

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Aspectos estatísticos de séries temporais de deslizamentos

Eric Josef Ribeiro Parteli

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço antes de tudo ao Professor Marcelo Gomes por todo o apoio dispensado na elaboração desta Tese. Agradeço também aos Professores Valdemiro Brito (UFPI) e Erivaldo Montarroyos, os quais realizaram todo o trabalho experimental que deu origem a esta Tese.

Agradeço ao Professor Ricardo Emmanuel pelo livro “The Fast Fourier Transform”, de E. O. Brigham, que muito consultei para escrever o Capítulo 2.

Agradeço ao Professor Giovani Vasconcelos pelo seu interesse no manuscrito “Omori law for sliding of blocks on inclined rough surfaces”, publicado na *Physica A* em 2001 (*Physica A* **292** (2001) 536-544). Agradeço a todos da “Coisa Complexa” pelas discussões em 28/02/2002 acerca de atrito, movimento “*stick-slip*” e “susceptibilidade de deslizamento como função do comprimento do cilindro”, as quais muito enriqueceram a dissertação da Seção 3.3 desta Tese.

Agradeço a Hugo Cavalcante pelas discussões muito frutíferas acerca de multifractalidade em séries temporais e invariância de escala discreta em sistemas complexos.

Agradeço ao meu colega e amigo Pedro Hugo de Figueiredo pelas críticas, sugestões e comentários, e pelo incentivo e grande companheirismo demonstrados durante o Curso de Mestrado. Agradeço a Cássia Cristina Donato pela grande ajuda nos comandos de LATEX, especialmente na fase final desta Tese.

Agradeço a Gustavo Camelo por ter me ensinado muita coisa de LATEX e linguagem C, e por ter me ajudado bastante em problemas computacionais, principalmente na fase inicial do Mestrado. Também agradeço a Márcio Cabral e a Alexandre Rosas pela ajuda com o *xmgrace* e com os programas do Capítulo 4 para calcular a função D_q das séries de deslizamento.

Agradeço a Pedro Ernesto pelo interesse na minha Tese, e pela sua ajuda nas operações básicas do editor de texto avançado do LINUX.

Agradeço a Chico Vieira-Jr. pelo estímulo proveniente de sua grande motivação em estudar Física de Sistemas Complexos.

Agradeço a todos os professores do Curso de Mestrado. Em especial, agradeço ao Professor Antônio Murilo, que com seu grande entusiasmo e profissionalismo, muito me incentivou (e incentiva) a estudar Física. Agradeço também a todos os colegas do Mestrado, em particular a Fred, Pedro, Paulo, Cássia, Israel e Laércio pelas discussões sobre as listas de exercícios.

Agradeço aos funcionários do Departamento de Física por seu zelo pela constante infra-estrutura, onde pude desenvolver sem transtornos os meus trabalhos.

Agradeço a Linet por ter me ajudado a resolver tantos problemas na Secretaria, na maior parte do Mestrado. Agradeço também a Ana da Pós-Graduação pela sua ajuda na fase final do Mestrado.

Agradeço a Ana da biblioteca pela ajuda valiosa, e a Joana, por ter conseguido o artigo de N. R. Lomb (“Least-Squares Frequency Analysis of Unequally Spaced Data”, *Astrophysics and Space Science* 39 447-462 (1976)), de grande importância para o Capítulo 2.

Agradeço ao Professor Anders Johansen, do “The Niels Bohr Institute”, pela ajuda na análise espectral das oscilações log-periódicas realizada no Capítulo 2, bem como pelo seu interesse no manuscrito da *Physica A*. Agradeço em especial ao Professor Hans Herrmann da Universidade de Stuttgart, pelas críticas e comentários acerca dos Capítulos 3 e 4.

Sobretudo, agradeço a Papai, Mamãe e ao meu irmão Johannes pelo seu incansável apoio e compreensão, muito importantes nas horas de trabalho mais intenso. Agradeço ao meu Tio José de modo especial pelo seu incentivo aos meus estudos. Agradeço a Dona Maria Batista de Areia pelos seus cuidados maternos, que me acompanharam ao longo de todo o Mestrado.

Este trabalho foi financiado pela CAPES, no período de março de 2000 a fevereiro de 2002.

Resumo

Nesta Tese, estudamos diversos aspectos estatísticos de seqüências temporais de deslizamentos de blocos sobre superfícies rugosas inclinadas, quando estas são submetidas a pequenas perturbações controladas. Experimentos recentes mostraram que, quando a inclinação θ não é muito menor do que o ângulo crítico θ_c , a distribuição espacial dos deslizamentos obedece à relação de escala $n(\lambda) \sim \lambda^{-(1+b)}$, onde $n(\lambda)$ é o número de deslizamentos com magnitude λ , e $b = 0.50 \pm 0.05$. Esta lei de potência é remanescente da lei de Gutenberg & Richter para a freqüência de um terremoto de momento sísmico s : $n(s) \sim s^{-(1+\gamma)}$, onde $\gamma \approx 0.5 \rightarrow 0.6$. Por outro lado, a análise de Hurst dessas séries revelou efeitos de persistência nos deslizamentos, correlação de larga escala temporal que desaparece no regime de inclinações mais baixas. O objetivo desta Tese é estudar a distribuição temporal dos deslizamentos em escalas de tempo mais reduzidas. Em particular, as séries no regime $\theta \ll \theta_c$ apresentam intermitência, e são similares, sob certos aspectos, a séries de terremotos reveladas nos sismógrafos. No Capítulo 2, mostraremos que a taxa $n(t)$ com que pequenos deslizamentos ocorrem depois de um grande evento, em algumas dessas séries, segue a lei de Omori, $n(t) \sim t^{-p}$, a qual descreve o decaimento de eventos sísmicos (“*aftershocks*”) ocorrendo após um grande terremoto (“*mainshock*”). O expoente p encontrado para os deslizamentos tem um valor *anômalo* $p \neq 1.0$, dependendo da série. Adicionalmente, mostraremos que a distribuição acumulada $N(t)$ dos deslizamentos ocorrendo próximo a um grande evento em t_c pode ser descrita por uma lei de potência do tipo $N(t) \sim |t_c - t|^z$, onde z é um expoente complexo, da forma $z = a + bi$. No Capítulo 3, estudaremos a distribuição temporal dos deslizamentos em uma escala microscópica, calculando a dimensão fractal e a lacunaridade do suporte onde a atividade está concentrada. No limite de carregamento vagaroso, observamos que cilindros de alumínio apresentam uma susceptibilidade de deslizamento proporcional a L^ζ , onde L é o comprimento do cilindro e $\zeta \simeq 0.56$. Finalmente, no Capítulo 4, mostraremos uma análise multifractal das séries temporais associadas a $\theta \simeq \theta_c$, usando as dimensões generalizadas D_q e o método de Chhabra e Jensen para calcular a função $f(\alpha)$. Um resumo dos resultados será apresentado no Capítulo 5.

