



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO EXPONENCIAL PARA A DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DO IBOVESPA

por

José Augusto Carvalho Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos (Orientador- UFPE)
Prof. Rogério Rosenfeld (UNESP)
Prof. Sérgio Coutinho (UFPE)

Recife - PE, Brasil
Dezembro - 2004



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670- 901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126- 8449/2126- 8450 - Fax (++ 55 81) 3271- 0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

José Augusto Carvalho Filho

MODELO EXPONENCIAL PARA A DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DO IBOVESPA

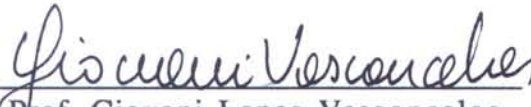
A Banca Examinadora composta pelos Professores Giovani Lopes Vasconcelos (Presidente e Orientador), Sérgio Coutinho, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Rogério Rosenfeld da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” consideram o candidato:

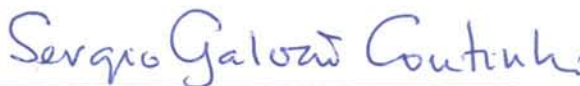
() Aprovado com
Distinção

☒ Aprovado

() Reprovado

Secretaria do Programa de Pós- Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos vinte dias do mês de setembro de 2004.


Prof. Giovani Lopes Vasconcelos
Presidente e Orientador


Prof. Sérgio Coutinho


Prof. Rogério Rosenfeld

AGRADECIMENTOS

Durante toda minha jornada acadêmica me vi cercado de pessoas maravilhosas. Cada uma delas, à sua própria maneira, depositou em mim um punhado de confiança ao longo dos anos. Algumas delas depositaram tal confiança com um sorriso, um olhar, um abraço forte, um tapa nas costas, um insulto, um aperto de mão. Outras fizeram isso até mesmo brindando uma Bohemia em uma mesa de bar.

Primeiramente agradeço à minha família pelo incentivo ao ingresso no mundo da ciência, e principalmente, pelo amor depositado ao longo dos meus 25 anos. Em particular, ao meu pai, José Augusto Carvalho, pelo eterno apoio e incentivo durante todos esses anos de vida acadêmica e por sempre ter acreditado em meu potencial como ser humano. Agradeço à minha mãe (mesmo que distante), Katarina Soares Marinho, por seu infinito amor, carinho, incentivo e esperança e por crer que o aprendizado é vital ao ser humano. Agradeço à Neide Silveira de Souza por ter depositado tamanha confiança, desde o princípio, por sua excepcional paciência, coerência, serenidade e humildade ao longo dos inúmeros aconselhamentos que tive o prazer receber. Agradeço à minha irmã, Cláudia Marinho Carvalho, pelo amor, carinho, discussões, confidências, perseverança, e por acreditar que ninguém é tão velho que não possa aprender nem tão novo que não possa ensinar. Agradeço à Luma por toda a alegria que irá proporcionar ao mundo dentro em breve.

Ao Professor Giovani Vasconcelos que, mesmo ciente de minha delicada situação acadêmica, acolheu-me em setembro de 2003 de forma sincera e objetiva. Por ter acreditado na possibilidade de trabalharmos juntos, mesmo que, por um período

previamente delimitado. Apesar do pouco tempo de trabalho, foi fácil perceber que é uma pessoa fantástica e de uma natureza prestativa bastante evidente. Serei eternamente grato ao seu voto de confiança. Agradeço também ao Rogério Lima pela paciência nas discussões sobre econofísica.

Agradeço ao Big Bang, se é que o dito cujo ocorreu, por ter criado o professor, e também ser humano, Fernando Moraes, uma das pessoas mais maravilhosas que pude conhecer na universidade. Por ter aprendido que cosmologia é auto conhecimento expresso por tensores. Somos feitos de estrelas e estudamos estrelas. É o universo olhando pra si mesmo. Agradeço por sua eterna disponibilidade, carinho e comprometimento para com os alunos.

Agradeço aos eternos amigos da Tríplice Aliança, Sérgio e Socó, pela confiança e compartilhamento de sonhos. Pelos inesquecíveis momentos vividos e por aqueles que, certamente, virão. Nada nos separará. Agradeço também à família da Tríplica Aliança, Linda, Laurenz, Lúcia, Beбето, Domingos, Maria, Beta, Mabel, Marilene, Celina e Dominginhos. Há algum tempo vocês já fazem parte da minha de minha família. Serei eternamente grato.

Aos eternos amigos Marcelo (aristóteles), Márcio (grande pequeno micro irmão), Geraldo (bruce lee), Roberto (robertinho zaninha), Felipe Cavalanti (pronex), Mathias (mago), Mário (pastor), Carlos (carlos doido, pela paciência em ensinar, principalmente C), Patrícia (paty), Alexandre (farrapaman), Mario Henrique (amizade conquistada após geometria diferencial), Patrícia (zinha), Maíra (maira), Aline Sharon (doutora), Rafael (meu irmão), João Paulo (eterno pongas), Andrique (micose), Tales (talesão), Andréa (loi), José Roberto (beto), Chico (rééré), Rodrigo (mijaru, por ter me apresentado a palavra derivativo), Fábio (fafabio), Karina (kari kanguru, minha mais nova melhor amiga, que a química nos proteja), Marcelo (celão, ainda vejo sua companhia), Gabi (minha primona e amiga de todas as horas).

Agradeço também à Cecília por ter me presenteado com sua efêmera passagem em minha vida.

Essa tese corrobora meu interesse em inquirir, ao longo dos últimos três anos, a respeito de um dos temas de cunho econômico. Portanto algumas pessoas tiveram uma passagem um tanto quanto especial nesse ponto da jornada. Agradeço ao Pedro Hugo, ao companheiro Antônio de Pádua, ao tocador Laércio, pela iniciativa da *Sexta Básica*, que além instigar o eterno aprendizado em assuntos de natureza econômica, fortaleceram nossos laços afetivos comprovando que amizade será sempre o investimento do ano.

Essa tese não representa apenas mais uma etapa concluída ao longo de minha formação acadêmica. Ela instiga um desafio. E aguarda que eu o enfrente. Ela representa o limbo, a possibilidade de novas mudanças e novas conquistas. Cada pessoa que passou por minha vida, cada experiência vivida, cada chopp tomado, cada coxinha em dona Deda, cada lambreta comida, cada sonho compartilhado, cada música de Zappa, cada não e sim recebidos, cada filme, cada música sugerida influenciou de forma direta no que sou hoje, e certamente para o que me tornarei amanhã. Devo isso a todos vocês.

Finalmente, agradeço ao CNPq e ao departamento de Física pelo suporte durante todos esses anos de atividade acadêmica.

RESUMO

Neste trabalho realizamos uma análise estatística do Índice Ibovespa da bolsa de valores de São Paulo, que é o índice mais representativo do mercado acionário brasileiro. A partir das séries temporais do fechamento diário do índice e de cotações *intraday*, foram feitas análises das respectivas densidades de probabilidade e distribuições acumuladas dos *retornos* do Índice, calculados em relação a janelas de tempo de vários tamanhos, a fim de se inferir a dinâmica de preços subjacente. Nossos resultados indicam que as distribuições dos retornos, pelo menos na região central, são muito bem descritas por funções exponenciais, até janelas de tempo da ordem de 30 dias. Verificou-se também que a variância dessas distribuições cresce linearmente com o tamanho da janela de tempo, sugerindo assim que a dinâmica correspondente pode ser descrita por um processo estocástico difusivo, mas com distribuições exponenciais e não gaussianas. Esse fato, por outro lado, tem implicações diretas para o mercado de derivativos, em particular, o mercado de opções do Ibovespa, uma vez que o modelo padrão de finanças, o chamado modelo de Black-Scholes, tem como premissa básica que os retornos seguem um processo gaussiano. Surge, portanto, a necessidade de se estudar um modelo de precificação de opções do Ibovespa, em que as distribuições dos retornos desse ativo apresentem uma distribuição exponencial. Nesse contexto, discutimos brevemente a aplicação de um modelo exponencial de opções recentemente proposto na literatura.

ABSTRACT

In this work, we perform a statistical analysis of the Ibovespa stock index of the São Paulo Stock Exchange, which is the most representative stock index in the Brazilian stock market. Using the time series of the daily closing values of the Ibovespa as well as its *intraday* quotations, we analysed both the probability density functions and the cumulative distributions of the Ibovespa *returns*, calculated for time lags of different sizes. Our results indicate that the distributions of returns, at least in the central region, are very well described by exponential functions up until time lags around 30 days. It was also found that the variance of these distributions increases in a linear fashion as we increase the time lag, suggesting that the related dynamics can be described by a diffusive stochastic process, but with exponential distributions rather than gaussian ones. This fact may have direct implications for the Brazilian derivatives market and, in particular, for the Ibovespa options market. It is therefore of considerable interest to study a pricing model for Ibovespa options, where the returns distributions from this asset follows a exponential behavior. In this work, we also report preliminary results that show that an exponential model for pricing options recently proposed in the literature may be suitable for the Brazilian option market.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	1
1.1 Econofísica	1
1.2 Mercado Acionário Brasileiro	4
1.3 Organização da Dissertação	6
Capítulo 2—Derivativos e o Modelo de Black-Scholes	7
2.1 Mercado de Derivativos	7
2.2 Opções	9
2.3 Dinâmica de Preços	15
2.4 Teoria de Black-Scholes	19
2.4.1 Delta Hedging	20
2.4.2 Arbitragem	22
2.4.3 Equação de Black-Scholes	24
2.4.4 Fórmula de Black e Scholes	25
2.5 Abordagem “Risk Neutral”	27
Capítulo 3—Modelo Exponencial para a Distribuição de Retornos	29
3.1 Distribuição Exponencial	29
3.2 Precificação de Opções no Modelo Exponencial	33

Capítulo 4—Análise Estatística do Índice Ibovespa	36
4.1 Dados Analisados	36
4.2 Estatística dos Retornos Diários	41
4.3 Estatística de Retornos Intraday	51
Capítulo 5—Conclusões e Perspectivas	55
Bibliografia	59

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama de payoff de uma opção de compra no dia do vencimento. .	11
2.2	Diagrama de payoff de uma opção de venda no dia do vencimento. . .	12
2.3	Diagrama de Lucro de uma opção de compra no dia do vencimento. .	13
2.4	Diagrama de Lucro de uma opção de venda no dia do vencimento. . .	14
4.1	Fechamento diário do Ibovespa desde janeiro de 1968 a fevereiro de 2004	37
4.2	Série temporal mensal do IGP-DI, de janeiro de 1968 a fevereiro de 2004	38
4.3	Série temporal do retorno diário do Ibovespa desde janeiro de 1968 a fevereiro de 2004.	40
4.4	Histograma dos retornos do Ibovespa, com janelas de tempo de tempo de 1 a 60 dias.	41
4.5	Histograma em escala semi-log dos retornos de 1 dia comparados com uma curva gaussiana de desvio padrão igual ao dos dados, $\sigma = 0.028$.	42
4.6	Histograma em escala semi-log dos retornos de 100 dia comparados com uma curva gaussiana de desvio padrão igual ao dos dados, $\sigma = 0.34$. 43	
4.7	Histograma do retorno diário do Ibovespa em escala semi-log com ajuste exponencial na região central.	44
4.8	Distribuição acumulada de probabilidades dos retornos diários em escala semi-log.	45

4.9	Distribuição acumulada de probabilidade dos retornos, para janelas de tempo entre 1 e 60 dias. As setas indicam os limites das regiões utilizadas para o ajuste exponencial.	47
4.10	Comportamento da variância em função da janela de tempo τ . A curva inferior é obtida a partir dos parâmetros da distribuição exponencial γ e ν . A superior é obtida a partir dos dados das séries temporais dos retornos.	48
4.11	Distribuição acumulada de probabilidade dos retornos normalizados, para janelas de tempo de 1, 5, 10, 15 e 20 dias.	49
4.12	Distribuição acumulada de probabilidades dos retornos <i>intraday</i> do Ibovespa, para janelas de tempo de 15 minutos ($\tau = 1$) a 7 h ($\tau = 28$).	51
4.13	Variância em função da janela de tempo para série de retornos <i>intraday</i>	52
4.14	Distribuição acumulada de probabilidades dos retornos normalizados <i>intraday</i> do Ibovespa, em escala semi-log.	54
4.15	Distribuição acumulada dos retornos <i>intraday</i> normalizados para $\tau = 28$, com ajuste exponencial na região central.	54
4.16	Distribuição acumulada dos retornos diários normalizados para $\tau = 1$, com ajuste exponencial na região central.	54
5.1	Cotação no dia 16 de julho de 2004 das opções da série IBOVH , cujo vencimento foi em 18 de agosto de 2004. A curva suave mostra o ajuste do modelo exponencial; vide texto.	57

INTRODUÇÃO

1.1 ECONOFÍSICA

A econofísica é uma área de estudo interdisciplinar bastante recente, visto que a palavra apareceu pela primeira vez em uma conferência de sistemas complexos em 1995, realizada na cidade de Calcutá na Índia. Somente em 1997 o vocábulo foi adotado oficialmente dando título a um workshop realizado na Hungria. Desde então, a aplicação de métodos da mecânica estatística, da teoria do caos, e da análise de fractais a sistemas econômicos e sociais tem atraído bastante atenção no universo acadêmico. Em suma, a econofísica trata da análise de mercados financeiros do ponto de vista da física, procurando descrever sistemas complexos em termos de seus constituintes básicos e leis de interação bastante simples.

Um dos grandes estímulos para as pesquisas realizadas em econofísica é a acessibilidade a registros de grande quantidade de dados financeiros, praticamente a todo instante. Além do registro dos fechamentos diários de índices de bolsas de valores, preços de *commodities*, cotações de moedas, taxas de juros, já é possível obter registros de operações em escalas de segundos, a exemplo da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), que já dispõe de registros de fechamento do Ibovespa a cada 30 segundos. Estes registros são conhecidos como dados de alta frequência, e por razões óbvias, são dados riquíssimos do ponto de vista estatístico.

Certamente o mercado financeiro pode ser considerado um sistema complexo, devido ao fato de que seus agentes (bancos, firmas, consumidores, investidores etc)

interagem entre si de maneira altamente não linear [1]. Fatores cuja a própria natureza não é determinística, tais como a ocorrência de novos fatos econômicos, eventos geopolíticos, alterações climáticas, dentre outros, fazem com que as previsões a respeito do futuro das variáveis do mercado, entre elas o preço de ativos financeiros, sejam tratadas sob uma óptica probabilística.

O ponto de partida dessa nova percepção a respeito da aleatoriedade no mercado financeiro é o ano de 1900, quando Louis Bachelier [2], um matemático francês, cujo orientador era Henri Poincaré, um dos maiores matemáticos de seu tempo, desenvolveu uma teoria, do que hoje é conhecido como movimento browniano¹, para explicar o comportamento dos preços, e suas respectivas variações relativas, de títulos do governo francês. Seu trabalho resultou em uma tese² de doutorado em matemática e hoje é considerada um marco em finanças. Esse trabalho ficou um tanto “esquecido” até as décadas de 50 e 60 com os resultados de Paul Samuelson sobre o caminhante aleatório em finanças. Em 1965, esse autor [3] apresenta uma prova de que, de certa maneira, as variações dos preços flutuam aleatoriamente. Dito de outra forma, é como se todas as inúmeras variáveis envolvidas na dinâmica da evolução dos preços dos ativos financeiros, cuja a previsão não poderia ser determinística, estivessem reunidas em apenas um processo conhecido como “**random walk**” ou caminhante aleatório, que é um processo bastante conhecido na Física³. É o mesmo que dizer que toda a imprevisibilidade inerente à natureza do mercado financeiro é “despejada” em um único processo estocástico. Sob essa nova óptica, ao tentar descrever um sistema econômico, qualquer modelo matemático de Finanças fará uso de uma componente aleatória (estocástica), de forma que uma previsão determinística de tais sistemas será praticamente inviável, senão impossível.

¹primeiramente observado em 1827 pelo botânico escocês Robert Brown

²Apesar do atual reconhecimento respeito da importância do trabalho proposto por Bachelier, os membros da banca não atribuíram distinção à sua tese.

³Talvez esse seja um dos motivos pelo qual no universo da física, a maioria das pessoas dá crédito a Einstein para a primeira descrição matemática do caminhante [4], que em 1905, descreve matematicamente o movimento browniano.

Essa hipótese de que os preços de ativos financeiros seguem uma caminhada aleatória é a essência da chamada Hipótese do Mercado Eficiente (HME) [5, 6]. Mais especificamente, a HME postula os seguintes pontos:

- Movimentos sucessivos de preços são estatisticamente independentes.
- Toda informação disponível do passado ao presente está completamente refletida no preço atual.

Como veremos no capítulo 2, o modelo padrão de mercado eficiente inclui além disso a hipótese de que os retornos, ou variações relativas, dos preços, são distribuídos de acordo com uma gaussiana. Entretanto, em 1963, Mandelbrot [7], ao analisar preços do algodão em várias bolsas de mercadorias nos Estados Unidos, encontrou evidências de que os retornos extremos ocorriam com maior probabilidade do que o previsto por uma gaussiana, dando uma forma mais elevada às caudas⁴ das distribuições de probabilidade. Essa foi a principal motivação para propor que as distribuições de probabilidade dos retornos poderiam ser mais bem descritas por *leis de potência*, ou leis de escala, a exemplo da observação do economista social italiano Pareto [8], que há pouco mais de um século investigou o caráter estatístico da renda dos indivíduos usando uma distribuição da forma

$$p(x) \propto x^{-\nu}, \quad (1.1)$$

onde $p(x)$ é a probabilidade de um indivíduo ter uma renda x , e ν é um expoente relacionado à escala da distribuição.

A principal motivação que levou físicos estatísticos a estudar o mercado foi a análise das distribuições de probabilidade das variações relativas dos preços dos mais variados ativos. Em distintos mercados mundiais, em particular em mercados desenvolvidos, as análises de retornos dos preços de vários ativos financeiros, como índices

⁴Tal aspecto ficou popularmente conhecido como *Fat Tail* (Cauda Gorda)

de ações, taxas de câmbio, tem estado relativamente de acordo com a descrição proposta por Mandelbrot, através de leis de potência. Entretanto, análises recentes do comportamento de índices de bolsas de valores de alguns mercados (ao que parece, mercados em desenvolvimento) têm apontado para outros tipos de distribuições, em particular do tipo exponencial [9, 10, 11]. De fato, um temas centrais dessa dissertação é o estudo da distribuição exponencial no mercado acionário brasileiro.

