{z_0} \sin \theta \end{cases} \quad (2.176)$$

As componentes  $z$  dos vetores  $A$  e  $F$  são dadas pelas equações (2.70) e (2.74):

$$\begin{aligned} F_{z_0}(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \\ A_{z_0}(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \end{aligned}$$

A transformada exponencial-Fourier de  $A_z$  é dada pela equação (2.89):

$$\hat{A}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}^2} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}b)} \hat{M}_\phi^{ef}(n, k_z)$$

Já para  $F_z$ , a equação é a (2.95):

$$\hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{bk_{\rho_0}^3} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}b)} \hat{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \quad (2.177)$$

### 2.12.1 Campo $E_\theta$

Substituindo as equações (2.74) e (2.89) referentes ao potencial vetor magnético na equação (2.176) para a componente  $\theta$ , temos:

$$E_\theta(\rho, \theta, \phi) = k_0^2 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{M}_\phi^{ef}(n, k_z)}{k_{\rho_0}^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_0}b)} H_n^{(2)}(k_{\rho_0}\rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2.178)$$

Podemos aproximar essa integral assintoticamente para  $\rho \rightarrow \infty$  pelo método do ponto-de-sela dado por Harrington [20] (5-143), com a ressalva de que essa equação só é válida para  $\theta \neq 0$  ou  $\pi$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(w) H_n^{(2)}(\rho \sqrt{k^2 - w^2}) e^{jwz} dw \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} j^{n+1} I(-k_0 \cos \theta) \quad (2.179)$$

Fazendo as seguintes substituições, chegamos a:

$$\begin{cases} w \rightarrow -k_z \\ dw \rightarrow -dk_z \\ \sqrt{k^2 - w^2} \rightarrow \sqrt{k_0^2 - k_z^2} = k_{\rho_0} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(-k_z) H_n^{(2)}(\rho k_{\rho_0}) e^{-jk_z z} dk_z \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{-jkr}}{r} j^{n+1} I(-k \cos \theta) \quad (2.180)$$

Comparando com a equação (2.179) vemos que a função I é dada por:

$$I(-k_z) = \frac{\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_z)}{k_{\rho_0}^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.181)$$

Portanto, aproximamos a equação (2.178) para:

$$E_{\theta}(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} k_0^2 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \left( 2 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} j^{n+1} \frac{\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_0 \cos \theta)}{k_{\rho_0}^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \right) \quad (2.182)$$

$k_z$  e  $k_{\rho_0}$  são dados pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} k_z = k_0 \cos \theta \\ k_{\rho_0} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} = \sqrt{k_0^2 \sin^2 \theta} = k_0 \sin \theta \end{cases}$$

Nota-se que para  $k_{\rho_0}$  a equação é válida em  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Substituindo na equação anterior, chegamos a:

$$E_{\theta}(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2e^{-jk_0 r}}{r \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} j^{n+1} \frac{\hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_0 \cos \theta)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.183)$$

Para  $n < 0$ , utilizando a equação (10.4.2) de Olver et al. *The Handbook of Mathematical Functions*[29]

$$H_{-n}^{(2)}(z) = (-1)^n H_n^{(2)}(z)$$

chegamos à seguinte relação:

$$\frac{j^{-n+1}}{H_{-n}^{(2)}(k_{\rho_0} b)} = \frac{j^{-n+1}}{(-1)^n H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} = \frac{j^{n+1}}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.184)$$

Com isso, é possível reescrever o somatório com intervalo de  $n = 1$  a  $n = \infty$  e parcela referente à

$n = 0$  a parte:

$$E_\theta(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2e^{-jk_0 r}}{r \sin \theta} \left[ j \frac{\hat{M}_\phi^{ef}(0, k_0 \cos \theta)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^{n+1}}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \left( e^{-jn\phi} \hat{M}_\phi^{ef}(n, k_0 \cos \theta) + e^{jn\phi} \hat{M}_\phi^{ef}(-n, k_0 \cos \theta) \right) \right] \quad (2.185)$$

### 2.12.2 Campo $E_\phi$

Substituindo as equações (2.70) e (2.177) referentes ao potencial vetor elétrico na equação (2.176) para a componente  $\phi$ :

$$E_\phi(\rho, \theta, \phi) = \frac{jk_0 \sin \theta}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-jn\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z}{k_{\rho_0}^3} \frac{\hat{M}_\phi^{ef}(n, k_z)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2.186)$$

Definindo  $I(-k_z)$  como:

$$I(-k_z) = \frac{k_z \hat{M}_\phi^{ef}(n, k_z)}{k_{\rho_0}^3 H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.187)$$

E utilizando a equação (2.180):

$$E_\phi(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{jk_0 \sin \theta}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-jn\phi} 2 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} j^{n+1} \frac{k_0 \cos \theta}{k_{\rho_0}^3} \frac{\hat{M}_\phi^{ef}(n, k_0 \cos \theta)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.188)$$

Utilizando  $k_z = k_0 \cos \theta$  e  $k_{\rho_0} = k_0 \sin \theta$ :

$$E_\phi(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} j \frac{2 e^{-jk_0 r}}{b} \frac{\cos \theta}{k_0 r} \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-jn\phi} j^{n+1} \frac{\hat{M}_\phi^{ef}(n, k_0 \cos \theta)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.189)$$

Utilizando a relação (2.184), que também é válida para a derivada da função de Hankel, visto que a derivada de uma função de Bessel trivial pode ser escrita como uma combinação linear de funções de Bessel [29]:

$$E_\phi(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2j e^{-jk_0 r}}{b} \frac{\cos \theta}{k_0 r} \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^{n+1} n}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \left[ e^{-jn\phi} \hat{M}_\phi^{ef}(n, k_0 \cos \theta) - e^{jn\phi} \hat{M}_\phi^{ef}(-n, k_0 \cos \theta) \right] \quad (2.190)$$

# 3

## IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo é apresentada a implementação em *Matlab* do método proposto para calcular as propriedades de uma antena cilíndrica híbrida embutida.

Para manter uma correlação entre as equações e a implementação, o código foi separado em diversos arquivos com funções para cada uma das equações relevantes. No geral, as funções são implementações bem diretas das equações, porém, em alguns casos, é necessário abordar a equação de outra maneira para não enfrentar problemas computacionais (e.g. singularidades, precisão, *overflow*).

Nota-se a utilização de algumas técnicas para aumentar o desempenho da aplicação:

- **Vetorização:** É uma técnica onde os dados são processados utilizando as funcionalidades de *SIMD* (*Single Instruction, Multiple Data* - Instrução Única, Múltiplos Dados), onde uma única instrução a nível de *CPU* processa um conjunto de dados simultaneamente. Ao escrever o código com certos padrões e operadores, o *Matlab* (e outras linguagens, no geral, por exemplo, *python* com a biblioteca *numpy*) automaticamente utiliza as instruções *SIMD* do processador. Por exemplo, em vez de escrever um *loop* para somar os valores em uma *array*, podemos utilizar a função *sum* fornecida pelo *Matlab* que faz uso de instruções *SIMD* [30].
- **Paralelismo:** Consiste em rodar cálculos em paralelo. Essa técnica é bastante eficaz e trivial de ser utilizada quando há cálculos que podem ser realizados de forma independente, já que, nesse caso, não é necessário lidar com acesso concorrente a recursos, comunicação entre processos e sincronização. Neste trabalho, escolheu-se paralelizar o cálculo de cada frequência do gráfico de impedância de entrada, visto que cada frequência é independente da outra. Outra possibilidade seria calcular os elementos das matrizes *V* e *Z* em paralelo, já que esses também são independentes. O *Matlab* fornece algumas conveniências para paralelizar o código, como o *loop* paralelo utilizando *parfor* ou a criação e gerenciamento automático de uma *pool* de processos utilizando a função *gcp* [31].

Outro ponto notável é a utilização da função *quadgk* do *Matlab* [32] que implementa integração por quadratura adaptativa de Gauss-Kronrod.

A integração adaptativa Gauss-Kronrod é um método numérico para o cálculo de integrais de forma precisa e eficiente. Diferente da abordagem não adaptativa com um número fixo de pontos, este método se destaca por sua capacidade de adaptação. Ele ajusta a alocação de pontos de amostragem de acordo com o comportamento da função, concentrando o esforço computacional nas regiões onde a

variação é mais acentuada. No geral, esse método oferece bom tempo computacional e precisão para funções oscilatórias como as que estamos interessados em integrar neste trabalho.

O código completo está disponível em:

<https://github.com/rma6/embedded-cylindrical-antenna-mom>.

### 3.1 mom.m - Função *main*

O arquivo *mom.m* funciona como função *main* da implementação. No início, os objetos relacionados ao *logging* da execução do código, os objetos necessários para realizar a computação de forma paralela e o espaço de frequências para o qual a impedância de entrada vai ser calculada são iniciados.

Em seguida, as matrizes  $Z$  e  $V$  para cada frequência são computadas. Nota-se que o cálculo das matrizes em cada frequência é independente, assim como o cálculo de cada tipo de matriz. Dessa forma, é possível calcular cada uma das matrizes  $Z$  e  $V$  em paralelo sem necessitar de comunicação entre os processos. Isso é feito através do módulo de computação paralela do *Matlab: Parallel Computing Toolbox* [31]. A função *gcp* inicializa e retorna uma *pool* de processos para computação paralela e, através da função *parfeval*, é possível submeter trabalhos para serem executados pela *pool*.

Após todas as matrizes  $Z$  e  $V$  serem calculadas, as matrizes  $d$  são calculadas e, em seguida, a impedância de entrada para cada frequência é calculada, também em paralelo, porém dessa vez utilizando o comando *parfor*, uma versão paralela de *for*, mas que também utiliza a *pool* criada anteriormente de forma implícita.

Com os dados de impedância de entrada em mãos, é utilizada a função *findpeaks* para encontrar o pico na resistência. O diagrama de radiação é calculado para a frequência detectada por essa função, e o valor da resistência no pico é utilizado para calcular a potência, através da relação  $R \cdot |I_0|^2 / 2$ , que será utilizada para calcular o ganho.

Por fim, o gráfico da impedância de entrada é gerado, os dados gerados pela execução do programa são salvos e o processo chega ao fim.

A seguir, é apresentado o código de *mom.m*:

Código 3.1: *mom.m*

```
close 'all'

%sets up logging and output folders
tstamp = datetime(now, 'ConvertFrom', 'datenum');
tstamp = strrep(string(tstamp), ':', '-');
tfolder = sprintf("data/%s", tstamp);
mkdir(tfolder)
diary(fullfile(tfolder, "log.txt"))

%; was omitted for logging purposes
P=params(2.4*10^9)
```

---

```

%sets up multithreading
pool = gcp();
queue = parallel.pool.DataQueue();
afterEach(queue, @disp);

%frequency space
freqs = linspace(2.2,2.6,401)*10^9;
freqs_ghz = freqs/10^9;

%starts jobs
fprintf("Total number of jobs: %i\n", size(freqs, 2)*2)
for it = 1:size(freqs, 2)
    Zjobs(it) = parfeval(pool, @buildZMat, 1, params(freqs(it)), queue)
    ;
    Vjobs(it) = parfeval(pool, @buildVMat, 1, params(freqs(it)), queue)
    ;
end

%colects jobs results
Zs = fetchOutputs(Zjobs);
Vs = fetchOutputs(Vjobs);

%calculates D matrix and input impedance
Ds = cell(size(Zs));
zinf = zeros(1, size(Zs, 1));
zinm = zeros(1, size(Zs, 1));
zin = zeros(1, size(Zs, 1));
parfor it = 1:size(Zs, 1)
    Ds{it} = Zs{it}\Vs{it};
    zinf(it) = z_in_f(params(freqs(it)));
    zinm(it) = z_in_m(Ds{it}, Vs{it}, params(freqs(it)));
    zin(it) = zinf(it) + zinm(it);
end

%finds peak in resistance then calculates and plots radiation pattern
[~, freq_index] = findpeaks(real(zin));
peak_freq = freqs(freq_index);
if size(peak_freq, 2) > 1
    peak_freq = interp1(peak_freq,peak_freq,2.4e9,'nearest');
    freq_index = find(freqs == peak_freq);
end

```

```

peak_dMat = Ds{freq_index};
peak_power = 0.5*real(zin(freq_index))*abs(P.I0)^2;
[gain_phi0, gain_theta90] = radpat(peak_dMat, peak_power, params(
    peak_freq));

%plots zin results
figure("Name", "zin")
plot(freqs_ghz, real(zin), 'color', '#0072BD')
hold on
plot(freqs_ghz, imag(zin), 'color', "#D95319")
hold on
title("Z_{in}")
legend("Re", "Im")
xlabel('GHz')
ylabel('\Omega')
xlim([freqs_ghz(1) freqs_ghz(end)])
ylim([-40 70])
grid on

%saves data
save(fullfile(tfolder, "workspace.mat"))

FigList = findobj(allchild(0), 'flat', 'Type', 'figure');
for iFig = 1:length(FigList)
    FigHandle = FigList(iFig);
    FigName = get(FigHandle, 'Name');
    savefig(FigHandle, fullfile(sprintf("data/%s/%s.fig", tstamp,
        FigName)));
end

%finishes logging
sprintf("finished MoM at %s", string(datetime))
diary off
beep

```

## 3.2 params.m - Estrutura com constantes físicas e parâmetros

Esse arquivo contém todos os parâmetros e constantes utilizados pelo programa organizados em uma única estrutura. A função *params* aceita como argumento a frequência em Hz do sinal utilizado para excitar a antena e retorna uma estrutura contendo as constantes e parâmetros. As demais funções da implementação aceitam como argumento uma instância de *params* (sempre com nome *P*) para que

possam acessar de forma conveniente os parâmetros necessários. As instâncias são iniciadas em *mom.m* para cada uma das frequências e passadas para as funções *buildVMat* e *buildZMat* que chamam todas as outras funções na implementação. *params* não é instanciado diretamente pelas funções para não acarretar custos desnecessários de iniciar a estrutura várias vezes seguidas <sup>1</sup>.

A seguinte tabela mostra a correspondência entre os nomes das variáveis e símbolos utilizados na formulação:

---

<sup>1</sup>As primeiras versões do código faziam exatamente isso e o tempo de execução era péssimo. Com a ajuda do *profiler* do Matlab, foi possível descobrir que isso era um problema e o código foi alterado para que *params* fosse inicializado apenas uma vez para cada frequência



Variável	Símbolo	Grandeza Física	Unidade
P.mu	$\mu_0$	Permeabilidade do vácuo	$H/m$
P.epsilon_0	$\epsilon_0$	Permissividade do vácuo	$F/m$
P.tanp	$\tan \delta$	Tangente de perdas	-
P.epsilon_d	$\epsilon_d$	Permissividade do dielétrico	$F/m$
P.eta_0	$\eta_0$	Impedância intrínseca do vácuo	$\Omega$
P.a	$a$	Raio interno da cavidade	$m$
P.b	$b$	Raio externo da cavidade/raio do cilindro condutor	$m$
P.z1	$z_1$	Primeira posição axial da cavidade	$m$
P.z2	$z_2$	Segunda posição axial da cavidade	$m$
P.phi1	$\phi_1$	Primeira posição angular da cavidade	$rad$
P.phi2	$\phi_2$	Segunda posição radial da cavidade	$rad$
P.z_1a	$z_{1a}$	Primeira posição axial da superfície da antena	$m$
P.z_2a	$z_{2a}$	Segunda posição axial da superfície da antena	$m$
P.z_f	$z_f$	Posição axial da prova de alimentação da antena	$m$
P.phif	$\phi_f$	Posição radial da prova de alimentação da antena	$rad$
P.W_f	$W_f$	Largura angular média da fita de alimentação	$m$
P.phi_1f	$\phi_{1f}$	Primeira posição angular da fita de alimentação	$rad$
P.phi_2f	$\phi_{2f}$	Primeira posição angular da fita de alimentação	$rad$
P.omega	$\omega$	Frequência angular do sinal de alimentação	$rad/s$
P.I0	$I$	Corrente complexa do sinal de alimentação	$A$
P.L	$L$	Altura da cavidade	$m$
P.delta_phi	$\Delta\phi$	Extensão angular da cavidade	$rad$
P.delta_phi_f	$\Delta\phi_f$	Extensão angular da fita de alimentação	$rad$
P.kd	$k_d$	Número de onda na cavidade dielétrica	$1/m$
P.k0	$k_0$	Número de onda no vácuo	$1/m$
P.argmax	-	Limite superior para aproximações assintóticas	-
P.expmin	-	Expoente do limite inferior para aproximações assintóticas	-
P.gamma	$\gamma$	Logaritmo natural da constante de Euler	-
P.Mmax	$M$	Quantidade de harmônicos da função de base/teste	-
P.Pmax	$P$	Quantidade de segmentos em que a corrente é discretizada	-
P.nMax	-	Limite superior dos somatórios em $n$	-
P.qMax	-	Limite superior dos somatórios em $q$	-
P.Nkz	-	Multiplicador do limite da integral do campo externo	-

Tabela 1: Correspondência entre os nomes das variáveis no código e os símbolos utilizados na formulação

O código de *params.m* é apresentado a seguir:

Código 3.2: params.m

```

function P = params(freq)
%constants
P.mu = 4*pi*10.^-7;
P.epsilon_0 = 8.854e-12;
P.tanp = 2.2e-3;
P.epsilon_d = 2.55*P.epsilon_0*(1-1j*P.tanp);
P.eta_0 = sqrt(P.mu/P.epsilon_0);

%geometric parameters
P.a = 250e-3;
P.b = 253.048e-3;
P.z1 = -36.59e-3;
P.z2 = 36.59e-3;
P.phil = -6.8182 * pi/180;
P.phi2 = 6.8182 * pi/180;

P.z_1a = -23.68e-3;
P.z_2a = 23.68e-3;
P.phi_1a = 0 * pi/180;
P.phi_2a = 10.9435 * pi/180;

P.z_f = 6.05e-3;
P.phif = 0;
P.W_f = 4.e-3;%rLphif
P.dphif = 2*P.W_f/(P.a+P.b);
P.phi_1f = P.phif - P.dphif/2;
P.phi_2f = P.phif + P.dphif/2;

%source parameters
P.omega = freq*2*pi;
P.I0 = 1;

%aliases
P.L = P.z2 - P.z1;
P.delta_phi = P.phi2 - P.phil;
P.delta_phi_a = P.phi_2a - P.phi_1a;
P.delta_phi_f = P.phi_2f - P.phi_1f;
P.kd = P.omega*sqrt(P.mu*P.epsilon_d);
P.k0 = P.omega*sqrt(P.mu*P.epsilon_0);

```

```

%other parameters
P.argmax = 400;
P.expmin = 200;
P.gamma = 1.781072418;
P.alpha = 0.5;

%precision parameters
P.Mmax = 1;
P.Pmax = 18;
P.nMax = 50;
P.qMax = 50;
P.Nkz = 50;

```

### 3.3 buildVMat.m - Construção da matriz V

Essa função é responsável por construir a matriz  $V$ . Ela é chamada diretamente pela função *parfeval* em *mom.m* e por isso executa em outro processo. Por conta disso, *buildVMat* não pode escrever diretamente no terminal e se faz necessário utilizar uma técnica de comunicação entre processos para que o processo principal executando *mom.m* possa fazer isso em seu lugar. No caso, foi utilizado um objeto do tipo *DataQueue*, criado em *mom.m* e passado à *buildVMat* pelo argumento *queue*, que permite trocar dados entre os processos através da função *send*.

Tirando esses detalhes, a função é bem simples, tudo o que ela faz é iniciar uma matriz coluna com  $M \cdot P$  linhas e depois calcular os valores de cada elemento através da função  $V$ .

O código de *buildVMat* é apresentado a seguir:

Código 3.3: buildVMat.m

```

function r = buildVMat(P, queue) %builds V matrix
    send(queue, sprintf("started buildVMat@%f at %s", P.omega/(2*pi),
        string(datetime)));

    r = cell(1);
    Vmatrix = zeros(P.Mmax*P.Pmax, 1);

    for s = 1:P.Mmax
        for t = 1:P.Pmax
            Vmatrix((s-1)*P.Pmax+t, 1) = V(s, t, P);
        end
    end

    send(queue, sprintf("finished buildVMat@%f at %s", P.omega/(2*pi),
        string(datetime)));

```

```

    r{1} = Vmatrix;
end

```

### 3.4 buildZMat.m - Construção da matriz Z

Essa função é responsável por construir a matriz Z. Ela funciona de forma análoga à função *buildVMat* descrita na seção anterior, com a diferença de a matriz ser quadrada de dimensões  $(M \cdot P) \times (M \cdot P)$  e, em vez de uma única função ser utilizada para calcular o valor dos elementos, aqui temos duas funções: *Hphi\_in\_proj* e *Hphi\_out\_proj*, responsáveis, respectivamente, pela projeção do campo magnético na parte interna da antena e na parte externa.

