



Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Estatística

Programa de Pós-Graduação em Estatística

***Inferência Estatística e Level Set para Modelos Induzidos
do SPAN: Segmentação e Detecção de Borda em Imagens***

SAR

Edison Fernando da Silva Lima

Tese de Doutorado

Recife

25 de dezembro de 2025

Edison Fernando da Silva Lima

***Inferência Estatística e Level Set para Modelos Induzidos
do SPAN: Segmentação e Detecção de Borda em Imagens
SAR***

*Tese apresentada ao Programa de Pós-
graduação em Estatística do Centro
de Ciências Exatas e da Natureza da
Universidade Federal de Pernambuco
como requisito para obtenção do Título
de Doutor em Estatística.*

Área de Concentração: Probabilidade e
Estatística

Orientador: Prof. Dr. Abraão David Costa do
Nascimento

Recife

25 de dezembro de 2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Lima, Edison Fernando da Silva.

Inferência Estatística e Level Set para Modelos Induzidos do SPAN: Segmentação e Detecção de Borda em Imagens SAR / Edison Fernando da Silva Lima. - Recife, 2025.

159f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Estatística, 2025.

Orientação: Abraão David Costa do Nascimento.

Inclui Referências.

1. Detecção de bordas; 2. Divergências; 3. Contorno ativo (level set); 4. Imagens SAR; 5. Regressão Gama bivariada; 6. SPAN. I. Nascimento, Abraão David Costa do. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

EDISON FERNANDO DA SILVA LIMA

**INFERÊNCIA ESTATÍSTICA E *LEVEL SET* PARA MODELOS INDUZIDOS DO SPAN:
SEGMENTAÇÃO E DETECÇÃO DE BORDA EM IMAGENS SAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 27 de novembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abraão D. C. Nascimento
Presidente (Orientador), UFPE

Prof. Dr. Jodavid de Araújo Ferreira
Examinador Interno, UFPE

Profa. Dra. Maria do Carmo Soares de Lima
Examinadora Interna, UFPE

Profa. Dra. Fátima Nelsizeuma Sombra de Medeiros
Examinadora Externa, UFC

Prof. Dr. Rogério Galante Negri
Examinador Externo, UNESP

*"Dedico a Deus toda gratidão
pela vida e por cada passo até
aqui. Em Ti encontro força e
inspiração. Gratidão, Senhor,
Pai amado!"*

*"É exatamente disso que a vida é
feita: de momentos! Momentos
os quais temos que passar,
sendo bons ou não, para o nosso
próprio aprendizado, por algum
motivo. Nunca esquecendo do
mais importante: nada na vida é
por acaso."*

Francisco Cândido Xavier

*"Embora não possamos voltar
atrás e fazer um novo começo,
qualquer um pode começar
agora e fazer um novo fim."*

Francisco Cândido Xavier

AGRADECIMENTOS

Ao longo destes anos de dedicação e esforço, registro minha mais sincera gratidão a todas as pessoas e instituições que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta tese.

A Deus, agradeço pela saúde, pela fortaleza e pela sabedoria que me sustentaram nos momentos de maior desafio. A Ele dedico cada conquista desta jornada.

À minha família — meus pais Edilson e Maria José, meu filho Mateus, meus irmãos Rodrigo, Bruno e Nayara, e minha esposa Fátima — agradeço pelo amor incondicional, pela compreensão nos momentos difíceis e pelo incentivo permanente. Sem o apoio e a confiança de vocês, este percurso não teria sido possível.

Ao meu orientador, Abraão David Costa do Nascimento, expresso profunda gratidão pela orientação segura, pela presença constante, pelo rigor científico e pela generosidade intelectual. Sua paciência e seu compromisso com a qualidade foram decisivos para o amadurecimento desta pesquisa e para a minha formação acadêmica.

Aos Professores do Departamento de Estatística da UFPE, cujas disciplinas e orientações moldaram minha formação, agradeço a Klaus Vasconcellos, Francisco Cribari, Raydonal Ospina, Betsabé, Getúlio e, de modo especial, a Jodavid Ferreira pelo apoio e pelas contribuições decisivas ao longo do curso.

Aos amigos que caminharam comigo, oferecendo escuta, conselhos e companhia nos intervalos necessários para equilibrar as pressões da vida acadêmica, deixo meu muito obrigado. Em especial, Joselito, Alécio, Maria Júlia, Ernando, Allisson e Alisson, que aqui representam os demais colegas do programa, pelas ideias compartilhadas, pelas discussões frutíferas e pela solidariedade cotidiana.

À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), agradeço o apoio financeiro fundamental para a execução deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, sou grato pela leitura atenta, pelas críticas construtivas e pelas sugestões que enriqueceram a pesquisa e abriram novas perspectivas

de investigação.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para o êxito desta tese, registro meu reconhecimento e a minha gratidão. Muito obrigado.

RESUMO

Resolver problemas de sensoriamento remoto (SR) é prática importante na gestão de um país, principalmente aqueles com grandes extensões continentais e reservas ambientais (como o Brasil). Dentre as ferramentas de SR, o SAR (*Synthetic Aperture Radar*) tem sido muito utilizado. Embora o sistema SAR imponha aos dados resultantes o efeito do ruído *speckle*, ele produz imagens em alta resolução espacial e trabalha sob várias condições atmosféricas. Da literatura, evidencia-se que trabalhar com o atributo SAR “potência de dispersão total” (SPAN) de uma perspectiva estatística pode ser muito promissor. Em geral, esta tese avança na proposição de um conjunto de ferramentas para o processamento estatístico de imagens SAR considerando SPAN, como atributo de interesse. Primeiramente, assume-se um retorno SAR bivariado induzido pelo SPAN segue a distribuição gama bivariada de McKay (MBΓ). Um modelo de regressão harmônico (munido pela transformada de Fourier bidimensional) é proposto para quantificar o efeito de outras variáveis sobre a média do par aleatório considerando a dinâmica espacial, chamado MBΓR. Adicionalmente, uma ferramenta de seleção de modelo é proposta com base na transformada de Mellin bivariada. Experimentos de Monte Carlo são feitos a fim de avaliar os estimadores propostos para os parâmetros do MBΓR. Uma aplicação a dados reais é realizada, evidenciando a importância do ferramental proposto na descrição de textura. Em segundo lugar, evidências são levantadas da direção de descrever um atributo razão a partir do SPAN que segue a distribuição *Beta Tipo 3 modificada* (BT3, denotada por $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$). Subsequentemente, quatro medidas de divergências (Kullback–Leibler, Rényi, Bhattacharyya e Hellinger) são deduzidas e empregadas na formulação tanto de testes de hipótese como de detectores de bordas. Experimentos Monte Carlo evidenciam bom desempenho dos testes para tamanhos amostrais pequenos e moderados, comparativamente ao teste da razão entre verossimilhanças. A partir experimentos reais, o detector revelou transições bem definidas entre classes, comparativamente a outro detectores da literatura. Em terceiro lugar, o atributo do tipo razão

do SPAN (BT3 distribuído) é combinado ao método de contornos ativos na formulação *level set*, resultando em um novo segmentador. Propõe-se uma curva de evolução generalizada por meio do nexo Box-Cox, que tem o método da literatura como caso marginal. Então, o atributo tipo razão é usado como *input* à nova proposição. Experimentos tanto com dados simulados como reais evidenciam novos segmentadores que trabalham mais rapidamente e com maior acurácia do que os da literatura.

Palavras-chave: Divergências; Detecção de bordas; Contornos ativos (*level set*); Box-Cox; Imagens SAR; Regressão gama bivariada (MBΓR); SPAN; Transformada de Mellin; Transformada de Fourier.

ABSTRACT

Solving remote sensing (SR) problems is an important aspect of managing a country, especially those with large continental areas and environmental reserves, such as Brazil. Among SR tools, Synthetic Aperture Radar (SAR) is widely used. Although the SAR system introduces speckle noise into the resulting data, it produces images with high spatial resolution and operates under various atmospheric conditions. From the recent literature, it is shown that analyzing the SAR attribute "total scattering power" (SPAN) from a statistical perspective is very promising. Overall, this thesis advances a set of tools for the statistical processing of SAR images, considering SPAN as the attribute of interest. First, a bivariate SAR return induced by SPAN is assumed to follow the bivariate McKay gamma distribution (MB Γ). A harmonic regression model using the two-dimensional Fourier transform is proposed to quantify the effect of other variables on the mean of the random pair while accounting for spatial dynamics; this model is called MB Γ R. Additionally, a model selection tool based on the bivariate Mellin transform is proposed. Monte Carlo experiments are conducted to evaluate the proposed estimators for the MB Γ R parameters. An application to real data is presented, highlighting the importance of the proposed tool for texture description. Second, evidence is gathered to describe a ratio attribute from SPAN that follows the Modified Type 3 Beta distribution (BT3, denoted by $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$). Four divergence measures – Kullback–Leibler, Rényi, Bhattacharyya, and Hellinger – are then derived and used to formulate both hypothesis tests and edge detectors. Monte Carlo experiments show good test performance for small and moderate sample sizes compared to the likelihood ratio test. In real experiments, the detector revealed well-defined transitions between classes compared to other detectors in the literature. Third, the ratio attribute of SPAN (distributed BT3) is combined with the active contours method in the *level set* formulation, resulting in a new segmenter for SAR images. A generalized evolution curve is proposed using the Box–Cox nexus, which includes the method from the literature as a special case. The ratio attribute is

then used as input to the new evolution curve. Experiments with both simulated and real SAR data show that the new segmenters operate more quickly and accurately than those described in the literature.

Keywords: Active contours (*level set*); Bivariate Gamma regression (MBGR); Box–Cox; Divergences; Edge detection; Fourier transform; Mellin transform; SAR imagery; SPAN.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curvas de nível da densidade da distribuição gama bivariada de McKay.	20
Figura 2 – Curvas do critério proposto entre a estatística de Mellin para a distribuição MBΓ e as transformadas de Mellin empíricas.	28
Figura 3 – Áreas selecionadas para estimação de parâmetros.	36
Figura 4 – Imagem do sistema AIRSAR.	40
Figura 5 – Foram utilizados os canais HH e HH+VV; $\mu = \gamma L$ e $\hat{\mu} = \exp\{\beta_0 + \beta_1 \Re(HHVV)\}$	42
Figura 6 – Ajustes por região para a imagem de São Francisco.	43
Figura 7 – Imagens de São Francisco com valores da transformada de Mellin (\mathcal{T}_n) para $\mathcal{T}_n^{M\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, $\mathcal{T}_n^{M\Gamma_{Rep}}(\mu, L)$ e $\mathcal{T}_n^{M\Gamma_{Rep}}(\hat{\mu}, L)$	44
Figura 8 – Foram utilizados os canais HH e HH+VV, com $\alpha_1 = \alpha_2 = L$ e $\mu = \gamma L$; $\hat{\mu} = \exp\{\beta_0 + \beta_1 \Re(HHVV)\}$	44
Figura 9 – Gráficos para a densidade $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$	49
Figura 10 – Mapas de EMVs e algumas de suas funções.	54
Figura 11 – Gráficos das medidas derivadas de $\text{Beta}_3^{1/2}$	60
Figura 12 – Dinâmica na detecção de borda.	63
Figura 13 – Gráficos da densidade $\text{Beta}_3^{1/2}$ para cada cena estudada.	67
Figura 14 – Gráficos da densidade cumulativa $\text{Beta}_3^{1/2}$ para cada cena estudada.	67
Figura 15 – Detecção da imagem de São Francisco/Califórnia, EUA.	73
Figura 16 – Detecção da imagem da Costa de Japaratinga/Alagoas, Brasil.	73
Figura 17 – Energia da circunvizinhança.	79
Figura 18 – Relação entre curvas.	82
Figura 19 – Cenários de simulação de uma estrela apresentando <i>background</i> e <i>ground truth</i>	84

Figura 20 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, sem contaminação, utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.	88
Figura 21 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($\mathcal{U}(0, 1/2)$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.	91
Figura 22 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($p = q = 5$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.	95
Figura 23 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($p = 5$ e $q = 3$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.	99
Figura 24 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($p = 5$ e $q = 1$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.	102
Figura 25 – Acurácia média em função de λ , por cenário de ruído e por n_{iter}	106
Figura 26 – Imagens da área de São Francisco.	108
Figura 27 – Imagem AIRSAR e Segmentações Binárias utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.	109

LISTA DE TABELAS

<p>Tabela 3 – Estimativas ($\widehat{\alpha}_{KS}$) para o nível nominal 5% do teste de Kolmogorov-Smirnov para testar \mathcal{H}_0 : Os dados de $Q[i, j]$ vêm de uma população χ^2_2.</p> <p>Tabela 4 – Valores dos critérios viés(\cdot) e EQM(\cdot) por área: oceano, floresta, urbana e híbrida, para $L = 1$.</p> <p>Tabela 5 – Valores dos critérios viés(\cdot) e EQM(\cdot) por área: oceano, floresta, urbana e híbrida, para $L = 2$.</p> <p>Tabela 6 – Valores dos critérios viés(\cdot) e EQM(\cdot) por área: oceano, floresta, urbana e híbrida, para $L = 4$.</p> <p>Tabela 7 – Distâncias KL entre densidades empíricas de intensidades observadas e preditas nas texturas de oceano, floresta e urbano da imagem AIRSAR de São Francisco.</p> <p>Tabela 8 – Distância (h, ϕ) e suas funções h e ϕ</p> <p>Tabela 9 – Valores estimados para p e q, erros padrão, valor esperado e variância para cenas reais</p> <p>Tabela 10 – Taxas de rejeição dos testes baseados em distância sob \mathcal{H}_0 para nível nominal de 1%. ■ Cena 1; ■ Cena 2; ■ Cena 3. Os valores destacados correspondem às melhores taxas de rejeição em cada linha.</p> <p>Tabela 11 – Taxas de rejeição dos testes baseados em distância sob \mathcal{H}_0 para nível nominal de 5%. ■ Cena 1; ■ Cena 2; ■ Cena 3. Os valores destacados correspondem às melhores taxas de rejeição em cada linha.</p>	<p>34</p> <p>37</p> <p>38</p> <p>39</p> <p>42</p> <p>57</p> <p>66</p> <p>69</p> <p>69</p>
--	---

Tabela 12 – Taxas de rejeição dos testes baseados em distância sob \mathcal{H}_0 para nível nominal de 10%.  Cena 1;  Cena 2;  Cena 3. Os valores destacados correspondem às melhores taxas de rejeição em cada linha.	70
Tabela 13 – Resumo das medidas de divergência com melhor desempenho global por cenário e nível nominal	70
Tabela 14 – Configuração dos cenários para $\mathbb{E}(Z)$ e $\text{Var}(Z)$	83
Tabela 15 – Resultados dos critérios de performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela original.	89
Tabela 16 – Resultados dos critérios de performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela original.	89
Tabela 17 – Resultados dos critérios de performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela original.	90
Tabela 18 – Resultados dos critérios de performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela original.	90
Tabela 19 – Resultados dos critérios de performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$	92
Tabela 20 – Resultados dos critérios de performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$	93
Tabela 21 – Resultados dos critérios de performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$	93
Tabela 22 – Resultados dos critérios de performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$	94

Tabela 23 – Resultados dos Critérios de Performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.	96
Tabela 24 – Resultados dos Critérios de Performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.	96
Tabela 25 – Resultados dos Critérios de Performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.	97
Tabela 26 – Resultados dos Critérios de Performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.	97
Tabela 27 – Resultados dos Critérios de Performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.	100
Tabela 28 – Resultados dos Critérios de Performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.	100
Tabela 29 – Resultados dos Critérios de Performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.	101
Tabela 30 – Resultados dos Critérios de Performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.	101
Tabela 31 – Resultados dos Critérios de Performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.	103
Tabela 32 – Resultados dos Critérios de Performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.	103
Tabela 33 – Resultados dos Critérios de Performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.	104
Tabela 34 – Resultados dos Critérios de Performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.	104

Tabela 35 – Resultados dos critérios para 1 iteração na imagem AIRSAR de São Francisco	110
Tabela 36 – Resultados dos critérios para 2 iterações na imagem AIRSAR de São Francisco	111
Tabela 37 – Resultados dos critérios para 5 iterações na imagem AIRSAR de São Francisco	111
Tabela 38 – Resultados dos critérios para 10 iterações na imagem AIRSAR de São Francisco	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIRSAR	Radar de Abertura Sintética Aerotransportado
BT3	Distribuição Beta Tipo 3 (modificada)
CA	Contorno Ativo
Dice	Coeficiente de Dice
EMV	Estimador de máxima verossimilhança
EDP	Equação Diferencial Parcial
FC	Função Característica
GoF	<i>Goodness-of-Fit</i> (teste de aderência)
GPU	Unidade de Processamento Gráfico
InSAR	Radar de Abertura Sintética Interferométrico
IoU	<i>Intersection over Union</i> (índice de Jaccard)
D_{KL}	Divergência de Kullback–Leibler
d_{KL}	Distância de Kullback–Leibler
d_B	Distância de Bhattacharyya
d_H	Distância de Hellinger
d_R^β	Distância de Rényi de ordem β
L	Número de <i>looks</i> (observações independentes)
LS	<i>Level Set</i>
LV	Log-verossimilhança
MC	<i>Monte Carlo</i>
MBΓ	Distribuição Gama bivariada de McKay
MBΓR	Rgressão Gama bivariada de McKay
MKS	Estatísticas do tipo Mellin
MLE	Estimador de Máxima Verossimilhança

PDF	Função densidade de probabilidade
PolSAR	Radar de Abertura Sintética Polarimétrico
SR	Sensoriamento remoto
SAR	Radar de Abertura Sintética
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{A}(x, y)$	Atrator ou função radial
$I[x, y]$	Intensidade/retorno SAR no pixel (x, y)
X, Y	Retornos SAR modelados como variáveis aleatórias positivas
$Z = \frac{X}{X + Y}$	Estatística escalar BT3 em $(0, \frac{1}{2})$
t	Parâmetro temporal da evolução do contorno
$\phi(x, y)$	Função <i>level set</i>
$\phi_t = \partial\phi/\partial t$	Velocidade de evolução da função <i>level set</i>
ϕ_x, ϕ_y	Derivadas parciais de primeira ordem de ϕ
$\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$	Derivadas parciais de segunda ordem de ϕ
γ	Curva de nível zero de ϕ (contorno ativo)
\mathbf{n}	Vetor normal unitário externo à curva γ
$\text{div}(\cdot)$	Operador divergência de um campo vetorial
κ	Curvatura: $\kappa = \text{div}\left(\frac{\nabla\phi}{ \nabla\phi }\right)$
$\nabla\phi$	Gradiente de ϕ
$\Delta\phi$	Laplaciano de ϕ
$\delta_\varepsilon(\phi)$	Delta de Dirac regularizada
$H_\varepsilon(\phi)$	Função de Heaviside regularizada
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana
(x_C, y_C)	Centro do termo atrator radial
λ	Parâmetro de nexo Box–Cox (ajuste do termo de dados)
β	Peso do termo atrator radial
ν	Peso da regularização por curvatura
$f_{\text{in}}, f_{\text{out}}$	Densidades dos retornos dentro/fora do objeto
${}_2F_1^{(\cdot)}(a, b; c; z)$	Função hipergeométrica gaussiana

$\mathcal{T}_n(\cdot)$	Medida de discrepância
$\Gamma(\cdot)$	Função gama
$\text{B}(p, q)$	Função beta
$\mathbb{I}_A(\cdot)$	Função indicadora do conjunto A
L	Número de equivalentes de <i>looks</i> da imagem SAR
$L(\cdot)$	Termo de dados
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$	Domínio espacial da imagem
$\partial\Omega$	Fronteira do domínio
$E_\lambda(\phi)$	Funcional de energia a ser minimizado
V	Velocidade normal da curva γ
n_{iter}	Número de iterações do algoritmo
SPAN	Potência de dispersão total
$\mathcal{U}(0, 1)$	Distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$
\mathbb{R}, \mathbb{N}	Conjuntos dos números reais e naturais
$\mathcal{M}[f(x)](s)$	Transformada de Mellin de f em $s \in \mathbb{C}$
$\mu_r[Y], \kappa_r[Y]$	Log-momento e log-cumulante do tipo Mellin de ordem r
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de parâmetros (modelo/probabilidade)
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Estimador de máxima verossimilhança (MLE)
$\ell(\boldsymbol{\theta})$	Log-verossimilhança
$\mathcal{I}(\cdot)$	Matriz de informação de Fisher
$C_\lambda(f_{\text{in}}, f_{\text{out}})$	Contraste do termo de dados com nexo Box–Cox
$D_{\text{KL}}(f \ g)$	Divergência de Kullback–Leibler entre f e g
$D_\alpha^R(f \ g)$	Divergência de Rényi entre f e g de ordem r
$d_{\text{KL}}(\cdot)$	Distância de Kullback–Leibler
$d_\alpha^R(\cdot)$	Distância de Rényi de ordem r
$d_B(\cdot)$	Distância de Bhattacharrya
$d_H(\cdot)$	Distância de Hellinger

$$\begin{array}{ll} d_\phi^h(\cdot) & \text{Distância } (h, \phi) \\ S_\phi^h(\cdot) & \text{Estatística de teste} \end{array}$$

Sumário

1	INTRODUÇÃO	4
1.1	Problematização, revisão da literatura e contribuições em geral	4
1.2	Objetivos	9
1.2.1	Objetivo geral	9
1.2.2	Objetivos específicos	10
1.3	Produtos da tese	11
1.4	Divisão do manuscrito	12
2	REGRESSÃO BIVARIADA INDUZIDA DO SPAN: TRANSFORMADA DE MELLIN E EXTRAÇÃO DE TEXTURA	14
2.1	Transformada de Mellin na Estatística para dados SAR	16
2.1.1	Estatística do tipo Mellin: Caso univariado	16
2.1.2	Estatística do tipo Mellin: Caso bivariado	18
2.2	Contribuições sobre transformada de Mellin bivariada para a $MB\Gamma$	19
2.2.1	Medidas exatas	19
2.3	Régressão Gama Multivariada	23
2.3.1	Modelo de regressão harmônica espacial	25
2.3.2	Novo critério de comparação de modelos baseado em $M_{MB\Gamma}$	26
2.3.3	Estimação dos parâmetros da regressão gama de McKay	28
2.3.4	Analise de resíduos para regressão gama de McKay	32
2.4	Resultados Numéricos	34
2.4.1	Estudo de simulação	35
2.4.2	Aplicação a dados reais	36

2.5	Considerações parciais da primeira contribuição	45
3	DETECÇÃO DE BORDAS VIA DIVERGÊNCIAS ENTRE ATRIBUTOS SPAN TIPO RAZÃO	46
3.1	Usando a distribuição Beta tipo 3 modificada como descritor da função do SPAN	48
3.2	Inferência Estatística	50
3.3	Divergências para a distribuição Beta tipo 3 modificada em imagens SAR	55
3.3.1	Contribuições teóricas: Nova medida de contraste e testes de hipótese para textura em imagens SAR	58
3.3.2	Detectores de Borda	62
3.3.2.1	Detectores baseados em Verossimilhança	64
3.3.2.2	Detectores baseados em Distância	64
3.4	Resultados numéricos	65
3.4.1	Simulação	65
3.4.2	Aplicação a dados reais	72
3.5	Considerações parciais da segunda contribuição	73
4	EVOLUÇÃO ESTATÍSTICA DE SUPERFÍCIE DE ATRIBUTOS SPAN TIPO RAZÃO PARA SEGMENTAÇÃO EM IMAGENS SAR	75
4.1	Segmentação estatística pela evolução da superfície	75
4.1.1	Formulação Bayesiana para particionamento de imagem	75
4.1.2	Termo de dados	76
4.1.3	Evolução da curva e técnicas de <i>Level Set</i>	77
4.2	Proposta do gradiente descendente generalizado	79
4.2.1	O que está na literatura	79
4.2.2	Nosso gradiente descendente generalizado (curvatura Box–Cox)	81

4.3	Resultados numéricos	82
4.3.1	Discussão inicial dos cenários simulados	82
4.3.2	Discussão dos resultados de simulação	85
4.3.3	Discussão de campo de dados reais	107
4.3.4	Discussão de resultados para imagens reais	108
4.4	Considerações parciais da terceira contribuição	113
5	CONCLUSÕES	115
Appendices		117
A	DISTÂNCIA DE KULLBACK-LEIBLER	118
B	DISTÂNCIAS DE RÉNYI, BHATTACHARYYA E HELLINGER	123
C	PROPOSIÇÃO 2.2.1	126
D	MEDIDA DE SELEÇÃO DE MODELO A PARTIR DA TRANSFORMADA DE MELLIN	128
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130

1 Introdução

1.1 Problematização, revisão da literatura e contribuições em geral

Os sistemas SAR (*Synthetic Aperture Radar*-SAR) se consolidaram como ferramentas do sensoriamento remoto por aliarem produção de imagens em alta resolução espacial, independência da iluminação solar e capacidade de trabalhar em condições meteorológicas adversas (ZYL, 2011). A iluminação coerente empregada na aquisição de imagens SAR, introduz o *speckle* — ruído de natureza multiplicativa — que degrada a interpretabilidade visual e requer a proposição de novas metodologias estatísticas que pressupõem gaussianidade e aditividade (GOODMAN, 1975; FRERY; CORREIA; FREITAS, 2007). Em configurações polarimétricas (*Polarimetric SAR*-PolSAR), a resposta dos alvos é descrita ou por vetores complexos (caso singlelook) ou por matrizes complexas de retroespalhamento (caso multilook). Em ambos os casos, o processamento é feito a partir de canais de polarização (com emissão horizontal H e recepção horizontal H , diga-se HH , ou variações destes estados, HV , VH e VV). A partir dos canais, obtêm-se desagregações físicas (p. ex., a decomposição de Pauli) e a potência de dispersão total ($SPAN$), um summarizador informativo dos mecanismos de espalhamento (LEE; POTTIER, 2017; HAJNSEK; DESNOS, 2021). Entre as representações polarimétricas, a decomposição de Pauli é amplamente empregada para interpretar mecanismos fundamentais de espalhamento — superfície, duplo *bounce* e volume — e para derivar o $SPAN$ (LEE; POTTIER, 2017; HAJNSEK; DESNOS, 2021). Métodos baseados no $SPAN$ têm sido propostos para caracterização de alvos em PolSAR, incluindo testes munidos por divergências e distâncias estocásticas (WANG et al., 2018; WEST;

RILEY, 2019; NASCIMENTO; FERREIRA; SILVA, 2023). Em aplicações como mapeamento temático, detecção de alvos e monitoramento ambiental, autores ressaltam a importância do SPAN em tarefas de classificação, detecção de mudanças, otimização e segmentação em ambientes urbanos e vegetados, combinando medidas estatísticas e de teoria da informação (HUANG et al., 2017; WANG et al., 2018; YANG et al., 2019; WEST; RILEY, 2019; YIN et al., 2019; DONG; ZHANG; ZOU, 2020). No contexto de sensoriamento remoto, mapeamento temático refere-se à produção de mapas que representam categorias específicas de interesse — como tipos de uso e cobertura do solo, classes urbanas, corpos d'água ou formações vegetais — obtidas por técnicas de classificação aplicadas às imagens. Em SAR/PolSAR, esse processo é especialmente relevante devido à capacidade do radar de discriminar propriedades físicas, texturais e estruturais da superfície, mesmo sob condições climáticas adversas e ausência de iluminação solar, tornando o SPAN um atributo fundamental para a caracterização e o monitoramento multitemporal de superfícies.

Um paradigma em Processamento de Imagens é resolver problemas de pós-processamento (tais como detecção de bordas e segmentação) a partir de supostos estocásticos alinhados com a física de formação do tipo de imagem a ser trabalhado. Esta tese tem o foco em imagens SAR cujos dados são afetados pelo ruído *speckle*. Quando pensamos em distribuições/modelos para dados afetados pelo *speckle*, Goodman (1975) nos conduz à distribuição gama, tanto como distribuição principal para intensidades (norma quadrada dos canais de polarização complexos) em cenários fortemente homogêneos (DELIGNON; GARELLO; HILLION, 1997) como em um dos fatores devido ao ruído *speckle* em modelagem multiplicativa (FRERY et al., 1997; NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2009).

No âmbito da Teoria da Probabilidade e da Estatística Matemática, o estudo de distribuições bivariadas e de transformações escalares delas derivadas tem recebido atenção crescente, tanto no desenvolvimento teórico quanto em aplicações avançadas (GUMBEL,

1960; PLACKETT, 1965; GENEST, 1987; LAI; BALAKRISHNAN, 2009; KOCHERLAKOTA; KOCHERLAKOTA, 2017) como aplicadas (DOWNTON, 1970). Entre as famílias bivariadas com marginais gama, destaca-se a distribuição proposta por McKay (1934) e posteriormente generalizada ao caso multivariado por Mathal e Moschopoulos (1992), amplamente conhecida como gama bivariada de McKay (MBΓ). Essa distribuição tem motivado uma série de desenvolvimentos relevantes, entre os quais:

- Procedimentos de inferência estatística específicos para seus parâmetros (ZHAO; JANG; KIM, 2022);
- Aplicações em variedade estocástica e geometria da informação (ARWINI; DODSON, 2003; ARWINI et al., 2005; DODSON, 2009);
- Formulação de medidas de distância estocástica entre distribuições da mesma família (NASCIMENTO; FERREIRA; SILVA, 2023);
- Propostas de modelos de regressão multivariada estruturados no parâmetro de forma (RAHAYU et al., 2020).

Tal como introduzido por Nascimento, Ferreira e Silva (2023), esta tese assume que o estudo do atributo SPAN em imagens SAR deve partir do suposto: “intensidades SAR devem seguir a distribuição MBΓ”. Neste contexto, investigam-se: (i) como analisar padrões em pares induzidos pelo SPAN de imagens SAR assistidos por outros canais, lacuna aberta em Nascimento, Ferreira e Silva (2023); (ii) como mensurar discrepância (via teoria da informação, seguindo a abordagem de Nascimento, Cintra e Frery (2009)) e determinar bordas entre duas amostras de atributos razão definidos a partir de $MB\Gamma(\theta)$; (iii) como segmentar imagens SAR via atributos razão combinado a curvas de evolução em *level set*. Seguem os contextos e proposições desta tese.

Proposta 1

Nascimento, Ferreira e Silva (2023) introduziram a abordagem de fazer inferência e processamento de imagem sobre o par aleatório $Y = (\text{Intensidade do canal, SPAN})$. Neste contexto, a distribuição Γ está fisicamente para o *speckle* na intensidade SAR multilook como a gama bivariada de McKay (FRERY; CORREIA; FREITAS, 2007) surge a partir do par aleatório Y . Até aqui, não há registro sobre proposição de regressão para modelagem de Y como resposta no contexto de imagens SAR. É importante mencionar que Rahayu et al. (2020) tem proposto uma abordagem de regressão multivariada com resposta gama com estrutura no parâmetro de forma. Esta abordagem foi aplicada a dados reais em outro contexto (índice de desenvolvimento) e, pelo modo de reparametrização, oferece algumas intratabilidades analíticas na reparametrização. Nesta primeira contribuição, propõe-se uma nova abordagem para regressão gama bivariada com estrutura na escala, capaz de agregar comportamento espacial por transformada de Fourier bidimensional (2D) (UNWIN; HEPPEL, 1974) e alinhada a formação física de imagens SAR. Vários resultados teóricos são propostos para o novo modelo; como p. ex., a Informação de Fisher e um estimador iterativo em forma fechada baseado no método de *Scoring-Fisher* para os parâmetros do modelo de regressão. Adicionalmente, motivado pelo trabalho de Holynski (2024) que elabora um tratamento matemático para o desenvolvimento de inferência sobre transformadas de integrais empíricas e no uso estatístico da transformada de Mellin (EPSTEIN, 1948; NICOLAS; ANFINSEN, 2002; FERREIRA; NASCIMENTO; FRERY, 2022) em duas dimensões (FOX, 1957), propõe-se uma ferramenta de seleção de modelo. Experimentos de Monte Carlo são realizados para se quantificar a performance dos estimadores dos parâmetros do modelo. Finalmente, uma aplicação para dados reais ilustra o uso do modelo em imagens SAR e a sua capacidade em descrever texturas distintas.

Proposta 2

Nesta proposta, coloca-se o foco distribucional numa transformação escalar do par aleatório da Proposta 1, $\mathcal{T} : (X_1, X_2) \mapsto X_1/X_2$ tal que $(X_1, X_2) \sim \text{MB}\Gamma(\theta)$. Em particular, introduz-se o uso da distribuição Beta Tipo 3 (BT3) modificada no intervalo $(0, 1/2)$ proposta por [Gupta e Nadarajah \(2006a\)](#) para descrever um atributo razão do SPAN. Este caso é denotado por $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$. A partir de uma revisão da literatura, além da definição, não há desenvolvimento matemático estatístico para BT3. Assim, inicialmente, uma investigação exploratória em dados reais é feita para associar tanto os parâmetros quanto algumas de suas medidas tipo momentos derivadas nesta tese para analisar texturas em imagens SAR. Aqui, expressões em forma fechada são deduzidas para as divergências de Kullback-Leibler e Rényi e para as distâncias de Bhattacharyya e Hellinger. Subsequentemente, quatro testes de hipóteses são deduzidos, baseando-se nessas medidas, para comparar duas amostras de atributos tipo razão do SPAN. O desempenho do teste é quantificado por simulação Monte Carlo e alguns deles mostram desempenho superior àquele fornecido pelo clássico teste da razão entre verossimilhança. Finalmente, as estatísticas dos testes propostas são usadas como detectores de borda, seguindo o paradigma usado por [Nascimento et al. \(2013\)](#) e [Nascimento, Silva e Frery \(2021\)](#).

Proposta 3

Nesta proposta, o atributo razão SPAN e sua distribuição Beta₃^{1/2}(p, q) são usados em combinação com o método de *level set* para segmentação (procura uma partição ótima) de imagens SAR seguindo a abordagem variacional dos livros “*Variational and Level Set Methods in Image Segmentation*” (MICHE; AYED, 2010) e “*Total Variational and Level Set Methods in Image Science*” (TSAI; OSHER, 2005). Na literatura de *level set*, o componente gradiente descendente “ $\partial\phi(x, y, t)/\partial t$ ” no domínio espacial da imagem $[x, y]$ e tempo t ocupa um papel crucial na deformação do *level set* para encontrar a partição ótima e é baseado na estatística da razão entre verossimilhanças (RV), dentro e fora do objeto de interesse numa imagem. O avanço neste capítulo se concentra inicialmente em assumir uma estatística generalizada no gradiente descendente que tenha a quantidade clássica RV como caso marginal. Esta generalização é feita no que será definido como “nexo Box-Cox”. Resultados de simulação e com dados reais obtidos de imagens SAR mostram que proposição do novo gradiente descendente produz um método de segmentação tanto com uma convergência mais rápida como com uma maior acurácia em várias situações.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Propor e avaliar metodologia estatística para processamento de atributos de imagens SAR induzidos pelo SPAN que:

- (i)** Modele adequadamente o par de atributos (Intensidade, SPAN) de modo condicional (tal que permita quantificar tanto a influência de outros atributos como da estrutura de dependência espacial capturada pela transformada de Fourier 2D), es-

tendendo a abordagem introduzida por [Silva e Nascimento \(2023\)](#) e [Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#).

- (ii)** Defina testes de hipóteses para identificação de contrastes e detectores de bordas baseados em divergências de atributos tipo razão.
- (iii)** Proponha um segmentador por contornos ativos e *level set* por meio de um **nexo Box-Cox** para atributos tipo razão.

1.2.2 Objetivos específicos

- (i)** Construir uma fundamentação multiplicativa do novo modelo de regressão MBΓ para atributos bidimensionais induzidos pelo SPAN em imagens SAR;
- (ii)** Deduzir expressões iterativas em forma fechada para os estimadores de máxima verossimilhança via método *Scoring-Fisher* dos parâmetros da regressão MBΓ. Particularmente, propor um novo estimador para o número de equivalente de looks, que é uma área bem definida na literatura ([NASCIMENTO; FRERY; CINTRA, 2013](#));
- (iii)** Introduzir e justificar a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$ ao lidar com o atributo razão do SPAN em imagens SAR;
- (iv)** Deduzir várias medidas tipo log-momento para lei $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$ bem como a matriz informação de Fisher e discutir sobre como obter os estimadores de máxima verossimilhança;
- (v)** Deduzir e investigar medidas de divergências (Kullback–Leibler, Rényi, Hellinger e Bhattacharyya) para distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$. Formular procedimentos de testes de hipóteses e detectores de bordas para comparar duas amostras do atributo razão do SPAN;

- (vi) Fundamentar estatisticamente a proposição de um novo gradiente descendente no uso de segmentação por *level set*;
- (vii) Conduzir estudos de simulação de Monte Carlo para avaliar o desempenho de estimadores, testes e segmentadores propostos;
- (viii) Aplicar as propostas desta tese ao processamento de imagens SAR.

1.3 Produtos da tese

Esta tese apresenta até o momento dois produtos:

- Artigo intitulado como “Edge detection in SAR images with modeling for SPAN” e submetido ao *Journal of Mathematical Imaging and Vision*.

[Abstract] Synthetic aperture radar (SAR) is presented as an excellent instrument for remote sensing. Among other things, it is capable of generating images with high spatial resolution and working under different weather conditions. However, SAR relies on coherent illumination, which causes the generated images to be corrupted by speckle noise, requiring tailored modeling. In this paper, we first introduce a modified type three beta distribution as a potential candidate for SAR data as a function of the total scattering power (SPAN), an important feature in the physics of SAR image processing. Based on this assumption, we propose four distance measures that are used to define new hypothesis tests and boundary detection in SAR images. A Monte Carlo simulation study is conducted to quantify the performance of the new hypothesis tests in different scenarios. The results show that the proposed tests are able to estimate the given nominal levels (i.e. tests with a controlled false alarm rate), even for small sample sizes. Finally, two applications are performed on real data whose detection results support our proposal.

- Artigo intitulado como “Regression induced from SPAN: Mellin transform and Texture extraction” e submetido ao *Journal of the Royal Statistical Society Series C*.

[Abstract] Synthetic aperture radar (SAR) systems are an efficient means of tackling remote sensing problems. In contrast, SAR images are subject to speckle noise due to the use of coherent illumination during acquisition. This noise leads to both a grainy interference on such images (which precludes their interpretability) as well as to a multiplicative and non-Gaussian nature of their data. This work aims to investigate how bidimensional SAR return induced by SPAN and supported in parallel by other features can be decoded and used to extract partners in such images. To this end, in this paper we propose a new bivariate Γ -McKay regression (Γ -McKayR) model for SAR images. We derive some of its mathematical properties: score vector, Fisher information matrix, and tools for residual analysis. The maximum likelihood estimation procedure for Γ -McKayR parameters is discussed and some asymptotic behaviors for its estimates are quantified by Monte Carlo experiments. An application to real SAR images is performed. The results show that our modeling is a tool that can extract textures.

1.4 Divisão do manuscrito

Este manuscrito está organizado em três capítulos centrais, cada um dedicado a um bloco metodológico-estático específico.

- **Capítulo 2 — Regressão induzida do SPAN: Transformada de Mellin e extração de textura.**
- **Capítulo 3 — Detecção de bordas via divergências, SPAN e a distribuição Beta tipo 3 modificada.**

- Capítulo 4 — Evolução estatística da superfície para segmentação em imagens SAR.
- Capítulo 5 — Conclusões.

2 Regressão bivariada induzida do SPAN: Transformada de Mellin e extração de textura

A transformada de Mellin — cuja origem está associada ao estudo de produtos e razões de variáveis positivas (EPSTEIN, 1948) — tem-se mostrado especialmente adequada à análise de dados SAR. Seu emprego nesse contexto foi introduzido por Nicolas e Anfinsen (2002), dando origem às chamadas estatísticas do tipo Mellin (Mellin-kind statistics, MKS). Calculadas no domínio logarítmico, as MKS permitem derivar momentos e cumulantes associados à transformada de Mellin, fornecendo descritores úteis para caracterização radiométrica e para avaliação de aderência e seleção de modelos (ANFINSEN, 2010; ANFINSEN; ELTOFT, 2011; FERREIRA; NASCIMENTO; FRERY, 2022). No âmbito multivariado, extensões bivariadas da transformada de Mellin foram formalizadas por Fox (1957) e aplicadas por Springer e Thompson (1966) na dedução de propriedades clássicas envolvendo produtos e razões estatísticas, estabelecendo uma ligação natural entre técnicas univariadas e bivariadas. Resultados particulares envolvendo razões e produtos de estatísticas de ordem — associadas às distribuições uniforme e exponencial — bem como de normais bivariadas, foram apresentados em trabalhos pioneiros como Fieller (1932), Nicholson (1941), Craig (1942), consolidando o papel da transformada de Mellin como ferramenta analítica versátil para variáveis positivas. Neste capítulo, introduz-se, pela primeira vez, a transformada de Mellin bivariada, a partir da qual se estabelece a fundamentação teórica que orienta a escolha dos modelos considerados.

No contexto de SAR/PoSAR, modelos de regressão têm sido explorados para quan-

tificar relações entre canais e atributos físicos (NASCIMENTO et al., 2024a; NASCIMENTO et al., 2024b). Quando múltiplas respostas correlacionadas precisam ser explicadas de forma conjunta, modelos de regressão multivariada oferecem uma estrutura natural para relacionar variáveis (HARTUNG; KNAPP, 2005).