Outro marco importante em Finanças é a publicação do trabalho de Black e Scholes [12] em 1973, onde é lançada uma proposta para definir preços de certos instrumentos financeiros, chamados de derivativos, que hoje movimentam bilhões de dólares em todo o mundo. Uma descrição mais detalhada da teoria de Black-Scholes será apresentada no próximo capítulo.

1.2 MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO

Nosso principal objeto de estudo, neste trabalho, será o índice de ações Ibovespa da Bolsa de Valores de São Paulo. Um índice de ações é nada mais que um portfólio, ou seja, uma carteira de títulos, composta de ações de várias companhias, de acordo com a participação da companhia no mercado. Cada índice, serve, portanto como forma de referência para o desempenho de uma determinada cesta de ações. Nesse sentido, o valor do índice reflete um certo “comportamento médio” do mercado.

No Brasil temos à disposição vários índices de ações, como por exemplo o Ibovespa, FGV-1100, IBX, IBX-50, IBVX-2, IGC, cada qual com suas próprias regras de composição. Existem ainda os índices setoriais, ou seja, índices que tentam expressar o comportamento de um determinado setor da economia como por exemplo o Índice de Energia Elétrica Brasileiro-IEE e o Índice de Telecomunicações-ITEL.

O Índice Ibovespa, criado em 2 de janeiro de 1968, é o mais importante índice de ações do mercado brasileiro e, um dos mais importantes índices financeiros da

América Latina. Ao longo de mais de três décadas, ele vem refletindo o comportamento de cestas de ações mais negociadas, escolhidas quadrimensalmente. Devido à sua importância no cenário financeiro brasileiro, é considerado um dos principais “termômetros” da economia do país.

Quanto à composição da carteira, ao contrário de alguns dos mais importantes índices mundiais de bolsas de valores, tais como o *Dow Jones*, *Nasdaq*, *NIKKEY*, *DAX*, o Ibovespa é ponderado por liquidez. É expresso por uma média ponderada de preços de ações, selecionadas por um critério de negociabilidade. Com base no *índice de negociabilidade*, apurado para cada ação e outros critérios adicionais, determinam-se quadrimensalmente as quantidades “teóricas” de cada papel que integrará o Ibovespa, servindo ao mesmo tempo, como fator de ponderação.

A *negociabilidade* de cada ação é apurada conforme a expressão

$$\sqrt{\frac{n}{N} \frac{v}{V}}, \quad (1.2)$$

onde n é o número de transações realizadas com essa ação no período, N o número de transações registradas no Bovespa com todos os papéis no mesmo período, v como sendo o valor negociado com essa ação no período e, finalmente V o valor total negociado com todas as ações no período considerado.

Quanto aos critérios metodológicos do Ibovespa, participam da carteira teórica do índice, as ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo que satisfaçam todos os seguintes critérios:

- Estejam incluídas em uma relação de ações resultantes da soma, em ordem decrescente, dos índices de negociabilidade até 80% do valor da soma de todos os índices individuais.
- Apresentem participação, em termos de volume, superior a 0,1% do total.
- Tenham sido negociadas em mais de 80% do total de pregões do período.

O mercado acionário brasileiro, em particular o Índice Ibovespa, tem sido objeto de estudo em várias publicações na área de econofísica. Várias propostas tem sido levantadas para melhor compreender a origem das respectivas “caudas gordas” também presentes nas distribuições de retornos do Ibovespa [13], bem como identificar que tipo de distribuições os retornos do índice Ibovespa se enquadram [14]. Em particular, o trabalho de Toledo [11], utiliza o modelo de Heston (volatilidade estocástica) para descrever as distribuições de retornos do Ibovespa, com janelas de tempo que vão desde 1 minuto a 10 dias.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada como descrito a seguir. No capítulo 2 será feita uma revisão sobre o mercado de derivativos. Em particular, discutiremos com algum detalhe o caso de *opções*, de maneira a formular o problema de calcular os preços de tais contratos. Em seguida, falaremos sobre a teoria de Black-Scholes. No capítulo 3, apresentaremos um modelo de distribuição exponencial bem como suas previsões para os preços de opções. No capítulo 4, que consiste no cerne do presente trabalho, realizamos análises estatísticas das distribuições dos retornos do índice Ibovespa. Nossos resultados sugerem que as distribuições dos retornos do Ibovespa são melhores descritas por funções exponenciais e não por gaussianas ou leis de potência. Finalmente, no capítulo 5, resumiremos nossas principais conclusões, bem como apresentaremos perspectivas para possíveis aplicações dos nossos resultados no mercado de opções brasileiro.

CAPÍTULO 2

DERIVATIVOS E O MODELO DE BLACK-SCHOLES

2.1 MERCADO DE DERIVATIVOS

Os derivativos podem ser entendidos como ativos financeiros cujos valores e características de negociação estão “atrelados” a outros ativos que lhe servem de referência. Daí o termo “derivativo”, uma vez que os seus preços derivam do preço de outros ativos financeiros. Os ativos de referência podem ser ações, índices de ações, taxas de câmbio, *commodities*¹, taxa de juros, entre outros. Tais instrumentos financeiros são negociados em bolsas organizadas como a Chicago Board of Trade (CBOT), Chicago Merchantile Exchange (CME) e, no Brasil, a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF). Apesar de instrumentos de derivativos serem negociados há bastante tempo, as opções, em particular, só começaram a ser negociadas em Bolsa em 26 de abril de 1973, após a criação da Chicago Board Options Exchange (CBOE) [15].

Nessas bolsas de mercadorias são negociados basicamente quatro tipos de derivativos:

- contratos a termo
- contratos futuros
- swaps

¹A palavra inglesa *commodity* significa mercadoria, mas no mercado financeiro é utilizada para indicar um tipo de produto, geralmente agrícola ou mineral, de grande importância econômica internacional porque é amplamente negociado entre importadores e exportadores. Alguns exemplos de *commodities* seriam: café, algodão, soja, cobre, petróleo.

- opções

Tais instrumentos derivativos possuem uma característica básica: “contrato hoje, entrega depois”. São contratos em que se define com antecedência a que preço determinada mercadoria será negociada em um tempo futuro. Contratos dessa natureza permitem, por exemplo, que os negociadores previnam-se contra eventuais oscilações de preços no decorrer do tempo. Esse tipo de estratégia de proteção contra risco é conhecida como *Hedging*. Uma outra utilização destes instrumentos financeiros é a especulação. No Brasil, em particular, devido às freqüentes influências externas, bem como expectativas “deturpadas” a respeito de nosso mercado financeiro, a palavra especulador teve seu significado desfigurado no imaginário popular. A este personagem se associava a imagem de explorador, aproveitador, criador de boatos que poderiam mudar o curso do mercado financeiro apenas para benefício próprio. A raiz latina da palavra *especulador* refere-se à visão. Ao tentar especular, ou “enxergar” o preço futuro dos mais variados ativos, os agentes especuladores dão liquidez ao mercado, contribuem para formação dos preços e ainda podem obter lucros nas respectivas operações. É possível ainda fazer operações simultâneas (“casadas”) nos mercados de derivativos e do ativo de referência, tipicamente sem desembolso inicial, para explorar possíveis “desalinhamentos” de preços, de modo que o investidor sempre consiga auferir lucros, independente da variação de preços do ativo. A esse tipo de operação, imune a risco, denomina-se *arbitragem*.

Em suma, quem atua no mercado de derivativos possui basicamente três razões:

- *hedging*, ou o ato de se precaver das oscilações futuras dos preços de um determinado ativo financeiro (oriundas de fatores externos imprevisíveis, tais como uma chuva que destrua uma plantação de milho, ou até mesmo uma alta do dólar devido a uma intervenção ou nova estratégia adotada pelo Banco Central).

- *especulação*, como sendo uma negociação em mercado de risco com o objetivo de ganho, em geral a curto prazo.
- *arbitragem*, como sendo a possibilidade de se obter lucro sem correr risco e sem investimento inicial, aproveitando situações onde exista má formação de preços.

Como forma de consolidar os conceitos acima sobre os contratos de derivativos, se faz necessária uma breve explanação sobre o mercado de opções, uma vez que o estudo das opções negociadas na Bovespa é um dos temas desta dissertação.

2.2 OPÇÕES

Uma opção nada mais é do que o **direito**, mas não a obrigação, de se comprar (vender) um ativo financeiro, cujo o preço corrente é S , por um preço pré-determinado K (preço de exercício) em uma determinada data T . O contrato que permite a compra (venda) do ativo é denominado, portanto, uma opção de compra (venda). As opções de compra e venda são também conhecidas pela terminologia em inglês, ***call*** e ***put***, respectivamente. Quanto ao exercício, as opções ainda podem ser classificadas como **Européias** e **Americanas**. A única diferença entre as duas é que a última pode ser exercida em qualquer instante, até a data do vencimento, enquanto a primeira só poderá ser exercida no dia do vencimento. Em resumo, as características fundamentais que definem um contrato de opção são:

- o ativo de referência com preço S ,
- o preço de exercício K ,
- a data de vencimento T .

Considere agora uma opção européia de compra. Suponha que no dia do vencimento do contrato o ativo de referência esteja cotado a $S(T)$. Duas situações

podem ocorrer no vencimento:

- $S(T) < K$, a cotação do ativo é inferior ao preço de exercício. Neste caso, o titular da opção **não exerce a opção**, pois seria mais barato comprar tal ativo no mercado, logo a opção expira sem qualquer valor (vira “pó” no jargão do mercado).
- $S(T) > K$, a cotação do ativo é superior ao preço de exercício, portanto o titular **exerce a opção**, comprando o ativo pelo preço K e revendendo no mercado pelo preço S obtendo, portanto, um lucro de $S - K$. Ou seja, a opção vale exatamente $S - K$.

Em resumo, o valor de uma opção de compra no dia do vencimento (ou *payoff*) é

$$payoff = \max(S - K, 0) \quad (2.1)$$

Uma maneira interessante de visualizar o valor da opção no dia do vencimento T é através dos diagramas de **payoff**. Nestes diagramas visualizamos o valor da opção, no dia do vencimento, em função do preço do ativo de referência. A figura 2.1 ilustra como o valor de uma opção de compra se comporta, no dia do vencimento, em função do preço de um ativo S . Seu comportamento é definido através da equação 2.1. De forma análoga, a figura 2.2 ilustra o valor da opção de venda, no dia do vencimento, que é agora dado pela função $\max(K - S, 0)$.

Como o contrato de opção dá o direito de se comprar (vender) um ativo, é razoável que se pague pelo mesmo. A esse valor é dado o nome de *prêmio*, denotado por C_0 , que é pago pelo *titular* da opção ao chamado *lançador* da opção. O lançador exige um prêmio devido ao fato de que ele assume o risco de vender (comprar) tal ativo por um preço fixo no futuro, enquanto que o titular não assume risco algum uma vez que ele terá a chance de escolher se irá comprar (vender) tal ativo financeiro. Como o *lançador* terá que entregar o ativo no caso de o titular das opções optar

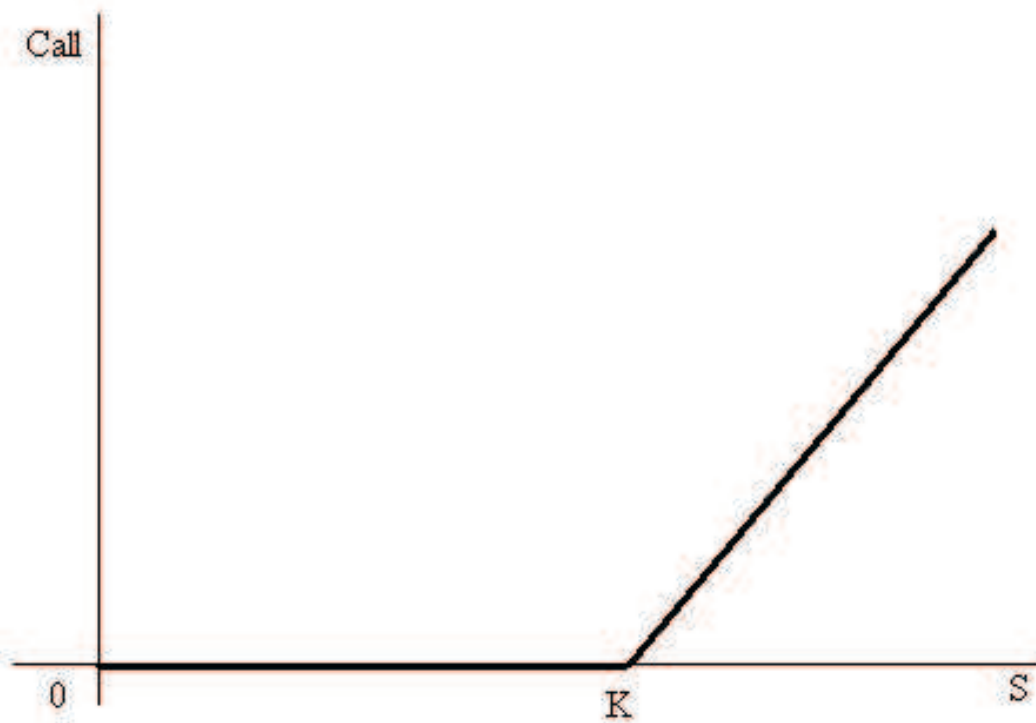


Figura 2.1. Diagrama de payoff de uma opção de compra no dia do vencimento.

por exercê-las, diz-se que o lançador de uma opção de compra assume uma posição “vendida”, e o detentor da opção uma posição “comprada”.

É oportuno mencionar, para uso posterior, que é possível também assumir posições “vendidas” em ações, significando que um investidor pode tomar ações “emprestadas” no mercado para vendê-las em seguida, mantendo para si o valor auferido. Posteriormente, entretanto, o investidor terá que “devolver” essas ações ao mercado. Isso possibilita, portanto, um investidor realizar transações com ações que não lhes pertençam.

A idéia básica do prêmio de uma opção pode ser exemplificada com a situação em que um comprador C saia de casa para analisar um apartamento que um vendedor V tem interesse em vender por um preço X . C se interessa em comprar o apartamento mas afirma que só poderá fazê-lo dentro de 15 dias. Como forma de

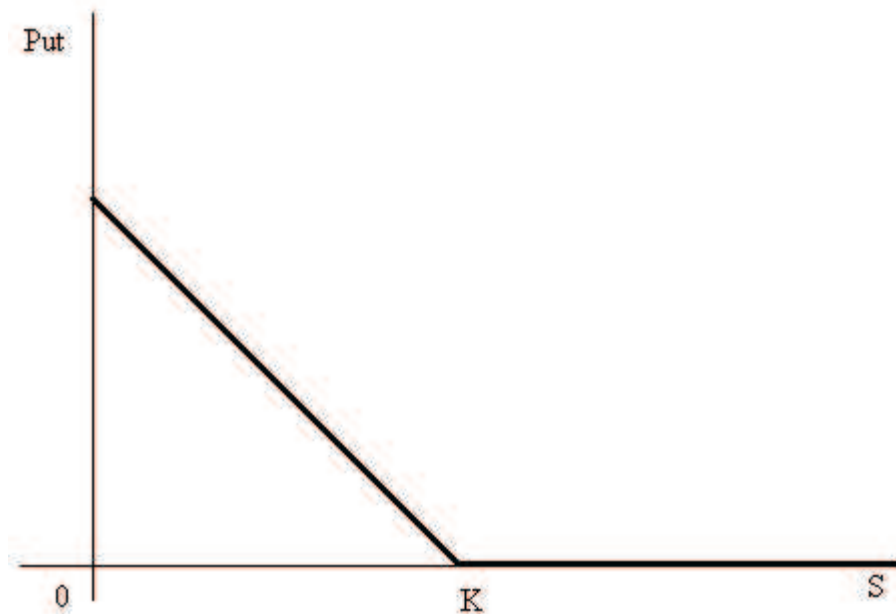


Figura 2.2. Diagrama de payoff de uma opção de venda no dia do vencimento.

garantir que o imóvel estará disponível para compra dentro do prazo combinado, V exige um determinado *signal* a ser pago à vista que ficará consigo, qualquer que seja a decisão do comprador C (Ou seja, no caso de C honrar o compromisso o *signal* pago não é abatido do valor do imóvel). Nesse caso, C está comprando uma opção de compra do apartamento.

Uma vez que temos que pagar por um contrato de opção, os diagramas de **payoff** podem não ser a melhor maneira de se visualizar os lucros auferidos por esses contratos no dia do vencimento, visto que não é feita menção alguma ao valor que o titular teve que desembolsar, ou melhor, o prêmio. Sendo assim, podemos utilizar um diagrama alternativo conhecido como **Diagrama de Lucro**. Para obter tais diagramas basta que o valor da opção seja subtraído do prêmio, conforme as figuras 2.3 e 2.4 respectivamente. Esses diagramas são ideais para visualizar a partir de que preço S^* do ativo de referência, no dia do vencimento, o contrato de opção gera lucro.

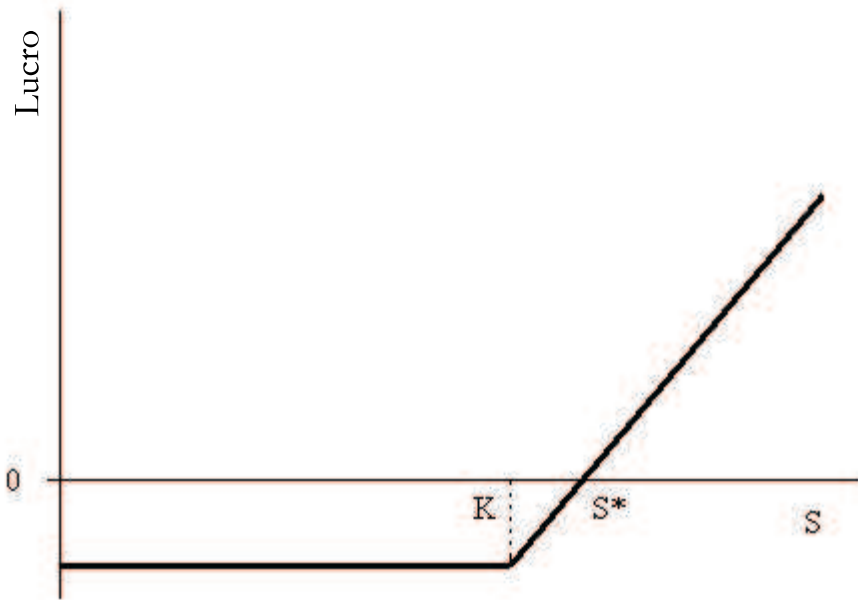


Figura 2.3. Diagrama de Lucro de uma opção de compra no dia do vencimento.