O código de *buildZMat* é apresentado a seguir:

Código 3.4: buildZMat.m

```

function r = buildZMat(P, queue) %builds Z matrix
    send(queue, sprintf("started buildZMat@%f at %s", P.omega/(2*pi),
        string(datetime)));

    r = cell(1);
    Zmatrix = zeros(P.Mmax*P.Pmax, P.Mmax*P.Pmax);
    in = zeros(P.Mmax*P.Pmax, P.Mmax*P.Pmax);
    out = zeros(P.Mmax*P.Pmax, P.Mmax*P.Pmax);

    for m = 1:P.Mmax
        for p = 1:P.Pmax
            for s = 1:P.Mmax
                for t = 1:P.Pmax
                    in((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) = Hphi_in_proj(m, p, s,
                        t, P);
                    out((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) = Hphi_out_proj(m, p, s,
                        t, P);
                    Zmatrix((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) = in((s-1)*P.Pmax+t,
                        (m-1)*P.Pmax+p) - out((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p);
                end
            end
        end
    end

    send(queue, sprintf("finished buildZMat@%f at %s", P.omega/(2*pi),
        string(datetime)));

```

```

r{1} = Zmatrix;
end

```

### 3.5 V.m - Elementos da matriz V

Essa função calcula um elemento da matriz  $V$  através da equação (2.148), dados os valores de  $s$  e  $t$  como argumentos.

$$V_{st} = \frac{\Delta\phi}{2} \frac{L}{2} \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_d}(\rho, s, q) + \frac{s\pi}{\rho\Delta\phi} \hat{G}_{M\phi}^{F_d}(\rho, s, q) \right] \cdot \frac{\epsilon_q}{L} I_{3t}(q) \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, s, q) \rho d\rho$$

Na implementação, a integral e o somatório são trocados de posição em relação à equação, de forma que o código efetivamente calcula o somatório das integrais. O somatório tem seu limite superior limitado pelo parâmetro  $P.qmax$ , visto que é impossível computar exatamente um somatório com intervalo infinito. A integral é resolvida pela função *integral* do *Matlab* já que é esperado que a função seja bem comportada, portanto, não é necessária nenhuma técnica especial. Uma característica dessa função é a vetorização da variável sendo integrada, portanto, a variável *rho*, referente a  $\rho$  na equação, é um vetor. Isso foi levado em conta ao implementar *V.m* e suas subfunções para garantir a corretude do código e melhor eficiência ao tirar proveito da vetorização.

O código de *V.m* é apresentado a seguir:

Código 3.5: V.m

```

function r = V(s, t, P) %eq 101
    r = P.delta_phi*P.L/4*summation();

    function acc = summation()
        acc = 0;
        for q = 1:P.qMax
            fun = @(rho) ((-q*pi/(1j*P.omega*P.epsilon_d*P.L)*
                drho_G_Mphi_TAd(rho, s, q, P) + s*pi./(rho*P.delta_phi).*
                G_Mphi_TFd(rho, s, q, P)).*E(q)/P.L*I3_p(q, t, P).*J_vf_Tss(
                rho, s, q, P).*rho);
            acc = acc + integral(fun, P.a, P.b);
        end
    end
end

```

### 3.6 Hphi\_in\_proj.m - Projeção interna do campo magnético

Essa função calcula a componente  $\phi$  da projeção interna do campo magnético através da equação (2.127), dados os argumentos  $m$ ,  $p$ ,  $s$  e  $t$ .

$$\left\langle \hat{H}_\phi(M_{\phi mp}), M_{\phi st} \right\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{b\Delta\phi}{2} \frac{\epsilon_q}{L} \delta_{ms} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(b, m, q) - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{m\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(b, m, q) \right] \cdot I_{3p}(q) I_{3t}(q)$$

Por conta da função  $\delta_{ms}$  na equação, sabemos que o resultado só vai ser diferente de zero quando  $m = s$ , o que é aproveitado no código para reduzir o tempo de execução.

O intervalo do somatório infinito é limitado pelo parâmetro  $P.qmax$ , visto que não é possível computar exatamente um somatório infinito.

Além disso, uma parte dos termos que antecedem a transformada em  $F_d$  da função de Green são independentes da variável do somatório  $q$ . Sendo assim, para evitar recalculá-los desnecessariamente, eles são calculados apenas uma vez e guardados na variável  $temp$ .

O código de *Hphi\_in\_proj.m* é apresentado a seguir:

Código 3.6: Hphi\_in\_proj.m

```
function r = Hphi_in_proj(m, p, s, t, P) %eq 89
    %note that m==n==s or the results is 0
    if m == s
        r = P.b*P.delta_phi/(2*P.L)*summation();
    else
        r = 0;
    end

    function acc = summation()
        acc = 0;
        temp = m*pi^2/(1j*P.omega*P.mu*P.b*P.delta_phi*P.L);
        for q = 0:P.qMax
            acc = acc + E(q)*(-drho_G_Mphi_TAd(P.b, m, q, P)-temp*q*
                G_Mphi_TFd(P.b, m, q, P))*I3_p(q, p, P)*I3_p(q, t, P);
        end
    end
end
```

### 3.7 Hphi\_out\_proj.m - Projeção externa do campo magnético

Essa função calcula a componente  $\phi$  da projeção externa do campo magnético através da equação (2.136), dados os argumentos  $m$ ,  $p$ ,  $s$  e  $t$ .

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{H}_\phi(M_{\phi_{mp}}), M_{\phi_{st}} \right\rangle &= \int_0^\infty (2\pi)^2 b \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(b, 0, k_z) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(0, k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(0, -k_z) + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(0, -k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(0, k_z) \right] dk_z + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty (2\pi)^2 b \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_0}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b} \hat{G}_{M_\phi}^{F_0}(b, n, k_z) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(n, k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(-n, -k_z) + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(n, -k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(-n, k_z) + \right. \\ &\quad \left. + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(-n, k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(n, -k_z) + \hat{M}_{\phi_{mp}}^{ef}(-n, -k_z) \hat{M}_{\phi_{st}}^{ef}(n, k_z) \right] dk_z \end{aligned}$$

O somatório infinito é limitado pelo parâmetro  $nMax$  e a integral infinita é limitada pelo parâmetro  $NKz$ . O Código é apresentado a seguir:

Código 3.7: Hphi\_out\_proj.m

```
function r = Hphi_out_proj(m, p, s, t, P) %eq 97
    r = (2*pi)^2*P.b*summation();

function acc = summation()
    acc = 0;
    for n = 0:P.nMax
        if n == 0
            fun = @(kz) Green_Mphi(P.b, 0, kz, P).*(M_phi_mp_Tef(0, kz,
                m, p, P).*M_phi_mp_Tef(0, -kz, s, t, P) ...
            + M_phi_mp_Tef(0, -kz, m, p, P).*M_phi_mp_Tef(0, kz, s, t,
                P));
        else
            fun = @(kz) Green_Mphi(P.b, n, kz, P).*(M_phi_mp_Tef(n, kz,
                m, p, P).*M_phi_mp_Tef(-n, -kz, s, t, P) ...
            + M_phi_mp_Tef(-n, -kz, m, p, P).*M_phi_mp_Tef(n, kz, s, t,
                P));
            + M_phi_mp_Tef(n, -kz, m, p, P).*M_phi_mp_Tef(-n, kz, s, t,
                P) ...
            + M_phi_mp_Tef(-n, kz, m, p, P).*M_phi_mp_Tef(n, -kz, s, t,
                P) ...
        end
    end
```

```

        acc = acc + quadgk(@(Akz) fun(Akz), 0, P.Nkz*P.k0);
    end
end
end

```

### 3.8 E.m

Essa função é a implementação do símbolo  $\in_q$  apresentado na equação (2.33) e definido como:

$$\in_q = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 2 & q \neq 0 \end{cases}$$

A implementação de  $\in_q$  é trivial e o código de *E.m* é apresentado a seguir:

Código 3.8: E.m

```

function r = E(n)
    if n == 0
        r = 1;
    else
        r = 2;
    end
end

```

### 3.9 I3\_p.m

Essa função calcula a equação (2.102), dados os valores de  $p$  e  $q$ :

$$I_{3p}(q) = \begin{cases} (z_{2p} - z_{1p}) & q = 0 \\ \frac{L}{q\pi} \left[ \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_{2p} - z_1)\right) - \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_{1p} - z_1)\right) \right] & q \neq 0 \end{cases}$$

Lembrando que  $p$  é o índice da função de base que divide a superfície dielétrico-ar em faixas ao longo da direção  $z$ , portanto, existem regiões abaixo do *patch* e acima do *patch*. A depender da região, a forma de calcular as coordenadas  $z_{1p}$  e  $z_{2p}$  e a altura da faixa  $L_p$  muda.

Para faixas abaixo do *patch* utilizam-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} L_p = \frac{z_{1a} - z_1}{P/2} \\ z_{1p} = z_1 + (p-1) \cdot L_p \\ z_{2p} = z_1 + p \cdot L_p \end{cases}$$

Para faixas acima do *patch* utilizam-se as seguintes equações:



$$\begin{cases} L_p = \frac{z_2 - z_{2a}}{P/2} \\ z_{1p} = z_{2a} + (p - 1 - P/2) \cdot L_p \\ z_{2p} = z_{2a} + (p - P/2) \cdot L_p \end{cases}$$

O código de *I3\_p.m* é apresentado a seguir:

Código 3.9: *I3\_p.m*

```
function r = I3_p(q, p, P) %eq 62
    if p <= (P.Pmax/2)
        Lp = (P.z_1a - P.z1) / (P.Pmax/2);
        z_1p = P.z1 + (p-1)*Lp;
        z_2p = P.z1 + p*Lp;
    else
        Lp = (P.z2 - P.z_2a) / (P.Pmax/2);
        z_1p = P.z_2a + (p-P.Pmax/2-1)*Lp;
        z_2p = P.z_2a + (p-P.Pmax/2)*Lp;
    end

    if q == 0
        r = z_2p - z_1p;
    else
        r = P.L / (q*pi) * (sin(q*pi/P.L*(z_2p-P.z1)) - sin(q*pi/P.L*(z_1p-P.z1)));
    end
end
```

### 3.10 J\_vf\_Tss.m - Transformada seno-seno da corrente volumétrica na fita de alimentação

Essa função calcula a transformada seno-seno da corrente volumétrica na fita de alimentação através da equação (2.113) dados os parâmetros  $\rho$ ,  $n$  e  $q$ :

$$\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{4I_0}{n\pi L \rho \Delta\phi_f} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{1f} - \phi_1)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{2f} - \phi_1)\right) \right] \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_f - z_1)\right)$$

Percebe-se que  $n$  aparece no denominador, porém nessa equação isso não é um problema, visto que  $n = 0$  nunca será passado como argumento para essa função. A implementação é trivial e o código é apresentado a seguir:

Código 3.10: J\_vf\_Tss.m

```
function r = J_vf_Tss(rho, n, q, P) %eq 81
    r = 4*P.I0./(n*pi*P.L*rho*P.delta_phi_f)*(cos(n*pi/P.delta_phi*(P.
        phi_1f-P.phil))-cos(n*pi/P.delta_phi*(P.phil_2f-P.phil)))*sin(q*
        pi/P.L*(P.z_f-P.zl));
end
```

### 3.11 drho\_G\_Mphi\_TAd.m - Derivada em relação a $\rho$ da transformada $A_d$ da função de Green em $M_\phi$

Essa função calcula a derivada em relação a  $\rho$  da transformada  $A_d$  da função de Green em  $M_\phi$  através da equação (2.151) dados os valores de  $\rho$ ,  $n$  e  $q$ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M_\phi}^{A_d}(\rho, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{k_{\rho_d}} \frac{\Theta_{7\rho}(\rho, n, q)}{\Theta_5(n, q)}$$

Lembrando que  $k_{\rho_d}$  é definido em 2.4.1.4 como:

$$k_{\rho_d}^2 = k_d^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$$

A parte imaginária de  $k_{\rho_d}$ , se existir, pode ser matematicamente tanto positiva quanto negativa, porém, como escolhemos a variação temporal na forma  $e^{j\omega t}$ , a onda na direção positiva de  $\rho$  deve ter variação de fase na forma  $e^{-jk_{\rho_d}\rho}$ , que só decresce exponencialmente caso a parte imaginária de  $k_{\rho_d}$ , se existir, for negativa. Por conta disso, é empregado o uso da função *cinv* que inverte a parte imaginária caso esta seja positiva. Tirando esse detalhe, a implementação é trivial e o código é apresentado a seguir:

Código 3.11: drho\_G\_Mphi\_TAd.m

```
function r = drho_G_Mphi_TAd(rho, n, q, P) %eq 103: rho and q might
    be arrays
    k_rho = sqrt(P.kd.^2 - (q*pi/P.L).^2);
    k_rho = cinv(k_rho);

    r = -1j*P.omega*P.epsilon_d./k_rho.*theta_7_rho(n, q, P.kd, rho, P)
        ./ (theta_5(n, q, P.kd, P));
end
```

### 3.12 G\_Mphi\_TFd.m - Transformada $F_d$ da função de Green em $M_\phi$

Essa função calcula a transformada  $F_d$  da função de Green em  $M_\phi$  através da equação (2.153) dados os valores de  $\rho$ ,  $n$  e  $q$ :

$$\hat{G}_{M_\phi}^{F_d}(\rho, n, q) = -\frac{n\pi}{b\Delta\phi} \frac{q\pi}{L} \frac{1}{k_{\rho_d}^3} \frac{\Theta_{3\rho}(\rho, n, q)}{\Theta_1(n, q)}$$

Assim como em *drho\_G\_Mphi\_TAd.m*, aplica-se a função *cinv* a  $k_{\rho_d}$  para garantir que a parte imaginária não seja positiva.  $k_{\rho_d}$  é dado pela equação:

$$k_{\rho_d}^2 = k_d^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$$

O resto da implementação é trivial e o código é apresentado a seguir:

Código 3.12: G\_Mphi\_TFd.m

```
function r = G_Mphi_TFd(rho, n, q, P) %eq 105: rho and q might be
    arrays
    k_rho = sqrt(P.kd.^2 - (q*pi/P.L).^2);
    k_rho = cinv(k_rho);

    r = -n*pi*q*pi./(P.b*P.delta_phi*P.L*k_rho.^3).*theta_3_rho(n, q, P
        .kd, rho, P)./(theta_1(n, q, P.kd, P));
end
```

### 3.13 cinv.m

Essa função recebe um vetor de números complexos e inverte a parte imaginária, caso essa seja positiva. Efetivamente, ela força todos os números passados a terem parte imaginária negativa. A implementação utiliza um *loop for*, embora uma implementação vetorizada seja mais eficiente, a diferença no tempo de execução seria imperceptível, visto que quase todo o tempo de execução do programa está concentrado no cálculo da integral em 3.7. O código é apresentado a seguir:

Código 3.13: cinv.m

```
function r = cinv(arr) %inverts complex number if imaginary part is
    positive
    for i = 1:size(arr, 2)
        if imag(arr(i)) > 0
            arr(i) = -arr(i);
        end
    end
end
```

```

    r = arr;
end

```

### 3.14 dH2.m - Derivada da função de Hankel do segundo tipo

Essa função calcula a derivada da função de Hankel do segundo tipo através da equação (10.6.2) de Olver et al.[29]:

$$B'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} B_\nu(z) - B_{\nu+1}(z)$$

Onde  $B$  é uma função de Bessel trivial qualquer, nesse caso, a função de Hankel do segundo tipo. O código, portanto, é trivial e é apresentado a seguir:

Código 3.14: dH2.m

```

function r = dH2(ni, x) %derivative of hankel function of the second
    kind
    r = (ni.*besselh(ni, 2, x))./x - besselh(ni + 1, 2, x);
end

```

### 3.15 dJ.m - Derivada da função de Bessel do primeiro tipo

Essa função calcula a derivada da função de Bessel do primeiro tipo através da equação (10.6.2) de Olver et al.[29]:

$$B'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} B_\nu(z) - B_{\nu+1}(z)$$

Onde  $B$  é uma função de Bessel trivial qualquer, nesse caso, a função de Bessel do primeiro tipo. O código é apresentado a seguir:

Código 3.15: dJ.m

```

function r = dJ(ni, x) %derivative of bessel function of the first
    kind
    r = (ni*besselj(ni, x))/x - besselj(ni + 1, x);
end

```

### 3.16 I4\_p.m

Essa função calcula a equação (2.104), dados os valores de  $k_z$  e  $q$ :

$$I_{4p}(k_z) = \frac{e^{jk_z z_{2p}} - e^{jk_z z_{1p}}}{jk_z}$$

Assim como em *I3\_p.m*, existem faixas, indexadas por  $p$ , abaixo e acima do *patch*, para as quais o cálculo de  $z_{1p}$  e  $z_{2p}$  muda.

Para faixas abaixo do *patch* utilizam-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} L_p = \frac{z_{1a} - z_1}{P/2} \\ z_{1p} = z_1 + (p-1) \cdot L_p \\ z_{2p} = z_1 + p \cdot L_p \end{cases}$$

Para faixas acima do *patch* utilizam-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} L_p = \frac{z_2 - z_{2a}}{P/2} \\ z_{1p} = z_{2a} + (p-1-P/2) \cdot L_p \\ z_{2p} = z_{2a} + (p-P/2) \cdot L_p \end{cases}$$

Nota-se a presença de  $K_z$  no denominador. Essa função é utilizada na equação a ser integrada pela função *quadgk* do *Matlab*. Esse algoritmo consegue lidar com singularidades, e no geral, o algoritmo de quadratura não passa os limites da integral para o integrando, de forma que  $K_z = 0$  nunca será passado como argumento para essa função.

O código é apresentado a seguir:

Código 3.16: *I4\_p.m*

```
function r = I4_p(kz, p, P) %eq 73: kz might be array
    if p <= (P.Pmax/2)
        Lp = (P.z_1a - P.z1) / (P.Pmax/2);
        z_1p = P.z1 + (p-1)*Lp;
        z_2p = P.z1 + p*Lp;
    else
        Lp = (P.z2 - P.z_2a) / (P.Pmax/2);
        z_1p = P.z_2a + (p-P.Pmax/2-1)*Lp;
        z_2p = P.z_2a + (p-P.Pmax/2)*Lp;
    end

    r = (exp(1j*kz*z_2p)-exp(1j.*kz.*z_1p))./(1j*kz);
end
```

### 3.17 M\_phi\_mp\_Tef.m

Essa função é responsável por calcular a transformada exponencial-Fourier da função de base através da equação (2.107), dados os valores de  $m$ ,  $p$ ,  $n$  e  $k_z$ :

$$\hat{M}_{\phi mp}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{jn\phi_1}}{\left(\frac{m\pi}{\Delta\phi}\right)^2 - n^2} \frac{m\pi}{\Delta\phi} \left[1 - (-1)^m e^{jn\Delta\phi}\right] I_{4p}(k_z)$$

A implementação é trivial e o código é apresentado a seguir:

Código 3.17: M\_phi\_mp\_Tef.m

```
function r = M_phi_Tef(n, kz, m, p, P) %eq 75; kz might be array
    r = 1/(2*pi)^2*exp(1j*n*P.phil)/( (m*pi/P.delta_phi)^2-n^2)*m*pi/P.
    delta_phi*(1-(-1)^m*exp(1j*n*P.delta_phi)).*I4_p(kz, p, P);
end
```

### 3.18 Green\_Mphi.m

Essa função calcula a soma das funções de Green na equação (2.138) através das equações (2.94a) e (2.137), dados os valores de  $\rho$ ,  $n$  e  $k_z$ :

$$\text{Green\_Mphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_0}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b} \hat{G}_{M\phi}^{F_0}(b, n, k_z)$$

$$\hat{G}_{M\phi}^{F_0}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{bk_{\rho_0}^3} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}\rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0}b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{G}_{M\phi}^{A_0}(\rho, n, k_z) = \frac{-j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}} \frac{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0}b)}$$

Por conta da divisão entre funções de Bessel, as funções de Green não podem ser calculadas diretamente para argumentos pequenos nem grandes. Nesses casos, são utilizadas aproximações assintóticas descritas no Apêndice A.

Para argumentos com parte imaginária igual a 0 e parte real pequena, utilizam-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}} \frac{1}{j\frac{\pi}{2}k_{\rho_0}b + k_{\rho_0}b \ln\left(\frac{\gamma}{2}k_{\rho_0}b\right)} & n = 0 \\ \frac{n}{j\omega\mu b} & n \neq 0 \end{cases}$$

Para argumentos com parte real igual a 0 e parte imaginária pequena, utilizam-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\rho_0}^2 b \ln\left(-\frac{\gamma}{2}k_{\rho_0}b\right)} & n = 0 \\ \frac{n}{j\omega\mu b} & n \neq 0 \end{cases}$$

Para argumentos com parte real igual a 0 e parte imaginária grande, utiliza-se a seguinte equação:

$$\frac{\omega \epsilon_0}{k_\rho} + \frac{(nk_z)^2}{\omega \mu k_\rho (k_\rho b)^2}$$

Para os demais casos, utiliza-se a equação diretamente.

