



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIA EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

José Wellerson da Silva

**Perturbações do buraco de minhoca de Ellis e o quinto transcidente de Painlevé**

Recife

2025

José Wellerson da Silva

**Perturbações do buraco de minhoca de Ellis e o quinto transcidente de Painlevé**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

**Área de Concentração:** Física Teórica e Computacional

**Orientador (a):** Bruno Geraldo Carneiro da Cunha

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Silva, José Wellerson da.

Perturbações do buraco de minhoca de Ellis e o quinto  
transcendente de Painlevé / José Wellerson da Silva. - Recife,  
2025.

93f.: il.

Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Pernambuco,  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-  
Graduação em Física, 2025.

Orientação: Bruno Geraldo Carneiro da Cunha.

1. Buraco de minhoca; 2. Perturbação; 3. Isomonodromia. I.  
Cunha, Bruno Geraldo Carneiro da. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**JOSÉ WELLERSON DA SILVA**

**PERTURBAÇÕES DO BURACO DE MINHOCA DE ELLIS E O QUINTO  
TRANSCENDENTE DE PAINLEVÉ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Data de aprovação: 29/12/2025.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha  
Orientador  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Andre Luiz Alves Lima  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Examinador Externo  
Universidade Federal de Campina Grande

Dedico o presente trabalho aos meus familiares e amigos. Em especial a minha esposa Letícia, meus pais Elza e Vandeilson e a minha avó materna Anastácia.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me dado forças para seguir em frente.

Agradeço à minha esposa Letícia, cuja companhia me traz segurança e tranquilidade em todos os momentos.

Agradeço à minha mãe Elza e ao meu pai Vandeilson, por terem lutado tanto para me fornecer o melhor que podiam.

Agradeço à minha vó Anastácia que por tantas vezes foi meu ponto de equilíbrio emocional.

Agradeço aos meus familiares, por todo o apoio e compreensão.

Agradeço aos meus amigos, companheiros para todas as horas.

Agradeço ao meu orientador Bruno, pelas orientações e pela imensa paciência.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro que permitiu a elaboração do presente trabalho.

## RESUMO

Buracos de minhoca surgem no contexto da relatividade geral como uma tentativa de dar aos raios de luz e partículas materiais uma história completa, ou seja, eliminar as singularidades do espaço-tempo. Nesse contexto, Homer G. Ellis propõe que o acoplamento de um campo escalar à geometria do espaço-tempo eliminaria a dificuldade, o que culminou na métrica do “sumidouro” (do inglês drainhole), do qual o buraco de minhoca da presente dissertação aparece como caso especial. O estudo de sistemas gravitacionais passa pela teoria da perturbação, que para a métrica de interesse é desenvolvida para o caso escalar e gravitacional, mostrando que para ambos a equação radial tem o formato de uma equação de Heun confluente. A obtenção de modos quase-normais (MQNs) é de relevância astrofísica imensurável, motivados pela detecção de ondas gravitacionais pelas colaborações LIGO e Virgo. Para a métrica de Schwarzschild é exposta a obtenção por meio do método WKB. Para o buraco de minhoca de Ellis é proposto seguir pelo método das deformações isomonodrómicas. As equações que garantem a isomonodromia formam um sistema integrável e garantem a existência da quinta transcendente de Painlevé, a  $\tau_V$ . Partindo da expansão dada por Jimbo o problema de Riemann-Hilbert é tratado e resolvido, culminando na expressão para os MQN.

Finalizando, mostra-se que as equações para ambas as perturbações podem ser interpoladas. Obtém-se o potencial após uma transformação do tipo Schrödinger e percebe-se que ele é estritamente positivo e não admite estados ligados com frequência real positiva, o que não descarta a possibilidade de obtenção de estados de decaimento com frequência imaginária que decrescem exponencialmente com o tempo, respeitadas as condições de contorno impostas. Em seguida são expostos resultados obtidos numericamente, utilizando o método isomonodrómico. O desenvolvimento encerra argumentando que os resultados numéricos obtidos serão fundamentais para a futura busca pelos MQNs para o buraco de minhoca de Ellis, tomando por base o sucesso do método já exposto na literatura na obtenção de tais modos para os buracos negros de Kerr e Reissner-Nordström, sob perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais no primeiro caso e sob perturbações escalares e espinoriais no segundo caso.

**Palavras-chaves:** Buraco de minhoca. Perturbação. Isomonodromia.

## ABSTRACT

Wormholes arise in the context of general relativity as an attempt to provide light rays and material particles with a complete history, that is, to eliminate spacetime singularities. In this context, Homer G. Ellis proposes that the coupling of a scalar field to the spacetime geometry would eliminate this difficulty, which culminated in the so-called “drainhole” metric, of which the wormhole studied in the present work appears as a special case. The study of gravitational systems proceeds through perturbation theory, which for the metric of interest is developed for both scalar and gravitational cases, showing that in both situations the radial equation takes the form of a confluent Heun equation. The determination of quasi-normal modes (QNMs) is of immeasurable astrophysical relevance, motivated by the detection of gravitational waves by the LIGO and Virgo collaborations. For the Schwarzschild metric, their determination via the WKB method is presented. For the Ellis wormhole, it is proposed to proceed through the method of isomonodromic deformations. The equations that ensure isomonodromy form an integrable system and guarantee the existence of the fifth Painlevé transcendent,  $\tau_V$ . Starting from the expansion given by Jimbo, the Riemann–Hilbert problem is addressed and solved, culminating in an expression for the QNMs.

Finally, it is shown that the equations for both perturbations can be interpolated. The potential is obtained after a Schrödinger-type transformation, and it is observed that it is strictly positive and does not admit bound states with positive real frequency, which does not rule out the possibility of obtaining decaying states with imaginary frequency that decrease exponentially in time, provided the imposed boundary conditions are respected. Subsequently, results obtained numerically using the isomonodromic method are presented. The development concludes by arguing that the numerical results obtained will be fundamental for the future search for QNMs for the Ellis wormhole, based on the success of the method already presented in the literature in obtaining such modes for Kerr and Reissner–Nordström black holes, under scalar, electromagnetic, and gravitational perturbations in the former case, and under scalar and spinorial perturbations in the latter case.

**Keywords:** Wormhole. Perturbation. Isomonodromy.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comportamento do invariante de Kretschmann . . . . .	23
Figura 2 – Diagrama de Kruskal para a extensão analítica máxima da métrica de Schwarzschild. . . . .	25
Figura 3 – O buraco de minhoca de Schwarzschild . . . . .	26
Figura 4 – Barreira de potencial da métrica de Schwarzschild para perturbações axiais	38
Figura 5 – Barreira de potencial da métrica de Schwarzschild para perturbações polares	39
Figura 6 – Laços circuvizinhando individualmente as singularidades . . . . .	61
Figura 7 – Barreira de potencial da métrica de Ellis para perturbações escalares . . . . .	72
Figura 8 – Barreira de potencial da métrica de Ellis para perturbações gravitacionais . . . . .	73
Figura 9 – Valor máximo para a barreira de potencial da métrica de Ellis para ambas as perturbações . . . . .	74
Figura 10 – Valores das partes real e imaginária de $\sigma$ e $\eta$ em função de $b\omega$ para $s = 0$ e $l = 0$ . . . . .	76
Figura 11 – Valores das partes real e imaginária de $\sigma$ e $\eta$ em função de $b\omega$ para $s = 0$ e $l = 0$ . . . . .	76
Figura 12 – Valores das partes real e imaginária de $\sigma$ e $\eta$ em função de $b\omega$ para $s = 0$ e $l = 1$ . . . . .	77
Figura 13 – Valores das partes real e imaginária de $\sigma$ e $\eta$ em função de $b\omega$ para $s = 2$ e $l = 2$ . . . . .	77
Figura 14 – Valores das partes real e imaginária de $\sigma$ e $\eta$ em função de $b\omega$ para $s = 2$ e $l = 2$ . . . . .	78

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	A QUESTÃO DA ESTABILIDADE	12
1.2	O MÉTODO ISOMONODRÔMICO	13
<b>2</b>	<b>AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA RELATIVIDADE GERAL E SUA ESTRUTURA</b>	<b>15</b>
2.1	INTRODUÇÃO	15
2.2	O PRINCÍPIO DA COVARIÂNCIA GERAL E AS EQUAÇÕES DE CAMPO	16
2.3	A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	18
2.3.1	<b>Derivação da solução</b>	<b>19</b>
2.3.2	<b>A extensão de Kruskal e o buraco de minhoca de Schwarzschild</b>	<b>22</b>
2.4	O BURACO DE MINHOCA DE ELLIS	26
2.5	CARACTERÍSTICAS GERAIS DE UM BURACO DE MINHOCA E A CLASSE ESPECIAL DOS BURACOS DE MINHOCA TRANSPONÍVEIS	29
2.6	CONCLUSÃO	31
<b>3</b>	<b>TEORIA DA PERTURBAÇÃO NO CONTEXTO DA RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>32</b>
3.1	INTRODUÇÃO	32
3.2	AS PRINCIPAIS ABORDAGENS PERTURBATIVAS NA RELATIVIDADE GERAL	33
3.2.1	<b>A abordagem de Regge-Wheeler</b>	<b>33</b>
3.2.2	<b>A abordagem de Newman-Penrose</b>	<b>35</b>
3.3	PERTURBAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	36
3.3.1	<b>Perturbações axiais</b>	<b>37</b>
3.3.2	<b>Perturbações polares</b>	<b>38</b>
3.4	PERTURBAÇÕES DO BURACO DE MINHOCA DE ELLIS	47
3.4.1	<b>Perturbação axial da métrica de Ellis</b>	<b>50</b>
3.5	CONCLUSÃO	53
<b>4</b>	<b>TEORIA DAS DEFORMAÇÕES ISOMONODRÔMICAS</b>	<b>54</b>
4.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A FÍSICA	54
4.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NO PLANO COMPLEXO	56

4.3	MONODROMIA . . . . .	58
4.4	ISOMONODROMIA . . . . .	62
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E ANÁLISE NUMÉRICA . . . . .</b>	<b>70</b>
5.1	O POTENCIAL EFETIVO PARA A MÉTRICA DE ELLIS . . . . .	70
5.2	ANÁLISE NUMÉRICA DOS PARÂMETROS DE MONODROMIA . . . . .	75
5.3	PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .	78
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE A – GEOMETRIA DIFERENCIAL E O CÁLCULO DA CURVATURA . . . . .</b>	<b>83</b>
	<b>APÊNDICE B – O DETERMINANTE DE FREDHOLM E A REPRESENTAÇÃO DA <math>\tau_V</math> . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>91</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O fascínio da humanidade pela estrutura celestial perdura por milênios. Na tentativa de estabelecer uma ordem ao que se via e percebia surgiram as mais diversas explicações. O primeiro protagonista nesse contexto a descrever de maneira satisfatória e aparentemente geral os fenômenos gravitacionais foi Isaac Newton em seus *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, ali propõe que a gravidade é uma força de interação universal que depende apenas da massa dos corpos e do quadrado de sua distância, explicando de maneira satisfatória o movimento dos planetas, dos satélites, dos cometas e das marés. Porém, seu trabalho encontra dificuldades na descrição do periélio de Mercúrio. Tais dificuldades foram sanadas com a publicação em 1915 das equações para o campo gravitacional por Albert Einstein (1), nesse contexto a gravidade deixa de ser vista como uma força de interação universal e passa a ser tratada como uma consequência geométrica à presença de massa e energia no espaço-tempo. A proximidade do planeta Mercúrio ao Sol faz com que sua trajetória seja alterada, devido à grande curvatura no espaço-tempo causada pela estrela, dando uma explicação resolutiva à aparente anomalia.

As equações de campo de Einstein encontrariam a primeira solução em 1916 e tão logo iriam se deparar com uma dificuldade que perdura e é palco de discussões até hoje, a presença de singularidades no espaço-tempo, que no caso da solução de Schwarzschild (2), uma delas é intrínseca ao próprio espaço, não podendo ser removida mesmo na extensão analítica máxima.

Os buracos de minhoca surgem como uma tentativa de resolver o problema da singularidade. Começando pelo reconhecimento geométrico por Ludwig Flamm (3) da estrutura de “ponte” para a solução de Schwarzschild, passando pela união de duas folhas da região exterior do espaço-tempo de Schwarzschild por um buraco topológico, proposto por Einstein e Rosen (4), seguindo pelo trabalho de Wheeler demonstrando a instabilidade de tal abordagem, chegando por fim ao acoplamento de um campo escalar à geometria do espaço tempo por Ellis (5) e Bronnikov (6), que tem por função manter a “ponte” ou “gargalo” sempre aberto. Os buracos de minhoca, dada sua propriedade resolutiva do problema da singularidade, tornaram-se objetos de grande interesse, principalmente para a física teórica e sua existência como objeto astrofísico ainda é assunto de discussão na comunidade científica e de intensa pesquisa, principalmente devido aos problemas relacionados à estabilidade, tópico que será tratado brevemente na seção seguinte.

## 1.1 A QUESTÃO DA ESTABILIDADE

Não é raro encontrar discussões a respeito da relevância física de certas soluções matemáticas que aparecem no desenvolvimento de uma teoria. A relevância física de um problema não depende apenas de sua boa consistência, soluções matemáticas bem comportadas podem dar origens a situações consideradas não físicas. No contexto dos objetos gravitacionais em geral, a estabilidade frente à perturbações garante a relevância astrofísica do objeto em questão.

A questão da estabilidade de um sistema gravitacional mostra-se ainda mais fundamental com a detecção das ondas gravitacionais pela colaboração LIGO e Virgo (7). Afim de que ondas gravitacionais provenientes de um buraco de minhoca sejam detectadas por tais mecanismos é necessário que ele não colapse diante de perturbações que o acometam.

Os buracos de minhoca aparecem como soluções da equações de campo de Einstein. No caso do buraco de minhoca de interesse da presente dissertação, o de Ellis, ele é geodesicamente completo e isento de singularidades, mas para que ele possua tais atributos é necessário o acoplamento de um campo escalar à geometria do espaço-tempo, um campo denominado de “fantasma”<sup>1</sup> por possuir energia negativa, o que viola as condições padrões de matéria e energia esperadas na relatividade geral.

A instabilidade de um buraco de minhoca suportado por um campo escalar fantasma, sob perturbações lineares, foi demonstrada em (8). No artigo mostra-se que o operador associado às perturbações possui um modo instável com energia negativa, que dá origem a uma solução das equações de campo linearizadas que cresce exponencialmente com o tempo. O modo, da forma como é apresentado no artigo, não decorre da escolha particular de gauge, sendo um resultado válido para toda a família dos buracos de minhoca suportados por um campo escalar fantasma. Uma outra questão é levantada a respeito da escala do tempo da instabilidade, mostra-se que ele é da ordem do tamanho da “garganta” dividido pela velocidade da luz, ou seja, muito pequeno. Sendo assim, a instabilidade levaria ou a um crescimento muito rápido ou ao colapso do buraco de minhoca.

Em (9) mostra-se que buracos de minhoca estáticos e esfericamente simétricos suportados por um campo escalar fantasma também são instáveis com respeito a flutuações não-lineares, sendo que a escala de tempo da instabilidade concorda com o cenário linear exposto em (8). Mostra-se também que a depender do formato da perturbação inicial o resultado final pode variar, ou ocorre o colapso do buraco de minhoca formando um buraco negro ou ele expande

---

<sup>1</sup> Veja (5).

---

rapidamente.

A instabilidade para perturbações lineares e não-lineares da família de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov mostra que, embora tais geometrias sejam regulares e transponíveis<sup>2</sup>, a sua não subsistência por tempos relevantes limita a sua viabilidade astrofísica. A concordância das duas análises não só mostra a instabilidade mediante perturbações, mas que a própria geometria possui uma instabilidade que destrói a estrutura do buraco de minhoca, diminuindo sua relevância no cenário observacional.

Espera-se que após as discussões “motivadoras” feitas acima o leitor não encontre-se desmotivado. Por mais que a instabilidade sobre perturbações lineares e não-lineares já tenha sido demonstrada para o buraco de minhoca de Ellis na teoria da gravidade de Einstein, a sua relevância permanece imensa, não só por ele ter sido o primeiro buraco de minhoca transponível da literatura, mas também pela riqueza analítica que ele traz às discussões a respeito do papel dos buracos de minhoca na Relatividade Geral e em teorias modificadas da gravidade.

## 1.2 O MÉTODO ISOMONODRÔMICO

No contexto da análise de sistemas gravitacionais, como já foi visto anteriormente, é importante saber como o objeto em questão evolui ao ser perturbado linearmente por campos das mais diversas naturezas (escalar, eletromagnético, espinorial, gravitacional).

Quando um sistema gravitacional é acometido por uma perturbação sua evolução pode ser dividida em algumas etapas. Percebeu-se após uma análise mais detalhada que, para certo intervalo de tempo, denominado regime *ringdown* a frequência e o tempo de decaimento da evolução da perturbação não depende de seu tipo, apenas das características físicas do objeto gravitacional em questão como a massa, momento angular e carga elétrica. Tais modos característicos ficaram conhecidos pelo nome de modos quase-normais, que se assemelham aos modos normais observados em sistemas acústicos, mas não mantém o perfil estacionário, decaindo ao longo do tempo. Como os modos quase-normais dependem apenas das características físicas eles funcionam como uma espécie de assinatura astrofísica, permitindo através da obtenção de informações de ondas gravitacionais por interferômetros descrever um evento no espaço-tempo.

A obtenção dos modos quase-normais aconteceu primeiro para o buraco negro de Schwarzschild por Vishveshwara (10) no estudo do espalhamento de ondas gravitacionais por um bu-

---

<sup>2</sup> Veja 2.5.

---

raco negro de Schwarzschild. Neste trabalho, Vishveshwara, utilizando a teoria perturbativa desenvolvida por Regge e Wheeler (11), percebeu numericamente que, para certo intervalo de tempo, a dinâmica da perturbação é dominada por modos amortecidos que dependem apenas da massa do buraco negro.

Dada a importância que os modos quase-normais tem, por serem uma assinatura astrofísica do objeto gravitacional, e pelos resultados obtidos para o buraco negro de Schwarzschild, o estudo e a busca por modos quase-normais dos mais diversos sistemas virou palco central na área de gravitação. Com o passar do tempo outros métodos foram desenvolvidos, como a integração das equações perturbativas (12), o método aproximativo WKB (13) e o método da fração continuada por Leaver (14), que de todos é o mais bem sucedido.

O método isomonodrômico, que é o de interesse no presente trabalho, permite escrever expressões analíticas para os modos quase-normais e também para o problema do espalhamento, o que é de relevância inestimável. A possibilidade de obtenção de tais expressões analíticas ocorre pela conexão que há entre deformações isomonodrômicas em sistemas lineares e sistemas completamente integráveis. Tal conexão é feita através de mapas de *Riemann-Hilbert* que permitem a escrita das propriedades de monodromia dos sistemas lineares associados à equação diferencial de interesse em termos dos transcedentes de Painlevé, cuja expansões são conhecidas na literatura<sup>3</sup>.

O método será desenvolvido no capítulo 4.

---

<sup>3</sup> Veja o apêndice B.

## 2 AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA RELATIVIDADE GERAL E SUA ESTRUTURA

O objetivo deste capítulo é introduzir ao leitor as principais ideias que levaram o físico alemão Albert Einstein a postular em 1915 suas equações de campo, seguido das mais diversas consequências advindas desta nova teoria da gravitação. Na seção 2.1 é feito um breve resumo histórico das principais ideias e conceitos que foram utilizados na obtenção das equações de campo. Na seção 2.2 obtêm-se as equações de campo seguindo um caminho eurístico baseado em (15). Na seção 2.3 é obtida a primeira solução para as equações de campo através do método das *tetradas* que é descrito no apêndice A junto com o método das coordenadas como formas equivalentes de obter-se os objetos matemáticos importantes, encerra-se com a extensão analítica máxima para a métrica obtida seguido do primeiro encontro com um buraco de minhoca. Na seção 2.4 é exposta a métrica de Ellis que corresponde ao buraco de minhoca “transponível” de interesse da dissertação. Na seção 2.5 concluímos fazendo a caracterização de um buraco de minhoca transponível.

### 2.1 INTRODUÇÃO

Em 1915, o físico alemão Albert Einstein em seu revolucionário artigo *Die Feldgleichungen der Gravitation* (1), apresenta ao mundo as equações de campo para o campo gravitacional. Diferentemente do caminho que seguiu ao publicar os princípios da relatividade especial em 1905 (16), Einstein não tentou modificar a gravitação newtoniana afim de torná-la compatível com essa última, ao invés disso, heuristicamente, buscou um caminho novo motivado fortemente por duas ideias principais.

A primeira delas foi o princípio da equivalência, que estabelece que todos os corpos são influenciados pela gravidade, sendo assim, todos os corpos “caem” de maneira equivalente em um campo gravitacional. O movimento dos corpos em um campo gravitacional independe de sua natureza constitutiva, sendo assim, sua trajetória dá origem a um conjunto de curvas preferenciais, de tal maneira que podemos associar as características do campo gravitacional à própria estrutura geométrica do espaço-tempo, seguindo as ideias já desenvolvidas anteriormente por Riemann sobre o comportamento de curvas em espaços não-euclidianos.

O segundo conjunto de ideias que motivou Einstein, no desenvolvimento de suas equações de campo baseia-se no princípio de Mach. Ele estabelece que toda a matéria presente no

universo deve contribuir para a nossa noção local do que seria um movimento não-acelerado e não-rotacional<sup>1</sup>. Sendo assim, o princípio de Mach rompe com as noções de espaço absoluto adotados na mecânica newtoniana, espaço esse que seria imutável e indiferente à presença da matéria que o ocupa.

Inspirado por essas ideias, Einstein buscou formular uma teoria para a gravitação em que a estrutura do espaço-tempo, pelo menos de maneira local, fosse afetada e modificada pela presença de matéria, alterando o comportamento de curvas preferenciais que possam ser estabelecidas nesse espaço.

Assim, partindo do pressuposto de que o espaço-tempo é uma variedade diferenciável, suas propriedades intrínsecas são estabelecidas por sua *métrica*. No contexto da relatividade geral, diferentemente do que ocorre na relatividade especial, a métrica não precisa ser necessariamente plana, tendo sua curvatura associada à distribuição local de matéria e energia, conforme descrito pelo tensor de estresse-energia-momento no espaço-tempo.

Tendo esse conjunto de ideias em mente, surge uma dificuldade ao tentar estabelecer a ideia do que seria um observador inercial, pois no espaço-tempo curvo as geodésicas para a métrica coincidem com a linhas de mundo de observadores em queda livre em um campo gravitacional. A priori, não temos como isolar um observador ou corpo do campo gravitacional devido ao princípio da equivalência, sendo assim, não temos uma maneira direta de medir o aspecto de “força” do campo gravitacional. O caminho tomado é o de supor que não é possível construir uma família de observadores inerciais, mesmo que por procedimentos complicados. Sendo assim, não há sentido em tratar o campo gravitacional como um campo de força, mas encará-lo como um aspecto do próprio espaço-tempo (15).

## 2.2 O PRÍNCIPIO DA COVARIÂNCIA GERAL E AS EQUAÇÕES DE CAMPO

A estrutura do espaço-tempo, dado pela relatividade geral, pode ser resumida da seguinte maneira: O espaço-tempo é uma variedade  $M^2$  com uma métrica Lorentziana  $g^3$  definida nela, sendo a curvatura da métrica relacionada à distribuição de matéria no espaço-tempo pelas equações de Einstein (18).

<sup>1</sup> Veja o capítulo 9 de (17).

<sup>2</sup> Faz-se a requisição de ser uma variedade de Hausdorff,  $C^\infty$ , conectada e quadrimensional. A discussão sobre o que é uma variedade é feita no Apêndice A.

<sup>3</sup> Uma métrica Lorentziana é caracterizada por possuir assinatura +2 (ou (-2) dependendo da convenção adotada) e ser não-degenerada.

Há dois princípios que norteiam as leis da física na teoria da relatividade, que são:

- 1) Princípio da covariância geral que estabelece que nas equações da física, a métrica e quantidades que podem ser derivadas dela devem ser as únicas grandezas do espaço-tempo que podem estar presentes.
- 2) As equações das leis da física na relatividade geral devem reduzir-se às equações das leis da física na relatividade especial quando a métrica for plana.

A partir disso, o último passo seria obter, com a ajuda de todas as considerações feitas, as equações do campo gravitacional. O procedimento exposto abaixo segue a argumentação do livro do Wald (15).

Há um paralelo que pode servir de guia nesse processo de desenvolvimento, que seria estabelecer uma relação entre a aceleração de maré da teoria da gravitação Newtoniana<sup>4</sup> e a aceleração de maré na relatividade geral. Na teoria Newtoniana, o campo gravitacional pode ser descrito por um potencial  $\phi$ , que satisfaz a equação de Poisson  $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$ . Utilizando o potencial  $\phi$ , temos a seguinte expressão para a aceleração de maré para duas partículas próximas na teoria Newtoniana:  $-(\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi$ , já na relatividade geral a aceleração é dada pela equação do desvio geodésico (ideia de que geodésicas inicialmente paralelas não permanecerão assim em um espaço curvo)  $-R_{cbd}^a v^c x^b v^d$ , em que  $R_{abc}^d$  é o tensor de Riemann, responsável por descrever como a curvatura do espaço se comporta em todas as direções em torno de um ponto. A notação tensorial aqui adotada é a mesma que em (15), em que letras latinas indicam índices “abstratos” (independentes de um sistema de coordenadas específico) e letras gregas para índices indicam as componentes da quantidade geométrica em questão em um determinado sistema de coordenadas. O tensor de Riemann pode ser definido através da não comutatividade do operador derivada natural associado à métrica da seguinte forma:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\kappa_c = R_{abc}^d \kappa_d \quad (2.1)$$

Sendo assim, podemos fazer uma correspondência do seguinte tipo:

$$R_{cbd}^a v^c v^d \longleftrightarrow \partial_b \partial^a \phi \quad (2.2)$$

<sup>4</sup> A aceleração de maré diz respeito à variação na força gravitacional experimentada pelas diversas partes de um corpo extenso. Como a força varia com o inverso do quadrado da distância, partes do corpo mais próximas estariam sob uma maior intensidade que partes mais distantes.