Nascimento et al. (2024a) e Nascimento et al. (2024b) têm derivado as regressões *K-Bessel* e \mathcal{G}_I^0 , ambas tendo como caso marginal a variável resposta gama, que é a distribuição para o *speckle* na intensidade multilook (NASCIMENTO et al., 2024a). Ao elevar a modelagem para o caso de uma variável resposta bivariada, permanece uma lacuna metodológica significativa no âmbito das aplicações em imagens SAR. Contudo, Rahayu et al. (2020) introduziram uma regressão gama baseada na distribuição gama multivariada proposta por Mathal e Moschopoulos (1992), que tem a lei gama bivariada de McKay como caso marginal. É correto pensar que o modelo de Rahayu et al. (2020) poderia ser aplicado para o fim de uma regressão bivariada para descrever o *speckle*, mas apontamos algumas questões para seguir outro caminho:

- A reparametrização usada por Rahayu et al. (2020) feita nos parâmetros “de forma” tornam a dedução de propriedades analíticas importantes (como a matriz informação de Fisher) intratável;
- A construção do modelo de Rahayu et al. (2020) não leva em conta a formação física de imagens SAR, que é um caráter multiplicativo (FRERY; WU; GOMEZ, 2022; ZHOU et al., 2024).

Neste capítulo, as frentes “transformada de Mellin bivariada” e “regressão bivariada” são usadas no contexto da lei gama bivariada de McKay. Primeiro, motivamos e formalizamos o uso da transformada de Mellin para distribuições de produto relevantes em SAR, destacando suas vantagens analíticas face às transformadas de Laplace/Fourier em cenários aditivos. Essa base permite qualificar a escolha da melhor opção de um modelo de regressão gama bivariado de McKay voltado a dados SAR. Para este fim, derivam-se

propriedades matemáticas (vetor escore, matriz de informação de Fisher e abordagem por análise de resíduos), discute-se a estimação por máxima verossimilhança e avalia-se, via experimentos de Monte Carlo, o comportamento assintótico dos estimadores. Por fim, apresenta-se uma aplicação com dados reais, ilustrando como o modelo proposto — justificado pela nova MKS — quantifica a relação entre o *SPAN* e outros atributos da relação entre canais.

O capítulo é estruturado como segue. Na Seção 2.1, revisa-se brevemente o uso da transformada de Mellin na Estatística para dados SAR, nos casos univariado e bivariado. A Seção 2.2 é dedicada às contribuições sobre a transformada de Mellin bivariada para MBΓ. Na Seção 2.3, apresenta-se a regressão gama multivariada. Finalmente, a Seção 2.4 aborda os resultados numéricos.

2.1 Transformada de Mellin na Estatística para dados SAR

2.1.1 Estatística do tipo Mellin: Caso univariado

A transformada de Mellin de uma função de valor real $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}[f(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx, \quad (2.1)$$

em que $s \in \mathbb{C}$ é uma variável complexa. Sob certas condições dadas em [Brychkov, Marichev e Savischenko \(2018\)](#), a transformada inversa de Mellin de $\mathcal{M}(s)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}\cdot\infty}^{c+\sqrt{-1}\cdot\infty} x^{-s} \mathcal{M}(s) ds, \quad (2.2)$$

em que c é um número real tal que a integral complexa é tomada ao longo de uma linha vertical no plano complexo, chamada de linha de Bromwich (ou linha fundamental),

$\sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e a relação entre a transformada $\mathcal{M}(s)$ e $f(x)$ é de natureza recíproca entre si, formando um par $\{f(x), \mathcal{M}(s)\}$.

Como apresentado por [Bertrand, Bertrand e Ovarlez \(1995\)](#), da Equação (2.2), segue-se a fórmula de Parseval dada por

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}\cdot\infty}^{c+\sqrt{-1}\cdot\infty} \mathcal{M}[g(x)](1-s)\mathcal{M}[f(x)](s)ds$$

e

$$\mathcal{M}[f \star g](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](s),$$

em que $(f \star g)(s) = \int_0^\infty w^{-1}f(z/w)g(w)dw$ é a convolução tipo Mellin e $\mathcal{M}[f(x)](s)$ e $\mathcal{M}[g(x)](s)$ são as transformadas de Mellin das funções f e g , funções reais definidas em $(0, \infty)$, respectivamente. O ponto favorável da fórmula de Parseval é a permuta de integrais que nem sempre pode ser justificada.

Devido ao domínio da transformada de Mellin, ela pode ser aplicada às funções de densidade de probabilidade (PDF) de variáveis aleatórias positivas (como aquelas para descrever intensidades e amplitudes SAR). Seja $X > 0$ uma variável aleatória com densidade $f_X(x)$, uma alternativa à função característica (FC) de X , $\mathbb{E}(e^{\sqrt{-1}Xt})$, é a FC tipo Mellin dada por

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}[X^{s-1}] = \mathcal{M}[f_X](s). \quad (2.3)$$

Ela costuma ser usada para lidar com o produto de variáveis aleatórias independentes, enquanto Fourier lida com a soma ([SPRINGER, 1979](#)).

A partir da expansão em série de Maclaurin da função exponencial, pode-se mostrar que ([KELLOGG, 1984](#))

$$\phi_X(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s-1)^r}{r!} \mu_r[X], \quad (2.4)$$

em que $\mu_r[X] = \mathbb{E}[(\log X)^r]$. A Equação (2.4) indica que $\phi_X(s)$ pode ser expandido

em termos de log-momentos e, portanto, os log-momentos podem ser obtidos de $\phi_X(s)$ por

$$\mu_r [X] = \frac{d^r}{ds^r} \phi_X(s) \Big|_{s=1}. \quad (2.5)$$

A função geradora de log-cumulante do tipo Mellin é definida como $\varphi_X(s) = \log \phi_X(s)$. Essa função pode ser expandida como

$$\varphi_X(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s-1)^r}{r!} \kappa_r [X], \quad (2.6)$$

com os coeficientes $\kappa_r [X]$ chamados de log-cumulantes, desde que todos eles existam. Os log-cumulantes são extraídos da Equação (2.6), como

$$\kappa_r [X] = \frac{d^r}{ds^r} \varphi_X(s) \Big|_{s=1}. \quad (2.7)$$

As três primeiras relações entre log-momentos e log-cumulantes são

$$\kappa_1 = \mu_1, \quad \kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2 \quad \text{e} \quad \kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3. \quad (2.8)$$

Essas relações são válidas para log-momentos e log-cumulantes em geral.

2.1.2 Estatística do tipo Mellin: Caso bivariado

Seja (X_1, X_2) uma variável aleatória bidimensional ou bivariada com densidade $f(x_1, x_2)$ e suporte no primeiro quadrante e zero nos demais. [Fox \(1957\)](#) definiu a transformada de Mellin de $f(x_1, x_2)$ como

$$\mathcal{M}(s_1, s_2) = \mathcal{M}[f(x_1, x_2)](s_1, s_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.9)$$

e sua inversa como

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{h-\sqrt{-1}\cdot\infty}^{h+\sqrt{-1}\cdot\infty} \int_{k-\sqrt{-1}\cdot\infty}^{k+\sqrt{-1}\cdot\infty} \mathcal{M}(s_1, s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2. \quad (2.10)$$

As condições sob as quais as Equações (2.9) e (2.10) são válidas foram discutidas por Fox (1957). A inversão da transformada de Mellin quando a PDF é positiva em todo o plano foi discutida por Springer e Thompson (1966). Dois casos específicos em que podemos usar a Equação (2.9):

- (i) Se $Y = X_1 X_2$, a função densidade de probabilidade (PDF) de Y , $g(y)$, tem sua transformada de Mellin dada por $\mathcal{M}[g(y)](s) = \mathcal{M}(s, s)$;
- (ii) Se $Z = X_1/X_2$, a PDF de Z , $h(z)$, tem a transformada de Mellin $\mathcal{M}[h(z)](s) = \mathcal{M}(s, -s + 2)$.

As extensões das Equações (2.9) e (2.10) para o caso em que $f(x_1, x_2)$ é positiva nos quatro quadrantes, são dadas como segue. Denotando por $\mathcal{M}^{++}(s_1, s_2)$, $\mathcal{M}^{+-}(s_1, s_2)$, $\mathcal{M}^{-+}(s_1, s_2)$ e $\mathcal{M}^{--}(s_1, s_2)$ a transformada de Mellin de $f(x_1, x_2)$ nos quatro quadrantes, após atribuir o sinal apropriado à variável negativa envolvida, as expressões para a transformada de Mellin de $g(y)$ e $h(z)$, podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}[g(y) : y > 0](s) &= \mathcal{M}^{++}(s, s) + \mathcal{M}^{--}(s, s), \\
 \mathcal{M}[g(y) : y < 0](s) &= \mathcal{M}^{+-}(s, s) + \mathcal{M}^{-+}(s, s), \\
 \mathcal{M}[g(y) : z > 0](s) &= \mathcal{M}^{++}(s, -s + 2) + \mathcal{M}^{--}(s, -s + 2) \\
 \mathcal{M}[g(y) : z < 0](s) &= \mathcal{M}^{+-}(s, -s + 2) + \mathcal{M}^{-+}(s, -s + 2)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2 Contribuições sobre transformada de Mellin bivariada para a $MB\Gamma$

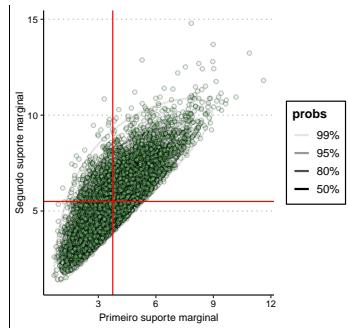
2.2.1 Medidas exatas

Conforme aplicação a dados SAR feita por Nascimento, Ferreira e Silva (2023), a distribuição gama bivariada de McKay ("MB Γ ") com parâmetro de forma $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e

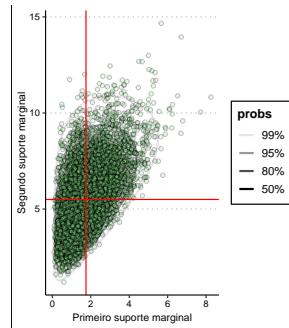
parâmetro de escala $\gamma > 0$ tem densidade dada por:

$$f(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = \frac{1}{\gamma^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} (x_2 - x_1)^{\alpha_2-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right), \quad (2.12)$$

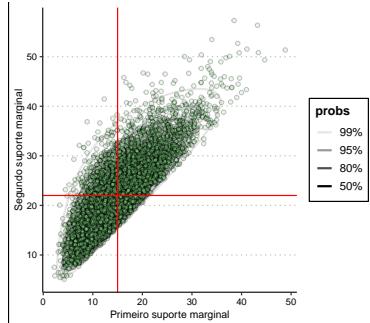
para $0 < x_1 < x_2$. Este caso é denotado por $X = [X_1, X_2] \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$.



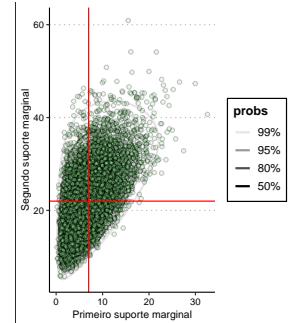
(a) $\alpha_1 = 7,5$, $\alpha_2 = 3,5$ e $\gamma = 0,5$.



(b) $\alpha_1 = 3,5$, $\alpha_2 = 7,5$ e $\gamma = 0,5$.



(c) $\alpha_1 = 7,5$, $\alpha_2 = 3,5$ e $\gamma = 2$.



(d) $\alpha_1 = 3,5$, $\alpha_2 = 7,5$ e $\gamma = 2$.

Figura 1 – Curvas de nível da densidade da distribuição gama bivariada de McKay.

As Figuras 1a–1d ilustram o comportamento das curvas de nível da densidade da distribuição gama bivariada de McKay sob distintas combinações de parâmetros. O aumento de α_1 amplia a dispersão ao longo do eixo que descreve o *primeiro suporte marginal*, enquanto maiores valores de α_2 produzem alongamento na direção do eixo que descreve o *segundo suporte marginal*. O incremento de γ intensifica a correlação positiva entre as marginais, resultando em curvas mais alongadas ao longo da bissetriz do primeiro quadrante. Observa-se, ainda, que o centróide da densidade desloca-se para valores

mais altos de ambos os eixos à medida que α_1 e α_2 crescem, refletindo maior coerência estatística entre os retornos correlacionados, como esperado em contextos SAR.

As seguintes propriedades decorrem de sua definição da lei MBΓ:

- (i) $X_1 \sim \Gamma\left(\alpha_1, \frac{1}{\gamma}\right)$ e $X_2 \sim \Gamma\left(\alpha_2, \frac{1}{\gamma}\right)$,
- (ii) $X = \{(X_1, X_2) : X_2 \triangleq X_1 + X_2\} \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ e $X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \frac{1}{\gamma})$,
- (iii)
$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_1) = \gamma \cdot \alpha_1, \mathbb{E}(X_2) = \gamma \cdot (\alpha_1 + \alpha_2), \\ \text{Var}(X_1) = \alpha_1 \cdot \gamma^2, \text{Var}(X_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \gamma^2 \text{ e } \text{Cov}(X_1, X_2) = \sqrt{\alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)}, \end{cases}$$
 em que $\mathbb{E}(\cdot)$, $\text{Var}(\cdot)$ e $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ são os operadores de valor esperado, variância e covariância, respectivamente.

Esse caso é denotado por $X = [X_1, X_2]^\top \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. [Kellogg \(1984\)](#) demonstrou que $X \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ possui transformada de Mellin bivariada dada na Proposição [2.2.1](#).

Proposição 2.2.1. *Seja $Z \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, com parâmetros, α_1 , α_2 e γ , então:*

$$\mathcal{M}_{\text{MB}\Gamma}(s_1, s_2) = \frac{\gamma^{s_1+s_2-2}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\Gamma(s_1 + \alpha_1 - 1)}{\Gamma(s_1 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)} \Gamma(s_1 + s_2 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2),$$

em que $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$.

A demonstração desta Proposição foi feita considerando menos pré-requisitos, constando no Apêndice [C](#).

[Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#) relacionaram essa distribuição à formação física observada em imagens SAR como segue. Os sistemas SAR polarimétricos registram a amplitude e a fase dos sinais retroespelhados para interações com a polarização linear de recepção e transmissão: HH, HV, VH e VV (H para polarização horizontal e V para polarização vertical). O resultado é a matriz de dispersão complexa:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{\text{HH}} & S_{\text{HV}} \\ S_{\text{VH}} & S_{\text{VV}} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

em que $S_{AB} \in \mathbb{C}$ significa o retorno devido à transmissão A e à recepção B . De acordo com [Lee et al. \(1994\)](#), os componentes copolarizados S_{HH} e S_{VV} estão correlacionados, enquanto os componentes de polarização cruzadas S_{VH} e S_{HV} têm o mesmo nível na matriz de Sinclair. Neste trabalho, concentra-se a análise em um par aleatório obtido a partir da soma de dois canais dos retornos PolSAR, cuja estrutura estatística induz a modelagem bivariada considerada.

Seja $\mathbf{S} \in \{[S_{\text{HH}}, S_{\text{VV}}]^\top, [S_{\text{HH}}, S_{\text{HV}}]^\top, [S_{\text{VV}}, S_{\text{HV}}]^\top\} \subset \mathbb{C}^2$ um vetor de dois canais de polarizações complexas, em que $(\cdot)^\top$ denota o vetor de transposição. Então, a matriz de covariância polarimétrica pode ser escrita como

$$\mathbf{T} := \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^*, \quad (2.14)$$

em que \mathbf{s}_i é o i -ésimo vetor de amostra de um *look* e $(\cdot)^*$ é o operador transposto conjugado. A decomposição espectral de \mathbf{T} é dada por

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^*, \quad (2.15)$$

em que λ_i são os i -ésimos autovalores reais de \mathbf{T} e \mathbf{e}_i são os autovetores ortonormais correspondentes. A imagem da potência de dispersão total (SPAN) pode ser definida como a potência de retroespalhamento total a partir da Equação (2.15); isto é,

$$\text{SPAN} := \lambda_1 + \lambda_2 = T_{11} + T_{22}, \quad (2.16)$$

em que T_{ij} é a entrada (i, j) de \mathbf{T} . Conforme descrito anteriormente, o recurso SPAN é muito importante no processamento de imagens PolSAR. [Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#) introduziram o uso da gama bivariada de McKay—ver detalhes sobre ela em [Nadarajah e Gupta \(2006\)](#), [Gupta e Nadarajah \(2006a\)](#)—para descrever as informações obtidas de (T_{11}, SPAN) ou (T_{22}, SPAN) .

Agora estamos em posição de apresentar uma reparametrização para a distribuição

MBG. Aplicando $[\gamma = \frac{\mu}{L}, \alpha_1 = L, \alpha_2 = L]$ na Equação (2.12), tem-se

$$f(x_1, x_2; L, \mu) = \frac{(\frac{L}{\mu})^{2L}}{\Gamma(L)\Gamma(L)} x_1^{L-1} (x_2 - x_1)^{L-1} \exp\left\{-\frac{L}{\mu}x_2\right\}. \quad (2.17)$$

Note que o caso *singlelook* ($L = 1$) fica

$$f(x_1, x_2; \mu) = \frac{1}{\mu^2} \exp\left\{\frac{-x_2}{\mu}\right\}. \quad (2.18)$$

Já o caso *multilook* de média unitária é

$$f(x_1, x_2; L) = \left(\frac{L^L}{\Gamma(L)}\right) x_1^{L-1} (x_2 - x_1)^{L-1} \exp\{-Lx_2\}. \quad (2.19)$$

Da Proposição 2.2.1, vale-se o seguinte corolário.

Corolário 2.2.2. *Seja (X_1, X_2) um par aleatório que segue a distribuição gama bivariada McKay (MBG) reparametrizada, então sua transformada de Mellin é dada por*

$$\mathcal{M}_{MBG}(s_1, s_2) = \frac{(\frac{\mu}{L})^{s_1+s_2-2}}{\Gamma(L)} \frac{\Gamma(s_1 + L - 1)}{\Gamma(s_1 + 2L - 1)} \Gamma(s_1 + s_2 + 2L - 2), \quad (2.20)$$

em que L é o número de looks

2.3 Regressão Gama Multivariada

A regressão gama multivariada (MGR-*multivariate gama regression*) é uma extensão da regressão gama univariada aplicada quando há múltiplas variáveis resposta contínuas e assimétricas, que seguem conjuntamente uma distribuição gama multivariada (RAHAYU et al., 2020). Essa abordagem é útil quando as respostas apresentam dependência entre si, o que impede a modelagem isolada de cada uma sem perda de informação e interpretação.

Seja $\mathbf{Z}_l = (Z_{l1}, \dots, Z_{lk})^\top$ o vetor de respostas para a l -ésima observação e $\mathbf{z}_l = (z_{l1}, \dots, z_{ls})$ o vetor de variáveis associadas, para $l = 1, 2, \dots, n$. Assumindo que \mathbf{Z}_l

segue uma distribuição gama multivariada conforme [Mathal e Moschopoulos \(1992\)](#), este caso é denotado como $Y_l \sim \Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \gamma)$ tendo densidade dada por:

$$f(z_1, \dots, z_k) = \frac{(z_1 - \lambda_1)^{\alpha_1-1}}{\gamma^{\alpha_k^*} \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} (z_2 - z_1 - \lambda_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z_k - z_{k-1} - \lambda_k)^{\alpha_k-1} \exp \{-[z_k - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)]/\gamma\},$$

em que $\alpha_i > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $z_{i-1} + \lambda_i < z_i$ ($i = 2, \dots, k$), $z_k < \infty$, $\lambda_1 < z_1$, $\alpha_k^* = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$.

A reparametrização usada por [Rahayu et al. \(2020\)](#) para regressão gama tem média e variância dos componentes Y_i dadas por:

$$\mathbb{E}(Y_i) = \gamma \alpha_i^* + \lambda_i^* = \mu_i(\beta_i) \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y_i) = \gamma^2 \alpha_i^*, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k,$$

em que $\lambda_i^* = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i$ e β_i representa os coeficientes de regressão para a média da i -ésima variável. Para o nosso caso, assumem-se $\lambda_i^* = 0$, $\gamma = \frac{\mu}{L}$ e $\alpha_i = L$, $\forall i$. No que segue, para fins de uso desta tese, a discussão será reduzida ao caso bivariado.

Embora a distribuição do [Rahayu et al. \(2020\)](#) tenha mérito, pode-se ver dois pontos que limitam sua aplicação direta à modelagem do par de atributos abordado por [Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#):

- Colocar a estrutura sistemática como função de α_i^* impõe intratabilidades analíticas; como, por exemplo, a mesma estrutura ficar como argumento da função especial $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$;
- A modelagem não foi formulada levando em conta a formação física multiplicativa de imagens SAR ([FRERY; WU; GOMEZ, 2022](#); [ZHOU et al., 2024](#)).

No que segue, a primeira modelagem desta tese é apresentada.

2.3.1 Modelo de regressão harmônica espacial

Considere a reparametrização $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) \sim MB\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ e $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \mapsto (L, L, \mu/L)$, tal que L é o número de *looks* e μ é uma média comum às duas variáveis aleatórias. Este caso tem transformada de Mellin bivariada reparametrizada dada no Corolário 2.2.2. A regressão para imagem SAR é definida como segue.

Seja $Y : \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\} \mapsto \mathbb{R}_+^2$ uma imagem SAR cujo retorno é um par induzido pelo SPAN, conforme Silva e Nascimento (2023), Nascimento, Ferreira e Silva (2023). Estamos em posição de introduzir uma regressão harmônica.

Definição 2.3.1. Sejam $\{(Y_1, Y_2)[1, 1] \mid \mathbf{x}[1, 1]\}, \dots, \{(Y_1, Y_2)[M, N] \mid \mathbf{x}[M, N]\}$ um conjunto de pares $MB\Gamma$ distribuídos tais que

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}[i, j] = \underbrace{\mu[i, j]}_{\text{sinal}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1^{(0)} \\ Y_2^{(0)} \end{bmatrix}}_{\text{ruído speckle}}[i, j], \quad (2.21)$$

em que $\mu[i, j] = g^{-1}(\eta[i, j])$, $\eta[i, j] = \mathbf{x}[i, j]^\top \boldsymbol{\beta} + \tau[i, j]$, $g(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e duas vezes continuamente diferenciável, e $[Y_1^{(0)} \ Y_2^{(0)}]^\top [i, j] \sim MB\Gamma(L, L, 1/L)$ tem FDP

$$f(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) = \frac{\{y_1^{(0)}[y_2^{(0)} - y_1^{(0)}]\}^{L-1} e^{-Ly_2^{(0)}}}{L^{-2L} \Gamma^2(L)}, \text{ para } 0 < y_1^{(0)} < y_2^{(0)} < \infty.$$

Doravante, o Modelo (2.21) será denominado regressão $MB\Gamma$ (abreviadamente, $MB\Gamma R$).

Uma possível componente sistemática da $MB\Gamma R$, inspirado na proposta de Unwin e Hepple (1974), é dado por

$$\begin{aligned} g(\mu[i, j]) &= \mathbf{x}[i, j]^\top \boldsymbol{\beta} + \tau[i, j] = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k x_k[i, j] \\ &+ \frac{1}{MN} \sum_{k_1=1}^M \sum_{k_2=1}^N \beta_{k_1, k_2} \exp \left\{ \sqrt{-1} \left(\frac{2\pi k_1 i}{M} + \frac{2\pi k_2 j}{N} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que $\beta^\top = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p]$, $\mathbf{x}^\top [i, j] = (1, x_1 [i, j], \dots, x_p [i, j])$ e β_{k_1, k_2} é a transformada de Fourier bidimensional (2D) para o sinal 2D $\tau [i, j]$ dada por (LIM, 1990)

$$\beta_{k_1, k_2} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \tau [i, j] \exp \left\{ -\sqrt{-1} \left(\frac{2\pi k_1 i}{M} + \frac{2\pi k_2 j}{N} \right) \right\}. \quad (2.23)$$

É importante mencionar que a componente sistemática dada em (2.22) é comumente chamada de *regressão semi paramétrica*. Neste contexto, os coeficientes dados na parte não paramétrica devem ser estimados. Contudo, no nosso caso, trataremos como modelo harmônico, pois a parte espacial presente em $g(\mu [i, j]) - \mathbf{x} [i, j]^\top \beta$ é representada por decomposição espectral via transformada de Fourier em 2D (LIM, 1990).

2.3.2 Novo critério de comparação de modelos baseado em $\mathcal{M}_{MB\Gamma}$

Nesta seção, propõe-se uma nova medida de discrepância entre uma amostra independente distribuída segundo MB Γ R e sua versão empírica. Com base nessa proposta, é possível escolher entre um modelo MB Γ (reparametrizado ou não) e o MB Γ R para uma base de dados SAR bidimensionais. Esta avaliação pode se dar tanto por inspeção visual dos mapas estatísticos quanto por uma avaliação quantitativa. Essa nova ferramenta é apresentada e discutida a seguir.

Holynski (2024) propôs um excelente tratamento matemático para obter inferência estatística a partir de métodos de transformadas integrais empíricas. Nesta seção, utiliza-se uma abordagem muito semelhante para derivar uma medida de discrepância. Considere, como forma de quantificar a discrepância entre a amostra independente e a suposição probabilística, a quantidade: Para $\theta \in \{(\alpha_1, \alpha_2, \gamma), (\mu, L), (\beta, L)\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\widehat{\theta}) &= MN \oint \oint_{\mathcal{B} \in \mathbb{C}^2} \| \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}(s_1, s_2) - \mathcal{M}_n(s_1, s_2) \|^2 dW(s_1, s_2) \\ &= MN \oint \oint_{\mathcal{B} \in \mathbb{C}^2} \| \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}(s_1, s_2) - \mathcal{M}_n(s_1, s_2) \|^2 w(s_1, s_2) dAs_1 dAs_2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que $w(s_1, s_2)$ é uma função de peso, $\| z \|^2 = z^* z = \Re^2[z] + \Im^2[z]$ é a norma quadrada de uma argumento complexo, $\Re[\cdot]$ é a parte real de um argumento, $\Im[\cdot]$

representa a parte imaginaria, $\oint_{(\cdot)}$ representa uma integral de linha (cf. [Bessa \(2023\)](#)) e $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}(s_1, s_2)$ é a transformada de Mellin bivariada teórica ajustada (substituindo o vetor de parâmetros θ pelo estimador consistente associado $\widehat{\theta}$) sob a suposição probabilística \mathcal{D} (como as de densidades nas Equações [\(2.12\)](#) e [\(2.17\)](#)). Para MBGR, tomando $\widehat{\beta}$ e \widehat{L} como estimadores consistentes de β e L , respectivamente, a Equação [\(2.20\)](#) se reduz a

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}(s_1, s_2) = \frac{\Gamma(s_1 + s_2 + 2\widehat{L} - 2)}{\widehat{L}^{s_1+s_2-2}\Gamma(\widehat{L})} \frac{\Gamma(s_1 + \widehat{L} - 1)}{\Gamma(s_1 + 2\widehat{L} - 1)} \left[\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N g^{-1}(\mathbf{x}^\top[i, j] \widehat{\beta}) \right]^{s_1+s_2-2} \quad (2.25)$$

e $\mathcal{M}_n(s_1, s_2) = [MN]^{-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N Y_1^{s_1-1}[i, j] Y_2^{s_2-1}[i, j]$ é sua versão empírica. Além disso, dA_{s_1} e dA_{s_2} são elementos de área no plano complexo associados às variáveis s_1 e s_2 , e \mathcal{B} é um boreliano em \mathbb{C} . Ver Apêndice [D](#) para detalhes.

Para computar a Equação [\(2.24\)](#), emprega-se integração numérica para a seguinte expressão: usando coordenadas polares $s_1 = r_1 \exp[\sqrt{-1}\theta_1]$ e $s_2 = r_2 \exp[\sqrt{-1}\theta_2]$ e a função de peso $w(s_1, s_2) = \exp[-(r_1^2 + r_2^2)]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= NM \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r_1 r_2 \exp\{- (r_1^2 + r_2^2)\} \\ &\quad \| \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}(r_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, r_2 e^{\sqrt{-1}\theta_2}) - \mathcal{M}_n(r_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, r_2 e^{\sqrt{-1}\theta_2}) \|^2 dr_1 d\theta_1 dr_2 d\theta_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para ilustrar o critério determinado pelas Equações [\(2.25\)](#) e [\(2.26\)](#), considere uma amostra observada com 1000 pontos gerada de $(Y_1, Y_2) \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. A Figura [2](#) exibe as curvas para $\mathcal{T}(\widehat{\alpha}_1 + \epsilon, \widehat{\alpha}_2, \widehat{L})$ em preto, $\mathcal{T}(\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2 + \epsilon, \widehat{L})$ em cinza, e $\mathcal{T}(\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{L} + \epsilon)$ em cinza-claro. Em todos os casos, para $\epsilon = 0$, observa-se, como esperado, $\mathcal{T}(\theta) \approx 0$. Para $|\epsilon| \neq 0$, o valor de $\mathcal{T}(\theta)$ cresce à medida que $|\epsilon|$ se afasta de zero. Esse aumento é mais significativo para a variação em α_1 e menos expressivo em L .

No que segue, discutimos como estimar os parâmetros da MBGR.

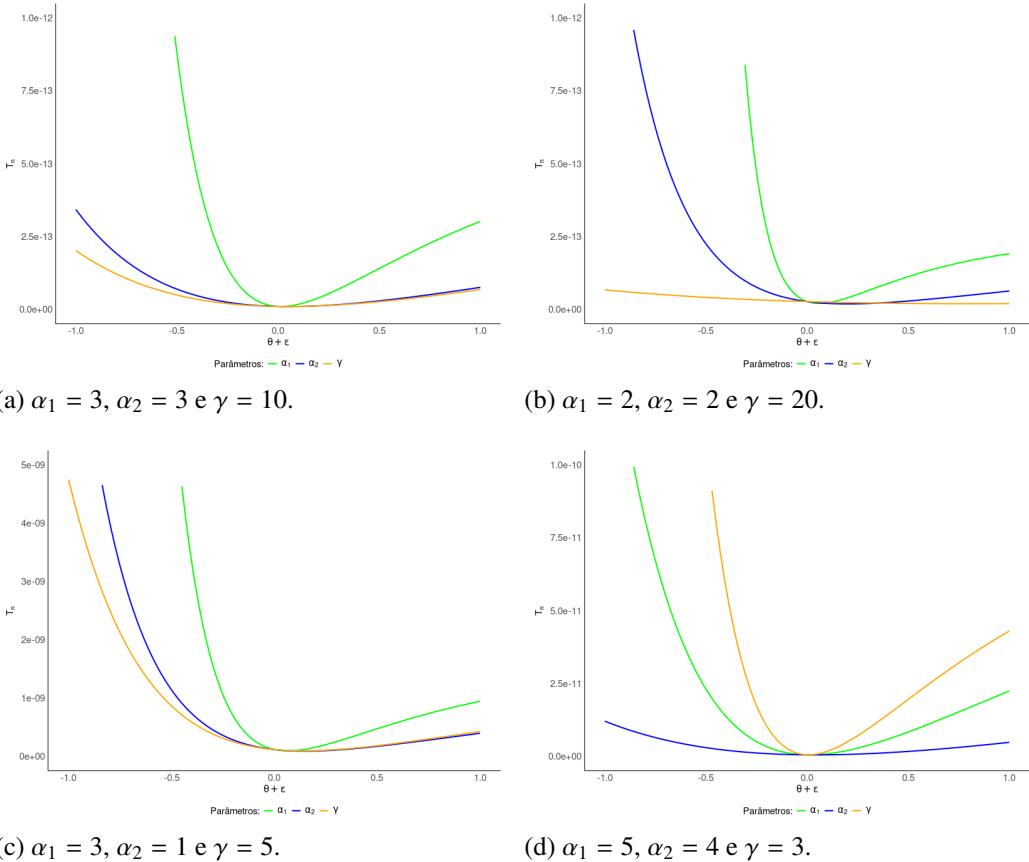


Figura 2 – Curvas do critério proposto entre a estatística de Mellin para a distribuição $MB\Gamma$ e as transformadas de Mellin empíricas.

2.3.3 Estimação dos parâmetros da regressão gama de McKay

Zhao, Jang e Kim (2022) mostraram que, se $(X_1, X_2)[1, 1], \dots, (X_1, X_2)[M, N]$ é uma amostra aleatória com $n (= MN)$ pontos de $(X_1, X_2) \sim MB\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) para $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ são dados por: definindo

$$\langle \varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)\varphi_3(X_2 - X_1) \rangle = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_1(X_1[i, j])\varphi_2(X_2[i, j])\varphi_3(X_2[i, j] - X_1[i, j])$$

para funções mensuráveis $\varphi_i(\cdot)$,

$$\hat{\gamma} = \frac{\langle X_2 \rangle}{MN(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{\langle X_1 \rangle} \left[(\hat{\alpha}_2 - 1) \left\langle \frac{X_1 \log X_1}{X_2 - X_1} \right\rangle - MN \right]$$

e

$$\hat{\alpha}_2 = - \frac{\langle X_2 \log X_2 \rangle \left(MN + \left\langle \frac{X_1 \log X_1}{X_2 - X_1} \right\rangle \right) + \langle X_2 \rangle \langle \log X_1 \rangle \left(1 + \frac{1}{MN} \langle \log X_2 \rangle - \frac{1}{MN} \left\langle \frac{X_2 \log X_2}{X_2 - X_1} \right\rangle \right)}{\frac{1}{MN} \langle X_2 \rangle \langle \log X_1 \rangle \left\langle \frac{X_2 \log X_2}{X_2 - X_1} \right\rangle - \langle X_2 \log X_2 \rangle \left\langle \frac{X_1 \log X_1}{X_2 - X_1} \right\rangle - \langle \log X_1 \rangle \langle X_2 \log X_2 \rangle}.$$

Sejam $\{(Y_1, Y_2)[1, 1] \mid \mathbf{x}[1, 1]\}, \dots, \{(Y_1, Y_2)[M, N] \mid \mathbf{x}[M, N]\}$ uma amostra independente com $n (= MN)$ pontos tal que $\{(Y_1, Y_2)[i, j] \mid \mathbf{x}[i, j]\} \sim \Gamma(L, L, \mu[i, j](\boldsymbol{\beta})/L)$. A função de log-verossimilhança associada para $\{[(y_{i1}, y_{i2}) \mid \mathbf{x}_i] ; i = 1, \dots, n\}$ sendo uma amostra observada, é dada por:

$$\begin{aligned} \ell([L, \boldsymbol{\beta}]) &= 2nL \log L - L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{y_2[i, j]}{\mu[i, j]} - 2L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \mu[i, j] - 2n \log \Gamma(L) \\ &\quad + (L-1) \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log y_1[i, j] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(y_2[i, j] - y_1[i, j]) \right\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que $\mu[i, j] = g^{-1}(\mathbf{x}[i, j]^\top \boldsymbol{\beta})$. Note que a componente sistemática em (2.22) tem duas partes, uma paramétrica e uma não paramétrica que será representada via decomposição espectral. Vamos começar com a estimação de $\boldsymbol{\beta}$.

A função escore associada, $\mathbf{U}([L, \boldsymbol{\beta}]) = [\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^\top]^\top = [\partial \ell / \partial L, \partial \ell / \partial \boldsymbol{\beta}^\top]^\top$, tem entradas:

• \mathbf{U}_L :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_L &= 2n \log L + 2n - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{y_2[i, j]}{\mu[i, j]} - 2 \sum_{i=1}^n \log \mu[i, j] - 2n \Psi_{(L)}^{(0)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log y_1[i, j] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(y_2[i, j] - y_1[i, j]). \end{aligned}$$

A partir de $\mathcal{U}_L|_{L=\widehat{L}} = 0$, obtém-se

$$2n[\log \widehat{L} - \Psi_{(\widehat{L})}^{(0)}] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{y_2[i,j]}{\mu[i,j]} + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \mu[i,j] - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log y_1[i,j] \\ - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(y_2[i,j] - y_1[i,j]).$$

Usando $\log(z) - \Psi_{(z)}^{(0)} \approx -\frac{1}{2z}$,

$$\frac{1}{\widehat{L}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log y_1[i,j] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(y_2[i,j] - y_1[i,j]) \\ - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{y_2[i,j]}{\widehat{\mu}[i,j]} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \log \widehat{\mu}[i,j].$$

Com isso,

$$\widehat{L} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log y_1[i,j] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(y_2[i,j] - y_1[i,j]) \right. \\ \left. - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{y_2[i,j]}{\widehat{\mu}[i,j]} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \widehat{\mu}[i,j] \right\}^{-1}, \quad (2.28)$$

que é um estimador em forma fechada para o número de equivalentes de *looks*. É importante mencionar que a proposição de um estimador para o número de equivalentes de *looks* é uma área bem definida no processamento de imagens SAR; ver, por exemplo, [Harezlak, Ruppert e Wand \(2018\)](#) e [Ruppert, Wand e Carroll \(2003\)](#).

• \mathcal{U}_β :

$$\mathcal{U}_\beta = L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{y_2[i,j]}{\mu^2[i,j]} \frac{\partial \mu[i,j]}{\partial \eta[i,j]} \frac{\partial \eta[i,j]}{\partial \beta} - 2L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{x}[i,j]}{\mu[i,j] g'(\mu[i,j])} \\ = L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(\frac{y_2[i,j]}{\mu[i,j]^2} - \frac{2}{\mu[i,j]} \right) \frac{\mathbf{x}[i,j]}{g'(\mu[i,j])} = L \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{Y}^*,$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[1, 1]^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}[M, N]^\top \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{g'(\mu[1, 1])}, \dots, \frac{1}{g'(\mu[M, N])} \right\},$$

e

$$\mathbf{Y}^* = \left[\left(\frac{y_2[1, 1]}{\mu^2[1, 1]} - \frac{2}{\mu[1, 1]} \right), \dots, \left(\frac{y_2[M, N]}{\mu^2[M, N]} - \frac{2}{\mu[M, N]} \right) \right]^\top.$$

A matriz Hessiana,

$$\mathbf{H}([L, \boldsymbol{\beta}]) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{LL} & \mathbf{U}_{L\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}L} & \mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^\top} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial L \partial \boldsymbol{\beta}^\top} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial L} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} \end{bmatrix},$$

tem componentes dados por

$$\mathbf{U}_{LL} = 2n[L^{-1} - \Psi_{(L)}^{(1)}], \quad \mathbf{U}_{L\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}L}^\top = \mathbf{Y}^{*\top} \mathbf{W} \mathbf{X}, \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{X}$$

em que $\mathbf{W}_2 = \text{diag}\{w_2[1, 1], \dots, w_2[M, N]\}$ e

$$w_2[i, j] = \frac{1}{[g'(\mu[i, j])]^2} \left[\frac{2}{\mu[i, j]^2} - \frac{2y_2[i, j]}{\mu^3[i, j]} \right] + \frac{g''(\mu[i, j])}{[g'(\mu[i, j])]^3} \left[\frac{2}{\mu[i, j]} - \frac{y_2[i, j]}{\mu^2[i, j]} \right].$$

Assim, a matriz de informação de Fisher é

$$\mathbf{I}([L, \boldsymbol{\beta}]) = \mathbb{E}\{-\mathbf{H}([L, \boldsymbol{\beta}])\} = - \begin{bmatrix} \mathbb{E}(\mathbf{U}_{LL}) & \mathbb{E}(\mathbf{U}_{L\boldsymbol{\beta}}) \\ \mathbb{E}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}L}) & \mathbb{E}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{LL} & \kappa_{L\boldsymbol{\beta}} \\ \kappa_{\boldsymbol{\beta}L} & \kappa_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

em que

$$\kappa_{LL} = 2n \left[\Psi_{(L)}^{(1)} - \frac{1}{L} \right], \quad \kappa_{L\boldsymbol{\beta}} = \kappa_{\boldsymbol{\beta}L}^\top = \mathbf{O}_{p \times 1}, \quad \kappa_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} = L \mathbf{X}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{X}.$$

e $\mathbf{W}_1 = \text{diag}\{2/[\mu[1, 1]g'(\mu[1, 1])]^2, \dots, 2/[\mu[M, N]g'(\mu[M, N])]^2\}$. Observa-se que a informação de Fisher é em blocos diagonais, o que facilita a obtenção dos erros-padrão dos estimadores de máxima verossimilhança.