A implementação trata  $kz$  como uma *array*, por isso calcula um valor de  $k_\rho$  para cada valor em  $kz$  e um valor para as funções de Green para cada  $kz$ . A implementação é apresentada a seguir:

Código 3.18: Green\_Mphi.m

```
function r = Green_Mphi(rho, n, kz, P) %eqs 94-96: kz might be array
    A_k_rho = sqrt(P.k0.^2 - kz.^2);
    A_k_rho = cinv(A_k_rho);

    if n == 0
        argmin = 2*10^(-P.expmin);
    else
        argmin = 2*10^((c_log(n)-P.expmin)/(1+n));
    end

    r = zeros(size(A_k_rho));
    for it = 1:size(A_k_rho, 2)
        k_rho = A_k_rho(it);

        if imag(k_rho*P.b) == 0 && abs(real(k_rho*P.b)) <= argmin
            if n == 0
                r(it) = 1j*P.omega*P.epsilon_0/k_rho*1/(1j*pi/2*k_rho*P.b +
                    k_rho*P.b*log(P.gamma*real(k_rho*P.b)/2));
            else
                r(it) = n/(1j*P.omega*P.mu*P.b);
            end
        elseif real(k_rho*P.b) == 0 && abs(imag(k_rho*P.b)) <= argmin
            if n == 0
                r(it) = 1j*P.omega*P.epsilon_0/(k_rho*k_rho*P.b*log(P.gamma*
                    imag(-k_rho*P.b)/2));
            else
                r(it) = n/(1j*P.omega*P.mu*P.b);
            end
        elseif real(k_rho*P.b) == 0 && abs(imag(k_rho*P.b)) >= P.argmax
            r(it) = P.omega*P.epsilon_0/k_rho + (n*kz(it))^2/(P.omega*P.mu*
                k_rho*(k_rho*P.b)^2);
        else
            dH2_besselh = dH2(n, k_rho*P.b)/besselh(n, 2, k_rho*rho);
            r(it) = 1j*P.omega*P.epsilon_0/k_rho*dH2_besselh + (n*kz(it))
```

```

        ^2/(1j*P.omega*P.mu*P.b^2*k_rho^3*dH2_besselh);
    end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

### 3.19 theta\_1.m

Essa função calcula a combinação de funções de Bessel  $\Theta_1$  de acordo com a equação (2.60), dados os valores de  $n$ ,  $q$  e um argumento adicional  $k$ , cujo propósito é diferenciar entre a região interna e externa da antena:

$$\Theta_1(n, q) = J'_v(k_\rho b) H_v^{(2)'}(k_\rho a) - J'_v(k_\rho a) H_v^{(2)'}(k_\rho b)$$

Para a região externa, utiliza-se  $k = k_0$ , enquanto na região interna utiliza-se  $k = k_d$ . Para calcular  $k_\rho$  utiliza-se a equação (2.19) ou (2.68):

$$k_\rho^2 = k^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$$

$v$  é dado pela equação (2.19):

$$v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$$

As funções de Bessel são notórias por apresentarem problemas computacionais para argumentos muito grandes ou muito pequenos [29]. Tendo isso em mente, foram utilizadas aproximações assintóticas para lidar com esses casos. O Apêndice A detalha as aproximações feitas.

Para argumentos pequenos, ou seja,  $k_\rho$  pequeno, e  $n = v = 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_1(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} j \frac{1}{\pi} \left[ \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right]$$

Para argumentos pequenos e  $n \neq 0$ , que implica  $v \neq 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_1(n, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} j \frac{v}{\pi} \frac{1}{k_\rho^2} \left[ -\frac{1}{a^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{v+1} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{v-1} \right]$$

Para argumentos grandes, utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_1(n, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow \infty} \frac{2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \left[ \left(1 + \frac{1}{4k_\rho^2 ab}\right) \sin(k_\rho(b-a)) + \left(\frac{1}{2k_\rho b} - \frac{1}{2k_\rho a}\right) \cos(k_\rho(b-a)) \right]$$



Para os demais casos, utiliza-se a equação (2.60) diretamente. Detalhes sobre os argumentos mínimo e máximo que chaveiam entre as aproximações e a equação exata se encontram no Apêndice A

Já que  $q$  pode ser uma *array*, é necessário calcular os valores de  $k_p$  para cada valor de  $q$ , e, então, calcular o valor de  $\Theta_1$  para cada valor de  $k_p$ .

A função *c\_log* é utilizada para calcular o logaritmo de um fatorial, como explicado em A.26.

O código é apresentado a seguir:

Código 3.19: theta\_1.m

```
function r = theta_1(n, q, k, P) %eq 43: adição de K aos parâmetros
    para diferenciar região interna de externa (kd | k0); q might be
    array
    ni = n*pi/P.delta_phi;

    A_k_rho = sqrt(k.^2 - (q*pi/P.L).^2);
    A_k_rho = cinv(A_k_rho);

    if ni == 0
        argmin = 2*10^(-P.expmin);
    else
        argmin = 2*10^((c_log(ni)-P.expmin)/(1+ni));
    end

    r = zeros(size(A_k_rho));
    for it = 1:size(A_k_rho, 2)
        k_rho = A_k_rho(it);

        if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
            r(it) = 2j/(pi*k_rho*sqrt(P.a*P.b))*((1+1/(4*k_rho^2*P.a*P.b))*
                sin(k_rho*(P.b-P.a))+(1/(2*k_rho*P.b)-1/(2*k_rho*P.a))*cos(
                k_rho*(P.b-P.a)));
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
            r(it) = 1j/pi*(P.b/P.a-P.a/P.b);
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
            r(it) = 1j*ni/(pi*k_rho^2)*((P.a/P.b)^(ni-1)/P.b^2 - (P.b/P.a)
                ^ (ni-1)/P.a^2);
        else
            r(it) = dJ(ni, k_rho*P.b)*dH2(ni, k_rho*P.a) - dJ(ni, k_rho*P.a)
                *dH2(ni, k_rho*P.b);
        end
    end

function r = c_log(ni)
```

```

r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

### 3.20 theta\_3\_rho.m

Essa função calcula a combinação de funções de Bessel  $\Theta_{3\rho}$  de acordo com a equação (2.152), dados os valores de  $\rho$ ,  $n$ ,  $q$  e um argumento adicional  $k$ , cujo propósito é diferenciar entre a região interna e externa da antena:

$$\Theta_{3\rho}(\rho, n, q) = J_\nu(k_\rho a) H_\nu^{(2)'}(k_\rho a) - J_\nu'(k_\rho a) H_\nu^{(2)}(k_\rho a)$$

$k_\rho$  e  $\nu$  são definidos na equação (2.19):

$$k_\rho^2 = k^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$$

$$\nu = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$$

As funções de Bessel não podem ser computadas diretamente para argumentos pequenos ou grandes [29]. Nesse caso, foram utilizadas aproximações assintóticas descritas no Apêndice A.

Para argumentos pequenos, ou seja,  $k_\rho$  pequeno, e  $n = \nu = 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_{3\rho}(\rho, 0, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} -j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k_\rho a} + \frac{k_\rho a}{2} \ln \left( \frac{\gamma}{2} k_\rho \rho \right) \right]$$

Para argumentos pequenos e  $n \neq 0$ , que implica  $\nu \neq 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_{3\rho}(\rho, n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} -j \frac{1}{\pi k_\rho} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{\rho}{a} \right)^\nu + \frac{1}{\rho} \left( \frac{a}{\rho} \right)^{\nu-1} \right]$$

Para argumentos grandes, utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_{3\rho}(\rho, n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{-2j}{\pi k_\rho \sqrt{a\rho}} \left[ \frac{1}{2k_\rho a} \sin(k_\rho(\rho - a)) + \cos(k_\rho(\rho - a)) \right]$$

Para os demais casos, utiliza-se a equação (2.152) diretamente.

Nota-se que tanto  $q$  quanto  $\rho$  podem ser *arrays*, o que pode ser visto no código apresentado a seguir:

Código 3.20: theta\_3\_rho.m

```

function r = theta_3_rho(n, q, k, rho, P) %eq 30': adição de K aos
    parâmetros para diferenciar região interna de externa (kd | k0); q
    and rho might be arrays
    ni = n*pi/P.delta_phi;

```

---

```

A_k_rho = sqrt(k.^2 - (q*pi/P.L).^2);
A_k_rho = cinv(A_k_rho);

if ni ==0
    argmin = 2*10^(-P.expmin);
else
    argmin = 2*10^((c_log(ni)-P.expmin)/(1+ni));
end

if size(rho, 2) > 1
    k_rho = A_k_rho;

    if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
        r = -2j./(pi*k_rho*sqrt(P.a*rho)).*(sin(k_rho*(rho-P.a))/(2*
            k_rho*P.a)+cos(k_rho*(rho-P.a)));
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
        r = -2j/pi*(1/(k_rho*P.a)+k_rho*P.a/2*log(P.gamma*k_rho*rho/2))
            ;
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
        r = -1j/(pi*k_rho)*((rho/P.a).^ni/P.a + (P.a./rho).^(ni-1)./rho
            );
    else
        r = besselj(ni, k_rho*rho)*dH2(ni, k_rho*P.a) - dJ(ni, k_rho*P.
            a)*besselh(ni, 2, k_rho*rho);
    end
else
    r = zeros(size(A_k_rho));
    for it = 1:size(A_k_rho, 2)
        k_rho = A_k_rho(it);

        if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
            r(it) = -2j/(pi*k_rho*sqrt(P.a*rho))*(sin(k_rho*(rho-P.a))
                /(2*k_rho*P.a)+cos(k_rho*(rho-P.a)));
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
            r(it) = -2j/pi*(1/(k_rho*P.a)+k_rho*P.a/2*log(P.gamma*k_rho*
                rho/2));
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
            r(it) = -1j/(pi*k_rho)*((rho/P.a)^ni/P.a + (P.a./rho)^(ni-1)/
                rho);
        else

```

```

        r(it) = besselj(ni, k_rho*rho)*dH2(ni, k_rho*P.a) - dJ(ni,
            k_rho*P.a)*besselh(ni, 2, k_rho*rho);
    end
end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

### 3.21 theta\_5.m

Essa função calcula a combinação de funções de Bessel  $\Theta_5$  de acordo com a equação (2.55), dados os valores de  $n$ ,  $q$  e o argumento adicional  $k$ , cujo propósito é diferenciar entre a região interna e externa da antena:

$$\Theta_5(n, q) = J_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_{\rho_d} b)$$

$k_{\rho}$  e  $v$  são definidos na equação (2.19):

$$k_{\rho}^2 = k^2 - \left( \frac{q\pi}{L} \right)^2$$

$$v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$$

As funções de Bessel não podem ser computadas diretamente para argumentos pequenos ou grandes [29]. Nesse caso, foram utilizadas aproximações assintóticas descritas no Apêndice A.

Para argumentos pequenos, ou seja,  $k_{\rho}$  pequeno, e  $n = v = 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_5(0, q) \xrightarrow[k_{\rho} \rightarrow 0]{} j \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Para argumentos pequenos e  $n \neq 0$ , que implicam  $v \neq 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_5(n, q) \xrightarrow[k_{\rho} \rightarrow 0]{} j \frac{1}{v\pi} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^v - \left( \frac{a}{b} \right)^v \right]$$

Para argumentos grandes, utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_5(n, q) \xrightarrow[k_{\rho} \rightarrow \infty]{} \frac{2j}{\pi k_{\rho} \sqrt{ab}} \sin(k_{\rho}(b-a))$$

Para os demais casos, utiliza-se a equação (2.55) diretamente.

Assim como em  $\Theta_1$ ,  $q$  pode ser uma *array*. O código é apresentado a seguir:

Código 3.21: theta\_5.m

```

function r = theta_5(n, q, k, P) %thetas appendix: adição de K aos
    parâmetros para diferenciar região interna de externa (kd | k0); q
    might be array
ni = n*pi/P.delta_phi;

A_k_rho = sqrt(k.^2 - (q*pi/P.L).^2);
A_k_rho = cinv(A_k_rho);

if ni == 0
    argmin = 2*10^(-P.expmin);
else
    argmin = 2*10^((c_log(ni)-P.expmin)/(1+ni));
end

r = zeros(size(A_k_rho));
for it = 1:size(A_k_rho, 2)
    k_rho = A_k_rho(it);

    if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
        r(it) = 2j/(pi*k_rho*sqrt(P.a*P.b))*sin(k_rho*(P.b-P.a));
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
        r(it) = 2j/pi*log(P.b/P.a);
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
        r(it) = 1j/(ni*pi)*((P.b/P.a)^ni - (P.a/P.b)^ni);
    else
        r(it) = besselj(ni, k_rho*P.b)*besselh(ni, 2, k_rho*P.a) -
            besselj(ni, k_rho*P.a)*besselh(ni, 2, k_rho*P.b);
    end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

## 3.22 theta\_7\_rho.m

Essa função calcula a combinação de funções de Bessel  $\Theta_{7\rho}$  de acordo com a equação (2.150), dados os valores de  $\rho$ ,  $n$ ,  $q$  e um argumento adicional  $k$ , cujo propósito é diferenciar entre a região interna

e externa da antena:

$$\Theta_{7\rho}(\rho, n, q) = J'_v(k_{\rho_d}\rho)H_v^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_v(k_{\rho_d}a)H_v^{(2)'}(k_{\rho_d}\rho)$$

$k_{\rho}$  e  $v$  são definidos na equação (2.19):

$$k_{\rho}^2 = k^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$$

$$v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$$

As funções de Bessel não podem ser computadas diretamente para argumentos pequenos ou grandes [29]. Nesse caso, foram utilizadas aproximações assintóticas descritas no Apêndice A.

Para argumentos pequenos, ou seja,  $k_{\rho}$  pequeno, e  $n = v = 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_{7\rho}(\rho, 0, q) \xrightarrow{k_{\rho} \rightarrow 0} j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k_{\rho}\rho} + \frac{k_{\rho}\rho}{2} \ln\left(\frac{\gamma}{2} k_{\rho}a\right) \right]$$

Para argumentos pequenos e  $n \neq 0$ , que implicam  $v \neq 0$ , utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_{7\rho}(\rho, n, q) \xrightarrow{k_{\rho} \rightarrow 0} j \frac{1}{\pi k_{\rho}} \left[ \frac{1}{a} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{v-1} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^v \right]$$

Para argumentos grandes, utiliza-se a seguinte aproximação:

$$\Theta_{7\rho}(\rho, n, q) \xrightarrow{k_{\rho} \rightarrow \infty} \frac{2j}{\pi k_{\rho} \sqrt{a\rho}} \left[ \cos(k_{\rho}(\rho - a)) - \frac{1}{2k_{\rho}\rho} \sin(k_{\rho}(\rho - a)) \right]$$

Para os demais casos, utiliza-se a equação (2.150) diretamente.

Assim como em  $\Theta_{3\rho}$ ,  $q$  e  $\rho$  podem ser *arrays*. O código é apresentado a seguir:

Código 3.22: theta\_7\_rho.m

```
function r = theta_7_rho(n, q, k, rho, P) %thetas appendix: adição de
    K aos parâmetros para diferenciar região interna de externa (kd |
    k0); q and rho might be arrays
ni = n*pi/P.delta_phi;

A_k_rho = sqrt(k.^2 - (q*pi/P.L).^2);
A_k_rho = cinv(A_k_rho);

if ni == 0
    argmin = 2*10^(-P.expmin);
else
    argmin = 2*10^((c_log(ni)-P.expmin)/(1+ni));
end
```

---

```

if size(rho, 2) > 1
    k_rho = A_k_rho;

    if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
        r = 2j./(pi*k_rho*sqrt(P.a*rho)).*(cos(k_rho*(rho-P.a))-sin(
            k_rho*(rho-P.a))./(2*k_rho*rho)); %todo: test 2*k_rho*rho;
            is k_rho array?
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
        r = 2j/pi*(1./(k_rho*rho)+k_rho*rho/2*log(P.gamma*k_rho*P.a/2))
        ;
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
        r = 1j/(pi*k_rho)*((rho/P.a)^(ni-1)/P.a + (P.a./rho).^ni./rho)
        ;
    else
        r = dJ(ni, k_rho*rho)*besselh(ni, 2, k_rho*P.a) - besselj(ni,
            k_rho*P.a)*dH2(ni, k_rho*rho);
    end
else
    r = zeros(size(A_k_rho));
    for it = 1:size(A_k_rho, 2)
        k_rho = A_k_rho(it);

        if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
            r(it) = 2j/(pi*k_rho*sqrt(P.a*rho))*(cos(k_rho*(rho-P.a))-sin(
                k_rho*(rho-P.a))./(2*k_rho*rho));
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
            r(it) = 2j/pi*(1/(k_rho*rho)+k_rho*rho/2*log(P.gamma*k_rho*P.
                a/2));
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
            r(it) = 1j/(pi*k_rho)*((rho/P.a)^(ni-1)/P.a + (P.a./rho)^ni/
                rho);
        else
            r(it) = dJ(ni, k_rho*rho)*besselh(ni, 2, k_rho*P.a) - besselj
                (ni, k_rho*P.a)*dH2(ni, k_rho*rho);
        end
    end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end

```

---

end

---

### 3.23 z\_in\_f.m

Essa função calcula a contribuição da corrente elétrica na impedância de entrada (também conhecida como auto-impedância da prova de alimentação) de acordo com a equação (2.173):

$$Z_{in}^f = -\frac{1}{I_0^2} \frac{j\omega\mu\Delta\phi L}{4} (b-a)\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q)\right)^2}{k_d^2 - k_{nq}^2}$$

Lembrando que  $\rho_0$  é apresentado na equação (2.163) como  $(a+b)/2$  e  $k_{nq}$  é definido na equação (2.164) como:

$$k_{nq} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\rho_0\Delta\phi}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2}$$

Os somatórios infinitos em  $n$  e  $q$  têm seus intervalos limitados, respectivamente, por  $nMax$  e  $qMax$ . O código é apresentado a seguir:

Código 3.23: z\_in\_f.m

```
function r = z_in_f(P) %eq 108
    rho0 = (P.a+P.b)/2;

    r = -1/P.I0^2*1j*P.omega*P.mu*P.delta_phi*P.L/4*(P.b-P.a)*rho0*
        summation();

    function acc = summation()
        acc = 0;
        for n = 1:P.nMax
            for q = 1:P.qMax
                k_nq = sqrt((n*pi/(rho0*P.delta_phi))^2+(q*pi/P.L)^2);
                acc = acc + J_vf_Tss(rho0, n, q, P)^2/(P.kd^2-k_nq^2);
            end
        end
    end
end
```

### 3.24 z\_in\_m.m

Essa função calcula a contribuição da corrente magnética na impedância de entrada de acordo com a equação (2.159), dadas as matrizes **V** e **d** como entrada:



$$Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} V_{mp}$$

O somatório duplo é equivalente a multiplicar a transposta da matriz  $\mathbf{V}$  pela matriz  $\mathbf{d}$ , portanto, a implementação foi feita dessa forma. Para o problema abordado neste trabalho, os valores na matriz  $\mathbf{V}$  sempre serão reais, portanto é indiferente utilizar a transposição com ou sem conjugado complexo. O código é apresentado a seguir:

Código 3.24: z\_in\_m.m

```
function r = z_in_m(d_mat, V_mat, P) %eq 110
    r = -1/P.I0^2*(V_mat' * d_mat);
end
```

### 3.25 Efields.m - Campo elétrico radiado pela antena

Essa função calcula as componentes  $\theta$  e  $\phi$  do campo elétrico radiado pela antena através das equações (2.185) e (2.190):

$$E_{\theta}(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2e^{-jk_0 r}}{r \sin \theta} \left[ j \frac{\hat{M}_{\phi}^{ef}(0, k_0 \cos \theta)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^{n+1}}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \left( e^{-jn\phi} \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_0 \cos \theta) + e^{jn\phi} \hat{M}_{\phi}^{ef}(-n, k_0 \cos \theta) \right) \right]$$

$$E_{\phi}(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2j e^{-jk_0 r} \cos \theta}{b k_0 r \sin^2 \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^{n+1} n}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \left[ e^{-jn\phi} \hat{M}_{\phi}^{ef}(n, k_0 \cos \theta) - e^{jn\phi} \hat{M}_{\phi}^{ef}(-n, k_0 \cos \theta) \right]$$

Nota-se a ausência dos termos em  $r$  na implementação. Isso se deve ao quadrado do módulo do campo elétrico ser utilizado no cálculo da intensidade de radiação, como explicado na seção 3.26. A fase do campo  $e^{-jk_0 r}$  desaparece por conta do operador módulo, e, visto que há um termo  $r^2$  na intensidade de radiação, o termo  $r$  no denominador da equação dos campos é cancelado.

O somatório tem seu intervalo limitado de 0 a  $nMax$  e é calculado através da função *sum* do Matlab que soma os valores em uma *array* e retorna um único valor. Percebe-se que a parte do somatório referente às transformadas exponencial-Fourier da corrente magnética é semelhante em ambas as componentes do campo, diferindo apenas pelo sinal da segunda parte. Sendo assim, foi utilizada uma subfunção que recebe o valor do sinal, calcula a soma ou subtração das duas transformadas. Além disso, aplicando a transformada exponencial-Fourier na equação (2.98), vemos que é possível obter as transformadas exponencial-Fourier da corrente magnética, multiplicando os elementos da matriz  $d$  pelos valores dados pela equação (2.107).