Como forma de ratificar a definição de um opção, vale a pena considerar um exemplo específico, mesmo que idealizado. Suponha que uma empresa brasileira tenha uma dívida em dólares, com vencimento dentro dos próximos 3 meses. A empresa está ciente de que o dólar hoje foi cotado a $S = R\$ 3,00$. Como forma de se proteger de eventuais oscilações futuras nos preços da taxa de câmbio, a empresa resolve comprar contratos de opções que lhes dêem o direito de comprar o dólar dentro de 3 meses pelo valor de $K = R\$ 3,15$. Suponha que o preço do contrato da opção (prêmio) em um dia arbitrário t seja $R\$ 0,10$ por cada unidade de dólar. Se no dia do vencimento a cotação do dólar for menor que o preço de exercício, ou seja, $S(T) < R\$ 3,15$, o titular **não exerce a opção**. Caso contrário, se $S(T) > R\$ 3,15$, o titular **exerce a opção** comprando o dólar pelo valor combinado e na prática lucrando $L = S(T) - K - C_0$. Em ambos os casos, o lançador fica com o prêmio C_0 pago pelo titular do contrato de opção. Entretanto, no primeiro caso esse valor será de lucro puro, ao passo que no segundo ele tem um prejuízo de

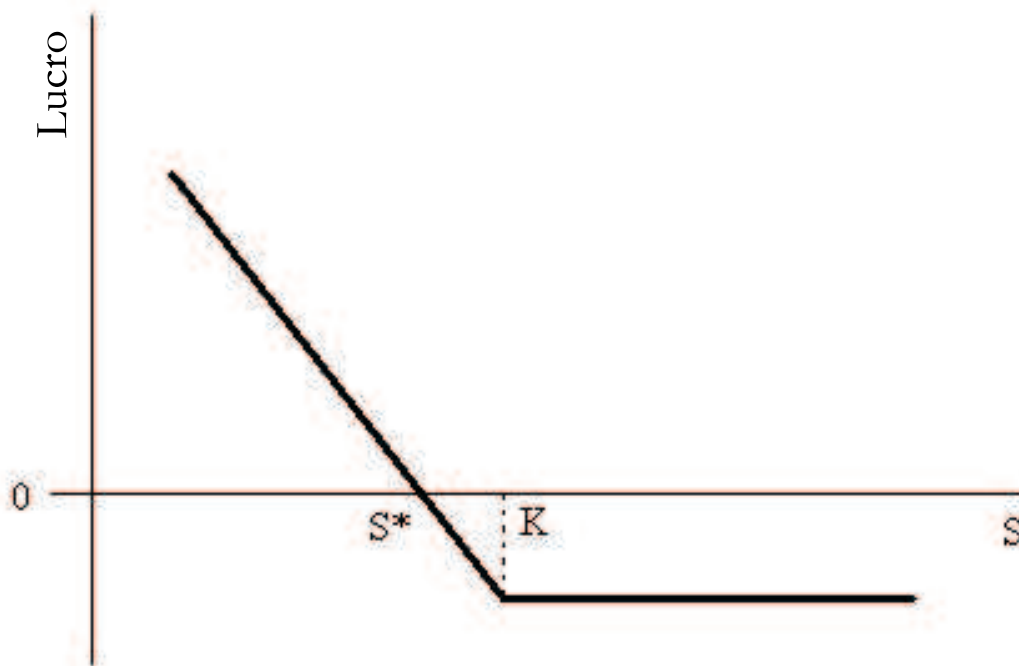


Figura 2.4. Diagrama de Lucro de uma opção de venda no dia do vencimento.

$S(T) - K + C_0$, por unidade de dólar.

As opções descritas até o momento são conhecidas como “*vanilla options*”, devido ao fato de que suas respectivas funções de *payoff* estão entre as mais simples possíveis. É importante ressaltar, porém, a existência de outros tipos de opções cujas funções de *payoff* são um pouco mais complicadas, podendo, por exemplo, depender do comportamento (trajetória) do preço do ativo de referência até o vencimento. Essas últimas são conhecidas como *exóticas* e em geral são desenvolvidas em bolsas que negociam câmbio.

Tendo em mãos a definição do que é uma opção, podemos fazer a seguinte indagação: qual deve ser o valor de um contrato de opção em um tempo t , cujo preço de exercício é K e o vencimento T ? Este foi um dos grandes problemas da década de 70 no contexto de Finanças Quantitativas. Partindo de um ponto de vista

estatístico, como estimar de maneira justa o preço de um contrato de opções? Como levar em conta as incertezas no mercado no que diz respeito às oscilações futuras dos preços dos ativos? Como obter informações (inferir) a partir da distribuição de probabilidade dos retornos dos preços de tais ativos?

Uma vez que os derivativos dependem dos preços dos ativos que lhe servem de referência, naturalmente teremos que analisar mais detalhadamente a forma com que os preços desses ativos se comportam. Veremos ainda como expressar um modelo estocástico para as variações relativas dos preços ou **retornos**.

Mais precisamente, se $S(t)$ denota o preço de um ativo financeiro, então o retorno $r(t)$ durante o intervalo Δt é definido como sendo a variação logarítmica do preço

$$r(t) = \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t), \quad (2.2)$$

que para pequenos intervalos de tempo, o retorno corresponde às variações relativas de preços:

$$r(t) = \Delta \ln S(t) \approx \frac{\Delta S}{S}. \quad (2.3)$$

2.3 DINÂMICA DE PREÇOS

Como já mencionamos, em 1900, cinco anos antes de Einstein descrever analiticamente o movimento Browniano, o matemático francês Louis Bachelier [2] defendeu uma tese intitulada de “Théorie de la Especulation”, na qual propunha que em um mercado especulativo os preços dos ativos financeiros poderiam ser descritos por um processo estocástico do tipo movimento browniano. Esse trabalho permaneceu praticamente desconhecido até 1950 [16, 17], quando se verificou que as correlações de curto alcance dos retornos dos preços dos ativos eram praticamente desprezíveis, conseqüentemente as suas respectivas séries temporais eram muito semelhantes à de um caminhante aleatório. Essa hipótese constitui o paradigma mais aceito em

Finanças, que afirma que o mercado é “eficiente” na determinação do preço mais racional dos ativos negociados. Nesse sentido, toda a informação possível a respeito de um determinado ativo financeiro está completamente projetada no seu preço atual, logo as variações futuras dos preços não dependem dos preços no passado, que é uma das características básicas do movimento browniano.

Uma vez que é praticamente impossível fazer previsões determinísticas a respeito das variações relativas dos preços de certos ativos financeiros, tais ativos são conhecidos como *ativos de risco*. Uma ação pode ser considerado o exemplo mais claro de um *ativo de risco*. O preço de uma ação de uma determinada empresa representa o seu presente valor de mercado, bem como a expectativa que os investidores têm em relação ao futuro da mesma. Ou seja, o valor de uma empresa hoje depende do que acontecerá no futuro, como por exemplo os lucros que ela gerará. Por essas (e outras) razões, o valor da empresa e, conseqüentemente, o preço de sua ação possuem uma parcela considerável de incerteza (risco). Diante da imprevisibilidade dos preços dos ativos, surge a necessidade de se estudar os movimentos futuros dos preços partindo de um ponto de vista probabilístico.

Suponha a existência de um investimento livre de risco, como por exemplo uma caderneta de poupança, cujo valor investido é valorizado a uma taxa de juros fixa r . Seu valor $B(t)$ pode ser previsto de forma completamente determinística através da equação

$$\frac{dB}{dt} = rB. \quad (2.4)$$

Considere agora o caso de um ativo de risco. O modelo para dinâmica de preços mais comum em Finanças decompõe a variação relativa, ou retornos, dos preços dos ativos de risco em duas partes: uma ***determinística*** e outra ***estocástica***, onde o comportamento aleatório é levado em conta devido à fatores externos, como por exemplo, notícias inesperadas, aumento de taxas de juros etc. A parte puramente determinística, ou previsível do retorno é semelhante ao rendimento

da conta poupança, dada pela equação 2.4, e é representada por

$$\left(\frac{dS}{S}\right)_{det} = \mu dt, \quad (2.5)$$

onde μ é a taxa de retorno média do preço do ativo. A componente estocástica do retorno, por sua vez, pode ser expressa por

$$\left(\frac{dS}{S}\right)_{est} = \sigma dX \quad (2.6)$$

onde $X(t)$ é o processo estocástico conhecido como movimento browniano ou processo de Wiener, o qual possui as seguintes propriedades:

- dX é uma variável estocástica, cuja a distribuição de probabilidade é uma gaussiana.
- a média de dX é zero.
- a variância de dX é dt .

Portanto, levando-se em conta as duas contribuições para o retorno, chegamos à expressão

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX, \quad (2.7)$$

que caracteriza a dinâmica dos retornos dos preços dos ativos financeiros.

A expressão (2.7), que representa um dos principais pressupostos do modelo de Black-Scholes, é uma *equação diferencial estocástica* (EDE) e pode ser definida de maneira matematicamente precisa [18]. Por ser uma EDE, não podemos fazer previsões determinísticas a respeito dos preços de ativos financeiros. A equação (2.7), em particular, admite uma solução exata para a distribuição de probabilidade do ativo assumir um preço S , conforme mostraremos a seguir.

Para resolver a EDE acima, vamos recorrer ao *Lema de Itô*, que é o análogo à série de Taylor, com a sutil diferença de que uma das variáveis da função agora

passa a ser estocástica. Dessa maneira será possível realizar a diferenciação de uma função que dependa de um processo estocástico. Seja $F = F(Y, t)$ uma função, onde $Y(t)$ é um processo estocástico descrito pela seguinte equação diferencial estocástica

$$dY = a(Y, t)dt + b(Y, t)dX. \quad (2.8)$$

O *Lema de Itô* [19] nos leva à seguinte regra de diferenciação:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial Y}dY + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) dt. \quad (2.9)$$

A partir daqui, a equação (2.9) será utilizada para se trabalhar corretamente com a diferenciação das funções de nosso interesse.

Usando a equação (2.7) e (2.9), temos que uma função $f(S)$ qualquer deve satisfazer à seguinte equação diferencial estocástica:

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt. \quad (2.10)$$

Substituindo dS da equação (2.7) em (2.10) temos

$$df = \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt + \sigma S \frac{df}{dS} dX. \quad (2.11)$$

Diante da expressão acima, analisemos a função $f(S) = \ln S$:

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{S} \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 f}{dS^2} = -\frac{1}{S^2} \quad (2.13)$$

Substituindo as derivadas primeira e segunda de $f(S)$ na equação (2.11) obtemos

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dX \quad (2.14)$$

que é expressão de um movimento browniano com **deriva**. Logo, o $\ln S$ segue um movimento browniano cuja a média é $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ e a variância $\sigma^2 t$. Uma vez que a distribuição do $\ln S$ obedece a uma gaussiana segundo

$$p\left(\ln \frac{S_T}{S_t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right), \quad (2.15)$$

dizemos que o comportamento do preço S é log-normal. Se quisermos expressar a distribuição de probabilidade dos preços $p(S_T)$, basta que façamos a mudança de variável [20] com

$$p(S_T) = \frac{1}{S_T} p\left(\ln \frac{S_T}{S_t}\right). \quad (2.16)$$

Finalmente, a distribuição de probabilidade dos preços é expressa por

$$p(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \frac{1}{S_T} \exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right). \quad (2.17)$$

2.4 TEORIA DE BLACK-SCHOLES

Por volta de 1969, Fischer Black e Myron Scholes, consultor independente e professor assistente do MIT, respectivamente, tiveram uma brilhante idéia que iria transformar o mundo das finanças. Em 1973, o modelo de Black e Scholes [12] foi publicado e causou um grande impacto no mundo das Finanças Quantitativas, em particular na administração de risco em se tratando de derivativos. O objetivo era definir um modelo analítico que determinasse os preços justos de mercado de opções européias. O ponto crucial era incluir no modelo o comportamento aleatório dos preços ativos financeiros de referência, bem como incorporar uma outra característica de um mercado eficiente, ou seja, a inexistência de possibilidade de arbitragem.

A seguir apresentaremos as principais etapas da dedução da famosa fórmula

de Black-Scholes que nos dá o preço de uma opção europeia de forma fechada.

2.4.1 Delta Hedging

O valor V de uma opção é uma função que depende, em princípio, de várias variáveis:

$$V = V(S, t; \sigma, \mu; K, T; r),$$

onde:

- S é o preço do ativo subjacente no instante t .
- σ e μ são parâmetros associados ao preço do ativo.
- K é o preço de exercício da opção.
- T é a data de vencimento do opção.
- r é uma taxa de juros fixa

Para não carregar a notação, vamos escrever por enquanto V apenas como função de S e t . Uma vez que o valor da opção depende do preço do ativo que lhe serve de referência $S(t)$, e este possui um caráter aleatório, então o valor da opção deve ser também descrito por uma equação diferencial estocástica.

Lançando mão do *Lema de Itô* (2.11), podemos escrever a equação diferencial estocástica para a função $V(S, t)$:

$$dV = \left(\mu S \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + \frac{dV}{dt} \right) dt + \sigma S \frac{dV}{dS} dX \quad (2.18)$$

Diante da equação 2.18, surge a seguinte questão: seria possível construir um portfólio com ações e opções tal que sua equação diferencial fosse completamente determinística? Melhor dizendo, poderíamos eliminar o risco por completo? Para

analisar essa questão, vamos supor que tenhamos um determinado portfólio denotado por Π , que consiste de uma *posição vendida* em Δ ações e apenas uma opção de compra sobre esta mesma ação. Neste caso, o valor do portfólio será representado pela equação:

$$\Pi = V - S\Delta. \quad (2.19)$$

Observe que o sinal negativo acima representa o fato de que temos Δ ações “vendidas”, ou seja, estamos devendo ações no mercado. Agora, suponhamos que no tempo $t + dt$, nosso portfólio passa a ter um valor $\Pi + d\Pi$, logo

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \quad (2.20)$$

A expressão (2.20) representa a diferenciação do valor de um “portfólio auto financiável”, ou seja, onde a compra de novos ativos deve ser completamente financiada pela venda de antigos ativos. Sendo assim, a variação do valor de nosso portfólio advém apenas das variações dos preços dos respectivos ativos.

Assumindo que os preços dos ativos seguem um movimento browniano geométrico

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX, \quad (2.21)$$

e substituindo (2.18) e (2.21) em (2.20), encontramos a equação diferencial estocástica:

$$d\Pi = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S \Delta \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX. \quad (2.22)$$

Notemos que a parte da equação 2.22 que multiplica dt é determinística e, a que multiplica dX é estocástica. Portanto, podemos eliminar o risco desse nosso portfólio

teórico completamente, bastando para isso que escolhamos

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (2.23)$$

que é o tipo de estratégia de diversificação conhecida como *Delta Hedging*. Uma vez que todo o risco foi eliminado, a expressão que representa a variação de nosso portfólio é reduzida a uma equação diferencial ordinária, portanto não mais estocástica

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (2.24)$$

Conforme anunciamos, este é um portfólio bastante especial visto que sabemos prever exatamente qual será sua variação. Um resultado deveras interessante, conforme veremos a seguir, é o fato de que essa variação deverá ser exatamente a mesma de uma quantia equivalente aplicada em uma conta bancária a uma taxa de juros r fixa. Este é um requisito fundamental em um *mercado eficiente* e é conhecido como princípio de ***não arbitragem***.

2.4.2 Arbitragem

Vamos discutir um pouco mais a respeito deste conceito extremamente importante em uma teoria de precificação de ativos financeiros. Intuitivamente, uma situação de arbitragem consiste na possibilidade de se obter lucro sem correr (com uma probabilidade não nula) risco e sem que haja necessidade de se fazer investimento inicial algum, bastando apenas que se explore um desequilíbrio de preços no mercado.

Como forma de elucidar tal conceito, tomemos como exemplo a expressão 2.24. Suponha que o nosso portfólio, que é livre de risco, rendesse mais que uma conta bancária, que, por hipótese, é livre de risco. Em uma situação singular como essa, qualquer agente do mercado poderia simplesmente tomar emprestado

uma quantidade qualquer em um banco a uma taxa de juros r fixa, investir neste portfólio e obter um rendimento que seja capaz de pagar ao banco e ainda assim ficar com a diferença. Dito de outra forma, este agente está “gerando dinheiro” do nada. Como a demanda por tal investimento mágico seria muito grande, o preço do portfólio se ajustaria, de modo que seu rendimento rendesse o mesmo que uma conta bancária, eliminando assim a possibilidade de arbitragem. A situação é exatamente a mesma no caso do nosso portfólio render menos que uma taxa bancária livre de risco. Poderíamos tomar uma posição vendida no portfólio, e então aplicar os recursos levantados em uma conta bancária livre de risco.

Um outro exemplo de arbitragem é o caso em que uma mesma ação é negociada em duas bolsas de valores em dois países com moedas distintas, digamos Nova York e Milão. Suponhamos que o preço da ação em Nova York seja $US\$9$ e em Milão é negociada a 8 Euros e que a taxa de câmbio entre o dólar e o Euro seja 0,80. Esta é uma possibilidade evidente de arbitragem, visto que podemos comprar n ações em Nova York e revendê-las em Milão. Desprezando os custos transacionais, que podem ser proibitivos na maioria dos casos, o agente obteria um lucro em dólares no valor de

$$Lucro = n\left(\frac{8}{0,8} - 9\right) = n. \quad (2.25)$$

Portanto, pode-se obter um lucro tão grande quanto se queira, bastando que compre-mos um número suficiente grande de ações. De forma análoga ao exemplo anterior, com o aumento da demanda pela ação no mercado de Nova York, e da oferta em Milão, os preços da mesma tenderiam a aumentar em Nova York e diminuir em Milão de forma a eliminar a possibilidade de arbitragem.

2.4.3 Equação de Black-Scholes

Conforme já anunciado, a equação (2.24) representa a variação de nosso portfólio de forma completamente determinística. Nesse caso, a fim de que as possibilidades de arbitragem sejam completamente eliminadas, tal portfólio deverá possuir um rendimento idêntico a um investimento bancário livre de risco. Sendo assim

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (2.26)$$

Portanto, substituindo as expressões (2.19), (2.23) e (2.24) na equação (2.26) obtemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt. \quad (2.27)$$

Eliminando dt e rearranjando os termos, chegamos à equação diferencial que expressa de que forma o valor de uma opção varia diante dos parâmetros ora citados. Finalmente, expressamos a famosa equação de Black e Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.28)$$

A solução dessa equação, sujeita à condição

$$V(S, T) = \max(S - K, 0), \quad (2.29)$$

determina, portanto, o preço de uma opção europeia de compra. A equação (2.28) foi primeiramente escrita em 1969 por Fischer Black and Myron Scholes, mas somente em 1973 foi publicada, juntamente com sua solução analítica [12]. Uma solução alternativa do problema foi apresentada no mesmo ano por Robert Merton. Por esse trabalho, Merton and Scholes foram agraciados em 1997 com o prêmio Nobel de Economia. (Como Fischer Black havia falecido em 1995, seu nome não pode ser indicado ao prêmio.)