Finalmente, o EMV para o número de *looks* L é dado na Equação (2.28), enquanto aquele para β não tem formula fechada. Entretanto, usando o método Scoring-Fisher, o EMV para β pode ser derivado pela seguinte identidades iterativas:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}^{(i+1)} &= \widehat{\beta}^{(i)} - \kappa_{\beta\beta}^{-1}(\widehat{\beta}^{(i)})U_{\beta}(\widehat{\beta}^{(i)}) \\ &= \widehat{L}^{(i)}(\mathbf{X}^{\top} \mathbf{W}_2(\widehat{\beta}^{(i)}) \mathbf{X})^{-1} \left[\mathbf{t}(\widehat{\beta}^{(i)}) - \mathbf{X}^{\top} \mathbf{W}(\widehat{\beta}^{(i)}) \mathbf{Y}^*(\widehat{\beta}^{(i)}) \right],\end{aligned}\quad (2.30)$$

em que $\mathbf{t}(\widehat{\beta}^{(i)}) = [\widehat{L}^{(i)}]^{-1}(\mathbf{X}^{\top} \mathbf{W}_2(\widehat{\beta}^{(i)}) \mathbf{X})\widehat{\beta}^{(i)}$. Como critério de parada para a Equação (2.30), adotou-se $\|\widehat{\beta}^{(i+1)} - \widehat{\beta}^{(i)}\| < \epsilon$ tal que ϵ é um erro de precisão pre-especificado, em que $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^{\top} \mathbf{a}}$.

Para estimar β_{k_1, k_2} na Equação (2.23), substitui-se $\tau[i, j]$ por $\widehat{\tau}[i, j] = g(Y[i, j]) - \mathbf{x}^{\top}[i, j]\widehat{\beta}$, resultando na expressão:

$$\widehat{\beta}_{k_1, k_2} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \widehat{\tau}[i, j] \exp \left\{ -\sqrt{-1} \left(\frac{2\pi k_1 i}{M} + \frac{2\pi k_2 j}{N} \right) \right\},$$

em que $\widehat{\beta}$ é o ponto de convergência de $\{\widehat{\beta}^{(i)}; i = 1, 2, \dots\}$.

2.3.4 Analise de resíduos para regressão gama de McKay

Na proposição de um modelo de regressão, a análise de resíduo é uma etapa fundamental. Esta etapa permite que tanto as suposições do modelo sejam verificadas como observações destoantes sejam identificadas. Na literatura de regressão, há diversos tipos de resíduos, entre eles: resíduo original, resíduo padronizado, resíduo de Cox–Snell, resíduo de desvio (deviance), entre outros (MCCULLAGH; NELDER, 1989; DUNN; SMYTH, 2018).

Neste trabalho, utiliza-se o seguinte resíduo de Pearson:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}[i, j] = \begin{bmatrix} \sqrt{L} \frac{Y_1[i, j] - \widehat{\mu}[i, j]}{\widehat{\mu}[i, j]} \\ \sqrt{\frac{L}{2}} \frac{Y_2[i, j] - 2\widehat{\mu}[i, j]}{\widehat{\mu}[i, j]} \end{bmatrix}.$$

Considere discutir a distribuição assintótica do resíduo marginal. De [McCullagh e Nelder \(1989\)](#), segue-se que $\widehat{\mu}[i, j] = g^{-1}(\mathbf{x}[i, j]^\top \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} \mu[i, j] = g^{-1}(\mathbf{x}[i, j]^\top \boldsymbol{\beta})$ se $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ representa os EMVs e, portanto, $\{Y_1[i, j] - \widehat{\mu}[i, j]\}, \{Y_2[i, j] - 2\widehat{\mu}[i, j]\} \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} 0$, em que “ $\xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{P}}$ ” representa a convergência em probabilidade.

Adicionalmente, pelo Teorema de Slutsky ([MUKHOPADHYAY, 2020](#)),

$$R_1[i, j] \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z_1 \triangleq \sqrt{L} \left(\frac{Y_1[i, j]}{\mu[i, j]} - 1 \right) \text{ e } R_2[i, j] \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} Z_2 \triangleq \sqrt{\frac{L}{2}} \left(\frac{Y_2[i, j]}{\mu[i, j]} - 2 \right),$$

em que “ $\xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}}$ ” denota a convergência em distribuição. Logo $\mathbb{E}(R_k[i, j]) \triangleq \mathbb{E}(Z_k) = 0$ para $k = 1, 2$,

$$\mathbb{V}\text{ar}(R_k[i, j]) \triangleq \mathbb{V}\text{ar}(Z_k) = \frac{L}{k \mu^2[i, j]} \mathbb{V}\text{ar}(Y_k[i, j]) = 1$$

e

$$\mathbb{C}\text{ov}(R_1[i, j], R_2[i, j]) \triangleq \mathbb{C}\text{ov}(Z_1, Z_2) = \frac{L \mathbb{C}\text{or}(Y_1[i, j], Y_2[i, j])}{\sqrt{2} \mu^2[i, j] \{\mathbb{V}\text{ar}(Y_1[i, j]) \mathbb{V}\text{ar}(Y_2[i, j])\}^{-1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

em que $f_{n,m}(x) \triangleq f(x)$ representa a quantidade assintota quando n e m são suficientemente grande. Finalmente, pelo Teorema Central do Limite ([MUKHOPADHYAY, 2020](#)),

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}[i, j] \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix} \right)$$

ou, como consequência de propriedades da normal multivariada,

$$\begin{aligned} Q[i, j] &= 2L \left\{ \left(\frac{Y_1[i, j] - \widehat{\mu}[i, j]}{\widehat{\mu}[i, j]} \right)^2 - \left(\frac{Y_1[i, j] - \widehat{\mu}[i, j]}{\widehat{\mu}[i, j]} \right) \left(\frac{Y_2[i, j] - 2\widehat{\mu}[i, j]}{\widehat{\mu}[i, j]} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{Y_2[i, j] - 2\widehat{\mu}[i, j]}{\widehat{\mu}[i, j]} \right)^2 \right\} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_2^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

A Tabela 3 apresenta uma investigação numérica para entender o comportamento na Equação (2.31). Neste ponto, 1000 cenários de Monte Carlo são gerados e, para cada

um deles, gera-se uma amostra n-dimensional (para $n = 49, 81$) de uma MBGR (com coeficientes de regressão $\beta_0 = \beta_1 = 10$) e obtêm-se as avaliações da distância quadrada de Mahalanobis na Equação (2.31) a partir dos resíduos de Pearson. Depois, é verificado se os valores de $Q[i, j]$ seguem uma distribuição χ^2_2 usando do teste de Kolmogorov-Smirnov (GLOVER; MITCHELL, 2002). Como critério de avaliação, usam-se taxas de rejeição de \mathcal{H}_0 : Os dados de $Q[i, j]$ consistem em uma amostra observada de $Q \sim \chi^2_2$, denotadas por $\widehat{\alpha}_{KS}$, a um nível de 5%. Quanto mais próxima de 5%, melhores são os resultados. Pode-se observar da Tabela 3 que de fato este último resultado é confiável para L suficientemente grande. Quando maior o tamanho de amostra, maior é o valor de L requerido.

Tabela 3 – Estimativas ($\widehat{\alpha}_{KS}$) para o nível nominal 5% do teste de Kolmogorov-Smirnov para testar \mathcal{H}_0 : Os dados de $Q[i, j]$ vêm de uma população χ^2_2 .

$n (= NM)$	$\beta_0 = \beta_1$	L	$\widehat{\alpha}_{KS}$
49	10	1	0.768
49	10	5	0.076
49	10	10	0.053
81	10	1	0.947
81	10	5	0.087
81	10	10	0.068
81	10	15	0.059
81	10	20	0.052

2.4 Resultados Numéricos

O estudo numérico desta seção é dividido em duas partes. Primeiro, experimentos Monte Carlo são realizados para quantificar o desempenho dos EMVs para os parâmetros da MBGR. Em seguida, a MBGR é aplicada a dados reais para descrição de texturas em pares (intensidade, SPAN) obtidos a partir de uma imagem SAR.

2.4.1 Estudo de simulação

Foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo com cinco mil réplicas para quantificar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança. Para cada réplica, as amostras observadas foram geradas a partir de pares aleatórios seguindo a distribuição MBΓR. Para a escolha dos parâmetros de simulação (β_0, β_1), foram selecionadas quatro regiões de uma imagem de San Francisco (EUA) — oceano, floresta, área urbana e uma região híbrida composta pelas três anteriores — conforme ilustrado na Figura 3 e cujos valores estão apresentados nas Tabelas 4, 5 e 6. Adotou-se o número de *looks* quatro (correspondente à imagem de San Francisco) e tamanhos amostrais em $\{5 \times 5, 7 \times 7, 9 \times 9, 11 \times 11, 13 \times 13\}$ (tamanhos comumente usados no processamento de imagens SAR). Assumiu-se que os valores verdadeiros representam faixas de intensidade SAR com diferentes texturas. As seguintes medidas foram utilizadas como critérios de avaliação: viés e erro quadrático médio (EQM).

As Tabelas 4, 5 e 6 apresentam informações sobre o desempenho das estimativas. De modo geral, as estimativas foram aceitáveis e produziram valores de EQM e viés que diminuem com o aumento do tamanho amostral. Ao analisar o tipo de textura como fonte de comparação, as estimativas dos coeficientes de regressão exibem menores EQMs para floresta, área urbana e híbrida do que para oceano; já as estimativas de L apresentam menores valores para oceano do que para as demais texturas. Estes resultados estão alinhados com o que se espera fisicamente. Note que os parâmetros em β estão associados com o sinal conforme Equação (2.21); enquanto, o L é relacionado ao *speckle*, que é presente plenamente em cenários homogêneos, oceano (NASCIMENTO; FERREIRA; SILVA, 2023). Os resultados numéricos confirmam a superioridade do cenário com $L = 4$, em relação a $L = 1$ (caso *singlelook*) e $L = 2$: na textura oceânica, o EQM de $\hat{\beta}_1$ reduziu-se de 1514.91 para 264.94; na floresta, de 53.16 para 9.97; na área urbana, de 2.32 para 0.39; e na híbrida, de 5.90 para 1.27. Além disso, os vieses médios de $\hat{\beta}_1$ apresentaram reduções expressivas, passando de aproximadamente -0.043 para



Figura 3 – Áreas selecionadas para estimação de parâmetros.

$L = 1$ para cerca de -0.014 em $L = 4$, o que representa uma diminuição de quase três vezes. Esses resultados indicam que as estimativas tornaram-se mais centradas e consistentes, evidenciando maior estabilidade numérica e menor tendência sistemática nos parâmetros ajustados. Assim, os resultados são melhores para $L = 4$, constatando o que se provou matematicamente que os melhores resultados são quando $L \rightarrow \infty$ em (2.31).

2.4.2 Aplicação a dados reais

Nesta seção, aplica-se a MBFR para analisar um trecho de imagem SAR de São Francisco obtidas por um sensor AIRSAR[□] com número de *looks* quatro, $L = 4$. A imagem utilizada na Figura 3 tem dimensão 150×150 e contém três texturas claramente definidas: oceano, floresta e área urbana. A base de dados sobre a qual essa imagem se

Tabela 4 – Valores dos critérios viés(·) e EQM(·) por área: oceano, floresta, urbana e híbrida, para $L = 1$.

Área	n	β_0	β_1	L	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	\tilde{L}	Viés($\widehat{\beta}_0$)	Viés($\widehat{\beta}_1$)	Viés(\widehat{L})	EQM($\widehat{\beta}_0$)	EQM($\widehat{\beta}_1$)	EQM(\widehat{L})
Oceano	25				-6.2374	62.7840	0.7888	-0.5863	0.4578	-0.2112	0.5900	1514.9124	0.0963
	49				-6.2250	61.6260	0.7810	-0.5740	-0.7002	-0.2190	0.4509	712.3079	0.0742
	81	-5.6510	62.3261	1.0000	-6.2213	61.6479	0.7711	-0.5702	-0.6782	-0.2289	0.3964	426.9881	0.0669
	121				-6.2337	62.5982	0.7680	-0.5827	0.2721	-0.2320	0.3850	260.1820	0.0634
	169				-6.2295	62.3023	0.7667	-0.5784	-0.0238	-0.2333	0.3674	182.3450	0.0613
	25				-3.6269	2.2945	0.7964	-0.5774	-0.1575	-0.2036	0.4120	53.1552	0.0935
Floresta	49				-3.6260	2.4226	0.7806	-0.5765	-0.0295	-0.2194	0.3702	18.7626	0.0732
	81	-3.0495	2.4521	1.0000	-3.6272	2.4944	0.7732	-0.5777	0.0423	-0.2268	0.3559	9.0326	0.0665
	121				-3.6262	2.4767	0.7719	-0.5767	0.0247	-0.2281	0.3473	5.3504	0.0617
	169				-3.6246	2.4218	0.7692	-0.5751	-0.0303	-0.2308	0.3411	3.4249	0.0601
	25				-2.4937	-1.3761	0.7964	-0.5784	-0.0020	-0.2036	0.4101	2.3217	0.0968
	49				-2.4920	-1.3855	0.7806	-0.5768	-0.0114	-0.2194	0.3715	0.6579	0.0746
Urbana	81	-1.9152	-1.3741	1.0000	-2.4957	-1.3855	0.7732	-0.5805	-0.0114	-0.2268	0.3594	0.2997	0.0662
	121				-2.4900	-1.3709	0.7729	-0.5747	0.0032	-0.2271	0.3449	0.1754	0.0614
	169				-2.4907	-1.3650	0.7685	-0.5755	0.0091	-0.2315	0.3419	0.1109	0.0605
	25				-3.0983	-1.4312	0.8035	-0.5729	-0.0343	-0.1965	0.3970	5.8999	0.0948
	49				-3.1036	-1.4090	0.7808	-0.5783	-0.0120	-0.2192	0.3682	1.5534	0.0730
	81	-2.5254	-1.3970	1.0000	-3.1032	-1.3764	0.7722	-0.5779	0.0206	-0.2278	0.3549	0.6370	0.0664
Híbrida	121				-3.1019	-1.4003	0.7717	-0.5765	-0.0033	-0.2283	0.3465	0.3498	0.0622
	169				-3.1012	-1.4017	0.7697	-0.5759	-0.0047	-0.2303	0.3414	0.2171	0.0598

Tabela 5 – Valores dos critérios viés(\cdot) e EQM(\cdot) por área: oceano, floresta, urbana e híbrida, para $L = 2$.

Área	n	β_0	β_1	L	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	\tilde{L}	Viés($\widehat{\beta}_0$)	Viés($\widehat{\beta}_1$)	Viés(\widehat{L})	EQM($\widehat{\beta}_0$)	EQM($\widehat{\beta}_1$)	EQM(\widehat{L})
Oceano	25				-5.9229	62.4497	1.8321	-0.2719	0.1236	-0.1679	0.1698	588.6036	0.2347
	49				-5.9155	61.9861	1.8015	-0.2645	-0.3400	-0.1985	0.1150	263.5447	0.1369
	81	-5.6510	62.3261	2.0000	-5.9196	62.2041	1.7790	-0.2685	-0.1220	-0.22210	0.0979	156.3083	0.1012
	121				-5.9211	62.2394	1.7718	-0.2701	-0.0867	-0.2282	0.0912	106.1527	0.0889
	169				-5.9177	62.1551	1.7702	-0.2666	-0.1710	-0.2298	0.0840	74.3443	0.0782
	25				-3.3222	2.5806	1.8317	-0.2727	0.1285	-0.1683	0.1047	20.0781	0.2265
Floresta	49				-3.3203	2.4345	1.7912	-0.2708	-0.0175	-0.2088	0.0889	7.3661	0.1413
	81	-3.0495	2.4521	2.0000	-3.3192	2.4448	1.7750	-0.2697	-0.0072	-0.2250	0.0814	3.5680	0.1044
	121				-3.3219	2.4864	1.7721	-0.2724	0.0344	-0.2279	0.0800	2.0833	0.0893
	169				-3.3201	2.4773	1.7682	-0.2706	0.0253	-0.2318	0.0775	1.4021	0.0808
	25				-2.1920	-1.3891	1.8291	-0.2768	-0.0150	-0.1709	0.1060	0.8263	0.2410
	49				-2.1867	-1.3812	1.7945	-0.2715	-0.0071	-0.2055	0.0882	0.2654	0.1345
Urbana	81	-1.9152	-1.3741	2.0000	-2.1848	-1.3797	1.7825	-0.2696	-0.0057	-0.2175	0.0814	0.1181	0.1032
	121				-2.1846	-1.3695	1.7701	-0.2694	0.0046	-0.2299	0.0782	0.0696	0.0902
	169				-2.1860	-1.3781	1.7678	-0.2708	-0.0040	-0.2322	0.0774	0.0437	0.0795
	25				-2.7959	-1.3649	1.8317	-0.2705	0.0320	-0.1683	0.1001	2.4155	0.2478
	49				-2.7934	-1.3810	1.7980	-0.2681	0.0166	-0.2020	0.0850	0.5662	0.1378
	81	-2.5254	-1.3970	2.0000	-2.7943	-1.3909	1.7851	-0.2689	0.0061	-0.2149	0.0805	0.2563	0.1043
Híbrida	121				-2.7963	-1.3992	1.7705	-0.2709	-0.0022	-0.2295	0.0788	0.1375	0.0900
	169				-2.7962	-1.3998	1.7673	-0.2708	-0.0028	-0.2327	0.0772	0.0900	0.0811

Tabela 6 – Valores dos critérios viés(·) e EQM(·) por área: oceano, floresta, urbana e híbrida, para $L = 4$.

Área	n	β_0	β_1	L	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	\tilde{L}	Viés($\widehat{\beta}_0$)	Viés($\widehat{\beta}_1$)	Viés(\widehat{L})	EQM($\widehat{\beta}_0$)	EQM($\widehat{\beta}_1$)	EQM(\widehat{L})
Oceano	25				-5.7737	61.8457	3.9284	-0.1226	-0.4804	-0.0716	0.0573	264.9442	0.8468
	49				-5.7823	62.3796	3.8294	-0.1312	0.0535	-0.1706	0.0372	119.5742	0.4004
	81	-5.6510	62.3261	4.0000	-5.7819	62.3810	3.7940	-0.1309	0.0549	-0.2060	0.0285	66.7330	0.2584
	121				-5.7801	62.2844	3.7858	-0.1291	-0.0418	-0.2142	0.0247	45.8204	0.1859
	169				-5.7817	62.3380	3.7788	-0.1307	0.0119	-0.2212	0.0227	31.9713	0.1489
	25				-3.1796	2.5004	3.9077	-0.1301	0.0484	-0.0923	0.0305	9.3739	0.8531
Floresta	49				-3.1802	2.4655	3.8369	-0.1307	0.0135	-0.1631	0.0236	3.2641	0.3933
	81	-3.0495	2.4521	4.0000	-3.1785	2.4508	3.8123	-0.1290	-0.0013	-0.1877	0.0205	1.5276	0.2558
	121				-3.1799	2.4596	3.7813	-0.1304	0.0075	-0.2187	0.0196	0.9369	0.1916
	169				-3.1799	2.4723	3.7783	-0.1304	0.0202	-0.2217	0.0188	0.5768	0.1522
	25				-2.0457	-1.3762	3.9386	-0.1305	-0.0021	-0.0614	0.0300	0.3869	0.8747
	49				-2.0452	-1.3777	3.8201	-0.1300	-0.0036	-0.1799	0.0234	0.1143	0.4146
Urbana	81	-1.9152	-1.3741	4.0000	-2.0452	-1.3736	3.7958	-0.1300	0.0004	-0.2042	0.0207	0.0553	0.2629
	121				-2.0443	-1.3719	3.7890	-0.1291	0.0022	-0.2110	0.0191	0.0302	0.1883
	169				-2.0468	-1.3751	3.7700	-0.1316	-0.0010	-0.2300	0.0191	0.0191	0.1523
	25				-2.6560	-1.3692	3.9366	-0.1306	0.0278	-0.0634	0.0291	1.0720	0.8355
	49				-2.6544	-1.3974	3.8283	-0.1290	-0.0005	-0.1717	0.0226	0.2501	0.3968
	81	-2.5254	-1.3970	4.0000	-2.6562	-1.3982	3.7937	-0.1308	-0.0012	-0.2063	0.0206	0.1117	0.2573
Híbrida	121				-2.6564	-1.3964	3.7780	-0.1311	0.0006	-0.2220	0.0195	0.0586	0.1932
	169				-2.6557	-1.3970	3.7765	-0.1303	0.0000	-0.2235	0.0187	0.0367	0.1526

□ O radar AIRSAR (*Airborne Synthetic Aperture Radar*) é uma ferramenta de imagem apta a trabalhar em todas as condições climáticas. Seus comprimentos de onda mais longos também podiam penetrar no dossel florestal e em áreas extremamente secas, através de fina camada de areia e neve seca. O Laboratório de Propulsão a Jato (JPL) projetou o AIRSAR e este serviu como um banco de testes de tecnologia de radar da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA). Como parte do *Earth Science Enterprise* da NASA, o AIRSAR voou pela primeira vez em 1988 e realizou sua última missão em 2004.



Figura 4 – Imagem do sistema AIRSAR.

apoia é descrita a seguir.

Sistemas PolSAR utilizam iluminação coerente na aquisição de imagens e, como consequência, os retornos multivariados são afetados por ruído de *speckle* multidimensional, o que dificulta o processamento (por exemplo, análise de textura e classificação) de imagens PolSAR. Para levar em conta o efeito desse ruído, adota-se o processamento *multilook* como segue.

Sejam z_1, \dots, z_L tais que $z_i = [S_{HH}^{(i)}, S_{HV}^{(i)}, S_{VV}^{(i)}]^\top$, para $i = 1, \dots, L$, como L observações em um dado pixel; então, os dados PolSAR *multilook* são definidos pela matriz

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L z_i z_i^* = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \begin{bmatrix} \langle S_{HH}^{(i)}, S_{HH}^{(i)} \rangle & \langle S_{HH}^{(i)}, S_{HV}^{(i)} \rangle & \langle S_{HH}^{(i)}, S_{VV}^{(i)} \rangle \\ \langle S_{HV}^{(i)}, S_{HH}^{(i)} \rangle & \langle S_{HV}^{(i)}, S_{HV}^{(i)} \rangle & \langle S_{HV}^{(i)}, S_{VV}^{(i)} \rangle \\ \langle S_{VV}^{(i)}, S_{HH}^{(i)} \rangle & \langle S_{VV}^{(i)}, S_{HV}^{(i)} \rangle & \langle S_{VV}^{(i)}, S_{VV}^{(i)} \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que $\langle a, b \rangle = a b^*$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$, é o produto interno entre a e b . A característica $I_\ell = L^{-1} \sum_{i=1}^L \langle S_\ell^{(i)}, S_\ell^{(i)} \rangle$, para $\ell = HH, HV, VV$, é conhecida como *intensidade*.

Nesta aplicação, buscamos identificar padrões para o sinal em $\mathbf{Y} = (I_{HH}, SPAN) = (I_{HH}, I_{HH} + I_{VV})$.

O objetivo principal desta aplicação é verificar em quais situações o uso da MBΓR faz mais sentido do que o uso da MBΓ incondicional, com ou sem reparametrização. Para isso, selecionamos janelas deslizantes (3×3) ao redor de cada pixel (excluindo as bordas) e aplicamos, a cada uma dessas janelas, os modelos incondicionais $\text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ e $\text{MB}\Gamma(\mu, L)$, bem como os modelos condicionais $\text{MB}\Gamma\text{R}(\mu(\beta), L)$. A seguinte estrutura sistemática é utilizada para a MBΓR:

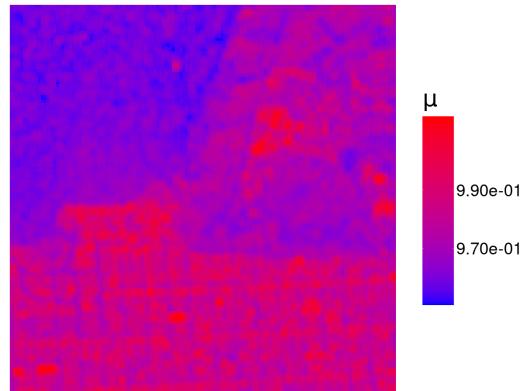
$$\begin{aligned}\mu(\beta)[i, j] &= \mathbb{E}\{Y[i, j] \mid \mathfrak{R}[\langle S_{HH}, S_{VV} \rangle][i, j]\} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \mathfrak{R}[\langle S_{HH}, S_{VV} \rangle][i, j] + \tau[i, j].\end{aligned}$$

A seguir, analisamos o desempenho preditivo das duas abordagens reparametrizadas e, então, as comparamos com o critério de Mellin proposto, $\mathcal{T}(\hat{\theta})$.

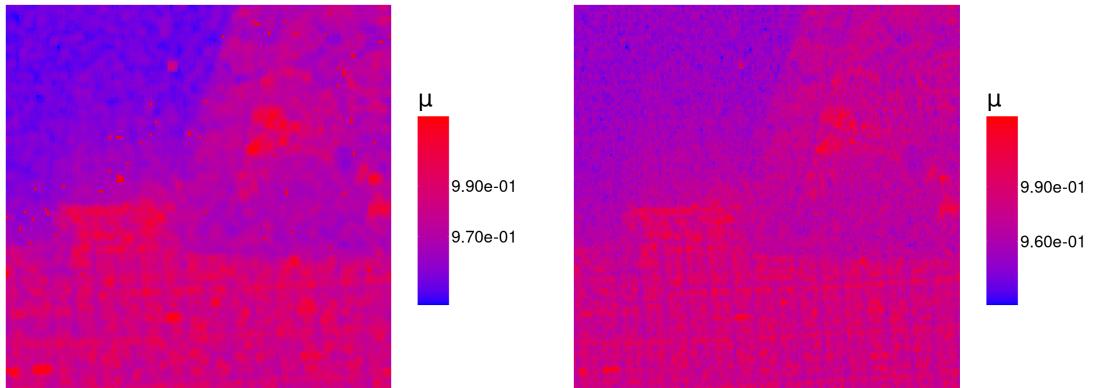
A Figura 5 apresenta as imagens preditas. Em todos os casos, observa-se que o mapas fornecem uma representação que se alinha com a dinâmica das texturas da imagem; isto é, as três texturas estão bem delineadas.

A Figura 6 mostra comparações entre valores observados e ajustados para $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}(\beta)$ por textura. Primeiro, um mapa de referência (*ground truth*) é mostrado na Figura 6a. Em seguida, os ajustes (cujas curvas associadas: a tracejada clara representa a MBΓ sem reparametrização, a tracejada escura representa a MBΓ reparametrizada e a linha cheia, a MBΓR) em áreas de mar, floresta e urbana são examinados nas Figuras 6b, 6c e 6d. Em todos os casos, a MBΓR apresenta desempenho superior ao da MBΓ.

A Tabela 7 apresenta os resultados da distância de Kullback–Leibler (KL) (**KULLBACK, 1997**) entre as distribuições empíricas das intensidades observadas e valores preditos por texturas. O MBΓR (*com regressor Fourier*) apresentou as menores distâncias KL em todos os casos, evidenciando o melhor ajuste global aos dados observados. O ganho de desempenho é particularmente expressivo em relação aos modelos sem o termo de Fourier, isso se deve a incorporar estrutura de dependência espacial.



(a) $\widehat{\mu}[i, j]$ só com intercepto.



(b) $\widehat{\mu}[i, j]$ com regressor paramétrico.

(c) $\widehat{\mu}[i, j]$ com regressor semi-paramétrico

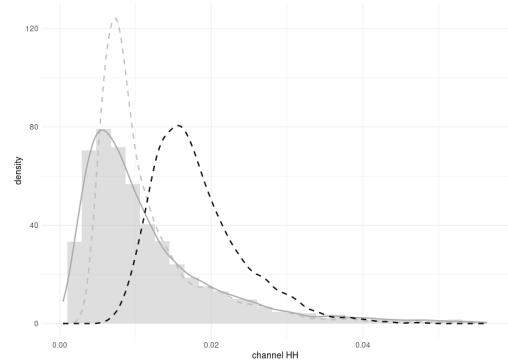
Figura 5 – Foram utilizados os canais HH e HH+VV; $\mu = \gamma L$ e $\widehat{\mu} = \exp\{\beta_0 + \beta_1 \Re(HHVV)\}$.

Tabela 7 – Distâncias KL entre densidades empíricas de intensidades observadas e preditas nas texturas de oceano, floresta e urbano da imagem AIRSAR de São Francisco.

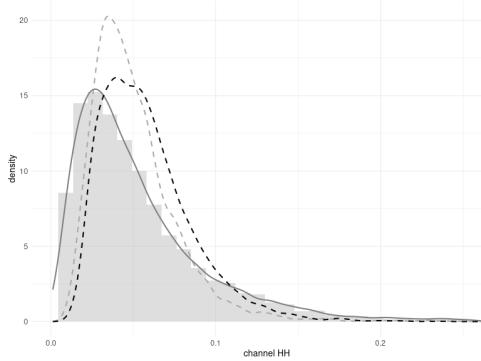
Textura	Modelos Ajustados		
	MBΓ reparametrizada	MBΓ reparametrizada com Regressão	MBΓ reparametrizada com Regressão e Fourier
Oceano	0.1981	0.8603	0.0066
Floresta	0.1844	0.4848	0.0067
Urbano	0.3505	0.3512	0.0068



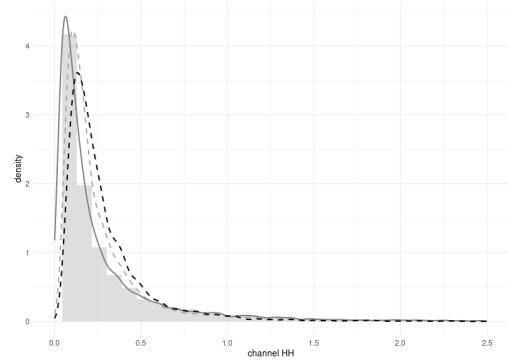
(a) Imagem de São Francisco



(b) Ajustes na região oceânica — curva preta/ μ vs. curva cinza/ μ (β)



(c) Ajustes na região de floresta — curva preta/ μ vs. curva cinza/ μ (β)



(d) Ajustes na região urbana — curva preta/ μ vs. curva cinza/ μ (β)

Figura 6 – Ajustes por região para a imagem de São Francisco.

A Figura 7 apresenta mapas nos quais o critério (2.26) é aplicado aos modelos original, reparametrizado e de regressão. Quanto maiores os valores de \mathcal{T} , melhor é o modelo associado. Nota-se que o modelo original é mais adequado para descrever áreas oceânicas, o que é esperado para cenários sem sinal estrutural. Por outro lado, os modelos reparametrizados foram superiores para texturas de floresta e urbana. A Figura 8a mostra o modelo $\text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ em pixels pretos quando apresenta melhor desempenho e $\text{MB}\Gamma\text{R}(\mu, L)$ em pixels brancos. A Figura 8b mostra o modelo $\text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ em

pixels pretos quando é superior e $\text{MBGR}(\mu(\beta), L)$ em pixels brancos. A Figura 8c mostra o modelo $\text{MBGR}(\mu, L)$ em pixels pretos quando é melhor e $\text{MBGR}(\mu(\beta), L)$ em pixels brancos. Observa-se que $\text{MBGR}(\mu(\beta), L)$ supera $\text{MBGR}(\mu, L)$ nos cenários em que a textura é mais pronunciada (por exemplo, em florestas e áreas urbanas), superando também a $\text{MBG}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. Para a região oceânica, por outro lado, $\text{MBG}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ apresentou os melhores resultados.

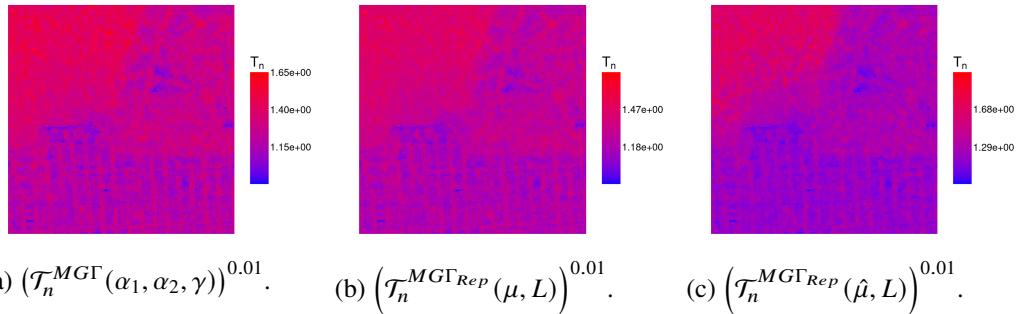


Figura 7 – Imagens de São Francisco com valores da transformada de Mellin (\mathcal{T}_n) para $\mathcal{T}_n^{MGR}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, $\mathcal{T}_n^{MGR_{Rep}}(\mu, L)$ e $\mathcal{T}_n^{MGR_{Rep}}(\hat{\mu}, L)$.

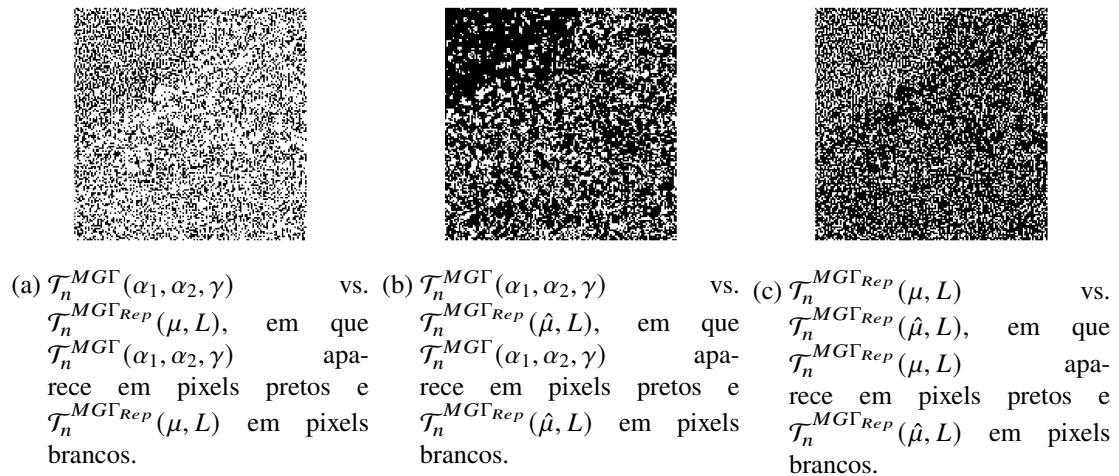


Figura 8 – Foram utilizados os canais HH e HH+VV, com $\alpha_1 = \alpha_2 = L$ e $\mu = \gamma L$; $\hat{\mu} = \exp\{\beta_0 + \beta_1 \Re(HHVV)\}$.

2.5 Considerações parciais da primeira contribuição

A literatura recente tem mostrado que a distribuição gama bivariada de McKay para o par (Intensidade, SPAN) $\sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ – é um suposto interpretável para atributos induzidos pelo SPAN. Neste capítulo, avançou-se o trabalho de [Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#), propondo o modelo MB Γ R. Essa formulação permitiu relacionar pares de atributos induzidos pelo SPAN a regressores paramétricos (geométricos, radiométricos ou contextuais) e padrão espacial extraído pela representação de Fourier bidimensional.

Do ponto de vista inferencial, derivaram-se a matriz de informação de Fisher e um estimador iterativo baseado no método de *Scoring-Fisher*. Em particular, apresentou-se um novo estimador em forma fechada para o número de equivalente de looks. Introduziu-se ainda um critério de seleção de modelo baseado na transformada de Mellin.

Experimentos sintéticos e numéricos advogam em favor do uso da MB Γ R para extração de textura pela flexibilidade de incorporar várias fontes de variação e ter uma relação com a física de formação.

3 Detecção de bordas via divergências entre atributos SPAN tipo razão

Uma imagem SAR é formada a partir da energia eletromagnética retroespalhada pelos alvos na superfície terrestre, sendo construída por meio da combinação coerente dos sinais transmitidos e recebidos ao longo da trajetória do radar. Diferentemente de uma imagem óptica RGB, que é derivada de sensores multiespectrais sensíveis à radiação refletida em bandas específicas do espectro visível, as intensidades SAR dependem diretamente das propriedades físicas do alvo — rugosidade, umidade, orientação das estruturas — e do ângulo de incidência do feixe transmitido pelo sensor.

No modo polarimétrico, o radar transmite e recebe ondas eletromagnéticas em diferentes estados de polarização, tipicamente horizontal (H) e vertical (V). Os dados PolSAR caracterizam o comportamento de espalhamento dos alvos e são originalmente representados por um vetor complexo, contendo as componentes de polarização medidas. Esse vetor pode ser reorganizado na forma de uma matriz de espalhamento de polarização S , cujos elementos correspondem às combinações transmissão–recepção: HH, HV, VH e VV (LEE et al., 1994; YANG et al., 2021). Cada elemento da matriz contém magnitude e fase, refletindo a natureza coerente do sistema SAR e permitindo caracterizar fenômenos como anisotropia, simetria e mecanismos de espalhamento.

Uma técnica eficaz para decompor imagens PolSAR é a decomposição básica de Pauli, que modela a matriz de espalhamento em três estruturas: superfície rugosa, volume e duplo salto. Esta decomposição fornece uma imagem com informações sobre a potência total de espalhamento, chamada de SPAN. A primeira estrutura é formada pela recepção de sinais eletromagnéticos no solo ou em água translúcida, sendo sensível ao espalhamento do canal VV. A segunda estrutura é formada pela recepção de sinais

em folhas e galhos em um dossel florestal e é sensível aos canais VH e HV. A última estrutura é causada por edifícios, troncos de árvores ou vegetação inundada e é mais sensível a um sinal polarizado HH (HAJNSEK; DESNOS, 2021).

Alguns autores têm usado o mapa de informações de SPAN para melhorar o desempenho de métodos de classificação, otimização, detecção de mudanças e segmentação para imagens PolSAR, por exemplo: Sensoriamento remoto de diferenças topográficas entre montanhas e áreas urbanas (ZHANG et al., 2020) e classificação de dados de vegetação usando coeficiente de correlação e distância euclidiana como medida de similaridade (YIN et al., 2019). Recentemente, Nascimento, Ferreira e Silva (2023) propuseram testes de hipóteses baseados em distâncias estocásticas para resolver problemas de detecção de mudanças, considerando a distribuição gamma bivariada de McKay para descrever características derivadas de SPAN. Este trabalho foi estendido por Silva e Nascimento (2023).

As propostas de Nascimento, Ferreira e Silva (2023) e Silva e Nascimento (2023) são interessantes, mas tem o foco no efeito da intensidade e do SPAN conjuntamente. Nesta parte da tese, objetiva-se colocar a ênfase num atributo escalar do SPAN, a taxa razão $I/[I + SPAN] \in (0, 1/2)$ para I como uma intensidade, denominada de *atributo SPAN tipo razão*. Inicia-se com uma discussão probabilística deste atributo a partir da suposição $(I, SPAN) \sim MBG$. A distribuição resultante é justificada em termos da definição do SPAN e uma discussão de seus possíveis valores é elaborada. Derivam-se quatro novas medidas de contraste, considerando as distâncias de Kullback-Leibler, Rényi, Bhattacharyya e Hellinger. Então, novos testes de hipóteses são propostos com base em Teoria da Informação para atributos SPAN tipo razão. Quanto aos detectores de borda também são introduzidos. Estudos de simulação de Monte Carlo são feitos para quantificar o desempenho dos testes propostos. Finalmente, duas aplicações a dados SAR reais são realizadas para investigar as áreas da região de Japaratinga, Alagoas, Brasil e da baía de São Francisco, EUA.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 3.1 contém uma discussão justificando o uso de suposições probabilísticas adotadas. A Seção 3.2 apresenta o método de estimativa usado neste trabalho. A Seção 3.3 discute a contribuição teórica deste trabalho. A Seção 3.4 exibe os resultados numéricos. As principais contribuições são resumidas na Seção 3.5.

3.1 Usando a distribuição Beta tipo 3 modificada como descritor da função do SPAN

Considere agora cada entrada da imagem descrita pelo par aleatório $X[i, j] = (X_1[i, j], X_2[i, j]) = (\text{Intensidade}, \text{SPAN}) \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. Do ponto de vista teórico, [Gupta e Nadarajah \(2006b\)](#) indicaram a importância do atributo $X_1[i, j]/(X_1[i, j] + X_2[i, j])$ a partir de $X[i, j]$. Nesta seção, objetiva-se explorar sua importância na física de formação de imagens SAR.

Definição 3.1.1. [Gupta e Nadarajah \(2006b\)](#) mostraram que se $[X[i, j] := (X_1[i, j], X_2[i, j])] \sim \text{MB}\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, então $Z[i, j] = X_1[i, j]/(X_1[i, j] + X_2[i, j])$ segue uma distribuição com PDF dada por

$$f_Z(z[i, j]; p, q) = \frac{1}{\text{Beta}(p, q)} \frac{z[i, j]^{p-1} (1 - 2z[i, j])^{q-1}}{(1 - z[i, j])^{p+q}} \mathbb{I}_{(0,1/2)}(z[i, j]), \quad (3.1)$$

em que $\text{Beta}(p, q) = [\Gamma(a)\Gamma(b)]/\Gamma(a + b)$ é a função beta e $\Gamma(a)$ é a função gama. Pelo que sabemos, essa distribuição não tem uma notação, então a denotamos como $Z[i, j] \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$.