O código é apresentado a seguir:

Código 3.25: Efields.m

```

function [Etheta, Ephi] = Efields(theta, phi, dMat, P) %eqs 120, 124
    krho0 = P.k0*sin(theta);
    ns = 1:P.nMax;

    Etheta = 2/sin(theta)*(1j*M_phi_Tef(0, P.k0*cos(theta))/besselh(0,
        2, krho0*P.b)+sum(1j.^(ns+1)./besselh(ns, 2, krho0*P.b).*exp_M(
        theta, phi, 1)));
    Ephi = 2j*cos(theta)/(P.b*P.k0*sin(theta)^2)*sum(1j.^(ns+1).*ns./
        dH2(ns, krho0*P.b).*exp_M(theta, phi, -1));

    function r = exp_M(theta, phi, sign)
        r = zeros(1, P.nMax);
        for n = ns
            r(n) = exp(-1j*n*phi)*M_phi_Tef(n, P.k0*cos(theta)) + sign*exp
                (1j*n*phi)*M_phi_Tef(-n, P.k0*cos(theta));
        end
    end

    function r = M_phi_Tef(n, kz)
        r = 0;
        for m = 1:P.Mmax
            for p = 1:P.Pmax
                r = r + dMat((m-1)*P.Pmax+p, 1)*M_phi_mp_Tef(n, kz, m, p, P);
            end
        end
    end
end
end

```

## 3.26 gain.m

Essa função calcula o ganho da antena através da equação (2-46) de Balanis [33], dado o campo elétrico e a potência de entrada na antena:

$$Gain = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in}}$$

Onde  $U$  é a intensidade de radiação na direção  $(\theta, \phi)$  em coordenadas esféricas e  $P_{in}$  é a potência de entrada na antena. A intensidade de radiação é dada pela equação (2-12a) de Balanis[33]:

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} |E(r, \theta, \phi)|^2$$

Nota-se a ausência do termo  $r^2$  na implementação, visto que a equação do campo elétrico possui um termo  $1/r$  como visto na Seção 3.25. O código é apresentado a seguir:

Código 3.26: gain.m

```
function G = gain(field, power, P)
    U = abs(field)^2/(2*P.eta_0);
    G = 4*pi*U/power;
end
```

### 3.27 radpat.m

Essa função gera os diagramas de radiação dada a matriz **d** e a potência de entrada para calcular o ganho a partir do campo.

Analizando as equações para o campo elétrico, vemos que ela possui singularidades em alguns ângulos. As equações das componentes  $\theta$  e  $\phi$  do campo elétrico possuem  $\sin(\theta)$  e  $\sin^2(\theta)$  no denominador, respectivamente. Com isso, para  $\theta = n\pi$  onde  $n \in \mathbb{Z}$  o campo é indefinido. No caso da equação da componente  $\phi$ , existe um termo  $\cos(\theta)$  no numerador, que, embora não cause uma singularidade, cria uma descontinuidade do gráfico em  $\theta = n\frac{\pi}{2}$  para  $n$  ímpar.

Para corrigir isso na apresentação dos gráficos, foi adicionado ou subtraído um termo  $\pi/1000$  nos ângulos descritos acima.

Dada a amplitude do campo elétrico, é calculado o ganho, que é então convertido para decibéis para ser exibido no gráfico. Utiliza-se a função *polarpattern* [34] do Matlab para gerar o gráfico, visto que essa é uma função específica para diagramas de radiação.

A implementação é apresentada a seguir:

Código 3.27: radpat.m

```
function [Gphi0_db, Gtheta90_db] = radpat(dMat, peak_power, P)
    %phi = 0 plane
    Gphi0 = zeros(361, 3);
    [Etheta, Ephi] = Efields(pi/1000, pi-pi/1000, dMat, P);
    Gphi0(1,:) = [0, gain(Etheta, peak_power, P), gain(Ephi, peak_power, P)];
    Gphi0(361,:) = [360, gain(Etheta, peak_power, P), gain(Ephi, peak_power, P)];
    parfor theta=1:179
        [Etheta, Ephi] = Efields(theta*pi/180, pi/1000, dMat, P);
        Gphi0(theta+1,:) = [theta, gain(Etheta, peak_power, P), gain(Ephi, peak_power, P)];
    end
    [Etheta, Ephi] = Efields(180-pi/1000, pi-pi/1000, dMat, P);
```

---

```

Gphi0(181,:) = [180, gain(Etheta, peak_power, P), gain(Ephi,
    peak_power, P)];
parfor theta=1:179
    [Etheta, Ephi] = Efields(theta*pi/180, pi-pi/1000, dMat, P);
    Gphi0(theta+181,:) = [theta+180, gain(Etheta, peak_power, P),
        gain(Ephi, peak_power, P)];
end
[~, Ephi] = Efields(90*pi/180+pi/1000, pi/1000, dMat, P);
Gphi0(91,3) = gain(Ephi, peak_power, P);
[~, Ephi] = Efields(90*pi/180+pi/1000, pi-pi/1000, dMat, P);
Gphi0(271,3) = gain(Ephi, peak_power, P);

%theta = 90 plane
Gtheta90 = zeros(361, 3);
parfor phi=0:360
    [Etheta, Ephi] = Efields(pi/2-pi/1000, phi*pi/180, dMat, P);
    Gtheta90(phi+1,:) = [phi, gain(Etheta, peak_power, P), gain(Ephi,
        peak_power, P)];
end
[~, Ephi] = Efields(pi/2-pi/1000, pi/1000, dMat, P);
Gtheta90(1,3) = gain(Ephi, peak_power, P);
[~, Ephi] = Efields(pi/2-pi/1000, 180*pi/180+pi/1000, dMat, P);
Gtheta90(181,3) = gain(Ephi, peak_power, P);
Gtheta90(361,3) = Gtheta90(1,3);

%convert to db scale
Gphi0_db = Gphi0;
Gphi0_db(:,2) = 10*log10(Gphi0_db(:,2));
Gphi0_db(:,3) = 10*log10(Gphi0_db(:,3));

Gtheta90_db = Gtheta90;
Gtheta90_db(:,2) = 10*log10(Gtheta90_db(:,2));
Gtheta90_db(:,3) = 10*log10(Gtheta90_db(:,3));

figure('Name','gain_theta@phi=0'); polarpattern(Gphi0_db(:,1),
    Gphi0_db(:,2), TitleTopTextInterpreter="tex", TitleTop = "E_{\
theta} @ \phi=0"+char(176))
figure('Name','gain_phi@phi=0'); polarpattern(Gphi0_db(:,1),
    Gphi0_db(:,3), TitleTopTextInterpreter="tex", TitleTop = "E_{\
phi} @ \phi=0"+char(176))

```

```
figure('Name','gain_theta@theta=90'); polarpattern(Gtheta90_db(:,1)
    , Gtheta90_db(:,2), TitleTopTextInterpreter="tex", TitleTop = "
    E_{\theta} @ \theta=90"+char(176))
figure('Name','gain_phi@theta=90'); polarpattern(Gtheta90_db(:,1),
    Gtheta90_db(:,3), TitleTopTextInterpreter="tex", TitleTop = "E_
    {\phi} @ \theta=90"+char(176))
end
```

# 4

## RESULTADOS

Neste capítulo, os resultados obtidos através do Método dos Momentos são apresentados. Como referência, são utilizados 2 modelos no HFSS [24], um com alimentação por cabo coaxial e outro por fita de corrente, assim como utilizado neste trabalho. Nota-se que o *HFSS* utiliza o método numérico Método dos Elementos Finitos (FEM em inglês). A seguinte imagem mostra a antena embutida no HFSS, onde a região destacada em verde claro é a cavidade no corpo do cilindro que está preenchida por um dielétrico representado pela cor azul e as superfícies condutoras perfeitas são representadas pela cor verde musgo.

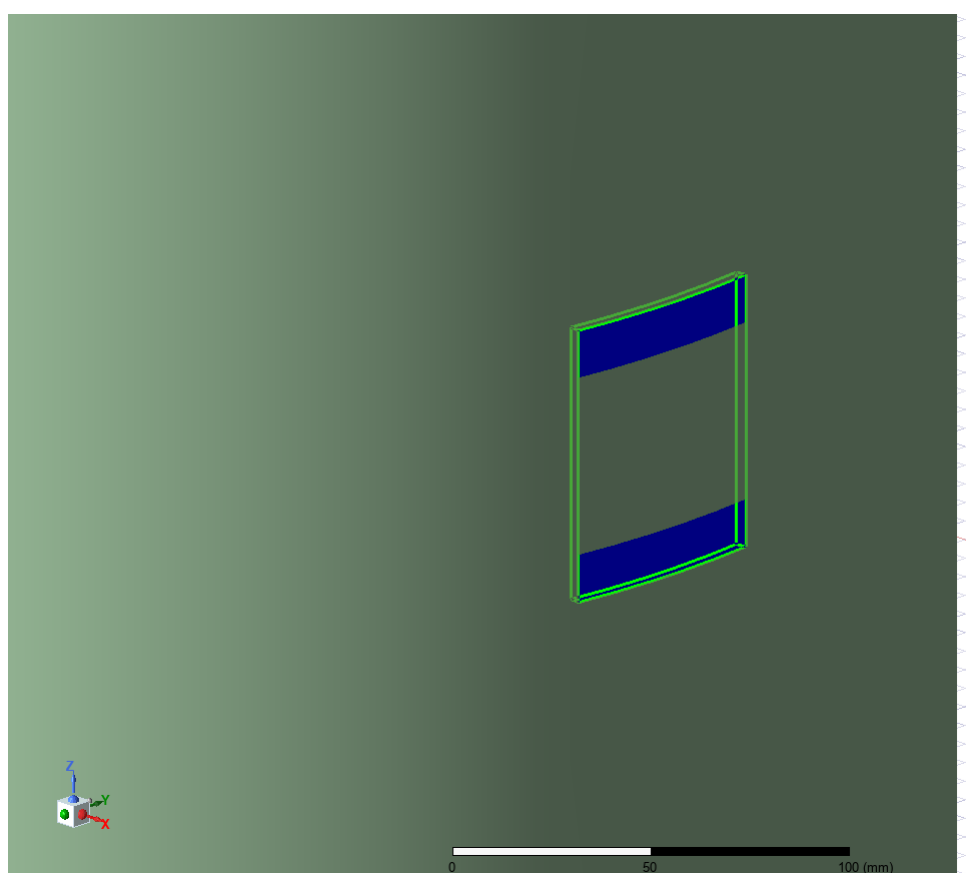


Figura 16: Antena cilíndrica embutida no HFSS.

As dimensões utilizadas nos modelos do MoM e HFSS estão dispostas na Tabela 2:

Parâmetro	Valor	Unidade
$a$	250	mm
$b$	253,048	mm
$z_1$	-36,59	mm
$z_2$	36,59	mm
$\phi_1$	-6,8182	grau
$\phi_2$	6,8182	grau
$z_{1a}$	-23,68	mm
$z_{2a}$	23,68	mm
$z_f$	6,05	mm
$\phi_f$	0	grau
$W_f$	4	mm

Tabela 2: Dimensões da antena

O dielétrico utilizado tem permissividade relativa 2.55 com tangente de perdas 0.0022.

Além disso, os modelos do HFSS precisam de alguns parâmetros extras. O cilindro condutor possui altura de 500 mm e o cabo coaxial possui as seguintes dimensões:

Parâmetro	Valor	Unidade
$fer$	2.05	mm
$fir$	0.65	mm
$fl$	20	mm

Tabela 3: Dimensões do cabo coaxial

Onde  $fer$  é o raio do dielétrico,  $fir$  é o raio do condutor e  $fl$  o comprimento do cabo. O dielétrico do cabo possui permissividade relativa 1,9 e tangente de perdas 0,001.

O comprimento do cabo é relevante na simulação, já que a porta de excitação (*wave port*) precisa estar longe o suficiente de descontinuidades para que modos não propagantes tenham espaço para serem devidamente atenuados. O manual do HFSS edição 2005 [35] sugere utilizar uma distância de pelo menos 1/8 do comprimento de onda, o que para 2,4 GHz é 16 mm. Vale notar que a versão mais atual do manual [36] não sugere um valor, mas sim, fornece um procedimento para determinar a distância da porta para a descontinuidade.

Os raios internos e externos do cabo coaxial são baseados na norma MIL-STD-348 [37], que define o diâmetro máximo do condutor interno como 1,3 mm. Para o condutor externo foi utilizado o valor de 4,1 mm fornecido na especificação do conector SMA modelo 3005 do fabricante KLC [38].

O dielétrico utilizado é baseado no material Teflon disponível na biblioteca de materiais do HFSS 2024R2, porém com a permissividade relativa alterada de 2,1 para 1,9 para que o cabo coaxial tenha impedância de 50  $\Omega$  para as dimensões utilizadas. A impedância do cabo coaxial pode ser calculada pela equação (2.7) e tabela 2.1 de Pozar [23]:

$$\begin{cases} Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \\ L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \\ C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln \frac{b}{a}} \\ G = \frac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln \frac{b}{a}} \end{cases} \quad (4.1)$$

Para um bom condutor, podemos assumir  $R \ll j\omega L$ , portanto, no numerador fica apenas o termo em  $L$ .  $\epsilon'$  é a permissividade relativa enquanto  $\epsilon''$  é a permissividade relativa multiplicada pela tangente de perdas. Substituindo as dimensões do cabo coaxial e as propriedades elétricas do dielétrico nas equações, obtemos  $Z_0 \approx 50 + 0.025i \, \Omega$ .

A Figura 17 mostra a cavidade e o cabo coaxial em perfil.

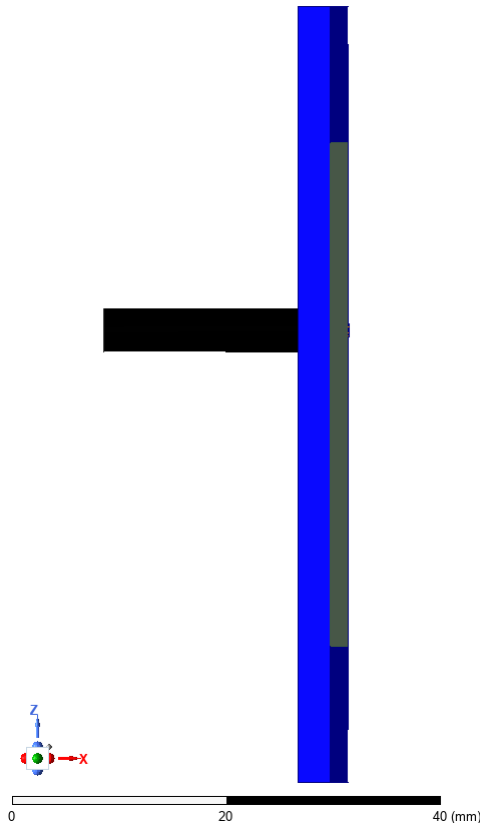


Figura 17: Cavidade cilíndrica e cabo coaxial em perfil

## 4.1 Impedância de entrada do MoM em diferentes parametrizações

A precisão da computação é controlada pelos parâmetros  $M_{max}$ ,  $P_{max}$ ,  $n_{Max}$ ,  $q_{Max}$  e  $NK_z$ . A escolha desses parâmetros é crucial para a obtenção de bons resultados e impacta significativamente no



tempo de execução do MoM. Convém recordar a finalidade desses parâmetros.  $M_{max}$  e  $P_{max}$  controlam a discretização utilizada pela função de base e teste do MoM, onde  $M_{max}$  controla a quantidade de harmônicos da função e  $P_{max}$  a quantidade de segmentos em que a corrente é discretizada.  $n_{Max}$  e  $q_{Max}$  controlam os limites superiores de somatórios infinitos, por exemplo, os somatórios da equação (2.173) implementada por 3.23. Já  $NK_z$  é utilizado para controlar o limite da integral na equação (2.136) implementada por 3.7.

A seguir, são apresentados os resultados para a impedância de entrada da antena variando esses parâmetros. Todos os gráficos vão de 2.2 GHz a 2.6 GHz com variação de 1 MHz, totalizando 401 amostras.

#### 4.1.1 Variando $P_{max}$

A seguinte imagem mostra a impedância de entrada da antena para diferentes valores de  $P_{max}$ , onde  $M_{max} = 1$ , e o valor dos demais parâmetros é 50.

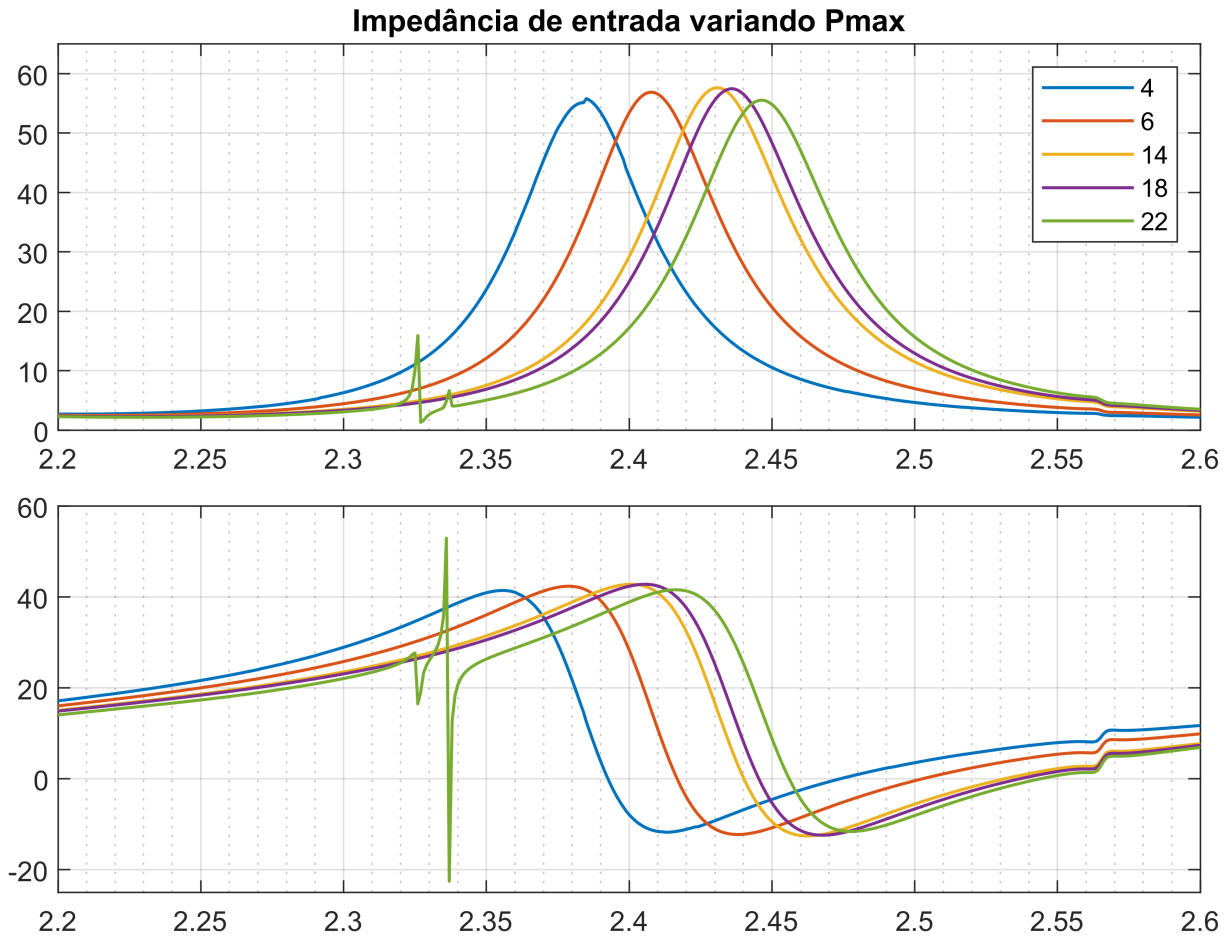


Figura 18: Impedância de Entrada variando o valor de  $P_{max}$

Analisando o gráfico, vemos que para pequenos valores de  $P_{max}$ , incrementos pequenos têm mudanças grandes na impedância de entrada, porém para valores maiores de  $P_{max}$ , a mudança é bem menor, o que indica que o resultado está convergindo.

Contudo, nota-se que para  $P_{max} = 22$  o gráfico possui anomalias. Esse comportamento é

esperado, e não um defeito do Método dos Momentos ou do código, mas sim uma limitação computacional a respeito dos somatórios e integrais com intervalo infinito, visto que é impossível computar o valor exato de tais expressões. Conforme o número de funções de base aumenta, o espaço coberto por cada uma delas diminui e são necessárias mais componentes da equação (2.136), o que equivale a harmônicos de maior frequência.