Summary

In this Thesis, we study several statistical aspects concerning time series of slidings of blocks on inclined rough surfaces submitted to small controlled perturbations. Recent experiments have shown that when the angle θ is not too small when compared to the critical angle θ_c , the spatial distribution of the sliding magnitudes obeys the scaling relation $n(\lambda) \sim \lambda^{-(1+b)}$, where $n(\lambda)$ is the number of events with size λ , and $b = 0.50 \pm 0.05$. This power law is reminiscent from the Gutenberg & Richter's law for the frequency of an earthquake with seismic moment s : $n(s) \sim s^{-(1+\gamma)}$, where $\gamma \approx 0.5 \rightarrow 0.6$. On the other side, the Hurst analysis for this series has revealed the existence of persistence in the sliding events, a long-range correlation which disappears in the limit of smaller inclinations. In this Thesis, we study the temporal distribution of the sliding events on more reduced time scales. In particular, the series associated with the regime $\theta \ll \theta_c$ do present intermittency, being similar, in some sense, to time series of earthquakes. In Chapter 2, we show that the rate $n(t)$ for the occurrence of small sliding events after a large event, for some of these series, obeys the Omori law, $n(t) \sim t^{-p}$ for the decay of “*aftershocks*” succeeding a large earthquake. The exponent p for the sliding events has an *anomalous* value $p \neq 1.0$, depending on the series. Additionally, we show that the cumulative distribution $N(t)$ of the sliding events near a large event at t_c can be described by a power law of the type: $N(t) \sim |t_c - t|^z$, where z is a complex exponent, of the form: $z = a + bi$. In Chapter 3, we study the time distribution of the sliding events on a microscopic scale, by calculating the fractal dimension and the lacunarity of the support where the sliding activity concentrates. In the limit of slow loading, we observe that cylinders made of aluminum have a sliding susceptibility which rises proportionally to L^ζ , where L is the length of the cylinder, and $\zeta \simeq 0.56$. Finally, in Chapter 4, we present a multifractal analysis for the time series associated with the regime $\theta \simeq \theta_c$, by using the generalized dimensions D_q and the method of Chhabra and Jensen for calculating the $f(\alpha)$ function. A summary of the results is presented in Chapter 5.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Deslizamento de blocos em uma superfície rugosa inclinada	5
1.2	Lei de Gutenberg & Richter e expoente de Hurst	8
2	Lei de Omori e log-periodicidade em séries intermitentes	17
2.1	Lei de Omori para os deslizamentos	18
2.2	Correções log-periódicas da Lei de Omori	22
2.3	Análise espectral das oscilações log-periódicas	26
2.4	Estudo da atividade precursora de um grande deslizamento	35
3	Estrutura do suporte temporal de dissipação	39
3.1	Dimensão fractal do suporte dos deslizamentos	41
3.2	Lacunaridade das séries intermitentes	49
3.3	Susceptibilidade de deslizamento como função do comprimento do cilindro	55
4	Análise multifractal das séries de deslizamentos	62
4.1	Dimensões generalizadas D_q	63
4.2	Método de Chhabra e Jensen para calcular a função $f(\alpha)$	73
5	Conclusões	82
A	Programas (linguagem C)	85
B	Verificações matemáticas	92
B.1	Lacunaridade	92
B.2	Momento generalizado $M_1(\epsilon)$	94
B.3	Transformação de Legendre para as funções $f(q)$, $\alpha(q)$ e as dimensões generalizadas D_q	95
	Referências Bibliográficas	97

Capítulo 1

Introdução

Grande parte dos resultados apresentados nesta Tese envolve leis de potência ou *leis de escala* entre duas variáveis X e Y , isto é, relações do tipo $Y \sim X^\alpha$, onde α é chamado *expoente de escala*. Leis de escala são encontradas em praticamente todas as áreas da Física. Um exemplo muito familiar é a lei de Kepler para o período T da órbita de um planeta: $T \sim r^{3/2}$, onde r é o raio da órbita. Neste caso, $\alpha = 3/2$ é um número racional, do tipo a/b , com a e b inteiros. Quando isso acontece, dizemos que α é um expoente “trivial”. Nas últimas décadas, grande atenção tem sido dedicada a sistemas que apresentam leis de escala com expoentes “anômalos” ou “não-triviais”, isto é, $Y \sim X^\alpha$ onde α *não* é um número racional simples. Leis de escala desse tipo aparecem em fenômenos críticos, fractais, dinâmica não-linear, processos de crescimento, sistemas de avalanches, entre outros [1]. Na tentativa de compreender a origem dessas leis de potência anômalas, muitos conceitos têm sido desenvolvidos, tais como aqueles subjacentes à teoria do caos, da complexidade e da universalidade, os quais encontram atualmente vasta aplicação em diversas áreas da Física Não-Linear. Nesta Tese, mostraremos que seqüências de deslizamentos de blocos sobre superfícies rugosas inclinadas, quando estas são submetidas a pequenas perturbações controladas, apresentam uma estrutura temporal complexa, associada a leis de escala com expoentes não-triviais que descrevem a distribuição espacial e temporal dos eventos.