Podemos também, motivados pela ideia de relacionar a distribuição de massa e energia ao campo gravitacional, buscar uma correspondência entre a equação de Poisson ( $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$ ) na teoria Newtoniana (que associa  $\rho$  a  $\phi$ ), com as propriedades de energia e matéria na relatividade geral que são descritos pelo tensor energia-momento  $T_{ab}$ . A partir disso podemos fazer a associação descrita logo abaixo, sabendo que  $T_{ab}v^av^b$  no contexto relativístico é a densidade de energia medida por um observador com uma 4-velocidade  $v^a$ :

$$T_{ab}v^av^b \longleftrightarrow \rho \quad (2.3)$$

O que sugere a correspondência:  $R_{cad}^a v^c v^d = 4\pi T_{cd} v^c v^d$ , levando à seguinte equação para o campo gravitacional:  $R_{ab} = 4\pi T_{ab}$ . Porém, formulada dessa maneira, as equações de campo apresentam sérios problemas e afim de evitar um conflito entre a conservação local da energia ( $\nabla^c T_{cd} = 0$ ) e a identidade de Bianchi contraída ( $\nabla^c (R_{cd} - \frac{1}{2}g_{cd}R) = 0$ )<sup>5</sup> devemos ter:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab} \quad (2.4)$$

Que é a equação de Einstein para o campo gravitacional exposta em seu seminal artigo (1). Aqui considera-se o sistema natural de unidades em que temos a velocidade da luz  $c = 1$ .

### 2.3 A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Essencialmente, o ponto de partida para uma possível solução da equação de campo de Einstein seria a situação mais simples possível. A lei da gravitação universal newtoniana tem dois importantes aspectos a cerca de sua estrutura, ela é esfericamente simétrica e estática. Sendo assim, podemos imaginar que a situação mais simples em que podemos buscar uma solução para as equações de campo de Einstein (motivados pelo sucesso obtido em formular as equações de campo a partir de analogias com a gravitação Newtoniana) também seria o caso do campo gravitacional externo de um corpo esfericamente simétrico e estático.

A solução das equações de campo de Einstein para esse caso foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916 (2), apenas alguns meses após a publicação por Einstein de suas equações de

<sup>5</sup> Veja a propriedade 4 do tensor de Riemann no Apêndice A e a equação A.11.

campo no vácuo. Tendo a solução de Schwarzschild (como ficou conhecida) em mãos foi possível fazer um grande número de previsões que viriam a ser confirmadas experimentalmente.

Através da solução de Schwarzschild também foi possível prever que determinados corpos suficientemente massivos não são capazes de evitar um eventual colapso gravitacional total, criando em sua vizinhança um campo gravitacional tão intenso que nem mesmo a luz consegue “escapar” dele (a velocidade de escape necessária para sair de tal região é superior à velocidade da luz). Esses corpos foram popularizados com o nome de buraco negro pelo físico norte americano John Wheeler através de uma série de palestras, artigos e textos acadêmicos da década de 60. Embora o estado final do colapso gravitacional completo de um corpo celeste só tenha sido entendido de maneira mais expressiva com a Relatividade Geral, Laplace em seu célebre livro *Exposition du Système du Monde*, conjecturou (sem prova) que a força atrativa de um corpo poderia ser tão grande que a luz (utilizando o modelo corpuscular proposto por Newton) não conseguiria escapar dele, sendo assim, os corpos celestes mais massivos do universo seriam invisíveis a nós e apenas percebidos devido a sua atração gravitacional a outros corpos próximos. Para uma tradução ao inglês da exposição de Laplace veja o apêndice A de (18).

A obtenção da solução de Schwarzschild foi de importância ímpar na história e futuros desenvolvimentos da relatividade geral. As equações de Einstein formam um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem para os componentes da métrica, sua estrutura é tão robusta que o próprio Einstein duvidava que alguém fosse capaz de encontrar uma solução algum dia (19). A obtenção da primeira solução alguns meses após o conhecimento das equações de campo abriu as portas para o que viria a ser um dos ramos mais frutíferos da física moderna e contemporânea.

### 2.3.1 Derivação da solução

A derivação da solução de Schwarzschild exposta nesta subseção tem por base o procedimento seguido no livro do Wald (15).

Como dito no início da subseção, estamos interessados em determinar a solução das equações de campo de Einstein para o caso que aparenta ser o mais simples possível, quando a métrica é estática e esfericamente simétrica. Assim, antes de prosseguirmos com a derivação, faz-se necessário definir brevemente de uma maneira mais precisa o que significam os termos “estático” e “esfericamente simétrico”.

Um espaço tempo é dito estático se ele é estacionário (Um espaço tempo estacionário é um que possui um campo vetorial de Killing tipo tempo. Um campo vetorial de Killing é um campo que satisfaz a equação de Killing<sup>6</sup> e permite a identificação das isometrias da métrica) e se possui uma hipersuperfície tipo espaço que seja ortogonal às órbitas da isometria<sup>7</sup>.

Dizemos que um espaço é esfericamente simétrico se seu grupo de isometrias contém um subgrupo que é isomórfico ao grupo  $SO(3)$ , e as órbitas desse subgrupo são topologicamente esferas bidimensionais  $S^2$ .

A métrica para um espaço tempo estático e esfericamente simétrico arbitrário tem a seguinte forma<sup>8</sup>:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

O trabalho em encontrar a solução para as equações de campo agora, pode ser resumido da seguinte maneira: calcular o tensor de Ricci e determinar as duas funções  $f$  e  $h$ . Para isso podemos usar qualquer uma das duas abordagens descritas no apêndice A do presente trabalho. Faremos a escolha pelo método das tetradas, o leitor interessado pode encontrar a solução de Schwarzschild através do método das coordenadas no livro do D'Inverno(17) ou no artigo original do Schwarzschild(2).

Sendo assim, o primeiro passo é escolher uma base ortonormal conveniente, em seguida encontrar as relações da equação A.23, utilizá-las para encontrar as 1-forma de conexão, encontrar o tensor de Riemann através das 1-forma de conexão seguindo a equação A.21, encontrar o tensor de Ricci através da contração do tensor de Riemann e por fim determinar as funções  $f$  e  $h$  através das equações de campo.

Uma base conveniente para a métrica apresentada é:

$$(e_0)_a = f^{\frac{1}{2}}(dt)_a \quad (2.6a)$$

$$(e_1)_a = h^{\frac{1}{2}}(dr)_a \quad (2.6b)$$

$$(e_2)_a = r(d\theta)_a \quad (2.6c)$$

$$(e_3)_a = r \sin \theta (d\phi)_a \quad (2.6d)$$

<sup>6</sup>  $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$ .

<sup>7</sup> Veja por favor os apêndices B e C do livro do Wald (15).

<sup>8</sup> A métrica toma a forma indicada em um sistema de coordenadas cuja escolha pode ser consultada pelo leitor nas páginas 120 e 121 do capítulo 6 do livro do Wald (15).

Escolhida a base, basta seguir o caminho citado acima, os detalhes serão omitidos e o leitor interessado neles é convidado a consultar o livro do Wald (15). Procedendo dessa maneira, obtemos os valores abaixo para o tensor de Riemann:

$$R_{ab01} = \frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'](\mathrm{d}r)_{[a}(\mathrm{d}t)_{b]} \quad (2.7a)$$

$$R_{ab02} = f^{-1/2}h^{-1}f'(\mathrm{d}\theta)_{[a}(\mathrm{d}t)_{b]} \quad (2.7b)$$

$$R_{ab03} = f^{-1/2}h^{-1}f' \sin \theta (\mathrm{d}\phi)_{[a}(\mathrm{d}t)_{b]} \quad (2.7c)$$

$$R_{ab12} = h^{-3/2}h'(\mathrm{d}r)_{[a}(\mathrm{d}\theta)_{b]} \quad (2.7d)$$

$$R_{ab13} = \sin \theta h^{-3/2}h'(\mathrm{d}r)_{[a}(\mathrm{d}\phi)_{b]} \quad (2.7e)$$

$$R_{ab23} = 2(1 - h^{-1}) \sin \theta (\mathrm{d}\theta)_{[a}(\mathrm{d}\phi)_{b]} \quad (2.7f)$$

Com o tensor de Riemann em mãos podemos computar o tensor de Ricci através da equação A.22, e finalmente, após igualar o resultado a zero, obtemos as equações de Einstein:

$$0 = R_{00} = \frac{1}{2}(fh)^{-1/2} \frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'] + (rfh)^{-1}f' \quad (2.8a)$$

$$0 = R_{11} = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2} \frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'] + (rh^2)^{-1}h' \quad (2.8b)$$

$$0 = R_{22} = -\frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1 - h^{-1}) \quad (2.8c)$$

Agora que já foram obtidas as equações de Einstein, podemos utilizá-las para descobrir o valor das funções  $f$  e  $h$ . Os resultados são:

$$f = 1 + \frac{C}{r} \quad (2.9a)$$

$$h = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} \quad (2.9b)$$

Em que  $C$  é uma constante que pode ser determinada ao comparar o movimento de um corpo de teste na solução de Schwarzschild no regime de campo fraco ao movimento de um corpo de teste na gravitação Newtoniana, ou seja, fazendo uma análise do caso limite. Fazendo isso, chega-se a conclusão de que  $-C/2$  pode ser interpretada como a massa total  $M$  do campo de Schwarzschild. Assim, a forma final da solução é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2 \theta \mathrm{d}\phi^2) \quad (2.10)$$

A equação 2.10 é conhecida como solução de Schwarzschild.

Podemos notar de imediato que no limite  $r \rightarrow \infty$  a métrica se reduz a de Minkowski em coordenadas esféricas, ou seja, a métrica de Schwarzschild é assintoticamente plana, significado que longe da fonte do campo gravitacional o espaço não se curva. O que é esperado já que a curvatura do espaço-tempo na teoria da gravidade de Einstein é gerada pela presença de matéria e energia.

Olhando com um pouco mais de cuidado para o resultado obtido, percebemos que existe um problema para  $r = 0$  e  $r = 2M$ , indicando a presença de singularidades para a métrica obtida. A existência destas singularidades trouxe dúvidas quanto aos limites físicos da teoria, e a resolução de tais dúvidas veio a surgir duas décadas depois. Essa questão será tratado a seguir.

### 2.3.2 A extensão de Kruskal e o buraco de minhoca de Schwarzschild

Dadas as singularidades em  $r = 0$  e  $r = 2M$  para a métrica de Schwarzschild, a pergunta mais importante a ser feita é se elas aparecem devido à escolha do sistema de coordenadas ou se são singularidades intrínsecas de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico. Se for o caso da primeira alternativa basta encontrar uma transformação para outro sistema de coordenadas que elimine as singularidades, tornando o espaço geodesicamente completo<sup>9</sup>. Caso elas sejam singularidades intrínsecas, independente das transformações de coordenadas que forem feitas, elas continuarão presentes e podem apresentar um limite físico para a teoria.

O estudo das regiões demarcadas por  $r = 0$  e  $r = 2M$  para a solução de Schwarzschild no vácuo só faz sentido caso estejamos analisando o estágio final do colapso gravitacional de um corpo suficiente massivo, isso porque, caso estivermos nos referindo, por exemplo, a uma estrela, ambas as regiões estarão em seu interior, não caracterizando assim uma solução de vácuo. Dito isto, considerando o caso do estágio final de um colapso gravitacional, uma maneira de saber o comportamento da solução para as regiões descritas é através do cálculo do invariante de Kretschmann dado por  $\mathcal{R} = R_{abcd}R^{abcd}$ , como se trata de um escalar ele não é afetado pela escolha do sistema de coordenadas. Calculando o invariante de Kretschmann para a métrica de Schwarzschild 2.10 temos o seguinte:

<sup>9</sup> Diz-se que uma variedade é geodesicamente completa quando todas as geodésicas que emanam de um ponto podem ser extendidas a valores infinitos de seus parâmetros afins, em ambas as direções.

$$\mathcal{R} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.11)$$

Analisando o resultado obtido, percebemos que se  $r = 2M$  temos  $\mathcal{R} = 3/4M^4$ , ou seja, um valor finito, já se  $r \rightarrow 0$  o resultado para o invariante de Kretschmann diverge  $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ . Isso indica que as singularidades descritas são de naturezas distitas, a singularidade em  $r = 2M$  é advinda da escolha do sistema de coordenadas (podendo ser removida através de uma transformação adequada deste), já a singularidade em  $r = 0$  é própria de um espaço estático e esfericamente simétrico para a teoria da relatividade geral de Einstein. De maneira mais rigorosa, a análise da natureza de uma singularidade não é tão simples assim, existem singularidades do espaço-tempo em que o invariante de Kretschmann não diverge. A tarefa de formular de maneira precisa uma definição para “singularidade” não é trivial e foge ao escopo deste trabalho, o leitor interessado é convidado a consultar as discussões no capítulo 9 do Wald(15) ou do capítulo 8 do Hawking-Ellis(18). A figura abaixo esboça um gráfico do comportamento de  $\mathcal{R}$  para a métrica de Schwarzschild:

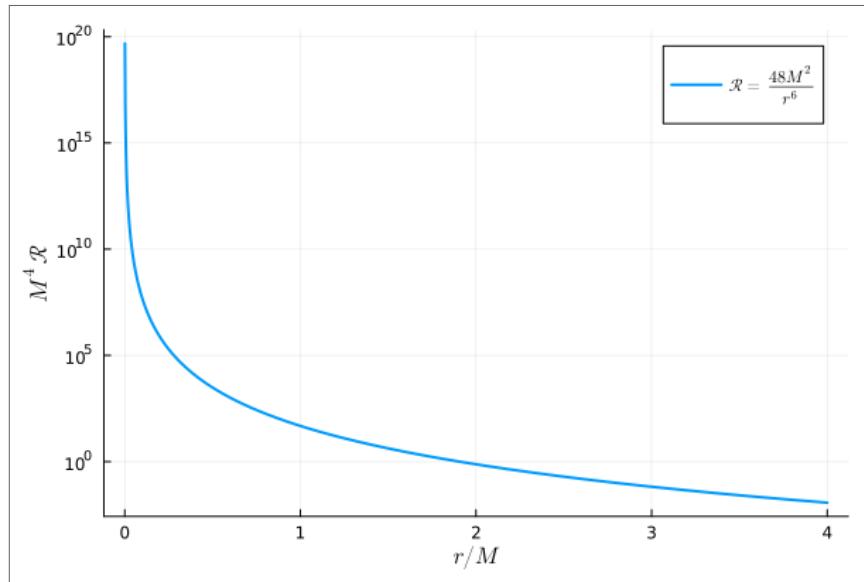


Figura 1 – Comportamento do invariante de Kretschmann.

**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Feitas essas considerações, o próximo passo é buscar um sistema de coordenadas adequado em que a singularidade em  $r = 2M$  não esteja presente. O desenvolvimento que se segue tem por base o realizado no livro do Wald (15).

Em duas dimensões há uma forma de evitar singularidades advindas da escolha do sistema de coordenadas, aproveitando características da geometria do próprio espaço ao escolher o

sistema. Localmente, geodésicas nulas, em duas dimensões, podem ser divididas em duas classes, geodésicas de “saída” e geodésicas de “entrada”. Sendo assim, podemos usar coordenadas “nulas”, a primeira sendo constante ao longo das geodésicas de “entrada”, a segunda sendo constante ao longo das geodésicas de “saída”. A métrica de Schwarzschild é quadrimensional, mas dada sua simetria esférica apenas as partes temporal e radial são relevantes na análise da singularidade em  $r = 2M$ . Dessa forma, temos o seguinte:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (2.12)$$

E a partir disso podemos aplicar o procedimento geral. O passo-a-passo é exemplificado em (15) para a métrica de Rindler<sup>10</sup> que é utilizada no contexto da relatividade geral para a descrição de um movimento uniformemente acelerado, dada a sua forma em duas dimensões:  $ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2$ , ela apresenta também uma singularidade aparente para  $x = 0$ , permitindo uma analogia com a singularidade em  $r = 2M$  da métrica de Schwarzschild. Para encontrar as geodésicas nulas o ponto de partida advém de aplicar a condição nula para a métrica reduzida (2.12):

$$0 = g_{ab} \xi^a \xi^b = -(1 - 2M/r) \dot{t}^2 + (1 - 2M/r) \dot{r}^2 \quad (2.13)$$

Assim, as geodésicas nulas satisfazem:

$$t = \pm r_* + constante \quad (2.14)$$

Sendo  $r_*$  a famosa coordenada tartaruga de Regge-Wheeler, definida por:

$$r_* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (2.15)$$

Feito os procedimentos necessários a métrica toma a seguinte forma<sup>11</sup>:

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} dU dV \quad (2.16)$$

Perceba que a métrica obtida não mais apresenta singularidade para  $r = 2M$  (a singularidade em  $r = 0$  não desaparece porque ela é de natureza física, o que pode ser atestado através da divergência do invariante de Kretschmann  $R_{abcd} R^{abcd}$ ). Uma última transformação

<sup>10</sup> Uma resolução alternativa pode ser encontrada no capítulo 3 de (20).

<sup>11</sup>  $U = -e^{\frac{-u}{4M}}$ ,  $V = e^{\frac{v}{4M}}$ ,  $u = t - r_*$ ,  $v = t + r_*$ .

de coordenadas é necessária para deixar a métrica no formato apresentado por Kruskal em seu artigo de 1960(21). Fazendo  $T = (U + V)/2$  e  $X = (V - U)/2$  temos:

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2) \quad (2.17)$$

Sendo as relações entre as coordenadas antigas  $(t, r)$  e as novas  $(T, X)$  dadas por:

$$\frac{re^{r/2M}}{2M} - e^{r/2M} = X^2 - T^2 \quad (2.18a)$$

$$\frac{t}{2M} = \ln(T + X) - \ln(T - X) = 2 \tanh^{-1}(T/X) \quad (2.18b)$$

Através das relações expostas acima é possível desenhar um diagrama de espaço-tempo para a extensão de Kruskal afim de realizar uma análise visual de sua estrutura causal. O diagrama pode ser dividido em quatro grandes regiões, de naturezas semelhantes, porém distintas, veja:

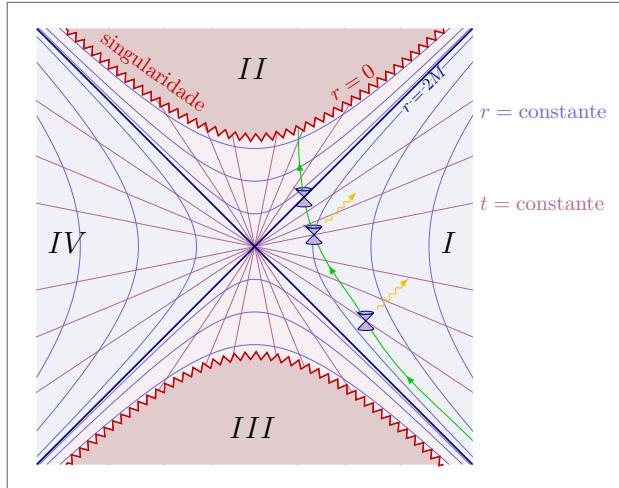


Figura 2 – Diagrama de Kruskal para a extensão analítica máxima da métrica de Schwarzschild.

**Fonte:**(22).

Na figura estão indicadas hipérboles representando valores constantes de  $r$  e linhas radiais passando pela origem, representando valores constantes de  $t$ . A região I corresponde à região  $r > 2M$  para o espaço-tempo de Schwarzschild, estão representados cones de luz em azul e a trajetória de um observador em verde, perceba, ao analisar a intersecção do cone de luz com a reta  $r = 2M$ , que após adentrar a região II o observador não pode mais escapar, caindo inevitavelmente na singularidade em  $X = (T^2 - 1)^{1/2}$ . A região II é um *buraco negro*. A região III é semelhante a região II, com a diferença que a singularidade, posicionada em  $X = -(T^2 - 1)^{1/2}$ , encontra-se em seu “passado”, sendo assim, qualquer observador na

região III tem origem na singularidade, esta região é conhecida por *buraco branco*. A região IV apresenta as mesmas propriedades da região I. Se voltarmos à metrica de Kruskal(2.17), fazendo  $T = \text{constante}$ , suprimindo um grau de liberdade rotacional ( $\theta = \pi/2$ ) e procedendo com uma imersão (*embedding*) em um espaço euclidiano com métrica cilíndrica, obteríamos algo semelhante à figura abaixo:

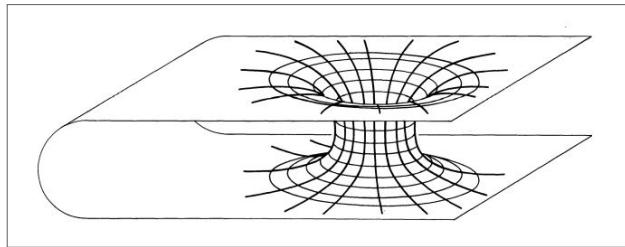


Figura 3 – O buraco de minhoca de Schwarzschild

**Fonte: Gravitation (23), p.837.**

Que ficou conhecido como *buraco de minhoca de Schwarzschild*. Ele é responsável por conectar duas regiões assintoticamente planas do mesmo universo (ou de universos diferentes a depender do contexto), como as regiões I e IV representadas no diagrama de Kruskal. Embora, matematicamente previsto a conexão entre as duas regiões, a realidade física de tal objeto ainda é palco de discussão, como foi exposto no capítulo 1. A comunicação entre as regiões I e IV é impossível, uma hipersuperfície tipo tempo que ligue as duas regiões passando por  $T = X = 0$  não é estática, dada a mudança de característica das translações temporais (deixam de ser “tipo tempo” e passam a ser “tipo espaço” nas regiões II e III), a consequência disto é que a “garganta” se forma, expande e colapsa tão rapidamente que nem mesmo um sinal de luz conseguiria atravessá-la. Isso possibilita que a causalidade não seja violada. O leitor interessado nas discussões a respeito da causalidade pode consultar (24).

## 2.4 O BURACO DE MINHOCA DE ELLIS

Embora a solução de Schwarzschild, exibida na equação 2.10, tenha uma relevância imensa dada que foi a primeira solução encontrada para as equações de campo ela possui uma limitação que, mesmo em sua extensão analítica máxima feita por Kruskal (21) (exposta na subseção anterior), torna-a insatisfatória na representação de um modelo de partícula para a relatividade geral, que é o fato dela não ser geodesicamente completa<sup>12</sup> devido a sua singularidade

<sup>12</sup> Veja a nota de rodapé 9.

de espaço-tempo na origem. O fato da métrica de Schwarzschild ser geodesicamente incompleta impossibilita que se dê uma história completa às partículas materiais e raios de luz que eventualmente encontrem a singularidade.

Em seu seminal artigo “*The particle problem in the General Theory of Relativity*”(4), Einstein e Rosen propõem uma forma de circunvizinhar o problema encontrado na métrica de Schwarzschild. Eles estabelecem um modelo do espaço-tempo formado por duas “folhas” idênticas e com a partícula sendo representada por uma “ponte” (buracos topológicos) que conecta as duas folhas. A proposta de Einstein e Rosen não encontra singularidades em seu caminho, mas carrega outros problemas consigo, o fato da métrica utilizada ser degenerada (o determinante da métrica se anula na “garganta”) e geodesicamente incompleta (há geodésicas completas na métrica de Kruskal que não estão presentes na construção de Einstein-Rosen).

Homer Ellis, em seu artigo de 1973 (5), na tentativa de encontrar um espaço satisfatório para descrição de um modelo de partícula, propôs que o acoplamento de um campo escalar fantasma<sup>13</sup> à geometria do espaço-tempo retornaria um espaço-tempo estático, esfericamente simétrico, geodesicamente completo<sup>14</sup> e sem horizonte de eventos, com um buraco topológico em seu centro que ele nomeou de “sumidouro” (do inglês *drainhole*) afim de não ser confundido com a ponte de Einstein-Rosen ou o buraco de minhoca de Kruskal-Fronsdal. A presença do buraco topológico permite com que as geodésicas de tipo tempo, que poderiam representar as linhas de fluxo de um fluido, não terminem de maneira abrupta. Sendo assim, o modelo proposto por Ellis supera as dificuldades encontradas por Schwarzschild, Kruskal e Einstein-Rosen.

O elemento de linha geral para o sumidouro tem a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + [d\rho - f(\rho)dt]^2 + r^2(\rho)[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad (2.19)$$

Com os intervalos de coordenadas dados por:

$$-\infty < t < \infty, -\infty < \rho < \infty, 0 < \theta < \pi, -\pi < \phi < \pi$$

É uma geometria dinâmica, suportada por um campo escalar sem massa com energia cinética negativa e a função  $f$  e a função não-negativa  $r$  são determinadas através das equações

<sup>13</sup> O campo escalar é a estrutura adicional que permite manter a singularidade de Schwarzschild “aberta”.

<sup>14</sup> Veja por favor a seção VIII do artigo (5).

de campo<sup>15</sup>.

Na seção VII de (5), são descritas todas as *variedades* que têm por solução o elemento de linha geral para o sumidouro. No presente trabalho estamos interessados em analisar os coeficientes de monodromia da equação radial obtida depois da perturbação escalar e gravitacional do que ficou conhecido por “*buraco de minhoca de Ellis*”<sup>16</sup>, que leva esse nome por ser um caso especial do elemento de linha geral para o sumidouro, especificamente, o caso III descrito na seção VII do artigo, em que um parâmetro  $m$  que pode ser interpretado como a massa do buraco de minhoca é tomado como zero (as soluções com  $m$  diferente de zero tem a forma assintótica de um buraco negro de Schwarzschild com massa  $m$ ). O elemento de linha para o buraco e minhoca de Ellis tem o seguinte formato:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.20)$$

Possuindo regiões assintoticamente planas em  $r \rightarrow \pm\infty$ , separadas, mas transponíveis (veja a discussão sobre os critérios para a transponibilidade por um buraco de minhoca na subseção 2.5), representando os dois lados do buraco de minhoca. Os intervalos de coordenadas são dados por:

$$-\infty < t < \infty, -\infty < r < \infty, 0 < \theta < \pi, -\pi < \phi < \pi$$

Os ângulos são os usuais das coordenadas esféricas e as superfícies com  $r$  e  $t$  constantes são esferas de raio  $\rho = \sqrt{r^2 + b^2}$ . Diferentemente do que temos para o espaço plano, a coordenada radial  $r$  pode assumir valores negativos, já que a parte esférica não se anula quando  $r$  tende a zero. Pelo contrário, o sistema possui um tamanho natural mínimo dado por  $\rho = b$ , que representa a “garganta” do buraco de minhoca. A “garganta” é responsável por conectar duas regiões cuja métrica em seu limite assintótico ( $r \rightarrow \pm\infty$ ) toma a forma do espaço plano de Minkowski.