Conforme explicado nas Seções 3.23, 3.6 e 3.7, os parâmetros  $nMax$  e  $qMax$  controlam o limite de somatórios infinitos, enquanto  $Nkz$  controla o limite de uma integral infinita. Sendo assim, se aumentarmos esses valores, espera-se que a anomalia desapareça. Sendo assim, o seguinte gráfico mostra a configuração M1P22 ( $Mmax = 1$  e  $Pmax = 22$ ) com  $nMax$ ,  $qMax$  e  $Nkz$  iguais a 50, comparada com  $nMax$ ,  $qMax$  e  $Nkz$  iguais a 100:

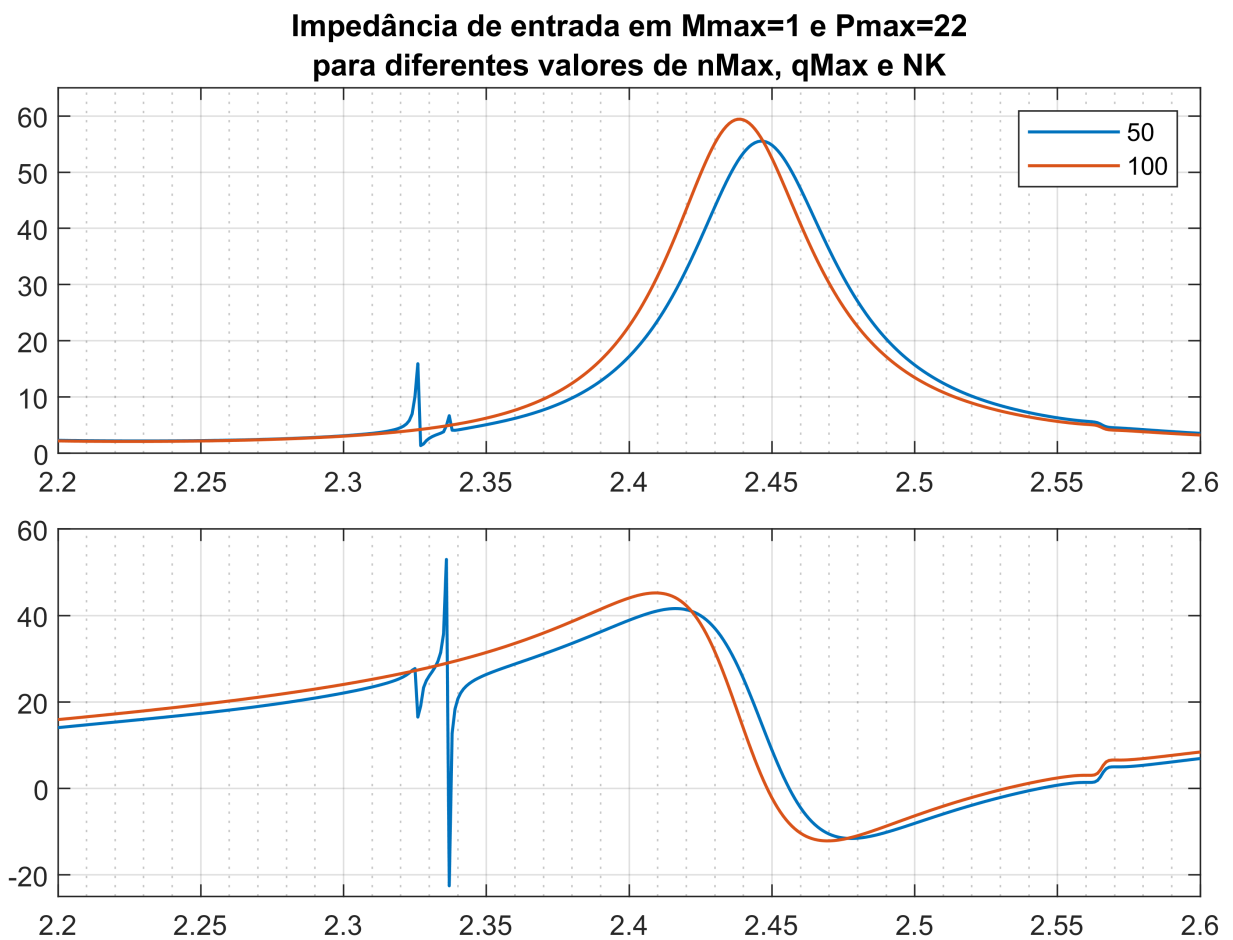


Figura 19: Impedância de entrada de M1P22 para diferentes valores de  $nMax$ ,  $qMax$  e  $NKz$

Com o aumento dos parâmetros  $nMax$ ,  $qMax$  e  $Nkz$  a anomalia desaparece e a amplitude e frequência do pico da impedância voltam para a região esperada.

#### 4.1.2 Variando $Mmax$

A seguinte imagem mostra a impedância de entrada da antena para diferentes valores de  $Mmax$ , onde  $Pmax = 18$ , e o valor dos demais parâmetros é 50.

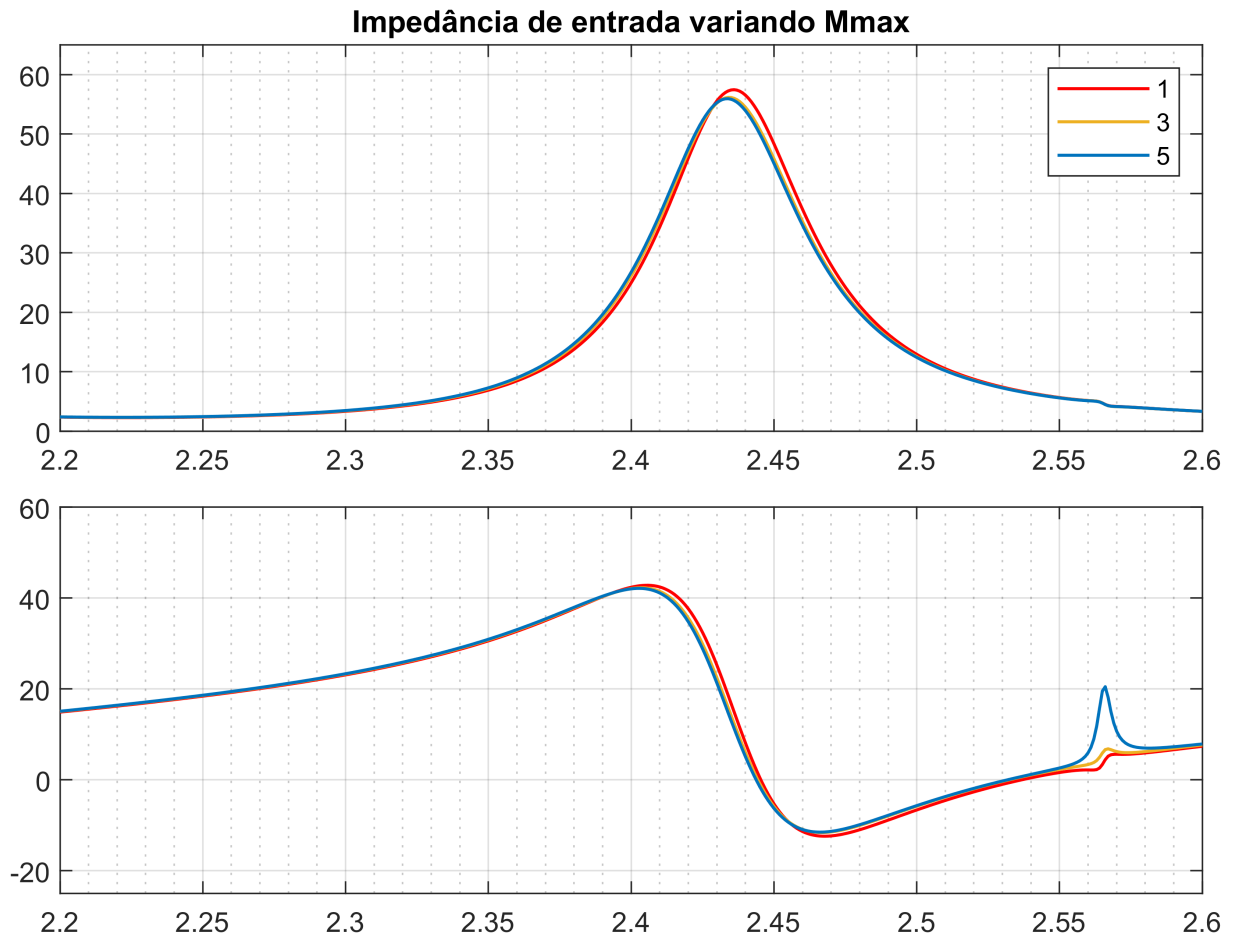


Figura 20: Impedância de Entrada variando o valor de  $M_{max}$

Ao contrário de  $P_{max}$ , o valor de  $M_{max}$  não tem muita influência na impedância de entrada. Além disso, próximo de 2.56 GHz percebe-se um pico secundário no gráfico. Em teoria, os termos de ressonância criados pelo fechamento da cavidade ao aplicar o princípio da equivalência deveriam se cancelar perfeitamente, deixando o gráfico suave. Porém, devido a erros de precisão numérica, isso não acontece. Para  $M_{max} = 5$ , o pico secundário é bastante notável em comparação com os demais valores.

#### 4.1.3 Variando $NK_z$

A seguinte imagem mostra a impedância de entrada da antena para diferentes valores de  $NK_z$ , onde  $M_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 18$  e os demais parâmetros são iguais a 50.

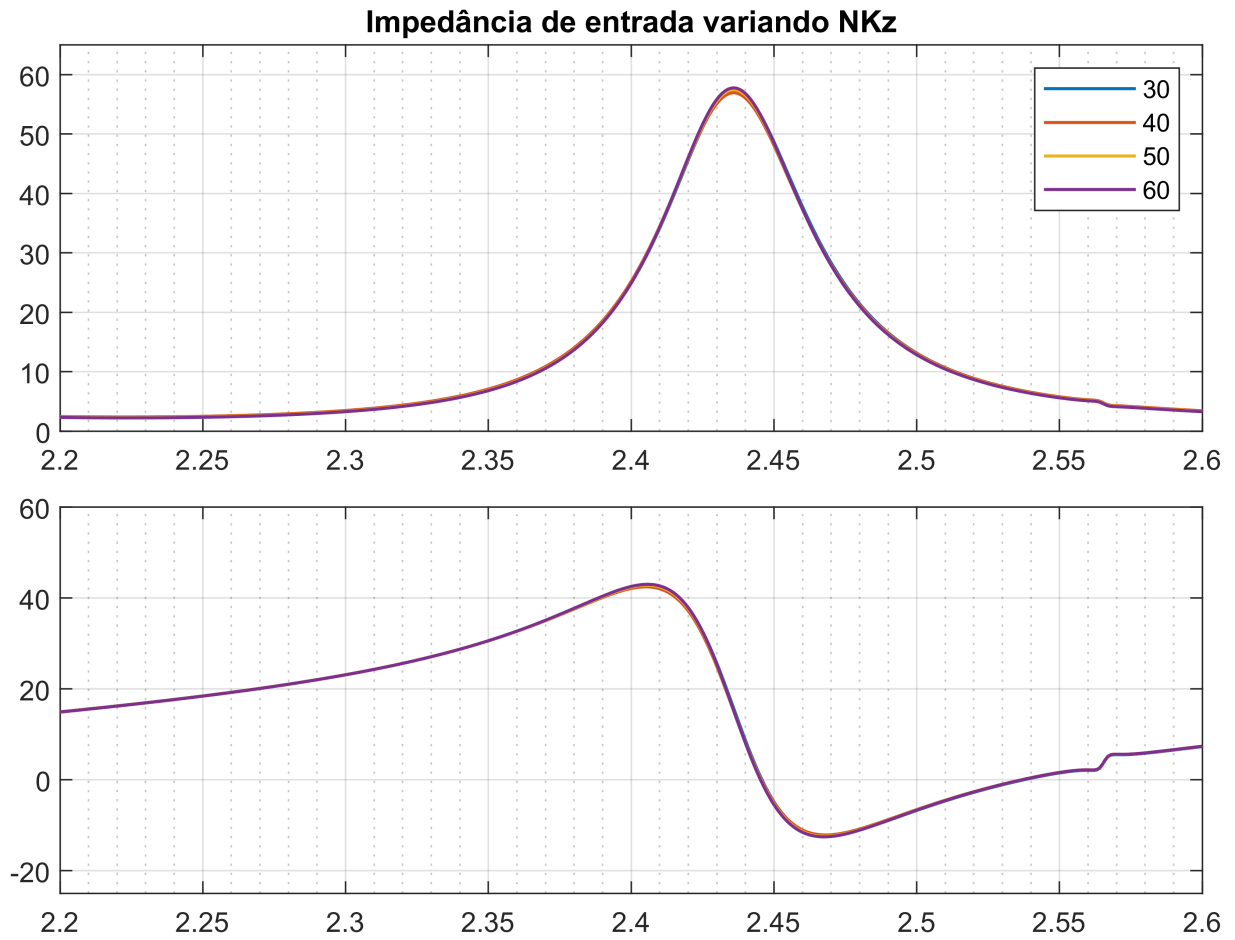


Figura 21: Impedância de Entrada variando o valor de  $NKz$

Vemos que  $NKz$  tem pouca influência na impedância de entrada e que o resultado converge.

#### 4.1.4 Variando $qMax$

A seguinte imagem mostra a impedância de entrada da antena para diferentes valores de  $qMax$ , onde  $Mmax = 1$ ,  $Pmax = 18$  e os demais parâmetros são iguais a 50.

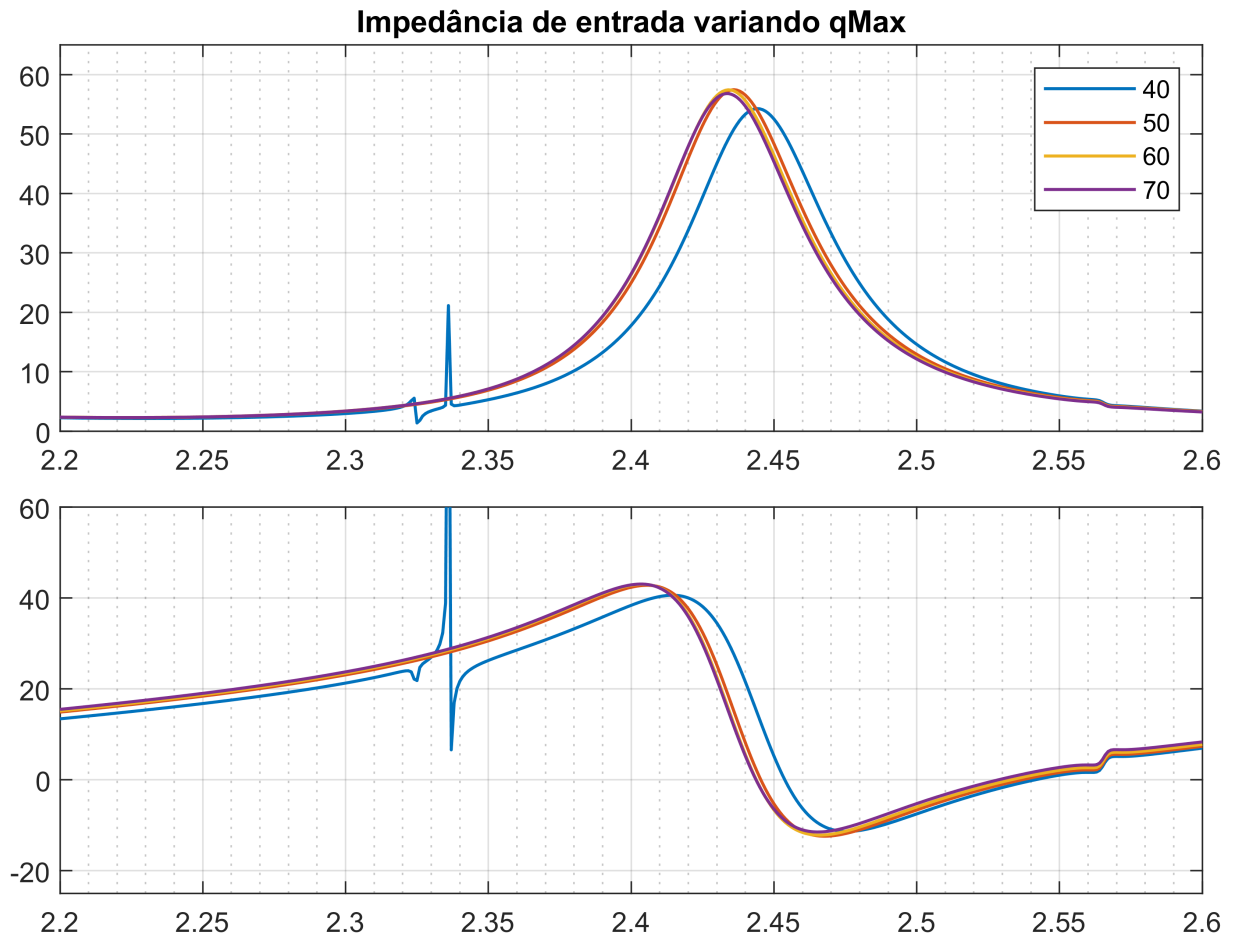


Figura 22: Impedância de Entrada variando o valor de  $q_{Max}$

Vemos que para valores baixos de  $q_{Max}$  aparecem anomalias nos resultados e, portanto, um valor mínimo adequado deve ser utilizado, nesse caso, 50. Satisfeita essa condição, o valor de  $q_{Max}$  não influencia muito a impedância de entrada, e vemos que os resultados convergem.

#### 4.1.5 Variando $n_{Max}$

A seguinte imagem mostra a impedância de entrada da antena para diferentes valores de  $n_{Max}$ , onde  $M_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 18$  e os demais parâmetros são iguais a 50.

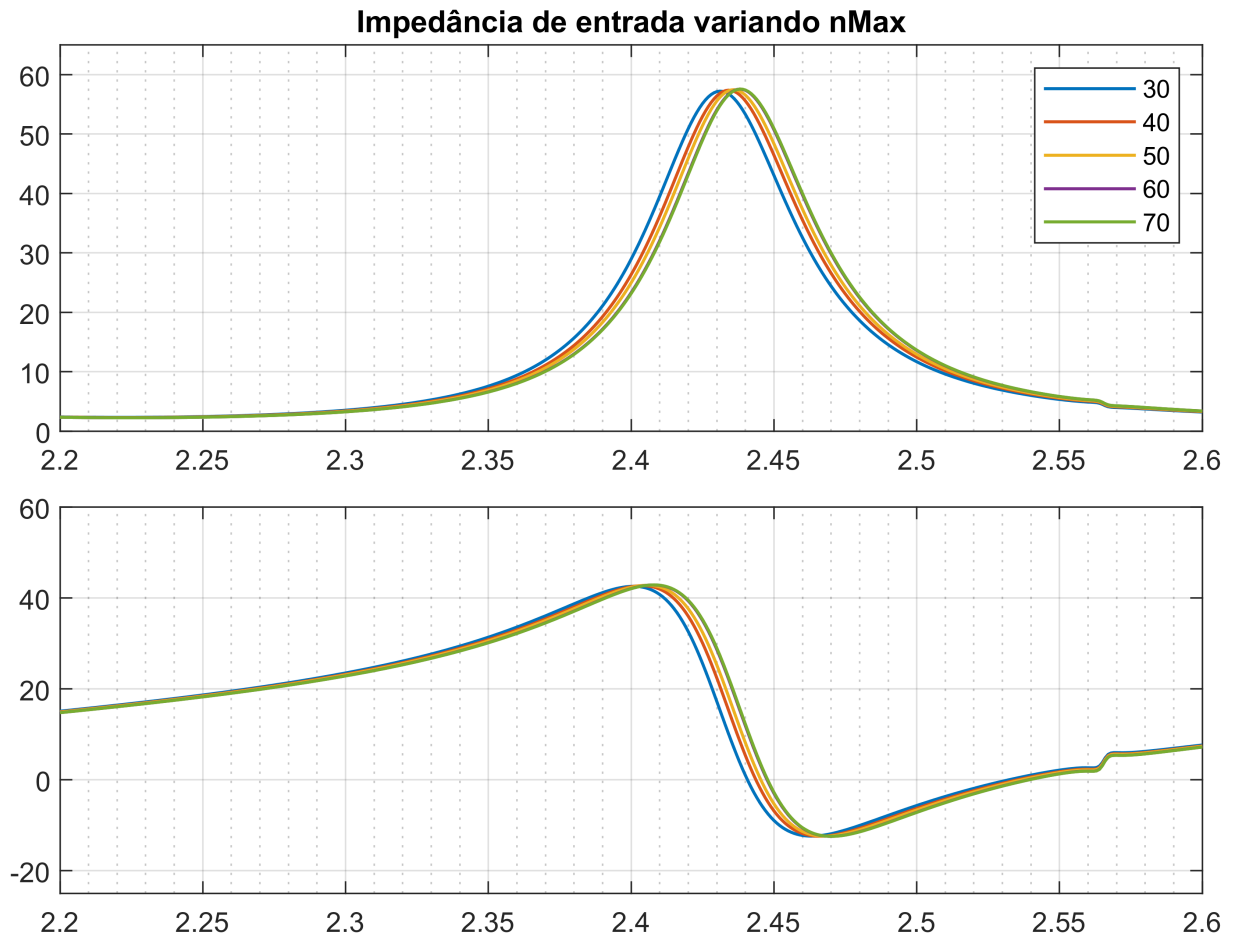


Figura 23: Impedância de Entrada variando o valor de  $nMax$

Vemos que  $nMax$  influencia ligeiramente na posição da impedância e que o resultado converge, tanto que a curva para 70 se sobrepõe à de 60.