Um detalhe extremamente importante e curioso é o fato de que a equação de Black e Scholes não faz menção alguma à taxa de crescimento médio μ . Conforme vimos no modelo da dinâmica do preço dos ativos financeiros, a taxa média de crescimento μ é uma expectativa em relação à valorização do ativos. Entretanto, os agentes do mercado possuem expectativas distintas a respeito do futuro de um determinado investimento. Aquele que compra um opção (de compra) espera que o ativo irá se valorizar. Em contrapartida, aquele que lança essa opção possui um expectativa oposta, ou seja, espera que o preço do ativo caia (para que ele não tenha que entregar a ação ao comprador da opção). Portanto é razoável que um modelo de precificação justo, do ponto de vista estatístico, não dependa de algo subjetivo, como é o caso da expectativa quanto a valorização de um ativo. Voltaremos a falar sobre esse tema na seção 2.5, quando falaremos da abordagem “risk-neutral”.

Com o intuito de finalizar os conceitos envolvidos na teoria de precificação de opções de Black and Scholes, vamos expor os passos para solucionar a equação diferencial parcial em questão.

2.4.4 Fórmula de Black e Scholes

Se os parâmetros μ , σ e r são todos constantes no tempo, a equação 2.28 pode ser resolvida exatamente e obtém-se uma solução explícita conhecida como Fórmula de Black-Scholes. Para tanto, é necessário que sejam feitas as mudanças de variáveis

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad (2.30)$$

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad (2.31)$$

$$V(t, S) = Ke^{-(\alpha x + \beta \tau)}u(\tau, x), \quad (2.32)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right), \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right)^2. \quad (2.33)$$

Fazendo estas substituições, a equação (2.28) é reduzida, após algumas manipulações algébricas, a uma equação diferencial para a função $u(\tau, x)$

$$\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2}. \quad (2.34)$$

A condição terminal da equação (2.29) transforma-se na seguinte condição inicial para u :

$$u(0, x) = u_0(x) = \max(e^{\sqrt{\beta}x} - e^{\sqrt{\alpha}x}). \quad (2.35)$$

Na Física, a equação 2.34 é correspondente a equação do calor ou equação da difusão. Ela fornece a evolução no tempo da distribuição de temperatura $u(\tau, x)$ em uma barra metálica, para uma determinada distribuição inicial de temperatura $u_0(x)$, devido à difusão do calor das regiões mais quentes para as regiões mais frias. A forma integral da solução exata da equação do calor é dada por

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds. \quad (2.36)$$

Substituindo a condição inicial 2.35 na solução citada acima obtemos, após algumas manipulações, a famosa fórmula de Black-Scholes para o preço de uma opção de compra:

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{r(t-T)}N(d_2), \quad (2.37)$$

onde $N(x)$ é a função de distribuição acumulada para a distribuição normal, i.e.,

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad (2.38)$$

e os parâmetros d_1 e d_2 são definidos pelas expressões

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right], \quad (2.39)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.40)$$

Finalmente, com as expressões (2.37), (2.39) e (2.40), fica definido por completo um modelo de precificação de opções com a suposição inicial de que os preços dos ativos financeiros seguem um comportamento log-normal com os parâmetros μ , σ e r constantes no tempo. Surge então a proposta de se estudar modelos alternativos, nos quais as distribuições de probabilidade dos retornos dos preços não são gaussianas. Novos modelos de dinâmica de preços implicam naturalmente em novas expressões para precificar as opções. Veremos, no capítulo 3, como um desses modelos alternativos afeta a precificação de opções, em particular quando as distribuições dos retornos dos preços dos ativos são exponenciais.

2.5 ABORDAGEM “RISK NEUTRAL”

É possível obter a equação (2.37) de maneira alternativa. Consideremos $C(S, t)$ o preço de uma opção de compra. Como vimos, o *payoff* dessa opção, que denotaremos aqui por Φ , é dado por

$$\Phi = C(S_T, T) = (S_T - K)\theta(S_T - K), \quad (2.41)$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heavside definida como:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

A idéia básica é, a partir da distribuição de probabilidades de preços S ,

efetuar uma média sobre todos os possíveis *payoff* da opção. Feita essa média, desconta-se então o resultado para o tempo presente, usando para isso uma taxa de juros r_d . Ou seja, o preço da opção pode ser escrito como

$$C(K, S, T, t) = e^{-r_d(T-t)} \langle \Phi(S_T) \rangle . \quad (2.43)$$

Essa equação pode ser reescrita de forma integral através da expressão

$$C(K, S, T, t) = e^{-r_d(T-t)} \int_0^\infty \Phi(S') P(S', T; S, t) dS' \quad (2.44)$$

onde $P(S', T; S, t)$ é a distribuição de probabilidade do preço S' na data do vencimento T sabendo que o preço do ativo no dia t é S , dada pela equação (2.17).

Entretanto, pode-se mostrar [18] que, para não haver possibilidade de arbitragem, devemos ajustar a taxa média de retorno μ à taxa de juros r antes de fazer a média. Fazendo $\mu = r$ em (2.17) e substituindo o resultado em (2.44), obtemos

$$C(K, S, T, t) = \frac{e^{-r_d(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_0^\infty \max(S' - K, 0) \exp\left(\ln\left(\frac{S'}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) \frac{dS'}{S'} . \quad (2.45)$$

Fazendo finalmente uma mudança de variáveis, e efetuando alguma simplificação, pode-se mostrar que a equação (2.45) é exatamente igual a equação (2.37).

Conforme, veremos no capítulo 3, esse será o caminho utilizado para se obter preços de opções partindo do pressuposto que os retornos são distribuídos segundo uma exponencial.

MODELO EXPONENCIAL PARA A DISTRIBUIÇÃO DE RETORNOS

Esta dissertação tem como objetivo principal mostrar que é possível aplicar um modelo exponencial para as distribuições de retornos do índice IBOVESPA. De fato, conforme veremos no capítulo 4, as distribuições de retorno do mercado acionário brasileiro são mais bem descritas por uma exponencial do que por gaussianas, como supõe a teoria padrão de Finanças. Portanto, é natural esperar que os preços dos respectivos contratos de opções devam ser formulados de maneira distinta daquela proposta por Black e Scholes.

Portanto, nesse capítulo, vamos discutir um modelo de precificação partindo do pressuposto de que as distribuições dos retornos do Ibovespa são descritas por uma exponencial. Antes de expor como as distribuições de probabilidade dos retornos podem afetar a definição de um “preço justo” para um contrato de opções, vamos primeiramente caracterizar a distribuição exponencial.

3.1 DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

O modelo de precificação de opções, partindo da suposição de que as distribuições dos retornos do ativo de referência são exponenciais, foi formulado primeiramente em 2003 por McCauley e Gunaratne [21].

Seja $S(t)$ o preço de um ativo financeiro no instante t . Em um modelo

exponencial, a distribuição $f(x, t)$ dos retornos $x(t) = \ln \frac{S(t)}{S(0)}$ é da forma

$$f(x, t) = \begin{cases} Ae^{\gamma(x-\delta)} & \text{se } x \leq \delta \\ Be^{-\nu(x-\delta)} & \text{se } x > \delta, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde os parâmetros δ , γ e ν caracterizam a distribuição.

Como de praxe, podemos encontrar as quantidades estatísticas de interesse. Primeiramente, a fim de encontrar a condição de normalização da distribuição exponencial, usemos a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 1. \quad (3.2)$$

Calculando as integrais separadamente, para os intervalos $x \leq \delta$ e $x > \delta$, encontramos a condição de normalização de acordo com a equação

$$\frac{A}{\gamma} + \frac{B}{\nu} = 1. \quad (3.3)$$

Com a escolha particular $\frac{B}{\nu^2} = \frac{A}{\gamma^2}$, as constantes A e B ficam completamente definidos pelos parâmetros γ e ν segundo

$$A = \frac{\gamma^2}{\gamma + \nu} \quad (3.4)$$

e

$$B = \frac{\nu^2}{\gamma + \nu} \quad (3.5)$$

Em seguida, calculemos a média e variância de nossa distribuição exponencial de acordo com

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t) dx \quad (3.6)$$

e

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (3.7)$$

respectivamente. De forma similar, cada uma dessas quantidades deve ser calculada para as diferentes regiões do retorno, ou seja, à esquerda e à direita do valor central δ . Para a média, na região $x \leq \delta$ por exemplo, temos

$$\langle x \rangle_- = \int_{-\infty}^{\delta} x f(x, t) dx = \frac{A}{\gamma} \left(\delta + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (3.8)$$

e de forma análoga, para $x > \delta$:

$$\langle x \rangle_+ = \int_{\delta}^{\infty} x f(x, t) dx = \frac{B}{\nu} \left(\delta + \frac{1}{\nu} \right), \quad (3.9)$$

de forma que a média da distribuição seja dada pela soma das médias de cada região segundo

$$\langle x \rangle = \langle x \rangle_- + \langle x \rangle_+ = \delta. \quad (3.10)$$

Procedendo de maneira similar, é possível mostrar que a variância da distribuição é dada por

$$\sigma^2 = \frac{2}{\gamma\nu}. \quad (3.11)$$

A fim de verificar correlações de longo alcance, ou memória das séries temporais, é possível relacionar a variância com o expoente de Hurst H através da expressão

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = ct^{2H}, \quad (3.12)$$

onde c é uma constante e t é a janela do tempo utilizada. Com essa equação, podemos caracterizar a distribuição de probabilidades dos retornos do ponto de vista de processos difusivos. Se $H = \frac{1}{2}$, dizemos que a série é completamente decorrelacionada [24], sem memória, cujo comportamento é típico de um processo *difusivo*, onde

a variância cresce linearmente no tempo. No caso $H > \frac{1}{2}$, a série é dita positivamente correlacionada, e o processo é considerado *superdifusivo*. Finalmente, quando $H < \frac{1}{2}$ o processo é negativamente correlacionado e é conhecido como *subdifusivo*. Em particular, é importante mencionar que, se o retorno de um ativo financeiro seguir um processo exponencial difusivo ($H = \frac{1}{2}$), então é possível aplicarmos um modelo de precificação de opções que, à semelhança do modelo de Black e Scholes, também produz uma fórmula analítica para o preço de opções, como discutiremos na próxima seção.

Para testar a equação (3.12) de um modo direto, deveríamos ter um conjunto de realizações distintas do processo em questão, para então, após fazer médias sobre as diferentes trajetórias, obtermos a dependência temporal da variância e estimar o expoente de H . Tal procedimento, obviamente, não pode ser implementado com séries temporais financeiras, visto que dispomos de apenas uma realização. Uma maneira alternativa é considerar a série temporal dos retornos em uma janela de tempo τ

$$\left\{ x_\tau(t) = \ln \frac{S(t+\tau)}{S(t)}, \quad t = 1, \dots, N \right\}, \quad (3.13)$$

e calcular as respectivas variâncias σ_τ^2 , onde é esperado um comportamento segundo

$$\sigma_\tau^2 \propto \tau^{2H}. \quad (3.14)$$

No capítulo 4, estudaremos a aplicação da distribuição exponencial às séries dos retornos do índice IBOVESPA. Em particular, calcularemos o expoente H e mostraremos em que tipo de regime (se difusivo ou não) tais distribuições se enquadram.

3.2 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES NO MODELO EXPONENCIAL

Nessa seção, trataremos do cálculo do preço das opções de *compra* e *venda*, partindo do pressuposto de que as distribuições de retorno de seus respectivos *ativos de referência* seguem uma função exponencial, de acordo com a equação (3.1).

Sejam S e S_T os preços do *ativo de referência* no tempo t (hoje) e no dia do vencimento da opção T . Seja ainda K o preço de exercício, $\Delta t = T - t$ o tempo até o vencimento, e r_d uma taxa de juros utilizada para descontar o valor futuro do preço da opção para o tempo presente t .

Vamos agora utilizar a abordagem “risk neutral” para obter o preço de uma opção no modelo exponencial. O ponto crucial do argumento é efetuar uma média sobre o preço final da opção, $\max(S_T - K, 0)$, utilizando a distribuição exponencial. No caso de uma opção de compra seu preço no tempo presente t é obtido conforme a equação

$$C(K, S, \Delta t) = e^{-r_d \Delta t} \langle (S(T) - K) \Theta(S(T) - K) \rangle,$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heavside, ou mais precisamente

$$C(K, S, \Delta t) = e^{-r_d \Delta t} \int_K^\infty (S' - K) P(S', T; S, t) dS' \quad (3.15)$$

onde $P(S', T; S, t)$ é a função densidade de probabilidades do preço de S' no tempo T , dado que ele vale S no tempo t . Mudando a variável de integração para o retorno

$$x = \ln \frac{S'}{S}. \quad (3.16)$$

temos

$$C(K, S, \Delta t) = e^{-r_d \Delta t} \int_{\ln(\frac{K}{S})}^\infty (Se^x - K) p(x, t) dx, \quad (3.17)$$

onde $p(x, t)$ é a distribuição de probabilidades do retorno $x(t)$. De forma análoga, o preço de uma opção de venda segue a expressão

$$\begin{aligned}
P(K, S, \Delta t) &= e^{-r_d \Delta t} \langle (K - S(T)) \Theta(K - S(T)) \rangle \\
&= e^{-r_d \Delta t} \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S})} (K - Se^x) f(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Para efetuar os cálculos das expressões (3.17) e (3.18), é necessário observar o preço S da ação no dia t , em relação ao preço de exercício K . Para calcular o preço de uma opção de compra, no caso de $\ln(\frac{K}{S}) < \delta$, a média deve ser tomada desde $x \leq \delta$ e $x > \delta$:

$$C(K, S, \Delta t) e^{r_d \Delta t} = \int_{\ln(\frac{K}{S})}^{\delta} (Se^x - K) A e^{\gamma(x-\delta)} dx + \int_{\delta}^{\infty} (Se^x - K) B e^{-\nu(x-\delta)} dx. \tag{3.19}$$

Após as devidas integrações chegamos à expressão

$$C(K, S, \Delta t) e^{r_d \Delta t} = \frac{Se^{\delta}}{(\gamma + \nu)} \frac{\gamma^2(\nu - 1) + \nu^2(\gamma + 1)}{(\gamma + 1)(\nu - 1)} + \frac{K\gamma}{(\gamma + 1)(\nu + \gamma)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{\gamma} - K. \tag{3.20}$$

Para $\ln(\frac{K}{S}) > \delta$, basta que a integração seja efetuada sobre o intervalo $x > \delta$, ou

$$C(K, S, \Delta t) e^{r_d \Delta t} = \int_{\ln(\frac{K}{S})}^{\infty} (Se^x - K) B e^{-\nu(x-\delta)} dx. \tag{3.21}$$

Finalmente, obtemos o preço da opção de compra conforme

$$C(K, S, \Delta t) e^{r_d \Delta t} = \frac{K\nu}{(\nu - 1)(\nu + \gamma)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{-\nu}. \tag{3.22}$$

Para as opções de venda, se $\ln(\frac{K}{S}) < \delta$, a integração deve ser realizada apenas no intervalo de retornos negativos conforme

$$P(K, S, \Delta t) e^{r_d \Delta t} = \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S})} (K - Se^x) A e^{\gamma(x-\delta)} dx, \tag{3.23}$$

resultando

$$P(K, S, \Delta t) e^{r_d \Delta t} = \frac{K\gamma}{(\gamma + \nu)(\gamma + 1)} \left(\frac{K}{S} e^{-\delta} \right)^{\nu}. \tag{3.24}$$

De forma análoga, no caso de se $\ln\left(\frac{K}{S}\right) > \delta$, para se obter o preço da opção de venda, o intervalo de integração deve conter os retornos negativos e positivos, portanto

$$P(K, S, \Delta t)e^{r_d \Delta t} = \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S})} (K - Se^x) A e^{-\gamma(x-\delta)} dx, \quad (3.25)$$

onde chegamos a uma expressão do tipo

$$P(K, S, \Delta t)e^{r_d \Delta t} = K - \frac{Se^\delta}{(\gamma + \nu)} \frac{\gamma^2(\nu - 1) + \nu^2(\gamma + 1)}{(\gamma + 1)(\nu - 1)} + \frac{K\nu}{(\gamma + \nu)(\nu - 1)} \left(\frac{K}{S}e^{-\delta}\right)^{-\nu}. \quad (3.26)$$

Conforme vimos na seção 2.5, a fim de eliminar a possibilidade de arbitragem, a taxa de média de retorno μ deve ser igual a taxa de juros r ,

$$\langle S(t) \rangle = S(0)e^{\int \mu dt} = S(0)e^{r \Delta t}, \quad (3.27)$$

onde

$$r = \frac{1}{\Delta t} \int \mu(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \left[\delta + \ln \left(\frac{\gamma\nu + \nu - \gamma}{(\gamma + 1)(\nu - 1)} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Em resumo, mostramos que é possível obter expressões analíticas para o preço das opções, tanto de compra quanto de venda, em um modelo que supõe que as distribuições dos retornos dos *ativos de referência* são descritas por exponenciais de acordo com a expressão (3.1). Um teste preliminar desse modelo no mercado de opções brasileiro será discutido no capítulo 5.

ANÁLISE ESTATÍSTICA DO ÍNDICE IBOVESPA

4.1 DADOS ANALISADOS

Nessa dissertação nos concentraremos, basicamente, na análise estatística de dados relativos ao índice IBOVESPA. Foram analisados os valores de fechamento diários $S(t)$ de janeiro de 1968 a fevereiro de 2004, com um total de 8889 dias negociados. Analisamos também dados *intraday*, correspondendo a cotações do IBOVESPA a cada 15 minutos, no período de 1998 a 2001, totalizando 19995 pontos.

Devido às altas taxas de inflação registradas na economia brasileira, foi necessário “deflacionar” os valores de fechamento diários do índice. Para tanto, usamos uma tabela do índice IGP-DI, que é um índice de inflação medido pela Fundação Getúlio Vargas. Os valores nominais do Ibovespa foram então corrigidos pelo IGP-DI, de modo a representar valores em Reais referentes a fevereiro de 2004. No caso dos dados *intraday*, ou de alta frequência, não foi necessário realizar o deflacionamento, uma vez que tais dados se referem a um período em que o níveis de inflação são praticamente desprezíveis.