De agora em diante, assumimos $[Z[i, j] = \text{Intensidade}[i, j]/(\text{Intensidade}[i, j] + \text{SPAN}[i, j])] \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$. De acordo com [Gupta e Nadarajah \(2006b\)](#),

$$\mathbb{E}[Z^n[i, j]] = \frac{\text{Beta}(p + n, q)}{2^{p+n}\text{Beta}(p, q)} {}_2F_1(p + n, p + q; p + q + n; 1/2),$$

em que ${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \{(a)_k (b)_k / (c)_k\} (x^k / k!)$ é a função hipergeométrica de Gauss, n é a ordem de Z e $(e)_k = e(e+1) \cdots (e+k-1)$ significa o fatorial ascendente. Como consequência, tem-se:

$$\mathbb{E}(Z[i, j]) = \frac{p}{2^{p+1}(p+q)} {}_2F_1(p+1, p+q; p+q+1; 1/2)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z[i, j]] &= \frac{p}{4(p+q)^2(p+q+1)} [2^{-p}(p+1)(p+q){}_2F_1(p+2, p+q; p+q+2; 1/2) \\ &\quad 4^{-p}p(p+q+1)({}_2F_1(p+2, p+q; p+q+2; 1/2))^2]. \end{aligned}$$

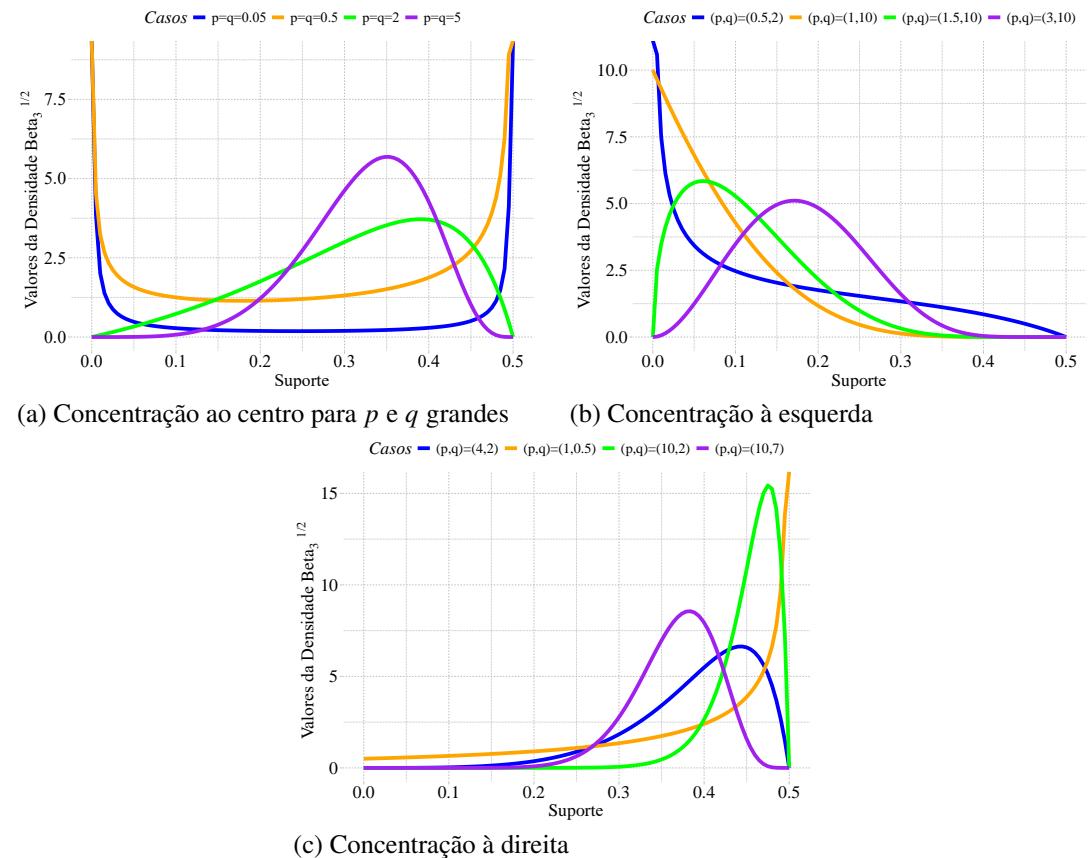


Figura 9 – Gráficos para a densidade $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$.

A Figura 9 ilustra o comportamento da densidade $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$ para diferentes combinações dos parâmetros (p, q) , evidenciando como tais parâmetros controlam tanto a assimetria quanto a região de maior concentração de probabilidade no intervalo $(0, 1/2)$. Quando $p = q$, a distribuição tende a concentrar sua massa em torno da região central, tornando-se aproximadamente simétrica para valores elevados de p e q . Para $p < q$, a probabilidade concentra-se na extremidade esquerda do intervalo, produzindo uma distribuição assimétrica voltada para valores menores. Por outro lado, quando $p > q$, a massa de probabilidade desloca-se para a extremidade direita, resultando em uma distribuição assimétrica acentuada nessa direção.

3.2 Inferência Estatística

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) é obtido por maximizar a função de verossimilhança e satisfaz as propriedades consistência, eficiência e normalidade assintótica. Vamos deduzir um procedimento para obter os EMVs para os parâmetros da distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$. Considere $Z[1, 1], \dots, Z[M, N]$ como uma amostra aleatória (independente e identicamente distribuída) com $n (= MN)$ pontos de $Z \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$ e $z[1, 1], \dots, z[M, N]$. A log-verossimilhança associada tem a forma:

$$\ell(p, q) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log f_Z(z[i, j]) = -n \log \text{Beta}(p, q) + (p-1) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(z[i, j]) \\ + (q-1) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(1 - 2z[i, j]) - (p+q) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log(1 - z[i, j]). \quad (3.2)$$

A função escore, também conhecida como gradiente da função log-verossimilhança, é uma ferramenta valiosa para avaliar a sensibilidade das estimativas a pequenas alterações nos parâmetros, pois fornece informações sobre a direção e a magnitude das alterações necessárias nos parâmetros (COX; HINKLEY, 1979). A função escore na

discussão da Equação (3.2) é dada por:

$$\mathcal{U}(p, q) = [\mathcal{U}_p, \mathcal{U}_q]^\top := \left[\frac{\partial \ell(p, q)}{\partial p}, \frac{\partial \ell(p, q)}{\partial q} \right],$$

em que

$$\mathcal{U}_p = -n[\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \frac{z[i, j]}{1 - z[i, j]},$$

e

$$\mathcal{U}_q = -n[\Psi^{(0)}(q) - \Psi^{(0)}(p+q)] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \frac{1 - 2z[i, j]}{1 - z[i, j]},$$

em que $\Psi^{(k)} = d^{k+1} \log \Gamma(x) / dx^{k+1}$. Observe que, a partir de $\mathbb{E}[\mathcal{U}_p] = \mathbb{E}[\mathcal{U}_q] = 0$, seguem-se as seguintes identidades: Seja $Z[i, j] \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$,

$$\mathbb{E} \left\{ \log \frac{Z[i, j]}{1 - Z[i, j]} \right\} = \Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)$$

e

$$\mathbb{E} \left\{ \log \frac{1 - 2Z[i, j]}{1 - Z[i, j]} \right\} = \Psi^{(0)}(q) - \Psi^{(0)}(p+q).$$

E, como consequência,

$$\mathbb{E} \left\{ \log \frac{Z[i, j]}{1 - 2Z[i, j]} \right\} = \Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(q).$$

No teorema a seguir, os valores esperados $\mathbb{E}[\log Z[i, j]]$, $\mathbb{E}[\log(1 - Z[i, j])]$ e $\mathbb{E}[\log(1 - 2Z[i, j])]$ são comprovados. Essas são etapas importantes na busca por medidas de teoria da informação.

Teorema 3.2.1. *Seja $Z[i, j] \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$, então as próximas identidades são verificadas:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Z_1}[\log Z[i, j]] &= [\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)]_2 F_1(p, p+q; p+q; 1/2) \\ &\quad + {}_2 F_1^{(1, 0, 0, 0)}(p, p+q; p+q; 1/2) + {}_2 F_1^{(0, 0, 1, 0)}(p, p+q; p+q; 1/2), \\ \mathbb{E}_{Z_1}[\log(1 - Z[i, j])] &= \mathbb{E}_{Z_1}[\log Z[i, j]] + [\Psi^{(0)}(p+q) - \Psi^{(0)}(p)], \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{E}_{Z_1}[\log(1 - 2Z[i, j])] = \mathbb{E}_{Z_1}[\log Z[i, j]] + [\Psi^{(0)}(q) - \Psi^{(0)}(p)],$$

em que

$${}_2F_1^{(1,0,0,0)}(a, b; c; z) = \frac{d_2F_1(a, b; c; z)}{da} e {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(a, b; c; z) = \frac{d_2F_1(a, b; c; z)}{dc}.$$

A prova desse teorema pode ser encontrada no Apêndice A.

A matriz de informações de Fisher (IF), por sua vez, quantifica a quantidade de informações contidas nos dados sobre os parâmetros de um modelo ou distribuição. Como tal, ela é determinada a partir da segunda derivada da log-verossimilhança com relação aos parâmetros e não apenas fornece a variabilidade das EVMs, mas também permite o cálculo de intervalos de confiança e a realização de testes de hipóteses. A expressão da IF para Beta₃^{1/2}(p, q) é

$$\mathcal{K}(p, q) = -\mathbb{E} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{pp} & \mathcal{U}_{pq} \\ \mathcal{U}_{qp} & \mathcal{U}_{qq} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ell(p, q)}{\partial p^2} & -\frac{\partial^2 \ell(p, q)}{\partial p \partial q} \\ -\frac{\partial^2 \ell(p, q)}{\partial q \partial p} & -\frac{\partial^2 \ell(p, q)}{\partial q^2} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

em que $\mathcal{U}_{pp}/n = \Psi^{(1)}(p) - \Psi^{(1)}(p + q)$, $\mathcal{U}_{pq}/n = \mathcal{U}_{qp}/n = -\Psi^{(1)}(p + q)$, e $\mathcal{U}_{qq}/n = \Psi^{(1)}(q) - \Psi^{(1)}(p + q)$.

Por fim, os EMVs para os parâmetros da Beta₃^{1/2}(p, q) são dado por:

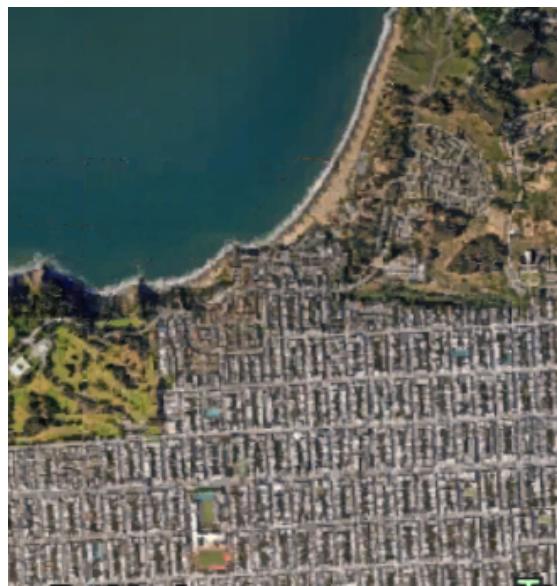
$$\begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \arg \max_{p, q \in \mathbb{R}} [\ell(p, q)].$$

ou, de forma equivalente, por soluções do sistema não linear

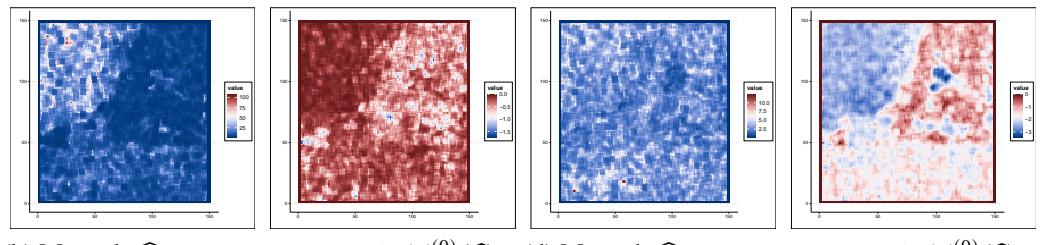
$$\begin{cases} \Psi^{(0)}(\hat{q}) - \Psi^{(0)}(\hat{p} + \hat{q}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \frac{1 - 2z[i, j]}{1 - z[i, j]}, \\ \Psi^{(0)}(\hat{p}) - \Psi^{(0)}(\hat{p} + \hat{q}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \log \frac{z[i, j]}{1 - z[i, j]}. \end{cases}$$

A Figura 10a apresenta uma imagem óptica de parte da imagem AIRSAR de São Francisco. Essa imagem será discutida em detalhes. Ela exibe três tipos de textura: Oceano, Floresta e Urbana. Considere que se deseja entender a informação para a qual cada parâmetro $\text{Beta}_3^{1/2}$ aponta. O mapa de \hat{p} na Figura 10b mostra que o parâmetro p tem uma relação com os tipos de texturas encontradas. A expressão $\mathbb{E}[\log(Z[i, j]/(1 - Z[i, j]))]$ na Figura 10c mostra que o mapa de \hat{p} é suavizado usando a função digamma, mas o reconhecimento dos tipos de textura é preservado. O mapa de \hat{q} na Figura 10d mostra que o parâmetro q não tem relação direta com a física de formação das imagens SAR, mas quando é suavizado pela função digamma, obtém-se uma imagem que descreve a dinâmica da imagem óptica.

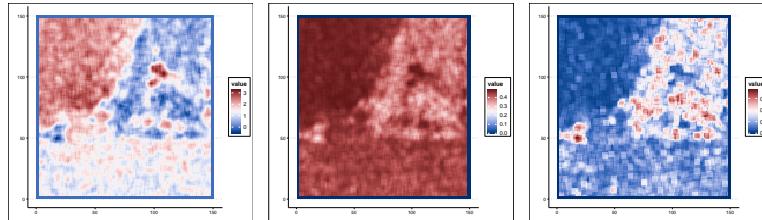
A partir da expressão $\mathbb{E}[\log(Z[i, j]/(1 - 2Z[i, j]))]$, depois de filtrar \hat{p} e \hat{q} usando a função digamma, obtemos o mapa na Figura 10f, que mostra a descrição da dinâmica da imagem de \hat{p} sem o efeito de \hat{q} . Nesse caso, o efeito da borda é mais pronunciado. Como esperado dos mapas nas Figuras 10g e 10h para $\mathbb{E}(Z[i, j])$ e $\mathbb{CV}(Z[i, j]) = \sqrt{\text{Var}(Z[i, j])}/\mathbb{E}(Z[i, j])$, respectivamente, eles são capazes de detectar a mudança de textura na imagem examinada.



(a) Imagem óptica de São Francisco obtida de Google Earth



(b) Mapa de \hat{p} (c) Mapa de $\Psi^{(0)}(\hat{p}) - \Psi^{(0)}(\hat{p} + \hat{q})$ (d) Mapa de \hat{q} (e) Mapa de $\Psi^{(0)}(\hat{q}) - \Psi^{(0)}(\hat{p} + \hat{q})$



(f) Mapa de $\Psi^{(0)}(\hat{p}) - \Psi^{(0)}(\hat{q})$ (g) Mapa de $\mathbb{E}(Z)$ (h) Mapa de $\mathbb{C}V(Z)$

Figura 10 – Mapas de EMVs e algumas de suas funções.

3.3 Divergências para a distribuição Beta tipo 3 modificada em imagens SAR

Primeiro, apresentamos brevemente as medidas de divergência de Kullback-Leibler, Rényi, Bhattacharyya e Hellinger. Essas medidas estocásticas são ferramentas importantes e amplamente usadas em vários campos, especialmente em inferência estatística e processamento de imagens. A ideia pioneira na teoria da informação foi proposta por Hartley (1928), que introduziu uma medida logarítmica de informação na comunicação. Mais tarde, Shannon (1948) formalizou essa ideia e definiu os conceitos de entropia e informação mútua. Por fim, o conceito de entropia relativa (mais tarde chamado de divergência) foi introduzido por Kullback e Leibler (1951).

As medidas de divergência escolhidas também foram usadas no processamento de imagens. Morio et al. (2009) usou a distância de Bhattacharyya como uma medida de contraste relevante para imagens de radar. A divergência de Rényi foi usada por Salicrú et al. (1994) como um teste de hipótese direcionado para uma família de modelos exponenciais gerais. Algumas definições e contribuições teóricas são apresentadas a seguir.

A divergência de Kullback–Leibler pode ser interpretada como uma medida que quantifica o quanto diferente uma distribuição de probabilidade é em relação a outra, servindo como um critério para comparar modelos ou ajustar distribuições. Sejam Z_1 e Z_2 duas variáveis aleatórias (a partir de agora o termo $[i, j]$ será omitido da notação por questão de simplicidade) com as PDFs $f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1)$ e $f_{Z_2}(z; \boldsymbol{\theta}_2)$ e suporte comum $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$. A divergência de Z_1 com relação a Z_2 é definida por

$$D_{\text{KL}}(Z_1 \parallel Z_2) = \mathbb{E}_{Z_1} \left[\log \frac{f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1)}{f_{Z_2}(z; \boldsymbol{\theta}_2)} \right] = \int_{\mathcal{Z}} f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1) \log \frac{f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1)}{f_{Z_2}(z; \boldsymbol{\theta}_2)} dz, \quad (3.4)$$

em que $\mathbb{E}_{Z_1}[\mathcal{V}(Z)] = \int_{\mathcal{Z}} \mathcal{V}(z) f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1) dz$ denota a esperança de uma função integrável $\mathcal{V}(\cdot)$ sob a distribuição de Z_1 . Observa-se que a Equação (3.4) é sempre não negativa e só é zero se $f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1) = f_{Z_2}(z; \boldsymbol{\theta}_2)$ para todos os $z \in \mathcal{Z}$. A divergência

$D_{\text{KL}}(Z_1 \parallel Z_2)$ quantifica a perda de informação — ou a ineficiência — incorrida ao se modelar os dados segundo a distribuição de Z_2 quando a verdadeira lei geradora é a de Z_1 (COVER, 1999). Também é conhecida na literatura como divergência da informação ou informação discriminativa, destacando seu papel na comparação e distinção entre modelos probabilísticos. Kullback e Leibler (1951), Csiszár (1967) e Seghouane e Amari (2007) apresentaram um trabalho sistemático e abrangente sobre a medida de divergência de Kullback-Leibler. Embora $D_{\text{KL}}(\cdot \parallel \cdot)$ seja chamada de "distância" em alguns artigos, ela não é uma distância verdadeira entre distribuições porque não é simétrica e não satisfaz a desigualdade triangular. Neste trabalho, consideramos uma simetrização dessa medida (entendida como uma medida de *distância* na distinção entre distribuições de probabilidade (KAILATH, 1967)): Dadas duas variáveis aleatórias que têm o mesmo suporte, a distância de Kullback-Leibler pode ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d_{\text{KL}}(Z_1, Z_2) &= \frac{1}{2} [D_{\text{KL}}(Z_1 \parallel Z_2) + D_{\text{KL}}(Z_2 \parallel Z_1)] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Z}} [f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1) - f_{Z_2}(z; \boldsymbol{\theta}_2)] \log \frac{f_{Z_1}(z; \boldsymbol{\theta}_1)}{f_{Z_2}(z; \boldsymbol{\theta}_2)} dz. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De acordo com (ERVEN; HARREMOS, 2014), a divergência de Rényi é definida como:

$$D_R^\beta(\boldsymbol{\theta}_1 \parallel \boldsymbol{\theta}_2) = D_R^\beta(Z_1 \parallel Z_2) = \frac{1}{\beta-1} \int_{\mathcal{Z}} f_{Z_1}^\beta(z) f_{Z_2}^{1-\beta}(z) dz. \quad (3.6)$$

Essa divergência não é simétrica e uma versão simetrizada é dada por:

$$d_R^\beta(Z_1, Z_2) = \frac{\log \int_{\mathcal{Z}} f_{Z_1}^\beta(z) f_{Z_2}^{1-\beta}(z) dz + \log \int_{\mathcal{Z}} f_{Z_1}^{1-\beta}(z) f_{Z_2}^\beta(z) dz}{2(\beta-1)}. \quad (3.7)$$

A partir da distância de Rényi com ordem β (d_R^β), podemos derivar as distâncias de Bhattacharyya (d_B) e Hellinger (d_H) dadas por:

$$d_B(Z_1, Z_2) = -\log \int_{\mathcal{Z}} \sqrt{f_{Z_1}(z) f_{Z_2}(z)} dz \quad (3.8)$$

e

$$d_H(Z_1, Z_2) = 1 - \int_{\mathcal{Z}} \sqrt{f_{Z_1}(z) f_{Z_2}(z)} dz. \quad (3.9)$$

Para estudar a distribuição assintótica das medidas (3.5) e (3.7)-(3.9), [Salicrú et al. \(1994\)](#) propôs entendê-las como elementos de uma classe de divergências chamada divergência (h, ϕ) . Essa classe é uma extensão da divergência ϕ proposta por [Csiszár \(1975\)](#) e [Ali e Silvey \(1966\)](#).

Em seguida, apresentamos um tratamento estatístico para o teste de hipóteses com base nas distâncias de Kullback-Leibler, Bhattacharyya, Hellinger e Rényi (com ordem β).

A distância (h, ϕ) entre $f_{Z_1}(z; \theta_1)$ e $f_{Z_2}(z; \theta_2)$ tem a forma:

$$\begin{aligned} d_{\phi}^h(\theta_1, \theta_2) &= d_{\phi}^h(Z_1, Z_2) \\ &= h \left\{ \mathbb{E}_{Z_2} \left[\phi \left(\frac{f_{Z_1}(z; \theta_1)}{f_{Z_2}(z; \theta_2)} \right) \right] \right\} = h \left\{ \int_{\mathcal{Z}} \phi \left(\frac{f_{Z_1}(z; \theta_1)}{f_{Z_2}(z; \theta_2)} \right) f_{Z_2}(z; \theta_2) dz \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que $\phi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função convexa, $h : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função crescente com $h(0) = 0$, e as formas não determinadas assumem o valor zero. Uma seleção cuidadosa das funções $h(y)$ e $\phi(x)$ leva a medidas de divergência conhecidas, como na Tabela 8.

Tabela 8 – Distância (h, ϕ) e suas funções h e ϕ

Distância (h, ϕ)	$h(y)$	$\phi(x)$
Kullabck-Leibler	$y/2$	$(x-1) \log(x)$
Rényi (ordem β)	$\frac{1}{\beta-1} \log((\beta-1)y+1), 0 \leq y < \frac{1}{1-\beta}$	$\frac{x^{1-\beta}+x^\beta-\beta(x-1)-2}{2(\beta-1)}, 0 < \beta < 1$
Bhattacharyya	$-\log(1-y), 0 \leq y < 1$	$-\sqrt{x} + \frac{x-1}{2}$
Hellinger	$y/2$	$(\sqrt{x}-1)^2$

Se considerarmos a definição das distâncias em termos das funções h e ϕ em conjunto com os resultados propostos por [Salicrú et al. \(1994\)](#) sobre a convergência na distribuição das estatísticas baseadas na distância (h, ϕ) para a lei do qui-quadrado, o seguinte lema se aplica.

Lema 3.3.1. Vamos supor que as condições de regularidade propostas em *Salicrú et al. (1994)*, , p. 380) sejam aplicáveis. Se, $\frac{m}{m+n} \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} \lambda \in (0, 1)$ e $\theta_1 = \theta_2$, então

$$\frac{2mn}{m+n} \frac{d_\phi^h(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)}{h^{(1)}(0)\phi^{(2)}(1)} \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_M^2, \quad (3.11)$$

em que $f^{(k)}(x) = d^k f(x)/dx^k$ é a derivada de k -ésima ordem de $f(x)$, " $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ " denota a convergência em distribuição, M é a dimensão de θ_i , m é o tamanho da primeira amostra, n é o tamanho da segunda amostra, $\widehat{\theta}_1$ é o EMV para θ_1 com base na primeira amostra, $\widehat{\theta}_2$ é o EMV para θ_2 com base na segunda amostra e " $\sim \chi_M^2$ " denota uma variável descrita pela distribuição qui-quadrada (com grau de liberdade M).

Com base no Lema 3.3.1, é possível derivar testes estatísticos de hipóteses para a hipótese nula $\theta_1 = \theta_2$. Em particular, as seguintes estatísticas são levadas em conta:

$$S_\phi^h(\widehat{\theta}_x, \widehat{\theta}_y) = \frac{2mnv}{m+n} d_\phi^h(\widehat{\theta}_x, \widehat{\theta}_y), \quad (3.12)$$

em que $v = 1/[h^{(1)}(0)\phi^{(2)}(1)]$ é uma constante que depende da distância escolhida. Para d_{KL} , d_R^β , d_B e d_H , v assume os valores 1, $1/\beta$, 4 e 4, respectivamente. Nesse contexto, um teste de hipótese geral pode ser formulado e é apresentado na Observação 3.3.2

Observação 3.3.2. Se m e n forem grandes e $r = S_\phi^h(\widehat{\theta}_x, \widehat{\theta}_y)$, então a hipótese nula é $\theta_1 = \theta_2$ pode ser rejeitada em um nível η se $P(\chi_M^2 > q) \leq \eta$, em que r é a estatística de teste calculada a partir de amostras observadas e η é o nível nominal especificado.

3.3.1 Contribuições teóricas: Nova medida de contraste e testes de hipótese para textura em imagens SAR

Esta seção aborda algumas contribuições matemáticas a partir da suposição de que $Z_i \sim \text{Beta}_3^{1/2}(\theta_i)$ tal que $\theta_i = (p_i, q_i)$ para $i = 1, 2$.

Proposição 3.3.3. A divergência de Kullback-Leibler e a distância entre Z_1 e Z_2 são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
D_{KL}(Z_1 \| Z_2) &= h(p_1, q_1, p_2, q_2) + (p_1 - p_2)\mathbb{E}_{Z_1}[\log(Z)] + (q_1 - q_2)\mathbb{E}_{Z_1}[\log(1 - 2Z)] \\
&\quad + (p_1 + q_1 - p_2 - q_2)\mathbb{E}_{Z_1}[\log(1 - Z)] \\
&= h(p_1, q_1, p_2, q_2) - (p_1 - p_2)\log 2 + \frac{(p_1 - p_2)}{2p_1} \left\{ {}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \right. \\
&\quad + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) + {}_2F_1(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \\
&\quad \times [\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)] \Big\} - (p_1 - p_2)[\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)] \\
&\quad - (q_1 - q_2)\log 2 + \frac{(q_1 - q_2)}{2p_1} \left\{ {}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \right. \\
&\quad + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) + {}_2F_1(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \\
&\quad \times [\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)] \Big\} + (q_1 - q_2)[\Psi^{(0)}(q_1) - \Psi^{(0)}(p_1)] \\
&\quad - (p_1 + q_1 - p_2 - q_2)\log 2 + \frac{(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)}{2p_1} \left\{ {}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \right. \\
&\quad + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) + {}_2F_1(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \\
&\quad \times [\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)] \Big\} - (p_1 + q_1 - p_2 - q_2)[\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)]. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d_{KL}(Z_1, Z_2) &= \frac{(q_1 - q_2)}{2} [\Psi^{(0)}(q_1) - \Psi^{(0)}(p_1)] + \frac{(q_2 - q_1)}{2} [\Psi^{(0)}(q_2) - \Psi^{(0)}(p_2)] \\
&\quad + \frac{(p_2 - p_1 + q_2 - q_1)}{2} [\Psi^{(0)}(p_1 + q_1) - \Psi^{(0)}(p_2 + q_2) + \Psi^{(0)}(p_2) - \Psi^{(0)}(p_1)],
\end{aligned}$$

em que $h(p_1, q_1, p_2, q_2) = \log[\Gamma(p_1 + q_1)\Gamma(p_2)\Gamma(q_2)] - \log[\Gamma(p_2 + q_2)\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)]$.

Proposição 3.3.4. Sejam $\theta_1 = (p_1, q_1)$ e $\theta_2 = (p_2, q_2)$ vetores dos parâmetros de duas variáveis aleatórias, digamos Z_1 e Z_2 , que seguem a distribuição Beta $_3^{1/2}(p, q)$. A distância de Rényi entre Z_1 e Z_2 é

$$\begin{aligned}
d_R^\beta(Z_1 \| Z_2) &= \frac{1}{2(\beta - 1)} \left\{ \log \left[\frac{\Gamma^\beta(p_1 + q_1)\Gamma^{1-\beta}(p_2 + q_2)}{\Gamma(\beta(p_1 + q_1) + (1 - \beta)(p_2 + q_2))} \frac{\Gamma(\beta p_1 + (1 - \beta)p_2)}{\Gamma^\beta(p_1)\Gamma^{1-\beta}(p_2)} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\Gamma(\beta q_1 + (1 - \beta)q_2)}{\Gamma^\beta(q_1)\Gamma^{1-\beta}(q_2)} \right] + \log \left[\frac{\Gamma^{1-\beta}(p_1 + q_1)\Gamma^\beta(p_2 + q_2)}{\Gamma((1 - \beta)(p_1 + q_1) + \beta(p_2 + q_2))} \right. \\
&\quad \times \left. \left. \frac{\Gamma((1 - \beta)p_1 + \beta p_2)}{\Gamma^{1-\beta}(p_1)\Gamma^\beta(p_2)} \frac{\Gamma((1 - \beta)q_1 + \beta q_2)}{\Gamma^{1-\beta}(q_1)\Gamma^\beta(q_2)} \right] \right\}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Proposição 3.3.5. A distância de Bhattacharyya entre Z_1 e Z_2 é:

$$\begin{aligned}
 d_B(Z_1, Z_2) = & \log \left[\Gamma \left(\frac{p_1 + q_1 + p_2 + q_2}{2} \right) \right] - \log \left[\Gamma \left(\frac{p_1 + p_2}{2} \right) \right] \\
 & - \log \left[\Gamma \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \{ \log[\Gamma(p_1 + q_1)] \\
 & + \log[\Gamma(p_2 + q_2)] - \log[\Gamma(p_1)] - \log[\Gamma(q_1)] \\
 & - \log[\Gamma(p_2)] - \log[\Gamma(q_2)] \}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Proposição 3.3.6. A distância de Hellinger entre Z_1 e Z_2 é:

$$d_H(Z_1, Z_2) = 1 - \frac{[\Gamma(p_1 + q_1)\Gamma(p_2 + q_2)]^{1/2}}{\Gamma(\frac{p_1 + p_2 + q_1 + q_2}{2})} \frac{\Gamma(\frac{p_1 + p_2}{2})}{[\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)]^{1/2}} \frac{\Gamma(\frac{q_1 + q_2}{2})}{[\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)]^{1/2}}. \tag{3.16}$$

As provas das Proposições 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5 e 3.3.6 podem ser encontradas nos Apêndices A e B. As expressões matemáticas anteriores podem ser usadas em contextos matemáticos (geometria da informação), de inferência e de processamento de imagens. Neste trabalho, elas são usadas como testes de hipóteses e ferramentas para resolver a detecção de limites em imagens SAR.

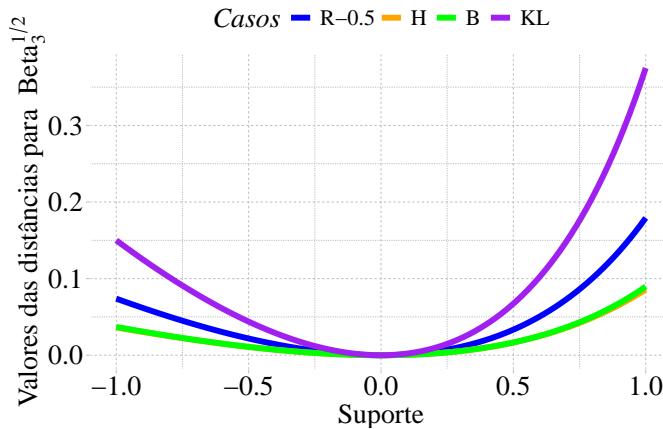


Figura 11 – Gráficos das medidas derivadas de $\text{Beta}_3^{1/2}$.

A Figura 11 apresenta as curvas das quatro medidas de divergência avaliadas ao longo do suporte transformado dos parâmetros que varia no intervalo $[-1, 1]$. Esse

intervalo decorre da parametrização do espaço paramétrico da distribuição Beta₃^{1/2} em um domínio simétrico, facilitando a comparação entre as medidas.

Observa-se que todas as divergências atingem seus menores valores na região central do suporte (próxima de zero), indicando que, nessa faixa, as densidades comparadas são mais semelhantes. À medida que nos aproximamos das extremidades ($x \approx -1$ ou $x \approx 1$), as curvas passam a crescer, refletindo o aumento da discrepância entre as distribuições quando a variável assume valores menos prováveis ou mais sensíveis às diferenças nos parâmetros.

A divergência de Kullback–Leibler (KL), representada pela curva roxa, apresenta crescimento mais acentuado nas extremidades do suporte, evidenciando sua forte sensibilidade a diferenças nas regiões de cauda. Já a divergência de Rényi com $\beta = 0.5$ (curva azul) cresce de forma moderada, enquanto Bhattacharyya (verde) e Hellinger (amarelo) exibem variações mais suaves ao longo de todo o intervalo, mantendo valores inferiores nas bordas.

Assim, o gráfico permite visualizar de maneira clara como cada divergência reage a diferenças paramétricas ao longo de todo o domínio dos parâmetros, o que contribui para interpretar o comportamento distinto observado posteriormente nas simulações de detecção de borda.

A partir do Lema 3.3.1 e da Observação 3.3.2 em conjunto com as Proposições 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5 e 3.3.6, podem ser aplicados cinco novos testes de hipótese para a distribuição Beta₃^{1/2}(p, q), que convergem em distribuição para uma qui-quadrado com dois graus de liberdade, apresentados na Observação 3.3.7.

Observação 3.3.7. *Se $\hat{\theta}_i$ para $i = 1, 2$ são estimadores consistentes para θ_i e assintoticamente normais extraídos de uma amostra independente, de modo que cada variável esteja no intervalo (0, 1/2) e sob a hipótese nula $\mathcal{H} : \theta_1 = \theta_2$, os seguintes resultados são obtidos:*

(I) As estatísticas de Kullback-Leibler - $S_{KL}(\cdot, \cdot)$:

$$S_{KL}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) = \frac{2mn}{(m+n)} d_{KL}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_2^2. \quad (3.17)$$

(II) As estatísticas de Rényi com ordem β - $S_R^\beta(\cdot, \cdot)$:

$$S_R^\beta(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) = \frac{2mn}{\beta(m+n)} d_R^\beta(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_2^2. \quad (3.18)$$

(III) As estatísticas de Bhattacharyya - $S_B(\cdot, \cdot)$:

$$S_B(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) = \frac{8mn}{m+n} d_B(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_2^2. \quad (3.19)$$

(IV) As estatísticas de Hellinger - $S_H(\cdot, \cdot)$:

$$S_H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) = \frac{8mn}{m+n} d_H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2) \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_2^2. \quad (3.20)$$

3.3.2 Detectores de Borda

Um detector de bordas é um método de processamento de imagens destinado a identificar regiões onde ocorrem mudanças abruptas nas propriedades estatísticas ou radiométricas dos pixels, indicando transições significativas entre diferentes estruturas ou objetos na cena. Os métodos de detecção usados neste trabalho funcionam em três estágios: (i) identificação do centroide da região candidata (de forma automática, semiautomática ou manual), (ii) identificação dos pontos de transição pertencentes à borda e (iii) definição do contorno usando um método de imputação entre os pontos de transição, como B-Splines, (GAMBINI et al., 2006). Concentramos nossa análise nas fases (ii) e (iii).

Suponha que haja uma região de saída \mathcal{R} com o centro de dados C . Os raios são traçados de C para pontos fora de \mathcal{R} . Eles têm a forma $s^{(i)} = \overline{CP_i}$, em que o ângulo entre os raios é $\angle(s^{(i)}, s^{(i+1)})$, para $i = 1, 2, \dots, S$, em que S é o número de raios. A

Figura 12 desenha um diagrama que ilustra a dinâmica da detecção. Por fim, os dados são coletados em tiras finas ao redor desses raios.

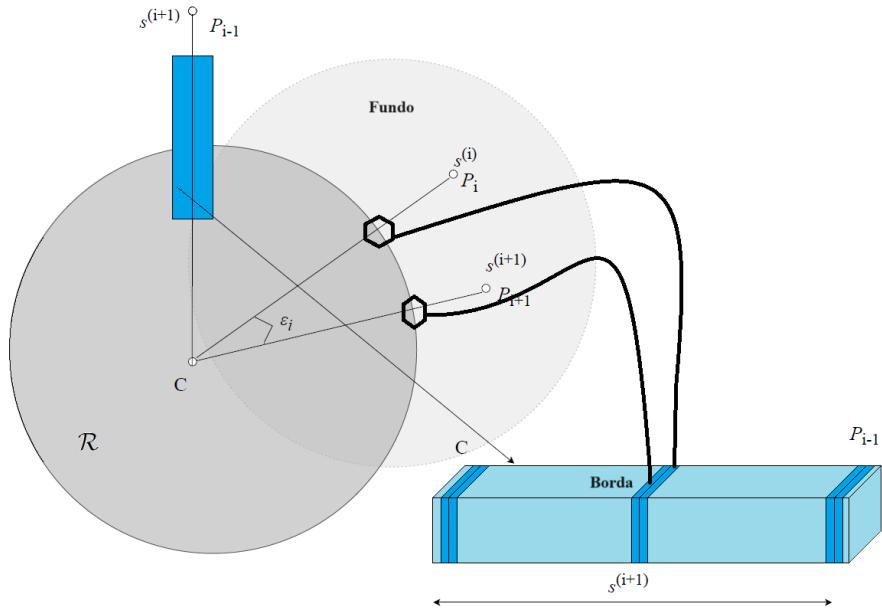


Figura 12 – Dinâmica na detecção de borda.

Presumimos que os dados seguem uma distribuição Beta₃^{1/2} e que há duas populações: uma dentro da borda com observações $j^{(i)}$ e outra fora da borda com observações $N^{(i)} - j^{(i)}$. Podemos então modelar as observações de $N^{(i)}$ em torno do segmento $s^{(i)}$, $1 \leq i \leq S$ como

$$\begin{cases} Z_k^{(i)} \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p_1^{(i)}, q_1^{(i)}), & \text{para } k = 1, \dots, j^{(i)}, \\ Z_k^{(i)} \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p_2^{(i)}, q_2^{(i)}), & \text{para } k = j^{(i)} + 1, \dots, N^{(i)}. \end{cases} \quad (3.21)$$

A ideia principal é encontrar a $j^{(i)}$ -ésima borda no segmento $s^{(i)}$ como o ponto que fornece a melhor configuração com relação a uma regra de decisão.

A seguir, apresentamos duas regras de decisão diferentes, omitindo o índice (i) para simplificar, já que apenas uma faixa é considerada em cada iteração.

3.3.2.1 Detectores baseados em Verossimilhança

A log-verossimilhança para a Equação (3.1), definindo $\mathbb{I}_1(k, j) := \mathbb{I}_{\{1, \dots, j\}}(k)$ e $\mathbb{I}_2(k, j) := \mathbb{I}_{\{j+1, \dots, N\}}(k)$ de modo que $\mathbb{I}_A(x) = \{1 (x \in A), 0 (x \notin A)\}$, é dada por:

$$\begin{aligned}\ell(j) = & \sum_{k=1}^j \log f_{Z_1}(z_k; \boldsymbol{\theta}_1) + \sum_{k=j+1}^N \log f_{Z_2}(z_k; \boldsymbol{\theta}_2) = -j \log \text{Beta}(p_1, q_1) \\ & - (N - j) \log \text{Beta}(p_2, q_2) + \sum_{k=1}^N \left[(p_1 - 1)\mathbb{I}_1(k, j) + (p_2 - 1)\mathbb{I}_2(k, j) \right] \log z_k \\ & + \sum_{k=1}^N \left[(q_1 - 1)\mathbb{I}_1(k, j) + (q_2 - 1)\mathbb{I}_2(k, j) \right] \log(1 - z_k) \\ & - \sum_{k=1}^N \left[(p_1 + q_1)\mathbb{I}_1(k, j) + (p_2 + q_2)\mathbb{I}_2(k, j) \right] \log(1 - z_k).\end{aligned}$$

[Gambini et al. \(2006\)](#) provou que um bom estimador, \widehat{J}_{ML} , para o índice no segmento correspondente ao ponto de transição é dado por

$$\widehat{J}_{\text{ML}} = \arg \max_j \ell(j).$$

No entanto, esse método tem um alto custo computacional, pois precisa avaliar duas funções de probabilidade para cada etapa de pesquisa, pois pode mostrar imprecisão se uma log-verossimilhança unitária é atípica (uma parcela cujo SPAN tipo razão para um pixel seja um outlier, por exemplo)..

3.3.2.2 Detectores baseados em Distância

Conforme discutido por [Nascimento, Frery e Cintra \(2013\)](#), as distâncias derivadas na seção anterior podem ser dimensionadas para serem distribuídas assintoticamente como estatísticas qui-quadradas:

$$S_{\mathcal{D}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(j), \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2(N - j)) = \frac{2j(N - j)\nu_{\mathcal{D}}}{N} d_{\mathcal{D}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(j), \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2(N - j)),$$

em que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(j) = [\widehat{p}_1(j), \widehat{q}_1(j)]$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_2(N-j) = [\widehat{p}_2(N-j), \widehat{q}_2(N-j)]$ são os EMVs para $\boldsymbol{\theta}_1 = (p_1, q_1)$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = (p_2, q_2)$, usando amostras aleatórias de tamanhos j e $N-j$, respectivamente.