## 4.2 Impedância de entrada do MoM e dos modelos do HFSS

A seguinte imagem mostra a impedância de entrada dos dois modelos do HFSS e do MoM. Para o MoM foram utilizados  $Mmax = 1$ ,  $Pmax = 18$  e os demais parâmetros em 50. Essa escolha de parâmetros se mostrou um bom compromisso entre acurácia e tempo de execução, o que será abordado na Sessão 4.4. O modelo *HFSS\_probe* é a antena com alimentação por cabo coaxial e *HFSS\_strip* é a antena com alimentação por fita de corrente.

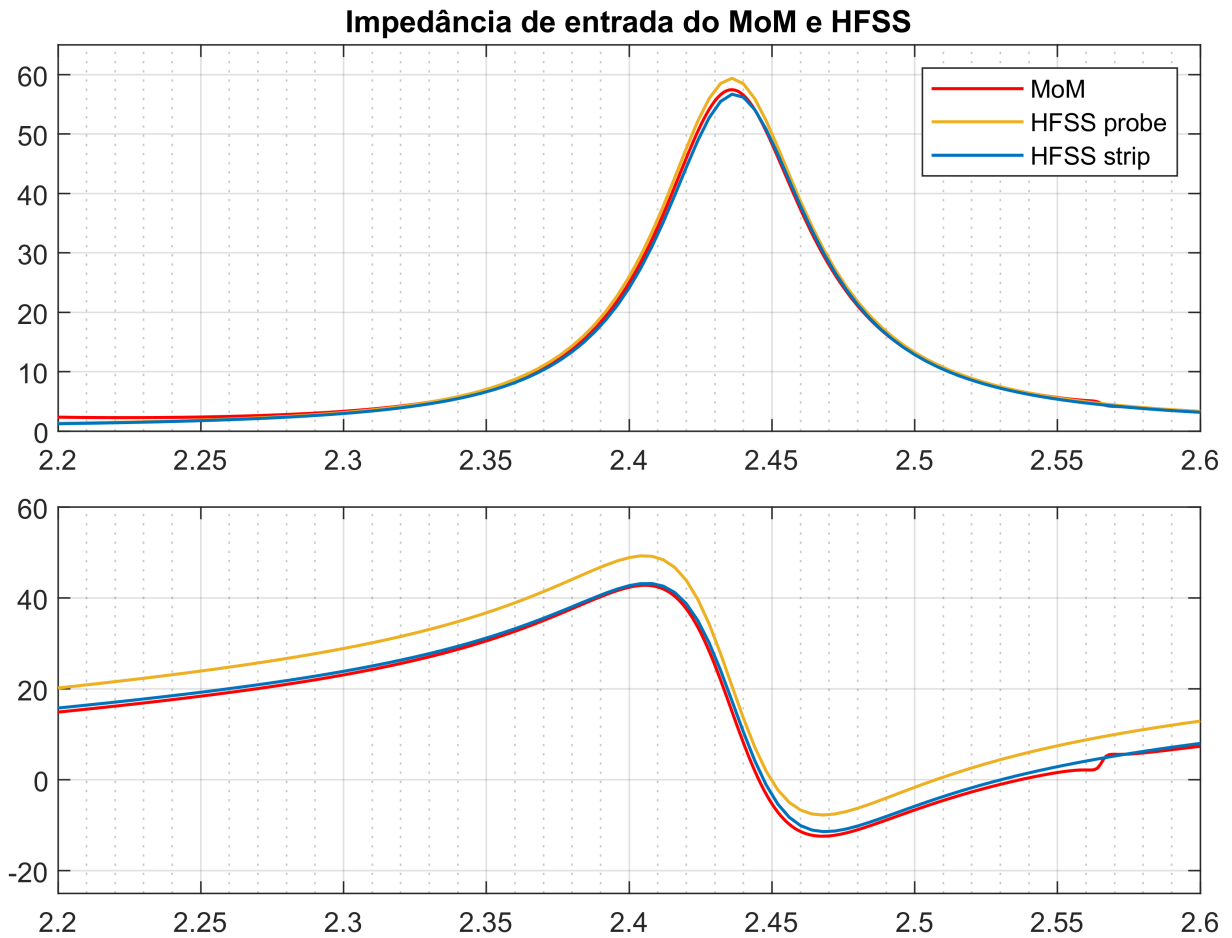


Figura 24: Impedância de Entrada do MoM comparada aos modelos do HFSS

Vemos que o MoM deu resultados comparáveis com o HFSS. Nota-se que a resistência do MoM se assemelha mais à resistência do modelo com alimentação via cabo coaxial (*HFSS\_probe*), enquanto a reatância se assemelha mais ao modelo com alimentação por fita condutora (*HFSS\_strip*). Isso mostra que há espaço para melhoria no método adotado de modelagem da alimentação da antena.

Podemos observar que a curva da reatância cruza o zero numa frequência próxima ao pico da resistência. Isso indica que a reatância está sob controle, o que é uma propriedade esperada das antenas híbridas, e que ela se comporta como uma antena de substrato fino [15].

### 4.3 Diagramas de radiação do MoM e dos modelos do HFSS

A seguir são apresentados os diagramas de radiação da antena analisada em 2.435 GHz, que é a frequência do pico da parte real da impedância na configuração  $M_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 18$  e demais parâmetros em 50.

Os gráficos mostram o ganho da antena em uma escala de  $-50$  a  $10$  dB a fim de poder observar a componente  $\phi$  do ganho na mesma escala que a componente  $\theta$ , mesmo que medições com uma faixa dinâmica de mais de 30 dB dificilmente sejam acuradas.

Nota-se que a equação para o ganho (na realidade são as equações do campo elétrico) obtida a partir do MoM possui singularidades em alguns pontos, como abordado em 3.27. Nesses ângulos, um

valor angular próximo ( $\delta = \pi/1000$ ) é utilizado ao computar o ganho. Para  $\phi = 0^\circ$ , as singularidades ocorrem em ambas as componentes quando  $\theta$  é um múltiplo inteiro de  $\pi$  e ocorrem em múltiplos inteiros de  $\pi/2$  apenas na componente  $\phi$ . Já em  $\theta = 90^\circ$ , as singularidades ocorrem apenas na componente  $\phi$  quando  $\phi$  é múltiplo inteiro de  $\pi$ .

### 4.3.1 Componentes $\theta$ e $\phi$ do ganho

Os seguintes gráficos mostram o ganho do MoM e HFSS separados nas componentes  $\theta$  e  $\phi$  em  $\theta = 90^\circ$  e  $\phi = 0^\circ$ , respectivamente.

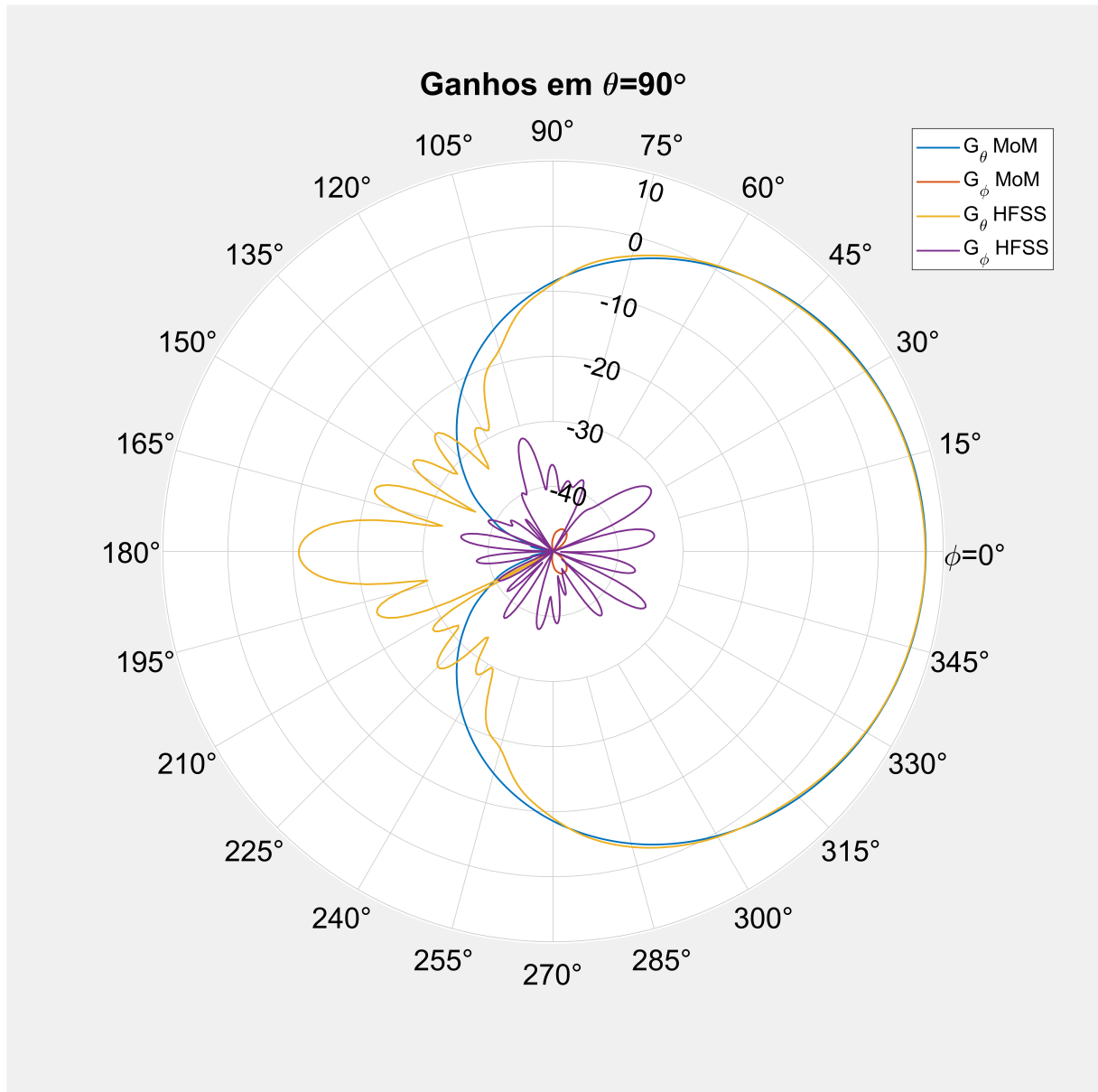


Figura 25: Componentes  $\theta$  e  $\phi$  do ganho do MoM comparado ao HFSS em  $\theta = 90^\circ$



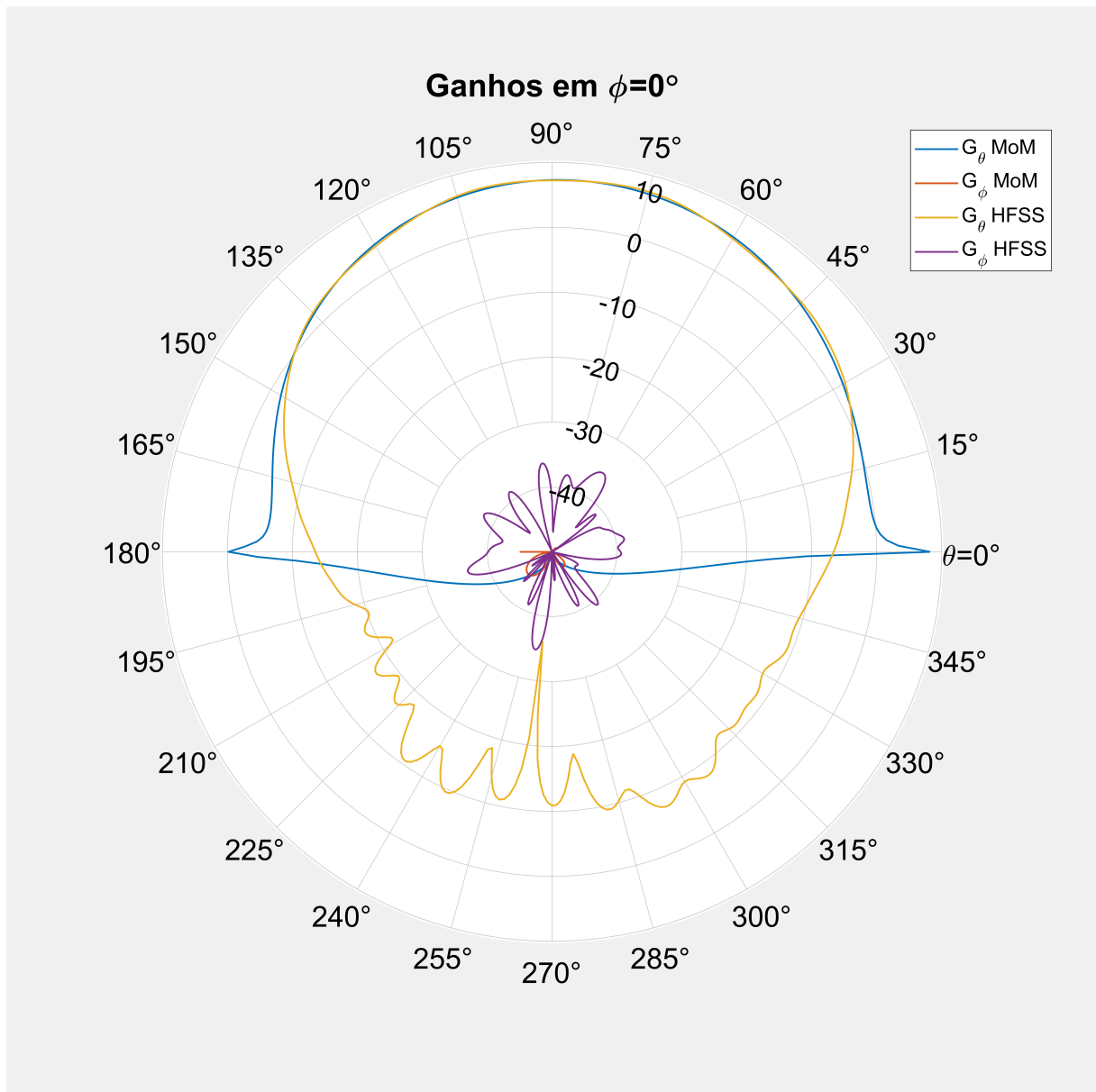


Figura 26: Componentes  $\theta$  e  $\phi$  do ganho do MoM comparado ao HFSS em  $\phi = 0^\circ$

Percebe-se que a componente  $\phi$  do ganho é extremamente pequena em relação à componente  $\theta$  e nem o HFSS nem o MoM são capazes de computar essa componente com acurácia, sendo o mais importante o fato de que o ganho é muito pequeno. Isso demonstra que a antena, de fato, possui baixa polarização cruzada.

Já na componente  $\theta$ , a correspondência entre o MoM e o HFSS é excelente na parte frontal da antena, enquanto na parte traseira, nota-se uma ausência de franjas no MoM. Isso se deve a um cilindro infinito ser utilizado no modelo do MoM, visto que não há bordas para o campo difratar e criar franjas na parte traseira da antena. O efeito da altura do cilindro pode ser visto nos seguintes gráficos que mostram a componente  $\theta$  do ganho do HFSS para diferentes alturas.

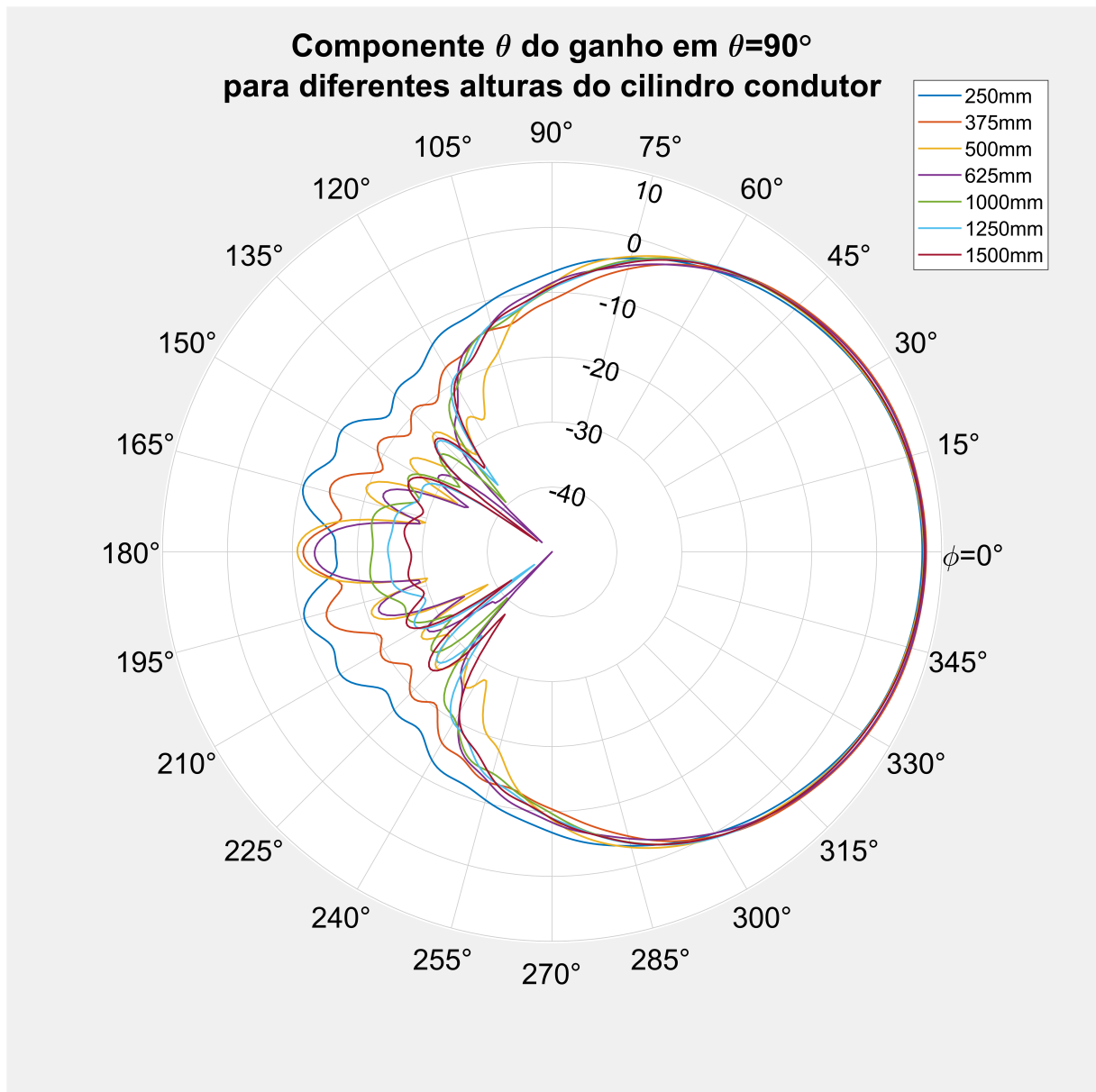


Figura 27: Componente  $\theta$  do ganho em  $\theta = 90^\circ$  para diferentes alturas do cilindro condutor

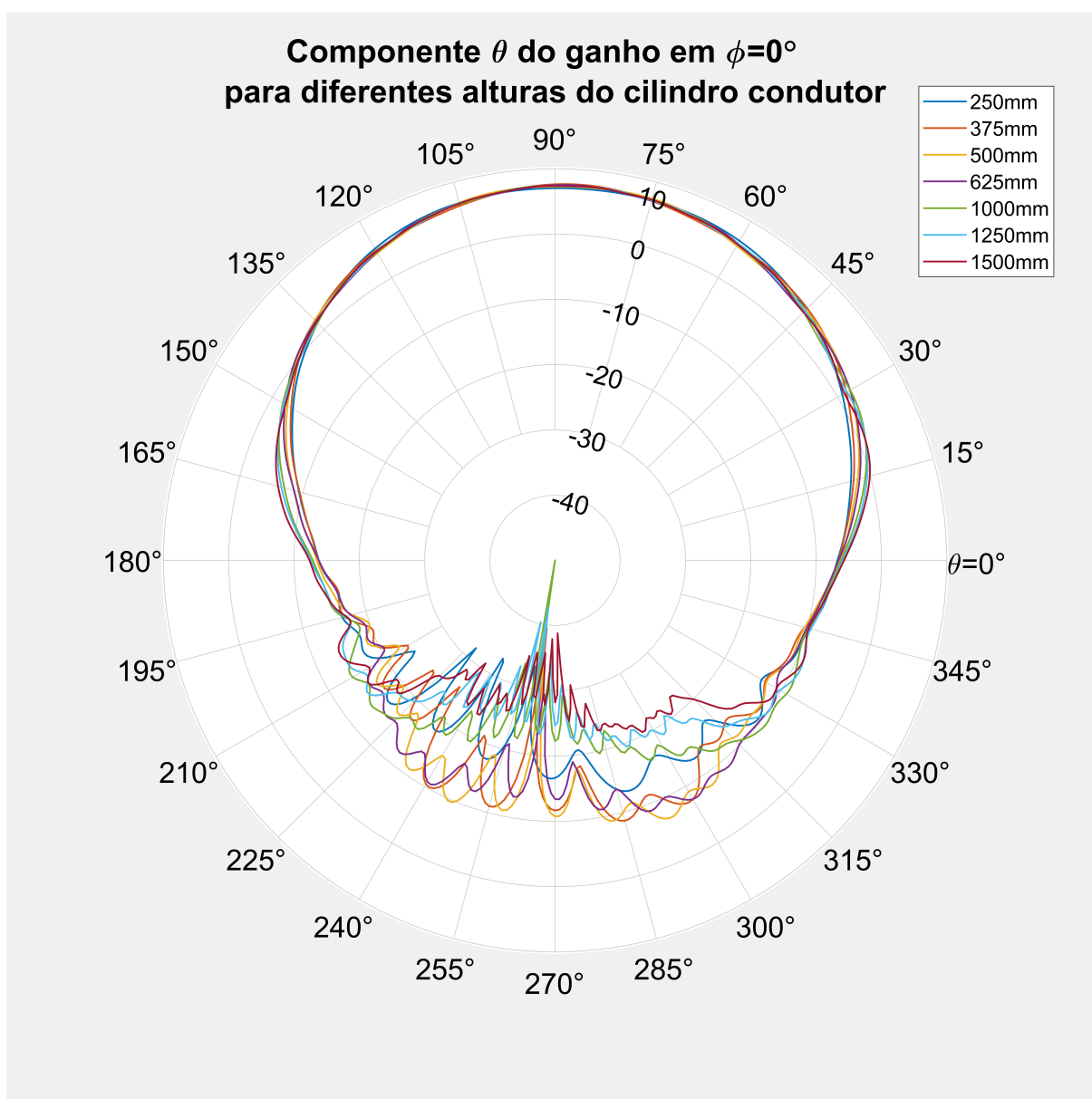


Figura 28: Componente  $\theta$  do ganho em  $\phi = 0^\circ$  para diferentes alturas do cilindro condutor

Podemos observar que, conforme a altura do cilindro aumenta, menor é o ganho na região traseira da antena.