Na subseção a seguir serão feitas breves discussões sobre as principais características dos buracos de minhoca e será apresentada, baseado em (25), uma métrica geral que representa uma classe de buracos de minhoca transponíveis segundo os critérios a serem descritos.

<sup>15</sup> Na seção VI do artigo, (5), é justificado a escolha do acoplamento do campo escalar e a respectiva equação de campo.

<sup>16</sup> Veja também (6).

## 2.5 CARACTERÍSTICAS GERAIS DE UM BURACO DE MINHOCA E A CLASSE ESPECIAL DOS BURACOS DE MINHOCA TRANSPONÍVEIS

O termo “buraco de minhoca”, assim como o termo “buraco negro” foi originalmente proposto por John Wheeler em um artigo com coautoria de Charles Misner, nomeado *Classical Physics as Geometry* (26), mas sua aparição no contexto da Relatividade Geral pré-data até mesmo os buracos negros. Um ano após a publicação de Einstein de suas equações de campo, o físico Austríaco Ludwig Flamm reconheceu que a solução de Schwarzschild obtida alguns meses antes representava uma ponte entre duas regiões do espaço-tempo (3), através de um diagrama que ele fez em seu artigo ligando o horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild ao anti-horizonte do buraco branco.

No contexto da Relatividade Geral, um buraco de minhoca se refere a soluções das equações de campo de Einstein que possuem a característica de ligar duas regiões distintas do espaço-tempo, distantes ou não, ou até mesmo regiões entre universos diferentes. Podemos classificar os buracos de minhocas em dois grandes grupos, transponíveis ou não-transponíveis. O buraco de minhoca de Schwarzschild, por exemplo, se encontraria no grupo dos não-transponíveis por algumas razões específicas, entre elas está o fato do buraco de minhoca de Schwarzschild ser dinâmico e possuir um movimento de expansão da “garganta” de um tamanho nulo até um tamanho máximo, conectando duas regiões, seguido de uma contração do tamanho da garganta até que as duas regiões fiquem novamente desconexas<sup>17</sup>. Esse processo acontece de maneira tão rápida que mesmo que fosse possível a um observador mover-se na velocidade da luz ele seria pego no meio do caminho pela contração (23).

Em um artigo de 1988 (25), Kip Thorne e Michael Morris propõe a utilização dos buracos de minhoca transponíveis como objeto para o ensino de Relatividade Geral básica. São citadas as propriedades desejáveis principais que os buracos de minhoca transponíveis devem possuir, listadas abaixo:

1. A métrica deve ser esfericamente simétrica e estática;
2. A solução deve possuir uma “garganta” que conecte duas regiões que em seu limite assintótico sejam planas;
3. Não deve haver horizontes, para que a viajem de dupla via (“ida” e “volta”) seja possível.

<sup>17</sup> Diagramas representativos e uma discussão sobre esse processo podem ser encontrados no capítulo 31 da seção 6 de (23).

Esses são os critérios básicos que um buraco de minhoca transponível deve possuir (o primeiro foi posto apenas para simplificar os cálculos no artigo). Outras características nomeadas de “critérios de usabilidade” são citadas no artigo com o intuito de discutir quais outros fatores seriam importantes e relevantes para permitir a passagem “confortável” de seres humanos, mas como os critérios não são relevantes na presente dissertação eles foram omitidos.

O elemento de linha geral de um buraco de minhoca que satisfaça as propriedades citadas acima tem o seguinte formato (25):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + dl^2 \left(1 - \frac{b}{l}\right)^{-1} + l^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.21)$$

Em que  $\Phi = \Phi(l)$  e  $b = b(l)$  são funções arbitrárias de  $l$ .  $b(l)$  recebe o nome de “função de forma” pois é responsável por determinar o formato do buraco de minhoca e a função  $\Phi(l)$  recebe o nome de “função de desvio para o vermelho” por determinar o desvio para o vermelho gravitacional. O leitor atento deve ter visto o que parece ser uma singularidade para  $l = b$ , mas não passa de uma singularidade aparente, removível com uma adequada transformação de coordenadas.

Sendo assim, o buraco de minhoca que estamos interessados em analisar no presente trabalho, representado pelo elemento de linha dado na equação 2.20 é transponível segundo os critérios expostos acima. De tal forma que, feitas as transformações corretas podemos colocar 2.20 no formato do elemento de linha 2.21. Tomando  $r^2 = l^2 - b^2$  ficamos com:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^{-1} + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.22)$$

Comparando a equação acima com 2.21 percebemos que para o buraco de minhoca de Ellis são feitas as transformações:  $b(l) = b^2/l$  e  $\Phi(l) = 0$  que reforça o caráter ultra-estático da métrica.

No próximo capítulo, utilizando os métodos explorados no apêndice A, serão obtidas as quantidades geométricas de interesse para a métrica do buraco de minhoca de Ellis, incluindo o tensor de Einstein, tanto para o caso em que não há perturbação na métrica, quanto para o caso em que há perturbação que leva-a a um desvio da métrica não perturbada. Em ambos os casos mostraremos que a equação diferencial obtida através do operador de Laplace-Beltrami é separável em uma parte radial e uma polar, resultando na equação de Heun cuja descrição e estudo de suas particularidades será exposta no capítulo 4.

## 2.6 CONCLUSÃO

O presente capítulo buscou estabelecer um caminho heurístico dos pontos de partida e das principais ideias que levaram Einstein a obter em 1915 suas equações de campo, até chegar na discussão de uma das consequências mais notáveis que podem ser obtidas de suas equações: os buracos de minhoca. A exposição foi feita buscando garantir o encadeamento e a sequência lógica das ideias que levaram à métrica de Ellis em 1973(5), motivada pelos problemas apresentados pela métrica de Schwarzschild, Einstein-Rosen e Kruskal, finalizando com a exposição de que o buraco de minhoca de Ellis faz parte da classe dos buracos de minhoca transponíveis segundo os critérios apresentados. Como discutido, a existência física de buracos de minhoca como objetos astrofísicos ainda carece de evidência observacional, e os resultados teóricos obtidos apontam no sentido de que uma grande classe deles são instáveis, enquanto uma outra grande classe só existe em condições extremas, no entanto, o estudo da Relatividade Geral a partir dos buracos de minhoca é ainda um campo fértil de pesquisa. Além de seu interesse intrínseco como soluções exatas ou aproximadas das equações de Einstein, os buracos de minhoca têm servido como arenas conceituais fundamentais para o teste de hipóteses. Sua relevância extrapolou o domínio da Relatividade Geral, alcançando um papel central nas tentativas de se compreender a gravidade quântica e os fundamentos da informação quântica. Em especial, a conjectura ER = EPR, proposta por Maldacena e Susskind (27), sugere que conexões tipo buraco de minhoca podem ser manifestações geométricas do entrelaçamento quântico.

Sendo assim, os buracos de minhoca podem servir de ponte de diálogo entre áreas de grande interesse na física moderna.

### 3 TEORIA DA PERTURBAÇÃO NO CONTEXTO DA RELATIVIDADE GERAL

A teoria da perturbação na física se faz presente no mais diversos contextos e fornece ferramentas para “atacar” problemas que de outra forma encontrariam dificuldades em serem abordados. A proposta do presente capítulo é tratar justamente disso e apresentar os resultados pertinentes da teoria aplicada à métrica de Ellis e Schwarzschild. Na seção 3.1 é feito uma introdução da importância da teoria da perturbação na relatividade geral, trazendo resultados observacionais recentes que se alinham com previsões feitas pela teoria. Na seção 3.2 são apresentadas as duas principais abordagens no contexto da relatividade geral, a de Regge-Wheeler e a de Newman-Penrose. Na seção 3.3 são apresentados os principais resultados da teoria para a métrica de Schwarzschild, mostrando que tanto para perturbações axiais, quanto para perturbações polares as equações diferenciais resultantes são separáveis e que os resultados de ambas as situações podem ser unificados em um só, além disso também são obtidos os MQN pelo método WKB. Na seção 3.4 a teoria é explorada para a métrica de interesse da dissertação, mostra-se que tanto no caso sem perturbação métrica quanto no caso com perturbação que a equação diferencial resultante é uma equação de Heun confluente.

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A teoria das perturbações ocupa um papel central na formulação contemporânea da física teórica, constituindo uma metodologia indispensável para abordar sistemas que não admitem soluções exatas ou cuja dinâmica se torna mais compreensível por meio de aproximações em torno de soluções conhecidas. No contexto da Relatividade Geral, a aplicação da teoria das perturbações à métrica do espaço-tempo permite investigar a estabilidade de soluções, a emissão de ondas gravitacionais e a estrutura dinâmica de objetos compactos como buracos negros e estrelas de nêutrons.

A abordagem perturbativa em Relatividade Geral tem ganhado renovado interesse nos últimos anos, especialmente em virtude da recente confirmação experimental da existência de ondas gravitacionais, cujo primeiro registro direto foi realizado pelas colaborações LIGO e Virgo em 2015 (7). Tais observações revelaram oscilações características provenientes da fusão de buracos negros e estrelas de nêutrons, as quais se manifestam como modos quase-normais (MQNs) – soluções complexas das equações de perturbação linearizadas sobre métricas de

fundo, cuja parte imaginária representa o amortecimento das oscilações devido à emissão de radiação gravitacional.

Além de fornecer uma via concreta para a comparação com observações astrofísicas, a teoria das perturbações desempenha um papel conceitual essencial ao investigar a robustez de soluções da Relatividade Geral frente a pequenas flutuações. É nesse sentido que surgem duas abordagens paradigmáticas: a formulação de Regge-Wheeler, que trata das perturbações axissimétricas da métrica de Schwarzschild (11), e o formalismo tetrádico de Newman-Penrose (28), que generaliza o tratamento das perturbações para contextos onde o formalismo escalar de Weyl se mostra mais vantajoso.

A importância da análise perturbativa se estende inclusive ao domínio especulativo da gravitação teórica, como no caso dos buracos de minhoca. Embora tais soluções ainda careçam de suporte observational, o estudo da estabilidade de métricas como a de Ellis (5) permite investigar sob que condições topologias não triviais podem sobreviver a pequenas flutuações gravitacionais. Como será explorado neste capítulo, a análise dos MQNs associados à métrica de Ellis representa não apenas um exercício teórico relevante, mas também uma ponte entre gravitação clássica e abordagens mais modernas da física fundamental, incluindo propostas envolvendo gravidade quântica.

## 3.2 AS PRINCIPAIS ABORDAGENS PERTURBATIVAS NA RELATIVIDADE GERAL

### 3.2.1 A abordagem de Regge-Wheeler

A abordagem de Regge-Wheeler (como ficou conhecida) exposta em (11), consiste em perturbar diretamente os coeficientes da métrica através da equação de Einstein. A ideia é utilizar a métrica de Schwarzschild como métrica de “fundo” e adicionar a ela a perturbação, da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Em que  $g_{\mu\nu}$  é a métrica perturbada,  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  é a métrica de Schwarzschild não perturbada e  $h_{\mu\nu}$  representa a perturbação. O interesse é em pequenas perturbações, de tal maneira que a análise pode ser restrita à primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$ .

O próximo passo após estabelecida a forma da perturbação é aplicá-la às equações de campo, no caso da métrica exterior de Schwarzschild temos:

$$R_{\mu\nu}(g) = 0 \quad (3.2)$$

Para o espaço perturbado as equações tomam a forma:

$$R_{\mu\nu}(g + h) = 0 \quad (3.3)$$

Negligenciando termos de ordem 2 e superiores, a equação perturbada pode ser expandida da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu}(g) + \delta R_{\mu\nu}(h) = 0 \quad (3.4)$$

Em que  $\delta R_{\mu\nu}$  contém apenas termos de primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$ . A partir da equação 3.2 percebe-se através de 3.4 que as equações diferenciais que dizem respeito à perturbação são dadas por  $\delta R_{\mu\nu}$ . Dito isso, os termos  $\delta R_{\mu\nu}$  são dados pela fórmula (29):

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta \Gamma^{\beta}_{\mu\nu;\beta} + \delta \Gamma^{\beta}_{\mu\beta;\nu} \quad (3.5)$$

Em que “;” indica a derivada covariante e  $\Gamma^c_{ab}$  são os símbolos de Christoffel<sup>1</sup>. A partir da obtenção dos símbolos de Christoffel pode-se obter o tensor de Riemann A.13, proceder com a contração e obter o tensor de Ricci A.14, disto surgem as equações diferenciais provenientes da perturbação gerada na métrica. Os resultados das perturbações obtidas foram divididas em duas classes, perturbações de paridade ímpar- $(-1)^{l+1}$  e perturbações de paridade par- $(-1)^l$ , sendo  $l$  o momento angular associado ao modo em questão.

A partir do estudo de ambas as paridades é possível chegar a uma equação de onda para tratar do problema do espalhamento e absorção de ondas gravitacionais pelo buraco negro (ou buraco de minhoca). Em seu artigo, Regge e Wheeler conseguiram desacoplar as perturbações para o caso de paridade ímpar e obter a equação de onda respectiva. Para o caso das perturbações de paridade par o desacoplamento foi feito por Zerilli (30), obtendo também a equação de onda que se espera.

Embora as perturbações possuam paridades diferentes, os resultados obtidos, surpreendentemente, podem ser unificados em um só. Tal feito será exposto na seção seguinte.

<sup>1</sup> Veja o apêndice A.

### 3.2.2 A abordagem de Newman-Penrose

O formalismo de Newman-Penrose foi introduzido em 1962 no artigo *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients* (28). A ideia principal partiu do interesse de implementar na teoria da relatividade geral uma análise espinorial de maneira natural. O formalismo é um caso especial do formalismo das tetradas, nele são introduzidos quatro vetores nulos  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{m}^*$  como base para o espaço tempo, os vetores nulos  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{n}$  são reais, enquanto os vetores nulos  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{m}^*$  são complexos conjugados mútuos. Até então, como se pode perceber na solução de Schwarzschild desenvolvida na seção 2.3, o padrão na procura por soluções das equações de campo era a introdução de uma base ortonormal, a escolha de uma base nula por Newman e Penrose representou uma ruptura com o que se fazia até então.

A escolha de uma base nula não foi aleatória, um elemento fundamental do espaço-tempo é a estrutura de cone de luz, o que possibilita a introdução de uma base espinorial. A estrutura do cone de luz permite, através do formalismo, que se extraia as simetrias intrínsecas do espaço-tempo revelando sua riqueza analítica.

O formalismo com o passar do tempo mostrou-se uma ferramenta extremamente poderosa na construção de soluções e no estudo da propagação de campos em espaços curvos (31). Sendo o formalismo de Newman-Penrose um caso especial do formalismo das tetradas, seu objetivo é que todas as quantidades geométricas e relevantes sejam escritas em termos da base nula. Os vetores nulos que formam a base satisfazem as seguintes condições de ortogonalidade:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}^* = 0 \quad (3.6)$$

Sendo eles vetores nulos satisfazem também as seguintes condições:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{m}^* = 0 \quad (3.7)$$

Satisfazem também as condições de normalização dadas por:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* = -1 \quad (3.8)$$

Através destes vetores é possível obter 12 coeficientes complexos de Spin, 5 escalares de Weyl, 10 funções que guardam informação do tensor de Ricci e 4 derivadas covariantes.

Como o formalismo não é utilizado na dissertação a exposição termina aqui. O leitor interessado na implementação e estudo das principais consequências e desdobramentos do

formalismo para espaços-tempo bem conhecidos como Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr encontrará um excelente compêndio na monografia (20).

### 3.3 PERTUBAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Grande parte dos resultados aqui descritos são inspirados nos desenvolvimentos realizados na monografia monumental de Chandrasekhar (20) e o leitor interessado nos mais diversos desdobramentos e nuances da teoria é convidado a consultar a obra.

O ponto de partida é o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\psi} (d\phi - \omega dt - q_2 dx^2 - q_3 dx^3)^2 - e^{\mu_2} (dx^2)^2 - e^{\mu_3} (dx^3)^2 \quad (3.9)$$

Que representa o elemento de linha de um espaço-tempo com suficiente generalidade que permite tratar perturbações de uma forma geral<sup>2</sup>. Embora tal generalidade seja imposta logo de começo a abordagem que será apresentada segue de maneira semelhante a de Regge-Wheeler, a ideia é trabalhar com o elemento de linha geral que abarca as perturbações pertinentes e proceder com o processo de linearização em relação à métrica de Schwarzschild.

Dado o elemento de linha do espaço-tempo de interesse os próximos passos seguem de maneira genérica ao que já é conhecido, encontrar o tensor de Ricci e o tensor de Einstein. Os resultados são longos, para manter a fluidez eles foram omitidos, o leitor interessado pode encontrá-los no capítulo 4 de (20).

Para o caso da métrica de Schwarzschild podemos fazer as seguintes identificações em 3.9:

$$e^{2\nu} = e^{-2\mu_2} = 1 - 2M/r = \Delta/r^2, \quad e^{\mu_3} = r, \quad e^\psi = r \sin \theta \quad (3.10)$$

$$\omega = q_2 = q_3 = 0 \quad (\Delta = r^2 - 2Mr; x^2 = r; x^3 = \theta) \quad (3.11)$$

Uma perturbação geral resultará em  $\omega$ ,  $q_2$  e  $q_3$  como pequenas quantidades e as funções  $\nu$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  e  $\psi$  sofrendo pequenos incrementos ( $\delta\nu, \delta\mu_2, \delta\mu_3, \delta\psi$ ). As perturbações dos dois tipos são de naturezas diferentes, o que garantirá que as equações de perturbação obtidas poderão

<sup>2</sup> Os resultados aqui expostos irão se restringir a modos axisimétricos e dependentes do tempo.

ser desacopladas, dada a independência entre os dois tipos. As perturbações que resultam em  $\omega$ ,  $q_2$  e  $q_3$  como pequenas quantidades serão denominadas *perturbações axiais* e as que resultam em pequenos incrementos ( $\delta\nu, \delta\mu_2, \delta\mu_3, \delta\psi$ ) serão denominadas *perturbações polares*. Fazendo um paralelo com a abordagem de Regge-Wheeler, as axiais são as de paridade ímpar e polares as de paridade par.

### 3.3.1 Perturbações axiais

As equações de campo que governam as perturbações axiais são dadas por:

$$R_{12} = R_{13} = 0 \quad (3.12)$$

Trabalhando com as equações de campo, assumindo dependência temporal para as perturbações no formato  $e^{i\sigma t}$  e eliminando  $\omega$  obtemos a seguinte equação:

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \frac{\sigma^2 r^4}{\Delta} Q = 0 \quad (3.13)$$

Em que:

$$Q(t, r, \theta) = \Delta Q_{23} \sin^3 \theta = \Delta (q_{2,3} - q_{3,2} \sin^3 \theta) \quad (3.14)$$

A equação 3.13 pode ser separada utilizando a seguinte substituição:

$$Q(r, \theta) = Q(r) C_{l+2}^{-3/2}(\theta) \quad (3.15)$$

Em que  $C_n^\nu$  é a função de Gegenbauer<sup>3</sup>. Com a substituição acima a parte radial toma o seguinte formato:

$$\Delta \frac{d}{dr} \left( \frac{\Delta}{r^4} \frac{dQ}{dr} \right) - \frac{\mu^2 \Delta}{r^4} Q + \sigma^2 Q = 0 \quad (3.16)$$

Em que  $\mu$  representa a dependência angular  $\mu^2 = 2n = (l-1)(l+2)$ . Procedendo com a mudança de variáveis para a “coordenada tartaruga” 2.15, fazendo também  $Q(r) = rZ^{(-)}$ . Percebemos que  $Z^{(-)}$  satisfaz a equação de onda de Schrödinger unidimensional:

$$\left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2 \right) Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)} \quad (3.17)$$

<sup>3</sup> Informações, propriedades e representações da função de Gegenbauer (também conhecida como ultraesférica) podem ser encontrados em (32).

Com o potencial efetivo dado por:

$$V^{(-)} = \frac{\Delta}{r^5} [(\mu^2 + 2)r - 6M] \quad (3.18)$$

Que é justamente a equação de onda obtida por Regge e Wheeler (11). Abaixo plotamos um gráfico para o comportamento do potencial para os valores de  $l = 2, 3, 4$ :

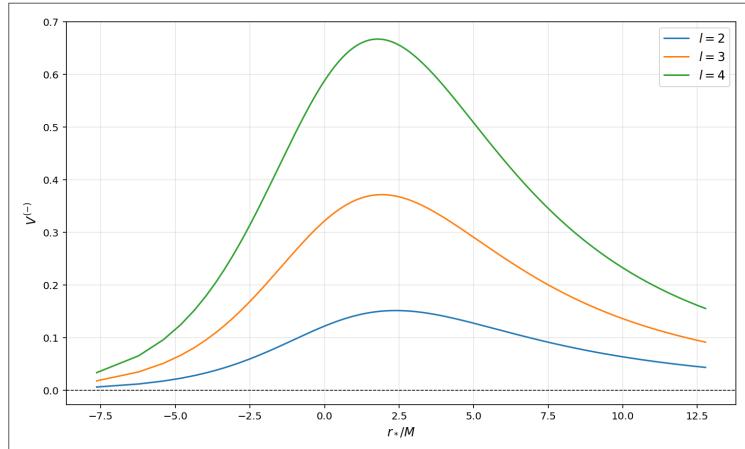


Figura 4 – Barreira de potencial da métrica de Schwarzschild para perturbações axiais

**Fonte: Elaborada pelo autor com base em Chandrasekhar (20).**

Na subseção seguinte vamos obter a equação de onda para as perturbações polares e será possível perceber a semelhança entre as barreiras de potencial para os dois casos.

### 3.3.2 Perturbações polares

Retomando o que foi dito anteriormente, as perturbações polares surgem de incrementos nas funções  $\nu, \mu_2, \mu_3$  e  $\psi$ . Linearizando  $R_{02}, R_{03}, R_{23}, R_{11}$  e  $G_{22}$  com respeito à métrica de Schwarzschild, podemos proceder com a separação de variáveis em  $r$  e  $\theta$  a partir das seguintes substituições (20, 33):

$$\delta\nu = N(r)P_l(\cos\theta) \quad (3.19)$$

$$\delta\mu_2 = L(r)P_l(\cos\theta) \quad (3.20)$$

$$\delta\mu_3 = \left[ T(r)P_l + V(r)P_{l,\theta,\theta} \right] \quad (3.21)$$

$$\delta\psi = \left[ T(r)P_l + V(r)P_{l,\theta} \cot\theta \right] \quad (3.22)$$

O processo que se segue a partir daqui é longo e será omitido, o leitor interessado em todos os detalhes é convidado a consultá-los em (20), de onde os principais desenvolvimentos desta seção foram retirados. Após os devidos procedimentos serem realizados, nota-se que também é possível obter para as perturbações polares uma equação de onda de Schrödinger unidimensional:

$$\left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2 \right) Z^{(+)} = V^{(+)} Z^{(+)} \quad (3.23)$$

Com  $Z^{(+)}$  dado por:

$$\frac{r^2}{nr + 3M} \left( \frac{3M}{nr} X - L \right)^4 \quad (3.24)$$

E a barreira de potencial dada por:

$$V^{(+)} = \frac{2\Delta}{r^5(nr + 3M)^2} \left[ n^2(n + 1)r^3 + 3Mn^2r^2 + 9M^2nr + 9M^3 \right] \quad (3.25)$$

A equação de onda 3.23 foi obtida pela primeira vez por Zerilli (30) e recebe o nome de *equação de Zerilli* (veja também (34)). Abaixo plotamos também um gráfico para o comportamento do potencial para os valores de  $l = 2, 3, 4$ :

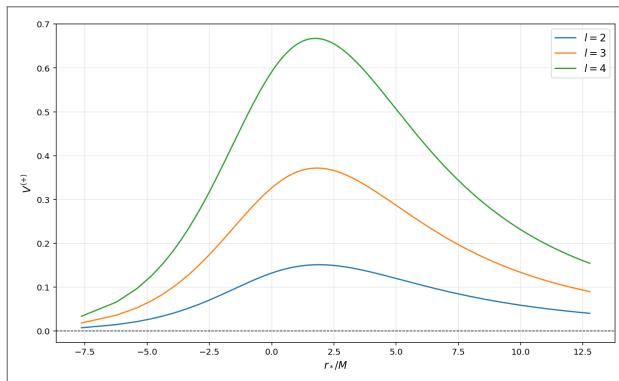


Figura 5 – Barreira de potencial da métrica de Schwarzschild para perturbações polares

**Fonte:** Elaborada pelo autor com base em Chandrasekhar (20).

Comparando com o gráfico 3.3.1 para a barreira de potencial no caso de perturbações axiais é possível perceber uma forte semelhança. Essa semelhança não é coincidência, percebe-

<sup>4</sup>  $X = nv = \frac{1}{2}(l - 1)(l + 2)V$ .

se que os resultados obtidos para o potencial de ambas as perturbações podem ser resumidos da seguinte maneira (20):

$$V^{(\pm)} = \pm\beta \frac{df}{dr_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f \quad (3.26)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{constante} = 6M, & \kappa &= \text{constante} = 4n(n+1) \\ & & &= \mu^2(\mu^2 + 2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

também:

$$f = \frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r + 6M)} = \frac{\Delta}{2r^3(nr + 3M)} \quad (3.28)$$

Não há uma razão imediata do porquê os resultados obtidos poderem ser relacionados de maneira tão simples, a origem dessa conexão é explorada a partir do tratamento de Newman-Penrose, o leitor interessado pode consultar as seções §§28 e 29 de (20).