A figura 4.1 representa a série temporal histórica do fechamento diário Ibovespa deflacionada. Uma vez que o Ibovespa pode ser considerado um dos principais “termômetros” da economia brasileira, é possível identificar como alguns eventos de grande impacto econômico afetaram diretamente no fechamento do índice. Como exemplo, citemos o primeiro grande pico no Ibovespa, no início da década de 70, quando o Brasil crescia a uma taxa anual superior a 10%. Esse período ficou co-

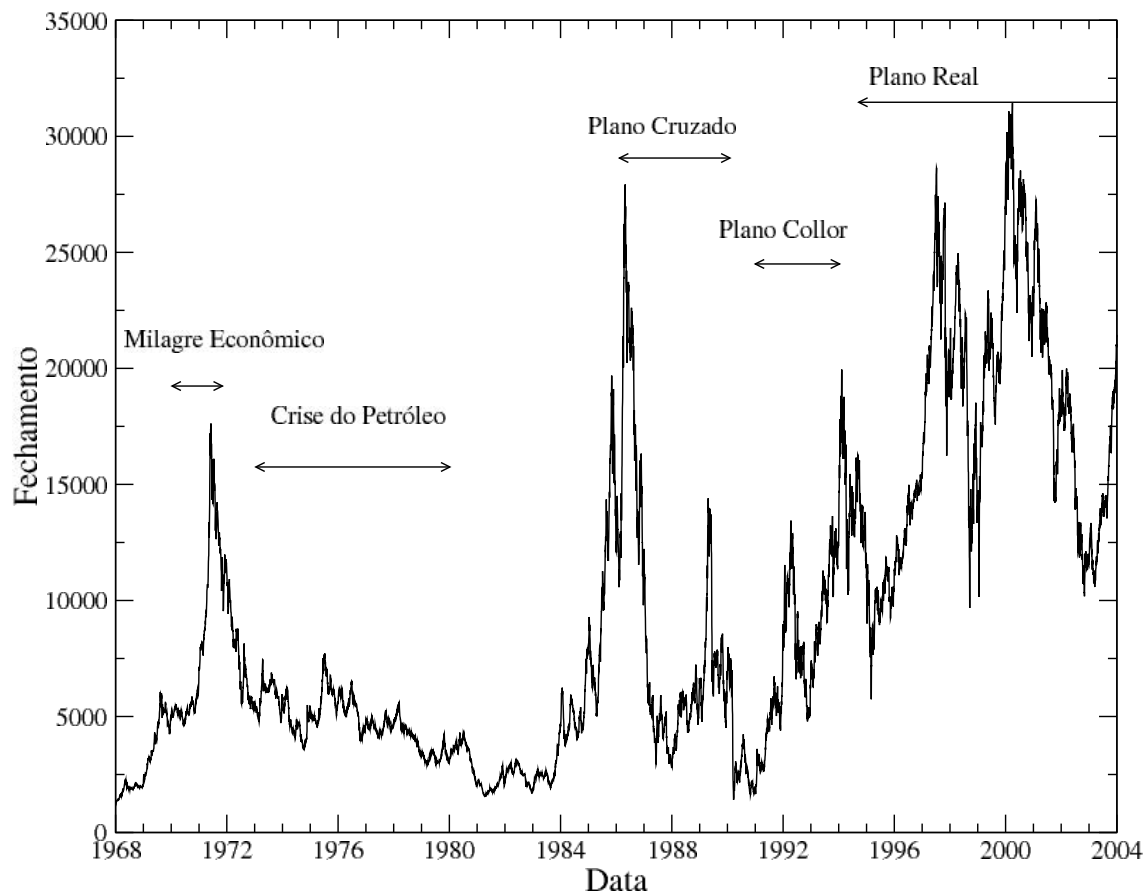


Figura 4.1. Fechamento diário do Ibovespa desde janeiro de 1968 a fevereiro de 2004

nhecido como “Milagre Econômico”. Um outro evento importante foi a primeira crise de petróleo em 1973 (países árabes produtores de petróleo aderiram a um boicote aos países do ocidente), onde se observou uma queda substancial na taxa de crescimento econômico do Brasil que, juntamente com crescentes taxas de inflação, refletiram diretamente na desvalorização do Ibovespa de 1973 a 1984 (figura 4.1).

Já a figura 4.2, representa a série histórica mensal do IGP-DI¹, e consegue ilustrar o comportamento da inflação no Brasil nos diferentes planos econômicos.

¹Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna. Calculado pela FGV (Fundação Getúlio Vargas), se refere ao mês “cheio”, ou seja, o período de coleta vai do primeiro ao último dia do mês de referência e a divulgação ocorre próxima ao dia 20 do mês posterior. Sendo calculado ininterruptamente desde 1947 o IGP-DI foi criado com o objetivo de balizar o comportamento de preços em geral na economia.

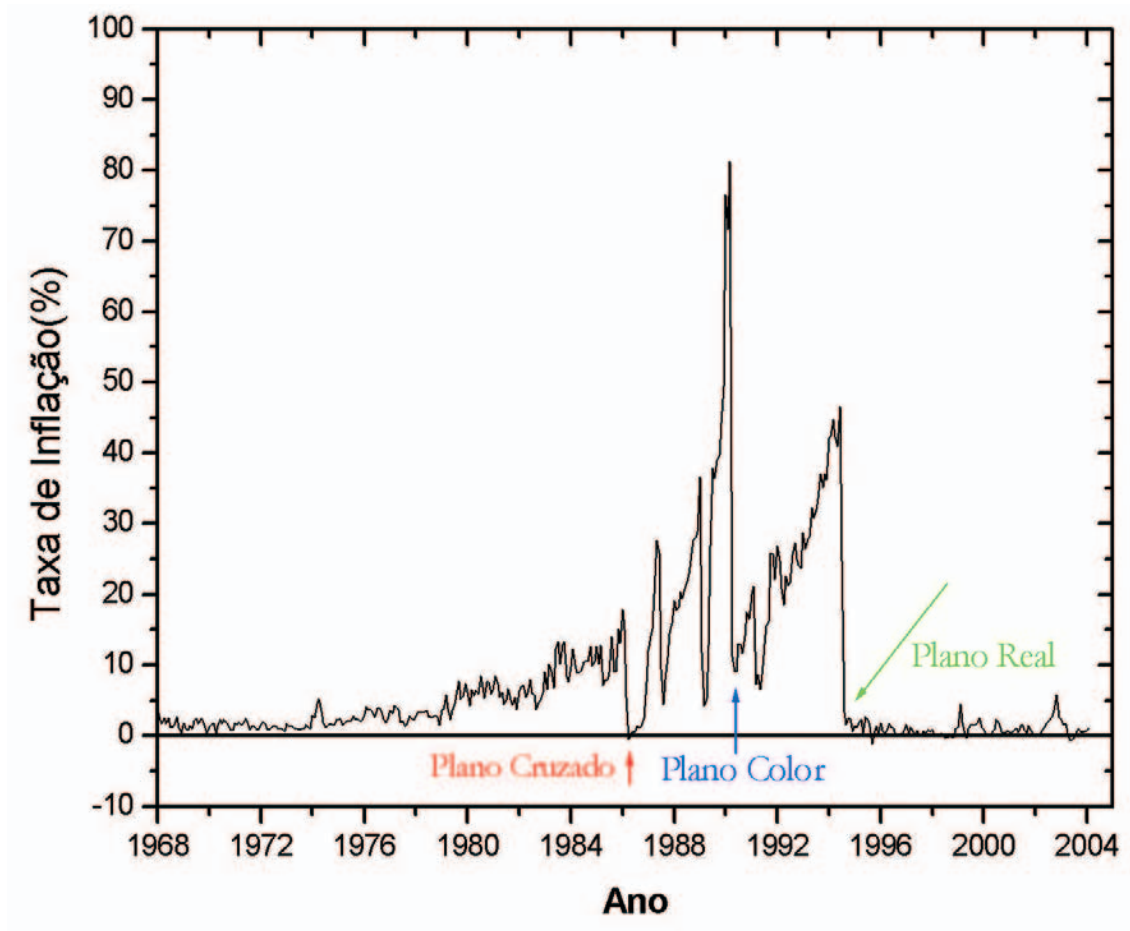


Figura 4.2. Série temporal mensal do IGP-DI, de janeiro de 1968 a fevereiro de 2004

Conforme pode-se observar nesse gráfico, ao contrário dos planos Cruzado e Collor, o Plano Real, lançado em julho de 1994, foi extremamente eficiente no controle das exorbitantes taxas de inflação. Além disso, o plano Real, sob um ponto de vista estatístico, tornou o mercado de ações, em particular o Ibovespa, mais “eficiente” [22], onde correlações de longo alcance foram praticamente eliminadas.

Seguindo adiante na análise dos dados relativos ao Ibovespa, é natural que estudemos as variações relativas dos preços ou *retornos* do índice. Seja $y(t)$ o valor de fechamento do ibovespa no tempo t . O tempo $t = 0$ representa o dia 2 de janeiro de 1968, data na qual o Ibovespa é lançado. O retorno de τ dias, $R_\tau(t)$, é dado pela

diferença relativa entre valores de fechamento em uma janela de tempo de τ dias úteis consecutivos:

$$R_\tau(t) = \frac{y(t+\tau) - y(t)}{y(t)}. \quad (4.1)$$

Quando tratamos de dados de alta frequência, o retorno pode ser melhor representado, conforme mostraremos a seguir, pela diferença dos logaritmos entre dois valores diários consecutivos [23],

$$\begin{aligned} r_\tau(t) &\equiv \ln y(t+\tau) - \ln y(t). \\ &= \ln \left[\frac{y(t+\tau)}{y(t)} \right] = \ln \left[1 + \frac{y(t+\tau) - y(t)}{y(t)} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para dados de alta frequência, $|y_{t+\tau} - y_t| \ll y_t$, portanto

$$r_\tau(t) = \ln \left[1 + \frac{y_{t+\tau} - y_t}{y_t} \right] \approx \frac{y_{t+\tau} - y_t}{y_t} = R_\tau(t) \quad (4.3)$$

Em particular, segue de (4.2) que, a partir dos retornos para $\tau = 1$, podemos facilmente gerar retornos para qualquer τ :

$$r_\tau(t) = \sum_{i=1}^{\tau} r_1(t + \tau - i). \quad (4.4)$$

Na figura (4.3), por exemplo, plotamos a série temporal do retorno diário ($\tau = 1$) do Ibovespa. Conforme veremos a seguir, ao fazermos uma análise das distribuições de probabilidades dos retornos, notaremos comportamentos distintos para regimes *intraday* e diários.

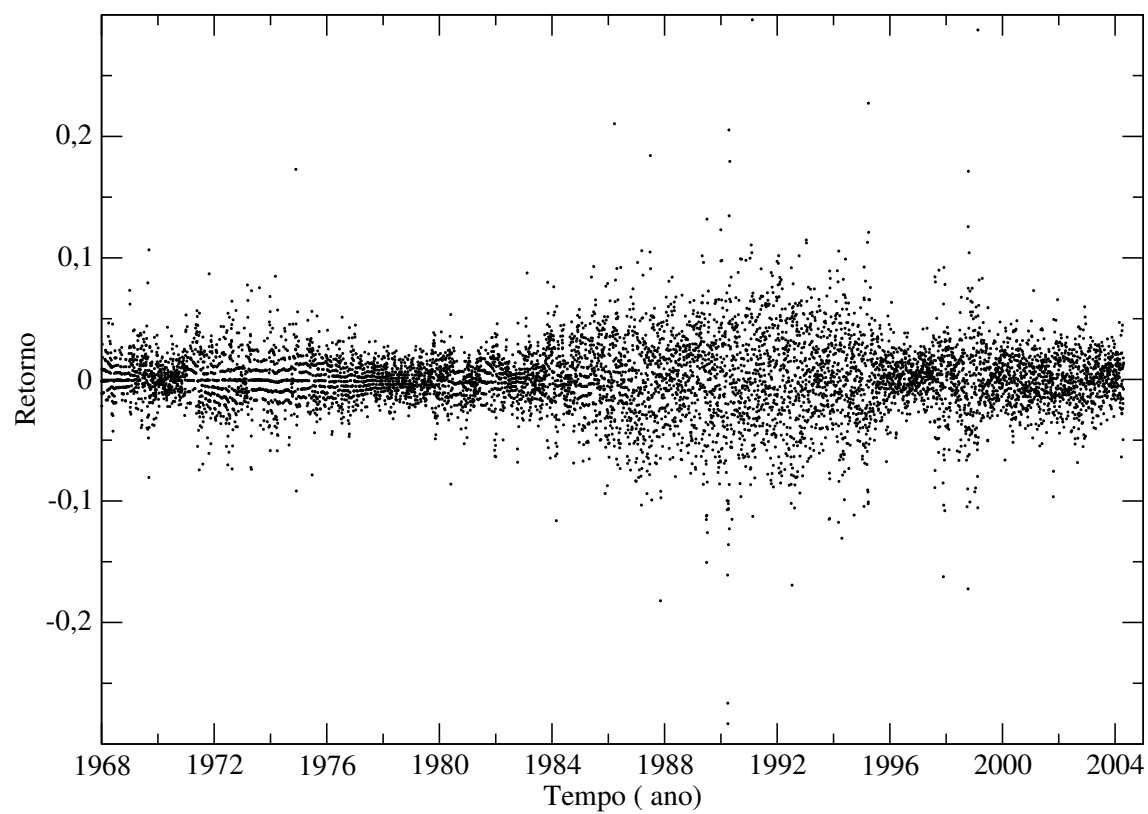


Figura 4.3. Série temporal do retorno diário do Ibovespa desde janeiro de 1968 a fevereiro de 2004.

4.2 ESTATÍSTICA DOS RETORNOS DIÁRIOS

Nessa seção, vamos apresentar as funções de densidade de probabilidade dos retornos gerados a partir da série dos fechamentos diários do índice IBOVESPA, bem como suas respectivas distribuições acumuladas. Conforme mencionamos no capítulo 3, a análise de tais distribuições é de grande importância para uma correta precificação das opções do Ibovespa.

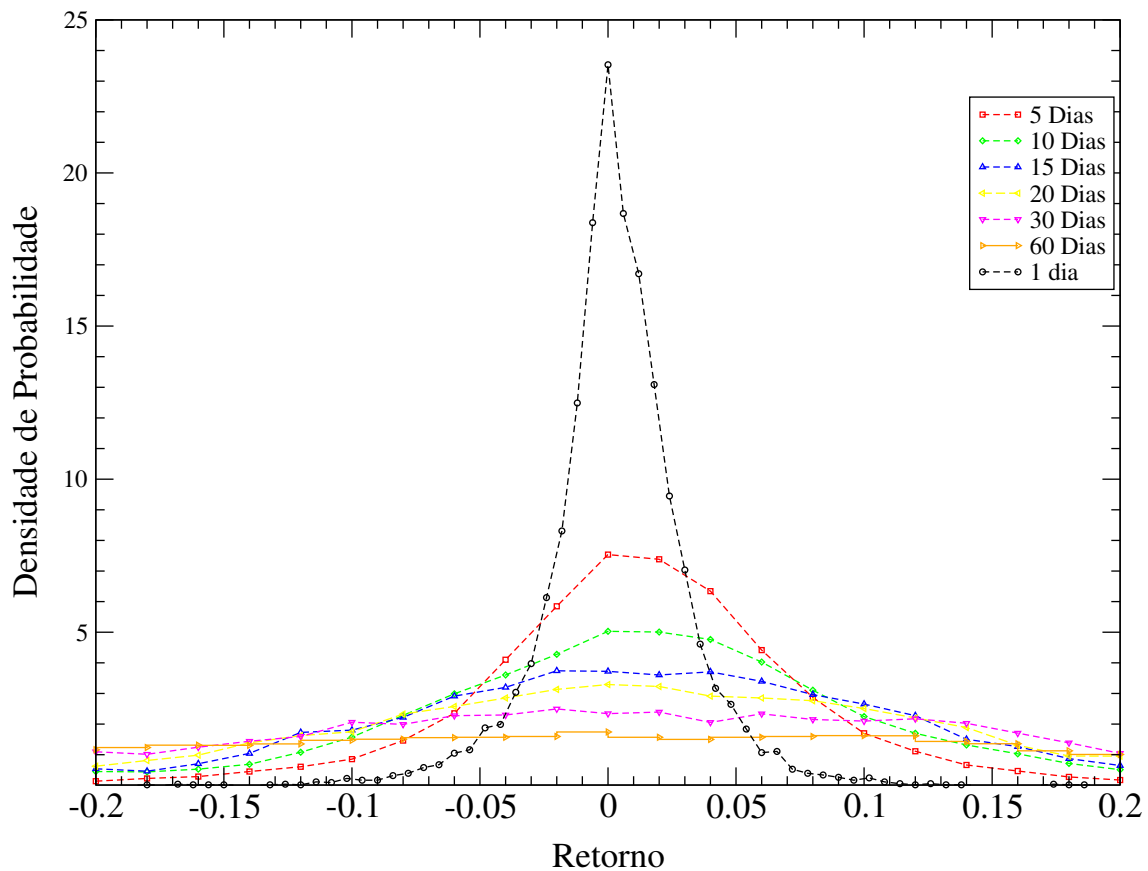


Figura 4.4. Histograma dos retornos do Ibovespa, com janelas de tempo de tempo de 1 a 60 dias.