### 4.3.2 Ganho total

Os seguintes gráficos mostram o ganho total do MoM e HFSS em  $\theta = 90^\circ$  e  $\phi = 0^\circ$ , respectivamente. Lembrando que o ganho total é a soma das componentes  $\phi$  e  $\theta$  do ganho.

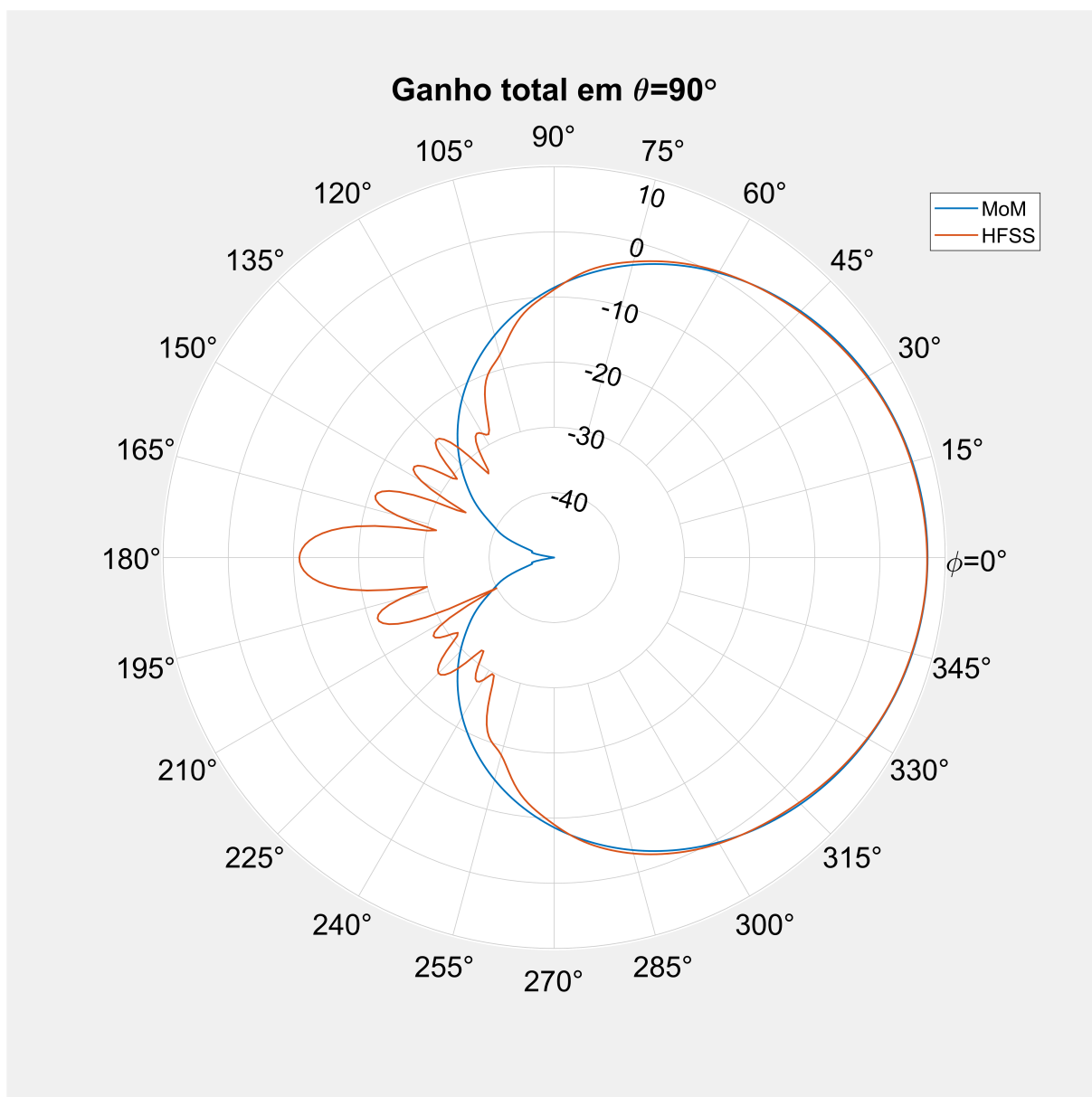


Figura 29: Ganho total do MoM comparado ao HFSS em  $\theta = 90^\circ$

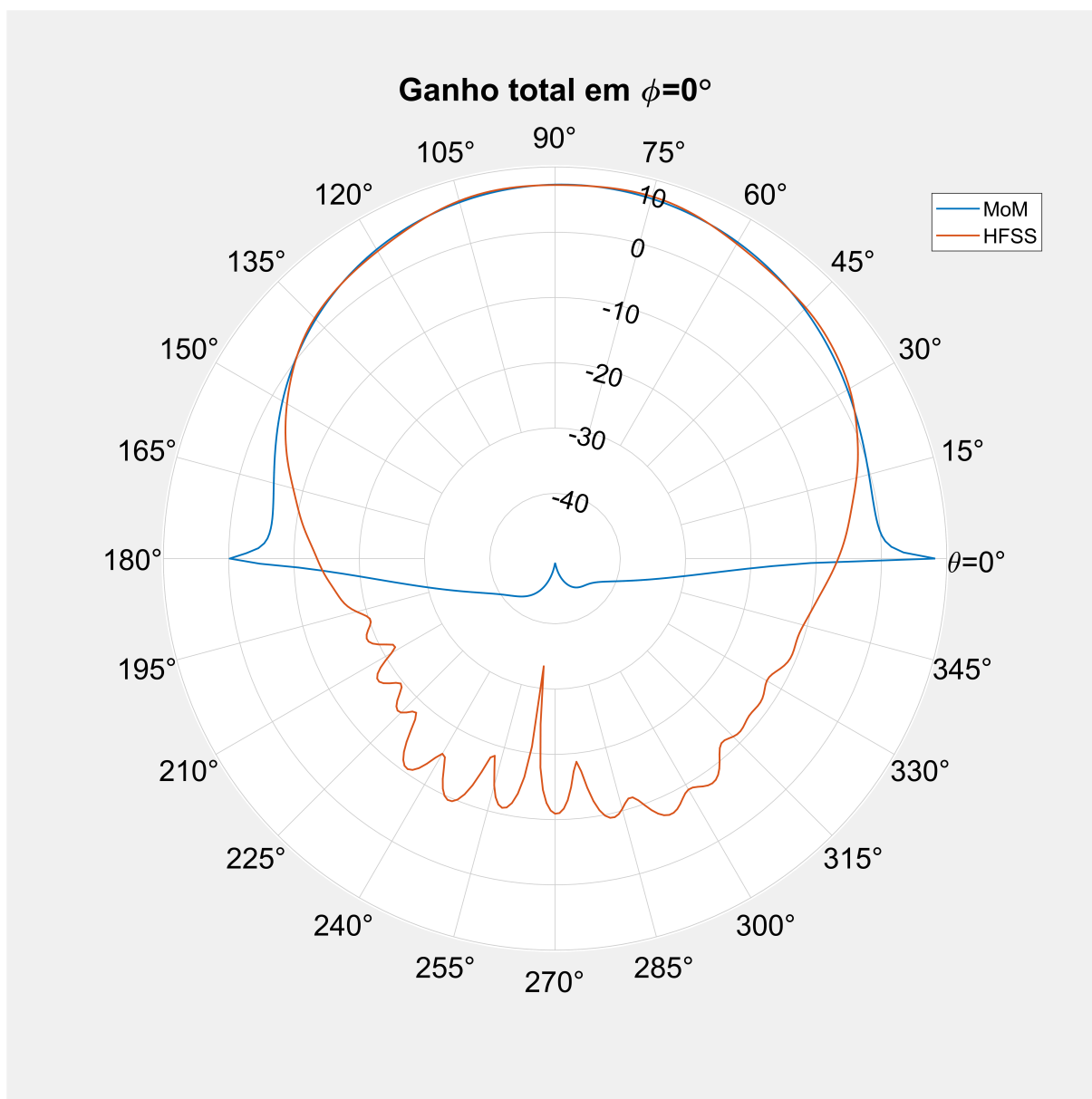


Figura 30: Ganho total do MoM comparado ao HFSS em  $\phi = 0^\circ$

Podemos ver que o ganho total é praticamente igual à componente  $\theta$  do ganho, o que reforça que a antena tem baixa polarização cruzada. Essa é uma propriedade muito interessante desse tipo de antena e o MoM é capaz de capturar esse fenômeno.

## 4.4 Tempo de execução

Um ponto importante a se considerar é o tempo de execução do MoM para diferentes parâmetros. O computador utilizado para executar o MoM e o HFSS foi o mesmo e possui a seguinte configuração:

- Sistema operacional Windows 10
- Processador Intel Core i7-7700 CPU @ 3,60 GHz

- 16 Gb de RAM DDR4 @ 2400 MHz
- Matlab R2022b e HFSS 2019 R1

A seguinte imagem mostra o tempo de execução dos modelos do HFSS com alimentação por ponta de prova coaxial e fita condutora comparados com o tempo de execução do MoM:

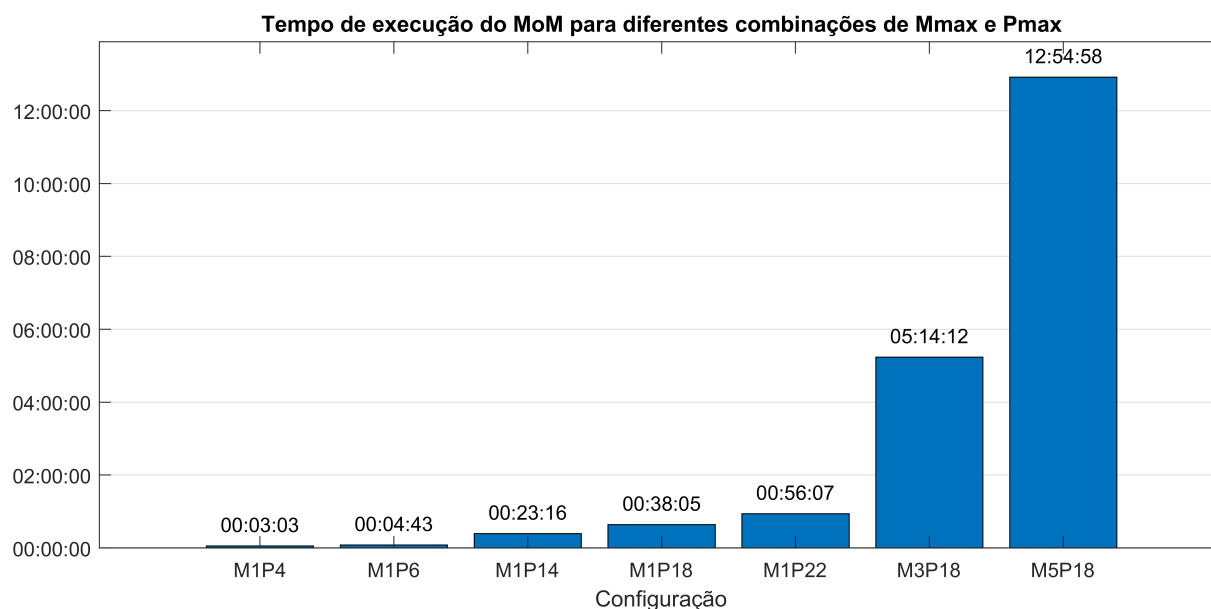


Figura 31: Tempo de execução do MoM comparado com o HFSS

O tempo de execução do software desenvolvido utilizando o MoM foi substancialmente menor que o do HFSS. Claro que assim como no HFSS há vários parâmetros que podem ser alterados para trocar precisão por tempo, aqui é exatamente igual. As próximas figuras mostram como alterar os parâmetros de precisão impacta no tempo de execução.

A seguinte imagem mostra o tempo de execução para diferentes valores de  $P_{max}$  e  $M_{max}$  com os demais parâmetros em 50.

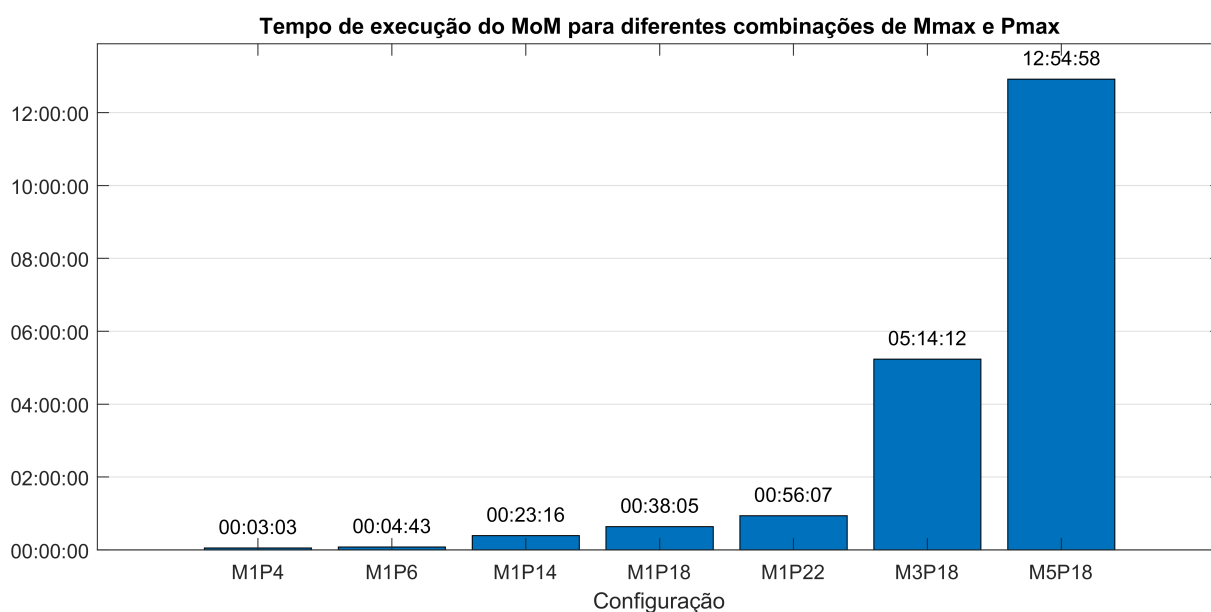


Figura 32: Tempo de execução do MoM para diferentes combinações de  $M_{max}$  e  $P_{max}$

Observa-se que o tempo não aumenta de forma linear, portanto, levando em conta os resultados obtidos de impedância de entrada, é mais apropriado utilizar uma configuração com  $M_{max} = 1$  e  $P_{max} = 14$  ou 18, por exemplo, a configuração *M1P18* ( $M_{max} = 1$  e  $P_{max} = 18$ ).

A seguinte imagem mostra o tempo de execução para diferentes valores de  $n_{Max}$ , onde  $M_{max} = 1$  e  $P_{max} = 18$  e os demais parâmetros valem 50.

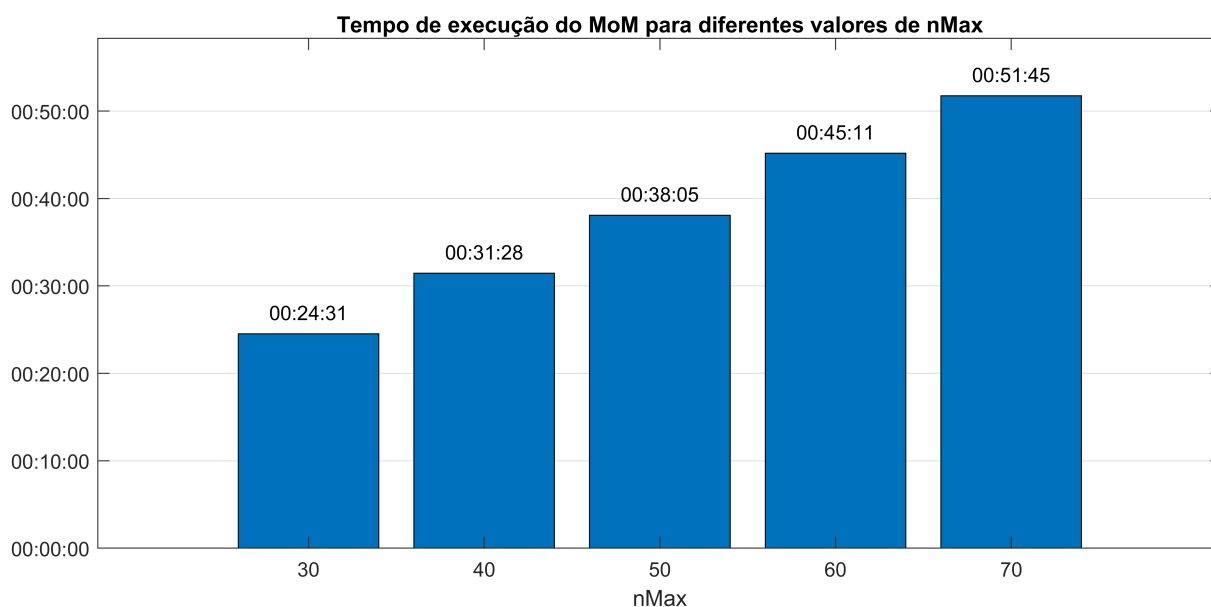


Figura 33: Tempo de execução do MoM para diferentes valores de  $n_{Max}$

Vemos que o tempo aumenta de forma aproximadamente linear ao aumentar  $n_{Max}$ . A impedância de entrada varia ligeiramente ao aumentar esse parâmetro, mas a diferença não é muito significativa, então o aumento de tempo não justifica aumentar muito o valor de  $n_{Max}$ , sendo um valor de 50 suficiente.

A seguinte imagem mostra o tempo de execução para diferentes valores de  $NKz$ , onde  $M_{max} = 1$  e  $P_{max} = 18$  e os demais parâmetros valem 50.