Portanto, propomos novos detectores para detectar borda nas intensidades de SAR, buscando o ponto que maximiza a estatística de teste entre os dois modelos, ou seja,

$$\widehat{J}_{\mathcal{D}} = \arg \max_j S_{\mathcal{D}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(j), \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2(N-j)) = \arg \max_j S_{\mathcal{D}}(j),$$

em que $\mathcal{D} = \{\text{KL}; \text{B}; \text{H}; \text{R}:\beta\}$.

É importante notar que o custo computacional dos detectores baseados em distância cresce diretamente com o tamanho do segmento analisado. Para cada posição j ao longo do perfil de intensidades, o método exige a reestimação dos parâmetros (p_1, q_1) e (p_2, q_2) para amostras de tamanhos j e $N-j$, bem como o cálculo da divergência correspondente. Como esse procedimento deve ser repetido para todas as possíveis partições, o custo total resulta da soma dessas operações ao longo de todo o segmento. Comparativamente ao método usando a log-verossimilhança, o uso de distâncias é menos custoso, o que procede de uma observação analítica simples. Enquanto o uso de log-verossimilhança em um raio de tamanho $N-2j$ envolve $N-2j$ parcelas do tipo $\log f(Z[i, j]; \widehat{\boldsymbol{\theta}})$, o detector baseado em distância só requer avaliação dos estimadores na distância analítica.

3.4 Resultados numéricos

3.4.1 Simulação

Supondo que os dados sejam descritos como retornos distribuídos da Beta₃^{1/2}(p, q), as estimativas de MV para os parâmetros p e q são consideradas com seus respectivos erros padrão $\sqrt{\text{Var}[\widehat{p}]}$ e $\sqrt{\text{Var}[\widehat{q}]}$ e, em seguida, o valor esperado, a variância e o erro padrão de cada cenário também são apresentados. Os cenários considerados são da região da Costa de Japaratinga (Alagoas/BR) e foram registrados pelo Instituto Eletro-

magnético de SAR (EMISAR) em banda L e quad-pol. Explicaremos isso em mais detalhes na próxima seção. Os recursos de SAR $T_{\text{HH}}/(T_{\text{HH}} + \text{SPAN})$ foram obtidos de uma imagem na Figura 16a por meio de agrupamento feito considerando os intervalos $(0; 0, 2)$, $(0, 2; 0, 4)$ e $(0, 4; 0, 5)$ denominados Cena 1, Cena 2 e Cena 3, respectivamente.

A Tabela 9 apresenta as estimativas dos parâmetros p e q para três cenas reais, bem como seus respectivos erros padrão. Na *Cena 1*, ambos os erros padrão são bastante reduzidos, indicando elevada precisão das estimativas e sugerindo um comportamento estatisticamente estável dos dados. A *Cena 2* exibe erros padrão superiores aos da Cena 1, refletindo menor precisão e maior variabilidade inerente à região analisada. Já na *Cena 3*, observa-se que o erro padrão associado a \hat{q} é substancialmente inferior ao de \hat{p} , o que evidencia maior estabilidade na estimativa deste parâmetro. Além disso, os erros padrão dessa cena, embora não tão baixos quanto os da Cena 1, permanecem reduzidos, garantindo precisão adequada às estimativas.

Tabela 9 – Valores estimados para p e q , erros padrão, valor esperado e variância para cenas reais

Regiões SAR	\hat{p}	\hat{q}	$\sqrt{\text{Var}[\hat{p}]}$	$\sqrt{\text{Var}[\hat{q}]}$	$\mathbb{E}[Z]$	$\text{Var}[Z]$
Cena 1	1.1918	10.5572	0.0045	0.5150	0.0872	0.0042
Cena 2	6.9112	8.9949	0.1838	0.3167	0.2979	0.0035
Cena 3	6.6700	1.5411	0.1903	0.0079	0.4452	0.0018

Adicionalmente, a Cena 3 apresenta uma configuração paramétrica particularmente favorável: média mais elevada e variância mais baixa em comparação às demais cenas. Essa combinação produz uma distribuição mais concentrada em torno de valores centrais altos, reduzindo a dispersão relativa dos dados. Como consequência, a estimativa dos parâmetros — especialmente de q — torna-se mais estável, o que justifica a superioridade estatística da Cena 3 em relação às demais regiões consideradas.

Em síntese, os erros padrão constituem uma medida fundamental da incerteza associada às estimativas dos parâmetros, de modo que valores reduzidos indicam maior precisão e estabilidade inferencial. A partir dessa interpretação, torna-se possível com-

preender, de forma mais clara, as diferenças estruturais entre as três cenas e o impacto dessas diferenças na qualidade das estimativas obtidas.

A Figura 13 ilustra histogramas da densidade considerada para diferentes concentrações das três cenas analisadas. Cada histograma evidencia o comportamento probabilístico da variável, conforme indicado pelos eixos e pelas legendas que especificam a direção da concentração (esquerda, centro e direita). Já a Figura 14 apresenta as funções de distribuição cumulativa empírica e ajustada para essas mesmas configurações, permitindo visualizar a adequação do ajuste em cada cenário e complementar a análise estatística descrita anteriormente.



Figura 13 – Gráficos da densidade $\text{Beta}_3^{1/2}$ para cada cena estudada.

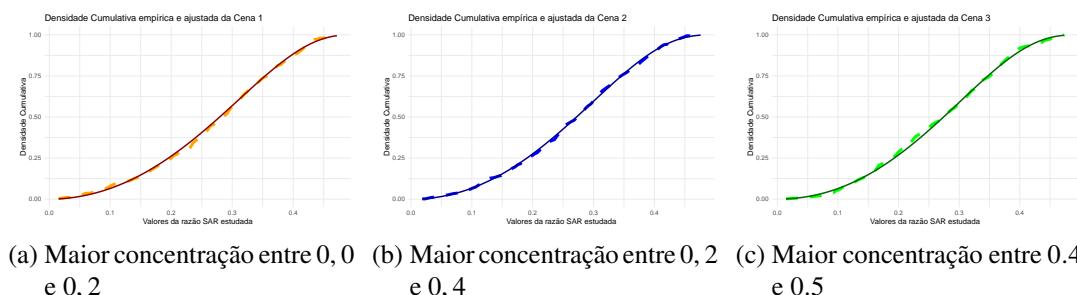


Figura 14 – Gráficos da densidade cumulativa $\text{Beta}_3^{1/2}$ para cada cena estudada.

Realizamos o teste de Kolmogorov–Smirnov para cada uma das três cenas, com o objetivo de avaliar a aderência do modelo Beta tipo 3 modificada às distribuições empíricas observadas. Em todos os casos, o teste não rejeitou a hipótese nula (\mathcal{H}_0) de que os dados seguem essa distribuição.

Para a *Cena 1*, a estatística obtida foi $D = 0,0280$, com p -valor igual a 0,8264, indicando excelente concordância entre o modelo teórico e os dados observados. Na *Cena 2*, obteve-se $D = 0,0295$ e p -valor 0,7767, novamente sem evidências para rejeitar \mathcal{H}_0 . Por fim, na *Cena 3*, o teste resultou em $D = 0,0262$, com p -valor 0,8819, sugerindo ainda maior aderência entre a distribuição Beta tipo 3 modificada e os valores empíricos.

Esses resultados confirmam que, para todas as cenas analisadas, a distribuição Beta tipo 3 modificada oferece um ajuste adequado, justificando seu uso como modelo probabilístico nas etapas subsequentes deste trabalho.

De agora em diante, utilizamos os valores estimados para cada uma das três cenas reais como parâmetros de referência no estudo de simulação de Monte Carlo. Foram geradas mil réplicas independentes para cada configuração analisada, variando-se o tamanho da amostra no formato $K \times K$, com $K \in \{3, 5, 7, 9, 11, 15\}$, a fim de avaliar o impacto da dimensão amostral sobre o desempenho das estatísticas de teste. Como medidas de avaliação, adaptamos estimativas empíricas da dimensão do teste para níveis nominais de 1%, 5% e 10%, considerando os testes baseados em S_{KL} , $S_{R:\beta}$ (para $\beta = 0, 1; 0, 5; 0, 9$), S_B e S_H . Os resultados completos encontram-se na Tabela ??, na qual destacamos, em cores distintas, os melhores desempenhos dentro de cada cena.

De forma geral, observa-se que o comportamento dos testes varia substancialmente conforme a medida de divergência, a cena considerada e o tamanho da amostra. As Tabelas 10, 10 e 12 evidenciam que nenhuma medida apresenta desempenho universalmente superior: cada divergência destaca-se em configurações específicas, reforçando a sensibilidade dos testes às características da distribuição subjacente.

A fim de sintetizar os resultados apresentados nas Tabelas anteriores, elaborou-se um quadro resumindo, para cada nível nominal e cada cena, quais medidas de divergência obtiveram os melhores desempenhos. Essa sistematização permite visualizar de forma imediata quais distâncias se destacaram em cada configuração experimental, facilitando a comparação entre cenas e apoiando a seleção de medidas mais adequadas para aplicações

Tabela 10 – Taxas de rejeição dos testes baseados em distância sob \mathcal{H}_0 para nível nominal de 1%. █
 Cena 1; █ Cena 2; █ Cena 3. Os valores destacados correspondem às melhores taxas de rejeição em cada linha.

Cenas	N	d_{KL}	$d_R^{0.1}$	$d_R^{0.5}$	$d_R^{0.9}$	d_B	d_H
1	9	0.009	0.013	0.015	0.011	█ 0.010	█ 0.010
	25	0.008	0.012	█ 0.010	0.009	0.011	0.016
	49	0.012	0.011	█ 0.007	0.005	0.014	0.012
	81	0.012	█ 0.010	0.012	0.013	0.011	0.008
	121	0.004	0.013	0.007	0.012	0.013	█ 0.008
	225	0.012	█ 0.010	█ 0.010	0.009	0.007	█ 0.010
2	9	0.007	█ 0.010	0.004	0.011	0.012	0.009
	25	0.015	0.012	0.013	0.011	0.014	█ 0.007
	49	0.011	0.011	0.006	0.013	█ 0.007	0.014
	81	█ 0.010	0.012	0.012	0.007	0.007	0.005
	121	█ 0.010	0.013	0.009	█ 0.010	0.008	█ 0.010
	225	0.006	0.012	0.012	0.012	0.012	█ 0.010
3	9	0.011	0.007	0.006	0.008	█ 0.010	█ 0.010
	25	█ 0.010	0.012	0.016	0.012	0.011	0.007
	49	0.005	█ 0.008	0.007	0.014	0.007	0.013
	81	█ 0.010	█ 0.010	0.008	0.009	0.005	0.015
	121	█ 0.010	0.009	█ 0.010	0.012	█ 0.010	0.011
	225	0.013	0.011	0.011	0.006	0.007	█ 0.009

Tabela 11 – Taxas de rejeição dos testes baseados em distância sob \mathcal{H}_0 para nível nominal de 5%. █
 Cena 1; █ Cena 2; █ Cena 3. Os valores destacados correspondem às melhores taxas de rejeição em cada linha.

Cenas	N	d_{KL}	$d_R^{0.1}$	$d_R^{0.5}$	$d_R^{0.9}$	d_B	d_H
1	9	0.046	0.041	█ 0.048	0.052	0.037	0.051
	25	0.044	0.055	0.041	0.057	█ 0.050	0.059
	49	█ 0.050	0.055	0.055	0.045	0.057	0.062
	81	0.057	0.045	0.051	0.057	█ 0.048	0.038
	121	0.047	0.045	0.046	0.058	█ 0.049	█ 0.049
	225	0.051	█ 0.048	0.052	0.053	0.044	0.059
2	9	█ 0.045	█ 0.045	0.035	0.039	0.052	0.040
	25	0.055	0.052	0.051	0.040	0.035	█ 0.048
	49	0.047	0.049	█ 0.050	0.055	0.053	0.046
	81	0.039	█ 0.047	0.052	0.044	█ 0.047	0.052
	121	0.041	0.046	0.055	0.053	█ 0.050	0.055
	225	█ 0.043	0.058	0.054	0.051	0.062	0.055
3	9	█ 0.044	0.039	0.039	0.029	0.035	0.036
	25	█ 0.048	0.055	0.054	0.047	0.043	0.055
	49	0.034	0.055	0.039	0.053	█ 0.044	0.058
	81	0.040	█ 0.044	0.056	█ 0.044	0.040	0.061
	121	0.058	0.061	█ 0.049	0.054	█ 0.049	0.042
	225	0.061	0.059	█ 0.048	0.044	0.045	0.053

Tabela 12 – Taxas de rejeição dos testes baseados em distância sob \mathcal{H}_0 para nível nominal de 10%. █ Cena 1; █ Cena 2; █ Cena 3. Os valores destacados correspondem às melhores taxas de rejeição em cada linha.

Cenas	N	d_{KL}	$d_R^{0.1}$	$d_R^{0.5}$	$d_R^{0.9}$	d_B	d_H
1	9	0.085	0.102	0.090	0.090	0.080	0.093
	25	0.107	0.097	0.087	0.097	0.085	0.106
	49	0.104	0.104	0.105	0.093	0.104	0.112
	81	0.101	0.093	0.103	0.098	0.090	0.089
	121	0.089	0.098	0.086	0.105	0.106	0.103
	225	0.109	0.100	0.094	0.113	0.095	0.105
2	9	0.086	0.091	0.081	0.088	0.090	0.091
	25	0.098	0.087	0.103	0.100	0.090	0.101
	49	0.096	0.097	0.108	0.113	0.114	0.083
	81	0.107	0.101	0.101	0.096	0.081	0.099
	121	0.089	0.108	0.100	0.104	0.112	0.095
	225	0.086	0.107	0.097	0.093	0.104	0.108
3	9	0.086	0.071	0.085	0.067	0.074	0.074
	25	0.098	0.109	0.112	0.096	0.092	0.102
	49	0.097	0.113	0.098	0.092	0.094	0.114
	81	0.087	0.083	0.091	0.084	0.082	0.123
	121	0.116	0.113	0.099	0.112	0.106	0.087
	225	0.100	0.113	0.097	0.090	0.103	0.105

futuras. A Tabela 13 apresenta essa consolidação.

Tabela 13 – Resumo das medidas de divergência com melhor desempenho global por cenário e nível nominal

Nível nominal	Cena 1	Cena 2	Cena 3
1%	Rényi ($\beta = 0.5$) / Rényi ($\beta = 0.1$)	Rényi ($\beta = 0.1$) / KL	Rényi ($\beta = 0.1$) / KL
5%	Bhattacharyya / KL	Rényi ($\beta = 0.1$)	KL / Rényi ($\beta = 0.9$)
10%	Rényi ($\beta = 0.1$)	Rényi ($\beta = 0.9$) / Rényi ($\beta = 0.1$)	Rényi ($\beta = 0.5$) / KL

A análise das taxas de rejeição sob a hipótese nula permitiu comparar o comportamento de seis medidas de divergência aplicadas à discriminação de parâmetros associados a cenas SAR. Os resultados indicaram que o desempenho dos testes varia de acordo com a estrutura das cenas, com o nível nominal adotado e com o tamanho amostral disponível, de modo que nenhuma medida se destacou como universalmente superior em todos os cenários.

De modo geral, as divergências de Rényi apresentaram o maior número de melhores desempenhos ao longo das diferentes combinações de cenas e níveis nominais. Em particular, as ordens $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.5$ mostraram melhor comportamento, sugerindo que essas configurações são adequadas para capturar diferenças moderadas entre distribuições. Em contraste, a divergência de Kullback–Leibler exibiu resultados mais variáveis, com bom desempenho principalmente em cenas com contrastes mais marcantes.

A distância de Bhattacharyya destacou-se em alguns casos específicos, notadamente no nível nominal de 5% para a Cena 1, indicando que pode ser uma alternativa eficaz em situações onde as diferenças entre regiões não são abruptas. Já a distância de Hellinger apresentou, de modo recorrente, valores inferiores aos das demais medidas, o que sugere menor adequação às configurações analisadas.

O tamanho amostral também demonstrou papel relevante: valores maiores de N tendem a produzir padrões mais regulares nas taxas de rejeição. Entretanto, essa tendência não ocorreu de modo uniforme entre todas as divergências, reforçando que cada medida responde de modo distinto às variações no número de observações.

Em síntese, os resultados evidenciam que:

- as divergências de Rényi, especialmente para $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.5$, constituem opções versáteis e com bom desempenho em variados cenários;
- KL tende a ser mais apropriada quando há maior contraste entre as regiões;
- Bhattacharyya é uma alternativa relevante quando as separações entre as distribuições são mais suaves;
- Hellinger mostrou desempenho inferior no conjunto avaliado.

Essas conclusões indicam que a escolha da medida de divergência deve ser adequada ao contexto da aplicação, considerando características da cena, nível de significância adotado e tamanho amostral. O conjunto dos experimentos fornece, assim, um guia

prático para a seleção de medidas em tarefas de segmentação e detecção em imagens SAR, contribuindo para modelos mais aderentes à estrutura real dos dados.

3.4.2 Aplicação a dados reais

Nesta seção, executamos dois aplicativos com dados reais. Inicialmente, aplicamos nossas ferramentas a uma imagem AIRSAR de São Francisco, adquirida com número de *looks* igual a quatro. Essa imagem apresenta três texturas distintas: oceano, floresta e área urbana. Em nosso estudo, interessa-nos avaliar o comportamento do detector ao realizar a transição entre as regiões de mar e cidade.

A Figura 15a mostra o segmento selecionado e o limite estimado pelo método baseado em log-verossimilhança. Embora tal método apresente bom desempenho em diversos cenários, nesta aplicação ele produziu uma borda deslocada em relação à borda real, caracterizando uma estimativa sistematicamente desviada. Em contraste, os detectores baseados em distância, ilustrados na Figura 15b, apresentaram delineamentos mais aderentes à estrutura verdadeira da imagem, fornecendo resultados visualmente mais precisos do que o método de log-verossimilhança.

Em seguida, aplicamos os métodos a uma segunda imagem, agora de dupla polarização (VV–HV), exibida na Figura 16a, adquirida pelo satélite Sentinel–1 com resolução espacial de $7\text{ m} \times 14\text{ m}$ em 17 de abril de 2023, na região de Japaratinga, Alagoas, Brasil. O sensor fornece valores de intensidade para os canais VV e HV, ambos com aparência equivalente a $L = 3$.

Assim como observado no experimento anterior com a imagem AIRSAR, a Figura 16b confirma novamente a superioridade dos detectores baseados em distância. Os contornos estimados por essas medidas apresentaram maior aderência às transições estruturais da cena, enquanto o método baseado em log-verossimilhança mostrou desempenho inferior sob inspeção visual, reproduzindo o mesmo padrão já evidenciado no primeiro conjunto de dados.

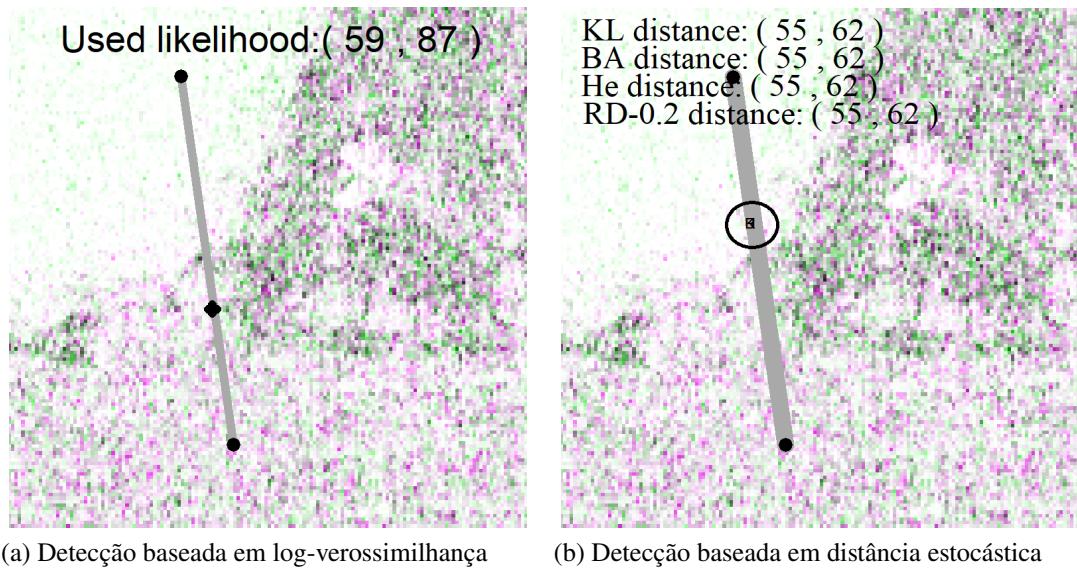


Figura 15 – Detecção da imagem de São Francisco/Califórnia, EUA.

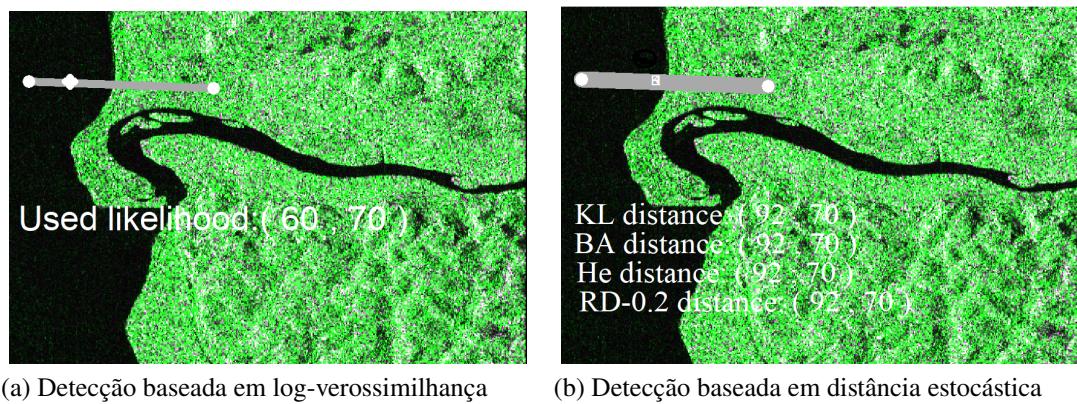


Figura 16 – Detecção da imagem da Costa de Japaratinga/Alagoas, Brasil.

3.5 Considerações parciais da segunda contribuição

Neste trabalho, propusemos três avanços: a proposta de (i) uma possível ligação entre o $\text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$ e a informação SPAN, (ii) quatro medidas de distância e os testes de hipóteses correspondentes e (iii) detectores de bordas para imagens SAR.

Estabelecemos que a distribuição Beta₃^{1/2} pode ser usada como modelo para descrever os recursos construídos a partir do SPAN em (0, 1/2). Essa distribuição se ajusta tanto aos dados reais quanto à formação física da imagem SAR. Com base na distribuição Beta₃^{1/2}, quatro distâncias estocásticas foram propostas e, como meio para a dedução teórica das distâncias, outras quantidades baseadas em momentos foram derivadas, como $\mathbb{E}[\log Z]$, $\mathbb{E}[\log(1 - Z)]$ e $\mathbb{E}[\log(1 - 2Z)]$.

Em seguida, foram desenvolvidos testes de hipóteses. Além disso, foi desenvolvido um método para determinar estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros Beta₃^{1/2}. Em seguida, foi realizado um estudo de Monte Carlo para verificar o desempenho dos testes propostos, que produzem bons resultados mesmo para amostras pequenas.

Logo após, propusemos detectores de borda para imagens SAR usadas para estudar contornos em duas regiões: São Francisco (Califórnia, EUA) e Costa de Japaratinga (Alagoas, Brasil). Os resultados mostram que as ferramentas baseadas em distância superam a log-verossimilhança.

4 Evolução estatística de superfície de atributos SPAN tipo razão para segmentação em imagens SAR

4.1 Segmentação estatística pela evolução da superfície

O problema de segmentar uma estrutura ou objeto de interesse em uma imagem bidimensional pode ser formulado como a busca por uma região ótima que separa o alvo do restante da cena. A evolução de contornos ativos baseada na metodologia de *level sets* constitui um paradigma consolidado para esse tipo de tarefa. A formulação original dos *level sets* é apresentada por [Osher e Sethian \(1988\)](#), enquanto [Chan e Vese \(2001\)](#) introduzem uma abordagem por regiões que dispensa a extração explícita de bordas. Para uma visão abrangente de métodos estatísticos em formulações variacionais, consultar [Cremers, Rousson e Deriche \(2007\)](#). Além disso, [Zhu e Yuille \(1996\)](#) propõem uma unificação entre forças de borda e de região dentro desse arcabouço.

Com o intuito de estabelecer o embasamento teórico necessário para a proposta desenvolvida neste capítulo, organizamos a discussão em três partes complementares.

4.1.1 Formulação Bayesiana para particionamento de imagem

Sejam $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ o domínio discreto da imagem, cujos elementos $[x, y]$ representam a posição de cada pixel na posição (x, y) e $\mathcal{I}[x, y] : \Omega \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ um campo aleatório escalar (induzido pelo SPAN tipo razão) seguindo a distribuição Beta₃^{1/2}(p, q). Conforme [Paragios e Deriche \(2002\)](#), denote $\mathcal{V} = (\Omega_{\text{dentro}}, \Omega_{\text{fora}}, \Gamma)$ como uma partição binária de Ω , em que $\Gamma = \partial\Omega_{\text{dentro}} = \partial\Omega_{\text{fora}}$ é a interface entre a *estrutura de interesse* e o *background*.

ground. A segmentação pode ser formulada como estimativa de máxima a posteriori (MAP): Dado

$$\Pr(\mathcal{V} \mid \mathcal{I}[x, y]) \propto \underbrace{\Pr(\mathcal{I}[x, y] \mid \mathcal{V})}_{\text{Termo de dados}} \times \underbrace{\Pr(\mathcal{V})}_{\text{Termo geométrico}}, \quad (4.1)$$

procura-se $\mathcal{V}^* = \arg \max_{\mathcal{V} \in \Xi} \Pr(\mathcal{V} \mid \mathcal{I}[x, y])$, em que Ξ é o conjunto de todas as possíveis partições. Intuitivamente, a solução ótima deve ser simultaneamente *compatível com os dados*.

A interface pode ser representada por uma função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cuja curva de nível zero define a fronteira (CHAN; VESE, 2001):

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, y) \in \Omega : \phi(x, y) = 0\}, & \Omega_{\text{dentro}} &= \{(x, y) \in \Omega : \phi(x, y) > 0\} \quad \text{e} \\ \Omega_{\text{fora}} &= \{(x, y) \in \Omega : \phi(x, y) < 0\}. \end{aligned}$$

Para evitar contornos serrilhados ou oscilantes, é comum adotar interfaces como curtas e suaves via penalização de comprimento a partir da função delta de Dirac regularizada δ_ϵ (ZHAO et al., 1996):

$$\Pr(\phi) \propto \exp\left(-\nu \int_{\Omega} \delta_\epsilon(\phi) \|\nabla \phi\| dx\right),$$

em que $\nu > 0$ é o peso de regularização, e $\nabla \phi$ é a normal à interface, $\|\nabla \phi\| = \sqrt{\langle \nabla \phi, \nabla \phi \rangle}$ é o comprimento da normal e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ é o produto interno.

Nas próximas seções, a Equação (4.1) será operacionalizada especificando (i) o *termo de dados* coerente com SAR (Subseção 4.1.2) e (ii) a *evolução variacional* do *level set* (Subseção 4.1.3).

4.1.2 Termo de dados

Considere uma discussão sobre $\Pr(\mathcal{I}[x, y] \mid \mathcal{V})$, a verossimilhança condicional à partição representada por \mathcal{V} . Admitindo independência condicional dentro de cada

região, a verossimilhança associada ao problema é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{I}) = \left[\prod_{[x,y] \in \Omega_{\text{dentro}}} f_{\text{dentro}}(\mathcal{I}[x,y]) \right] \left[\prod_{[x,y] \in \Omega_{\text{fora}}} f_{\text{fora}}(\mathcal{I}[x,y]) \right] \\ \times \left[\prod_{[x,y] \in \Gamma} f_{\text{borda}}(\mathcal{I}[x,y]) \right], \quad (4.2)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (p_{\text{dentro}}, q_{\text{dentro}}, p_{\text{fora}}, q_{\text{fora}})^\top$, $\mathcal{I} = [\mathcal{I}[1,1], \dots, \mathcal{I}[M,N]]^\top$ e $f_V(\cdot)$ representa a densidade para $V \in \{\text{dentro, fora, borda}\}$. No contexto desta tese (para intensidade SAR escalar induzida da SPAN), $f_{\text{dentro}}(\cdot)$ e $f_{\text{fora}}(\cdot)$ pertencem à família Beta $^{1/2}_3$, com parâmetros $\boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}} = (p_{\text{dentro}}, q_{\text{dentro}})$ e $\boldsymbol{\theta}_{\text{fora}} = (p_{\text{fora}}, q_{\text{fora}})$. Nas iterações do método de *level set* a ser proposto, o parâmetro $\boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}}$ ou $\boldsymbol{\theta}_{\text{fora}}$ será estimado por máxima verossimilhança nas regiões induzidas como discutido no Capítulo 3.

Adicionalmente para a partição Γ , utiliza-se o indicador clássico de contornos ativos geodésicos (CASELLES; KIMMEL; SAPIRO, 1997):

$$f_{\text{borda}}(\mathcal{I}[x,y]) = \mathcal{J}^{-1} \exp \left[-g_\alpha(\|\nabla \Sigma[x,y]\|) \right], \text{ tal que } g_\alpha(t) = \frac{1}{1+t^\alpha} \text{ e } \alpha \in \{1, 2\}, \quad (4.3)$$

em que $\Sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um mapa de arestas para as intensidades SPAN, definido como

$$\Sigma[x,y] = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{I}[x,y]}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{I}[x,y]}{\partial y} \right)^2},$$

e

$$\mathcal{J} = \iint_{[x,y] \in \Gamma} \exp \left[-g_\alpha(\|\nabla \Sigma[x,y]\|) \right] dx dy.$$

4.1.3 Evolução da curva e técnicas de *Level Set*

As Subseções 4.1.1 e 4.1.2 levam à representação \mathcal{V} com interface dirigida pela curva de nível $\phi(x,y) = 0$. No que se segue, a discussão considera a evolução de $\phi(\cdot)$ também no tempo, denotada por $\phi(x,y,t)$, e o termo \mathcal{V} é substituído por $\phi(x,y,t)$ na Equação (4.1).

A evolução do gradiente descendente do funcional $E(\phi) = -\log \Pr(\mathcal{I}[x, y] \mid \phi) - \log \Pr(\phi)$ (CHAN; VESE, 2001; OSHER; SETHIAN, 1988; OSHER; FEDKIW; PIECHOR, 2004) é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial E(\phi)}{\partial \phi}, \quad (4.4)$$

em que $E(\phi)$ é a energia e (para as funções regularizadas de Heaviside H_ϵ e Dirac δ_ϵ e pesos $\nu, \mu, \beta \geq 0$) pode ser escrito como

$$E(\phi) = \underbrace{-\int_{\Omega} \left[H_\epsilon(\phi) \log f_{\text{dentro}}(\mathcal{I}[x, y]) + (1 - H_\epsilon(\phi)) \log f_{\text{fora}}(\mathcal{I}[x, y]) \right] dx dy}_{\text{Termo de dados}} + \underbrace{\int_{\Omega} \left[\nu \delta_\epsilon(\phi) \|\nabla \phi\| + \mu g_\alpha(\|\nabla \Sigma\|) \delta_\epsilon(\phi) \|\nabla \phi\| - \beta \int_{\Omega} H_\epsilon(\phi) \mathcal{A}(x, y) \right] dx dy}_{\text{Termo de geométrico}}, \quad (4.5)$$

tal que ν é o peso do comprimento da curva (que controla a suavidade global da borda), μ peso do termo geodésico (controla a aderência às bordas), β é o peso (controla a atração para região de interesse, centro radial) de $\mathcal{A}(x, y)$ que é o atrator ou função radial (uma função auxiliar usada para distorcer a curva de nível) dada por

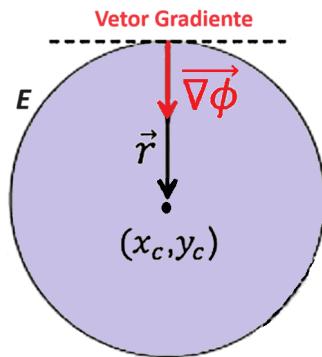
$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + \varrho^2}}, \quad (4.6)$$

$\varrho > 0$ é um parâmetro de regularização (que evita singularidade quando $x = x_C$ e $y = y_C$) e (x_C, y_C) é o centro de área da curva em evolução dirigida por $\phi(\cdot)$.

A variação da Equação (4.4) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \delta_\epsilon(\phi) \left[\log f_{\text{dentro}}(\mathcal{I}[x, y]) - \log f_{\text{fora}}(\mathcal{I}[x, y]) + \beta \mathcal{A}(x, y) + \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\mu \operatorname{div} \left(g_\alpha(\|\nabla \Sigma\|) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right)}_{\text{Termo de geodésico}} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Escrevendo $n = \nabla\phi/\|\nabla\phi\|$ e $\kappa = \operatorname{div}(n)$, em que $\operatorname{div}(\cdot)$ é o operador de divergência, o termo geodésico da Equação (4.7) decompõe-se em $\mu g_\alpha(\|\nabla\Sigma\|) \kappa + \mu \nabla g_\alpha(\|\nabla\Sigma\|) \cdot n$, isto é, *curvatura ponderada mais atração a bordas*. A Figura 17 ilustra o funcionamento do funcional de energia.



Fonte: O Autor

Figura 17 – Energia da circunvizinhança.

4.2 Proposta do gradiente descendente generalizado

4.2.1 O que está na literatura

Na formulação Bayes–variacional de contornos ativos (Seções 4.1.1–4.1.3), a evolução da fronteira como *level set* decorre do gradiente descendente do funcional que agrupa um termo de dados (verossimilhança regional) e um termo geométrico (regularização por comprimento/curvatura). No caso clássico *baseado em regiões*, a evolução é baseada na log da razão entre verossimilhanças (CHAN; VESE, 2001; CREMERS; ROUSSON; DERICHE, 2007) e Equação (4.7); com reforço *edge-based* (geodésico), usa-se um indicador de borda $g_\alpha(\|\nabla\Sigma\|)$ (CASELLES; KIMMEL; SAPIRO, 1997); e, quando há forma/centro conhecidos, adiciona-se um atrator radial (Seções 4.1.2, 4.1.3).

Nessa linha, um gradiente de evolução amplamente usado é

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi) \left[\underbrace{\log \frac{f_{\text{dentro}}(\mathcal{I}[x, y]; \theta_{\text{dentro}})}{f_{\text{fora}}(\mathcal{I}[x, y]; \theta_{\text{fora}})}}_{C(\mathcal{I}[x, y]; \theta_{\text{dentro}}, \theta_{\text{fora}})} + \beta \frac{1}{\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}} + \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \right], \quad (4.8)$$

em que:

- $C(\mathcal{I}[x, y]; \theta_{\text{dentro}}, \theta_{\text{fora}})$ é o termo dos dados na curva de evolução;
- (x_C, y_C) é o centro do atrator radial; $\beta \geq 0$ é seu peso;
- $\nu \geq 0$ é o peso de regularização por curvatura ($\kappa = \operatorname{div}(\nabla \phi / \|\nabla \phi\|)$);
- δ_ϵ é a delta regularizada (coerente com H_ϵ);
- a curvatura média 2D tem a forma,

$$\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) = \frac{\phi_{xx} \phi_y^2 - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_{yy} \phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}},$$

em que $\phi_x = \partial \phi / \partial x$, $\phi_y = \partial \phi / \partial y$, $\phi_{xx} = \partial^2 \phi / \partial x^2$, $\phi_{yy} = \partial^2 \phi / \partial y^2$ e $\phi_{xy} = \partial^2 \phi / \partial x \partial y$.

A Equação (4.8) é alinhada com [Caselles, Kimmel e Sapiro \(1997\)](#), [Chan e Vese \(2001\)](#), [Cremers, Rousson e Deriche \(2007\)](#) e com o bloco radial (atrator) usado anteriormente.

Para usar a Equação (4.8) no caso escalar induzido pelo SPAN, adotamos a densidade da distribuição Beta Tipo 3 modificada (dada na Definição 3.1.1) com densidade

$$f(s; p, q) = \frac{1}{\operatorname{Beta}(p, q)} \frac{s^{p-1} (1-2s)^{q-1}}{(1-s)^{p+q}} \mathbb{I}_{(0,1/2)}(s), \quad (4.9)$$

em que $s = s[x, y] \in (0, \frac{1}{2})$. Assim, o termo $C(\mathcal{I}[x, y]; \theta_{\text{dentro}}, \theta_{\text{fora}})$ é dado por

$$\begin{aligned} C(\mathcal{I}[x, y]; \theta_{\text{dentro}}, \theta_{\text{fora}}) &= \log \frac{\operatorname{Beta}(p_{\text{fora}}, q_{\text{fora}})}{\operatorname{Beta}(p_{\text{dentro}}, q_{\text{dentro}})} + (p_{\text{dentro}} - p_{\text{fora}}) \log s \\ &+ (q_{\text{dentro}} - q_{\text{fora}}) \log(1-2s) + (p_{\text{fora}} + q_{\text{fora}} - p_{\text{dentro}} - q_{\text{dentro}}) \log(1-s) \end{aligned} \quad (4.10)$$

e consiste exatamente no contraste utilizado por [Mitiche e Ayed \(2010\)](#) (ver também Equação (4.10) adiante), de fácil implementação numérica.

4.2.2 Nosso gradiente descendente generalizado (curvatura Box–Cox)

Para controlar “mudanças abruptas de natureza probabilística” e conectar suavemente a diferença de log-verossimilhanças ao regime de potências, adotamos o “nexo Box–Cox”

$$g_\lambda(f(\cdot)) = \frac{f^\lambda(\cdot) - 1}{\lambda}, \quad \text{tal que} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_\lambda(f(\cdot)) = \log f(\cdot).$$

Nossa proposição inicial é usar a medida

$$C_\lambda(\mathcal{I}[x, y]; \boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}}, \boldsymbol{\theta}_{\text{fora}}) \triangleq g_\lambda(f_{\text{dentro}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}})) - g_\lambda(f_{\text{fora}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{fora}})), \quad (4.11)$$

que tem como caso limite $C(\mathcal{I}[x, y]; \boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}}, \boldsymbol{\theta}_{\text{fora}})$, na Equação (4.8). A Figura 18 ilustra a relação entre as curvas logarítmica e o nexo Box–Cox.

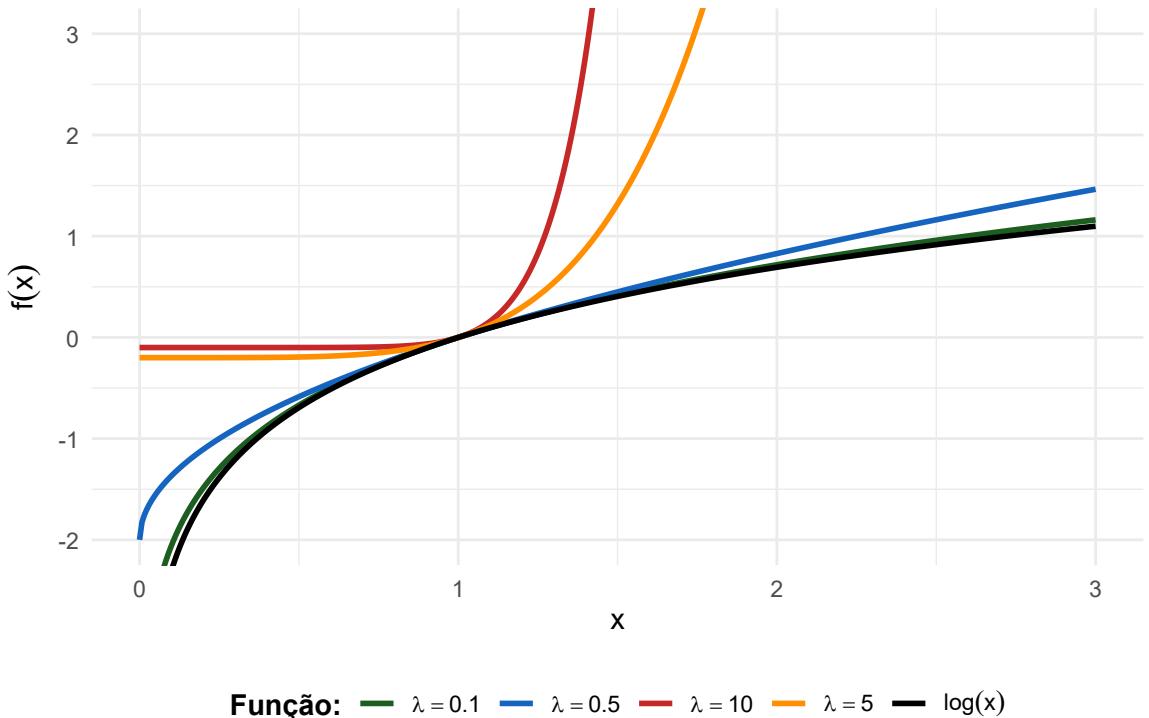
A partir da Equação (4.11), o funcional de energia (4.5) toma a forma

$$E_\lambda(\phi_\lambda) = - \underbrace{\int_{\Omega} \left[H_\epsilon(\phi) g_\lambda(f_{\text{dentro}}(\mathcal{I}[x, y])) + (1 - H_\epsilon(\phi)) g_\lambda(f_{\text{fora}}(\mathcal{I}[x, y])) \right] dx dy}_{\text{Termo de dados modificado}} + \underbrace{g_\lambda(f_{\text{dentro}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}})) - g_\lambda(f_{\text{fora}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{fora}}))}_{\text{Termo geométrico}}. \quad (4.12)$$

Incorporando o atrator radial $\mathcal{A}(x, y) = ((x - x_C)^2 + (y - y_C)^2)^{-1/2}$ (regularizado na prática) e a regularização por curvatura, propõe-se a curva de evolução:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi) \left[C_\lambda(\mathcal{I}[x, y]; \boldsymbol{\theta}_{\text{dentro}}, \boldsymbol{\theta}_{\text{fora}}) + \beta \mathcal{A}(x, y) + \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \right], \quad (4.13)$$

que é a *generalização* direta da Equação (4.8). Adicionalmente, pode-se somar o reforço geodésico *edge-based* via $g_a(\|\nabla \Sigma\|)$ como na Seção 4.1.3.