Tomemos primeiramente a função de densidade de probabilidade dos retor-

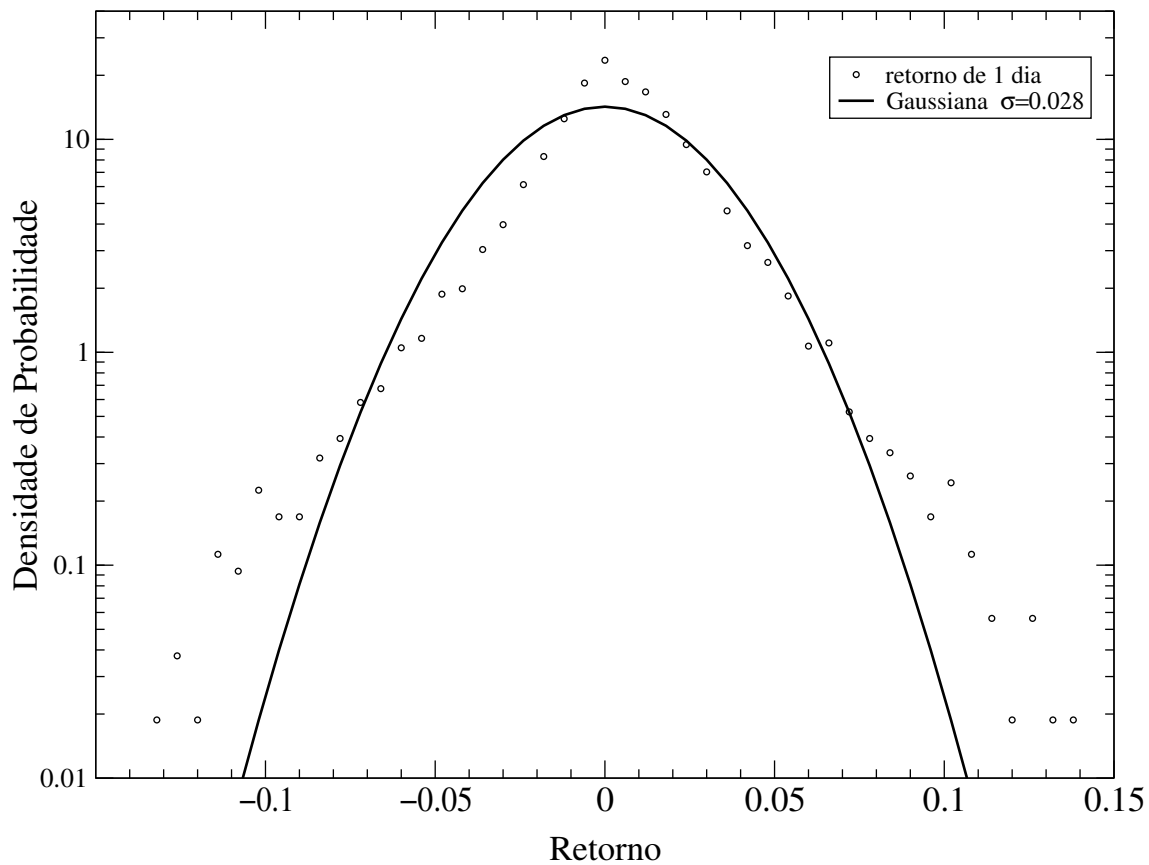


Figura 4.5. Histograma em escala semi-log dos retornos de 1 dia comparados com uma curva gaussiana de desvio padrão igual ao dos dados, $\sigma = 0.028$

nos $r_\tau(t)$ do Ibovespa, representada pela figura 4.4. Esse gráfico apresenta vários histogramas, cada qual com uma janela de tempo diferente. Nesta figura o primeiro aspecto interessante a notar é que, à medida que aumentamos a janela de tempo, as funções de densidade de probabilidade se alargam, ou melhor dizendo, a variância aumenta à medida que o tempo passa, como era de se esperar. Veremos mais adiante que é importante inferir como é a dinâmica da variância, ou seja, como a variância varia no tempo, a fim de que se possa determinar a natureza do processo estocástico subjacente (se difusivo, subdifusivo ou superdifusivo).

Analisemos, agora, a distribuição de probabilidade dos retornos de 1 dia e 100 dias mostrados separadamente nas figuras 4.5 e 4.6, respectivamente. Esses

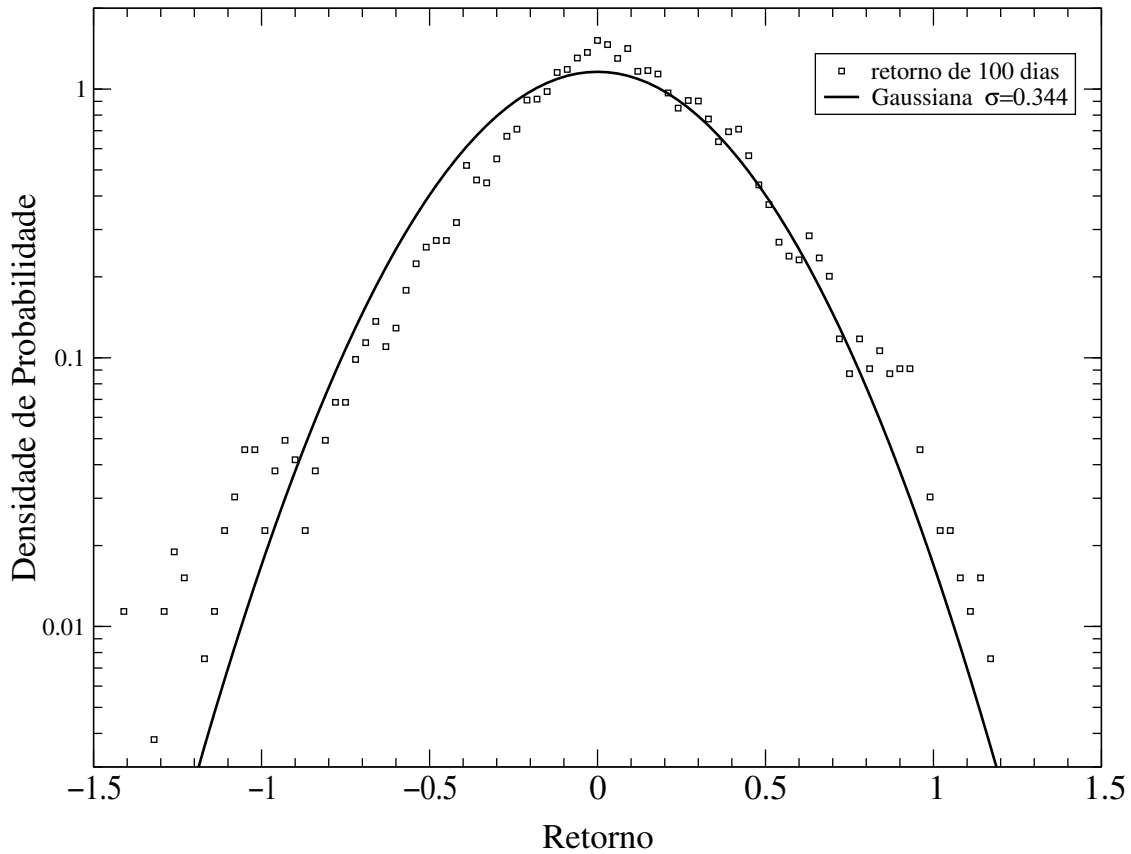


Figura 4.6. Histograma em escala semi-log dos retornos de 100 dia comparados com uma curva gaussiana de desvio padrão igual ao dos dados, $\sigma = 0.34$.

histogramas estão em escala semi-log de forma a poder fazer uma comparação com uma gaussiana (que nessa escala é representada por uma parábola). Na figura 4.5, por exemplo, quando comparamos a distribuição empírica de retornos de 1 dia com uma curva gaussiana de mesma variância dos dados, percebe-se claramente que a distribuição empírica para os retornos se desvia bastante de uma gaussiana. Vemos ainda que, nesta escala, a região central da distribuição apresenta um regime linear, característico de uma distribuição exponencial, que será mais cuidadosamente analisado adiante. Por outro lado, a distribuição dos retornos de 100 dias (figura 4.6) parece ser razoavelmente bem descrita pela gaussiana, sugerindo uma possível tendência à distribuição normal à medida que aumentamos a janela de tempo, como

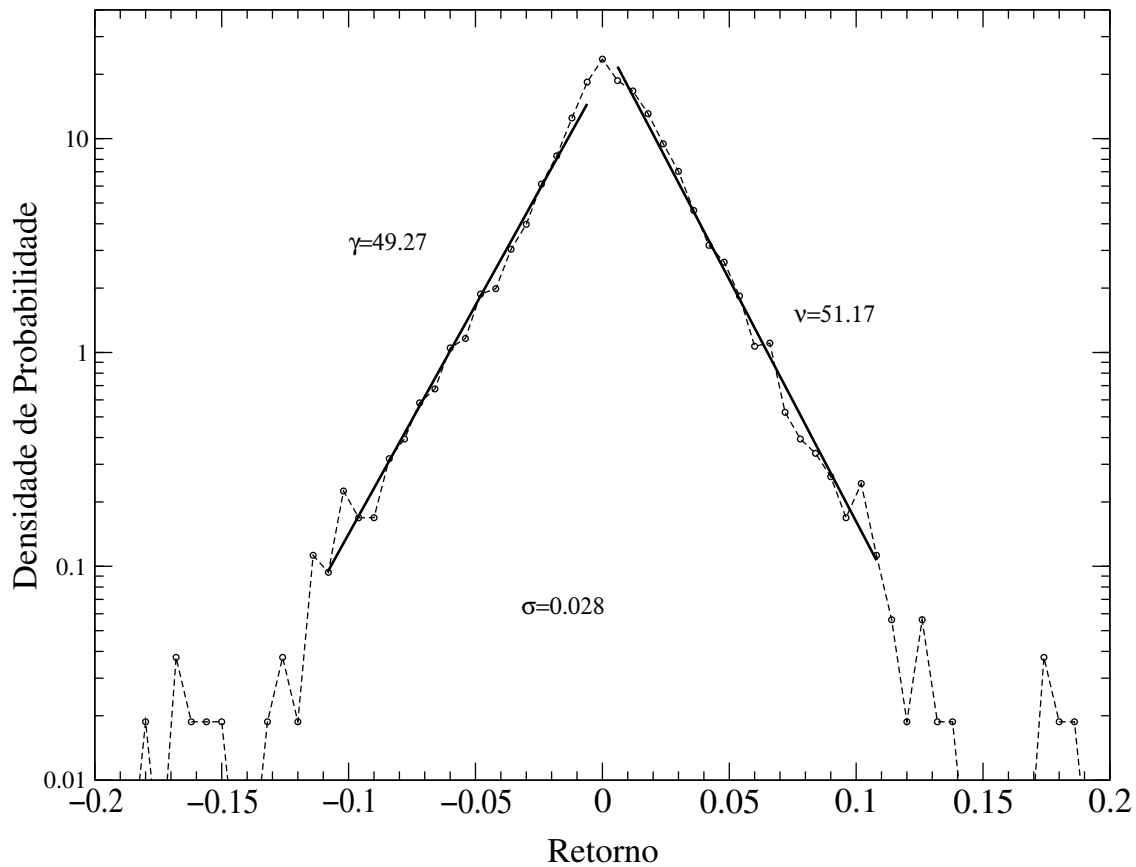


Figura 4.7. Histograma do retorno diário do Ibovespa em escala semi-log com ajuste exponencial na região central.

de fato esperado pelo teorema do limite central.

A partir dessas observações preliminares, surge a necessidade de uma descrição alternativa (não baseada em gaussianas) das distribuições de probabilidades dos retornos diários do Ibovespa. Conforme podemos observar na figura 4.7, que reproduz o histograma dos retornos diários, apresentado na figura 4.5, a região central da distribuição empírica é muito bem descrita por um regime exponencial, que na escala semi-logarítmica aparece como uma reta. Fazendo o ajuste da fórmula (3.1) aos dados empíricos, obtemos $\gamma = 49,27$ e $\nu = 51,17$. Nesse caso, fizemos $\delta = 0$, uma vez que a média dos retornos empíricos é aproximadamente zero.

Todas as análises apresentadas até o momento nesta seção foram baseadas

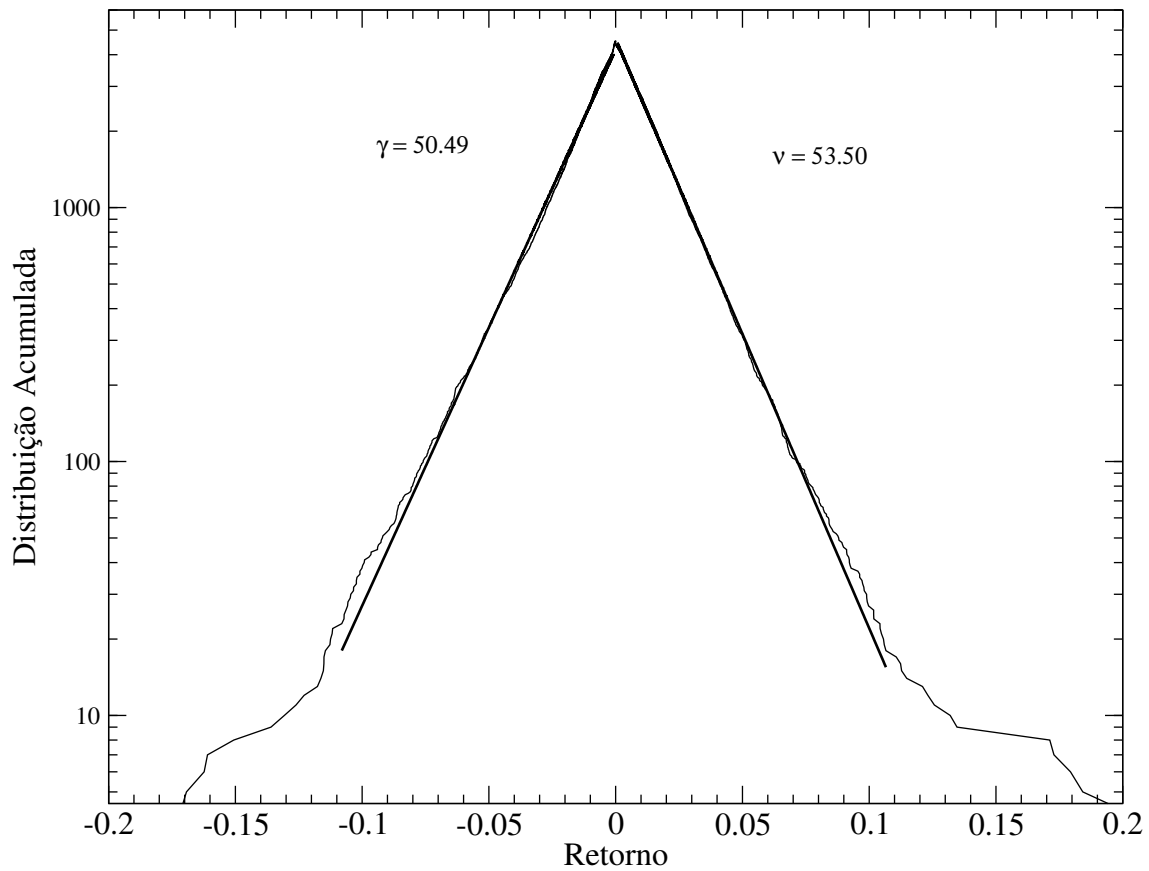


Figura 4.8. Distribuição acumulada de probabilidades dos retornos diários em escala semi-log.

nos histogramas a partir das respectivas séries dos retornos. Entretanto, apesar da série inicial possuir em torno de 9000 pontos, os histogramas foram obtidos com apenas 100 pontos, devido ao fato de dividirmos o intervalo, compreendido entre o menor e maior retorno, em 100 partes iguais, para então efetuar as devidas contagens de frequência. Para aumentar a confiabilidade da análise dos dados, será bastante útil utilizar distribuições acumuladas de probabilidade, uma vez que, nesse caso a contagem é feita ponto a ponto.

Seja $P(x)$ a densidade de probabilidades da variável aleatória x . Então, a

distribuição acumulada de probabilidades $F(X)$ é definida conforme a expressão

$$F(X) = \int_{-\infty}^X P(x)dx, \quad (4.5)$$

de forma que

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1. \quad (4.6)$$

Para retornos positivos, entretanto, é mais conveniente lidarmos com a distribuição acumulada complementar, ou seja,

$$F_+(X) = \int_X^{\infty} P(x)dx = 1 - F(X). \quad (4.7)$$

Nesta dissertação, todas as distribuições acumuladas de probabilidades estão dispostas na forma $F(X)$ para $x \leq 0$ e $F_+(X) = 1 - F(X)$ para $x > 0$. Essa escolha se deve apenas à necessidade de se analisar, separadamente, o comportamento das distribuições de probabilidades para retornos positivos e negativos.

Seguindo a definição das equações 4.5 e 4.7, caso nossas funções de distribuição de probabilidade sejam realmente descritas por uma exponencial, então suas respectivas distribuições acumuladas também serão. De fato, usando a equação 3.1, temos que, se $x \leq \delta$

$$F(x, t) = A \frac{e^{\gamma x}}{\gamma} \quad (4.8)$$

e se $x > \delta$

$$F_+(x, t) = B \frac{e^{-\nu x}}{\nu}. \quad (4.9)$$

Vejamos agora a figura 4.8, que mostra as distribuições acumuladas para os retornos diários e os respectivos valores dos parâmetros γ e ν . Comparando com a figura 4.7, vê-se que é notável a concordância (erro percentual menor que 4%) entre os parâmetros dos dois ajustes obtidos (para histograma e distribuição acumulada). Tal observação corrobora o comportamento exponencial das distribuições.

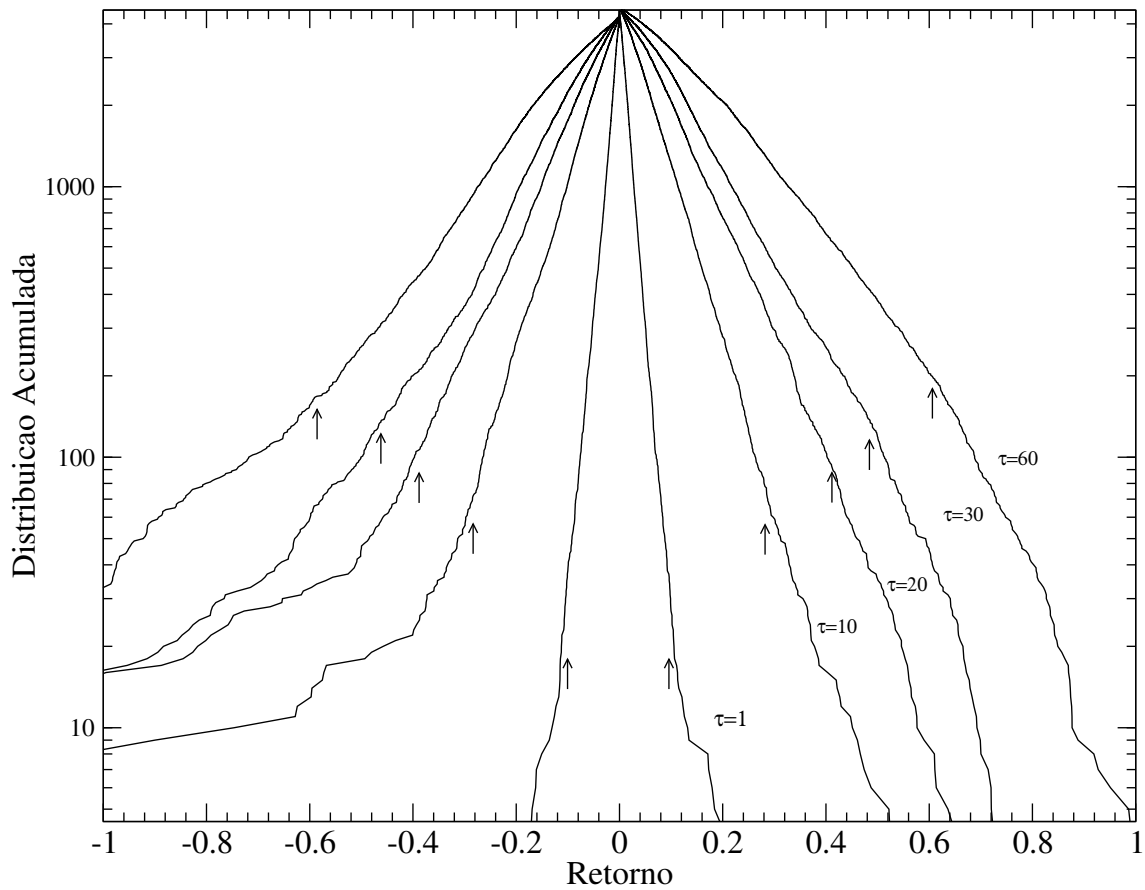


Figura 4.9. Distribuição acumulada de probabilidade dos retornos, para janelas de tempo entre 1 e 60 dias. As setas indicam os limites das regiões utilizadas para o ajuste exponencial.