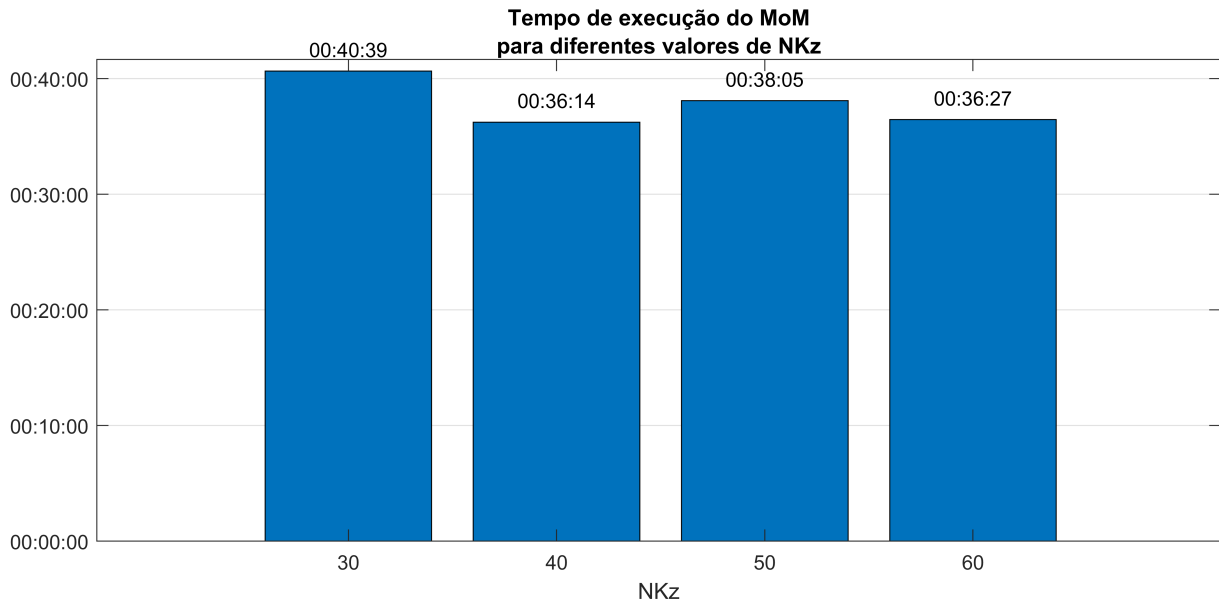


Figura 34: Tempo de execução do MoM para diferentes valores de  $NKz$

A primeira vista, parece contraintuitivo que o tempo de execução não esteja estritamente aumentando conforme o intervalo de integração aumenta, porém, levando em conta como o algoritmo de integração funciona, i.e. quadratura adaptativa de Gauss-Kronrod [39], percebe-se que ele apresenta um comportamento caótico, já que uma pequena mudança no intervalo pode mudar completamente a forma com que os intervalos de integração serão divididos, e a complexidade temporal de calcular cada um deles. No geral, pode-se esperar que o tempo de execução muda de forma significativa quando a quantidade de subdivisões que o algoritmo precisa fazer também muda, caso contrário, o tempo é aproximadamente constante. Como a diferença na impedância ao variar  $NKz$  é muito pequena, e podemos considerar o tempo constante, a escolha de  $NKz$  não é muito relevante para o tempo de execução no intervalo investigado.

A seguinte imagem mostra o tempo de execução para diferentes valores de  $qMax$ , onde  $M_{max} = 1$  e  $P_{max} = 18$  e os demais parâmetros valem 50.



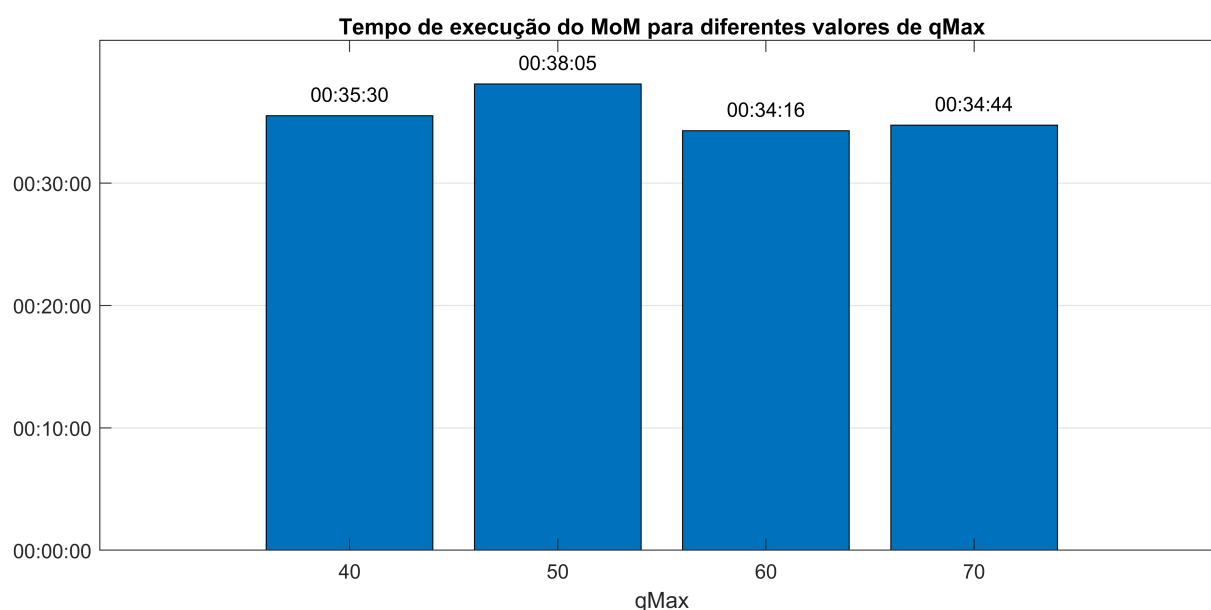


Figura 35: Tempo de execução do MoM para diferentes valores de  $qMax$

Os somatórios controlados pelo parâmetro  $qMax$  são relativamente rápidos de computar ao se comparar com o somatório da equação (2.136), devido à integral. Sendo assim, aumentar esse parâmetro influencia pouco no tempo de execução, logo, recomenda-se utilizar o mesmo valor de  $nMax$  para evitar desbalancear a matriz de impedância. Nota-se que para  $qMax=40$  o tempo de execução é aproximadamente a metade dos demais valores, mas dado que para esse caso a impedância possui anomalias, o tempo de execução ser menor é irrelevante.

# 5

## CONCLUSÃO

O processo de analisar antenas com geometrias complexas é bastante trabalhoso. Não só é necessário um avançado conhecimento de eletromagnetismo e cálculo, mas, dada a complexidade das equações envolvidas, conhecimento de programação também é essencial para conseguir obter resultados relevantes de maneira rápida. Mesmo assim, todo esse trabalho é justificável, dadas as propriedades que tais antenas apresentam. Esse é o caso das antenas cilíndricas híbridas embutidas, que possuem as características de conformidade e baixo perfil das antenas de microfita cilíndricas [1], e baixa polarização cruzada e baixa reatância indutiva das antenas híbridas embutidas [14].

Foi com o propósito de analisar as antenas cilíndricas híbridas embutidas que este trabalho foi desenvolvido. O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento teórico de uma antena desse tipo e, através do Método dos Momentos [19] e outros métodos analíticos de eletromagnetismo, chega-se a um sistema linear e a equações para calcular os elementos desse sistema. Com isso, no Capítulo 3 é apresentado o programa desenvolvido em *Matlab* [40] que implementa tais equações e resolve o sistema, assim sendo possível computar o diagrama de radiação e a impedância de entrada da antena. Por fim, os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 4, onde é feita uma exploração de como os parâmetros do programa influenciam no tempo de execução e na acurácia dos resultados. Os resultados são validados comparando-os aos obtidos no software comercial *HFSS* [24], e podemos concluir que houve excelente compatibilidade entre os resultados deste trabalho e do *HFSS*.

### 5.1 Contribuições

As principais contribuições desta dissertação incluem:

- **Desenvolvimento de uma formulação teórica:** A pesquisa estabeleceu um arcabouço teórico para a análise de antenas cilíndricas híbridas embutidas.
- **Implementação numérica validada:** A ferramenta computacional desenvolvida e validada oferece um meio para caracterizar essas antenas. O código fonte pode ser acessado em <https://github.com/rma6/embedded-cylindrical-antenna-mom>.
- **Análise de características de desempenho:** O estudo permitiu a compreensão de aspectos como polarização cruzada e reatância indutiva, considerados no projeto e otimização de antenas.

## 5.2 Trabalhos Futuros

- **Automatização da escolha dos parâmetros de precisão:** Desenvolver algoritmos que permitam a escolha automática dos parâmetros  $M_{\max}$ ,  $P_{\max}$ ,  $n_{\max}$ ,  $q_{\max}$  e  $NK_z$ , buscando um equilíbrio entre a acurácia do resultado e o tempo computacional.
- **Determinação automática da faixa de operação da antena:** Implementar funcionalidades que permitam ao programa determinar, de forma autônoma, a faixa de frequência de operação da antena.
- **Expansão das características de análise da antena:** Integrar ao *software* o cálculo de outras características de desempenho da antena, como eficiência de radiação, largura de banda e ganho, para fornecer uma análise mais completa.
- **Avaliação de outras técnicas de integração:** Investigar e implementar o uso de outras técnicas de integração numérica, além da quadratura de Gauss-Kronrod adaptativa [39], para verificar a possibilidade de ganhos em termos de acurácia ou tempo de processamento.



## ANÁLISE ASSINTÓTICA DAS FUNÇÕES $\Theta_n$

As funções  $\Theta_n$  são combinações da função de Bessel do primeiro tipo e da função de Hankel, onde  $n$  define quais funções aparecem derivadas na equação. Particularmente, estamos interessados nas funções  $\Theta_1$ ,  $\Theta_3$ ,  $\Theta_5$  e  $\Theta_7$ , como definidas a seguir:

$$\Theta_1(n, q) = J'_v(k_\rho b)H_v^{(2)'}(k_\rho a) - J'_v(k_\rho a)H_v^{(2)'}(k_\rho b) \quad (\text{A.1})$$

$$\Theta_3(n, q) = J_v(k_\rho b)H_v^{(2)'}(k_\rho a) - J'_v(k_\rho a)H_v^{(2)}(k_\rho b) \quad (\text{A.2})$$

$$\Theta_5(n, q) = J_v(k_\rho b)H_v^{(2)}(k_\rho a) - J_v(k_\rho a)H_v^{(2)}(k_\rho b) \quad (\text{A.3})$$

$$\Theta_7(n, q) = J'_v(k_\rho b)H_v^{(2)}(k_\rho a) - J_v(k_\rho a)H_v^{(2)'}(k_\rho b) \quad (\text{A.4})$$

Onde  $v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$  e  $k_\rho = \sqrt{k^2 - \frac{q\pi^2}{L}}$ .  $k$  pode ser  $k_0$  ou  $k_d$  a depender da região na qual a função  $\Theta$  está sendo usada.

Nenhuma das funções  $\Theta_n$  pode ser computada diretamente, visto que elas não são bem comportadas para argumentos muito pequenos ou muito grandes. Por conta disso, faz-se necessário utilizar aproximações nessas regiões. No Apêndice D de Harrington [20], podemos encontrar as aproximações assintóticas para as funções de Bessel, e a partir delas derivar as aproximações das funções  $\Theta_n$ .

Para argumentos pequenos e ordem 0 [20] (D-9):

$$\begin{aligned} J_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{4} \rightarrow 1 \\ Y_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

E suas derivadas:

$$\begin{aligned} J'_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} \\ Y'_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Onde  $\gamma = 1.781$  é a constante de Euler-Mascheroni [20] (D-8) <sup>1</sup>.

Para argumentos pequenos e ordem diferente de 0 [20] (D-10):

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ N_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

E suas derivadas:

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\nu}{\nu!} \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu} \\ Y'_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\nu!}{\pi} \frac{2^\nu}{x^{\nu+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para argumentos grandes e  $\text{Re}(\nu) > 0$  e  $|\text{fase}(x)| < \pi$  [20] (D-11):

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \\ Y_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

E suas derivadas:

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \frac{1}{2x} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ Y'_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ -\frac{1}{2x} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Lembrando que a função de Hankel do segundo tipo é definida como [20] (D-12):

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - jY_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x)' &= J'_\nu(x) - jY'_\nu(x) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Agora, substituímos as expressões assintóticas nas definições das funções  $\Theta_n$ .

**Para argumento pequeno e ordem igual a 0:**

$$\Theta_1(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} j \frac{1}{\pi} \left[ \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$\Theta_3(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} -j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k_\rho a} + \frac{k_\rho a}{2} \ln\left(\frac{\gamma}{2} k_\rho b\right) \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\Theta_5(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{A.14})$$

$$\Theta_7(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k_\rho b} + \frac{k_\rho b}{2} \ln\left(\frac{\gamma}{2} k_\rho a\right) \right] \quad (\text{A.15})$$

**Para argumentos pequenos e ordem diferente de 0:**

<sup>1</sup>Na notação mais atual,  $\gamma = 0.577$ , e  $e^\gamma = 1.781$  porém no Harrington, ele utiliza  $\gamma$  diretamente como 1.781

$$\Theta_1(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} j \frac{v}{\pi} \frac{1}{k_\rho^2} \left[ -\frac{1}{a^2} \left( \frac{b}{a} \right)^{v-1} - \frac{1}{b^2} \left( \frac{a}{b} \right)^{v-1} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\Theta_3(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} -j \frac{v}{\pi k_\rho} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{b}{a} \right)^v + \frac{1}{b} \left( \frac{a}{b} \right)^{v-1} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\Theta_5(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} j \frac{1}{v\pi} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^v - \left( \frac{a}{b} \right)^v \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\Theta_7(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} j \frac{1}{\pi k_\rho} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{b}{a} \right)^{v-1} + \frac{1}{b} \left( \frac{a}{b} \right)^v \right] \quad (\text{A.19})$$

**Para argumentos grandes:**

$$\Theta_1(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4k_\rho^2 ab} \right) \sin(k_\rho(b-a)) + \left( \frac{1}{2k_\rho b} - \frac{1}{2k_\rho a} \right) \cos(k_\rho(b-a)) \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\Theta_3(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{-2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \left[ \frac{1}{2k_\rho a} \sin(k_\rho(b-a)) + \cos(k_\rho(b-a)) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\Theta_5(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \sin(k_\rho(b-a)) \quad (\text{A.22})$$

$$\Theta_7(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \left[ \cos(k_\rho(b-a)) - \frac{1}{2k_\rho b} \sin(k_\rho(b-a)) \right] \quad (\text{A.23})$$

Formalmente, definimos argumento pequeno como aquele menor do que *argmin*. Para ordem igual a 0 definimos *argmin* como:

$$\text{argmin} = 2 \times 10^{-\text{expmin}} \quad (\text{A.24})$$

Já para ordem diferente de 0, definimos *argmin* como:

$$\text{argmin} = 2 \times 10^{\frac{1}{v+1} \left[ \log_{10} \left( \frac{v!}{2\pi} \right) - \text{expmin} \right]} \quad (\text{A.25})$$

Argumento grande é definido como aquele maior que o valor arbitrário *argmax*.

Para evitar calcular o fatorial de um número potencialmente grande, podemos reescrever a expressão utilizando a propriedade do logaritmo dos produtos como:

$$\log(x!) = \sum_{n=1}^x \log(n) \quad (\text{A.26})$$

## REFERÊNCIAS

- [1] Lars Josefsson and Patrik Persson. *Conformal Array Antenna Theory and Design*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. Wiley-Interscience, Hoboken, 2006.
- [2] Abdul Mueed, Jiadong Xu, and Ghulam Mehdi. Cavity backed embedded antenna on cylindrical surface for conformal applications. In *2011 IEEE 14th International Multitopic Conference*, pages 351–356, December 2011.
- [3] T. B. Ventura, O. M. C. Pereira-Filho, and C. G. do Rêgo. Cavity-backed cylindrical wraparound antennas. In *2009 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*, pages 57–60, November 2009.
- [4] Kwai-Man Luk, Kai-Fong Lee, and J.S. Dahele. Analysis of the cylindrical-rectangular patch antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 37(2):143–147, February 1989.
- [5] C. Krowne. Cylindrical-rectangular microstrip antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 31(1):194–199, January 1983.
- [6] L.A. Costa, O.M.C. Pereira-Filho, and F.J.S. Moreira. Input Impedance of Rectangular Microstrip Antennas on Spherical Bodies using MoM and Attachment Modes. In *2006 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pages 3947–3950, July 2006.
- [7] L.A. Costa, O.M.C. Pereira-Filho, and F.J.S. Moreira. Analysis of spherical-rectangular microstrip antennas. In *SBMO/IEEE MTT-S International Conference on Microwave and Optoelectronics, 2005.*, pages 279–282, July 2005.
- [8] Camila Almeida Diniz, Leonardo Aquino Costa, Odilon Maroja da Costa Pereira-Filho, and Fernando Jose da Silva Moreira. Fringing field correction for spherical–rectangular microstrip antennas. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 127:153447, December 2020.
- [9] Odilon M. C. Pereira-Filho and Vanine Sabino. MoM Analysis of Cavity-Backed Annular Spherical Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 67(5):3278–3287, May 2019.
- [10] Brajlata Chauhan, Muskan Bhatia, Akashdeep Chakraborty, P S Sharma, and Anuj Sharma. Cylindrical Conformal Antenna Arrays Theory for Military Aircraft Antenna. In *2020 IEEE International Conference on Computing, Power and Communication Technologies (GUCON)*, pages 77–82, October 2020.
- [11] Anita Pascawati, Muh Fakhri, Aditya Inzani Wahdiyat, Idris Eko Putro, Sonny Dwi Harsono, Mirza Zulfikar Rahmat, Rahmat Alfi Duhri, Kandi Rahardiyanti, Herma Yudhi Irwanto, Yuyu Wahyu, Arief Rufiyanto, Budi Sulistya, Evi Nur Qomariya, Cahyaning Retno Rahayu, Rizki Fadhila Ridho, and Muhammad Reza Kahar Aziz. Conformal Microstrip Antennas on the Rocket Cylinder. *Progress In Electromagnetics Research M*, 126:1–10, 2024.
- [12] P C Ribeiro Filho and A F Tinoco-S. Antena para Telemetria de Foguete de Pequeno Porte. *SBMO*, 2012.
- [13] O.M.C. Pereira-Filho. Flush-mounted cylindrical–rectangular microstrip antennas. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 3(1):1–13, February 2009.
- [14] P.C. Ribeiro Filho, D.C. Nascimento, A.F. Tinoco-S., and J.C. da S. Lacava. Design of flush-mounted hybrid microstrip antennas. In *2013 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave & Optoelectronics Conference (IMOC)*, pages 1–5, August 2013.

- 
- [15] Esin Chang, S. Long, and W. Richards. An experimental investigation of electrically thick rectangular microstrip antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(6):767–772, June 1986.
  - [16] Prêntice Ribeiro Filho. Análise e Projeto de Antenas de Microfita Híbridas. Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014.
  - [17] P C Ribeiro Filho, A.F. Tinoco-S, and J.C. da S. Lacava. Antena de Microfita SIW Cilíndrica. In *MOMAG 2014: 16º SBMO - Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e 11º CBMag - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, pages 24–28, 2014.
  - [18] Ansys. Ansys Export Control Compliance. <https://www.ansys.com/legal/export-control-compliance>.
  - [19] Roger F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, 1993.
  - [20] Roger F. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. IEEE, 2001.
  - [21] Y. Lo, D. Solomon, and W. Richards. Theory and experiment on microstrip antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 27(2):137–145, March 1979.
  - [22] P. Perlmutter, S. Shtrikman, and D. Treves. Electric surface current model for the analysis of microstrip antennas with application to rectangular elements. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 33(3):301–311, March 1985.
  - [23] David M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 2011.
  - [24] Ansys. HFSS. <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-hfss>.
  - [25] Rafael Araújo. *Impedância de Entrada de Antenas Cilíndricas Híbridas Embutidas*. Trabalho de Graduação, Universidade Federal de Pernambuco, 2022.
  - [26] O. M. C. Pereira Filho, et al. Method of moments analysis of arrays of cylindrical microstrip antennas with superstrate. *IET Microwave, Antennas and Propagation*, 2009.
  - [27] J. J. Price. Topics in Orthogonal Functions. *The American Mathematical Monthly*, 82(6):594–609, June 1975.
  - [28] John Liu Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz. *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Bookman, 2012.
  - [29] Frank Olver, Daniel Lozier, Ronald Boisvert, and Charles Clark. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, 2010.
  - [30] Vectorization. [https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab\\_prog/vectorization.html](https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/vectorization.html). Acessado em 06/11/2024.
  - [31] Parallel-computing. <https://www.mathworks.com/help/overview/parallel-computing.html>. Acessado em 06/11/2024.
  - [32] quadgk. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/quadgk.html>. Acessado em 09/09/2025.
  - [33] Constatine A. Balanis. *Antenna Theory Analysis and Design*. Wiley, 2010.
  - [34] Polarpattern. <https://www.mathworks.com/help/antenna/ref/polarpattern.html>. Acessado em 06/03/2025.
  - [35] Ansoft. User's guide – high frequency structure simulator, 2005.



- [36] Ansys. HFSS help 2024R2. HFSS help menu, 2024.
- [37] US Government. Department of defense interface standard.
- [38] KLC Conectores. Conector fêmea reto com base quadrada.
- [39] Walter Gander and Walter Gautschi. Adaptive Quadrature—Revisited. *BIT Numerical Mathematics*, 40(1):84–101, March 2000.
- [40] Matlab. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Acessado em 01/05/2022.