Fonte: O Autor

Figura 18 – Relação entre curvas.

4.3 Resultados numéricos

4.3.1 Discussão inicial dos cenários simulados

Nesta seção, alguns cenários de simulação são apresentados. A Figura 19a apresenta o *ground truth* contendo uma imagem com duas regiões, uma estrela $\mu^I[i, j]$ e o *background* $\mu^E[i, j]$. As Figuras 19b–19d apresentam contaminações do *ground truth* com retorno:

$$Z[i, j] = \begin{cases} \mu^I[i, j] \times C^I[i, j], & \text{para região interna,} \\ \mu^E[i, j] + C^E[i, j], & \text{para região externa,} \end{cases}$$

em que $\mu^I[i, j] = 1$ e $\mu^E[i, j] = 0$ e $C^V[i, j] \sim \left\{ \cup(0, 1/2), \text{Beta}_3^{1/2}(p_V, q_V) \right\}$ para $V \in \{I, E\}$ definida da Tabela 14. Pode-se verificar que para todos cenários a média da

região interna é maior do que aquela da região externa, porém a variância do *background* (parte externa) é menor do que aquela do sinal aleatório interno. Essa suposição tem o objetivo de deixar a parte externa mais incerta, contudo deixar a média do sinal interno mais pronunciada. Quanto a mudança dos cenário de 1 para 3, pode-se notar que a variância da parte interna diminui e sua média aumenta. O esperado (como pode ser analisado por inspeção visual) é que a detecção de segmentos seja mais trabalhosa no primeiro cenário do que nos demais.

Tabela 14 – Configuração dos cenários para $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{V}\text{ar}(Z)$

Cenários	Fora da Estrela	Dentro da Estrela
	$(p_E, q_E) \mid (\mathbb{E}(Z), \mathbb{V}\text{ar}(Z))$	$(p_I, q_I) \mid (\mathbb{E}(Z), \mathbb{V}\text{ar}(Z))$
1	$(0.1, 10) \mid (0.009058628, 0.0006462572)$	$(5, 5) \mid (0.326419956, 0.004809658)$
2	$(0.1, 10) \mid (0.009058628, 0.0006462572)$	$(5, 3) \mid (0.378184165, 0.004265891)$
3	$(0.1, 10) \mid (0.009058628, 0.0006462572)$	$(5, 1) \mid (0.450930764, 0.002246029)$

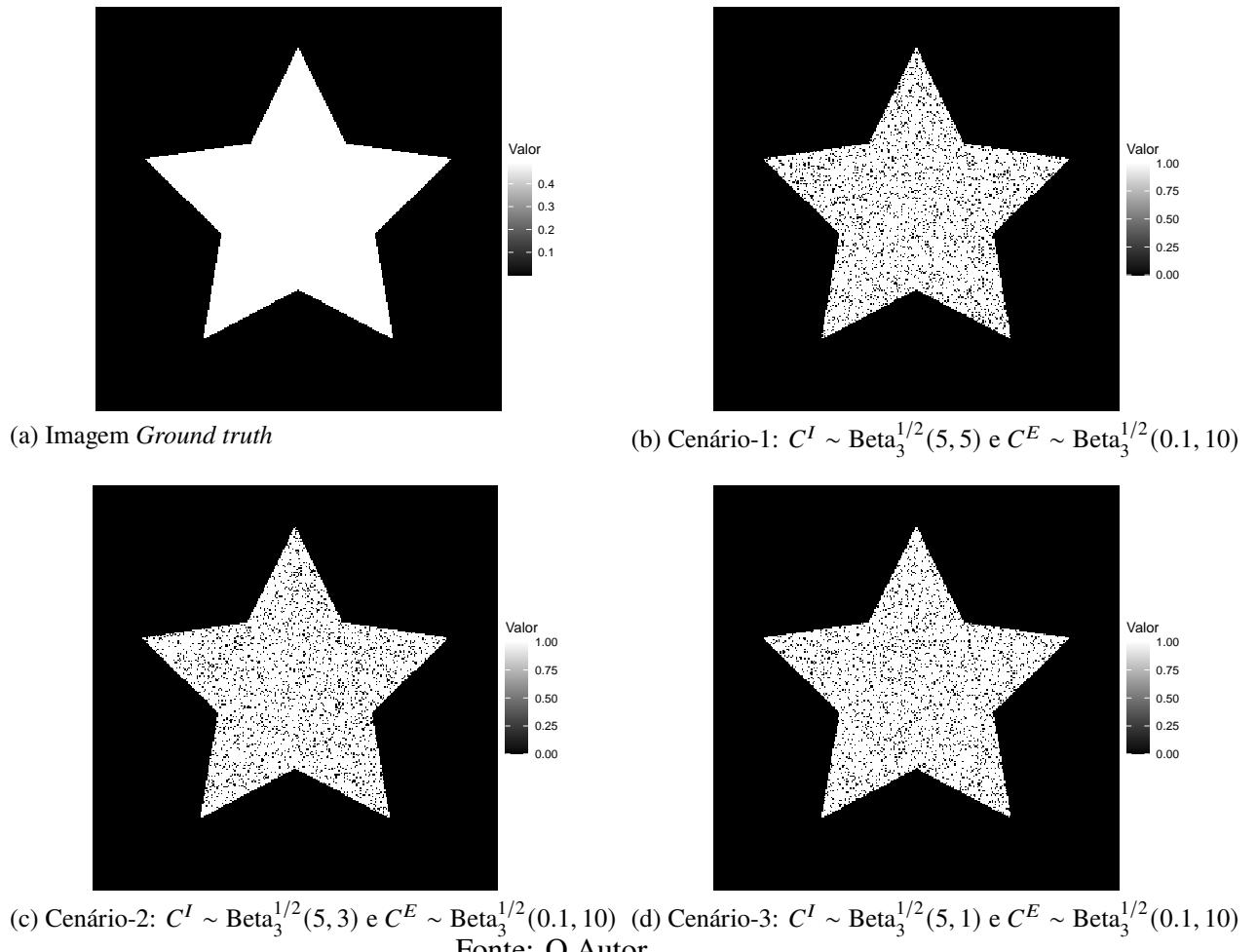
Como medidas de avaliação de desempenho, adotaram-se:

- Acurácia: Avalia a proporção total de pixels corretamente classificados. Sua fórmula é dada por:

$$\text{Acurácia} = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN},$$

em que

- *Verdadeiros Positivos (TP)*: pixels corretamente classificados como 1;
- *Verdadeiros Negativos (TN)*: pixels corretamente classificados como 0;
- *Falsos Positivos (FP)*: pixels incorretamente classificados como 1;
- *Falsos Negativos (FN)*: pixels incorretamente classificados como 0.
- Coeficiente de Similaridade de Dice (DSC): Mede a sobreposição entre os conjuntos segmentado (S) e a verdade de referência (R), com valores entre 0 (nenhuma



Fonte: O Autor

Figura 19 – Cenários de simulação de uma estrela apresentando *background* e *ground truth*.

sobreposição) e 1 (sobreposição perfeita):

$$\text{DSC} = \frac{2|S \cap R|}{|S| + |R|} = \frac{2TP}{2TP + FP + FN}.$$

- Índice de Jaccard (IoU): Também conhecido como coeficiente de interseção sobre união, mede a similaridade entre os conjuntos segmentado (S) e de referência (R), variando entre 0 (nenhuma interseção) e 1 (coincidência perfeita):

$$\text{IoU} = \frac{|S \cap R|}{|S \cup R|} = \frac{TP}{TP + FP + FN}.$$

4.3.2 Discussão dos resultados de simulação

Neste estudo de simulação, avaliamos o desempenho dos métodos de segmentação aplicados a imagens artificiais cuja *ground truth* é apresentada na Figura 19a, composta por um sinal determinístico em forma de estrela sobre um *background* homogêneo. O objetivo central é verificar a capacidade dos algoritmos em recuperar corretamente esse sinal, tanto em cenários livres de ruído quanto na presença de diferentes tipos de contaminação (vide Figuras 19b–19d).

Para isso, comparamos duas abordagens de *level set*:

- (I) o método clássico da literatura, baseado na curvatura induzida pela log-verossimilhança (CREMERS; ROUSSON; DERICHE, 2007); e
- (II) a proposta introduzida neste capítulo, que utiliza a transformação de Box–Cox definida na Equação (4.11).

A segmentação binária é analisada em três cenários:

- (i) imagem sem contaminação (Figura 20);
- (ii) imagem contaminada por ruído Uniforme $(0, 1/2)$ (Figura 21);
- (iii) imagem contaminada pela distribuição Beta₃^{1/2} (p, q) , conforme Figuras 22 a 24.

Ao final, discutimos os resultados obtidos em cada cenário e identificamos a abordagem mais eficiente para cada tipo de contaminação.

Um aspecto fundamental na dinâmica de métodos baseados em *level sets* é a escolha do chute inicial para a função de nível ϕ . Tal escolha influencia não apenas a estabilidade da evolução, mas também a capacidade do algoritmo de explorar adequadamente o espaço da imagem antes de se aproximar das fronteiras verdadeiras. Neste estudo, adotamos como condição inicial uma superfície de nível simples, tipicamente um quadrado ou retângulo centralizado, cuja região positiva intercepta apenas uma parcela limitada

da estrutura a ser segmentada. Esse procedimento, bastante difundido na literatura, evita preconceitos geométricos indesejados e garante que o contorno evolua predominantemente guiado pelos contrastes estatísticos induzidos pelos modelos ajustados às regiões interna e externa. Além disso, um chute inicial regularizado reduz a probabilidade de aprisionamento prematuro do contorno em mínimos locais, favorecendo trajetórias de evolução mais estáveis e consistentes ao longo das iterações.

Além disso, a evolução do contorno implícito foi conduzida por um esquema iterativo do tipo *level set*, no qual a função de nível ϕ é atualizada sucessivamente mediante a ação conjunta da curvatura regularizadora e do termo de força derivado da diferença entre as log-verossimilhanças dos modelos ajustados às regiões interna e externa. A cada iteração, os parâmetros (p, q) de ambas as regiões são estimados por máxima verossimilhança, e a força de atração do contorno é modulada por um coeficiente λ , que controla o grau de não linearidade da transformação de Box–Cox aplicada à verossimilhança. O processo iterativo é executado por um número predefinido de iterações n_{iter} , e o critério de parada consiste no esgotamento dessas iterações, dado que a estabilidade numérica da evolução é garantida pelo amortecimento imposto pelas funções regularizadas de Heaviside e delta de Dirac.

No que se refere à condição inicial, o contorno implícito é iniciado por uma função de nível ϕ cuja região positiva assume a forma de um retângulo ou quadrado centralizado na imagem. Essa escolha, amplamente adotada na literatura de *level sets*, garante que o contorno inicial seja suficientemente simples, conectado e distante das bordas verdadeiras, permitindo uma expansão controlada até que o termo de força direcione a superfície de nível para as descontinuidades estatísticas presentes na imagem. Além disso, o uso de uma forma geométrica regular evita viéses iniciais e assegura que todo o processo de segmentação decorra da dinâmica induzida pelos modelos estatísticos e não de artefatos do estado inicial.

Em termos de convergência, ambos os métodos avaliados apresentaram compor-

tamento estável, mas com diferenças relevantes no tempo necessário para atingir um estado estacionário. O método clássico baseado na log-verossimilhança tende a convergir mais rapidamente, pois sua força de evolução depende de termos essencialmente lineares no contraste estatístico entre as regiões. Já a abordagem com nexo Box–Cox, por envolver um termo não linear amplificado pela transformação, pode produzir trajetórias de evolução mais sensíveis aos valores de λ e ao passo temporal, exigindo em alguns casos um número superior de iterações para estabilização. Apesar disso, a maior sensibilidade frequentemente resulta em fronteiras mais nítidas e robustas em cenários de contaminação complexa.

Do ponto de vista computacional, verifica-se que o método clássico apresenta custo relativamente baixo, uma vez que a força de evolução deriva de operações simples sobre log-densidades. Em contraste, o método com nexo Box–Cox exige o cálculo, a cada pixel e a cada iteração, de um termo não linear do tipo $\{\exp(\lambda \ell(x)) - 1\}/\lambda$, além de demandar ajustes mais finos do parâmetro λ para garantir estabilidade numérica. Como consequência, seu custo computacional é mais elevado; contudo, esse aumento se traduz em ganhos de robustez e qualidade da segmentação em diversos cenários, sobretudo quando há heterogeneidade ou ruído estrutural significativo.

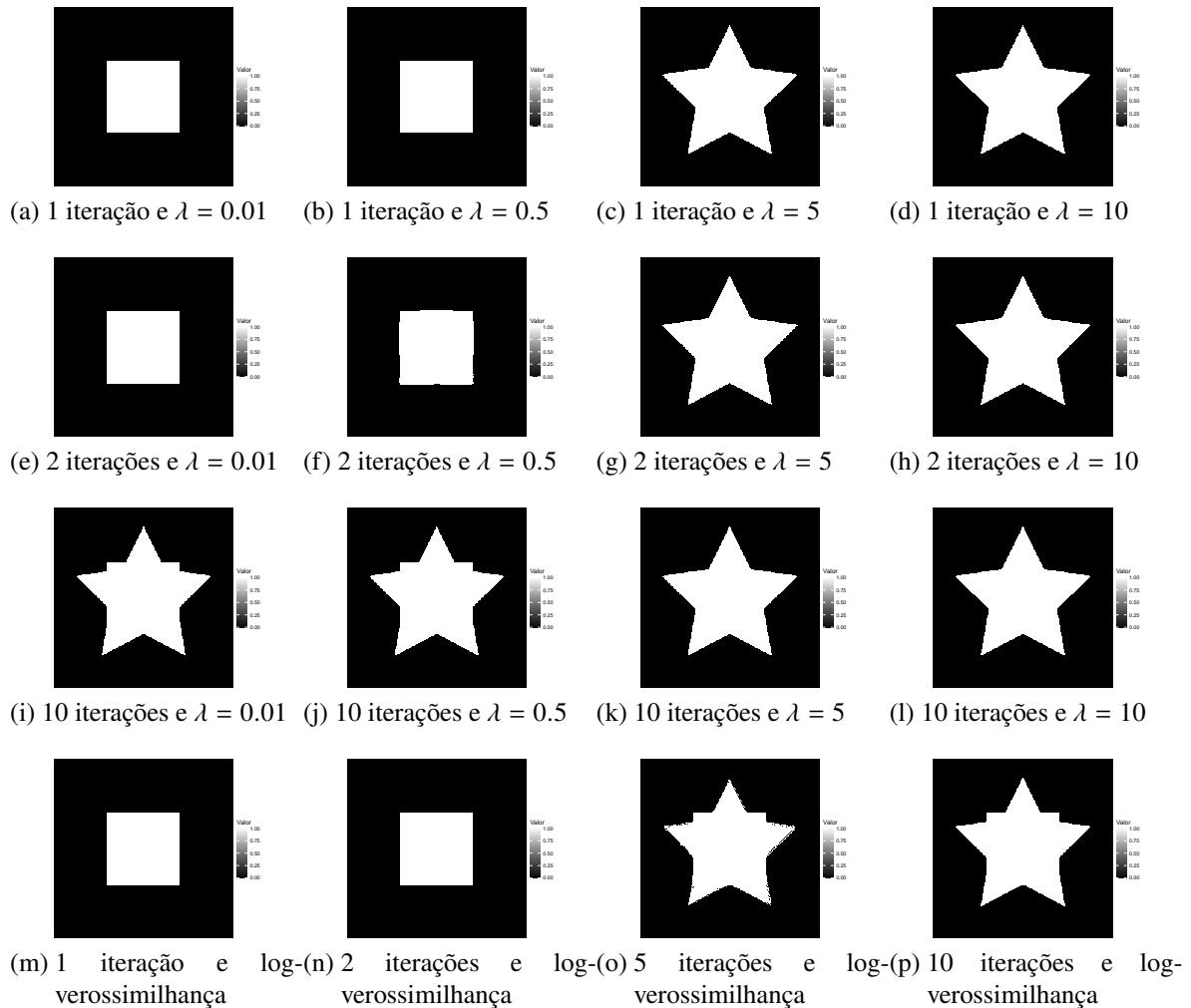


Figura 20 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, sem contaminação, utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.

A Figura 20 apresenta os cenários de segmentações binárias, sem contaminação, utilizando o nexo Box-Cox e a log-verossimilhança. Pode-se verificar que, para $\lambda = 5$ e $\lambda = 10$, o método proposto atinge uma ótima segmentação desde a primeira iteração. Para $\lambda = 0.01$ e $\lambda = 0.5$, o nexo Box-Cox tal como a literatura só funciona para mais de 5 iterações.

Tabela 15 – Resultados dos critérios de performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela original.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	1	0	1	0	1	0
9.0	1	0	1	0	1	0
8.0	1	0	1	0	1	0
7.0	1	0	1	0	1	0
6.0	1	0	1	0	1	0
5.0	1	0	1	0	1	0
4.0	1	0	1	0	1	0
3.0	1	0	1	0	1	0
2.0	1	0	1	0	1	0
1.0	0.91599	0.00014	0.78498	0.00028	0.64606	0.00037
0.8	0.91362	0.00014	0.78024	0.00028	0.63966	0.00037
0.5	0.91097	0.00007	0.77501	0.00013	0.63267	0.00018
0.1	0.91050	0.00000	0.77410	0.00000	0.63145	0.00000
LV	0.91050	0.00000	0.77410	0.00000	0.63145	0.00000

Tabela 16 – Resultados dos critérios de performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela original.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	1	0	1	0	1	0
9.0	1	0	1	0	1	0
8.0	1	0	1	0	1	0
7.0	1	0	1	0	1	0
6.0	1	0	1	0	1	0
5.0	1	0	1	0	1	0
4.0	1	0	1	0	1	0
3.0	1	0	1	0	1	0
2.0	1	0	1	0	1	0
1.0	0.99992	0.00006	0.99984	0.00014	0.99967	0.00028
0.8	0.95167	0.00096	0.88456	0.00256	0.79303	0.00412
0.5	0.92054	0.00008	0.79507	0.00022	0.65985	0.00030
0.1	0.91935	0.00005	0.79179	0.00011	0.65535	0.00015
LV	0.91374	0.00005	0.78049	0.00000	0.64000	0.00000

Tabela 17 – Resultados dos critérios de performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela original.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	1	0	1	0	1	0
9.0	1	0	1	0	1	0
8.0	1	0	1	0	1	0
7.0	1	0	1	0	1	0
6.0	1	0	1	0	1	0
5.0	1	0	1	0	1	0
4.0	1	0	1	0	1	0
3.0	1	0	1	0	1	0
2.0	1	0	1	0	1	0
1.0	1	0	1	0	1	0
0.8	1	0	1	0	1	0
0.5	1	0	1	0	1	0
0.1	1	0	1	0	1	0
LV	0.99999	0	0.99998	0	0.99995	0

Tabela 18 – Resultados dos critérios de performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela original.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	1	0	1	0	1	0
9.0	1	0	1	0	1	0
8.0	1	0	1	0	1	0
7.0	1	0	1	0	1	0
6.0	1	0	1	0	1	0
5.0	1	0	1	0	1	0
4.0	1	0	1	0	1	0
3.0	1	0	1	0	1	0
2.0	1	0	1	0	1	0
1.0	1	0	1	0	1	0
0.8	1	0	1	0	1	0
0.5	1	0	1	0	1	0
0.1	1	0	1	0	1	0
LV	1	0	1	0	1	0

Os resultados das Tabelas 15–18 mostram que, na maioria dos cenários, as métricas

Acurácia, Dice e Jaccard atingem valores unitários, refletindo ótima segmentação da estrela simulada. As exceções ocorrem para poucas iterações $n_{\text{iter}} = 1, 2$ e/ou valores baixos de λ (próximos de 0), nos quais as métricas caem para cerca de 0.91 em *Acurácia*, 0.78 em *Dice* e 0.64 em *Jaccard*. A partir de $n_{\text{iter}} \geq 5$ (exceto para *LV*), o método converge em todos os casos para desempenho esperado (LI et al., 2005; ZHANG et al., 2010). Vê-se que tanto o desempenho quanto a velocidade de convergência do método proposto são melhores.

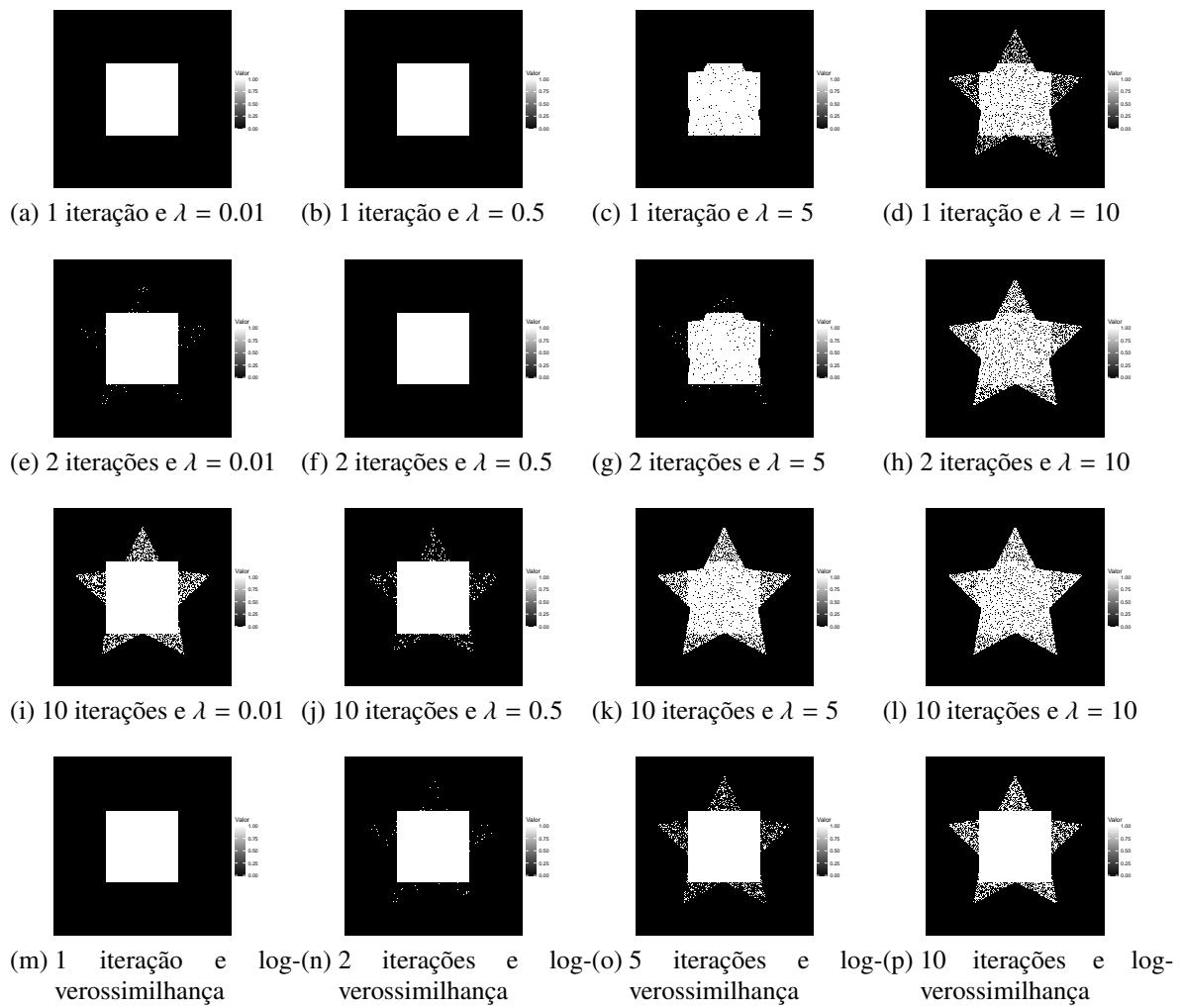


Figura 21 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($\mathcal{U}(0, 1/2)$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.

Discutiremos agora os resultados com contaminação. A Figura 21 apresenta os cenários de segmentações binárias, com contaminação da uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$, utilizando o nexo Box-Cox e a log-verossimilhança. Pode-se observar que é esperado um desempenho melhor e uma velocidade de convergência maior para o método proposto com valores de λ maiores.

Tabela 19 – Resultados dos critérios de performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97301	0.00064	0.93866	0.00155	0.88441	0.00275
9.0	0.97176	0.00083	0.93563	0.00201	0.87905	0.00354
8.0	0.94388	0.00229	0.86339	0.00635	0.75967	0.00981
7.0	0.91301	0.00083	0.77107	0.00270	0.62744	0.00357
6.0	0.90457	0.00029	0.74320	0.00097	0.59134	0.00123
5.0	0.90592	0.00034	0.74775	0.00114	0.59713	0.00146
4.0	0.90783	0.00036	0.75411	0.00121	0.60528	0.00156
3.0	0.91058	0.00025	0.76319	0.00081	0.61706	0.00106
2.0	0.91434	0.00016	0.77538	0.00053	0.63316	0.00071
1.0	0.91827	0.00014	0.78789	0.00045	0.65001	0.00061
0.8	0.91896	0.00011	0.79005	0.00036	0.65296	0.00049
0.5	0.91662	0.00018	0.78602	0.00038	0.64747	0.00051
0.1	0.91050	0.00000	0.77410	0.00001	0.63146	0.00001
LV	0.91050	0.00000	0.77410	0.00000	0.63145	0.00000

Tabela 20 – Resultados dos critérios de performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97333	0.00056	0.93943	0.00135	0.88578	0.002399
9.0	0.97259	0.00075	0.93764	0.00182	0.88260	0.00323
8.0	0.97082	0.00067	0.93336	0.00163	0.87506	0.00287
7.0	0.96690	0.00049	0.92372	0.00122	0.85825	0.00211
6.0	0.95671	0.00080	0.89782	0.00209	0.81460	0.00345
5.0	0.94775	0.00072	0.87403	0.00195	0.77625	0.00308
4.0	0.93158	0.00090	0.82835	0.00265	0.70701	0.00387
3.0	0.90722	0.00036	0.75209	0.00120	0.60268	0.00154
2.0	0.91101	0.00030	0.76461	0.00099	0.61892	0.00129
1.0	0.91620	0.00022	0.78132	0.00070	0.64112	0.00094
0.8	0.91736	0.00018	0.78499	0.00057	0.64608	0.00077
0.5	0.91889	0.00009	0.78984	0.00028	0.65267	0.00038
0.1	0.91135	0.00008	0.77613	0.00018	0.63417	0.00025
LV	0.91328	0.00017	0.78266	0.00050	0.64292	0.00067

Tabela 21 – Resultados dos critérios de performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97391	0.00065	0.94083	0.00156	0.88827	0.00278
9.0	0.97390	0.00043	0.94080	0.00103	0.88822	0.00184
8.0	0.97182	0.00045	0.93578	0.00108	0.87931	0.00191
7.0	0.96915	0.00058	0.92928	0.00142	0.86790	0.00248
6.0	0.96514	0.00057	0.91933	0.00143	0.85071	0.00244
5.0	0.96240	0.00071	0.91244	0.00179	0.83899	0.00304
4.0	0.95950	0.00062	0.90504	0.00160	0.82656	0.00267
3.0	0.95797	0.00060	0.90111	0.00155	0.82003	0.00257
2.0	0.94147	0.00086	0.85670	0.00242	0.74933	0.00370
1.0	0.92404	0.00056	0.80574	0.00171	0.67469	0.00239
0.8	0.92546	0.00055	0.81009	0.00166	0.68080	0.00234
0.5	0.93143	0.00055	0.82792	0.00162	0.70638	0.00235
0.1	0.95934	0.00044	0.90463	0.00112	0.82587	0.00187
LV	0.96877	0.00035	0.92847	0.00084	0.86649	0.00147

Tabela 22 – Resultados dos critérios de performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1/2)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97419	0.00061	0.94150	0.00147	0.88948	0.00262
9.0	0.97412	0.00054	0.94134	0.00129	0.88918	0.00231
8.0	0.97244	0.00050	0.93729	0.00122	0.88198	0.00215
7.0	0.97032	0.00039	0.93213	0.00095	0.87290	0.00167
6.0	0.96834	0.00051	0.92727	0.00126	0.86441	0.00219
5.0	0.96750	0.00069	0.92519	0.00171	0.86081	0.00296
4.0	0.96748	0.00055	0.92516	0.00137	0.86075	0.00237
3.0	0.96920	0.00082	0.92939	0.00201	0.86810	0.00350
2.0	0.97139	0.00057	0.93473	0.00138	0.87746	0.00244
1.0	0.97429	0.00077	0.94173	0.00184	0.88988	0.00328
0.8	0.97710	0.00071	0.94844	0.00168	0.90194	0.00304
0.5	0.98479	0.00065	0.96634	0.00148	0.93488	0.00288
0.1	0.99425	0.00018	0.98754	0.00039	0.97538	0.00077
LV	0.99507	0.00001	0.98933	0.00003	0.97889	0.00005

Os resultados das Tabelas 19–22 mostram que há degradação moderada, sobretudo com poucas iterações. Com $n_{\text{iter}} = 1$, por exemplo, a acurácia média pode ficar em torno de 0,91 no regime de λ muito baixo (linha LV), enquanto combinações de λ maiores tendem a valores mais altos. À medida que n_{iter} aumenta, as métricas sobem substancialmente e, com $n_{\text{iter}} = 10$, alcançam patamar próximo de 0,99 para uma faixa ampla de λ , mantendo desvios padrão pequenos, alinhada com a literatura em ruídos não gaussianos, ver [Zhang et al. \(2010\)](#), [Feng, Cao e Pi \(2013\)](#). Pelo resultado quantitativo para altos valores de λ e n_{iter} , a verossimilhança aparentemente funcionou melhor do que a proposição por causa do chute inicial da segmentação. Isto pode ser visto analisando as Figuras 211 e 21p. Note que a convergência do método baseado na log-verossimilhança não descreve bem a geometria do sinal como método proposto.

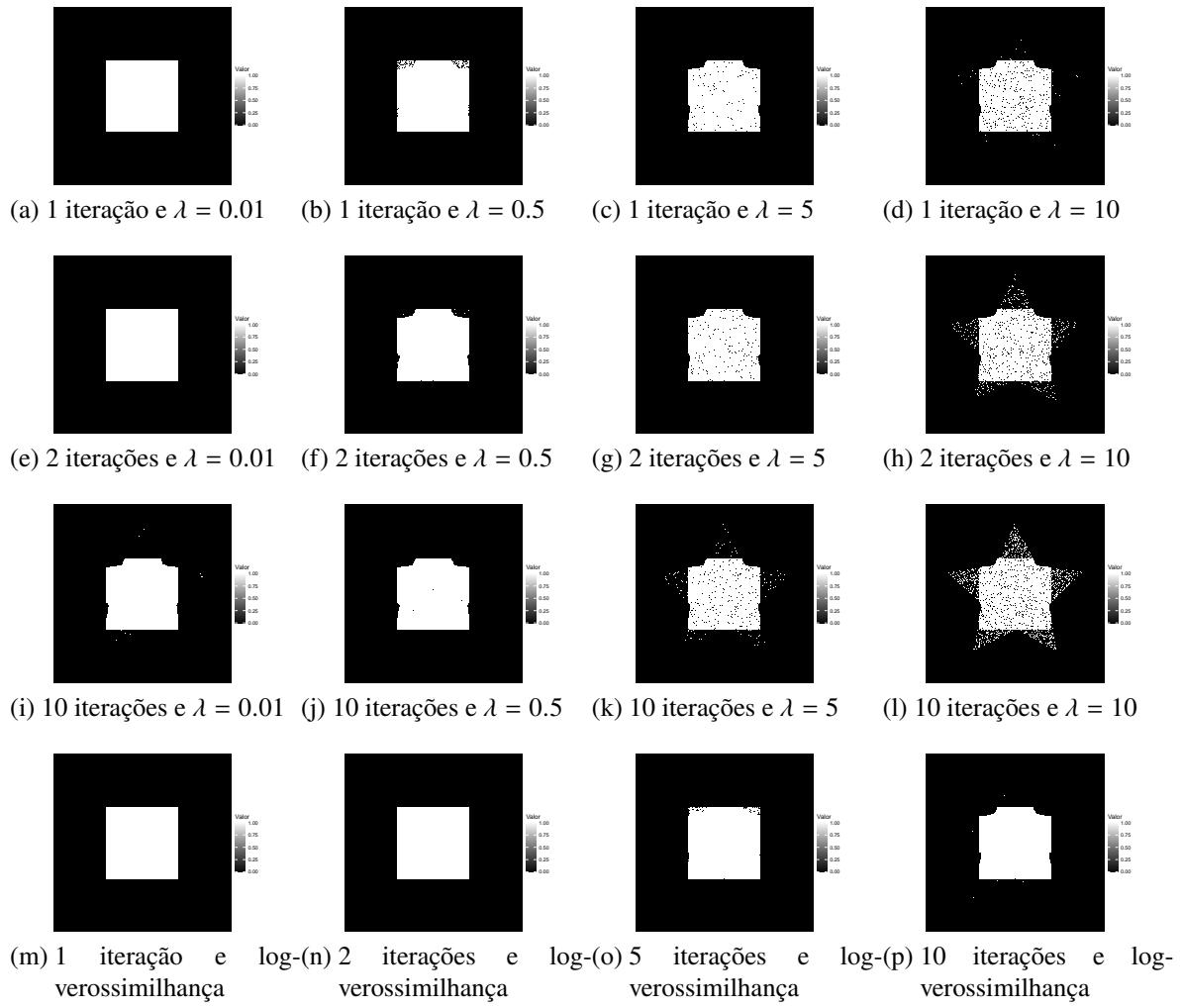


Figura 22 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($p = q = 5$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.

A Figura 22 apresenta os cenários de segmentações binárias, com contaminação da $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$, utilizando o nexo Box-Cox e a log-verossimilhança.

Tabela 23 – Resultados dos Critérios de Performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.96940	0.00053	0.93125	0.00122	0.87135	0.00214
9.0	0.96795	0.00052	0.92843	0.00119	0.86642	0.00208
8.0	0.96749	0.00051	0.92777	0.00120	0.86527	0.00209
7.0	0.96811	0.00049	0.92958	0.00115	0.86843	0.00200
6.0	0.96932	0.00035	0.93255	0.00081	0.87363	0.00142
5.0	0.97357	0.00029	0.94245	0.00066	0.89116	0.00118
4.0	0.98028	0.00031	0.95769	0.00070	0.91881	0.00129
3.0	0.97915	0.00034	0.95514	0.00077	0.91413	0.00141
2.0	0.97614	0.00051	0.94833	0.00115	0.90175	0.00208
1.0	0.96897	0.00025	0.93176	0.00058	0.87224	0.00102
0.8	0.96609	0.00043	0.92493	0.00103	0.86035	0.00178
0.5	0.95902	0.00043	0.90785	0.00104	0.83125	0.00175
0.1	0.93319	0.00034	0.84050	0.00094	0.72488	0.00140
LV	0.91422	0.00015	0.78549	0.00045	0.64676	0.00062

Tabela 24 – Resultados dos Critérios de Performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97265	0.00040	0.93786	0.00094	0.88300	0.00167
9.0	0.97378	0.00040	0.94059	0.00096	0.88785	0.00171
8.0	0.97503	0.00055	0.94360	0.00131	0.89323	0.00235
7.0	0.97661	0.00046	0.94737	0.00109	0.90000	0.00197
6.0	0.98017	0.00045	0.95580	0.00104	0.91533	0.00191
5.0	0.98975	0.00027	0.97764	0.00061	0.95627	0.00116
4.0	0.98965	0.00030	0.97746	0.00065	0.95592	0.00125
3.0	0.98853	0.00024	0.97505	0.00053	0.95132	0.00101
2.0	0.98315	0.00043	0.96351	0.00094	0.92959	0.00175
1.0	0.97556	0.00036	0.94702	0.00081	0.89938	0.00147
0.8	0.97434	0.00033	0.94423	0.00077	0.89435	0.00137
0.5	0.97070	0.00040	0.93580	0.00094	0.87934	0.00166
0.1	0.95556	0.00040	0.89928	0.00101	0.81699	0.00167
LV	0.93355	0.00028	0.84151	0.00077	0.72638	0.00115

Tabela 25 – Resultados dos Critérios de Performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.96186	0.00285	0.91294	0.00670	0.83989	0.01138
9.0	0.97068	0.00211	0.93363	0.00506	0.87555	0.00890
8.0	0.97491	0.00091	0.94339	0.00223	0.89286	0.00400
7.0	0.97802	0.00059	0.95064	0.00140	0.90593	0.00254
6.0	0.98310	0.00078	0.96249	0.00180	0.92770	0.00334
5.0	0.99130	0.00034	0.98105	0.00076	0.96281	0.00147
4.0	0.99265	0.00026	0.98404	0.00057	0.96857	0.00111
3.0	0.99331	0.00023	0.98550	0.00051	0.97141	0.00099
2.0	0.99367	0.00021	0.98629	0.00045	0.97296	0.00088
1.0	0.99449	0.00033	0.98808	0.00072	0.97645	0.00140
0.8	0.99471	0.00024	0.98855	0.00051	0.97736	0.00100
0.5	0.99547	0.00019	0.99023	0.00042	0.98064	0.00082
0.1	0.99611	0.00019	0.99161	0.00041	0.98336	0.00080
LV	0.99426	0.00020	0.98757	0.00043	0.97545	0.00084

Tabela 26 – Resultados dos Critérios de Performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.93643	0.01215	0.85968	0.02945	0.75492	0.04463
9.0	0.95796	0.00723	0.90681	0.01557	0.82984	0.02612
8.0	0.96952	0.00496	0.93154	0.01188	0.87207	0.02082
7.0	0.97846	0.00174	0.95167	0.00412	0.90782	0.00744
6.0	0.98690	0.00174	0.97115	0.00395	0.94394	0.00744
5.0	0.99284	0.00035	0.98445	0.00077	0.96938	0.00149
4.0	0.99516	0.00019	0.98955	0.00041	0.97932	0.00081
3.0	0.99590	0.00020	0.99114	0.00044	0.98244	0.00087
2.0	0.99650	0.00015	0.99245	0.00032	0.98502	0.00063
1.0	0.99746	0.00016	0.99454	0.00035	0.98914	0.00068
0.8	0.99766	0.00011	0.99498	0.00023	0.99000	0.00045
0.5	0.99811	0.00015	0.99595	0.00032	0.99193	0.00064
0.1	0.99841	0.00012	0.99658	0.00026	0.99319	0.00051
LV	0.99821	0.00017	0.99616	0.00037	0.99236	0.00074

Os resultados das Tabelas 23–26 mostram que há degradação moderada, sobretudo

com poucas iterações. Com $n_{\text{iter}} = 1$, observa-se um máximo em λ intermediário/alto (p. ex., $\lambda \approx 7$ atinge *Acurácia* $\approx 0,985$), enquanto λ muito baixo (\rightarrow LV) reduz levemente as métricas (*Acurácia* $\approx 0,914$). Para $n_{\text{iter}} \in \{5, 10\}$, *Acurácia* e *Dice* sobem para a faixa $[0,989, 0,995]$ nos melhores λ , e a LV fica muito próxima do topo (com *Acurácia* $\approx 0,998$ para $n_{\text{iter}} = 10$). Como discutido anteriormente, isto se dá devido ao chute inicial de ϕ . Contudo note que o método proposto captura melhor a geometria do sinal em quase todos os casos. Analisando as Figuras 22l e 22p, observamos que a convergência do método baseado na log-verossimilhança não descreve bem a geometria do sinal como método proposto.