O objetivo de tudo feito até aqui e da própria teoria da perturbação em si, para a Relatividade Geral, é entender como o objeto em estudo reage com a incidência dos mais diversos campos. Em particular, é interessante entender como o problema do espalhamento de ondas gravitacionais pelo objeto pode nos dar informações sobre as mais diversas características do estudo do espaço-tempo. Dada o fato da equação de onda obtida para ambas as perturbações terem o formato da equação de onda de Schrödinger unidimensional, o problema do espalhamento pode ser tratado de forma semelhante ao feito nos cursos básicos de mecânica quântica, mudando, obviamente, as condições de contorno.

O comportamento dos potenciais obtidos, tanto no infinito, quanto na fronteira do horizonte de enventos é dado por:

$$V^{(\pm)} \rightarrow 2(n+1)r^{-2} \quad \text{com} \quad r \rightarrow r_* \rightarrow +\infty \quad (3.29)$$

$$V^{(\pm)} \rightarrow (\text{constante}) \pm e^{r_*/2M} \quad \text{com} \quad r_* \rightarrow -\infty \quad (r \rightarrow 2M) \quad (3.30)$$

Ou seja, para o caso de  $r_* \rightarrow +\infty$  o decaimento é com o inverso ao quadrado da distância, já para  $r_* \rightarrow -\infty$  o decaimento é exponencial, de toda forma, em ambos os casos temos o seguinte:

$$V^{(\pm)} = \begin{cases} 0 & r_* \rightarrow +\infty, \\ 0 & r_* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.31)$$

E as equações de onda obtidas anteriormente para ambas as perturbações tomam a seguinte forma no limite assintótico:

$$\frac{d^2 Z^{(\pm)}}{dr_*^2} + \sigma^2 Z^{(\pm)} = 0 \quad (3.32)$$

Que representa uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes, sendo sua solução combinação de exponenciais do tipo  $e^{i\sigma r_*}$  e  $e^{-i\sigma r_*}$ .

Para o problema de espalhamento em questão as seguintes condições de contorno são convenientes:

$$Z^{(\pm)} \rightarrow e^{+i\sigma r_*} + R^{(\pm)}(\sigma) e^{-i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty) \quad (3.33)$$

$$T^{(\pm)} \rightarrow e^{+i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty) \quad (3.34)$$

Essas condições correspondem a uma onda incidente de amplitude 1 vindo do  $+\infty$  dando origem a uma onda refletida de amplitude  $R^{(\pm)}$  no  $+\infty$  e uma onda transmitida de amplitude  $T^{(\pm)}$  em  $-\infty$ . Perceba que não é possível nenhuma onda emergir de  $-\infty$  ( $r = 2M$ ), pois corresponde ao horizonte de eventos, região do espaço-tempo da qual nada escapa, já que seria necessária uma velocidade maior que a da luz, o que no contexto da teoria da relatividade é impossível.

De maneira similar também é possível determinar o coeficiente de reflexão e transmissão utilizando o formalismo de Newman-Penrose, como o formalismo não é utilizado na presente dissertação os resultados não foram expostos aqui, o leitor interessado é convidado a consultar as seções 29,30,31 e 32 de (20) para elucidação.

Uma outra questão de interesse da teoria da perturbação é sobre a estabilidade do objeto de estudo em questão, ou seja, se uma dada perturbação irá crescer de maneira indefinida. Não à toa o artigo de Regge e Wheeler tem por título *Stability of a Schwarzschild Singularity*, a questão da estabilidade tem tremenda importância na física, ela garante que o objeto em questão é de relevância astrofísica. No artigo, para pequenas perturbações de paridade ímpar (descritas aqui como “perturbações axiais”) eles mostraram que as equações diferenciais obtidas são auto-adjuntas, garantindo que os autovalores associados às frequências  $k^2$

são reais, sendo assim, são descartadas soluções com frequências imaginárias que representariam a instabilidade da singularidade<sup>5</sup>, concluindo-se que o sistema é estável por perturbações lineares fracas. Eles conjecturaram ainda que haveria estabilidade também para o caso das perturbações pares (descritas aqui como perturbações “polares”), porém não foram mais adiante pois não conseguiram proceder com o desacoplamento das equações diferenciais obtidas, mas a conjectura foi confirmada em 1970 por Zerilli (30). Posteriormente, Vishveshwara (35) extende os esforços dos trabalhos anteriores e analisa a questão da estabilidade à luz das coordenadas de Kruskal, concluindo novamente que a métrica de Schwarzschild é estável contra perturbações lineares e que perturbações com frequências puramente imaginárias, que levariam a métrica a ser instável, divergem no horizonte, garantindo assim a sua impossibilidade física. Discussões recentes sobre estabilidade do espaço-tempo de Schwarzschild podem ser encontradas em (36).

Um último ponto a ser tratado é a respeito dos *modos quase-normais* para a métrica de Schwarzschild. Esses modos representam frequências características dos intervalos finais após um processo de perturbação e guardam consigo informações importantes que ajudam na descrição do objeto em estudo. Os modos não dependem do tipo de perturbação que foi realizada, apenas das características do objeto perturbado.

Os modos quase-normais no contexto da relatividade geral já foram amplamente estudados para os mais diversos tipos de métrica, a abordagem que será apresentada a seguir foi retirada de (37). Em geral, existem diversos métodos para sua obtenção, abaixo estão alguns deles seguidos de uma breve descrição de sua implementação:

1. *Método de aproximação WKB*: Talvez, de todos que serão listados este é o mais conhecido devido a sua ampla aplicabilidade em cursos básicos da formação acadêmica. O método WKB (ou JWKB) foi proposto inicialmente por Jeffreys (38) afim de conseguir soluções aproximadas para equações diferenciais de segunda ordem, incluindo a equação de Schrödinger, posteriormente o método viria a ser desenvolvido por Wentzel (39), Kramers (40) e Brillouin (41).

A equação que governa os modos quase-normais é:

$$\epsilon^2 \frac{d^2}{dr_*^2} Z(r_*) + (\sigma^2 - V) Z(r_*) = 0 \quad (3.35)$$

<sup>5</sup> No artigo há o uso trocado de “singularity” e “wormhole”, a relação entre as duas coisas é estabelecida no artigo Morris-Wheeler.

Sendo  $\epsilon$  um pequeno parâmetro para se ajustar à ordem da aproximação. É importante ressaltar que o método WKB mantém alta precisão para a região  $\sigma^2 - V(r_*) > 0$ . Sendo  $V(r_*)$  unimodal criam-se dois pontos de retorno que dividem a região de integração em três partes (na região II está o ponto máximo do potencial). Assumindo uma forma assintótica para  $Z$  nas regiões I e III (notadamente, à esquerda e à direita do ponto máximo do potencial) temos:

$$Z(r_*) \sim \exp \left[ \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(r_*) \epsilon^n \right] \quad (3.36)$$

A forma para  $S_n$  pode ser obtida substituindo a expansão na equação e comparando os termos de igual ordem em  $\epsilon$ . Nas regiões I e III há duas soluções, como descritas a seguir:

$$Z_-^I \sim e^{-i\sigma r_*}, \quad Z_+^I \sim e^{+i\sigma r_*}, \quad \text{em } r_* \rightarrow +\infty, \quad (3.37)$$

$$Z_-^{III} \sim e^{-i\sigma r_*}, \quad Z_+^{III} \sim e^{+i\sigma r_*}, \quad \text{em } r_* \rightarrow -\infty. \quad (3.38)$$

Ressaltamos como dito anteriormente que  $r_* \rightarrow +\infty$  é o infinito espacial e  $r_* \rightarrow -\infty$  o horizonte de eventos. A solução geral nas regiões I e III, a partir do que foi dito até agora, são dadas por:

$$Z(r_*) \sim \begin{cases} \Psi_{\text{in}}^I Z_-^I + \Psi_{\text{out}}^I Z_+^I, & \text{na região I,} \\ \Psi_{\text{in}}^{III} Z_+^{III} + \Psi_{\text{out}}^{III} Z_-^{III}, & \text{na região III.} \end{cases} \quad (3.39)$$

Em que  $\Psi_{\text{in}}$  e  $\Psi_{\text{out}}$  são ondas incidentes da região I ou III para a região II e ondas emitidas da região II para a região I ou III respectivamente. Podemos associar as amplitudes na região I com as da região III através do seguinte (42):

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\text{out}}^{III} \\ \Psi_{\text{in}}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{out}}^I \\ \Psi_{\text{in}}^I \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Na expressão acima  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  e  $M_{22}$  pode ser determinadas através de uma comparação entre a solução obtida em 3.40 e a solução na região II. Sendo assim, o próximo passo é obter a solução na região II, para isso vamos considerar que ela pode ser escrita como uma série de Taylor em torno do ponto máximo para o potencial, veja:

$$\sigma^2 - V(r_*) \approx (\sigma^2 - V(r_0)) - \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dr_*^2} \bigg|_{r_* = r_0} (r_* - r_0)^2 \quad (3.41)$$

Sendo a primeira derivada nula por se tratar de um ponto de máximo. A expansão acima é válida para:

$$|r_* - r_0| < \sqrt{-\frac{2(\sigma^2 - V(r_0))}{\frac{d^2 V}{dr_*^2} \bigg|_{r_* = r_0}}} \approx \sqrt{\epsilon} \quad (3.42)$$

É possível colocar a equação para os modos quase-normais na forma de uma equação parabólica cilíndrica:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2 \right) Z = 0 \quad (3.43)$$

De tal forma que:

$$\begin{cases} t = (4k)^{1/4} e^{-i\pi/4} \frac{(r_* - r_0)}{\sqrt{\epsilon}}, & k = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dr_*^2} \\ z_0^2 = -\frac{2(\sigma^2 - V(r_0))}{\frac{d^2 V}{dr_*^2} \bigg|_{r_* = r_0}}, & \nu + \frac{1}{2} = -i \frac{\sqrt{k} z_0^2}{2} \frac{1}{\epsilon}. \end{cases} \quad (3.44)$$

A partir disso, a solução da equação 3.43 pode ser dada por:

$$Z(t) = A D_\nu(t) + B D_{-\nu-1}(it) \quad (3.45)$$

Sendo  $D_\nu(t)$  e  $D_{-\nu-1}(it)$  funções parabólicas cilíndricas<sup>6</sup>. A fórmula assintótica destas funções tem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} Z \sim & B e^{-\frac{3i\pi(\nu+1)}{4}} (4k)^{-\frac{\nu+1}{4}} (r_* - r_0)^{-(\nu+1)} e^{i\sqrt{k}(r_* - r_0)^2/2} + \\ & + \left( A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\nu\pi/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right) e^{\frac{i\pi\nu}{4}} (4k)^{\nu/4} (r_* - r_0)^\nu e^{-i\sqrt{k}(r_* - r_0)^2/2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

para  $r \gg r_2$ . Já para  $r \gg r_1$  temos:

<sup>6</sup> Propriedades a respeito das funções parabólicas cilíndricas podem ser encontradas em (32).

$$Z \sim Ae^{-\frac{3i\pi\nu}{4}}(4k)^{\nu/4}(r_* - r_0)^\nu e^{-i\sqrt{k}(r_* - r_0)^2/2} + \left( B - \right. \\ \left. -iA\frac{(2\pi)^{1/2}e^{-i\nu\pi/2}}{\Gamma(-\nu)} \right) e^{\frac{i\pi(\nu+1)}{4}}(4k)^{-\frac{\nu+1}{4}}(r_* - r_0)^{-(\nu+1)}e^{i\sqrt{k}(r_* - r_0)^2/2} \quad (3.47)$$

$r_1$  é o menor ponto de retorno e  $r_2$  o maior. Agora com os resultados em mãos podemos na região  $I$  comparar os coeficientes de 3.46 e 3.39, da mesma forma, para a região  $III$  podemos comparar os coeficientes de 3.47 com os de 3.39. Eliminando as constantes A e B ficamos com:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\text{out}}^{III} \\ \Psi_{\text{in}}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi\nu} & \frac{iR^2e^{i\pi\nu}(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(\nu+1)} \\ \frac{R^{-2}(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(-\nu)} & -e^{-i\pi\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{out}}^I \\ \Psi_{\text{in}}^I \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Com  $R$  sendo dado por:

$$R = \left( \frac{1}{2} + \nu \right)^{(2\nu+1)/4} e^{-(2\nu+1)/4} \quad (3.49)$$

É importante lembrar que a natureza do horizonte de eventos não permite que emissão de sua região, ao mesmo tempo que ele também não permite o escape de ondas que chegam até ele, sendo o coeficiente de reflexão igual a zero. Essas observações resultam em  $\Psi_{\text{in}}^I = 0$  e  $\Psi_{\text{in}}^{III} = 0$ , segue que:

$$\Gamma(\nu) \rightarrow \infty \quad (3.50)$$

Sobre primeira ordem da aproximação WKB os MQN são dados por (37):

$$\sigma^2 = V(r_0) - \sqrt{2\frac{d^2V}{dr_*^2}} \Big|_{r_*=r_0} \left( n + \frac{1}{2} \right) i \quad (3.51)$$

Sendo  $V(r_0)$  o valor máximo para o potencial. O sinal e  $n$  denota a parte real de  $\omega$  tal que:

$$n = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots & \Re(\sigma) > 0 \\ -1, -2, -3, \dots & \Re(\sigma) < 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

representando um conjunto discreto de frequências complexas. É possível também obter uma expressão para WKB de ordens maiores, ela tem o seguinte formato:

$$\sigma^2 = V(r_0) - \sqrt{2 \frac{d^2 V}{dr_*^2}} \Big|_{r_*=r_0} \left( n + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^N \Theta_k \right) i \quad (3.53)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\Theta_k$  são funções do potencial de suas derivadas em seu valor máximo  $r_* = r_0$ .

2. *O método da fração continuada:* O método das frações continuadas (também denominado método de Leaver) é amplamente utilizado para o cálculo dos MQN no contexto da relatividade geral. Sua origem remonta 1986 quando Leaver, percebendo que as equações obtidas por Teukolsky são uma subclasse de equações de onda esferoidais, introduziu o método das frações continuadas a problemas de perturbação e encontrou os MQN para as métricas de Schwarzschild e Kerr. O método foi amplamente desenvolvido e é uma das formas mais efetivas e precisas de calcular os MQN, embora o método tenha sua convergência prejudicada à medida que o valor do harmônico aumenta (37).
3. *O método pseudo-espectral:* Na implementação deste método, as variáveis contínuas, como a coordenada radial presente nas equações dos MQN são substituídas por um conjunto discreto de pontos que recebe o nome de *malha*. As auto-funções podem ser aproximadas por funções cardinais e os coeficientes expandidos em função da frequência dos MQN, resultando em uma matriz que governa o problema de auto-valor.
4. *Soluções exatas da equação de Heun:* A equação radial pode ser posta no formato de uma equação de Heun (veja 3.66). Solucionada a equação é possível obter os MQN. No capítulo 4 será desenvolvida a teoria das deformações isomonodrônicas afim de resolver numericamente a equação de Heun.

Para concluir, algumas últimas considerações sobre a métrica de Schwarzschild, especialmente, a métrica descrevendo um buraco negro:

1. Os MQN, sobre a convenção adotada, possuem parte imaginária positiva, representando assim modos amortecidos, ou seja, podemos afirmar a estabilidade da métrica de Schwarzschild sobre perturbações lineares pequenas.

2. O tempo de amortecimento dos MQN depende linearmente da massa do buraco negro, sendo menor quanto maior os modos forem.
3. Uma perturbação do buraco negro dá origem ao seu “toque” e o final da dinâmica dessas perturbações podem ser descritas através de uma lei de potência representando o conjunto dos MQN em decaimento.
4. Os MQN são isoespectrais, significando que independentemente das perturbações serem axiais ou polares, o conjunto de frequências características será o mesmo.

### 3.4 PERTUBAÇÕES DO BURACO DE MINHOCA DE ELLIS

O caminho a ser seguido afim de trabalhar com a equação de campo de Einstein dada em 2.4 é, primeiramente, encontrar o tensor de Einstein para a métrica de interesse, dada em 2.20. Sendo assim, podemos fazer uso de qualquer um dos métodos desenvolvidos no Apêndice A para esse fim. Nesse capítulo especificamente, faremos opção por utilizar o método das coordenadas. O primeiro passo é encontrar os símbolos de Christoffel para a métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.54)$$

Eles são dados por:

$$\Gamma_{\theta\theta}^\rho = -r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\rho = -r \sin^2(\theta), \quad (3.55a)$$

$$\Gamma_{\rho\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\rho}^\theta = \frac{r}{r^2 + b^2} \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos(\theta) \sin(\theta) \quad (3.55b)$$

$$\Gamma_{\rho\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\rho}^\phi = \frac{r}{r^2 + b^2} \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad (3.55c)$$

O passo seguinte é, através dos símbolos de Christoffel encontrar o tensor de Riemann, seguem os resultados obtidos:

$$R_{r\theta r}^\theta = \frac{1}{r^2 + b^2} - \frac{r^2}{(r^2 + b^2)^2}, \quad R_{r\phi r}^\phi = \frac{1}{r^2 + b^2} - \frac{r^2}{(r^2 + b^2)^2} \quad (3.56a)$$

$$R_{\theta\theta r}^r = -\frac{b^2}{(r^2 + b^2)}, \quad R_{\theta\phi\theta}^\phi = \frac{r}{r^2 + b^2} - 1 \quad (3.56b)$$

$$R_{\phi\phi r}^r = -\frac{b^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + b^2)}, \quad R_{\phi\phi\theta}^\theta = \frac{b^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + b^2)} \quad (3.56c)$$

Seguindo, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura são dados por:

$$R_{rr} = \frac{-2b^2}{(r^2 + b^2)^2} \quad R = \frac{-2b^2}{(r^2 + b^2)^2} \quad (3.57)$$

Com esses resultados podemos obter o tensor de Einstein para a métrica de Ellis:

$$G_{tt} = \frac{-b^2}{(b^2 + r^2)^2} \quad (3.58a)$$

$$G_{rr} = \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2} \quad (3.58b)$$

$$G_{\theta\theta} = \frac{b^2}{b^2 + r^2} \quad (3.58c)$$

$$G_{\phi\phi} = \frac{b^2 \sin^2 \theta}{b^2 + r^2} \quad (3.58d)$$

E o resultado obtido pode ser resumido da seguinte maneira:

$$G_{ab} [{}^0 g_{ab}] = \frac{-b^2}{(r^2 + b^2)^2} n_a n_b + \frac{b^2}{(r^2 + b^2)^2} ({}^0 g_{ab} - n_a n_b) \quad (3.59)$$

em que  $n_a = (dr)_a$  é o vetor unitário na direção radial, e  ${}^0 g_{ab}$  é a métrica associada a 3.54 (a notação escolhida é justificada pelo que vem a seguir e pelo que foi desenvolvido na seção anterior).

Estamos interessados em realizar a perturbação escalar da métrica de interesse, para isso devemos resolver a equação de Klein-Gordon. Sendo assim, considere a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo:

$$\nabla^2 \Phi = \mu^2 \Phi \quad (3.60)$$

Em que  $\nabla^2$  é o operador de Laplace-Beltrami definido pela seguinte relação:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \quad (3.61)$$

Onde  $g$  é o determinante da métrica, que para o caso de interesse vale  $-(r^2 + b^2)^2 \sin^2 \theta$ . Sendo a representação da métrica covariante uma matriz diagonal, o inverso da métrica também o será e sua relação é simples, dada por:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left( -1, 1, \frac{1}{(r^2 + b^2)}, \frac{1}{(r^2 + b^2) \sin^2(\theta)} \right) \quad (3.62)$$

Assim, utilizando as expressões acima, encontramos que o operador de Laplace-Beltrami tem o seguinte formato:

$$\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( f(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{f(r)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.63)$$

Sendo  $f(r) = r^2 + b^2$ . Logo, podemos escrever para o campo escalar massivo:

$$\nabla^2 \Phi = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( f(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{f(r)} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] \Phi = \mu^2 \Phi \quad (3.64)$$

Ao fazer a seguinte identificação padrão:  $\Phi = e^{-i\omega t} R(r) Y_{ml}(\theta, \phi)$ , podemos prosseguir com a separação da equação. Substituindo em 3.64 ficamos com:

$$\left[ \frac{1}{r^2 + b^2} \frac{d}{dr} (r^2 + b^2) \frac{d}{dr} + \omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2 + b^2} \right] R(r) = 0 \quad (3.65)$$

Para a equação radial, em que fizemos  $\mu = 0$ . Se quisermos recuperar a dependência de massa basta fazer  $\omega^2 \rightarrow \omega^2 - \mu^2$ .

A equação (3.65), mediante uma transformação apropriada, pode ser posta na forma canônica da equação confluente de Heun, dada por:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left( \frac{1 - \theta_0}{z} + \frac{1 - \theta_1}{z - z_0} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \left( \frac{1}{4} + \frac{\theta_*}{2z} + \frac{z_0 c_t}{z(z - z_0)} \right) \right] y(z) = 0 \quad (3.66)$$

Basta substituir  $z = -2\omega(r - ib)$  em (3.65). Feito isso notamos também que os parâmetros para a equação radial são dados por:

$$\theta_0 = \theta_1 = \theta_* = 0, \quad z_0 = 4b\omega, \quad z_0 c_t = l(l+1). \quad (3.67)$$

Como dito na seção anterior, um dos métodos que pode ser utilizado para encontrar os MQN é a partir da equação de Heun. A equação de Heun é uma generalização da equação hipergeométrica, caracterizada por dois pontos singulares regulares e um ponto singular irregular no infinito<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> A discussão sobre as características dos pontos singulares e suas classificações será feita no capítulo 4.

As condições de contornos apropriadas para tratar do problema de espalhamento devem levar em consideração a ideia de que estamos particularmente interessados em “mergulhar” por dentro do buraco de minhoca, já que o buraco de minhoca tratado no presente trabalho faz parte da categoria especial dos “transponíveis”, caracterizado especialmente pela ausência de singularidade e de um tamanho mínimo para o sistema dado por  $r = b$ , de acordo com as ideias expostas em (25) e as discussões feitas na subseção 2.5.

Levando isso em consideração, as condições de contorno a serem impostas serão:

$$R(r) \approx \begin{cases} Te^{-i\omega r}, & r \rightarrow -\infty \\ e^{-i\omega r} + Re^{i\omega r}, & r \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.68)$$

Essas condições de contorno representam uma onda de amplitude unitária vindo de  $+\infty$  dando origem a uma onda refletida de amplitude  $R$  que retorna ao  $+\infty$  e uma onda transmitida de amplitude  $T$  que passa pelo buraco de minhoca em direção a  $-\infty$ . Devido ao formato da métrica a coordenada radial admite valores no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ .

Dada sua relevância astrofísica, é importante também considerar as condições de contorno para os modos quase-normais, que correspondem a perfis localizados de energia ao redor do buraco de minhoca caso a parte imaginária de  $\omega$  seja menor que zero ( $\text{Im } \omega < 0$ ), lembrando que essa condição impõe a parte imaginária garante que os perfis localizados de energia não irão crescer exponencialmente tornando a métrica instável e consequentemente anulando sua relevância no contexto astrofísico observational. As condições para os MQN são dadas por:

$$R(r) \approx \begin{cases} e^{i\omega r}, & r \rightarrow -\infty, \\ e^{-i\omega r}, & r \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.69)$$

Tendo as condições de contorno em mãos e bem definidas o próximo passo é prosseguir com a perturbação da métrica 3.54, seguindo uma abordagem semelhante à desenvolvida para a métrica de Schwarzschild nas seções anteriores do presente capítulo.

### 3.4.1 Perturbação axial da métrica de Ellis

Como citado no início do presente capítulo e na subseção 3.2, as duas abordagens principais na teoria da perturbação métrica da relatividade geral são a de Regge-Wheeler e Newman-

Penrose. A abordagem que será aplicada na perturbação da métrica de Ellis será a de Regge-Wheeler, caracterizada por ser uma perturbação na própria métrica.

O desenvolvimento a seguir toma por base a exposição do capítulo 4, seção 24 de (20), em que é feita a perturbação axial da métrica de Schwarzschild, que também foi exposta no presente capítulo na subseção 3.3, com a diferença de que aqui estamos interessados em, ao ter a equação radial em mãos, transformá-la através de uma mudança de coordenadas em uma equação de Heun.

Seguindo o que é exposto e adaptando para nossos propósitos, começamos definindo a seguinte 1-forma:

$$\sigma_a = e^{-i\omega t + im\phi} (q_t(r, \theta)(dt)_a + q_r(r, \theta)(dr)_a + q_\theta(r, \theta)(d\theta)_a) \quad (3.70)$$

que será a fonte da perturbação. Inserindo-a na métrica original ficamos com o seguinte:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta(d\phi + \sigma)^2) \quad (3.71)$$

O desacoplamento das equações linearizadas não segue o mesmo caminho que em (20), em última análise as equações de campo dependem da matéria que compõe o buraco de minhoca. É importante ressaltar que o buraco de minhoca de Ellis não representa a solução das equações de campo de Einstein para o caso estático e esfericamente simétrico no vácuo. Pelo teorema de Birkhoff (uma discussão e prova do teorema podem ser encontrados no apêndice B de (18)) a única solução admitida com essas características é a de Schwarzschild, sendo assim, a métrica de Ellis como solução das equações requer a presença de matéria, e consequentemente, a forma que a solução toma depende das propriedades e características desta última. Baseado na forma do tensor de estresse-energia (25), vamos assumir que os coeficientes em 3.59, tendo a interpretação de pressão e densidade de energia, são mantidos fixos, enquanto os componentes de  $g_{ab}$  no sistema particular de coordenadas pode flutuar.<sup>8</sup>

Em (43) uma abordagem diferente é sugerida, é posicionado um campo dinâmico particular, composto por uma superposição de um campo eletromagnético e “poeira” com densidade de energia negativa permitindo uma generalização do modelo.