O estudo da dinâmica de objetos num plano inclinado tem uma longa história, iniciando com os experimentos de Galileo Galilei e, mais tarde, com o trabalho de Coulomb sobre o atrito, no século XVIII [2]. Todo estudante de Física Básica sabe, por exemplo, que se deixarmos um objeto rolar sobre uma superfície inclinada a partir do repouso, o espaço percorrido s escala com o tempo t como $s \sim t^2$. Para um objeto que não pode rolar, mas só escorregar, ocorre o seguinte: se a inclinação θ for maior que o ângulo θ_c , chamado *ângulo crítico*, então o objeto

desliza e dissipa energia durante a descida, devido à ação da força de atrito cinético. Mas se $\theta < \theta_c$, o objeto não sai do lugar, porque sua componente do peso na direção paralela à superfície não é maior que a força de atrito estático, a qual impede o movimento. Muito embora o estudo microscópico do atrito seja objeto de pesquisa atual [3], sabemos que as interações do bloco com o plano podem ser associadas a um coeficiente macroscópico de atrito, μ , o qual possibilita uma descrição simples do movimento, através das leis de Newton. Recentemente, Vasconcelos, Cunha-Jr. e Veerman [4] mostraram que a dinâmica de um único grão, de dimensões comparáveis à rugosidade da superfície, já é bastante complexa. Usando um modelo geométrico bem simples, eles encontraram que se a inclinação da superfície for muito grande, então o grão se move num regime caótico, no qual a velocidade permanece finita mas varia consideravelmente. Por outro lado, o movimento de um conjunto de muitos grãos em um plano inclinado – um comportamento intermediário entre sólidos e líquidos – ainda é pobremente caracterizado, apesar do esforço envolvido em muito trabalho teórico e experimental nos últimos anos [5, 6, 7].

Em 1987, Bak, Tang e Wiesenfeld (BTW) [8] publicaram um trabalho, hoje muito citado, com o título “Criticalidade Auto-Organizada: Uma explicação para o ruído $1/f$ ”, o qual impulsionaria um ressurgimento espetacular do interesse em experiências com superfícies inclinadas. Nesse trabalho, os autores apresentaram um modelo para descrever avalanches em uma pilha de areia, as quais resultam da adição de grãos no topo da pilha. A idéia era mostrar que sistemas de muitas partículas submetidas a pequenas perturbações, muitas vezes evoluem para um *estado crítico auto-organizado*. Essa auto-organização ocorre através de respostas ou avalanches sem qualquer tamanho s ou duração Δt característicos, e sem necessidade de se ajustar qualquer variável ou parâmetro relevante; ou seja, o estado crítico é um atrator da dinâmica, para o qual o sistema retorna automaticamente após cada avalanche. Uma característica comum a todos os sistemas nesse estado é que os tamanhos das flutuações em s e Δt seguem distribuições em leis de potência: $n(\Delta t) \sim (\Delta t)^{-\alpha}$ e $n(s) \sim s^{-\beta}$. Bak, Tang e Wiesenfeld imaginaram uma pilha de areia como um exemplo simples e intuitivo de um sistema no estado crítico auto-organizado. O estado de repouso de uma pilha de areia é caracterizado pelo ângulo de repouso θ_r que ela forma com a horizontal. Quando a inclinação aumenta, por exemplo, com o incremento de massa pelo topo da pilha, tem início uma série de avalanches que só terminam quando o ângulo θ_r é recuperado. No seu modelo, eles encontraram que $\alpha = 0.42$ e $\beta = 0.98$ em 2D, e $\alpha = 0.90$ e $\beta = 1.35$ em 3D. BTW disseram ainda que a distribuição espectral de potência¹ $S(f)$ associada à resposta era do tipo $S \sim f^{-\varphi}$,

¹A densidade espectral de potência $S(f)$ de uma quantidade flutuante $x(t)$ dá uma medida da

onde $\varphi \simeq 1$, que é justamente o ruído $1/f$ (daí a origem do título do trabalho de BTW).

Muitos experimentos com pilhas de areia, e também com grãos de areia e outros materiais em superfícies inclinadas, foram realizados a partir de então, em conexão com a teoria de BTW e com outros modelos de meios granulares. Num dos primeiros trabalhos, Jäger, Liu e Nagel, em 1988 [9], usaram “pilhas de areia” formadas de pequenas esferas de vidro e partículas rugosas de óxido de alumínio, colocadas sobre uma calha semi-cilíndrica, para estudar a relaxação do ângulo de repouso da superfície livre, quando o sistema era perturbado. A variação da inclinação média era feita de duas maneiras diferentes: na primeira, girava-se a calha a uma velocidade angular constante, e na segunda, partículas eram adicionadas no topo da pilha. Após a perturbação, media-se a distribuição de avalanches. Contrariamente às expectativas de BTW, Jäger e colaboradores *não* encontraram lei de potência para $S(f)$. Um ano depois, Jensen, Christensen e Fogedby [10] mostraram que o único modelo usado por BTW para apoiar quantitativamente suas idéias sobre criticalidade auto-organizada não produzia ruído $1/f$, mas apresentava, ao invés, $S(f) \sim 1/f^2$, que caracteriza um ruído “trivial”, conhecido como ruído Browniano. Esse resultado foi confirmado mais tarde com uma experiência realizada em 1990 por Held e colaboradores [11], os quais acharam correlações de curto alcance entre as avalanches, apenas para pequenas pilhas de areia. A distribuição de avalanches seguia uma lei de potência $n(s) \sim s^{-2.5}$, um comportamento bem diferente daquele previsto nas simulações de BTW em 3D. Além disso, para pilhas grandes, eles encontraram que a invariância de escala desaparecia, dando lugar a uma relaxação caracterizada pela predominância de avalanches grandes regularmente espaçadas, um cenário parecido com o apresentado por Jäger, Liu e Nagel [9]. Por outro lado, Rosendahl, Vekić e Kelley [12], dois anos depois, encontraram $n(s) \sim s^{-2.2}$, e mostraram que a invariância de escala persistia mesmo nas pilhas grandes, e que a diferença entre estas e as pequenas pilhas estava na massa total das avalanches, a qual crescia com a quantidade de areia acumulada, devido ao aumento do tamanho máximo registrado para s . De fato, vários outros experimentos mostravam que pilhas de areia eram bem mais complexas do que BTW haviam sugerido [13, 14].

Num outro tipo de experiência com superfícies inclinadas, Plourde, Nori e Bretz [15] estudaram avalanches líquidas formadas pela reunião de um número variável de gotículas de água, que desciam pela superfície interna de um hemisfério plástico, constantemente “bombardeado” por um borrifador. Eles encontraram uma

potência em cada intervalo de frequência; ela é calculada tomando-se o quadrado do módulo da transformada normalizada de Fourier de $x(t)$. Assim, a integral de $S(f)$ entre $f = f_1$ e $f = f_2$ dá a potência contida em $x(t)$ na banda $f_1 \leq f \leq f_2$.

lei de potência para o número $n(s)$ de avalanches com massa de água s , mas com um expoente dependendo fortemente da viscosidade ($\beta = 2.66$ para baixa viscosidade — ou alta temperatura T — e $\beta = 1.77$ para alta viscosidade). $S(f)$ seguia uma lei de potência $S(f) \sim f^{-1}$ apenas para um pequeno intervalo intermediário de f , um comportamento que não mostrava evidência definitiva de criticalidade auto-organizada.