Seguindo adiante com a análise das distribuições acumuladas de probabilidades para os retornos do IBOVESPA, é possível verificar seu comportamento para várias janelas de tempo. Na figura 4.9, por exemplo, mostramos tais distribuições para $\tau = 1, 10, 20, 30$ e 60 . É possível observar que a região central pode ser bem descrita por uma exponencial para janelas de tempo de 1 a 30 dias. Em particular, a distribuição acumulada para 1 dia pode ser descrita quase que completamente por uma reta. Entretanto, à medida que aumentamos a janela de tempo, a região que pode ser bem descrita por uma reta é começa a ficar cada vez mais restrita, relativo a extensão total da curva empírica. A partir de 30 dias, as distribuições tornam-se

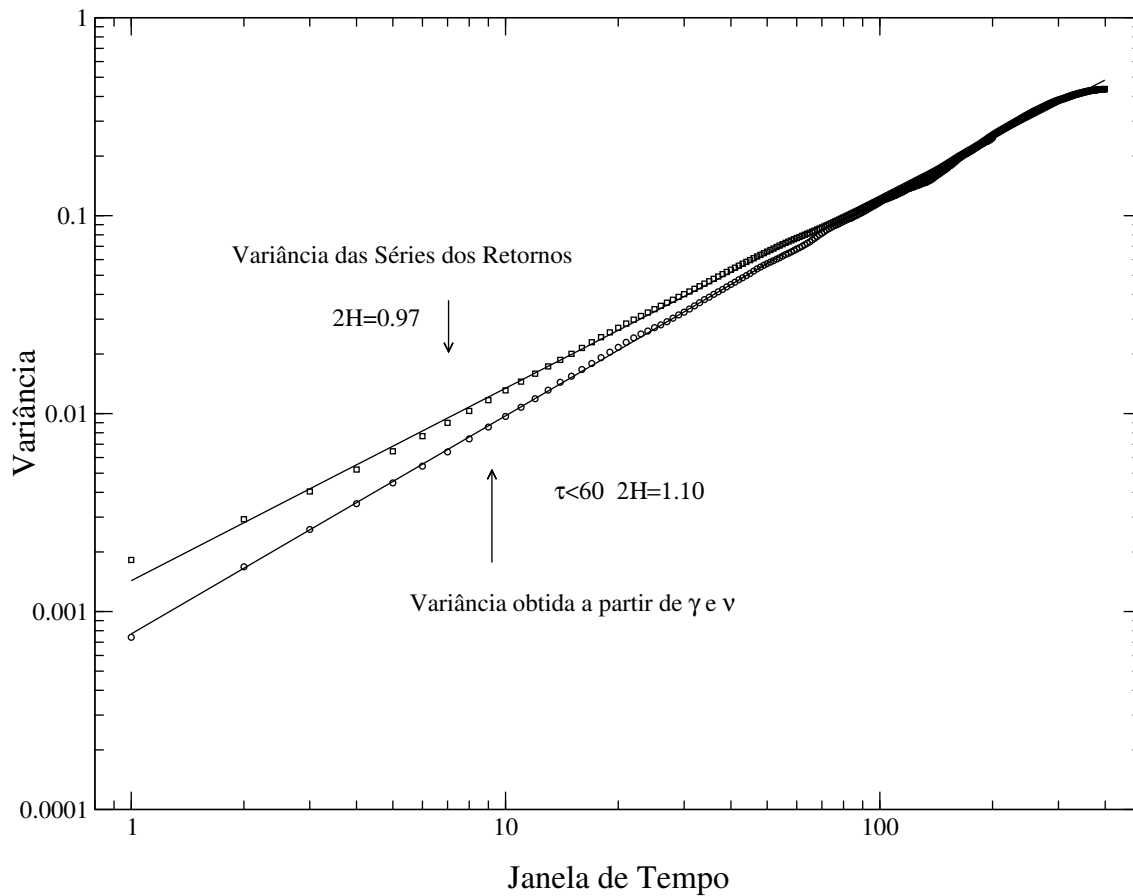


Figura 4.10. Comportamento da variância em função da janela de tempo τ . A curva inferior é obtida a partir dos parâmetros da distribuição exponencial γ e ν . A superior é obtida a partir dos dados das séries temporais dos retornos.

cada vez mais curvadas, o que pode ser interpretado como um possível indício de tendência ao comportamento gaussiano. Ainda na figura 4.9, vê-se o mesmo efeito da figura 4.4, segundo o qual a distribuição se alarga, como esperado, à medida que aumentamos o tamanho τ da janela de tempo considerada.

Analisemos, então, o comportamento da variâncias de nossas séries de retornos em função das janelas de tempo. Nosso procedimento aqui foi o seguinte: calculamos primeiramente a variância das séries dos retornos, para várias janelas de tempo τ , a qual nos referiremos por σ_{dados} . Por outro lado, calculamos também a variância a partir dos parâmetros de ajuste exponencial γ e ν , σ_{fit} , conforme a

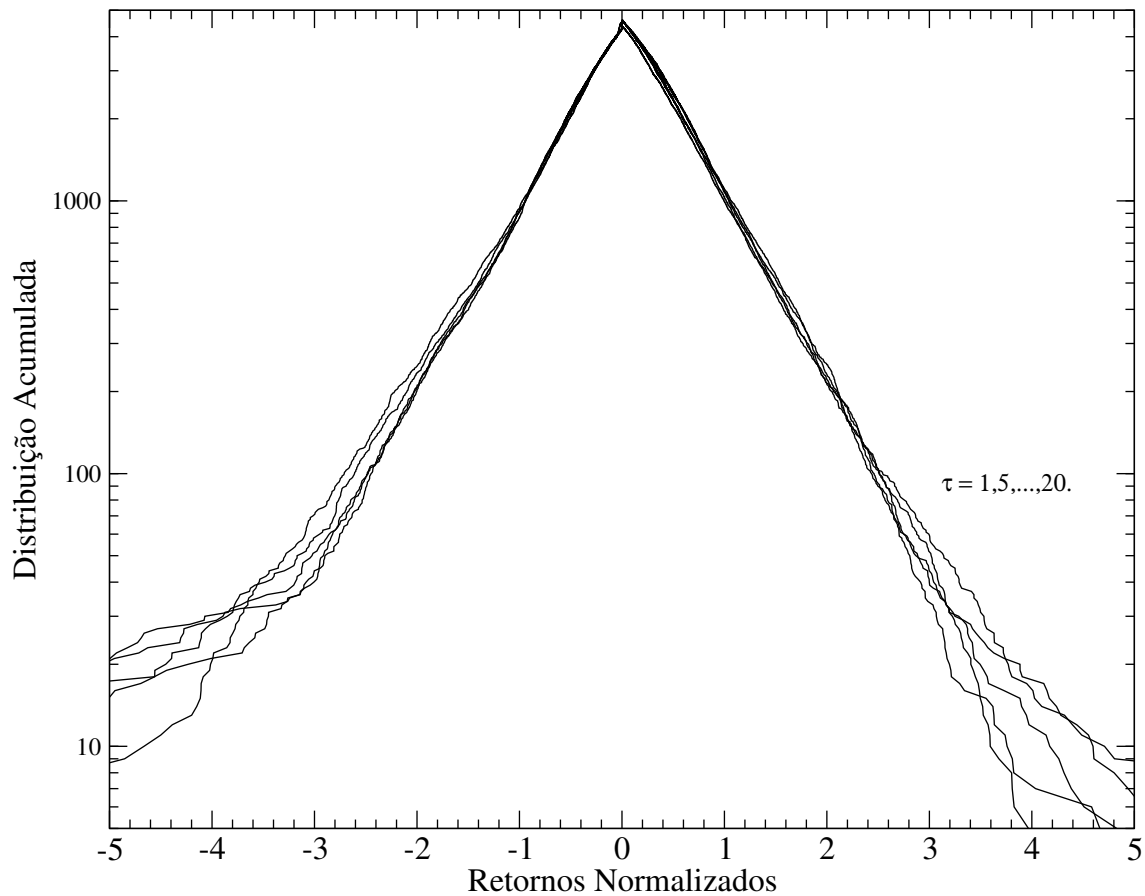


Figura 4.11. Distribuição acumulada de probabilidade dos retornos normalizados, para janelas de tempo de 1, 5, 10, 15 e 20 dias.

expressão (3.11).

Nossos resultados estão mostrados na figura 4.10. A curva inferior, apresenta a variância obtida a partir dos parâmetros de ajuste exponencial σ_{fit} . A outra curva foi obtida a partir da variância das séries temporais dos retornos σ_{dados} . Conforme vimos no capítulo 3, o comportamento esperado para a variância é segundo

$$\sigma_{\tau}^2 = c\tau^{2H}. \quad (4.10)$$

Portanto, em uma escala log-log, o parâmetro $2H$ é a inclinação da reta que melhor ajusta os pontos empíricos. Se $2H = 1$, significa que a variância cresce linearmente

no tempo. Dado que as variâncias das séries dos retornos e dos parâmetros do ajuste exponencial escalam no tempo segundo os expoentes $2H = 0.97$ e $2H = 1.10$, respectivamente, podemos afirmar que o regime é aproximadamente difusivo. Ou seja, ambos σ_{dados}^2 e σ_{fit}^2 crescem linearmente no tempo.

Essa observação pode ser corroborada através de uma análise alternativa da distribuição acumulada para retornos *normalizados*. Seja $r_\tau(t)$ nossa série temporal dos retornos. Para obter uma série normalizada, ou seja, de variância unitária, basta que façamos a transformação

$$r_\tau(t) \rightarrow \frac{r_\tau(t)}{\sigma}, \quad (4.11)$$

onde

$$\sigma = \sqrt{\langle r_\tau(t) \rangle^2 - \langle r_\tau(t)^2 \rangle}. \quad (4.12)$$

de forma que o retorno passa a ser expresso em unidades do desvio padrão σ .

A figura 4.11 apresenta as distribuições acumuladas dos retornos normalizados para janelas de tempo entre 1 e 20 dias. É bastante claro notar um colapso das distribuições acumuladas dos retornos até janelas de tempo de 20 dias, a uma extensão em torno de 2σ . Portanto, a variância obtida para cada distribuição acumulada dos retornos normalizado deverá ser dada de acordo com

$$\sigma_{norm} = \frac{\sigma_{fit}(\tau)}{\sigma_{dados}(\tau)} = c. \quad (4.13)$$

Como, por outro lado, a variância σ_{dados} apresenta uma dependência linear com τ (vide figura 4.10), segue de (4.13) que o comportamento da variância obtida do ajuste exponencial também será linear no tempo τ .

Em resumo, vimos que a dinâmica de retornos do IBOVESPA, em escalas de 1 a 20 dias, pode ser bem modelada por um processo estocástico difusivo com a distribuição de probabilidades exponencial. Possíveis consequências desse fato, serão brevemente examinadas no próximo capítulo. Vamos agora analisar a dinâmica do

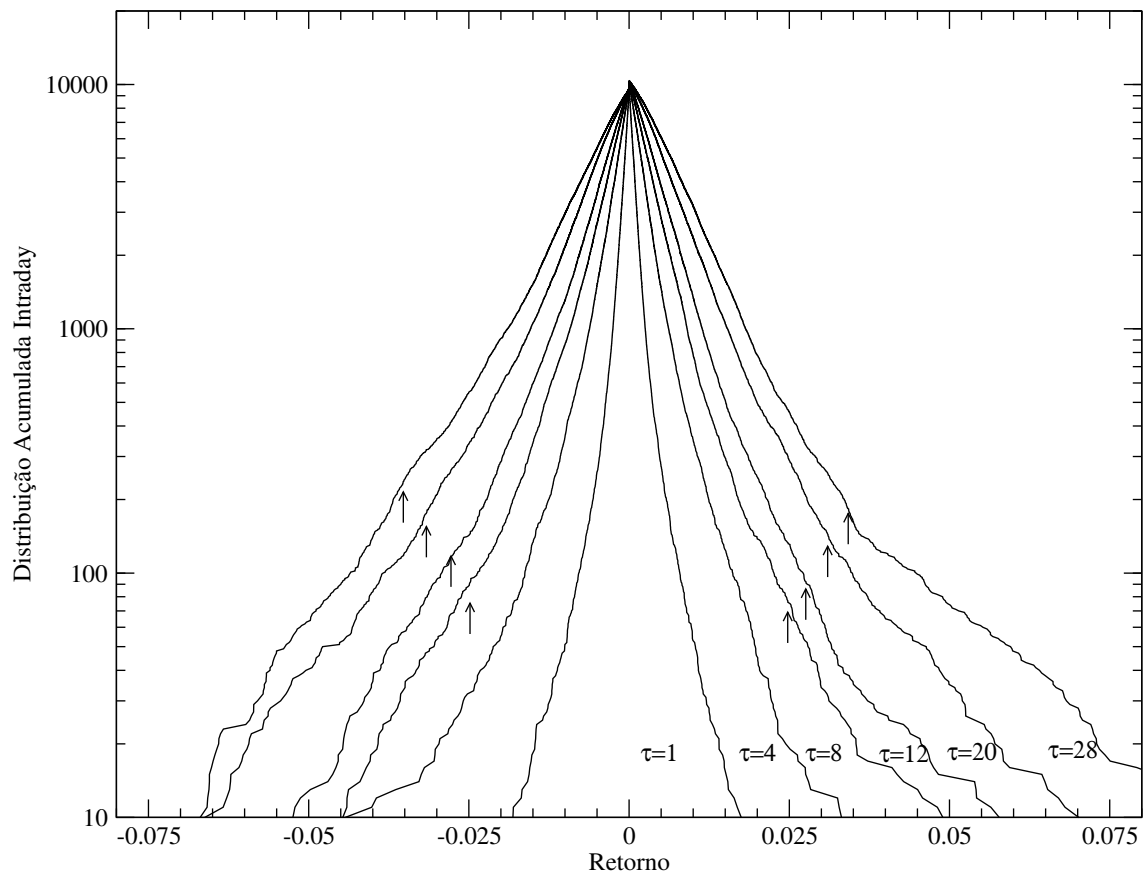


Figura 4.12. Distribuição acumulada de probabilidades dos retornos *intraday* do Ibovespa, para janelas de tempo de 15 minutos ($\tau = 1$) a 7 h ($\tau = 28$).

IBOVESPA em escalas de tempo *intraday*.

4.3 ESTATÍSTICA DE RETORNOS INTRADAY

Nessa seção faremos análises similares às da seção anterior para os dados de alta frequência, correspondendo aos retornos obtidos a partir das cotações do Ibovespa a cada 15 minutos.

Começemos pela distribuição acumulada dos retornos intraday mostrada na figura 4.12 para vários τ . Note que nesse caso cada unidade τ corresponde a 15 minutos. Para $\tau < 12$ parece haver uma suave tendência (não desprezível) das

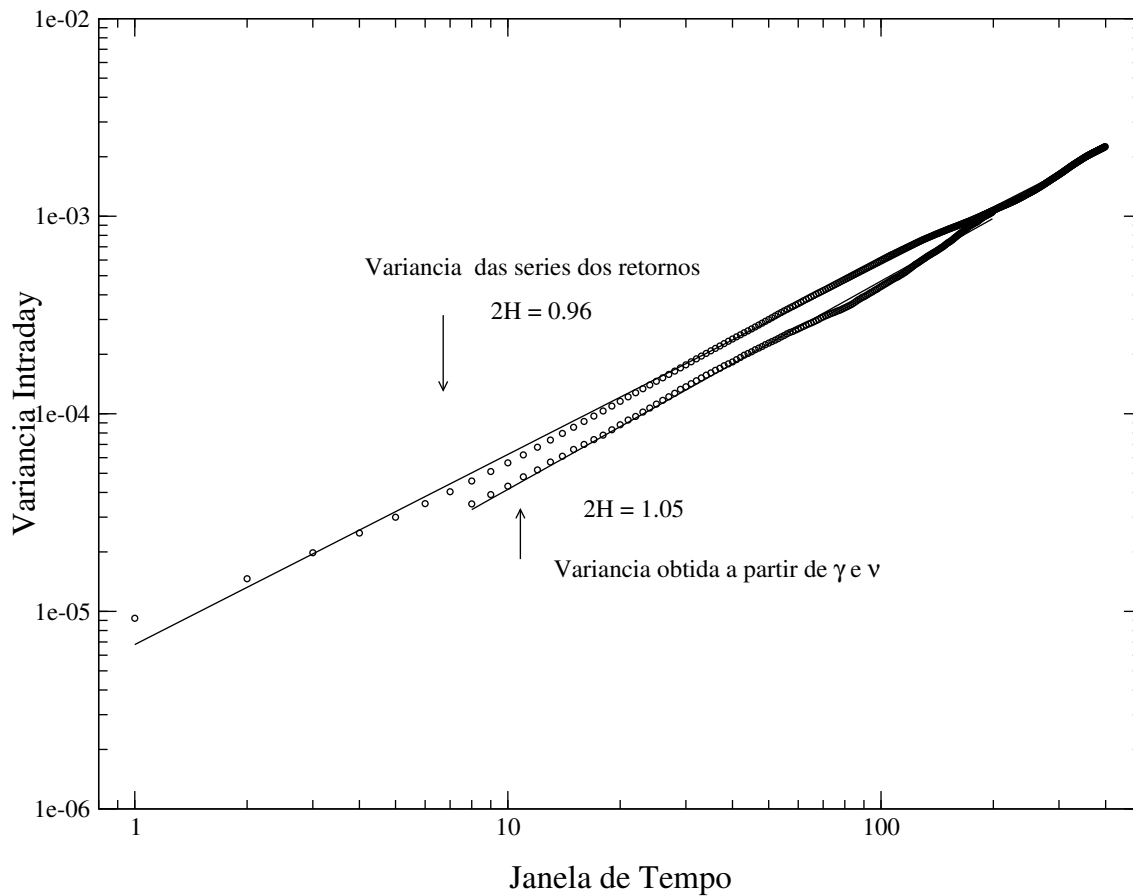


Figura 4.13. Variância em função da janela de tempo para série de retornos intraday.

distribuições se curvarem para fora, podendo ser uma indicação de um possível comportamento do tipo lei de potência. A região central só começa a ser bem descrita por exponenciais a partir de $\tau = 12$, ou $3h$. Portanto, é razoável que só calculemos a variância a partir dos parâmetros γ e ν , para janelas de tempo maiores 3 horas.