Resumindo, vamos assumir que o tensor de Einstein associado à métrica perturbada 3.71 satisfaz a mesma forma tensorial que 3.59:

<sup>8</sup> Sendo assim, o procedimento apresentado aqui toma um caminho diferente daquele apresentado em (25). Lá, os buracos de minhoca transponíveis tem a forma de sua métrica definida a priori, enquanto a forma do tensor de estresse-energia deve ser ajustado afim de satisfazer as condições requeridas para a “transponibilidade”.

$$G_{ab}[g_{ab}] = -\frac{b^2}{(r^2 + b^2)^2} n_a n_b + \frac{b^2}{(r^2 + b^2)^2} (g_{ab} - n_a n_b) \quad (3.72)$$

Onde, novamente,  $n_a = (dr)_a$  e agora  $g_{ab}$  representa a métrica perturbada.

Seguindo o que foi exposto na subseção 3.2.1, o objetivo é realizar a perturbação da métrica e expandir em primeira ordem para as funções  $q_t$ ,  $q_r$  e  $q_\theta$ . Focando em duas equações relevantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 + b^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial q_r}{\partial \theta} - \frac{\partial q_\theta}{\partial r} \right) - i\omega \frac{\partial q_t}{\partial r} + \frac{3}{r^2 + b^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left( \frac{\partial q_r}{\partial \theta} - \frac{\partial q_\theta}{\partial r} \right) + \\ + \omega^2 q_r = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para a componente  $G_{r\phi}$  e:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial q_r}{\partial \theta} - \frac{\partial q_\theta}{\partial r} \right) + i\omega \frac{\partial q_t}{\partial \theta} + \frac{2r}{r^2 + b^2} \left( \frac{\partial q_r}{\partial \theta} - \frac{\partial q_\theta}{\partial r} \right) - \omega^2 q_\theta = 0. \quad (3.74)$$

Para a componente  $G_{\theta\phi}$ . As outras equações colocam  $q_t$  em termos de  $q_r$ ,  $q_\theta$ ,  $\partial_r q_r$  e  $\partial_\theta q_\theta$ , de maneira que não faremos uso delas.

A partir de agora a abordagem será semelhante à exposta para a perturbação axial da métrica de Schwarzschild. Definindo  $Q(r, \theta)$  tal que:

$$Q(r, \theta) = \frac{1}{(r^2 + b^2) \sin \theta} \left( \frac{\partial q_r}{\partial \theta} - \frac{\partial q_\theta}{\partial r} \right). \quad (3.75)$$

Derivando a equação 3.73 em relação a  $\theta$  e a equação 3.74 em relação a  $r$ , somando-as e utilizando a equação anterior 3.75, ficamos com:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{(r^2 + b^2)^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( (r^2 + b^2)^3 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{(r^2 + b^2) \sin^5 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^5 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] + \omega^2 Q(r, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Que pode ser separada em uma parte radial e uma parte angular mediante a seguinte substituição:

$$Q(r, \theta) = \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_l^2(\cos \theta) R(r) \quad (3.77)$$

Utilizando a substituição descrita encontramos a seguinte equação para a parte radial:

$$\left[ \frac{1}{(r^2 + b^2)^3} \frac{d}{dr} \left( (r^2 + b^2)^3 \frac{d}{dr} \right) + \omega^2 - \frac{(\ell - 2)(\ell + 3)}{r^2 + b^2} \right] R(r) = 0. \quad (3.78)$$

Que novamente representa uma equação de Heun confluente que pode ser posta em sua forma padrão através das seguintes trocas de variáveis:

$$z = -2i\omega(r + ib), \quad y(z) = (r^2 + b^2)^{-2}R(r), \quad (3.79)$$

Com os parâmetros da equação sendo dados por:

$$\theta_0 = \theta_1 = 2, \quad \theta_* = 0, \quad z_0 = 4b\omega, \quad z_0 c_t = (l - 1)(l + 2). \quad (3.80)$$

O valor de  $l$  foi ajustado de forma que o parâmetro acessório recupere o valor no espaço plano para o autovalor  $(l - s)(l + s + 1)$  para  $s = 2$  em 3.78.

As equações radiais 3.65 e 3.78 serão, seguindo as abordagens expostas na literatura, as utilizadas no estudo numérico dos coeficientes de monodromia para a equação de Heun a ela associada, tendo por base a teoria das deformações isomonodrômicas desenvolvida no capítulo 4.

### 3.5 CONCLUSÃO

Nesta seção foram expostos os principais tópicos que rondam a teoria da perturbação no contexto da relatividade geral, desde seu surgimento com o seminal artigo de Regge e Wheeler, até seus aperfeiçoamentos com trabalhos recentes no estudo das questões de estabilidade sobre perturbações lineares e não-lineares, tópico central a ser discutido garantindo a relevância física das soluções obtidas para as equações de campo. Foram descritos também a importância que os modos quase-normais tem na descrição dos mais diversos sistemas gravitacionais, dado que são frequências características do objeto, independem da perturbação que o acometem. Foram apresentados diversos métodos para sua obtenção, dando uma atenção especial para o método WKB que neste capítulo foi aplicado à métrica de Schwarzschild, sendo brevemente discutido também o método isomonodrômico que será desenvolvido no capítulo 4 e aplicado à métrica de Ellis para estudo dos coeficientes de monodromia no capítulo 5. Percebeu-se também que diante de perturbações escalares e gravitacionais, a métrica de Ellis dá origem a equações de Heun palco principal dos dois capítulos seguintes.

## 4 TEORIA DAS DEFORMAÇÕES ISOMONODRÔMICAS

### 4.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A FÍSICA

A física enquanto ciência busca modelar os mais diversos fenômenos da natureza a partir de relações matemáticas. As mais famosas dessas relações são as equações diferenciais, que se fazem presentes em todas as áreas da física, desde mecânica, termodinâmica e eletromagnetismo até relatividade geral, teoria quântica de campos em espaços curvos e teoria de campos conformes.

Um grande número de problemas, quando formulados matematicamente, conduzem a equações diferenciais parciais de segunda ordem que podem ser divididas em grupos nomeados de: equações *parabólicas*, *hiperbólicas* e *elípticas*. Como exemplo de equação parabólica temos a equação do calor  $K\nabla^2\psi = (\partial\psi/\partial t)$ , como exemplo de equação elíptica temos a equação de Laplace-Poisson  $D^{(2)}\psi = g(x, y)$ <sup>1</sup>, como equação hiperbólica temos a equação de onda  $\nabla^2\psi = (\partial^2\psi/\partial t^2)/c^2$ . Na busca por soluções destas equações, na grande maioria das vezes recorre-se ao método de separação de variáveis, o mesmo método que nos permitiu nos capítulos anteriores separar a parte angular da parte radial nas perturbações métricas. O método de separação de variáveis permite que o problema de resolver uma equação diferencial parcial seja transformado em um problema de resolver equações diferenciais ordinárias, cuja obtenção da solução costuma ser mais simples. Em casos específicos, quando a equação admite separação, se a equação diferencial parcial é  $n$ -dimensional o método permite escrever  $n$  equações diferenciais ordinárias com a introdução de  $n - 1$  constantes de separação, que são determinadas a partir das condições de contorno do problema.

O problema da construção de soluções para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem foi parcialmente resolvido por Frobenius, através do método que leva o seu nome. O método consiste em admitir a existência<sup>2</sup>, na vizinhança de um ponto ordinário ou singular, de uma solução em formato de série:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+s} \quad (4.1)$$

Sendo  $x_0$  o ponto ordinário ou singular regular e  $a_n$  e  $s$  icógnitas a serem descobertas. Ao substituir a equação 4.1 na equação diferencial que se quer resolver, será obtida o que é

<sup>1</sup>  $D^{(2)} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$

<sup>2</sup> A questão referente à existência da solução foi parcialmente resolvida pelo teorema de Fuchs.

conhecida por *equação indicial*, a partir da qual é possível traçar relações de recorrência para os coeficientes  $a_n$ .

Dada a busca por soluções no entorno de pontos ordinários ou singulares regulares, é necessário que falemos brevemente sobre a classificação dos pontos de uma equação diferencial. Seja uma equação diferencial de segunda ordem de formato genérico:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \quad (4.2)$$

Temos o seguinte:

1. Ponto ordinário: Um ponto  $x_0$  é dito ordinário se na equação 4.2  $A(x_0) \neq 0$ . Assim  $p(x) = B(x)/A(x)$  e  $q(x) = C(x)/A(x)$  também podem ser desenvolvidos em série de potência.
2. Ponto singular regular: Quando  $x \rightarrow x_0$ ,  $p(x)$  e  $q(x)$  divergem, mas  $(x - x_0)p(x)$  e  $(x - x_0)^2q(x)$  permanecem finitos.
3. Ponto singular irregular: Quando  $x \rightarrow x_0$ ,  $p(x)$  e  $q(x)$  divergem e  $(x - x_0)p(x)$  ou  $(x - x_0)^2q(x)$  não permanecem finitos à medida que  $x \rightarrow x_0$ .

Embora as equações de interesse da dissertação (3.65 e 3.78) possam ser resolvidas a partir do método de Frobenius o problema principal que será tratado não é o da busca por uma solução, mas o estudo da equação de Heun a partir de seus parâmetros de monodromia, essencialmente, a resolução de um dos problemas de Riemann-Hilbert. A partir disso será implementada a análise numérica para o estudo dos MQN.

Para finalizar, a título de completude, algumas outras definições a respeito da teoria das variáveis complexas são importantes afim de garantir a fluidez do que vem a partir de agora:

Uma função  $f(z)$  é dita **analítica** em uma região  $U \subseteq \mathbb{C}$  se ela pode ser representada por uma **série de Taylor** convergente em torno de qualquer ponto de  $U$ . Isso implica:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

onde a série converge para  $f(z)$  em um raio de convergência positivo.

Uma função  $f(z)$  é dita **holomorfa** em  $U \subseteq \mathbb{C}$  se ela é diferenciável em todos os pontos de  $U$ . Isso significa que a derivada  $f'(z)$  existe no sentido da teoria das variáveis complexas:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

com  $\Delta z \in \mathbb{C}$ .

Uma função  $f(z)$  é dita **meromorfa** em uma região  $U$  se ela é holomorfa em  $U$ , exceto em um conjunto discreto de  $n$  pontos (os **polos**) onde  $f(z)$  diverge para  $\infty$  como  $(z - z_0)^{-n}$  com  $n$  inteiro. Isso significa que  $f(z)$  pode ser escrita como:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

onde  $g(z)$  e  $h(z)$  são funções holomorfas em  $U$ , e os zeros de  $h(z)$  correspondem aos polos de  $f(z)$ .

Neste sentido, funções analíticas e holomorfas são termos sinônimos, principalmente devido ao teorema que relaciona a analiticidade (diferenciabilidade com adição de satisfazer as condições de Cauchy-Riemann) de uma função com a existência da sua representação em série de potência (veja o teorema 23 na seção 11 do capítulo 8 de (44)). Assim, os termos podem aparecer de maneira alternada no presente trabalho.

## 4.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NO PLANO COMPLEXO

A forma geral de uma equação diferencial linear e homogênea é a seguinte:

$$\frac{d^N}{dz^N}y(z) + p_1(z)\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}y(z) + p_2(z)\frac{d^{N-2}}{dz^{N-2}}y(z) + \cdots + p_n(z)y(z) = 0. \quad (4.3)$$

em que os coeficientes racionais representados por  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são funções holomórfas  $z \in \mathbb{C}$ . A equação apresentada acima é genérica, e seu comportamento nos pontos singulares permite classificá-la como fuchsiana ou não-fuchsiana. Essa classificação é semelhante à discutida na seção anterior, mas agora generalizada para equações diferenciais de ordem  $N$ . Sendo os coeficientes da equação funções racionais, poderão apresentar polos. Um ponto singular é chamado de regular (ou singularidade regular) se a ordem do polo associado ao coeficiente for menor ou igual à ordem do coeficiente na equação diferencial. Caso contrário, será classificado como uma singularidade irregular. Equações diferenciais fuchsianas são aquelas que possuem apenas singularidades regulares. Por outro lado, equações com pelo menos uma singularidade irregular são chamadas de não-fuchsianas.

A equação 4.3 pode ser escrita na forma de um sistema linear:

$$\frac{d}{dz} \mathbf{Y}(z) = \mathbf{A}(z) \mathbf{Y}(z) \quad (4.4)$$

Sendo  $\mathbf{Y}(z)$  um vetor coluna ( $N \times 1$ ) e  $\mathbf{A}(z)$  é uma matriz  $N \times N$ . O vetor coluna  $\mathbf{Y}(z)$  tem o seguinte formato:

$$\mathbf{Y}(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_N(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(z) = A_{ij}(z), \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (4.5)$$

Em que  $y_n(z) = y'_{n-1}(z)$  e as entradas  $A_{ij}(z)$  da matriz  $\mathbf{A}(z)$  são funções holomorfas. É importante também falar da solução matricial fundamental:

$$\frac{d}{dz} \mathbf{Y}(z) = \mathbf{A}(z) \mathbf{Y}(z) \quad (4.6)$$

Cuja  $\mathbf{Y}(z)$  é uma matriz  $N \times N$  e é composta por  $N$  soluções linearmente independentes, de tal maneira que  $\mathbf{W}(\mathbf{Y}(z)) \neq 0$ , sendo  $\mathbf{W}(\mathbf{Y}(z))$  o Wronskiano. Note que para obter  $\mathbf{A}(z)$  basta multiplicar ambos os lados da equação anterior por  $\mathbf{Y}^{-1}(z)$ . Supondo  $\mathbf{A}(z)$  uma função holomórfica e olhando para seu conjunto de polos podemos estabelecer a classificação de Poicaré e determinar se o sistema matricial fundamental é ou não Fuchsiano. Se a função  $\mathbf{A}(z)$  possuir apenas polos simples (singularidades regulares) o sistema é dito Fuchsiano, se  $\mathbf{A}(z)$  depender de polos de ordem maior (singularidades irregulares) o sistema é dito não-Fuchsiano. Os polos podem ser classificados segundo o critério de Poicaré, polos simples são ditos de ranking  $r = 0$ , polos duplos de ranking  $r = 1$  e assim sucessivamente.

É possível generalizar de forma conveniente a expressão para a matriz  $\mathbf{A}(z)$  escrevendo-a em termos de seus pontos singulares, fazendo a distinção entre pontos “finitos” e pontos no “infinito”, todos eles referentes a polos que podem ser classificados segundo o critério de Poicaré citado acima. A expressão geral toma a seguinte forma (45):

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i} \frac{\mathbf{A}_{i,j}}{(z - z_i)^{j+1}} + \sum_{j=1}^{r_\infty} \mathbf{A}_{\infty,j} z^{j-1}. \quad (4.7)$$

Em que  $\mathbf{A}_{i,j}$  e  $\mathbf{A}_{\infty,j}$  são matrizes constantes  $N \times N$  e  $r_i$  e  $r_\infty$  representam o rank das singularidades.

A equação de Heun que é a de maior interesse no presente trabalho possui três singularidades, duas regulares e uma irregular em  $\infty$  de rank 1. Sendo assim, trabalharemos com 4.3 para o caso de  $N = 2$ :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy}{dz} + p_2(z)y(z) = 0.$$

Utilizando-se da forma 4.7 temos o seguinte:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \mathbf{A}(z)\Phi(z), \quad \mathbf{A}(z) = \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{A}_i}{(z - z_i)} + \mathbf{A}_\infty \quad (4.8)$$

Com  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{A}_\infty \in GL(2, \mathbb{C})$ . O domínio do sistema acima representado é dado por  $S : \mathbb{CP}^1 / \{z_1, z_2, \infty\}$ , em que  $\mathbb{CP}$  é a esfera de Riemann “perfurada”. Para o caso em questão é importante notar que  $\Phi(z)$  é composta por duas soluções linearmente independentes.

### 4.3 MONODROMIA

A continuação analítica é um conceito amplamente utilizado na teoria das variáveis complexas quando se pretende estender o domínio de uma função além de seu domínio inicial. Quando este processo é feito é possível que no “meio do caminho” encontre-se singularidades da função cuja continuação analítica está sendo feita. O comportamento de uma função quando é analiticamente continuada e encontra uma singularidade é descrito por sua *monodromia*. Dito isto, faz-se necessário iniciar a presente seção com a exposição do *teorema da monodromia* (46):

**Teorema 4.1:** Seja  $\mathbb{D}$  um domínio simplesmente conectado de uma função  $f(z)$  analítica em um disco  $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ . Se a função pode ser continuada analiticamente ao longo de dois contornos suaves quaisquer  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  para um ponto em  $\mathbb{D}$ , caso não haja pontos singulares contidos dentro de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , então o resultado da continuação analítica é único e a função  $f(z)$  é univalente<sup>3</sup>.

Sendo assim, caso no processo de continuação analítica encontre-se pontos singulares, o comportamento da função será descrito por sua monodromia, de tal forma que para resolver o sistema de interesse é fundamental saber o comportamento das soluções no entorno das

<sup>3</sup> O teorema pode ser estendido para o caso em que na região contida pelos contornos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  há singularidades isoladas, com  $f(z)$  possuindo uma série de Laurent na vizinhança de quaisquer dos pontos singulares (46)

singularidades e qual a continuação analítica para cada uma das soluções em termos das matrizes de monodromia.

Em geral, na matemática, os conceitos podem ser divididos como *globais* e *locais*, não é diferente no caso da monodromia. Uma monodromia é dita local quando descreve a mudança no sistema fundamental de soluções da equação diferencial por meio da continuação analítica feita ao entorno de um ponto singular regular. Já a monodromia global é responsável por descrever a mudança causada por uma continuação analítica global, que inclui o comportamento da função no entorno de todas as suas singularidades. A exposição feita a seguir toma por base os argumentos e desenvolvimentos feitos em (47).

Dito isto, seja a solução matricial fundamental  $\Phi(z)$  definida no domínio  $S : \mathbb{CP}^1$  que representa a esfera de Riemann, fixando um ponto  $p \in S$  ( $p$  pode ser um ponto qualquer), seja também um laço  $\gamma$  também definido no domínio acima que começa no ponto  $p$ . A continuação analítica de  $\Phi(z)$  por  $\gamma$ , que também é uma solução matricial fundamental, resultará em (47):

$$\Phi(z_\gamma) = \Phi(z)\mathbf{M}_\gamma \quad (4.9)$$

Em que  $\mathbf{M}_\gamma$  é a matriz de monodromia  $\in GL(2, \mathbb{C})$ . A matriz  $\mathbf{M}_\gamma$  é determinada de maneira única pela classe de homotopia de  $\gamma$  no domínio de definição. Disto, temos o seguinte mapa:

$$\rho : \pi_1(\mathbb{CP}^1, b) \rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \quad (4.10)$$

$$\gamma \rightarrow \mathbf{M}_\gamma$$

É interessante notar que um produto em  $\pi_1(\mathbb{CP}^1, b)$  é mapeado em um produto em  $GL(2, \mathbb{C})$ , pois:

$$\Phi(z_{\gamma_1\gamma_2}) = (\Phi(z_{\gamma_1}))(z_{\gamma_2}) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} &= \Phi(z_{\gamma_2})\mathbf{M}_{\gamma_1} \\ &= \Phi(z)\mathbf{M}_{\gamma_1}\mathbf{M}_{\gamma_2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Que resulta em  $\mathbf{M}_{\gamma_1\gamma_2} = \mathbf{M}_{\gamma_1}\mathbf{M}_{\gamma_2}$  e  $\rho(\gamma_1\gamma_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$ . O mapa  $\rho$  é um antimorfismo de grupos, chamado de *representação de monodromia* da equação diferencial em questão em relação ao seu sistema de soluções fundamentais. A imagem de  $\rho$  é um subgrupo de

$GL(2, \mathbb{C})$  é recebe o nome de *grupo de monodromia* da equação diferencial. A representação de monodromia é única e dada por (para o caso geral de  $p$  singularidades):

$$\rho = (\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_p) \quad (4.13)$$

Sendo  $p$  o número de pontos singulares da equação diferencial considerada.

A representação de monodromia depende da escolha da solução matricial fundamental.

Seja outra solução denominada por  $\tilde{\Phi}(z)$ , existe uma relação entre as duas soluções dada por  $\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z)C$ , sendo  $C \in GL(2, \mathbb{C})$  uma matriz  $N \times N$ . Assim, temos o seguinte:

$$\tilde{\Phi}(z_\gamma) = \Phi(z_\gamma)C \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} &= \Phi(z) \mathbf{M}_\gamma C \\ &= \tilde{\Phi}(z) C^{-1} \mathbf{M}_\gamma C \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sendo  $C^{-1} \mathbf{M}_\gamma C$  a matriz de monodromia de  $\tilde{\Phi}(z)$  associada à continuação analítica  $\tilde{\Phi}(z_\gamma)$ .

Para o caso da monodromia local, a classe de conjugação da matriz de monodromia  $\mathbf{M}_\gamma \in GL(2, \mathbb{C})$  definida como a monodromia local em  $z = a$ , sendo  $a$  um ponto singular, não depende da escolha solução matricial fundamental.

Voltando a considerar as equações diferenciais cujo coeficientes são funções racionais (com um número  $p$  de singularidades), o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{CP}^1, b)$ , sendo  $b$  um ponto fixo, tem a seguinte apresentação (47):

$$\pi_1(\mathbb{CP}^1, b) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_p = 1 \rangle \quad (4.16)$$

para cada  $i$  ( $0 \leq i \leq p$ ,  $\gamma_i$  é um  $(+1)$ -laço para  $a_j$ , sendo  $a_j$  um dos pontos singulares da equação diferencial. Veja a figura 4.3.

A solução matricial fundamental continua com a mesma forma:

$$\Phi(z_\gamma) = \Phi(z) \mathbf{M}_\gamma \quad (4.17)$$

Mas, pelo que foi exposto acima a respeito do produto de mapeamentos, a nova matriz de monodromia depois de percorridas todas as singularidades da equação diferencial toma a seguinte forma:

$$\mathbf{M}_\gamma = \prod_{i=0}^p \mathbf{M}_{\gamma_i} \quad (4.18)$$

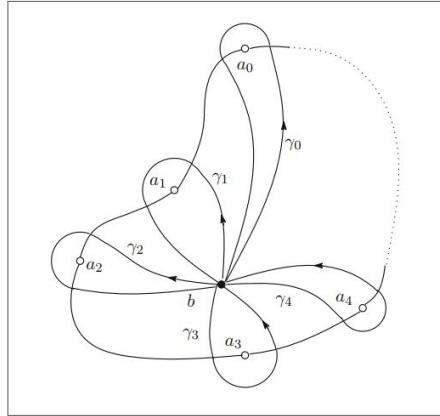


Figura 6 – Laços circuvizinhando individualmente as singularidades

**Fonte: Haraoka(47).**

com a representação de monodromia dada por:

$$\rho(\gamma) = \prod_{i=0}^p \rho(\gamma_i) \quad (4.19)$$

Para a tupla 4.13 é válida a seguinte relação:

$$M_p \dots M_1 M_0 = \mathbf{I} \quad (4.20)$$

Em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Percebe-se assim que as matrizes de monodromia formam a representação de um grupo (47).

Feitas todas estas considerações, é importante voltar ao ponto de partida. A equação de interesse para obtenção dos modos quase normais é a equação de Heun, que como dito anteriormente possui três singularidades, duas delas regulares e uma irregular. A forma geral para uma equação diferencial linear e homogênea do segundo grau é obtida fazendo  $N = 2$  em 4.3:

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy(z)}{dz} + p_2(z) = 0 \quad (4.21)$$

Que pode também ser posta na forma de um sistema linear:

$$\frac{d}{dz} \Phi(z) = \mathbf{A}(z) \Phi(z) \quad (4.22)$$

As singularidades da equação de Heun são, uma singularidade regular em  $z = 0$ , uma singularidade regular em  $z = z_0$  e uma singularidade irregular em  $z \rightarrow \infty$ . Levando isso em consideração e utilizando a expressão geral 4.7 que determina  $\mathbf{A}(z)$  em termos de matrizes constantes  $\mathbf{A}_{i,j}$  e  $\mathbf{A}_{\infty,j}$  e suas singularidades, para a equação de Heun temos o seguinte:

$$\mathbf{A}(z) = \frac{\mathbf{A}_0}{z} + \frac{\mathbf{A}_{z_0}}{z - z_0} + \mathbf{A}_\infty \quad (4.23)$$

Que é a forma que será utilizada nos desenvolvimentos posteriores.

#### 4.4 ISOMONODROMIA

O problema central tratado no contexto da teoria das deformações isomonodrômicas é encontrar sobre quais condições a monodromia associada a cada solução das equações diferenciais permanece invariante, quanto as posições das singularidades podem variar. Sendo assim, a abordagem que se seguirá a partir daqui é considerar a singularidade em  $z = z_0$  da equação de Heun confluente como móvel, substituindo-a pelo parâmetro  $t$ . Ficamos com o seguinte:

$$\mathbf{A}(z, t) = \frac{\mathbf{A}_0(t)}{z} + \frac{\mathbf{A}_t(t)}{z - t} + \mathbf{A}_\infty \quad (4.24)$$

Com o sistema matricial fundamental possuindo a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = \mathbf{A}(z, t) \Phi(z, t) \quad (4.25)$$

Essas expressões formam um sistema de Garnier.

A isomonodromia tem por base a simetria nas propriedades de monodromia do sistema matricial. A simetria, do ponto de vista físico, surge da equivalência entre as matrizes de monodromia e os laços de Wilson:

$$M_\gamma = P e^{\oint A(z) dz} \quad (4.26)$$

equivalente a  $\Phi(ze^{2\pi i})\Phi^{-1}$  para uma curva não contrátil  $\gamma$ .