1.1 Deslizamento de blocos em uma superfície rugosa inclinada

Até 1993 já tinham sido feitas experiências com avalanches de materiais granulares e líquidos sobre superfícies inclinadas. Restava fazer um experimento que envolvesse deslizamento de materiais *sólidos* com formas bem definidas, como placas ou cilindros. Naturalmente, uma das motivações desse estudo era o problema dos terremotos, nos quais ocorrem deslizamentos de placas tectônicas sólidas em certas condições críticas. Carlson e Langer [16], em 1989, já tinham chamado a atenção para uma possível importância da criticalidade auto-organizada no fenômeno dos terremotos.

Em 1995, Brito e Gomes (BG) publicaram o primeiro trabalho sobre deslizamento de blocos sólidos em uma superfície inclinada rugosa, submetida a pequenas perturbações controladas [17]. O aparato experimental que eles montaram está mostrado na Figura 1.1. O plano inclinado era de alumínio, em forma de V, com 300 mm de comprimento, fixo a uma mesa de 250 kg, de tal maneira que o sistema era pouco susceptível a vibrações mecânicas. Sobre o plano era colocado um objeto que tinha a forma cilíndrica ou prismática de seção quadrada, podendo ser de alumínio, latão, PVC ou teflon. O eixo longitudinal do bloco ficava na direção paralela ao sulco da calha. Dessa forma, tanto o cilindro quanto o prisma ficavam livres para deslizar, mas não podiam rolar, como mostra a geometria da seção transversal destacada na Figura 1.1. O ângulo θ com a horizontal, calculado com uma precisão de 0.1° , era mantido no intervalo $0 < (\theta_c - \theta)/\theta_c < 0.36$, onde $\theta_c = \tan^{-1}(\mu_e)$ é o ângulo crítico correspondente, de forma que o bloco ficava não muito distante, em média, da condição de deslizamento. Brito e Gomes acoplaram um martelo à calha, o qual provia perturbações na base do plano, como ilustra a Figura 1.1. Para dar as pancadas, o martelo, de 100.4 g, era solto a uma distância fixa do aparato, adquirindo no momento do impacto, uma velocidade estimada de 50 cm s^{-1} . Os deslizamentos eram medidos com uma fita milimetrada, colada na calha de alumínio, e a precisão em cada medida era de 0.5 mm.

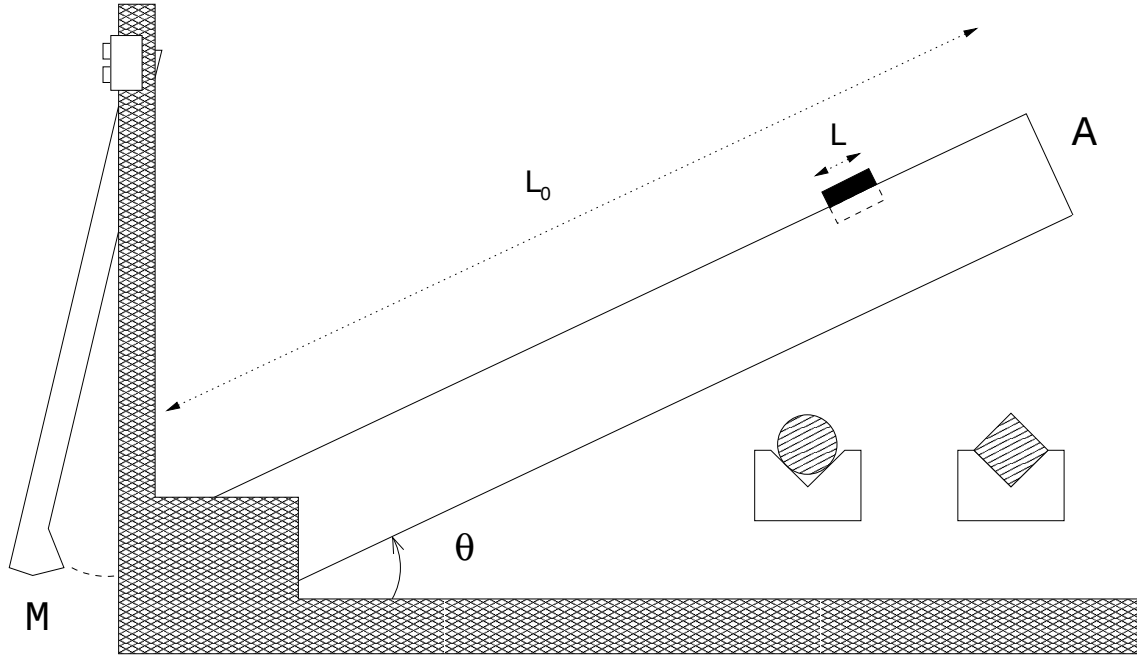


Figura 1.1: Diagrama esquemático do aparato experimental montado por Brito e Gomes [17]. Sobre a calha de alumínio (A) de comprimento L_0 , inclinada a um ângulo θ , era colocado um bloco feito de alumínio, latão, PVC ou teflon, de comprimento L . O bloco podia ser um cilindro, ou ter uma seção transversal quadrada. O martelo (M) de massa 100.4 g atingia a base da calha com uma velocidade de 50 cm s^{-1} .

Todos os cilindros tinham 7 mm de diâmetro, e seu comprimento variava de $L = 10$ a 40 mm , enquanto a calha tinha um comprimento $L_0 = 300\text{ mm}$. Por outro lado, os prismas retangulares tinham seção quadrada de lado 7 mm e os mesmos comprimentos que no caso dos cilindros. Assim, o espaço no qual os blocos podiam se movimentar sobre a calha variava de 260 a 290 mm . Em cada experiência, o bloco era colocado inicialmente no topo da calha, e a coleta dos valores experimentais do deslizamento era feita de forma encadeada: perturbava-se o sistema, e media-se o deslocamento λ quando o bloco parava; a seguir, perturbava-se novamente o sistema, sem se interferir na posição do bloco, e media-se o novo comprimento λ . Quando o bloco atingia a base da calha, o último deslizamento era desprezado, e uma nova sequência de avalanches começava, com o bloco retornado ao topo da superfície. Uma experiência consistia de uma sequência de 1000 avalanches $\{\lambda(t)\}$, registradas em função do tempo. O tempo aqui é medido em batidas, isto é, cada batida está associada a uma unidade de tempo $t = 1, 2, \dots, T$. No regime estudado, toda perturbação resulta em um deslizamento não nulo, de comprimento mínimo $\lambda_{\min} = 1.0\text{ mm}$, de forma que T é igual ao número de avalanches do experimento.