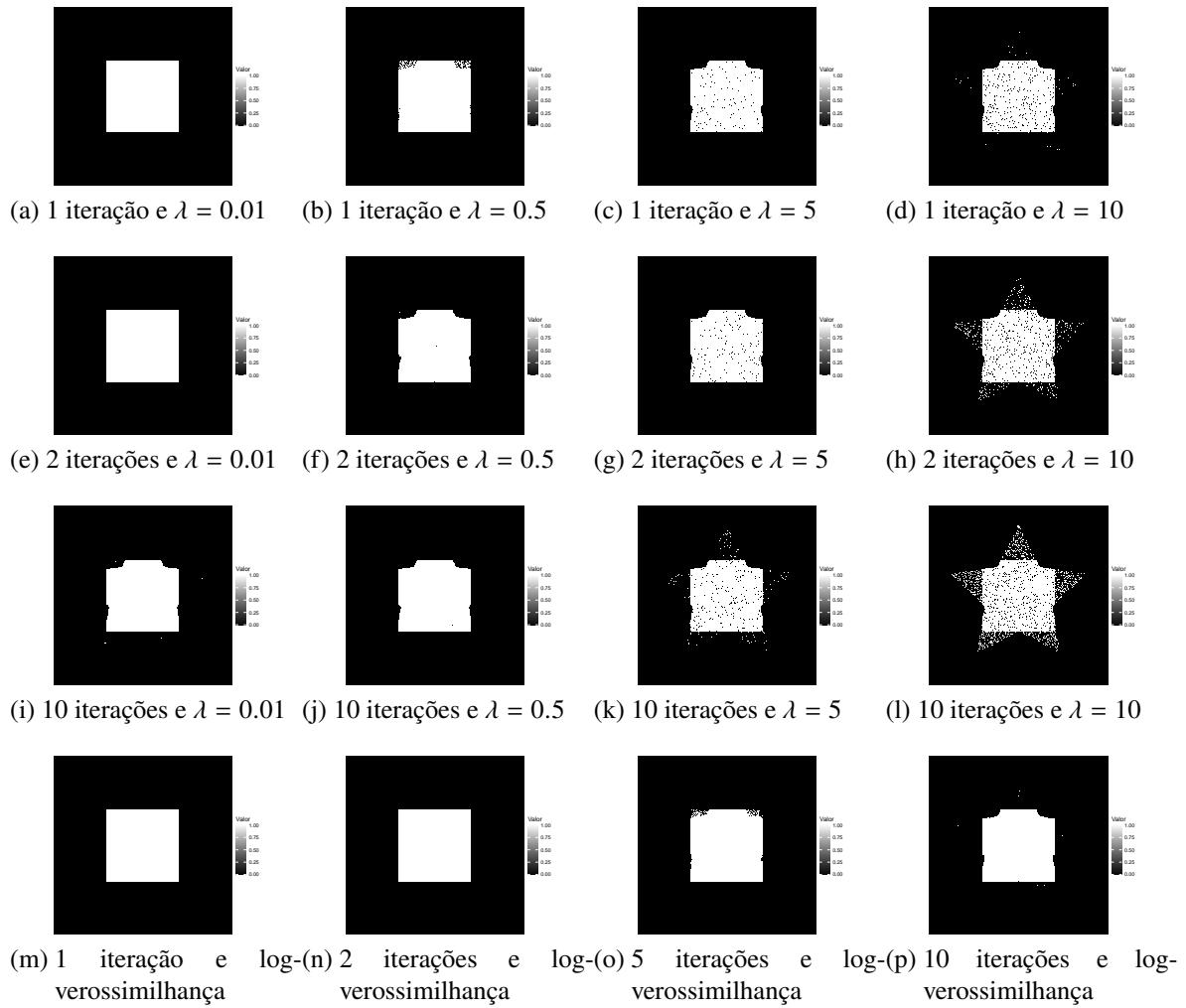


Figura 23 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($p = 5$ e $q = 3$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.

A Figura 23 apresenta os cenários de segmentações binárias, com contaminação da $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$, utilizando o nexo Box-Cox e a log-verossimilhança.

Tabela 27 – Resultados dos Critérios de Performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97916	0.00047	0.95390	0.00108	0.91187	0.00197
9.0	0.97938	0.00044	0.95459	0.00100	0.91313	0.00183
8.0	0.98001	0.00049	0.95617	0.00113	0.91602	0.00208
7.0	0.98117	0.00047	0.95900	0.00106	0.92122	0.00195
6.0	0.98505	0.00020	0.96786	0.00042	0.93772	0.00079
5.0	0.98345	0.00021	0.96447	0.00046	0.93139	0.00086
4.0	0.98169	0.00026	0.96071	0.00057	0.92439	0.00106
3.0	0.97953	0.00026	0.95597	0.00058	0.91565	0.00107
2.0	0.97652	0.00019	0.94921	0.00042	0.90333	0.00077
1.0	0.96890	0.00023	0.93159	0.00055	0.87194	0.00096
0.8	0.96591	0.00058	0.92451	0.00138	0.85962	0.00238
0.5	0.95863	0.00042	0.90688	0.00104	0.82963	0.00173
0.1	0.93256	0.00033	0.83874	0.00091	0.72227	0.00134
LV	0.91364	0.00015	0.78374	0.00045	0.64438	0.00060

Tabela 28 – Resultados dos Critérios de Performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.98168	0.00040	0.95930	0.00093	0.92178	0.00172
9.0	0.98359	0.00061	0.96369	0.00139	0.92993	0.00258
8.0	0.98606	0.00076	0.96931	0.00173	0.94045	0.00325
7.0	0.99189	0.00024	0.98239	0.00052	0.96538	0.00100
6.0	0.99174	0.00026	0.98205	0.00058	0.96473	0.00112
5.0	0.99184	0.00038	0.98229	0.00083	0.96520	0.00159
4.0	0.99084	0.00029	0.98010	0.00064	0.96097	0.00124
3.0	0.98967	0.00019	0.97753	0.00042	0.95606	0.00080
2.0	0.98582	0.00037	0.96918	0.00083	0.94021	0.00156
1.0	0.97593	0.00039	0.94787	0.00089	0.90090	0.00160
0.8	0.97411	0.00035	0.94370	0.00081	0.89340	0.00146
0.5	0.97073	0.00039	0.93586	0.00091	0.87946	0.00161
0.1	0.95491	0.00043	0.89767	0.00107	0.81434	0.00175
LV	0.93193	0.00019	0.83701	0.00052	0.71971	0.00077

Tabela 29 – Resultados dos Critérios de Performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.97320	0.00369	0.94040	0.00864	0.88762	0.01541
9.0	0.98065	0.00209	0.95744	0.00456	0.91839	0.00838
8.0	0.98818	0.00106	0.97409	0.00239	0.94949	0.00454
7.0	0.99245	0.00086	0.98362	0.00188	0.96778	0.00362
6.0	0.99354	0.00030	0.98600	0.00066	0.97239	0.00129
5.0	0.99396	0.00024	0.98692	0.00052	0.97417	0.00102
4.0	0.99418	0.00037	0.98741	0.00080	0.97513	0.00156
3.0	0.99433	0.00026	0.98774	0.00058	0.97577	0.00113
2.0	0.99422	0.00021	0.98749	0.00047	0.97529	0.00091
1.0	0.99483	0.00014	0.98882	0.00031	0.97790	0.00061
0.8	0.99533	0.00015	0.98992	0.00033	0.98004	0.00064
0.5	0.99617	0.00015	0.99175	0.00033	0.98363	0.00065
0.1	0.99710	0.00011	0.99376	0.00025	0.98759	0.00049
LV	0.99547	0.00019	0.99021	0.00041	0.98060	0.00080

Tabela 30 – Resultados dos Critérios de Performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.93674	0.01046	0.85704	0.02686	0.75072	0.04117
9.0	0.96481	0.00372	0.92416	0.01088	0.85918	0.01875
8.0	0.98775	0.00447	0.97375	0.00938	0.94899	0.01779
7.0	0.99227	0.00358	0.98315	0.00803	0.96696	0.01532
6.0	0.99474	0.00172	0.98862	0.00379	0.97752	0.00735
5.0	0.99576	0.00022	0.99086	0.00048	0.98189	0.00095
4.0	0.99616	0.00022	0.99173	0.00047	0.98359	0.00092
3.0	0.99652	0.00019	0.99249	0.00041	0.98510	0.00081
2.0	0.99717	0.00015	0.99391	0.00032	0.98789	0.00062
1.0	0.99792	0.00012	0.99553	0.00025	0.99110	0.00050
0.8	0.99821	0.00008	0.99616	0.00017	0.99235	0.00034
0.5	0.99877	0.00007	0.99736	0.00015	0.99473	0.00031
0.1	0.99919	0.00009	0.99826	0.00019	0.99653	0.00037
LV	0.99900	0.00012	0.99785	0.00026	0.99572	0.00051

Os resultados das Tabelas 27–30 mostram que com $n_{\text{iter}} = 1$, as métricas variam de

$\approx 0,914$ a $\approx 0,994$ conforme λ ; com $n_{\text{iter}} = 10$, aproximam-se de 0,999 para $\lambda \in [0,5, 1]$ e também para LV, com diferenças de poucas casas decimais entre as melhores escolhas. Analisando as Figuras 23I e 23p, observamos que a convergência do método baseado na log-verossimilhança não descreve bem a geometria do sinal como método proposto.

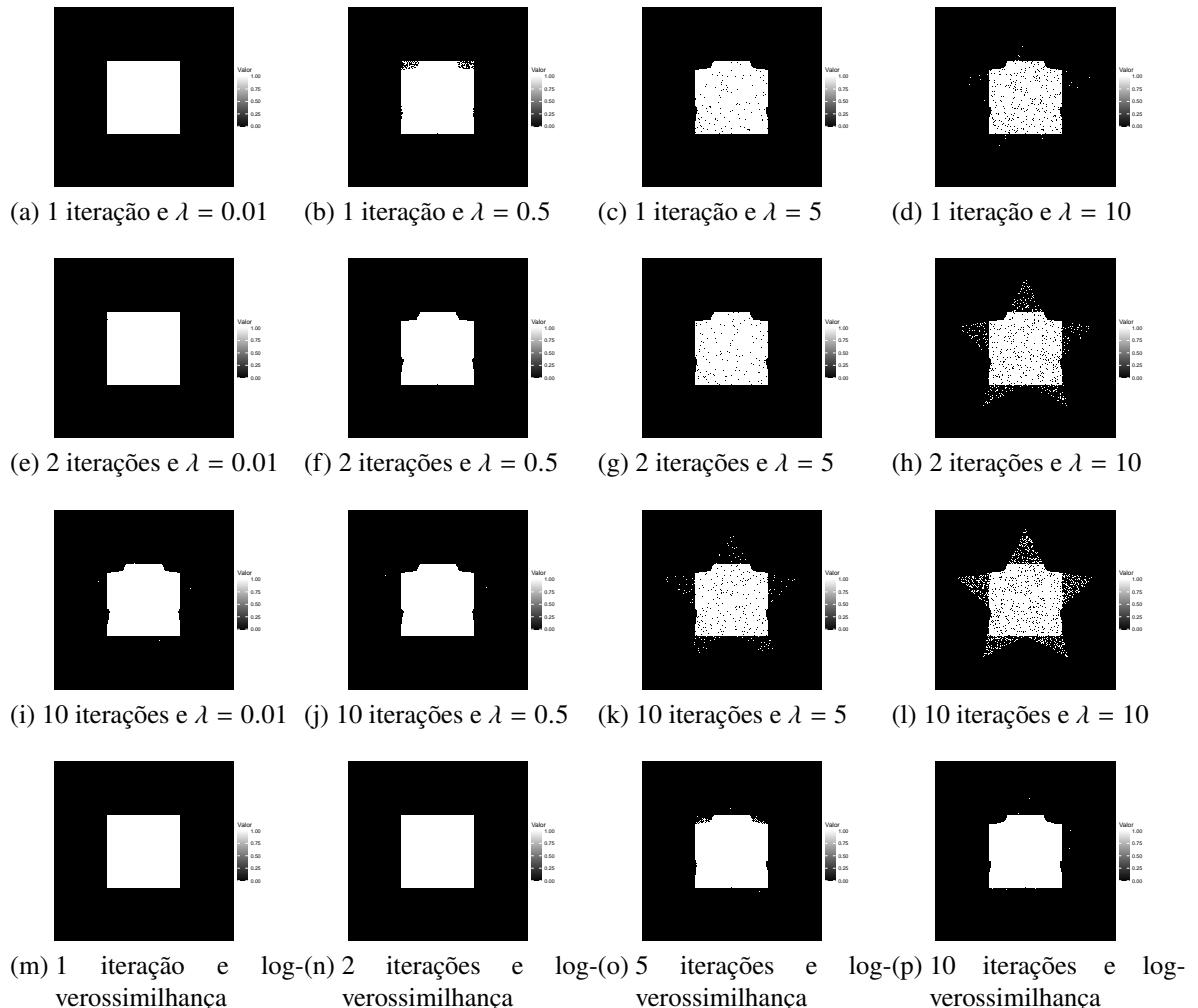


Figura 24 – Imagem simulada de uma estrela e Segmentações Binárias, com contaminação ($p = 5$ e $q = 1$), utilizando Box-Cox e a log-verossimilhança.

A Figura 24 apresenta os cenários de segmentações binárias, com contaminação da Beta₃^{1/2}(5, 1), utilizando o nexo Box-Cox e a log-verossimilhança.

Tabela 31 – Resultados dos Critérios de Performance para 1 iteração, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.99256	0.00033	0.98391	0.00072	0.96833	0.00139
9.0	0.99209	0.00019	0.98290	0.00043	0.96637	0.00082
8.0	0.99153	0.00030	0.98167	0.00065	0.96401	0.00126
7.0	0.99085	0.00032	0.98021	0.00069	0.96118	0.00133
6.0	0.98985	0.00024	0.97803	0.00054	0.95701	0.00103
5.0	0.98862	0.00031	0.97535	0.00069	0.95189	0.00131
4.0	0.98669	0.00038	0.97114	0.00086	0.94390	0.00162
3.0	0.98377	0.00011	0.96477	0.00023	0.93195	0.00043
2.0	0.97900	0.00041	0.95427	0.00092	0.91255	0.00169
1.0	0.96929	0.00059	0.93227	0.00140	0.87314	0.00245
0.8	0.96581	0.00018	0.92414	0.00044	0.85897	0.00076
0.5	0.95801	0.00046	0.90532	0.00114	0.82702	0.00191
0.1	0.93081	0.00034	0.83388	0.00096	0.71509	0.00141
LV	0.91214	0.00008	0.77916	0.00025	0.63822	0.00033

Tabela 32 – Resultados dos Critérios de Performance para 2 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.99362	0.00039	0.98619	0.00085	0.97276	0.00166
9.0	0.99378	0.00028	0.98654	0.00062	0.97343	0.00120
8.0	0.99368	0.00023	0.98632	0.00050	0.97302	0.00098
7.0	0.99363	0.00036	0.98621	0.00079	0.97280	0.00153
6.0	0.99317	0.00021	0.98520	0.00046	0.97083	0.00090
5.0	0.99266	0.00031	0.98409	0.00068	0.96869	0.00132
4.0	0.99188	0.00021	0.98239	0.00047	0.96539	0.00091
3.0	0.99036	0.00037	0.97904	0.00082	0.95895	0.00158
2.0	0.98749	0.00034	0.97271	0.00075	0.94687	0.00143
1.0	0.97999	0.00036	0.95622	0.00079	0.91611	0.00145
0.8	0.97743	0.00041	0.95057	0.00092	0.90580	0.00167
0.5	0.97207	0.00036	0.93858	0.00084	0.88427	0.00149
0.1	0.95212	0.00032	0.89056	0.00082	0.80272	0.00133
LV	0.92598	0.00021	0.82018	0.00061	0.69518	0.00088

Tabela 33 – Resultados dos Critérios de Performance para 5 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.98470	0.00441	0.96801	0.00971	0.93815	0.01797
9.0	0.99010	0.00293	0.97873	0.00615	0.95841	0.01177
8.0	0.99343	0.00121	0.98595	0.00250	0.97230	0.00486
7.0	0.99515	0.00044	0.98952	0.00096	0.97925	0.00187
6.0	0.99523	0.00024	0.98970	0.00052	0.97961	0.00102
5.0	0.99505	0.00027	0.98930	0.00060	0.97883	0.00117
4.0	0.99492	0.00028	0.98903	0.00061	0.97829	0.00120
3.0	0.99491	0.00035	0.98901	0.00075	0.97826	0.00148
2.0	0.99472	0.00025	0.98859	0.00054	0.97745	0.00106
1.0	0.99506	0.00019	0.98933	0.00041	0.97888	0.00080
0.8	0.99570	0.00019	0.99072	0.00042	0.98160	0.00082
0.5	0.99677	0.00009	0.99305	0.00019	0.98619	0.00038
0.1	0.99817	0.00015	0.99607	0.00032	0.99217	0.00063
LV	0.99538	0.00019	0.99001	0.00041	0.98022	0.00081

Tabela 34 – Resultados dos Critérios de Performance para 10 iterações, para a imagem simulada da estrela contaminada com a distribuição $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$.

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.94836	0.00868	0.89457	0.02530	0.81010	0.04146
9.0	0.97974	0.00848	0.95690	0.02047	0.91801	0.03692
8.0	0.98646	0.00626	0.97134	0.01416	0.94462	0.02672
7.0	0.99610	0.00171	0.99160	0.00374	0.98336	0.00729
6.0	0.99545	0.00216	0.99080	0.00377	0.98179	0.00736
5.0	0.99658	0.00017	0.99266	0.00036	0.98542	0.00070
4.0	0.99683	0.00017	0.99319	0.00037	0.98648	0.00073
3.0	0.99697	0.00016	0.99347	0.00034	0.98703	0.00067
2.0	0.99724	0.00022	0.99406	0.00048	0.98819	0.00095
1.0	0.99824	0.00013	0.99623	0.00029	0.99248	0.00057
0.8	0.99861	0.00011	0.99701	0.00023	0.99404	0.00046
0.5	0.99923	0.00011	0.99835	0.00025	0.99670	0.00049
0.1	0.99974	0.00006	0.99945	0.00013	0.99890	0.00027
LV	0.99977	0.00005	0.99950	0.00011	0.99900	0.00022

Os resultados das Tabelas 31–34 mostram cenários mais assimétricos. Com $n_{\text{iter}} = 1$,

Acurácia $\in [0,914, 0,993]$ conforme λ ; já com $n_{\text{iter}} = 10$, há clara tendência de melhora quando λ diminui, e a LV alcança $Acurácia \approx 0,99978$, $Dice \approx 0,99954$, $Jaccard \approx 0,99908$. Analisando as Figuras 24l e 24p, observamos que a convergência do método baseado na log-verossimilhança não descreve bem a geometria do sinal como método proposto.

Uma questão importante na proposição do novo método é quantificar a influência da ordem λ . A Figura 25 apresenta a acurácia média em termos de λ para diferentes números de iterações e os três diferentes cenários (em que há um aumento da média). As curvas de acurácia média em função de λ e as tabelas por n_{iter} mostram um padrão claro: (i) com poucas iterações, os melhores desempenhos ocorrem tipicamente para λ elevados; (ii) com iterações intermediárias, os ótimos migram para λ intermediários (próximos de 1) em cenários Beta e permanecem em λ altos no caso uniforme (0, 1/2); e (iii) com muitas iterações, a faixa ótima desloca-se para λ baixos, e o caso limite de log-verossimilhança ($LV, \lambda \rightarrow 0$) passa a ser co-ótimo ou mesmo o melhor em vários cenários. É importante mencionar que essa leve superioridade da LV para iterações altas se deve ao chute inicial, uma vez que a geometria do sinal é melhor capturada pelo nexo Box-Cox em todas as iterações. Finalmente, as curvas azuis mostram uma tendência interessante: a diferença de média suave entre objeto e background produz uma concavidade na curva $Acuracia(\lambda)$, sugerindo a existência de um λ ótimo.

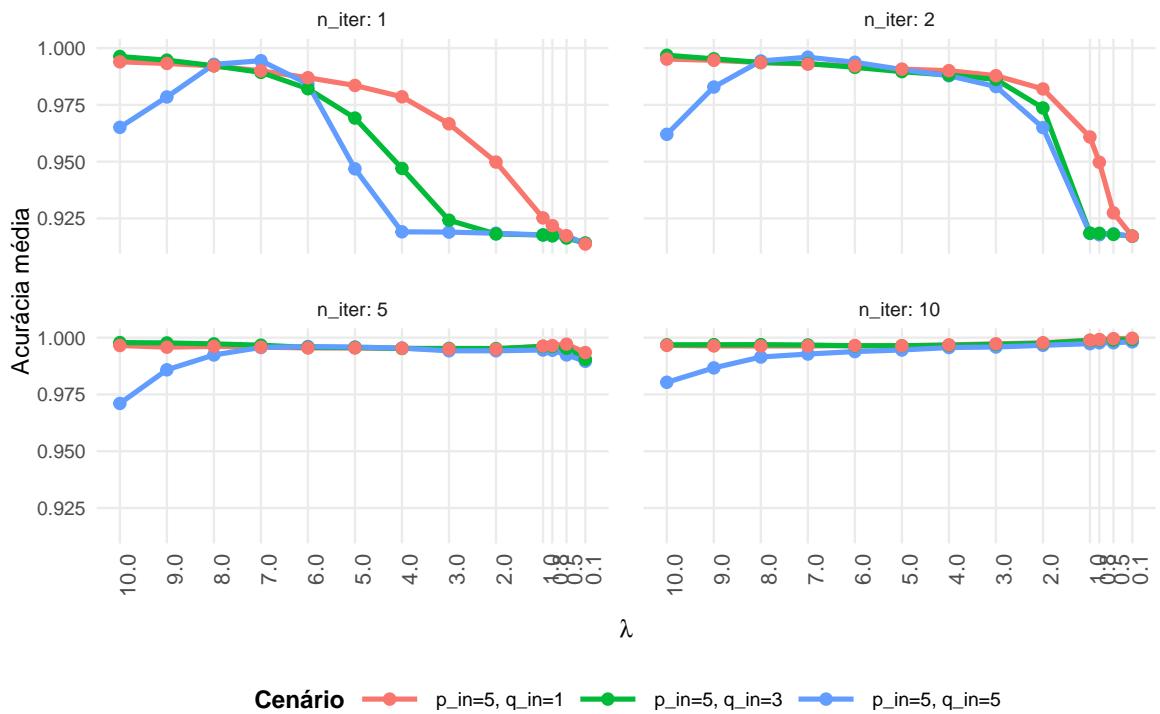


Figura 25 – Acurácia média em função de λ , por cenário de ruído e por n_{iter} .

Com base nas tabelas apresentadas (analizando médias e desvios das métricas trabalhadas) e na Figura 25, os *pontos de ótimo* (ou co-ótimo, quando há empate prático) podem ser organizados assim:

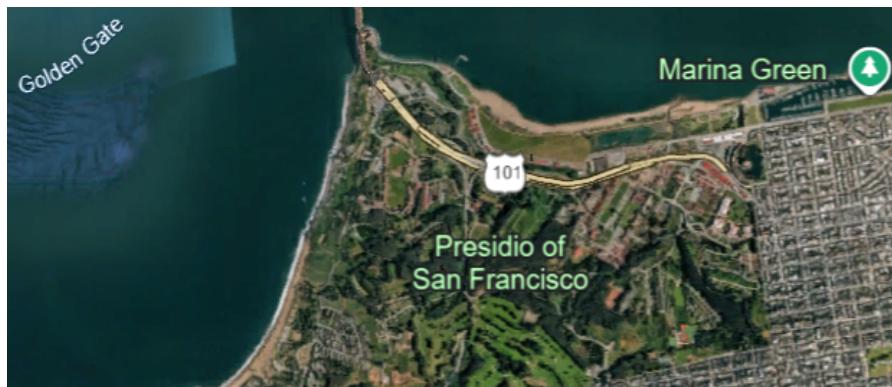
- $n_{iter} = 1$: os melhores resultados ocorrem em λ **altos** nos quatro cenários.
- $n_{iter} = 2$: mantém-se a preferência por λ **altos** nos quatro cenários.
- $n_{iter} = 5$:
 - $\mathcal{U}(0, 1/2)$: ótimos em λ **altos**.
 - $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$ e $(5, 3)$: ótimos em λ **intermediários** (faixa em torno de $\lambda \approx 1$); LV fica abaixo dos melhores.
 - $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$: ótimos em λ **baixos-intermediários** (faixa abaixo de $\lambda \approx 1$, mas não no limite 0); LV não é o melhor.

- $n_{\text{iter}} = 10$:
 - $\mathcal{U}(0, 1/2)$: ótimos em λ **baixos**, com o **LV** frequentemente **co-ótimo/ótimo**.
 - $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 5)$: ótimos em λ **baixos** (muito próximos ao LV); **LV** é usualmente **co-ótimo**.
 - $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 3)$: ótimos em λ **baixos**, com **LV co-ótimo**.
 - $\text{Beta}_3^{1/2}(5, 1)$: **LV** torna-se **ótimo** (ou domina o conjunto de λ fixos).

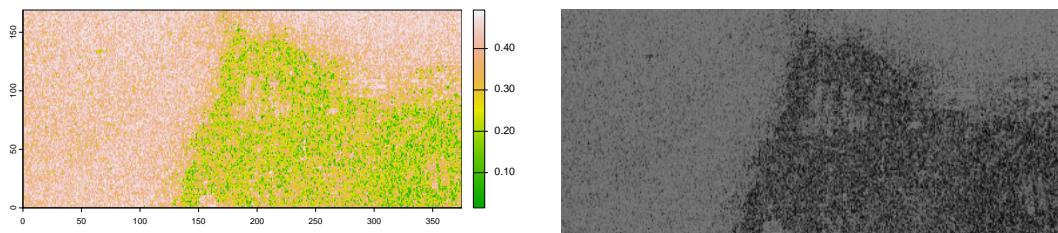
Vale-se mencionar que o nexo Box-Cox foi melhor em descrever a geometria do sinal em todos os casos.

4.3.3 Discussão de campo de dados reais

Nesta seção, analisa-se a segmentação de um trecho de uma imagens SAR (Synthetic Aperture Radar) e a captação de bordas utilizando os métodos baseados na log-verossimilhança e no nexo Box-Cox. A Figura 26a apresenta a imagem ótica de São Francisco, obtida pelo *Google Earth*. A Figura 26b apresenta a imagem da transformação razão $HH/(2HH + VV)$ com legenda (essa transformação realça diferenças de resposta eletromagnética entre os canais HH e VV , permitindo distinguir regiões com propriedades de retroespalhamento distintas, como oceano e floresta) em que: a razão $HH/(2HH + VV)$ assume valores próximos de zero quando $HH \rightarrow 0$ (típicos de áreas homogêneas) e tende a 0.5, quando $VV \rightarrow 0$ (característica de superfícies suaves e especulares, como oceano); no intervalo intermediário a $HH \approx VV$, a razão assume valores próximos de 0.3 (indicando regiões mistas ou de transição entre os dois tipos de textura). A Figura 26c apresenta a imagem AIRSAR da transformação razão $HH/(2HH + VV)$. Note que, a razão indica que (HH, VV) tende a serem iguais ou levemente diferentes para floresta e cidade.



(a) Imagem ótica de São Francisco.



(b) Canal razão $HH/(2HH+VV)$ aplicado na imagem ótica de São Francisco. (c) Canal razão $HH/(2HH + VV)$ corrigida da imagem AIRSAR real de São Francisco.

Figura 26 – Imagens da área de São Francisco.

No que segue, os resultados das segmentações binárias obtidas a partir da imagem razão $HH/(2HH + VV)$ tomaram como verdade: 1 para localização de oceano e 0 para áreas florestais ou construídas.

4.3.4 Discussão de resultados para imagens reais

Para fins de avaliação quantitativa, a definição da verdade de referência (*ground truth*) foi construída a partir de uma segmentação manual guiada por inspeção visual da imagem ótica de São Francisco (Figura 26a) e pela análise das assinaturas radiométricas observadas no canal razão $HH/(2HH + VV)$. As regiões claramente associadas ao oceano, caracterizadas por baixo retroespalhamento e razão próxima de 0.5, foram

rotuladas como classe 1, enquanto áreas urbanas, florestais ou quaisquer superfícies rugosas, apresentando maior heterogeneidade e razão inferior, foram rotuladas como classe 0. Essa máscara binária, construída de forma independente dos métodos avaliados, foi então utilizada como referência para o cálculo das métricas de desempenho — acurácia, coeficiente de Dice e índice de Jaccard — permitindo quantificar objetivamente a qualidade das segmentações produzidas pelos modelos baseados na log-verossimilhança e pelo nexo Box–Cox.

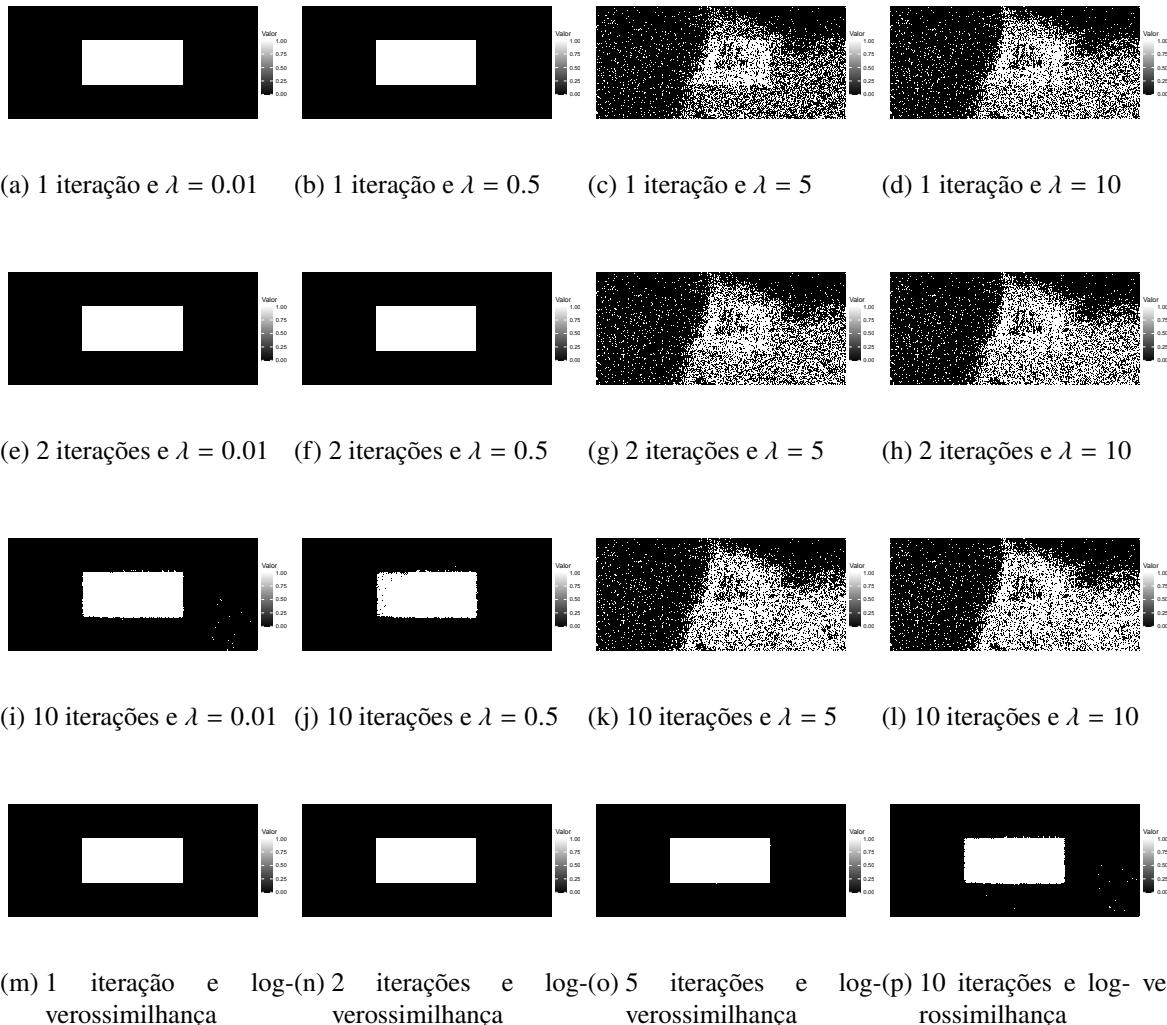


Figura 27 – Imagem AIRSAR e Segmentações Binárias utilizando Box–Cox e a log-verossimilhança.

A Figura 27 apresenta os cenários de segmentações binárias, utilizando o nexo Box-Cox e a log-verossimilhança. Pode-se notar que os melhores desempenhos são para o novo segmentador com $\lambda = 5$ e $\lambda = 10$. A razão entre verossimilhança praticamente não responde ao chute inicial retangular adotado.

Tabela 35 – Resultados dos critérios para 1 iteração na imagem AIRSAR de São Francisco

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.84166		0.79412		0.65854	
9.0	0.83773		0.78793		0.65007	
8.0	0.83250		0.77960		0.63881	
7.0	0.82523		0.76781		0.62312	
6.0	0.81322		0.74783		0.59723	
5.0	0.79254		0.71186		0.55262	
4.0	0.72891	0.00000	0.58706	0.00000	0.41549	0.00000
3.0	0.62921		0.35835		0.21829	
2.0	0.58133		0.33094		0.19828	
1.0	0.58133		0.33094		0.19828	
0.8	0.58133		0.33094		0.19828	
0.5	0.58133		0.33094		0.19828	
0.1	0.58133		0.33094		0.19828	
LV	0.58133		0.33094		0.19828	

Tabela 36 – Resultados dos critérios para 2 iterações na imagem AIRSAR de São Francisco

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.85693		0.81760		0.69148	
9.0	0.85456		0.81403		0.68638	
8.0	0.85109		0.80874		0.67889	
7.0	0.84658		0.80179		0.66916	
6.0	0.83872		0.78950		0.65222	
5.0	0.83353		0.78125		0.64102	
4.0	0.82823	0.00000	0.77270	0.00000	0.62959	0.00000
3.0	0.78777		0.70327		0.54234	
2.0	0.58736		0.33416		0.20059	
1.0	0.58133		0.33094		0.19828	
0.8	0.58133		0.33094		0.19828	
0.5	0.58133		0.33094		0.19828	
0.1	0.58133		0.33094		0.19828	
LV	0.58133		0.33094		0.19828	

Tabela 37 – Resultados dos critérios para 5 iterações na imagem AIRSAR de São Francisco

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.86958		0.83638		0.71877	
9.0	0.86796		0.83400		0.71527	
8.0	0.86531		0.83010		0.70955	
7.0	0.85961		0.82163		0.69727	
6.0	0.85174		0.80973		0.68029	
5.0	0.85248		0.81086		0.68189	
4.0	0.84555	0.00000	0.80020	0.00000	0.66695	0.00000
3.0	0.82875		0.77354		0.63071	
2.0	0.79599		0.71803		0.56010	
1.0	0.58353		0.33224		0.19921	
0.8	0.58211		0.33148		0.19867	
0.5	0.58158		0.33110		0.19840	
0.1	0.58141		0.33105		0.19836	
LV	0.58141		0.33108		0.19838	

Tabela 38 – Resultados dos critérios para 10 iterações na imagem AIRSAR de São Francisco

λ	Acurácia (média)	Acurácia (dp)	Dice (média)	Dice (dp)	Jaccard (média)	Jaccard (dp)
10.0	0.88510		0.85859		0.75222	
9.0	0.88421		0.85735		0.75031	
8.0	0.88233		0.85470		0.74626	
7.0	0.87659		0.84652		0.73388	
6.0	0.86692		0.83247		0.71302	
5.0	0.87176		0.83955		0.72347	
4.0	0.86401	0.00000	0.82819	0.00000	0.70676	0.00000
3.0	0.84475		0.79895		0.66521	
2.0	0.83631		0.78568		0.64701	
1.0	0.62569		0.37250		0.22888	
0.8	0.60238		0.34824		0.21083	
0.5	0.58820		0.34009		0.20489	
0.1	0.58596		0.33924		0.20427	
LV	0.58611		0.34032		0.20505	

As Tabelas 35–38 apresentam os valores dos critérios de avaliação para imagem de São Francisco. Pode-se verificar que o desempenho aumenta sistematicamente quando os valores de λ aumentam e o número de iterações aumenta. O melhor resultado é obtido em $n_{\text{iter}} = 10$ com $\lambda = 10.0$, situação em que as métricas Acurácia, Dice e Jaccard alcançam níveis máximos. Para valores altos de λ , observa-se ganho progressivo à medida que as iterações avançam, confirmando a importância da regularização para estabilizar a fronteira e melhorar a qualidade da segmentação. Por outro lado, quando $\lambda \leq 1.0$, as métricas permanecem baixas e praticamente invariáveis, comportamento semelhante ao caso da log-verossimilhança (LV), que não se mostra competitivo neste cenário. Assim, recomenda-se a utilização de λ elevados, em especial $\lambda = 10.0$, aliados a um número maior de iterações como estratégia eficaz para obter segmentações de alta qualidade na imagem AIRSAR, comparativamente a resultados clássicos da literatura sobre métodos de *level set* (CHAN; VESE, 2001; LI et al., 2005).

4.4 Considerações parciais da terceira contribuição

A terceira contribuição desta tese consistiu na incorporação do nexo Box–Cox ao termo de força utilizado em métodos de *level set* para segmentação de imagens SAR, fundamentando-se na ideia de que transformações não lineares da log-verossimilhança podem amplificar contrastes estatísticos entre regiões e, assim, favorecer a detecção de bordas em cenários ruidosos ou de baixa separabilidade. Os resultados apresentados ao longo deste capítulo, tanto em ambiente controlado de simulação quanto em dados reais, demonstram de forma consistente o potencial dessa abordagem.

Nas simulações, observou-se que o parâmetro λ desempenha papel central no comportamento da evolução do contorno. Valores elevados de λ intensificam o contraste entre as regiões interna e externa, gerando uma força de atração mais pronunciada ao longo das iterações e resultando em segmentações de maior fidelidade à *ground truth*. Em particular, para $\lambda = 10.0$ e $n_{\text{iter}} = 10$, as métricas de Acurácia, Dice e Jaccard atingiram seus valores máximos, evidenciando estabilidade da fronteira e capacidade de captura precisa do objeto de interesse mesmo sob contaminação significativa. Por outro lado, quando $\lambda \leq 1.0$, o comportamento aproxima-se daquele do método clássico baseado apenas na log-verossimilhança, com ganhos marginais e pouca variação entre iterações, confirmando que a transformação Box–Cox é o mecanismo responsável pelos incrementos de desempenho observados.

A análise aplicada à imagem AIRSAR de São Francisco reforça essas conclusões. Os experimentos mostraram que o método proposto supera sistematicamente a abordagem tradicional, especialmente em regiões de transição entre oceano e floresta, onde o speckle, a heterogeneidade e a ambiguidade eletromagnética desafiam métodos paramétricos clássicos. O uso da razão $HH/(2HH + VV)$ como variável de entrada permitiu evidenciar com clareza essas diferenças, e a aplicação do Box–Cox mostrou-se crucial para distinguir variações sutis não capturadas adequadamente pela log-verossimilhança pura. Os melhores resultados foram obtidos novamente com $\lambda = 10.0$, corroborando o

padrão observado nas simulações e validando a robustez do método em dados reais.

Do ponto de vista computacional, verificou-se que o custo adicional imposto pelo nexo Box–Cox é compensado pelos ganhos substanciais em qualidade de segmentação. Embora a abordagem clássica seja ligeiramente mais rápida, sua menor sensibilidade estatística resulta em segmentações inferiores em cenários complexos. Em contraste, o método com Box–Cox apresenta desempenho superior tanto em consistência quanto em estabilidade da fronteira, justificando plenamente seu custo computacional, sobretudo em aplicações de monitoramento ambiental, detecção de alvos e análise urbana, onde precisão e robustez são requisitos primordiais.

Em síntese, os resultados obtidos neste capítulo demonstram que a introdução do nexo Box–Cox constitui uma extensão efetiva e competitiva dos métodos tradicionais de *level set*, proporcionando melhorias significativas na detecção de bordas em imagens SAR. Essa contribuição consolida-se, portanto, como um avanço metodológico relevante, capaz de ampliar o espectro de aplicações práticas em segmentação estatística de dados de sensoriamento remoto.

5 Conclusões

§ No Capítulo 2 — intitulado “*Regressão induzida do SPAN: Transformada de Mellin e extração de textura*”, justificou-se a razão de empregar a lei gama bivariada de McKay (MBΓ) para descrever o par (intensidade, SPAN) afetado pelo *speckle*. Então, como uma extensão ao trabalho de [Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#), formulou-se um *modelo de regressão bivariada harmônica*, nominado como MBΓR, que conecta parâmetro físico (número de equivalente de looks), covariáveis (geométricas, radiométricas e contextuais) e padrão espacial via transforma de Fourier bidimensional. Uma medida de seleção de modelos é formulada com base na transformada de Mellin bivariada bem como várias quantidades matemáticas são derivadas para calcular a matriz informação de Fisher. A inferência por máxima verossimilhança foi feita utilizando o método *Scoring-Fisher*, em que tanto o estimador para os coeficientes de regressão como para o número de equivalentes de looks têm expressão em forma fechada. Comparativamente às versões não condicionais propostas em [Nascimento, Ferreira e Silva \(2023\)](#), a regressão bivariada apresentou ganho superior em regiões heterogêneas, em que a presença do sinal é pronunciada.