No presente trabalho estamos interessados em um sistema matricial 2x2 com duas singularidades regulares ( $z = 0$  e  $z = z_0$ , que no contexto do presente desenvolvimento fizemos  $z_0 \rightarrow t$ , segundo as motivações expostas acima) e uma singularidade irregular ( $z = \infty$ ). Há uma variedade de sistemas 2x2 que essencialmente dão a mesma solução, sendo assim, podemos escolher uma que nos seja conveniente. A escolha que faremos é pela que diagonalize  $A_\infty$  o que equivale à substituição de  $\Phi(z, t)$  por  $G_\infty \Phi(z, t)$  de tal forma que  $G_\infty \Phi(z, t) G_\infty^{-1}$  toma a forma diagonal. Pelo mesmo procedimento, seja a seguinte transformação *s-homotópica*:

$$\Phi(z, t) \rightarrow z^{\phi_0} (z - t)^{\phi_t} e^{\phi_\infty z} \Phi(z, t) \quad (4.27)$$

tal transformação tem por efeito provocar uma modificação na matriz  $A_k$  proporcional à matriz identidade:

$$A_k \rightarrow A_k + \phi_k \mathbf{I} \quad (4.28)$$

Sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade. Essas transformações resultarão em uma forma mais “paltável” de trabalhar com 4.24 que será fundamental quando avançarmos para o cerne da teoria isomonodrônica. As transformações acima permitem-nos impor uma série de restrições nas matrizes  $A_k$ . Primeiro, consideremos, sem prejuízo do que vem sendo desenvolvido, que  $A_\infty$  é diagonal, em seguida, podemos fazer a transformação *s-homotópica* descrita acima para deixar  $A_\infty$  sem traço e  $A_0$  e  $A_t$ , ambas, com determinante nulo. Por fim, podemos promover o reescalonamento na variável  $z$  de tal forma que  $A_\infty$  tenha por autovalores  $\pm 1/2$ . Feito isso, é possível mostrar que os coeficientes  $p(z)$  de  $d/dz y_\pm$  e  $q(z)$  de  $y_\pm$  da equação:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} y_\pm(z) - \left( \text{Tr } \mathbf{A} + \partial_z(\log A_{12}) \right) \frac{d}{dz} y_\pm(z) + \\ + \left( \det \mathbf{A} - \partial_z A_{11} + A_{11} \partial_z(\log A_{12}) \right) y_\pm(z) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

retirada da primeira linha da solução fundamental  $\Phi(z, t)$ , tomam a seguinte forma:

$$p(z) = \frac{1 - \Theta_0}{z} + \frac{1 - \Theta_t}{z - t} - \frac{1}{z - \lambda}, \quad (4.30)$$

e

$$q(z) = -\frac{1}{4} - \frac{1 + \Theta_\star}{2z} - \frac{t H_t}{z(z - t)} + \frac{\lambda \mu}{z(z - \lambda)}, \quad (4.31)$$

em que  $\lambda$  é uma singularidade aparente, ou seja, não corresponde a polos no sistema em questão. Além disso são feitas as seguintes considerações:  $\Theta_0 = \text{Tr } A_0$ ,  $\Theta_t = \text{Tr } A_t$ , e  $\Theta_\star = 2 \text{Tr}(A_\infty(A_0 + A_t)) = \text{Tr}(\sigma_3(A_0 + A_t))$ . Por fim, temos o seguinte termo:

$$H_t = \frac{\lambda(\lambda - t)}{t} \left( \mu^2 - \left( \frac{\Theta_0}{\lambda} + \frac{\Theta_t - 1}{\lambda - t} \right) \mu - \frac{1}{4} - \frac{\Theta_\star + 1}{2\lambda} \right). \quad (4.32)$$

Cujo formato não é genérico, há uma conexão profunda entre deformações isomonodrômicas e sistemas Hamiltonianos (48). Feitas as considerações acima, podemos escrever  $A(z, t)$  da seguinte maneira:

$$A(z, t) = \left( \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} \right) \Phi^{-1}(z, t) = \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{A_0}{z} + \frac{A_t}{z - t} \quad (4.33)$$

com

$$\det\{A_0\} = \det\{A_t\} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Em que  $\sigma_3$  é uma das matrizes de Pauli e se encaixa perfeitamente nas restrições citadas mais acima para a  $A_\infty$ .

A partir de agora focaremos nossa atenção no formato dado por 4.33. O objetivo da teoria isomonodrômica é que a representação de monodromia para a 4.33 seja invariante para qualquer mudança no parâmetro  $t$ . Isso é possível desde que  $\Phi(z, t)$  satisfaça o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = A(z, t) \Phi(z, t), \\ \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = B(z, t) \Phi(z, t), \end{cases} \quad (4.35)$$

e pela condição de curvatura nula:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial B(z, t)}{\partial z} + [A(z, t), B(z, t)] = 0.$$

temos que a matriz  $2 \times 2$   $B(z, t)$  toma a seguinte forma:

$$B(z, t) = -\frac{A_t(t)}{z - t}$$

que satisfaz a condição de manutenção do valor das matrizes de monodromia para qualquer variação do parâmetro  $t$ . Pela condição de curvatura nula exposta acima, são obtidas as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = -\frac{1}{t} [A_0, A_t], \quad \frac{\partial A_t}{\partial t} = \frac{1}{2} [\sigma_3, A_t] + \frac{1}{t} [A_0, A_t] \quad (4.36)$$

Que recebem o nome de *equações de Schlesinger*. Tais equações podem ser vistas como um sistema completamente integrável no sentido clássico: o fluxo gerado por  $t$  preserva todos os dados monodrômicos e, portanto, a evolução é inteiramente determinada pelas condições iniciais impostas a  $A_0$ ,  $A_t$  e  $\sigma_3$ . Sendo um sistema integrável, as equações 4.36 podem ser vistas como a condição de integrabilidade que garante a existência da função  $\tau_V$  de Painlevé:

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \tau_V = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_3 A_t) + \frac{1}{t} \operatorname{Tr}(A_0 A_t). \quad (4.37)$$

O sistema 4.36 possui ainda as seguintes constantes de movimento:

$$\operatorname{Tr} A_0 = \Theta_0, \quad \operatorname{Tr} A_t = \Theta_t, \quad \operatorname{Tr}(\sigma_3(A_0 + A_t)) = \Theta_\star.$$

além de que temos também  $\det\{A_0\} = \det\{A_t\} = 0$ . Dada a importância que a função  $\tau_V$  tem no presente trabalho, é pertinente expor sua expansão em termos dos coeficientes de monodromia  $\sigma$  e  $\eta$ . Tal expansão, para  $t$  pequeno, foi obtida por M.Jimbo em (49) e tem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \tau_V(\Theta_0, \Theta_t, \Theta_\star; \sigma, \eta; t) = & C_V(\vec{\Theta}; \sigma) t^{\frac{1}{4}(\sigma^2 - \Theta_0^2 - \Theta_t^2)} e^{\frac{1}{2}\Theta_t t} \left( 1 - \left( \frac{\Theta_t}{2} - \frac{\Theta_\star}{4} + \frac{\Theta_\star(\Theta_0^2 - \Theta_t^2)}{4\sigma^2} \right) t \right. \\ & - \frac{(\Theta_\star + \sigma)((\sigma + \Theta_t)^2 - \Theta_0^2)}{8\sigma^2(\sigma - 1)^2} \kappa_V^{-1} t^{1-\sigma} - \frac{(\Theta_\star - \sigma)((\sigma - \Theta_t)^2 - \Theta_0^2)}{8\sigma^2(\sigma + 1)^2} \kappa_V t^{1+\sigma} \\ & \left. + \mathcal{O}(t^2, |t|^{2\pm 2\operatorname{Re} \sigma}) \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

em que  $\{\vec{\Theta}\} = \{\Theta_0, \Theta_t, \Theta_\star\}$ . O coeficiente  $\sigma$  é tomado em seu ramo principal que corresponde a  $-1 < \operatorname{R}(\sigma) < 1$  e é definido a menos de um número par.  $C_V$  nada mais é que uma constante complexa e  $\kappa_V$  é dado por:

$$\kappa_V = e^{i\pi\eta} \frac{\Gamma(1-\sigma)^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_\star + \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_t + \Theta_0 + \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_t - \Theta_0 + \sigma)\right)}{\Gamma(1+\sigma)^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_\star - \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_t + \Theta_0 - \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_t - \Theta_0 - \sigma)\right)}. \quad (4.39)$$

Feitas as considerações acima, o próximo passo é tratar do problema de *Riemann-Hilbert* que orbita a isomonodromia, que consiste em, dadas as soluções para:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left( \frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_t}{z-t} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \left( \frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{tc_t}{z(z-t)} \right) \right] y(z) = 0. \quad (4.40)$$

encontrar os coeficientes de monodromia  $\{\sigma, \eta\}$  como função dos parâmetros da equação diferencial  $\{t, c_t, \theta_0, \theta_t, \theta_\star\}$ . A relação entre  $\{\vec{\Theta}, \vec{\theta}\}$  é a seguinte:

$$\Theta_0 = \theta_0, \quad \Theta_t = \theta_t - 1, \quad \Theta_\star = \theta_\star - 1; \quad (4.41)$$

Na resolução do problema de *Riemann-Hilbert* impõem-se à  $\tau_V$  as seguintes condições:

$$\begin{cases} \tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \log \tau_V(\{\theta^-\}; \sigma - 1, \eta; t) = c_t + \frac{\theta_0(\theta_t - 1)}{2t}. \end{cases} \quad (4.42)$$

em que  $\{\theta^{-1}\} = \{\theta_0, \theta_t - 1, \theta_* + 1\}$ . A primeira condição é a equação de Toda em sua versão da Painlevé V (50), a segunda define o parâmetro acessório  $c_t$  em termos da derivada logarítmica da transcedente  $\tau_V$ . A expansão para a  $\tau_V$  para  $t$  pequeno já foi exposta acima, há também a possibilidade de expressá-la por meio do *determinante de Fredholm*, os resultados principais foram deixados para o apêndice B.

O presente trabalho tem como foco o buraco de minhoca de Ellis descrito pela métrica 3.54 e com condições de contorno para o problema do espalhamento dadas por 3.68 e para os modos quase-normais dadas por 3.69. No entanto, para fins de desenvolvimento, consideremos o problema do espalhamento para um buraco negro e suas condições físicas pertinentes. A solução assintótica de Frobenius para  $z = \infty$  e  $z = t$  possuem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} y_{t,+}(z) &= (z - t)^{\theta_t} (1 + \mathcal{O}(z - t)), \\ y_{t,-}(z) &= (z - t)^0 (1 + \mathcal{O}(z - t)). \end{aligned} \quad (4.43)$$

para  $z = t$ , já para  $z = \infty$ :

$$\begin{aligned} y_{\infty,+}(z) &= e^{\frac{1}{2}z} z^{-\frac{1}{2}\Theta_*} (1 + \mathcal{O}(1/z)), \\ y_{\infty,-}(z) &= e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}\Theta_*} (1 + \mathcal{O}(1/z)). \end{aligned} \quad (4.44)$$

É importante lembrar que as condições de contorno para um buraco negro excluem ondas saindo do horizonte de eventos e ondas vindo do infinito. As soluções expostas acima estabelecem um mapa entre o horizonte externo  $z = t$  e o infinito  $z = \infty$ .

As soluções de Frobenius expostas acima são soluções para o sistema matricial 2x2 4.25 e podem ser relacionadas entre si a partir da matriz de conexão  $C_*$ , que possui o seguinte formato:

$$C_* = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta'_{z_0} - e^{\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta_{z_0} & -e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta_\infty \zeta'_{z_0} + e^{\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta'_\infty \zeta_{z_0} \\ e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} - e^{\frac{\pi i}{2}\eta} & -e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta'_\infty + e^{\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta_\infty \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Sendo  $\eta$  uma quantidade invariante definida por  $e^{\pi i \eta} = r_i/r_o$  em que  $r_o$  é um número complexo arbitrário que surge nas considerações das soluções aproximadas para o sistema

matricial da equação confluente de Heun e  $r_i$  é um parâmetro complexo genérico que surge no desenvolvimento do problema de estabelecer as matrizes de conexão. É importante ter em mente que  $\sigma$  e  $\eta$ , juntos, descrevem as propriedades de monodromia da solução. Dado a expressão acima para a matriz de conexão temos o seguinte:

$$\begin{pmatrix} \rho_{\infty,+} y_{\infty,+}(z) \\ \rho_{\infty,-} y_{\infty,-}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta'_{z_t} - e^{\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta_{z_t} & -e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta_{\infty} \zeta'_{z_t} + e^{\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta'_{\infty} \zeta_{z_t} \\ e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} - e^{\frac{\pi i}{2}\eta} & -e^{-\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta'_{\infty} + e^{\frac{\pi i}{2}\eta} \zeta_{\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{z_t,+} y_{z_t,+}(z) \\ \rho_{z_t,-} y_{z_t,-}(z) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Com:

$$\begin{aligned} \zeta_{z_t} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 - \sigma)\right), \\ \zeta'_{z_t} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 + \sigma)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 + \sigma)\right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned} \zeta_{\infty} &= e^{\frac{\pi i}{2}\sigma} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_{\infty} + \sigma)\right), \\ \zeta'_{\infty} &= e^{-\frac{\pi i}{2}\sigma} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_{\infty} - \sigma)\right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

$\rho_{\infty,\pm}$  e  $\rho_{z_t,\pm}$  são constantes de normalização que podem ser calculadas via formulas de conexão (51), mas no nosso caso a derivação da equação confluente de Heun veio a partir do operador de Laplace-Beltrami para perturbações escalares e gravitacionais, e por isso é mais fácil usar a conservação da corrente afim de normalizar as soluções. Para o caso do problema dos modos quase-normais (ainda para um buraco negro) não seria necessário a normalização, visto que a busca seria por soluções sem fluxo de energia saindo do horizonte de eventos e sem fluxo de energia vindo do infinito. Isso impõe à matriz de conexão entre os dois pontos singulares  $z = t$  e  $z = \infty$  que ela seja *triangular inferior*. Sendo assim, a quantidade invariante definida mais acima ( $e^{\pi i \eta} = r_i/r_o$ ), toma a seguinte forma:

$$e^{\pi i \eta} = \frac{\zeta_{\infty} \zeta'_{z_t}}{\zeta'_{\infty} \zeta_{z_t}} = e^{-\pi i \sigma} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_{\star} + \sigma)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 + \sigma)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 + \sigma)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_{\star} - \sigma)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 - \sigma)\right)} \quad (4.49)$$

O que nos permite escrever  $\eta$  em termos de  $\sigma$  e dos parâmetros de monodromia  $\{\theta\} = \{\theta_0, \theta_t, \theta_{\star}\}$ , reduzindo o número de parâmetros na expansão da  $\tau_V$  4.38.

Na proposta da resolução do problema de encontrar os modos quase-normais, faz-se necessário também encontrar uma expressão conveniente que nos dê o outro coeficiente de

monodromia  $\sigma$ . Tal expressão pode ser obtida através com a ajuda do parâmetro acessório associado à equação de Heun confluente. Uma expansão para  $tc_t$  pode ser obtida através da solução em série (semelhante ao método de Frobenius descrito em 4.1 para a equação diferencial), a partir dela obtém-se uma relação de recorrência e é possível encontrar a expansão para  $c_t$  por meio do método da fração continuada. Os detalhes serão omitidos, o leitor interessado pode encontrá-los em (52). O resultado é:

$$\begin{aligned}
tc_t = & \frac{(\sigma - 1)^2 - (\theta_0 + \theta_t - 1)^2}{4} + \frac{\theta_*[\sigma(\sigma - 2) + \theta_t^2 - \theta_0^2]}{4\sigma(\sigma - 2)} t + \\
& + \left[ \frac{1}{32} + \frac{\theta_*^2(\theta_t^2 - \theta_0^2)^2}{64} \left( \frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{(\sigma - 2)^3} \right) + \frac{(1 - \theta_*^2)(\theta_0^2 - \theta_t^2)^2 + 2\theta_*^2(\theta_0^2 + \theta_t^2)}{32\sigma(\sigma - 2)} \right. \\
& \left. - \frac{(1 - \theta_*^2)[(\theta_0 - 1)^2 - \theta_t^2][(\theta_0 + 1)^2 - \theta_t^2]}{32(\sigma + 1)(\sigma - 3)} \right] t^2 + \left[ \frac{\theta_*^3(\theta_0^2 - \theta_t^2)^3}{256} \left( \frac{1}{\sigma^5} - \frac{1}{(\sigma - 2)^5} \right) \right. \\
& \left. - \frac{4(\theta_0^2 - \theta_t^2)^3\theta_* - (5(\theta_0^6 - \theta_t^6) + 8\theta_t^4 + 15\theta_0^2\theta_t^4 - \theta_0^4(8 + 15\theta_t^2))\theta_*^3}{1024} \left( \frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{(\sigma - 2)^3} \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\theta_t^2 - \theta_0^2)\theta_*}{24576} \left[ 64 + 80\theta_*^2 + 8\theta_t^2(20 - 29\theta_*^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + (\theta_0^4 + \theta_t^4)(125\theta_*^2 - 116) + \theta_0^2(160 - 232\theta_*^2 + \theta_t^2(232 - 250\theta_*^2)) \right] \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma - 2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{[(\theta_0 - 1)^2 - \theta_t^2](\theta_0^2 - \theta_t^2)[(\theta_0 + 1)^2 - \theta_t^2]\theta_*(1 - \theta_*^2)}{96(3 - \sigma)(1 + \sigma)} \right. \\
& \left. - \frac{[(\theta_0 - 2)^2 - \theta_t^2](\theta_0^2 - \theta_t^2)[(\theta_0 + 2)^2 - \theta_t^2]\theta_*(4 - \theta_*^2)}{4096(4 - \sigma)(2 + \sigma)} \right] t^3 + \mathcal{O}(t^4).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Tal expressão concorda com uma das condições impostas à transcedente  $\tau_V$  à ordem  $t^n$ , e computacionalmente falando, encontrar o parâmetro acessório via representação em série é menos exigente que pela derivada logarítmica da  $\tau_V$ .

Voltando ao propósito original de encontrar uma forma de obter os modos quase-normais, em princípio, a expansão da  $\tau_V$  dada por 4.38 nos fornece  $\sigma$  e  $\eta$  em função dos parâmetros da equação de Heun  $\{\theta\}$ , ou seja, ela pode ser utilizada para obter  $\eta$  em termos de  $\{\sigma, t, \{\theta\}\}$  e podemos usar a expressão para expansão do parâmetro acessório  $c_t$  para obter  $\sigma$  em termos de  $\{\theta\}$ . Olhando para a 4.38 é possível perceber que ela é meromórfica<sup>4</sup> em termos de  $\kappa_V t^\sigma$ , ou seja, fazendo uso da primeira condição imposta à  $\tau_V$  em 4.42 é possível uma série para  $e^{i\pi\eta}$  em termos do parâmetro  $t$ . Assumindo novamente o ramo principal para  $\sigma$ , temos o seguinte:

<sup>4</sup> Para uma discussão sobre o que é uma função meromórfica veja a exposição feita na seção 4.1.

$$\Theta_V(\Theta; \sigma) e^{i\pi\eta} t_0^{\sigma-1} = \chi_V(\Theta; \sigma; t_0). \quad (4.51)$$

Que podemos expressar da seguinte maneira:

$$\Theta_V(\vec{\Theta}; \sigma) = \frac{\Gamma^2(2 - \sigma)}{\Gamma^2(\sigma)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\Theta_\star + \sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_\star - \sigma)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\Theta_t + \Theta_0 + \sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_t + \Theta_0 - \sigma)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\Theta_t - \Theta_0 + \sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\Theta_t - \Theta_0 - \sigma)\right)}. \quad (4.52)$$

Olhando para o outro lado da igualdade,  $\chi_V$  é analítica<sup>5</sup> desde que  $t$  seja pequeno, levando isso em consideração temos a seguinte expansão:

$$\begin{aligned} \chi_V(\{\theta\}; \sigma; t_0) = 1 + (\sigma - 1) \frac{\theta_\star(\theta_t^2 - \theta_0^2)}{\sigma^2(\sigma - 2)^2} t + \left[ \frac{\theta_\star^2(\theta_t^2 - \theta_0^2)^2}{64} \left( \frac{5}{\sigma^4} - \frac{1}{(\sigma - 2)^4} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{(\sigma - 2)^2} + \frac{2}{\sigma(\sigma - 2)} \right) - \frac{(\theta_t^2 - \theta_0^2)^2 + 2\theta_\star^2(\theta_t^2 + \theta_0^2)}{64} \left( \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{(\sigma - 2)^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{(1 - \theta_\star^2)(\theta_t^2 - (\theta_0 - 1)^2)(\theta_t^2 - (\theta_0 + 1)^2)}{128} \left( \frac{1}{(\sigma + 1)^2} - \frac{1}{(\sigma - 3)^2} \right) \right] t^2 + \mathcal{O}(t^3) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Através do desenvolvimento feito podemos juntar a expressão 4.49 na expressão 4.51. Utilizando a propriedade da função gamma:  $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi/\sin(\pi z)$  ficamos com:

$$\Theta_V(\{\theta\}, \sigma) e^{i\pi\eta} = -e^{-i\pi\sigma} \Theta_V(-\{\theta\}, \sigma). \quad (4.54)$$

Voltando novamente à 4.51, ficamos com:

$$-e^{-i\pi\sigma} \Theta_V(-\{\theta\}, \sigma) t_0^{\sigma-1} = \chi_V(\{\theta\}; \sigma; t_0) \quad (4.55)$$

A equação 4.55 é a dos modos quase-normais. Como dito acima podemos utilizar a equação 4.50 para escrever  $\sigma$  em termos dos parâmetros de monodromia, assim, o problema de encontrar os modos quase-normais através do método isomonodrômico e da resolução do mapa de *Riemann-Hilbert* encontra-se resolvido. Os resultados obtidos a partir da implementação numérica do que foi desenvolvido serão expostos no capítulo 5.

---

<sup>5</sup> Veja 4.1.

## 5 RESULTADOS E ANÁLISE NUMÉRICA

O presente capítulo é destinado à exposição dos resultados obtidos durante o curso de elaboração da dissertação. Na seção 5.1 faz-se a exposição do caminho até a obtenção da equação de tipo Schrödinger para o potencial efetivo do buraco de minhoca de Ellis, a partir da equação radial obtida no capítulo 3 para a perturbação escalar e gravitacional da métrica, seguindo com a análise qualitativa para a forma do potencial. Na seção 5.2 são expostas tabelas e gráficos referentes à implementação numérica do método isomonodrômico desenvolvido no capítulo 4, essencialmente, gráficos dos parâmetros de monodromia  $\sigma$  e  $\eta$  em função da quantidade adimensional  $b\omega$ , sendo  $b$  a “garganta” do buraco de minhoca. Na seção 5.3 são expostas perspectivas futuras sobre a utilização da implementação numérica na obtenção dos modos quase-normais e dos coeficientes de espalhamento para a métrica de interesse e são discutidos brevemente resultados já publicados na literatura utilizando a mesma implementação numérica (53) que tem por base a teoria isomonodrômica desenvolvida em 4 e a expansão para a  $\tau_V$  a partir do determinante de Fredholm exposta no apêndice B.

### 5.1 O POTENCIAL EFETIVO PARA A MÉTRICA DE ELLIS

No capítulo 3 foram expostos os principais resultados referente à perturbação da métrica de Schwarzschild. Houve a exposição dos principais resultados tanto para perturbações axiais, quanto para perturbações polares. Naquela oportunidade mostrou-se que após o efetivo desacoplamento das equações linearizadas, a parte radial, em ambos os casos, poderia ser colocada no formato da equação diferencial de Schrödinger:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + [\omega^2 - V(x)]\Psi(x) = 0. \quad (5.1)$$

E por consequência, podia-se obter um potencial efetivo que é fundamental na elucidação do comportamento físico das soluções.

Aqui faremos o mesmo procedimento, mas dessa vez utilizando a métrica de Ellis. Durante o desenvolvimento realizado no capítulo 3 a equação radial obtida para o caso da perturbação escalar ( $s = 0$ ) mostrou-se da seguinte maneira:

$$\left[ \frac{1}{r^2 + b^2} \frac{d}{dr} (r^2 + b^2) \frac{d}{dr} + \omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2 + b^2} \right] R(r) = 0 \quad (5.2)$$

Já a equação radial para o caso da perturbação gravitacional ( $s = 2$ ) apareceu com o seguinte formato:

$$\left[ \frac{1}{(r^2 + b^2)^3} \frac{d}{dr} \left( (r^2 + b^2)^3 \frac{d}{dr} \right) + \omega^2 - \frac{(\ell - 2)(\ell + 3)}{r^2 + b^2} \right] R(r) = 0. \quad (5.3)$$

E foi possível perceber que mediante uma transformação apropriada de coordenadas ambas poderiam ser postas na forma padrão da equação confluente de Heun:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left( \frac{1 - \theta_0}{z} + \frac{1 - \theta_1}{z - z_0} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \left( \frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{z_0 c_t}{z(z - z_0)} \right) \right] y(z) = 0 \quad (5.4)$$

Olhando para o formato de 5.2 e 5.3 é possível perceber uma forte semelhança entre as duas. Tal semelhança não é acidental, visto que ambas derivam do operador de Laplace-Beltrami (não sei se isso é uma justificativa razoável). Podemos unificar ambos os resultados interpolando-os em uma única equação radial:

$$\left[ \frac{1}{(r^2 + b^2)^{s+1}} \frac{d}{dr} \left( (r^2 + b^2)^{s+1} \frac{d}{dr} \right) + \omega^2 - \frac{(\ell - s)(\ell + s + 1)}{r^2 + b^2} \right] R_s(r) = 0. \quad (5.5)$$

Sendo  $s$  o spin referente ao tipo de perturbação executada, tendo  $s = 0$  para perturbações escalares e  $s = 2$  para perturbações gravitacionais.