Série	Material	θ	A_T (mm)	$\langle \lambda \rangle$	$\lambda_{\max}$ (mm)	n_c
(a)	alumínio	35°	17121.0	17.12 mm	183.0	70
(b)	latão	14°	10115.0	10.12 mm	262.5	39
(c)	latão	18°	15866.5	15.87 mm	197.0	62
(d)	latão	20°	15085.0	15.09 mm	226.0	57
(e)	latão	21°	18647.5	18.65 mm	260.0	77
(f)	PVC	27°	12095.5	12.10 mm	218.0	47
(g)	PVC	29°	16612.0	16.61 mm	266.0	68
(h)	PVC	29.7°	18458.5	18.46 mm	238.0	74
(i)	PVC	30°	31595.0	31.59 mm	268.5	140

Tabela 1.1: Para cada conjunto [material do bloco ($L = 20$ mm), inclinação θ] associado às séries da Figura 1.2, identificamos nas colunas 4, 5, 6 e 7, respectivamente: A atividade total $A_T \equiv \sum_{t=1}^T \lambda(t)$ ($T = 1000$), a média dos deslizamentos $\langle \lambda \rangle$, o máximo evento ($\lambda_{\max}$) na série correspondente e o número de corridas, n_c , em que o bloco percorreu a calha.

Na Figura 1.2, mostramos quatro séries temporais $\{\lambda(t)\}$ obtidas com prismas de latão de 20 mm de comprimento, juntamente com cinco séries correspondentes a cilindros de alumínio e PVC, também de comprimento $L = 20$ mm, no regime de inclinação definido no parágrafo anterior. Em cada série, está indicado o valor da inclinação θ correspondente.

Na Tabela 1.1, mostramos nas colunas 2 e 3, o material do bloco e o ângulo θ correspondente às séries da Figura 1.2, identificadas na coluna 1. A atividade $A_T \equiv \sum_{t=1}^{1000} \lambda(t)$, o deslizamento médio $\langle \lambda \rangle \equiv A_T/1000$ e o máximo evento $\lambda_{\max}$, estão listados nas colunas 4, 5 e 6, respectivamente. Observe que $\langle \lambda \rangle$ variou de 10 a 31.5 mm; como a calha tinha um comprimento líquido $x = L_0 - L = 300 - 20 = 280$ mm, isso significa que o bloco precisava em média de $x/\langle \lambda \rangle = 9$ a 28 deslizamentos para chegar ao final da calha. No entanto, devido a flutuações, o número de eventos em cada “corrida” variou de 1 a 70, nas nove séries². Como consequência, cada série temporal mostrada na Figura 1.1 corresponde, na verdade, a uma sequência de $n_c = 39$ a 140 séries temporais menores (sexta coluna da Tabela 1.1), cada uma correspondendo a uma sequência de deslizamentos em que o bloco percorreu a calha.

Podemos descrever o que acontece com o bloco sobre a calha do seguinte modo: quando em repouso, o bloco se encontra num estado metaestável, interagindo com a calha em um certo número de contatos, nos quais se distribuem esforços de

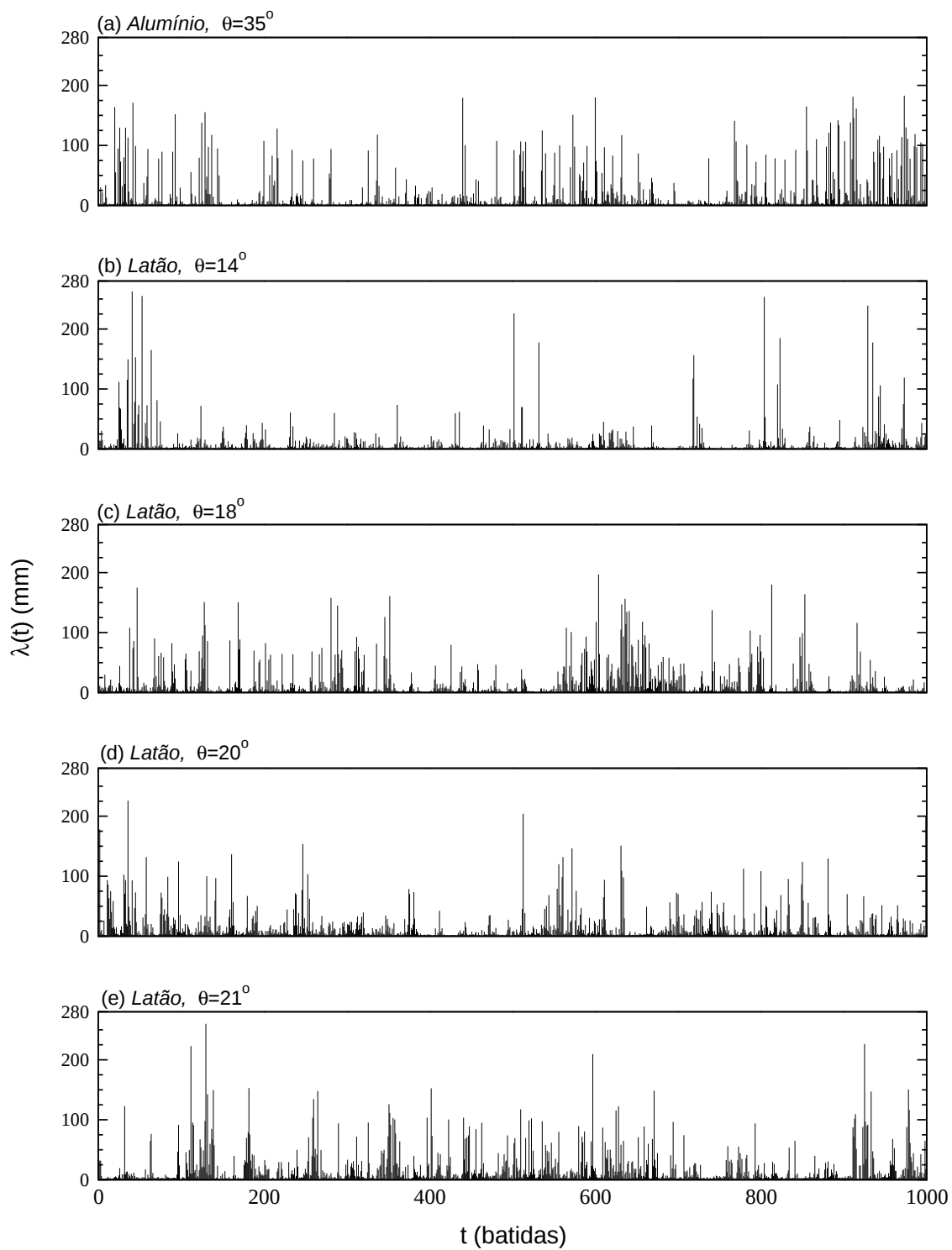
²O programa A.1 do apêndice A verifica o número de corridas dentro de cada série temporal, bem como o número de deslizamentos dentro de cada percurso do bloco ao longo da calha.