Vejamos por exemplo a figura 4.13. Assim como nos casos das séries dos retornos diários, o comportamento linear no tempo das variâncias *intraday*, tanto das séries quanto daquelas obtidas a partir do ajuste exponencial sugerem um processo também difusivo. Sendo assim, podemos esperar um colapso das distribuições acumuladas obtidas a partir de séries de retornos normalizados. Esse fato é comprovado

através da figura 4.14, onde podemos perceber que o colapso das distribuições ocorre somente a partir de $3h$.

Para finalizar as análises dos dados *intraday*, façamos uma última comparação. Vejamos os ajustes exponenciais na região central das distribuições acumuladas de retornos normalizados, com $\tau = 28$ (que corresponde a um dia de negócios na bolsa) para retornos *intradays* e com $\tau = 1$ para retornos diários através das figuras 4.15 e 4.16. É importante ressaltar que os retornos diários utilizados para essa comparação referem-se ao mesmo período dos dados *intraday*, de 1998 a 2001. É bastante claro que existe uma certa concordância entre os parâmetros de ajuste exponencial, haja vista que a diferença percentual fica em torno de 8%. Portanto é razoável sugerir que, o comportamento das distribuições dos retornos *intraday*, quando analisados em escala de tempo apropriado, torna-se semelhante ao das distribuições de retornos diárias.

Em resumo, a análise estatística realizada nessa seção demonstra de forma clara que os retornos do índice IBOVESPA são bem descritos por distribuições exponenciais, numa escala de tempo que vai de 3 horas até cerca de 30 dias.

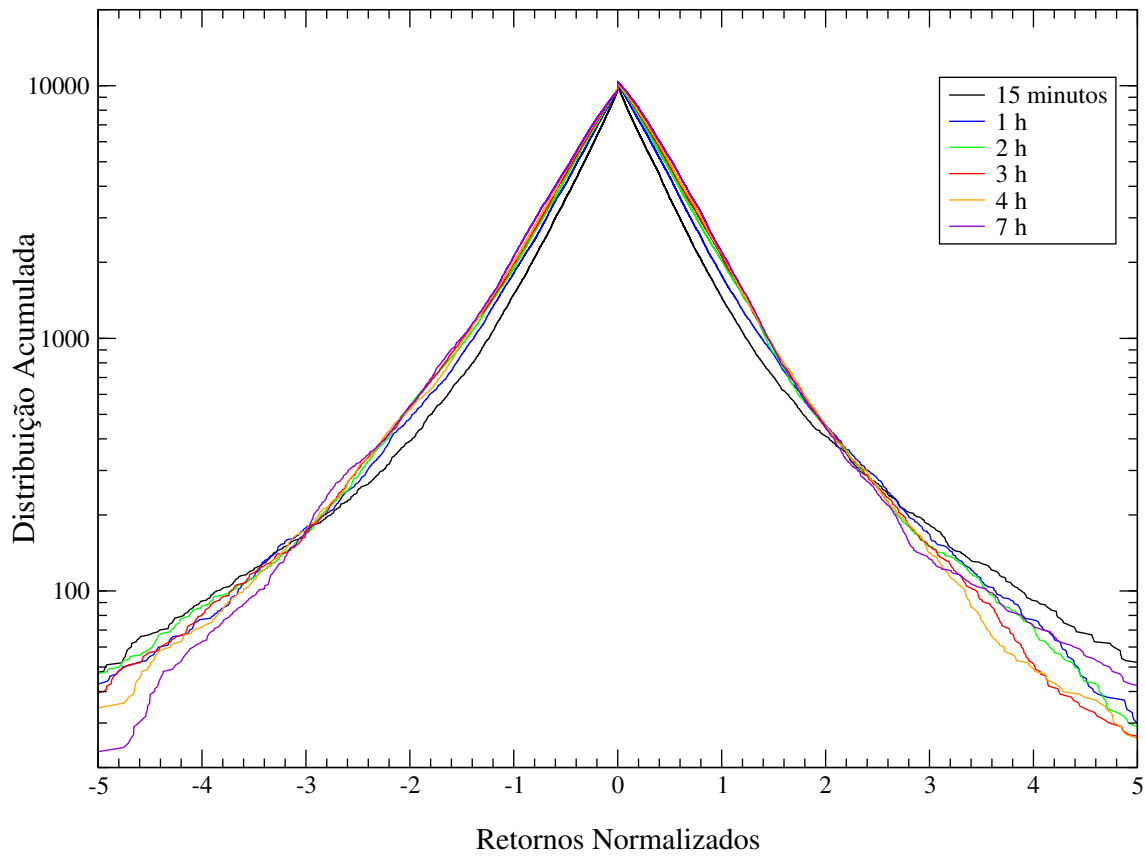


Figura 4.14. Distribuição acumulada de probabilidades dos retornos normalizados *intra-day* do Ibovespa, em escala semi-log.

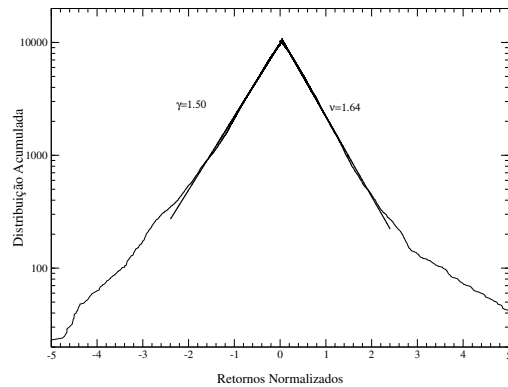


Figura 4.15. Distribuição acumulada dos retornos *intraday* normalizados para $\tau = 28$, com ajuste exponencial na região central.

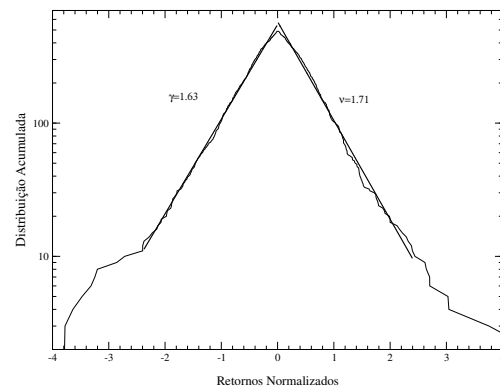


Figura 4.16. Distribuição acumulada dos retornos diários normalizados para $\tau = 1$, com ajuste exponencial na região central.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nessa dissertação, realizamos análises estatísticas do índice Ibovespa. Ao todo foram, 8889 valores relativos ao fechamento diário do índice Ibovespa, de 2 de janeiro de 1968 até 27 de fevereiro de 2004. Foram analisados, também, 19995 valores relativos à cotação do índice a cada 15 minutos, em um período compreendido entre 1998 e 2001.

A partir das séries do fechamento do índice, fizemos um estudo dos histogramas e das distribuições acumuladas dos retornos para várias janelas de tempo τ . Evidenciamos assim que a distribuição empírica dos retornos para $\tau = 1$ se desvia bastante de uma distribuição normal, sendo melhor descrita por uma distribuição exponencial. Mostramos ainda que esse comportamento exponencial se estende até um período de aproximadamente 30 dias. Para escalas de tempo maiores, nossa análise revelou uma clara tendência de aproximação a uma gaussiana à medida que aumentamos a janela de tempo τ , conforme previsto pelo teorema do limite central. De fato, vimos que para $\tau = 100$ a distribuição empírica dos retornos é razoavelmente bem descrita pela distribuição normal.

A análise dos retornos obtidos a partir da série de cotações *intraday* do Ibovespa revelou também uma distribuição exponencial para intervalos de tempo acima de 3 horas. Em escalas de tempo menores, a distribuição empírica desvia-se do comportamento exponencial, mostrando uma tendência mais típica de uma lei de potência (ou seja, um decréscimo mais suave que uma exponencial). Em resumo, nossas análises das distribuições empíricas dos retornos do Ibovespa, sugerem que,

em escalas de tempo τ variando de 3 horas a 30 dias, a região central dessas distribuições é bem descrita por uma função exponencial.

Partindo dessa observação, estudamos ainda a dinâmica da variância, σ_{fit}^2 , das distribuições exponenciais que melhor se ajustam às distribuições empíricas. Mais especificamente, investigamos como a variância se comporta à medida que aumentamos a janela de tempo τ . Para tanto, a variância foi obtida a partir dos parâmetros de ajustes exponenciais γ e ν nas regiões centrais das distribuições acumuladas empíricas e analisado o comportamento $\sigma_{fit}^2(\tau) \propto \tau^{2H}$. A análise da dinâmica das variâncias $\sigma_{fit}^2(\tau)$, tanto para as distribuições acumuladas diárias quanto para as distribuições acumuladas *intraday* (para $\tau > 3h$), mostrou que $H \approx \frac{1}{2}$. Isso implica que o processo estocástico subjacente, para ambos os regimes, é difusivo, no qual a variância cresce linearmente no tempo. Conclui-se, portanto, dessa análise que a dinâmica dos retornos do Ibovespa estudada nessa dissertação pode ser descrita por um processo estocástico difusivo de natureza exponencial.

Em face desse resultado, torna-se natural investigar uma possível aplicação de um modelo de precificação de opções do índice Ibovespa, partindo do pressuposto de que seus respectivos retornos seguem uma distribuição exponencial, conforme tratamos no capítulo 3. Para tanto, fizemos uma análise preliminar desse problema, comparando os preços de opções de compra do Ibovespa (praticados no mercado) com aqueles previstos pelo modelo exponencial. A opção do Ibovespa utilizada para a comparação foi a série **IBOVH**, com vários valores distintos para o preço de exercício, e cujo vencimento foi em 18 de agosto de 2004.

A figura 5.1 apresenta os respectivos preços de mercado para a série de opções acima, no dia 16 de julho de 2004, ou seja, 23 dias do vencimento (i.e., $\Delta t = 23$). Nesse dia, o índice Ibovespa foi cotado a $S = R\$ 22447$. A linha inferior da figura 5.1 representa o “valor intrínseco” das opções, sendo dado pela função $\max(S - K, 0)$, que seria o *payoff* caso o vencimento fosse na data da respectiva cotação. Os pontos

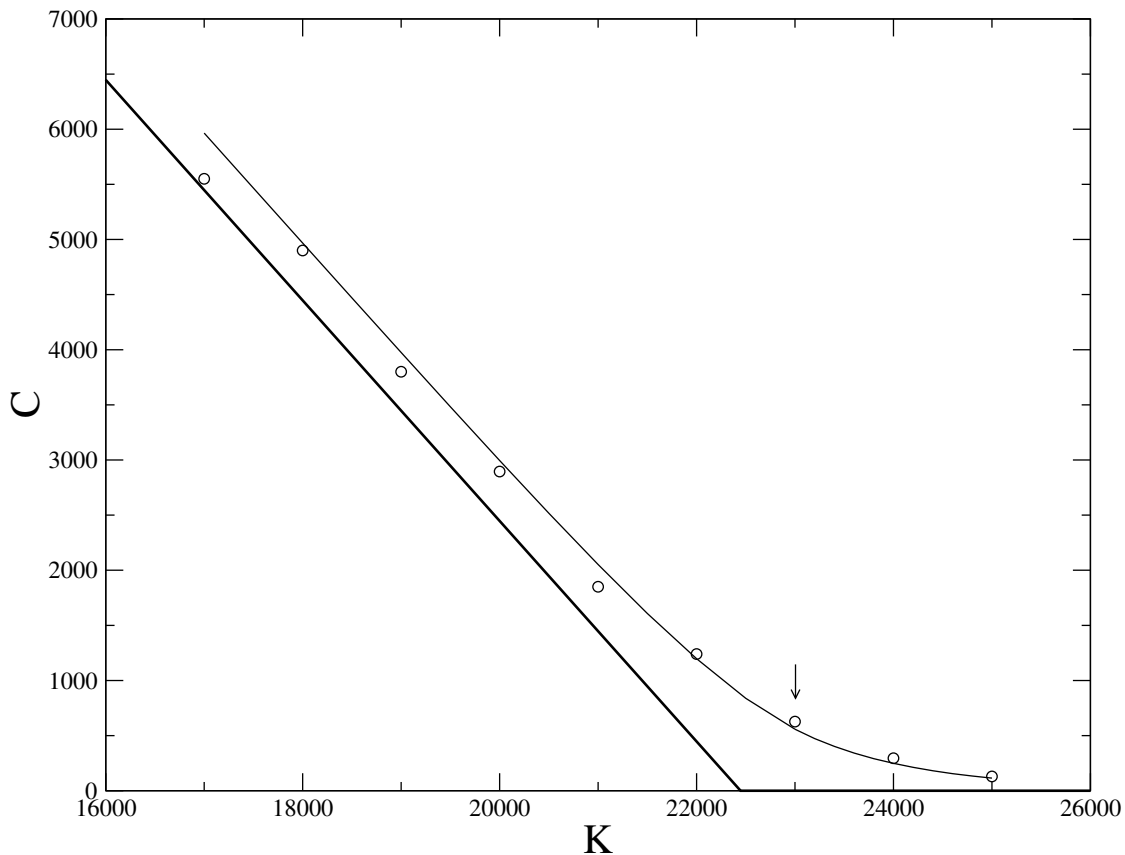


Figura 5.1. Cotação no dia 16 de julho de 2004 das opções da série **IBOVH**, cujo vencimento foi em 18 de agosto de 2004. A curva suave mostra o ajuste do modelo exponencial; vide texto.

apresentados representam a cotação das opções em função dos vários preços de exercício K . A partir desses pontos, foram feitos ajustes partindo das expressões (3.20), (3.22) juntamente com a condição *risk neutral* através da equação (3.28). Para as regiões $\ln \frac{K}{S} < \delta$ e $\ln \frac{K}{S} > \delta$, obtivemos os parâmetros $\gamma = 28,66$, $\nu = 24,03$ e $\gamma = 17,84$, $\nu = 17,33$ respectivamente.

Feito esse primeiro ajuste, resolvemos, por simplicidade, usar valores intermediários dos parâmetros e fizemos $\gamma = \nu = 20$, de modo a termos distribuições simétricas, pois conforme vimos no capítulo 4 as distribuições empíricas são aproximadamente simétricas. O ajuste assim obtido está apresentado na figura 5.1 como

a curva contínua suave, onde a seta delimita o ponto de separação entre as regiões $\ln \frac{K}{S} < \delta$ e $\ln \frac{K}{S} > \delta$. Como podemos perceber nessa figura, a precificação definida pelo modelo se ajusta razoavelmente bem aos preços praticados no mercado. Portanto, partindo dessa primeira análise, podemos sugerir que o modelo de precificação exponencial pode ser aplicado para as opções do índice Ibovespa.

Finalmente, como perspectiva, propomos que seja feita uma comparação mais detalhada entre os preços praticados no mercado de opções do Ibovespa (tanto de compra quanto de venda) com aqueles propostos pelo modelo de precificação exponencial, a fim de verificar se o “mercado” já incorpora tal comportamento. Uma análise desse tipo se faz necessária pois, ainda que seja de conhecimento do mercado que as distribuições dos retornos não são gaussianas, a fórmula de Black-Scholes ainda é largamente utilizada pelos investidores como forma de verificar o patamar dos preços desses contratos de derivativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Giovanni Bonanno, Fabrizio Lillo, Rosario N. Mantegna “*Levels of Complexity in Financial Markets*”. Physica A **299**, 16-27-(2001).
- [2] L. Bachelier, “*Théorie de la spéculation*”. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure III-17, 21-86-(1900).
- [3] P. A. Samuelson, “*Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*”. Industrial Management Review **62**, (1965).
- [4] A. Einstein, Ann Physik (Leipzig) **17**, 549(1905).
- [5] Eugene F. Fama, “*Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance*”. Journal of Financial Economics **49**, 283-417 (1970).
- [6] Burton G. Malkiel, “*A Random Walk Down Wall Street*”, 1973.
- [7] B. Mandelbrot, J. of Business **40**, 394(1963).
- [8] V. Pareto, *Cours d'Economie Politique*, Lausanne and Paris, (1897).
- [9] A. Christian Silva, Richard E. Prange e Victor M. Yakovenko, “*Exponential distribution of financial returns at mesoscopic time lags: a new stylized fact*”, cond-mat 0401225.
- [10] Kaushik Matia¹, Mukul Pal, H. Eugene Stanley, H. Salunkay, “*Scale-Dependent Price Fluctuations for the Indian Stock Market*”, cond-mat 0308013.

- [11] C. M. de Toledo, “*Distribuição de probabilidades dos retornos com base no modelo de Heston*”. Tese de Mestrado - USP 2003.
- [12] F. Black e M. Scholes, J. Polit. Econ 81, 637(1973).
- [13] G. M. Viswanathan, U. L. Fulco, M.L. Lyra e M. Serva, “*The origin os fat-tailed distributions in financial time series*”. Physica A 329, 273-280(2003).
- [14] L. Couto Miranda e R. Riera, “*Truncated Lévy walks and an emerging market economic index*”, Physica A 297, 509-520(2001).
- [15] P. Wilmott, “*P. Wilmott on Quantitative Finance*”. Volume 1, Wiley, 2000.
- [16] P. H. Cootner, Operations Research 7, 145(1973).
- [17] M. F. Osborne, “*The random character os stock market prices*”, MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- [18] G. L. Vasconcelos, “*A Guided Walk Down Wall Street: An Introduction to Econophysics*”, Brazilian Journal of Physics 34, 1039-1066(2004).
- [19] Eric W. Weisstein. “Itô’s Lemma”. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ItosLemma.html>
- [20] J. Voit, “*The Statistical Mechanics of Financial Markets*”. Springer-Verlag, Berlim, Second Edition, 2003.
- [21] Joseph L. McCauley, Gemunu H. Gunaratne, “*An empirical model of volatility of returns and option pricing*”, Physica A 329, 178-198(2003).

-
- [22] Rogério L. Costa e G.L. Vasconcelos, “*Long-range correlations and nonstationarity in the Brazilian stock market*”. *Physica A* 329, 231-248(2003).
- [23] R. Mantegna e H. E. Stanley, “*An Introduction to Econophysics*”. *Cambridge Univ. Press*, 2000.
- [24] J. Feder, *Fractals*, *Plenum Press*, New York, 1988.

Este texto foi tipografado em L^AT_EX na classe UFPETthesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).
A fonte do corpo do texto é a Computer Modern Roman 12pt.