De forma semelhante ao procedimento exposto no capítulo 3, é possível colocar a equação 5.5 na forma de uma equação de Heun confluente 5.4. Para isso, façamos a seguinte substituição:

$$y_s(z) = (r^2 + b^2)^{-s} R_s(r) \quad z = -2\omega(r - ib)$$

ficamos com:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left( \frac{1 - s}{z} + \frac{1 - s}{z - 4b\omega} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \left( \frac{1}{4} + \frac{(l + s)(l - s + 1)}{z(z - 4b\omega)} \right) \right] y_s(z) = 0 \quad (5.6)$$

Em que podemos fazer as seguintes identificações para os parâmetros:

$$\theta_0 = \theta_1 = s, \quad \theta_\star = 0, \quad z_0 = 4b\omega, \quad z_0 c_t = (\ell + s)(\ell - s + 1).$$

Voltando para a equação radial 5.5 que une ambas as perturbações, podemos escrevê-la no formato de uma equação de Schrödinger 5.1. Fazendo a substituição:

$$u_s(r) = (r^2 + b^2)^{(1+s)/2} R_s(r)$$

Ficamos com:

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r) \right] u_s(r) = k^2 u_s(r)$$

Onde o potencial efetivo é dado por:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2 + b^2} - \frac{(s^2 - 1)b^2}{(r^2 + b^2)^2} \quad (5.7)$$

Sendo  $s$  o spin da perturbação em questão. Abaixo, plotamos dois gráficos do potencial, um para o caso da perturbação escalar e outro para o caso da perturbação gravitacional. Nesse processo, foi de interesse fazer  $x = r/b$  e  $V = b^2 V_{\text{eff}}$ , já que a coordenada tartaruga  $r_* = r + 2M \ln(r/2M - 1)$ , para o caso da métrica de Ellis, toma a forma trivial  $r_* = r$ . Sendo assim, para a perturbação escalar temos o comportamento do potencial ilustrado na figura abaixo:

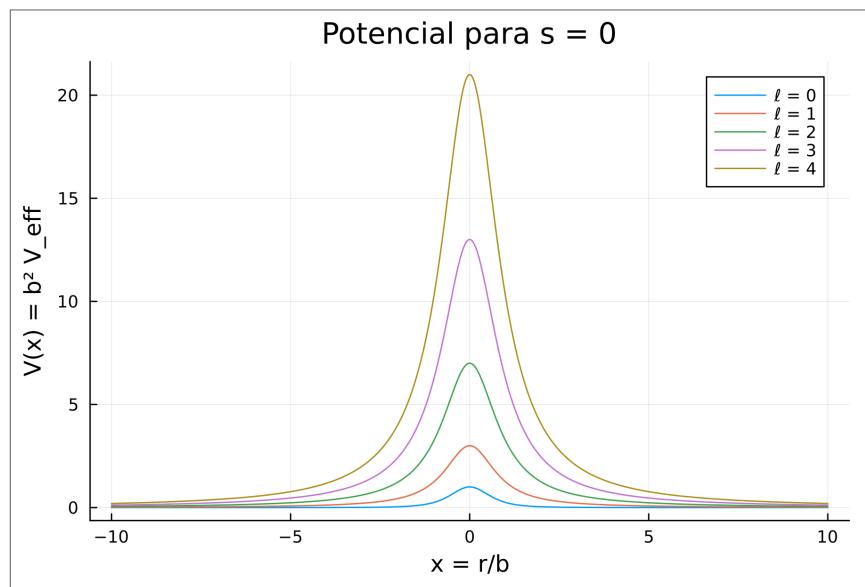


Figura 7 – Barreira de potencial da métrica de Ellis para perturbações escalares

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

E para a perturbação gravitacional temos:

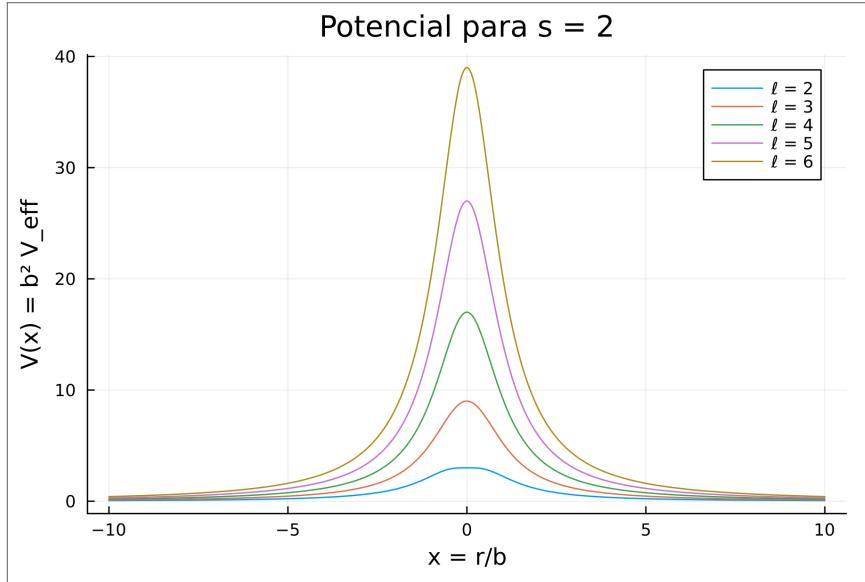


Figura 8 – Barreira de potencial da métrica de Ellis para perturbações gravitacionais

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

É possível notar a semelhança ilustrada nas imagens para ambos os casos, tal semelhança é esperada devido à forma do potencial 5.7. Em ambas as plotagens respeitou-se a condição de que  $l \geq s$ . Percebe-se também que há uma interpolação para  $r = 0$  e  $r \rightarrow \pm\infty$  (é importante lembrar que a coordenada radial estende-se para  $\pm\infty$ ) dado que o potencial nesses casos toma a seguinte forma:

$$V_{eff}(0) = \frac{l(l+1) - s^2 + 1}{b^2} \quad e \quad V_{eff}(\infty) = 0 \quad (5.8)$$

Da forma como o desenvolvimento foi feito até aqui percebe-se a possibilidade de tratar diferentes regimes físicos a partir de uma única equação, uma equação mestra, escolhendo o parâmetro desejado. Tal qual a equação mestra de Teukolsky(54) que resume em uma única equação os principais casos perturbativos para a métrica Kerr, a equação 5.5 também o faz. Ou seja, variando o parâmetro  $s$  recuperamos como caso especial os dois setores físicos de interesse, de tal forma que ambos estão unificados em uma única estrutura diferencial. Já a interpolação no contexto da descrição do potencial significa que a coordenada radial  $r$  conecta de maneira suave e contínua o potencial no “gargalo” ( $r = 0$ ) com seu valor no limite assintótico ( $r \rightarrow \pm\infty$ ).

Tratando ainda do potencial 5.7, percebe-se que ele possui um máximo para  $r = r_c$ , em que:

$$r_c^2 = \left( \frac{2(s^2 - 1)}{\ell(\ell + 1)} - 1 \right) b^2, \quad (5.9)$$

E o potencial, em seu valor máximo, toma a seguinte forma:

$$V_{\text{eff}}(r_c) = \frac{\ell^2(\ell + 1)^2}{4(s^2 - 1)b^2} \quad (5.10)$$

Abaixo, um gráfico do comportamento do potencial para seu valor máximo em ambos os casos perturbativos de interesse:

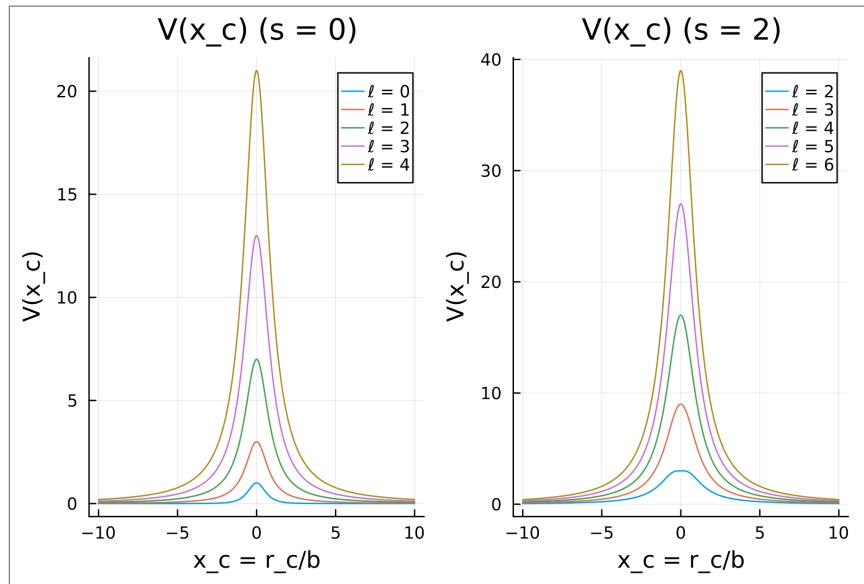


Figura 9 – Valor máximo para a barreira de potencial da métrica de Ellis para ambas as perturbações

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Nota-se novamente uma semelhança entre ambos os casos, como é esperado dada a interpolação descrita mais acima no texto.

Alguns comentários adicionais fazem-se necessários quanto ao perfil do potencial 5.7. Na janela física que é relevante  $l \geq s$ , tanto para  $s = 0$ , quanto para  $s = 2$  o potencial é não-negativo em todo o domínio e vai a zero nos limites assintóticos. Derivando o potencial e fatorando em  $r$  têm-se o seguinte:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{2r}{(r^2 + b^2)^3} \left[ -\ell(\ell + 1)(r^2 + b^2) + 2(s^2 - 1)b^2 \right]. \quad (5.11)$$

Sendo assim, os dois pontos críticos são  $r = 0$  e as soluções para a equação  $-\ell(\ell + 1)(r^2 + b^2) + 2(s^2 - 1)b^2 = 0$ , que retornam o  $r_c$  exposto anteriormente. Um máximo fora de  $r = 0$  exige que  $r_c^2 > 0$  (na direção de ambos os limites assintóticos), ou seja:

$$\frac{2(s^2 - 1)}{\ell(\ell + 1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow 2(s^2 - 1) > \ell(\ell + 1) \quad (5.12)$$

Para  $s = 0$  temos que  $2(s^2 - 1) < 0$ , de modo que  $r_c^2 < 0$  para todo  $\ell$ , sendo assim, não existe máximo real fora do gargalo  $r = 0$ . No caso de  $s = 2$  ficamos com  $6 > \ell(\ell + 1)$ , e a condição física é que  $\ell \geq 2$ , novamente, o ponto crítico real é apenas o gargalo. Portanto, em ambos os setores ( $s = 0$  e  $s = 2$  com  $\ell \geq s$ ), o potencial decresce de maneira monótona em  $|r|$  a partir de seu valor máximo que é atingido no gargalo.

A consequência disso é a ausência de estados ligados reais. O potencial nesse caso funciona como uma espécie de “barreira” positiva que é máxima no gargalo e vai a zero no limite assintótico, sendo incapaz de confinar os campos. Porém, a possibilidade da existência de estados de decaimento com a parte imaginária de  $\omega$  negativa não devem ser descartados. Esses perfis possuiriam decaimento exponencial com o tempo, respeitadas as condições de contorno expostas no capítulo 3. Tais perfis são os modos quase-normais.

Estabelecidos os principais detalhes a respeito do potencial para as perturbações escalares e gravitacionais, ponto fundamental em uma análise do problema do espalhamento, no próximo capítulo serão expostos os valores obtidos para os coeficientes de monodromia das equações confluentes de Heun de ambos os casos (perturbação escalar e perturbação gravitacional) fazendo uso de uma implementação numérica que tem por base o método isomonodrômico descrito na seção 4.4.

## 5.2 ANÁLISE NUMÉRICA DOS PARÂMETROS DE MONODROMIA

Os resultados apresentados nesta subseção tem por base a implementação numérica do método isomonodrômico desenvolvido no capítulo 4. A implementação numérica de tal método rendeu diversos resultados no cálculo dos modos quase-normais (55, 56), com um controle numérico mais suave bastante significativo próximo aos limites extremais dos buracos negros de Kerr e Reissner-Nordström. Os scripts relevantes podem ser encontrados no repositório (53).

Nesta seção faremos a exposição dos resultados obtidos para a parte real e imaginária dos parâmetros de monodromia  $\sigma$  e  $\eta$  em função de  $b\omega$ , sendo  $b$  o tamanho natural do sistema (a “garganta” do buraco de minhoca de Ellis) e  $\omega$  a frequência, que foi considerada extritamente positiva. O intervalo considerado para os parâmetros de monodromia correspondem ao ramo

principal, ou seja, a parte real de  $\sigma$  e a parte real de  $\eta$  estão entre  $[-1, 1]$ .

- Para  $s = 0$  e  $l = 0$  temos o seguinte:

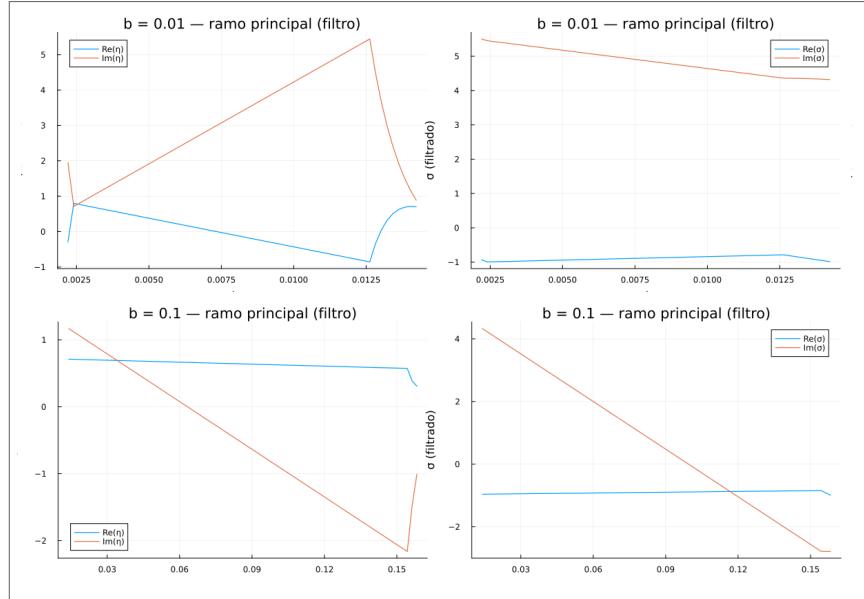


Figura 10 – Valores das partes real e imaginária de  $\sigma$  e  $\eta$  em função de  $b\omega$  para  $s = 0$  e  $l = 0$ .

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

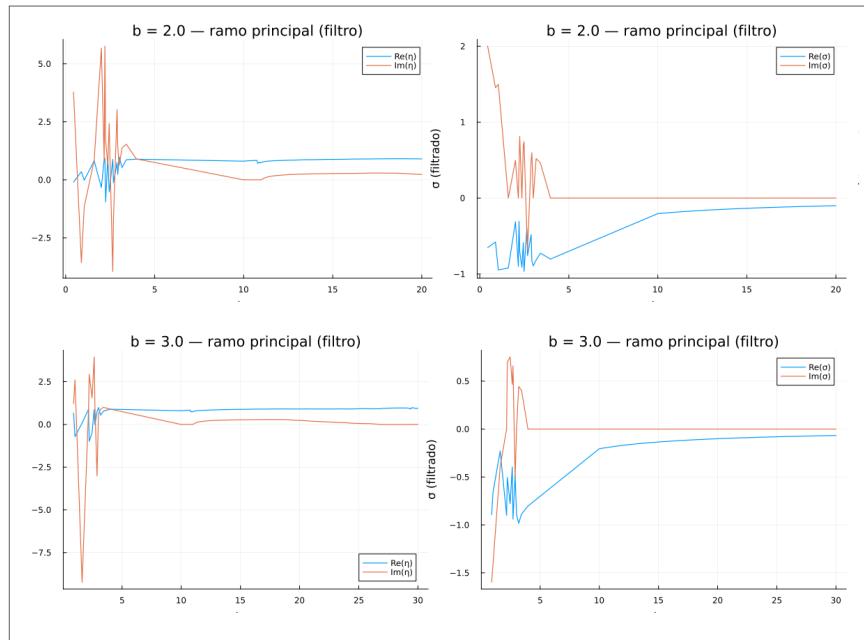


Figura 11 – Valores das partes real e imaginária de  $\sigma$  e  $\eta$  em função de  $b\omega$  para  $s = 0$  e  $l = 0$ .

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

Percebe-se que o comportamento é linear para  $b\omega$  pequeno quando  $b$  é pequeno e linear para  $b\omega$  grande quando  $b$  é grande.

- Para  $s = 0$  e  $l = 1$  temos o seguinte:

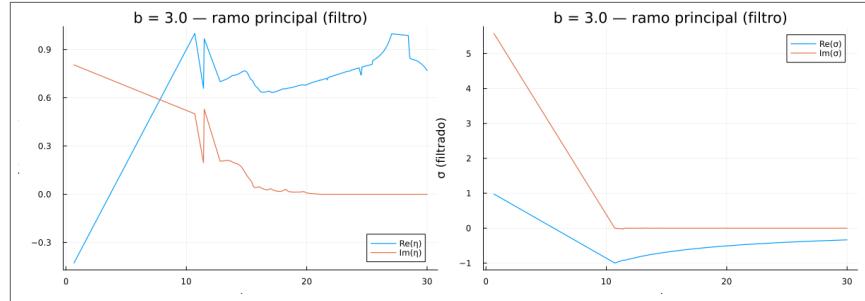


Figura 12 – Valores das partes real e imaginária de  $\sigma$  e  $\eta$  em função de  $b\omega$  para  $s = 0$  e  $l = 1$ .

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

Demonstrando um perfil linear para  $\sigma$  no intervalo considerado e para  $\eta$  para valores pequenos de  $b\omega$ .

- Para  $s = 2$  e  $l = 2$  temos o seguinte:

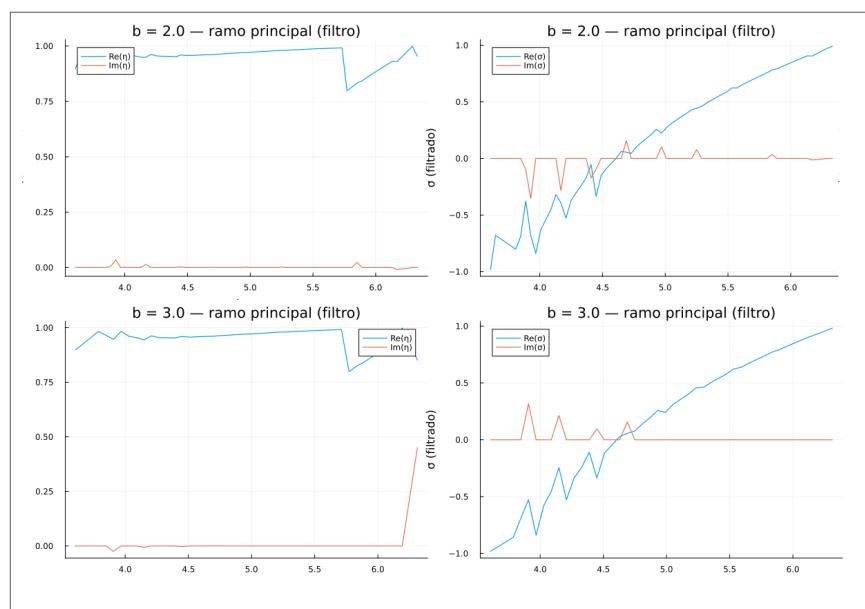


Figura 13 – Valores das partes real e imaginária de  $\sigma$  e  $\eta$  em função de  $b\omega$  para  $s = 2$  e  $l = 2$ .

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

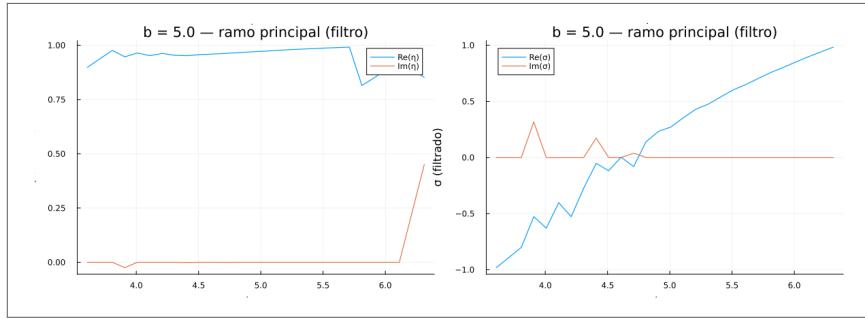


Figura 14 – Valores das partes real e imaginária de  $\sigma$  e  $\eta$  em função de  $b\omega$  para  $s = 2$  e  $l = 2$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Que demonstra um perfil semelhante para as partes real e imaginária de  $\sigma$  e  $\eta$ , sendo linear para a parte real e imaginária de  $\eta$  para pequenos valores de  $b\omega$ .

A obtenção de tais resultados numericamente abre caminho para o estudo do problema do espalhamento e busca pelos modos quase-normais do buraco de minhoca de Ellis, tópico discutido na seção seguinte.

### 5.3 PERSPECTIVAS FUTURAS

A aplicação do método isomonodrômico no estudo do problema do espalhamento e na obtenção dos modos quase-normais para diversos sistemas gravitacionais é extensa e extremamente frutífera. Abaixo são citados alguns trabalhos da literatura que utilizam do método isomonodrômico e que também fazem uso da mesma implementação numérica (53) do presente trabalho, que podem servir de guia para as perspectivas futuras do estudo da métrica de Ellis.

Em (55) os autores fazem o estudo de perturbações de spin  $s = 0$  e  $s = 1/2$  para a métrica de Reissner-Nordström, tanto no caso não-extremal quanto para o limite extremal ( $Q \rightarrow M$ , sendo  $Q$  a carga do buraco negro e  $M$  sua massa). Em seu estudo, é utilizada a mesma implementação numérica que proporcionou os resultados da seção 5.2. O trabalho começa mostrando que ambas as perturbações podem ser englobadas em uma única equação mestra tal qual a 5.5, seguindo é exposto que tal equação mestra pode ser posta na forma de uma equação de Heun confluente, após seguem-se as devidas discussões a respeito da teoria isomonodrômica. Os autores conseguiram mostrar que na análise da perturbação escalar e espinorial, os resultados numéricos implementados tendo por base o método isomonodrômico concordam com os que já existiam na literatura usando o método da fração continuada para o buraco negro de Schwarzschild, o que os permitiu seguir com confiança na análise do

buraco negro de Reissner-Nordström e obter que, no regime quase-extremal, o espectro de modos quase-normais se decompõe em duas famílias distintas: modos amortecidos, com parte imaginária finita, e modos “não amortecidos”, cujas frequências tendem a  $\text{Re } \omega \rightarrow qQ/M$  e  $\text{Im } \omega \rightarrow 0$  quando  $Q \rightarrow M$ . Ainda, dada a natureza do mapa de Riemann-Hilbert, os autores tem confiança que o mesmo método também serviria na análise de perturbações com spins maiores.

Em (56) os autores fazem o estudo de perturbações escalares massivas ( $\mu \neq 0$ ) na métrica de Kerr, para valores arbitrários do fator adimensional  $M\mu$  e do fator de rotação  $a/M$ , utilizando o método isomonodrômico. Assim como no presente trabalho, a equação radial e a equação angular são trazidas à forma da equação de Heun confluente e o problema é reformulado em termos dos parâmetros de monodromia  $\{\theta_k\}$  associados à  $\tau_V$ , com implementação numérica baseada em (53). Feita uma validação semelhante ao do artigo do parágrafo anterior, comparando resultados da literatura com o obtido pelo método das frações continuadas no caso sem massa e para rotações moderadas, o artigo passa a explorar o regime quase-extremal  $a/M \rightarrow 1$ , mostrando como o espectro de modos quase-normais se bifurca em modos amortecidos e modos de amortecimento nulo na presença de massa. Para  $\ell = m = 1$ , os autores demonstram que o modo fundamental, que para massas pequenas se comporta como um modo de amortecimento nulo com  $\text{Re } \omega \rightarrow m/(2M)$  e  $\text{Im } \omega \rightarrow 0$  no limite extremal, transforma-se em um modo amortecido quando a massa do campo ultrapassa um valor crítico  $(M\mu)_c$ , associado a um parâmetro de extremalidade  $\delta_c$  ou, equivalentemente, a um spin crítico  $(a/M)_c$ . Nesse ponto crítico, identificado como um ponto excepcional no espaço de parâmetros, o modo fundamental e o primeiro harmônico tornam-se degenerados, compartilhando a mesma frequência real e o mesmo tempo de decaimento, o que leva a um cenário de “*level crossing*” e histerese espectral. Faz-se também uma expansão para as frequências dos modos de amortecimento nulo no regime quase-extremal. Tal abordagem mostra a força que o método possui para descrever, de forma unificada, tanto o comportamento numérico quanto o limite analítico desses modos.

A versatilidade e o êxito da implementação numérica (53) aos mais diversos casos de sistemas gravitacionais e perturbações, somado às exposições feitas acima de resultados da literatura, encoraja a continuação do estudo da métrica de Ellis seguindo na mesma linha de pesquisa. Sendo assim, a primeira perspectiva futura do presente trabalho é encontrar os estados de decaimento com parte imaginária de  $\omega$  negativa, ou seja, os modos quase-normais, em seguida pretendendo-se prosseguir, utilizando as mesmas ferramentas, na análise de problemas

mais robustos que sejam de interesse.