maneira não-uniforme. Essa configuração é formalmente equivalente ao ângulo de repouso θ_r em que se encontra a pilha de areia no seu estado de equilíbrio, como comentamos anteriormente. Ao se perturbar a calha, o esforço armazenado em alguma região da interface do bloco com a calha supera um certo limiar; nessa região, os contatos são rompidos, e o deslizamento (avalanche) ocorre, até o bloco ser capturado em um novo estado metaestável. Brito e Gomes observaram que não havia um comprimento característico para os deslizamentos λ , o que significa que não existiam configurações fixas de contatos entre as superfícies, nem havia uma distribuição característica de pressão ao longo da interface.

1.2 Lei de Gutenberg & Richter e expoente de Hurst

Em todas as séries de deslizamento estudadas em [17], o número de eventos $\mathcal{N}(\geq \lambda)$ que tiveram magnitude maior ou igual a um certo limiar λ obedece à lei de potência $\mathcal{N}(\geq \lambda) \sim \lambda^{-b}$, onde $b = 0.50 \pm 0.10$, independente do material do bloco e da inclinação θ , dentro das incertezas estatísticas. Portanto, o número de deslizamentos $n(\lambda)$ que tiveram tamanho λ se comporta como $n(\lambda) \equiv |d\mathcal{N}(\lambda)/d\lambda| \sim \lambda^{-(1+b)} = \lambda^{-1.50 \pm 0.10}$. Esta lei de escala lembra a famosa lei que Gutenberg e Richter encontraram em 1956 para a distribuição espacial de terremotos [18]: o número $n(m)$ de terremotos de momento sísmico m escala com m como $n(m) \sim m^{-(1+\gamma)}$, onde $0.5 < \gamma < 0.6$. O momento sísmico m de um terremoto é dado por $m = \mu A \delta$, onde μ é o módulo de cisalhamento da rocha na qual a falha está localizada, A é a área da falha e δ é o deslocamento médio através da falha durante o terremoto. Na experiência com deslizamentos de blocos (ou *blocomotos*), λ tem um papel similar ao δ da expressão anterior. O fato de o expoente b encontrado em [17] coincidir com o expoente de Gutenberg e Richter, aponta para a existência de uma *classe de universalidade* comum para os blocomotos e os terremotos.

O expoente $\beta = 1 + b = 1.50 \pm 0.10$ tem, dentro das barras de erro, o mesmo valor do obtido por Chen, Bak e Obukhov [19] em 1991 com seu modelo de propagação de falhas em terremotos, cujas simulações fornecem $n(s) \sim s^{-\nu}$, $\nu = 1.4$ em 2D e $\nu = 1.6$ em 3D; ele concorda também com os resultados obtidos por Olami, Feder e Christensen em 1992 [20], usando um modelo de autômato celular não-conservativo. Além disso, os blocomotos são razoavelmente descritos pelo autômato de BTW [8], o qual fornece $n(s) \sim s^{-1.35}$ em $d = 3$. Ou seja, o autômato celular de BTW simula, aproximadamente, deslizamentos reais de blocos sólidos, e não pilhas de areia reais! Os resultados discutidos acima estão mostrados na Tabela 1.2, onde