§ No Capítulo 3 — intitulado “*Detecção de bordas via divergências entre atributos SPAN tipo razão*”, deseja-se estudar o atributo

$$Z = \frac{X}{X+Y} \in (0, \frac{1}{2}),$$

tal que $(X, Y) \sim \text{MB}\Gamma$. Pode-se mostra que Z segue a distribuição Beta $^{1/2}_3$ (BT3), a qual até então recebeu poucos estudos analíticos na literatura. Para suprir esta lacuna, derivaram-se algumas propriedades matemáticas para Z e discutiu-se sobre como fazer inferência a partir de uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Beta}_3^{1/2}$. Adicionalmente, deduziram-se divergências *em forma fechada* entre variáveis Beta $^{1/2}_3(p, q)$ (Kullback–Leibler, Rényi, Bhattacharyya e Hellinger). Subsequentemente, novos testes

de hipótese para duas amostras Beta₃^{1/2}(p, q) distribuídas foram formulados e detectores de bordas via divergências para o atributo SPAN tipo razão foram estruturados. A partir de evidências numéricas (simuladas e em termos de dados SAR), o teste de Kullback–Leibler produziu melhor performance do que a razão entre verossimilhanças e os detectores produziram resultados superiores àquele segundo a proposta de [Gambini et al. \(2006\)](#).

§ No Capítulo 4 — intitulado “*Evolução estatística de superfície de atributos SPAN tipo razão para segmentação em imagens SAR*”, introduziu-se um curva de evolução generalizada como base no *nexo Box–Cox* e ela foi aplicada a atributos SPAN tipo razão. Desta combinação um novo segmentador por *contornos ativos* na formulação *level set* foi proposto. Os experimentos *sintéticos* e *reais* revelaram que: (i) com poucas iterações, valores moderados/elevados de λ estabilizam mais rapidamente a evolução, produzindo boas segmentações; (ii) com iterações intermediárias/altas, surge um *platô de ótimo* em faixa ampla de λ , no qual as métricas de sobreposição permanecem elevadas; e (iii) regimes de λ muito baixos (incluindo métodos da literatura, como apresentado em [Mitiche e Ayed \(2010\)](#) e [Tsai e Osher \(2005\)](#)) tendem a um *colapso* de desempenho, praticamente independente do número de iterações.

§ Espera-se que, do desenvolvimento dos capítulos desta tese, os resultados sejam utilizados tanto para realizar novos desdobramentos de pesquisa como para o uso da modelagem de regressão, detectores e segmentadores em etapas de pós-processamento para outras imagens (não necessariamente de SAR).

§ Para trabalhos futuros, vemos três frentes naturais de continuidade:

- (i) Teórica-1: Abordar outros termos não paramétricos na regressão, como a representação por Wavelet.
- (ii) Teórica-2: Trabalho no contexto da análise multivariada, seguindo a proposta de uma distribuição bivariada $\text{Beta}_3^{1/2}$, conforme sugerido por [Cardeno, Nagar e Sánchez \(2005\)](#).
- (iii) Modelagem: Extensão da construção bivariada a famílias *heavy-tailed* relevantes em SAR $(K, \mathcal{G}^0, \Gamma)$.
- (iv) Otimização: Dedução de um λ ótimo no uso do *nexo Box-Cox* em problemas de contorno ativo.
- (v) Teórica-3: O uso de medidas de divergência no contexto do *level set* para determinar contornos em imagens SAR, conforme descrito por [Lenglet, Rousson e Deriche \(2006\)](#).

A Distância de Kullback-Leibler

Demonstração. Sejam $Z_1 \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p_1, q_1)$ e $Z_2 \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p_2, q_2)$ variáveis aleatórias. Da definição de divergência de Kullback-Leibler, conclui-se que:

$$\begin{aligned} D_{KL}(Z_1 \| Z_2) &= \underbrace{\log \left[\frac{\Gamma(p_1 + q_1)}{\Gamma(p_2 + q_2)} \frac{\Gamma(p_2) \Gamma(q_2)}{\Gamma(p_1) \Gamma(q_1)} \right]}_{h(p_1, q_1, p_2, q_2)} + \int_0^{1/2} f_{Z_1}(z) \log \left[\frac{z^{p_1-p_2} (1-2z)^{q_1-q_2}}{(1-z)^{p_1+q_1-p_2-q_2}} \right] dz \\ &= h(p_1, q_1, p_2, q_2) + (p_1 - p_2) \mathbb{E}_{Z_1} [\log Z] + (q_1 - q_2) \mathbb{E}_{Z_1} [\log(1 - 2Z)] \\ &\quad - (p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \mathbb{E}_{Z_1} [\log(1 - Z)], \end{aligned}$$

em que $h(p_1, q_1, p_2, q_2) := [\Gamma(p_1 + q_1) \Gamma(p_2) \Gamma(q_2)] / [\Gamma(p_2 + q_2) \Gamma(p_1) \Gamma(q_1)]$. Por dedução análoga,

$$\begin{aligned} D_{KL}(Z_2 \| Z_1) &= h(p_2, q_2, p_1, q_1) + (p_2 - p_1) \mathbb{E}_{Z_2} [\log Z] + (q_2 - q_1) \mathbb{E}_{Z_2} [\log(1 - 2Z)] \\ &\quad - (p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \mathbb{E}_{Z_2} [\log(1 - Z)]. \end{aligned}$$

Seja $Z \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p, q)$ com densidade $f_Z(z)$. A seguinte identidade decorre de $\int_0^{1/2} f_Z(z) dz = 1$:

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{z} \right) \left(\frac{z}{1-z} \right)^p \left(\frac{1}{1-2z} \right) \left(\frac{1-2z}{1-z} \right)^q dz = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (\text{A.1})$$

Realizando a derivação de ambos os lados de (A.1) em relação a p , tem-se

$$\int_0^{1/2} \log \left(\frac{z}{1-z} \right) \frac{z^{p-1} (1-2z)^{q-1}}{(1-z)^{p+q}} dz = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} [\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)].$$

Assim,

$$\mathbb{E} \left[\log \frac{Z}{1-Z} \right] = \Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q), \quad (\text{A.2})$$

cujo resultado poderia ser obtido a partir do valor esperado da função escore ser zero, conforme explicado na discussão do texto. Considerando a derivação de ambos os lados de (A.1) em relação a q , tem-se

$$\mathbb{E} \left[\log \frac{1-2Z}{1-Z} \right] = \Psi^{(0)}(q) - \Psi^{(0)}(p+q). \quad (\text{A.3})$$

De

$$\mathbb{E}[\log Z] = \int_0^{1/2} \log(z) \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{z^{p-1}(1-2z)^{q-1}}{(1-z)^{p+q}} dz,$$

tomando a mudança de variável $2z = t \rightarrow 2dz = dt$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log Z] &= \int_0^1 \log(t/2) \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{(t/2)^{p-1}(1-t)^{q-1}}{(1-t/2)^{p+q}} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2^p} \int_0^1 \frac{\log(t/2)}{(1-t/2)^{p+q}} \underbrace{\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}}_{f_{Beta(p,q)}(t)} dt \\ &= \frac{1}{2^p} \left[\int_0^1 \frac{\log(t)}{(1-t/2)^{p+q}} f_{Beta(p,q)}(t) dt - \log 2 \int_0^1 \frac{1}{(1-t/2)^{p+q}} f_{Beta(p,q)}(t) dt \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

em que $f_{Beta(p,q)}(t)$ representa a densidade da distribuição Beta(p, q). Note que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{(1-t/2)^{p+q}} f_{Beta(p,q)}^{(t)} dt = \frac{\Gamma(p+n)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+n)} {}_2F_1(p+n, p+q; p+q+n; 1/2), \quad (\text{A.5})$$

em que $n \in \mathbb{Z}$. Derivando ambos os lados de (A.5) em termos de n , então

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log(t)t^n}{(1-t/2)^{p+q}} f_{Beta(p,q)}^{(t)} dt &= \frac{\Gamma(p+n)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+n)} \\ &\times \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p+n, p+q; p+q+n; 1/2) \right. \\ &+ {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p+n, p+q; p+q+n; 1/2) \\ &\left. + {}_2F_1(p+n, p+q; p+q+n; 1/2)(\Psi^{(0)}(p+n) - \Psi^{(0)}(p+q+n)) \right], \end{aligned}$$

em que

$${}_2F_1^{(1,0,0,0)}(a, b; c; z) = \frac{d_2F_1(a, b; c; z)}{da} \text{ e } {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(a, b; c; z) = \frac{d_2F_1(a, b; c; z)}{dc}.$$

Tomando $n = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\log(t)}{(1-t/2)^{p+q}} f_{Beta(p,q)}(t) dt \\ &= {}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) \\ & \quad + [\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)] {}_2F_1(p, p+q; p+q; 1/2). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Note que:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-t/2)^{p+q}} f_{Beta(p,q)}(t) dt = 2^p. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando (A.6) e (A.7) em (A.4),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\log Z) &= \frac{1}{2^p} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1(p, p+q; p+q; 1/2)(\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)) \right] - \log 2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Aplicando (A.8) em (A.2), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log(1-Z)] &= \frac{1}{2^p} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1(p, p+q; p+q; 1/2)(\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)) \right] - \log 2 \\ & \quad - [\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Aplicando (A.9) em (A.3),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log(1-2Z)] &= \frac{1}{2^p} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p, p+q; p+q; 1/2) \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1(p, p+q; p+q; 1/2)(\Psi^{(0)}(p) - \Psi^{(0)}(p+q)) \right] - \log 2 \\ & \quad + [\Psi^{(0)}(q) - \Psi^{(0)}(p)]. \end{aligned}$$

Sejam $\theta_1 = (p_1, q_1)$ e $\theta_2 = (p_2, q_2)$ vetores de parâmetros das variáveis aleatórias $Z_1 \sim \text{Beta}_3^{\frac{1}{2}}(\theta_1)$ e $Z_2 \sim \text{Beta}_3^{\frac{1}{2}}(\theta_2)$, respectivamente. Derivaram-se

$$\left\{ \mathbb{E}_{Z_i}[\log Z], \mathbb{E}_{Z_i}[\log(1 - Z)], \mathbb{E}_{Z_i}[\log(1 - 2Z)] \right\} \text{ para } i = 1, 2.$$

Assim, apóis algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\begin{aligned} d_{\text{KL}}(Z_1, Z_2) &= \frac{1}{2} \left[D_{\text{KL}}(Z_1 \| Z_2) + D_{\text{KL}}(Z_2 \| Z_1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ h(p_1, q_1, p_2, q_2) - h(p_2, q_2, p_1, q_1) + (p_1 - p_2) \underbrace{[\mathbb{E}_{Z_1}(\log Z) - \mathbb{E}_{Z_2}(\log Z)]}_{J_1(p_1, q_1, p_2, q_2)} \right. \\ &\quad + (q_1 - q_2) \underbrace{\{\mathbb{E}_{Z_1}[\log(1 - 2Z)] - \mathbb{E}_{Z_2}[\log(1 - 2Z)]\}}_{J_2(p_1, q_1, p_2, q_2)} \\ &\quad \left. - (p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \underbrace{\{\mathbb{E}_{Z_1}[\log(1 - Z)] - \mathbb{E}_{Z_2}[\log(1 - Z)]\}}_{J_3(p_1, q_1, p_2, q_2)} \right\}. \end{aligned}$$

Apóis algumas manipulações, tem-se que $J_2(p_1, q_1, p_2, q_2) = J_3(p_1, q_1, p_2, q_2)$ e

$$\begin{aligned} d_{\text{KL}}(Z_1, Z_2) &= \frac{(p_1 - p_2)}{2} [J_1(p_1, q_1, p_2, q_2) - J_2(p_1, q_1, p_2, q_2)] \\ &= \frac{(q_1 - q_2)}{2} [\Psi^{(0)}(q_1) - \Psi^{(0)}(p_1)] + \frac{(q_2 - q_1)}{2} [\Psi^{(0)}(q_2) - \Psi^{(0)}(p_2)] \\ &\quad + \frac{(p_2 - p_1 + q_2 - q_1)}{2} [\Psi^{(0)}(p_1 + q_1) - \Psi^{(0)}(p_2 + q_2) + \Psi^{(0)}(p_2) - \Psi^{(0)}(p_1)], \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} J_1(p_1, q_1, p_2, q_2) &= \frac{1}{2^{p_1}} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \right. \\ &\quad + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \\ &\quad \left. + {}_2F_1(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) [\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)] - \log 2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2^{p_2}} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_2, p_2 + q_2; p_2 + q_2; 1/2) + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_2, p_2 + q_2; p_2 + q_2; 1/2) \right. \\ &\quad \left. + {}_2F_1(p_2, p_2 + q_2; p_2 + q_2; 1/2) [\Psi^{(0)}(p_2) - \Psi^{(0)}(p_2 + q_2)] + \log 2 \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_2(p_1, q_1, p_2, q_2) = & \frac{1}{2^{p_1}} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \right. \\
& + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) \\
& + {}_2F_1(p_1, p_1 + q_1; p_1 + q_1; 1/2) [\Psi^{(0)}(p_1) - \Psi^{(0)}(p_1 + q_1)] \Big] - \log 2 \\
& - [\Psi^{(0)}(q_1) - \Psi^{(0)}(p_1)] \\
& - \frac{1}{2^{p_2}} \left[{}_2F_1^{(1,0,0,0)}(p_2, p_2 + q_2; p_2 + q_2; 1/2) + {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(p_2, p_2 + q_2; p_2 + q_2; 1/2) \right. \\
& + {}_2F_1(p_2, p_2 + q_2; p_2 + q_2; 1/2) (\Psi^{(0)}(p_2) - \Psi^{(0)}(p_2 + q_2)) \Big] + \log 2 \\
& + [\Psi^{(0)}(q_2) - \Psi^{(0)}(p_2)].
\end{aligned}$$

□

B Distâncias de Rényi, Bhattacharyya e Hellinger

Demonstração 1. A distância de Rényi entre as variáveis aleatórias $Z_1 \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p_1, q_1)$ e $Z_2 \sim \text{Beta}_3^{1/2}(p_2, q_2)$ é deduzida da seguinte forma:

$$d_R^\beta(Z_1, Z_2) = \frac{\log \left[\int_0^{1/2} f_{Z_1}^\beta(z) f_{Z_2}^{1-\beta}(z) dz \right] + \log \left[\int_0^{1/2} f_{Z_1}^{1-\beta}(z) f_{Z_2}^\beta(z) dz \right]}{2(\beta - 1)}$$

Note que, para $\beta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^{1/2} f_{Z_1}^\beta(z) f_{Z_2}^{1-\beta}(z) dz = \left[\frac{\Gamma(p_1 + q_1)}{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)} \right]^\beta \left[\frac{\Gamma(p_2 + q_2)}{\Gamma(p_2)\Gamma(q_2)} \right]^{1-\beta} \\ &\quad \times \int_0^{1/2} \frac{z^{\beta p_1 + (1-\beta)p_2 - 1} (1 - 2z)^{\beta q_1 + (1-\beta)q_2 - 1}}{(1 - z)^{\beta(p_1 + q_1) + (1-\beta)(p_2 + q_2)}} dz \\ &= \frac{\Gamma^\beta(p_1 + q_1)\Gamma^{1-\beta}(p_2 + q_2)}{\Gamma(\beta(p_1 + q_1) + (1-\beta)(p_2 + q_2))} \frac{\Gamma(\beta p_1 + (1-\beta)p_2)}{\Gamma^\beta(p_1)\Gamma^{1-\beta}(p_2)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\beta q_1 + (1-\beta)q_2)}{\Gamma^\beta(q_1)\Gamma^{1-\beta}(q_2)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_0^{1/2} f_{Z_1}^{1-\beta}(z) f_{Z_2}^\beta(z) dz = \left[\frac{\Gamma(p_1 + q_1)}{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)} \right]^{1-\beta} \left[\frac{\Gamma(p_2 + q_2)}{\Gamma(p_2)\Gamma(q_2)} \right]^\beta \\ &\quad \times \int_0^{1/2} \frac{z^{(1-\beta)p_1 + \beta p_2 - 1} (1 - 2z)^{(1-\beta)q_1 + \beta q_2 - 1}}{(1 - z)^{(1-\beta)(p_1 + q_1) + \beta(p_2 + q_2)}} dz \\ &= \frac{\Gamma^{1-\beta}(p_1 + q_1)\Gamma^\beta(p_2 + q_2)}{\Gamma((1-\beta)(p_1 + q_1) + \beta(p_2 + q_2))} \frac{\Gamma((1-\beta)p_1 + \beta p_2)}{\Gamma^{1-\beta}(p_1)\Gamma^\beta(p_2)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma((1-\beta)q_1 + \beta q_2)}{\Gamma^{1-\beta}(q_1)\Gamma^\beta(q_2)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
d_R^\beta(Z_1 \| Z_2) &= \frac{\log D_1 + \log D_2}{2(\beta - 1)} \\
&= \frac{1}{2(\beta - 1)} \left\{ \log \left[\frac{\Gamma^\beta(p_1 + q_1) \Gamma^{1-\beta}(p_2 + q_2)}{\Gamma(\beta(p_1 + q_1) + (1-\beta)(p_2 + q_2))} \frac{\Gamma(\beta p_1 + (1-\beta)p_2)}{\Gamma^\beta(p_1) \Gamma^{1-\beta}(p_2)} \right. \right. \\
&\quad \times \frac{\Gamma(\beta q_1 + (1-\beta)q_2)}{\Gamma^\beta(q_1) \Gamma^{1-\beta}(q_2)} \left. \right] + \log \left[\frac{\Gamma^{1-\beta}(p_1 + q_1) \Gamma^\beta(p_2 + q_2)}{\Gamma((1-\beta)(p_1 + q_1) + \beta(p_2 + q_2))} \right. \\
&\quad \times \left. \left. \frac{\Gamma((1-\beta)p_1 + \beta p_2) \Gamma((1-\beta)q_1 + \beta q_2)}{\Gamma^{1-\beta}(p_1) \Gamma^\beta(p_2) \Gamma^{1-\beta}(q_1) \Gamma^\beta(q_2)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

□

Demonação 2. A distância de Bhattacharyya entre Z_1 e Z_2 é demonstrada da seguinte forma:

$$d_B(Z_1 \| Z_2) = -\log \underbrace{\int_0^{1/2} \sqrt{f_{Z_1}(z) f_{Z_2}(z)} dz}_A.$$

Note que

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{\Gamma(p_1 + q_1)}{\Gamma(p_1) \Gamma(q_1)} \frac{\Gamma(p_2 + q_2)}{\Gamma(p_2) \Gamma(q_2)} \right]^{1/2} \int_0^{1/2} \frac{z^{\frac{p_1+p_2}{2}-1} (1-2z)^{\frac{q_1+q_2}{2}-1}}{(1-z)^{\frac{p_1+p_2+q_1+q_2}{2}}} dz \\
&= \left[\frac{\Gamma(p_1 + q_1)}{\Gamma(p_1) \Gamma(q_1)} \frac{\Gamma(p_2 + q_2)}{\Gamma(p_2) \Gamma(q_2)} \right]^{1/2} \left[\frac{\Gamma(\frac{p_1+p_2+q_1+q_2}{2})}{\Gamma(\frac{p_1+p_2}{2}) \Gamma(\frac{q_1+q_2}{2})} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d_B(Z_1 \| Z_2) &= \log \Gamma\left(\frac{p_1 + q_1 + p_2 + q_2}{2}\right) - \log \Gamma\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \\
&\quad - \log \Gamma\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[\log \Gamma(p_1 + q_1) \right. \\
&\quad + \log \Gamma(p_2 + q_2) - \log \Gamma(p_1) - \log \Gamma(q_1) \\
&\quad \left. - \log \Gamma(p_2) - \log \Gamma(q_2) \right].
\end{aligned}$$

□

Demonastração 3. A distância de Hellinger entre Z_1 e Z_2 é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 d_H(Z_1 \| Z_2) &= 1 - \underbrace{\int_0^{1/2} \sqrt{f_x(z)f_y(z)} dz}_A \\
 &= 1 - \underbrace{\left[\frac{\Gamma(p_1 + q_1)}{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)} \frac{\Gamma(p_2 + q_2)}{\Gamma(p_2)\Gamma(q_2)} \right]^{1/2} \left[\frac{\Gamma(\frac{p_1+p_2+q_1+q_2}{2})}{\Gamma(\frac{p_1+p_2}{2})\Gamma(\frac{q_1+q_2}{2})} \right]^{-1}}_A \\
 &= 1 - \frac{[\Gamma(p_1 + q_1)\Gamma(p_2 + q_2)]^{1/2}}{\Gamma(\frac{p_1+p_2+q_1+q_2}{2})} \frac{\Gamma(\frac{p_1+p_2}{2})}{[\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)]^{1/2}} \frac{\Gamma(\frac{q_1+q_2}{2})}{[\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)]^{1/2}}
 \end{aligned}$$

□

C Proposição 2.2.1

Demonstração. Faremos mudanças apropriadas de variáveis para calcular corretamente os novos limites de integração, substituindo a função expressa na Equação (2.12) na expressão de $\mathcal{M}(s_1, s_2)$, tem-se:

$$\mathcal{M}(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^{x_2} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} f(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2, \gamma) dx_1 dx_2 \quad (\text{C.1})$$

Substituindo a função $f(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ e realizando as devidas simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s_1, s_2) &= \int_0^\infty \int_0^{x_2} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \left(\frac{1}{\gamma^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} (x_2 - x_1)^{\alpha_2-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) \right) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\gamma^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty \int_0^{x_2} x_1^{s_1+\alpha_1-2} x_2^{s_2-1} (x_2 - x_1)^{\alpha_2-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Logo,

$$\mathcal{M}(s_1, s_2) = \frac{1}{\gamma^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty x_2^{s_2-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) \left[\int_0^{x_2} x_1^{s_1+\alpha_1-2} (x_2 - x_1)^{\alpha_2-1} dx_1 \right] dx_2. \quad (\text{C.3})$$

Defina,

$$I = \int_0^\infty x_2^{s_2-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) \underbrace{\left[\int_0^{x_2} x_1^{s_1+\alpha_1-2} (x_2 - x_1)^{\alpha_2-1} dx_1 \right]}_{I_1(x_2; s_1, \alpha_1, \alpha_2)} dx_2. \quad (\text{C.4})$$

Considere inicialmente,

$$I_1 = \int_0^{x_2} x_1^{s_1+\alpha_1-2} (x_2 - x_1)^{\alpha_2-1} dx_1 \quad (\text{C.5})$$

Realizando a troca de variáveis $u = \frac{x_1}{x_2}$ para x_2 fixo, então $x_2 du = dx_1$,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (ux_2)^{s_1+\alpha_1-2} x_2^{\alpha_2-1} (1-u)^{\alpha_2-1} x_2 du = x_2^{s_1+\alpha_1+\alpha_2-2} \int_0^1 u^{s_1+\alpha_1-2} (1-u)^{\alpha_2-1} du \\
&= x_2^{s_1+\alpha_1+\alpha_2-2} \text{Beta}(s_1 + \alpha_1 - 1, \alpha_2)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty x_2^{s_2-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) I_1(x_2; s_1, \alpha_1, \alpha_2) dx_2 \\
&= \int_0^\infty x_2^{s_1+s_2+\alpha_1+\alpha_2-3} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) \text{Beta}(s_1 + \alpha_1 - 1, \alpha_2) dx_2 \\
&= \text{Beta}(s_1 + \alpha_1 - 1, \alpha_2) \int_0^\infty x_2^{s_1+s_2+\alpha_1+\alpha_2-3} \exp\left(-\frac{x_2}{\gamma}\right) dx_2 \\
&= \frac{\Gamma(s_1 + \alpha_1 - 1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(s_1 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)} \frac{\Gamma(s_1 + s_2 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2)}{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{s_1+s_2+\alpha_1+\alpha_2-2}}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Portanto, realizando as substituições e simplificações necessárias, valem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{MB\Gamma}(s_1, s_2) &= \frac{1}{\gamma^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} I \\
&= \frac{\gamma^{s_1+s_2-2}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\Gamma(s_1 + \alpha_1 - 1)}{\Gamma(s_1 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)} \Gamma(s_1 + s_2 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2).
\end{aligned} \tag{C.8}$$

□

D Medida de seleção de modelo a partir da Transformada de Mellin

Aqui, propõe-se uma medida de modelos do tipo $MB\Gamma$, utilizando a Transformada de Mellin. A abordagem descrita é amplamente aplicável a dados SAR e outros cenários que envolvem distribuições em escala logarítmica, como imagens médicas.

Considere

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n &= n \cdot \iint_{\mathbb{C}^2} \|\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_n}(s_1, s_2) - \mathcal{M}_n(s_1, s_2)\|^2 dW(s_1, s_2) \\ &= n \cdot \iint_{R \in \mathbb{C}^2} \|\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_n}(s_1, s_2) - \mathcal{M}_n(s_1, s_2)\|^2 w(s_1, s_2) dA_{s_1} dA_{s_2}\end{aligned}$$

em que dA_{s_1} e dA_{s_2} são elementos de área no plano complexo associados às variáveis s_1 e s_2 e R é um boreiano. Em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$s_1 = s_{11} + is_{12} \quad \text{e} \quad s_2 = s_{21} + is_{22},$$

então

$$dA_{s_1} = ds_{11} \cdot ds_{12} \quad \text{e} \quad dA_{s_2} = ds_{21} \cdot ds_{22}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n &= n \cdot \iiint_{\mathcal{D}} w(s_{11} + is_{12}, s_{21} + is_{22}) \cdot \|\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_n}(s_{11} + is_{12}, s_{21} + is_{22}) \\ &\quad - \mathcal{M}_n(s_{11} + is_{12}, s_{21} + is_{22})\|^2 ds_{11} ds_{12} ds_{21} ds_{22}.\end{aligned}$$

Em coordenadas polares,

$$s_1 = r_1 e^{i\Theta_1} \quad \text{e} \quad s_2 = r_2 e^{i\Theta_2},$$

tem-se

$$dA_{s_1} = r_1 \cdot dr_1 \cdot d\Theta_1 \quad \text{e} \quad dA_{s_2} = r_2 \cdot dr_2 \cdot d\Theta_2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = n \cdot \int_{W_1} \int_{R_1} \int_{W_2} \int_{R_2} w(r_1 e^{i\Theta_1}, r_2 e^{i\Theta_2}) \cdot \| \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_n}(r_1 e^{i\Theta_1}, r_2 e^{i\Theta_2}) \\ - \mathcal{M}_n(r_1 e^{i\Theta_1}, r_2 e^{i\Theta_2}) \|^2 r_1 dr_1 d\Theta_1 r_2 dr_2 d\Theta_2, \end{aligned}$$

em que $W_1, W_2 \in (0, 2\pi]$ e $R_1, R_2 \in (0, \infty)$.

Uma possibilidade para a função peso $w(s_1, s_2)$ é:

$$\begin{aligned} w(s_1, s_2) &= \exp \{ - (s_1^* s_1 + s_2^* s_2) \} \\ &= \exp \{ - (s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{21}^2 + s_{22}^2) \}. \end{aligned}$$

ou, em coordenadas polares,

$$w(s_1, s_2) = \exp \{ - (r_1^2 + r_2^2) \}.$$

Referências Bibliográficas

- ALI, S. M.; SILVEY, S. D. A general class of coefficients of divergence of one distribution from another. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 28, p. 131–142, 1966.
- ANFINSEN, S. N. Statistical analysis of multilook polarimetric radar images with the Mellin transform. Universitetet i Tromsø, 2010.
- ANFINSEN, S. N.; ELTOFT, T. Application of the matrix-variate Mellin transform to analysis of polarimetric radar images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 49, p. 2281–2295, 2011.
- ARWINI, K.; DODSON, C. T. J. Information geometric neighbourhoods of randomness and geometry of the mckay bivariate gamma 3-manifold. *arXiv preprint math/0310468*, 2003.
- ARWINI, K. et al. Comparing Distance Measures Between Bivariate Gamma Processes. maio 2005.
- BERTRAND, J.; BERTRAND, P.; OVARLEZ, J.-P. The Mellin transform. *The transforms and applications handbook*, 1995.
- BESSA, M. Análise Real iii. Integral de Riemann em \mathbb{R}^n , Integrais de Linha, Integrais de Superfície e Derivação e Integração de Formas. 2023.
- BRYCHKOV, Y.; MARICHEV, O.; SAVISCHENKO, N. *Handbook of Mellin transforms*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2018.
- CARDENO, L.; NAGAR, D. K.; SÁNCHEZ, L. E. Beta type 3 distribution and its multivariate. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, v. 21, p. 225–241, 2005.
- CASELLES, V.; KIMMEL, R.; SAPIRO, G. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, Springer, v. 22, p. 61–79, 1997.
- CHAN, T. F.; VESE, L. A. Active contours without edges. *IEEE Transactions on image processing*, v. 10, p. 266–277, 2001.
- COVER, T. M. *Elements of information theory*. Califónia: John Wiley & Sons, 1999.
- COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical statistics*. London: CRC Press, 1979.

CRAIG, C. On frequency distributions of the quotient and of the product of two statistical variables. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 49, p. 24–32, 1942.

CREMERS, D.; ROUSSON, M.; DERICHE, R. A review of statistical approaches to level set segmentation: integrating color, texture, motion and shape. *International Journal of Computer Vision*, Springer, v. 72, p. 195–215, 2007.

CSISZÁR, I. On information-type measure of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, v. 2, p. 299–318, 1967.

CSISZÁR, I. I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *The Annals of Probability*, p. 146–158, 1975.

DELIGNON, Y.; GARELLO, R.; HILLION, A. Statistical modelling of ocean SAR images. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 144, p. 348, 1997. ISSN 1350-2395.

DODSON, C. T. J. Information geometry and entropy in a stochastic epidemic rate process. *arXiv preprint arXiv:0903.2997*, 2009.

DONG, H.; ZHANG, L.; ZOU, B. PolSAR image classification with lightweight 3D convolutional networks. *Remote Sensing*, MDPI, v. 12, p. 396, 2020.

DOWNTON, F. Bivariate exponential distributions in reliability theory. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, Oxford University Press (OUP), v. 32, p. 408–417, set. 1970. ISSN 1467-9868.

DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. *Generalized Linear Models With Examples in R*. USA: Springer New York, 2018. ISSN 2197-4136. ISBN 9781441901187.

EPSTEIN, B. Some applications of the Mellin transform in statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 370–379, 1948.

ERVEN, T. V.; HARREMOS, P. Rényi divergence and Kullback-Leibler divergence. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 60, p. 3797–3820, 2014.

FENG, J.; CAO, Z.; PI, Y. Multiphase SAR image segmentation with G^0 -statistical-model-based active contours. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 51, p. 4190–4199, 2013.

FERREIRA, J. A.; NASCIMENTO, A. D.; FRERY, A. C. PolSAR models with multimodal intensities. *Remote Sensing*, v. 14, p. 5083, 2022.

- FIELLER, E. C. The distribution of the index in a normal bivariate population. *Biometrika*, p. 428–440, 1932.
- FOX, C. Some applications of Mellin transforms to the theory of bivariate statistical distributions. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge, 1957. v. 53, p. 620–628.
- FRERY, A. C.; CORREIA, A. H.; FREITAS, C. d. C. Classifying multifrequency fully polarimetric imagery with multiple sources of statistical evidence and contextual information. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 45, p. 3098–3109, 2007.
- FRERY, A. C. et al. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, IEEE, v. 35, p. 648–659, 1997.
- FRERY, A. C.; WU, J.; GOMEZ, L. *SAR Image Analysis-A Computational Statistics Approach: With R Code, Data, and Applications*. Canada: John Wiley & Sons, 2022.
- GAMBINI, J. et al. Feature extraction in speckled imagery using dynamic B-spline deformable contours under the model. *International Journal of Remote Sensing*, v. 27, p. 5037–5059, 2006.
- GENEST, C. Frank's family of bivariate distributions. *Biometrika*, Oxford University Press (OUP), v. 74, p. 549–555, 1987. ISSN 1464-3510.
- GLOVER, T.; MITCHELL, K. *An Introduction to Biostatistics*. McGraw-Hill, 2002. (McGraw-Hill Higher Education). ISBN 9780071121996. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AnSxQAAACAAJ>>.
- GOODMAN, J. W. Statistical Properties of Laser Speckle Patterns. In: *Laser speckle and related phenomena*. Berlin: Springer, 1975. p. 9–75.
- GUMBEL, E. J. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Informa UK Limited, v. 55, n. 292, p. 698–707, dez. 1960. ISSN 1537-274X.
- GUPTA, A. K.; NADARAJAH, S. Intensity-duration models based on bivariate gamma distributions. *Hiroshima mathematical journal*, v. 36, p. 387–395, 2006.
- GUPTA, A. K.; NADARAJAH, S. Sums, products and ratios for McKay's bivariate gamma distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 43, p. 185–193, 2006.
- HAJNSEK, I.; DESNOS, Y.-L. *Polarimetric Synthetic Aperture Radar: Principles and Application*. Zurich: Springer Nature, 2021. v. 25.

HAREZLAK, J.; RUPPERT, D.; WAND, M. P. *Semiparametric regression with R*. New York: Springer, 2018. v. 109.

HARTLEY, R. V. Transmission of information 1. *Bell System technical journal*, Wiley Online Library, v. 7, p. 535–563, 1928.

HARTUNG, J.; KNAPP, G. Multivariate multiple regression. *Encyclopedia of statistics in behavioral science*, Wiley Online Library, 2005.

HOLYNSKI, T. *Statistical Inference Based on Empirical Integral Transforms*. Tese (Doutorado) — Technische Universität Wien, 2024.

HUANG, L. et al. Opensarship: A dataset dedicated to sentinel-1 ship interpretation. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, v. 11, p. 195–208, 2017.

KAILATH, T. The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection. *IEEE Transactions on Communication Technology*, v. 15, p. 52–60, 1967.

KELLOGG, S. D. *Algebraic Functions of H-Functions with Specific Dependency Structures (Bivariate, Distributions, Probability)*. Texas: The University of Texas at Austin, 1984.

KOCHERLAKOTA, S.; KOCHERLAKOTA, K. *Bivariate Discrete Distributions*. USA: CRC Press, 2017. ISBN 9781315138480.

KULLBACK, S. *Information theory and statistics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1997.

KULLBACK, S.; LEIBLER, R. A. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 22, p. 79–86, 1951.

LAI, C. D.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous Bivariate Distributions*. USA: Springer New York, 2009. ISBN 9780387096148.

LEE, J.-S. et al. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric sar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 32, p. 1017–1028, 1994.

LEE, J.-S.; POTTIER, E. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. New York: CRC press, 2017.

LENGLLET, C.; ROUSSON, M.; DERICHE, R. Dti segmentation by statistical surface evolution. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 25, p. 685–700, 2006.

- LI, C. et al. Level set evolution without re-initialization: a new variational formulation. In: IEEE. *2005 IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition (CVPR'05)*. Califórnia, 2005. v. 1, p. 430–436.
- LIM, J. S. *Two-dimensional signal and image processing*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1990.
- MATHAL, A.; MOSCHOPoulos, P. A form of multivariate gamma distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer, v. 44, p. 97–106, 1992.
- MCCULLAGH, P.; NELDER, J. A. *Generalized linear models (Second edition)*. UK: London: Chapman & Hall, 1989. 500 p.
- MCKAY, A. T. Sampling from batches. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, Oxford University Press (OUP), v. 1, p. 207–216, jul. 1934. ISSN 1467-9868.
- MITICHE, A.; AYED, I. B. *Variational and level set methods in image segmentation*. Montreal: Springer Science & Business Media, 2010. v. 5.
- MORIO, J. et al. A characterization of Shannon entropy and Bhattacharyya measure of contrast in polarimetric and interferometric SAR image. *Proceedings of the IEEE*, v. 97, p. 1097–1108, 2009.
- MUKHOPADHYAY, N. *Probability and Statistical Inference*. Florida: CRC Press, 2020. ISBN 9780429258336.
- NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. Some bivariate gamma distributions. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 19, p. 767–774, 2006.
- NASCIMENTO, A. et al. K-bessel regression model for speckled data. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 51, p. 324–347, 2024a.
- NASCIMENTO, A.; FERREIRA, J.; SILVA, A. Divergence-based tests for the bivariate gamma distribution applied to polarimetric synthetic aperture radar. *Statistical Papers*, Springer, v. 64, p. 1439–1463, 2023.
- NASCIMENTO, A. D.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, IEEE, v. 48, n. 1, p. 373–385, 2009.
- NASCIMENTO, A. D.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Bias correction and modified profile likelihood under the Wishart complex distribution. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, v. 52, p. 4932–4941, 2013.

- NASCIMENTO, A. D. et al. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for polsar imagery. *IEEE journal of selected topics in applied earth observations and remote sensing*, v. 7, p. 648–663, 2013.
- NASCIMENTO, A. D.; SILVA, K. F.; FRERY, A. C. Distance-based edge detection on synthetic aperture radar imagery. *Chilean Journal of Statistics (ChJS)*, v. 12, 2021.
- NASCIMENTO, A. D. et al. Regression model for speckled data with extreme variability. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, Elsevier, v. 213, p. 1–13, 2024b.
- NICHOLSON, C. A geometrical analysis of the frequency distribution of the ratio between two variables. *Biometrika*, v. 32, p. 16–28, 1941.
- NICOLAS, J.-M.; ANFINSEN, S. N. Introduction to second kind statistics: Application of log-moments and log-cumulants to the analysis of radar image distributions. *Trait. Signal*, v. 19, p. 139–167, 2002.
- OSHER, S.; FEDKIW, R.; PIECHOR, K. Level set methods and dynamic implicit surfaces. *Applied Mechanics Reviews*, v. 57, p. B15–B15, 2004.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 79, p. 12–49, 1988.
- PARAGIOS, N.; DERICHE, R. Geodesic active regions: A new framework to deal with frame partition problems in computer vision. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Elsevier, v. 13, p. 249–268, 2002.
- PLACKETT, R. L. A class of bivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Informa UK Limited, v. 60, p. 516–522, jun. 1965. ISSN 1537-274X.
- RAHAYU, A. et al. Multivariate gamma regression: Parameter estimation, hypothesis testing, and its application. *Symmetry*, v. 12, p. 813, 2020.
- RUPPERT, D.; WAND, M. P.; CARROLL, R. J. *Semiparametric regression*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- SALICRÚ, M. et al. On the applications of divergence type measures in testing statistical hypotheses. *Journal of Multivariate Analysis*, Elsevier, v. 51, p. 372–391, 1994.
- SEGHOUANE, A.-K.; AMARI, S.-I. The AIC criterion and symmetrizing the kullback–leibler divergence. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 18, p. 97–106, 2007.

- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, Nokia Bell Labs, v. 27, p. 379–423, 1948.
- SILVA, A.; NASCIMENTO, A. D. A novel bivariate distribution and its divergence-based hypothesis inference: an application to the deforestation focus detection. *International Journal of Remote Sensing*, v. 44, p. 1–29, 2023.
- SPRINGER, M. D. The algebra of random variables. New York: Wiley, 1979.
- SPRINGER, M. D.; THOMPSON, W. The distribution of products of independent random variables. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 14, p. 511–526, 1966.
- TSAI, Y.-H. R.; OSHER, S. Total variation and level set methods in image science. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 14, p. 509–573, 2005.
- UNWIN, D. J.; HEPPEL, L. W. The statistical analysis of spatial series. *The Statistician*, v. 23, p. 211, set. 1974. ISSN 0039-0526.
- WANG, W. et al. Enhanced edge detection for polarimetric SAR images using a directional span-driven adaptive window. *International Journal of Remote Sensing*, v. 39, p. 6340–6357, 2018.
- WEST, R. D.; RILEY, R. M. Polarimetric interferometric SAR change detection discrimination. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 57, p. 3091–3104, 2019.
- YANG, R. et al. *Polarimetric microwave imaging*. China: Springer, 2021.
- YANG, R. et al. A novel polarimetric SAR classification method integrating pixel-based and patch-based classification. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 17, p. 431–435, 2019.
- YIN, Q. et al. Optimal combination of polarimetric features for vegetation classification in PolSAR image. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, v. 12, p. 3919–3931, 2019.
- ZHANG, H. et al. Ridgeline extraction only from a single full-polarimetric SAR image. *Remote Sensing Letters*, v. 11, p. 1042–1050, 2020.
- ZHANG, K. et al. Active contours with selective local or global segmentation: a new formulation and level set method. *Image and Vision computing*, Elsevier, v. 28, p. 668–676, 2010.
- ZHAO, H.-K. et al. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, v. 127, p. 179–195, 1996.

ZHAO, J.; JANG, Y.-H.; KIM, H.-M. Closed-form and bias-corrected estimators for the bivariate gamma distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 191, p. 105009, set. 2022. ISSN 0047-259X.

ZHOU, Y. et al. A variational model to remove multiplicative noise based on sar image feature preservation. *Inverse Problems and Imaging*, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), v. 0, p. 0–0, 2024. ISSN 1930-8345.

ZHU, S. C.; YUILLE, A. Region competition: Unifying snakes, region growing, and Bayes/mdl for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 18, p. 884–900, 1996.

ZYL, J. J. van. *Synthetic aperture radar polarimetry*. África do Sul: John Wiley & Sons, 2011. v. 2.