## 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo explorar as principais características do buraco de minhoca de Ellis. Os buracos de minhoca, como ressaltado durante a exposição, surgem de uma necessidade de evitar a singularidade essencial que aparece na solução de Schwarzschild. No presente desenvolvimento foi dada uma motivação histórica e técnica no capítulo 1 da importância de tais objetos gravitacionais, seguindo-se de uma breve introdução de como o método isomonodrômico torna-se relevante na obtenção de modos quase-normais e dos coeficientes do problema do espalhamento. No capítulo 2 foi exposto o desenvolvimento histórico das principais ideias que levaram Einstein a publicar suas equações de campo, também foi exposto a primeira resolução a tais equações, a de Schwarzschild, seguindo com a discussão dos seus problemas relacionados à singularidade essencial que é presente mesmo em sua extensão analítica máxima, finalizando com a introdução dos buracos de minhoca na relatividade geral e uma breve discussão a respeito dos critérios de transponibilidade. No capítulo 3 foi desenvolvida a teoria da perturbação utilizando a abordagem de Regge-Wheeler tanto para a métrica de Schwarzschild quanto para a métrica de Ellis, para o caso da métrica de Ellis, tanto a perturbação escalar quanto a perturbação gravitacional após a devida separação de variáveis resultaram para a parte radial uma equação de Heun confluente, o que permitiu no capítulo seguinte o desenvolvimento da teoria das deformações isomonodrômicas no presente contexto, relacionando as deformações isomonodrômicas da equação de Heun confluente à função  $\tau_V$ . O capítulo 4 inicia recapitulando as definições mais importantes a respeito das equações diferenciais em contextos físicos, segue-se com a exposição das principais discussões a respeito de monodromias e matrizes de conexão para em seguida adentrar na isomonodromia, garantida pelas condições impostas à quinta transcendente de Painlevé, e resolve-se o problema de encontrar os modos quase-normais pelo método isomonodrômico. No capítulo 5 mostra-se que ambos os resultados a respeito da equação radial para o buraco de minhoca de Ellis em perturbações escalares e gravitacionais podem ser unificados em uma equação mestra. Obtém-se a forma do potencial e mostra-se que ele não admite estados ligados com frequências positivas, pois o potencial é sempre positivo e decresce de maneira monótona a partir do gargalo, discute-se também que mesmo na ausência de estados ligados desse tipo há a possibilidade da obtenção de estados de amortecimento com parte imaginária negativa, os modos quase-normais. Expõem-se brevemente resultados numéricos obtidos a partir da imple-

---

mentação do método isomonodrômico. Finaliza-se expondo resultados da literatura em que o método isomonodrômico foi utilizado na obtenção dos modos-quase normais para os buracos negros de Kerr e Reissner-Nordström. Nos apêndices são expostos resultados importantes de geometria diferencial que possibilitaram o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3, e também é exposta a função  $\tau_V$  por meio do determinante de Fredholm.

Como perspectiva futura, dado o desenvolvimento aqui exposto e a discussão realizada na seção 5.3, fica a possibilidade de obtenção, em trabalhos futuros, dos modos quase-normais e dos coeficientes de espalhamento para o buraco de minhoca de Ellis através do método isomonodrômico.

## APÊNDICE A – GEOMETRIA DIFERENCIAL E O CÁLCULO DA CURVATURA

A proposta desse apêndice é tratar dos principais conceitos de geometria diferencial necessários para trabalhar com as equações de Einstein. Essencialmente, após uma breve apresentação dos principais conceitos, estaremos interessados em mostrar duas formas que podemos utilizar para calcular o tensor de Riemann (definido na equação (2.1)) para determinada métrica, afim de que possamos, através de sucessivas contrações, obter o tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura que são utilizados na definição do tensor de Einstein. Após a exposição, seguirão os cálculos omitidos no capítulo 2.

Todo o cenário em que as ideias serão desenvolvidas nomeia-se *variedade diferenciável*. Uma variedade diferenciável é um objeto matemático que localmente se assemelha ao  $\mathbb{R}^n$ , possuindo sua estrutura diferencial, permitindo a generalização dos principais conceitos sobre diferenciabilidade e através disso possibilitando que possamos criar uma noção *intrínseca* de curvatura, sem a necessidade de fazer menção a um espaço de dimensão maior em que nosso objeto estaria inserido, que é como geralmente obtemos uma noção intuitiva de curvatura.

Faz-se necessário a definição do que seria um operador derivada. Um operador derivada é um mapa que leva todo campo tensorial suave de tipo  $(k,l)$  em um campo tensorial de tipo  $(k, l+1)$  e satisfaz cinco propriedades <sup>1</sup>. Quando definidos em uma variedade os operadores derivada não são únicos, podemos relacionar dois deles através da seguinte expressão:

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \widetilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_j C^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} \quad (A.1)$$

Em que  $\nabla$  e  $\widetilde{\nabla}$  são dois operadores derivadas quaisquer que concordam em sua ação sobre campos escalares. Caso o operador  $\widetilde{\nabla}$  seja o operador derivada ordinário que já conhecemos, o campo tensorial  $C^c_{ab}$  é denotado por  $\Gamma^c_{ab}$  e recebe o nome de símbolo de Christoffel. Sendo assim, para um vetor por exemplo, teríamos:

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c \quad (A.2)$$

<sup>1</sup> O leitor interessado pode consultá-las no capítulo 3 de (15) ou seguir a exposição da seção 4 do capítulo 1 de (20).

Existe um último requerimento que gostaríamos de impor ao nosso operador derivada, queremos que ele seja único ao equiparmos nossa variedade com uma estrutura adicional. Essa estrutura é a métrica e temos o seguinte teorema:

**Teorema A.1:** Seja  $g_{ab}$  uma métrica definida em uma variedade diferenciável. Existe um único operador derivada que satisfaz  $\nabla_a g_{ab} = 0$ <sup>2</sup>

Desse teorema segue a seguinte relação importante que nos permitirá calcular a curvatura:

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left( \partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} \right) \quad (\text{A.3})$$

A noção intrínseca de curvatura segue através de duas ideias. A primeira é de que um vetor que é paralelamente transportado (um vetor  $V^\mu$  é paralelamente transportado se satisfaz:  $u^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0$ , sendo  $u^\mu$  o vetor tangente à curva) ao longo de uma curva infinitesimal fechada não volta ao seu valor original. A segunda é de que geodésicas que são inicialmente paralelas falham em permanecer paralelas. Ambas as ideias estão relacionadas a um campo tensorial já apresentado no capítulo 1, o tensor de Riemann, que foi definido como:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = R_{abc}^d \omega_d \quad (\text{A.4})$$

Semelhantemente, a partir das propriedades do operador derivada e da regra de Leibniz podemos obter o seguinte:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t_c = -R_{abc}^d t^d \quad (\text{A.5})$$

E generalizar para um campo tensorial arbitrário:

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} &= - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} \\ &+ \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O tensor de Riemann tem quatro propriedades principais:

1. É antisimétrico nos dois primeiros índices  $R_{abc}^d = -R_{bac}^d$
2. A parte antissimétrica de seus primeiros três índices é nula  $R_{[abc]}^d = 0$
3. Para o operador derivada natural associado à métrica temos  $R_{abcd} = -R_{abdc}$

<sup>2</sup> A prova do teorema pode ser vista na página 35 do capítulo 3 de (15).

4. Vale a identidade de Bianchi  $\nabla_{[a} R_{bc]d}^{\phantom{bc]d}e}$

Das propriedades 1, 2 e 3 também segue que:

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (\text{A.7})$$

Através da contração do primeiro e terceiro índices no tensor de Riemann segue o tensor de Ricci:

$$R_{ac} = R_{abc}^{\phantom{abc}b} \quad (\text{A.8})$$

Que é simétrico em seus índices. Uma última contração, agora no tensor de Ricci, leva ao escalar de curvatura  $R$ :

$$R = R_a^{\phantom{a}a} \quad (\text{A.9})$$

O tensor de Einstein que aparece na equação de campo de Einstein é definido em termos desses dois últimos da seguinte maneira:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (\text{A.10})$$

E da contração da identidade de Bianchi (veja a propriedade 4 do tensor de Riemann) segue o seguinte:

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (\text{A.11})$$

É importante ressaltar que saber como calcular a curvatura é essencial para resolver as equações de Einstein, abaixo seguem duas formas de fazer isso. A primeira é a mais conhecida, baseia-se em escolher um sistema de coordenadas e calcular os símbolos de Christoffel a partir da métrica. A segunda parte da implementação de uma base ortonormal em cada ponto da variedade, e da escrita das quantidades relevantes em termos dessa base.

## A.1 MÉTODO DAS COORDENADAS

O método consiste em escolher um sistema de coordenadas e encontrar o tensor de Riemann através da relação abaixo:

$$R_{abc}{}^d = [-2\partial_{[a}\Gamma^d{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]e}] \quad (\text{A.12})$$

Tomando as componentes temos o seguinte:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \sum_\alpha(\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}) \quad (\text{A.13})$$

Podemos utilizar a equação A.3 escrita em uma base de coordenadas para encontrar os símbolos de Christoffel e por fim calcular o tensor de Riemann. Obtido o tensor de Riemann, podemos encontrar o tensor de Ricci através de uma contração:

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho} &= \sum_\nu R_{\mu\nu\rho}{}^\nu \\ &= \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sum_\nu\Gamma^\nu{}_{\nu\rho}\right) + \sum_{\alpha,\nu}\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\Gamma^\nu{}_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

E uma última contração nos daria o escalar de curvatura.

Uma última relação pode ser útil para o cálculo do símbolo de Christoffel contraído que aparece na relação para o tensor de Ricci:

$$\Gamma^a{}_{a\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ln\sqrt{|g|} \quad (\text{A.15})$$

Em que  $g$  é o determinante da métrica <sup>3</sup>.

## A.2 MÉTODO DA BASE ORTONORMAL OU MÉTODO DAS TETRADAS

O método consiste em introduzir uma base ortonormal não-holônômica de campos vetoriais suaves  $(e_\mu)^a$  que satisfazem:

$$(e_\mu)^a(e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{A.16})$$

Em que  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ , sendo  $\mu$  e  $\nu$  identificadores dos vetores da base com intervalo  $1, \dots, n$ , já a letra “ $a$ ” representa um índice tensorial. Em quatro dimensões  $\{(e_\mu)^a\}$  recebe o nome de *tetra*da. Ainda temos a seguinte relação útil:

<sup>3</sup> A métrica pode ser representada por uma matriz quando tem seus componentes escritos em uma base de coordenadas.

$$\sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b = \delta^a_b \quad (\text{A.17})$$

Em que  $\delta^a_b$  é o mapa identidade.

Nosso objetivo é, assim como no método das coordenadas, encontrar o tensor de Riemann para determinada métrica. Para fazer isso vamos definir a seguinte 1-forma de conexão em termo das tetradas:

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \quad (\text{A.18})$$

Suas componentes recebem o nome de *coeficientes de rotação de Ricci*

$$\omega_{\lambda\mu\nu} = (e_\lambda)^a (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \quad (\text{A.19})$$

A 1-forma de conexão é antissimétrica em seus dois últimos índices:

$$\omega_{a\mu\nu} = -\omega_{a\nu\mu} \quad (\text{A.20})$$

Podemos encontrar o tensor de Riemann através da seguinte relação:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a (e_\sigma)^b \left\{ \nabla_a \omega_{b\mu\nu} - \nabla_b \omega_{a\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [\omega_{a\beta\mu} \omega_{b\alpha\nu} - \omega_{b\beta\mu} \omega_{a\alpha\nu}] \right\} \quad (\text{A.21})$$

E em seguida, podemos obter o tensor de Ricci através de uma contração:

$$R_{\rho\mu} = \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

A grande sacada que permite um caminho bem menos trabalhoso até o tensor de Riemann através do método das tetradas baseia-se na seguinte expressão:

$$\partial_{[a} (e_\sigma)_{b]} = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{[a} \omega_{b]\sigma\nu} \quad (\text{A.23})$$

Essa última relação permite que encontremos as 1-forma de conexão apenas realizando a derivada parcial das tetradas! Após encontrar as 1-forma de conexão basta utilizar a equação A.21 para encontrar o tensor de Riemann, que é nosso objetivo. A equação A.23 baseia-se no fato do espaço ser livre de torção (algo que tínhamos deixado implícito até então, inclusive no método das coordenadas), quando o espaço é livre de torção a derivada antisimetrizada de

uma 1-forma independe do operador derivada, assim, podemos utilizar o mais trivial que seria justamente o operador derivada ordinário.

A vantagem apresentada pelo método das coordenadas consiste em seu processo mais direto e mecânico, mas tem como desvantagem o fato de ser mais laborioso. Já a vantagem do método das tetradas consiste na facilidade de utilizar as simetrias do espaço-tempo em questão para diminuir o trabalho de obter o tensor de Riemann, dando uma interpretação geométrica mais significativa.

Para mais detalhes sobre as derivações e motivações dos resultados apresentados o leitor é convidado a consultar o capítulo 3 do livro do Wald (15) de onde a inspiração para esse apêndice, em grande parte, foi retirada. O leitor é convidado também a consultar a exposição feita para o formalismo das tetradas na monografia do Chandrasekhar (20) que é seguida de uma exposição do tratamento de Newman-Penrose citada no capítulo 3.

## APÊNDICE B – O DETERMINANTE DE FREDHOLM E A REPRESENTAÇÃO DA $\tau_V$

Como citado no capítulo 4 há como fazer a expansão da função transcedente  $\tau_V$  por meio do determinante de Fredholm. Os principais resultados que serão expostos logo a seguir tem por base o artigo de Lisovyy, Nagoya e Roussillon (57), onde a representação para a  $\tau_V$  por meio do determinante de Fredholm foi apresentada pela primeira vez. É possível expressar a transcedente  $\tau_V$  em termos dos parâmetros de monodromia  $\{\sigma, \eta\}$ , dos parâmetros da equação de Heun confluente  $\{\theta_0, \theta_t, \sigma_3\}$  e do determinante de Fredholm da seguinte maneira:

$$\tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = t^{(\sigma^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2)/4} e^{(\theta_t t)/2} \det(I - A \kappa_V^{(\sigma_3)/2} t^{(\sigma\sigma_3)/2} D_c(t) \kappa_V^{-(\sigma_3)/2} t^{-(\sigma\sigma_3)/2}) \quad (B.1)$$

Em que  $A$  e  $D_c$  são operadores tais que sua ação em  $\Psi$  é dada por:

$$(A\Psi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz' A(z, z') \Psi(z'), \quad (D_c\Psi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz' D_c(z, z') \Psi(z'). \quad (B.2)$$

Em que  $\mathcal{C}$  é um círculo de tal maneira que  $\mathcal{C} < 1$ , com  $\Psi = \Psi(z)$  sendo dado por:

$$\Psi(z') = \begin{pmatrix} \phi_+(z') \\ \phi_-(z') \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

E os núcleos para os operadores são, desde que  $t < \mathcal{C}$ , tais que:

$$\begin{cases} A(z, z') = \frac{\chi^{-1}(\sigma, \theta_0, \theta_t; z') \chi(\sigma, \theta_0, \theta_t; z) - I}{z - z'} \\ D_c(z, z') = \frac{I - \chi_c^{-1}(-\sigma, \theta_*, t/z') \chi_c(-\sigma, \theta_*, t/z)}{z - z'} \end{cases} \quad (B.4)$$

Em que a matriz  $\chi$  é dada tal que:

$$\chi(\sigma, \theta_0, \theta_t; z) = \begin{pmatrix} \psi(\sigma, \theta_0, \theta_t; z) & \xi(-\sigma, \theta_0, \theta_t; z) \\ \xi(\sigma, \theta_0, \theta_t; z) & \psi(-\sigma, \theta_0, \theta_t; z) \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

Os termos  $\psi(\sigma, \theta_0, \theta_t; z)$  e  $\xi(\sigma, \theta_0, \theta_t; z)$  são dados por meio da função hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$ <sup>1</sup> :

$$\psi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\sigma - \theta_t + \theta_0), \frac{1}{2}(\sigma - \theta_t - \theta_0); \sigma; z\right), \quad (\text{B.6})$$

$$\xi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) = \frac{\theta_0^2 - (\sigma - \theta_t)^2}{4\sigma(1 + \sigma)} z {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{2}(\sigma - \theta_t + \theta_0), 1 + \frac{1}{2}(\sigma - \theta_t - \theta_0); 2 + \sigma; z\right). \quad (\text{B.7})$$

Já a matriz  $\chi_c$  tem o seguinte formato:

$$\chi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z) = \begin{pmatrix} \psi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z) & \xi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z) \\ \xi_c(\sigma, \theta_\star; t/z) & \psi_c(\sigma, \theta_\star; t/z) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Com  $\psi_c$  e  $\xi_c$  por sua vez, dados em termos da função hipergeométrica confluente  ${}_1F_1$ <sup>2</sup>:

$$\psi_c(\pm\sigma, \theta_\star; t/z) = {}_1F_1\left(\frac{-\theta_\star \pm \sigma}{2}; \pm\sigma; -t/z\right), \quad (\text{B.9})$$

$$\xi_c(\pm\sigma, \theta_\star; t/z) = \pm \frac{-\theta_\star \pm \sigma}{2\sigma(1 \pm \sigma)} \frac{t}{z} {}_1F_1\left(1 + \frac{-\theta_\star \pm \sigma}{2}; 2 \pm \sigma; -t/z\right). \quad (\text{B.10})$$

E  $\kappa_V$  em B.1 é expressa da seguinte maneira:

$$\kappa_V = e^{i\pi\eta} \Pi_\star(\Theta_\star, \sigma) \Pi(\Theta_t, \Theta_0, \sigma) \quad (\text{B.11})$$

Com:

$$\begin{cases} \Pi_\star(\theta_\star, \sigma) = \frac{\Gamma(1 - \sigma) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_\star + \sigma)\right)}{\Gamma(1 + \sigma) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_\star - \sigma)\right)}, \\ \Pi(\theta_t, \theta_0, \sigma) = \frac{\Gamma(1 - \sigma) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t + \theta_0 + \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t - \theta_0 + \sigma)\right)}{\Gamma(1 + \sigma) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t - \theta_0 - \sigma)\right)}. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Resultado para  $\kappa_V$  já obtido anteriormente no desenvolvimento da seção 4.4.

<sup>1</sup> Para definições formais, propriedades analíticas, representações integrais e expansões assintóticas da função hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$ , ver *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Cap. 15, disponível em: <<https://dlmf.nist.gov/15>>.

<sup>2</sup> Consultar *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Cap. 13, disponível em: <<https://dlmf.nist.gov/13>>.

## REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, p. 844–847, 1915.
- 2 SCHWARZSCHILD, K. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*. 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/physics/9905030>>.
- 3 Flamm, L. Republication of: Contributions to Einstein's theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, v. 47, p. 72, jun. 2015.
- 4 EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 48, p. 73–77, Jul 1935. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.73>>.
- 5 ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, v. 14, p. 104–118, 1973.
- 6 BRONNIKOV, K. A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon. B*, v. 4, p. 251–266, 1973.
- 7 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ABERNATHY, M. R.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 8 GONZÁLEZ, J. A.; GUZMÁN, F. S.; SARBACH, O. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field: I. linear stability analysis. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 1, p. 015010, dez. 2008. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/26/1/015010>>.
- 9 GONZÁLEZ, J. A.; GUZMÁN, F. S.; SARBACH, O. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field: II. nonlinear evolution. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 1, p. 015011, dez. 2008. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/26/1/015011>>.
- 10 VISHVESHWARA, C. V. Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole. *Nature*, v. 227, p. 936–938, 1970.
- 11 REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 108, p. 1063–1069, Nov 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1063>>.
- 12 Chandrasekhar, S.; Detweiler, S. The Quasi-Normal Modes of the Schwarzschild Black Hole. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 344, n. 1639, p. 441–452, ago. 1975.
- 13 Schutz, B. F.; Will, C. M. Black hole normal modes - A semianalytic approach. , v. 291, p. L33–L36, abr. 1985.
- 14 Leaver, E. W. An Analytic Representation for the Quasi-Normal Modes of Kerr Black Holes. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 402, n. 1823, p. 285–298, dez. 1985.

- 15 WALD, R. M. *General relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.
- 16 EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, v. 17, p. 891–921, 1905. Tradução inglesa: *On the Electrodynamics of Moving Bodies*, disponível em <<https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/specrel.pdf>>.
- 17 D'INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding*. [S.I.]: Oxford University Press, 2022.
- 18 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. *The large scale structure of space-time*. [S.I.]: Cambridge university press, 2023.
- 19 PAIS, A. *Subtle is the Lord: The science and the life of Albert Einstein*. [S.I.]: Oxford University Press, 2005.
- 20 CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. [S.I.]: Oxford university press, 1983.
- 21 KRUSKAL, M. D. Maximal extension of schwarzchild metric. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 119, p. 1743–1745, Sep 1960. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.119.1743>>.
- 22 TIKZ.NET. *Relativity Kruskal Diagram*. n.d. <[https://tikz.net/relativity\\_kruskal\\_diagram](https://tikz.net/relativity_kruskal_diagram)>. Acesso em: 21 jul. 2025.
- 23 Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. *Gravitation*. [S.I.]: Princeton University Press, 2017.
- 24 FULLER, R. W.; WHEELER, J. A. Causality and multiply connected space-time. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 128, p. 919–929, Oct 1962. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.128.919>>.
- 25 MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, v. 56, n. 5, p. 395–412, 05 1988.
- 26 MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. Classical physics as geometry. *Annals of Physics*, v. 2, n. 6, p. 525–603, 1957. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491657900490>>.
- 27 MALDACENA, J.; SUSSKIND, L. Cool horizons for entangled black holes. *Fortschritte der Physik*, Wiley, v. 61, n. 9, p. 781–811, ago. 2013. ISSN 1521-3978. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/prop.201300020>>.
- 28 Newman, E.; Penrose, R. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, v. 3, n. 3, p. 566–578, maio 1962.
- 29 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2019.
- 30 ZERILLI, F. J. Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 24, p. 737–738, Mar 1970. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.24.737>>.
- 31 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. [S.I.]: Cambridge University Press, 1982. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

- 32 OLVER, F. W. J.; DAALHUIS, A. B. O.; LOZIER, D. W.; SCHNEIDER, B. I.; BOISVERT, R. F.; CLARK, C. W.; MILLER, B. R.; SAUNDERS, e. B. V. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. 2025. <<https://dlmf.nist.gov/>>. Release 1.2.4 of 2025-03-15, <<https://dlmf.nist.gov/>>.
- 33 Friedman, J. L. On the Born Approximation for Perturbations of a Spherical Star and the Newman-Penrose Constants. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 335, n. 1601, p. 163–190, out. 1973.
- 34 SAGO, N.; NAKANO, H.; SASAKI, M. Gauge problem in the gravitational self-force: Harmonic gauge approach in the schwarzschild background. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 67, n. 10, maio 2003. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.67.104017>>.
- 35 VISHVESHWARA, C. V. Stability of the schwarzschild metric. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 1, p. 2870–2879, May 1970. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.1.2870>>.
- 36 KLAINERMAN, S.; SZEFTEL, J. *Global Nonlinear Stability of Schwarzschild Spacetime under Polarized Perturbations*. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1711.07597>>.
- 37 ZHAO, Y.; SUN, B.; MAI, Z.-F.; CAO, Z. *Quasi Normal Modes of Black Holes and Detection in Ringdown Process*. 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2212.00747>>.
- 38 JEFFREYS, H. On certain approximate solutions of lineae differential equations of the second order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 428–436, 1925.
- 39 WENTZEL, G. Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 38, n. 6, p. 518–529, 1926.
- 40 KRAMERS, H. A. Wellenmechanik und halbzahlige quantisierung. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 39, n. 10, p. 828–840, 1926.
- 41 BRILLOUIN, L. La mécanique ondulatoire de schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives. *CR Acad. Sci*, v. 183, n. 11, p. 24–26, 1926.
- 42 IYER, S.; WILL, C. M. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 35, p. 3621–3631, Jun 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.3621>>.
- 43 SHATSKII, A. A.; NOVIKOV, I. D.; KARDASHEV, N. S. A dynamic model of the wormhole and the multiverse model. *Physics-Uspekhi*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 51, n. 5, p. 457–464, maio 2008. ISSN 1468-4780. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1070/PU2008v05n05ABEH006581>>.
- 44 KAPLAN, W. *Advanced Calculus*. 4. ed. Redwood City, Calif.: Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1993.
- 45 CONTE, R. *The Painlevé Property: One Century Later*. Springer New York, 2011. (CRM Series in Mathematical Physics). ISBN 9781461215332. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VvH1vQACAAJ>>.

- 46 ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. *Complex variables: introduction and applications*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2003.
- 47 HARAOKA, Y. *Linear Differential Equations in the Complex Domain: From Classical Theory to Forefront*. Springer International Publishing, 2020. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 9783030546625. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=mxGXzQEACAAJ>>.
- 48 OKAMOTO, K. *Isomonodromic Deformation and Painlevé Equations, and the Garnier System*. Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1981. (Institut de Recherche Mathématique Avancée Strasbourg: Publication). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=1tHvOgAACAAJ>>.
- 49 JIMBO, M. Monodromy problem and the boundary condition for some painlevé equations. *Publications of The Research Institute for Mathematical Sciences*, v. 18, p. 1137–1161, 1982. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123096562>>.
- 50 OKAMOTO, K. Studies on the painlevé equations ii: Fifth painlevé equation P\_V. *Japanese Journal of Mathematics. New Series*, v. 13, n. 1, p. 47–76, 1987. ISSN 0289-2316. Online ISSN 1861-3624. Released on J-STAGE December 16, 2008. Disponível em: <[https://www.jstage.jst.go.jp/article/math1924/13/1/13\\_1\\_47/\\_article/-char/en](https://www.jstage.jst.go.jp/article/math1924/13/1/13_1_47/_article/-char/en)>.
- 51 LISOVYY, O.; NAIDIUK, A. Perturbative connection formulas for heun equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 55, n. 43, p. 434005, out. 2022. ISSN 1751-8121. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ac9ba7>>.
- 52 LISOVYY, O.; NAIDIUK, A. Accessory parameters in confluent heun equations and classical irregular conformal blocks. *Letters in Mathematical Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 111, n. 6, nov. 2021. ISSN 1573-0530. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11005-021-01400-6>>.
- 53 STRINGS-UFPE. *Painlevé: Implementation of arbitrary-precision evaluation for Painlevé τ-functions*. 2025. <<https://github.com/strings-ufpe/painleve>>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- 54 Teukolsky, S. A. Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations. , v. 185, p. 635–648, out. 1973.
- 55 CAVALCANTE, J. a. P.; CUNHA, B. Carneiro da. Scalar and dirac perturbations of the reissner-nordström black hole and painlevé transcedents. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 124040, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.124040>>.
- 56 CAVALCANTE, J. a. P.; RICHARTZ, M.; CUNHA, B. C. da. Massive scalar perturbations in kerr black holes: Near extremal analysis. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 110, p. 124064, Dec 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.124064>>.
- 57 LISOVYY, O.; NAGOYA, H.; ROUSSILLON, J. Irregular conformal blocks and connection formulae for painlevé v functions. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 59, n. 9, ago. 2018. ISSN 1089-7658. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.5031841>>.