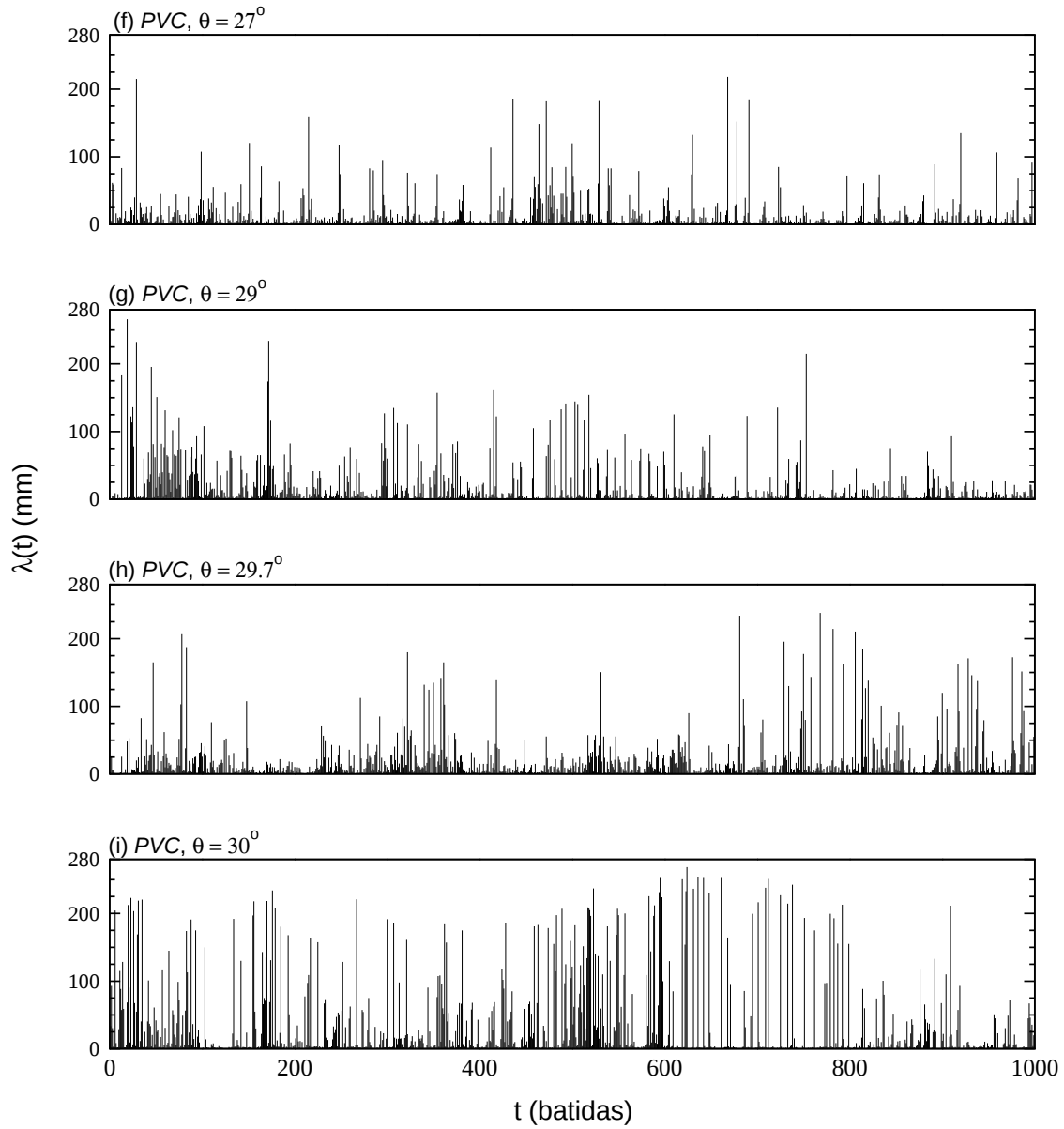


Figura 1.2: Séries temporais de deslizamento no regime $0 < (\theta_c - \theta)/\theta_c < 0.36$. Em cada uma estão indicados o material do bloco ($L = 20$ mm) e a inclinação da calha.

terremotos (GR) [18]	(1956)	$b = 0.5 \rightarrow 0.6$
autômato celular de BTW [8]	(1987)	$b = 0.35$ (3D), -0.02 (2D)
pilhas de areia (Held et.al. [11])	(1990)	$b = 1.5$
modelo de CBO [19]	(1991)	$b = 0.60$ (3D), 0.40 (2D)
pilhas de areia (Rosendahl et.al. [12])	(1993)	$b = 1.2$
avalanches de líquidos [15]	(1993)	$b = 1.66$ ($T \downarrow$), 0.93 ($T \uparrow$)
deslizamentos de blocos (BG) [17]	(1995)	$b = 0.50 \pm 0.10$

Tabela 1.2: A segunda coluna dá o expoente b da relação de escala $n(s) \sim s^{-(1+b)}$, como comentado no texto. Como podemos observar, há uma boa concordância entre o modelo de CBO, os terremotos e os blocos. Por outro lado, o autômato celular de BTW descreve razoavelmente bem os deslizamentos, e não as pilhas de areia.

colocamos também a lei de potência proposta por BTW para comparação.

Freqüentemente, o momento sísmico m de um terremoto é associado à energia dissipada, E [21]. A lei de escala discutida no parágrafo anterior dá portanto, a frequência com que uma energia E é liberada ao longo do tempo. No caso das experiências com deslizamentos de blocos, essa energia é proporcional ao deslizamento que ocorreu no instante t , e como vemos na Figura 1.2, se distribui no tempo de maneira bem heterogênea. Para encontrar correlações entre os deslizamentos, Gomes, Souza e Brito [22] fizeram mais tarde uma análise de Hurst [18, 23] das séries temporais estudadas em [17]. O método inventado em 1965 por Hurst é conhecido também como análise R/S , e é usado para quantificar efeitos de persistência e antipersistência em séries temporais. Em resumo, o algoritmo é o seguinte: Primeiro, abrimos uma janela de tamanho $\mathcal{T}$ menor que o tamanho da série, e calculamos a média dos eventos $\lambda(t)$ nesse período:

$$\langle \lambda \rangle_{\mathcal{T}} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{t=1}^{\mathcal{T}} \lambda(t),$$

o desvio acumulado em relação à média:

$$X(t) \equiv X(t, \mathcal{T}) = \sum_{u=1}^t \{\lambda(u) - \langle \lambda \rangle_{\mathcal{T}}\},$$

e o desvio padrão de $\lambda(t)$ dentro da janela $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{S} = \left(\frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{t=1}^{\mathcal{T}} \{\lambda(t) - \langle \lambda \rangle_{\mathcal{T}}\}^2 \right)^{1/2}.$$

Dentro de cada intervalo de tempo $\mathcal{T}$, anotamos os valores máximo e mínimo de X , e calculamos

$$R(\mathcal{T}) = \max_{1 \leq t \leq \mathcal{T}} X(t, \mathcal{T}) - \min_{1 \leq t \leq \mathcal{T}} X(t, \mathcal{T}).$$

Hurst encontrou empiricamente que muitos sistemas na natureza seguem a relação $R/S \sim \mathcal{T}^H$, $0 < H < 1$, onde H é o *expoente de Hurst*. Se um sinal $\lambda(t)$ representa ruído branco (um sinal totalmente descorrelacionado), então $H = 0.5$. Por outro lado, $H > 0.5$ ($H < 0.5$) indica que a série tem persistência (antipersistência). Persistência significa que se λ em alguma hora cresceu (decreceu) ao longo do tempo, essa tendência em crescer (decrecer) vai continuar no futuro; enquanto que antipersistência significa que se λ cresceu (decreceu) no passado, então haverá uma tendência para decrescer (crescer). Para todas as séries de deslizamento da Figura 1.2, foi encontrado um expoente $H = 0.70 \pm 0.05$, indicando que existe persistência nos deslizamentos.

No entanto, uma configuração completamente diferente aparece quando diminuimos o ângulo θ para mais longe de θ_c . Na segunda etapa do trabalho, foram realizadas experiências com a inclinação mantida no intervalo $0.15 \leq (\theta_c - \theta)/\theta_c \leq 0.45$ [22], usando uma montagem similar à da Figura 1.1. A calha era de alumínio, em forma de V, mas tinha agora um comprimento de 2000 mm, e o processo de soltar o martelo, esperar o bloco parar e soltar de novo, era totalmente automatizado. Nos experimentos, os blocos estudados eram cilindros de alumínio, com comprimento variando de 5 mm a 1000 mm. Nesta Tese, vamos estudar nove séries temporais obtidas nesse regime, as quais estão mostradas na Figura 1.3. Nesta figura, indicamos também o comprimento do cilindro e a inclinação θ para cada série. Identificaremos as séries da Figura 1.2 como no regime de inclinação R1, e as da Figura 1.3 como no regime R2. Podemos observar que o aspecto das séries em R1 é bem diferente do das séries em R2. Como a inclinação neste último caso é mais baixa, nem toda pancada do martelo resulta num deslizamento; às vezes, até 600 batidas são necessárias para um único evento ocorrer. Temos portanto uma distribuição temporal bem rarefeita, mostrando *intermitência* na atividade. Cada série temporal consiste no registro de 100 deslizamentos. O comprimento T de cada uma delas (número de batidas necessárias para ocorrerem os 100 eventos) varia de 364 a 4757, como indicado na Figura 1.3.

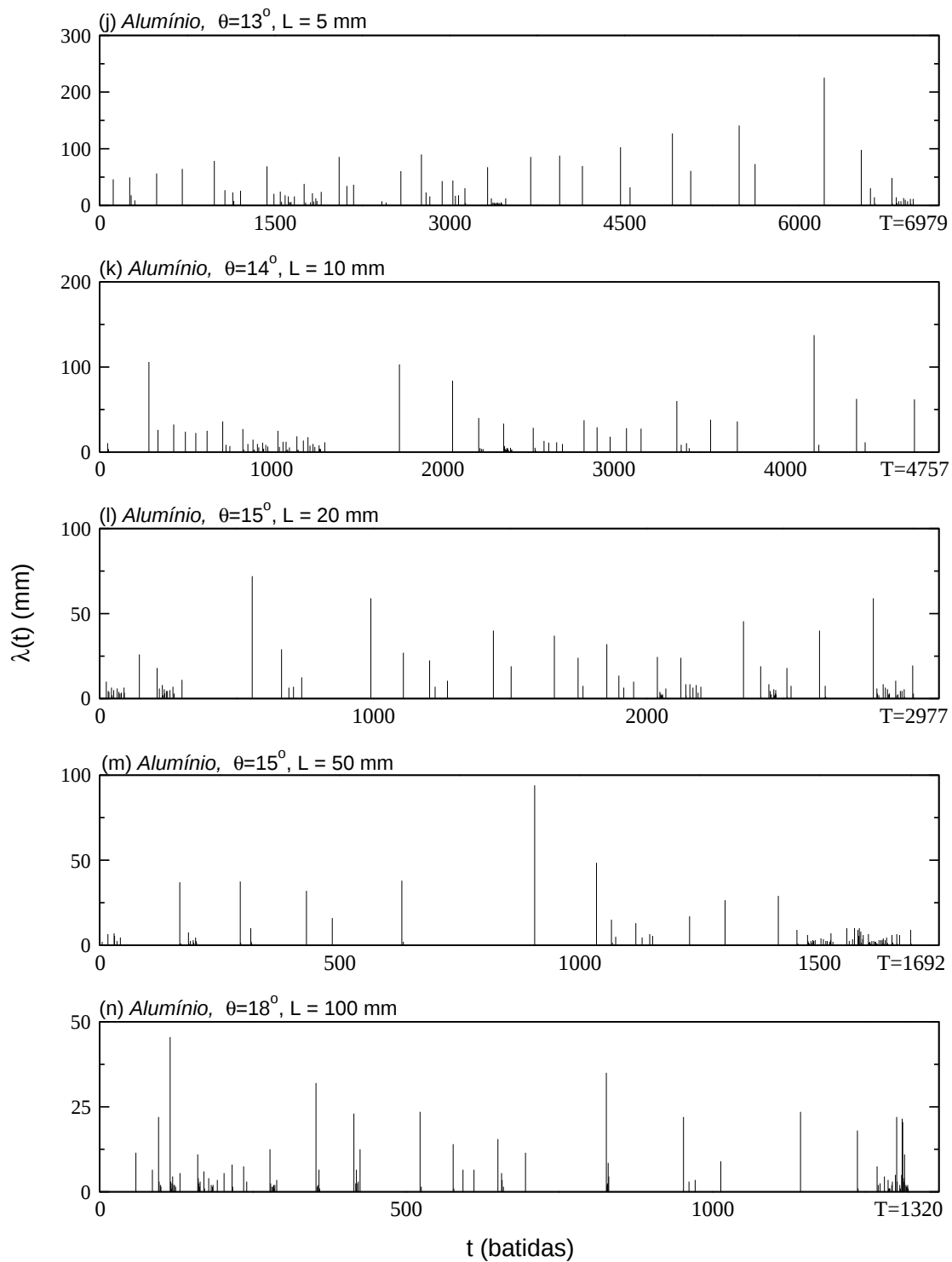
Na Tabela 1.3, mostramos nas colunas 4 a 7 os valores do ângulo crítico θ_c , os valores de T (tamanho da série), da atividade total $A_T = \sum_{t=1}^T \lambda(t)$ e da atividade média $\langle \lambda \rangle = A_T/T$ para cada série identificada na coluna 1 (L e θ indicados nas colunas 2 e 3). Na oitava coluna, estão listados os valores do máximo deslizamento λ , e na nona, os valores de n_c , o número de vezes em que o cilindro percorreu a calha.

Série	L (mm)	θ	θ_c	T	A_T (mm)	$\langle \lambda \rangle = A_T/T$	$\lambda_{\max}$ (mm)	n_c
(j)	5	13°	20°	6979	2685.5	0.39 mm	225.5	2
(k)	10	14°	20.5°	4757	1571.0	0.33 mm	137.5	1
(l)	20	15°	20.7°	2977	1046.0	0.35 mm	72.0	1
(m)	50	15°	21°	1692	711.0	0.42 mm	94.0	1
(n)	100	18°	21.2°	1320	658.0	0.50 mm	45.5	1
(o)	200	18°	21.5°	1037	458.0	0.44 mm	34.0	1
(p)	300	18°	22°	553	344.0	0.62 mm	28.0	1
(q)	500	18°	26°	486	656.0	1.35 mm	81.0	1
(r)	1000	18°	32°	364	1148.5	3.16 mm	160.5	2

Tabela 1.3: Nas colunas 2 e 3, identificamos o comprimento do cilindro, L , e a inclinação da calha correspondente às séries da Figura 1.3, as quais estão indicadas na coluna 1 da tabela. Na quarta coluna, mostramos o ângulo crítico θ_c como função do comprimento do cilindro L . As colunas 5, 6, 7, 8 e 9 mostram o tamanho das séries (T = número de batidas necessárias para ocorrerem 100 eventos), a soma dos deslizamentos ($A_T \equiv \sum_{t=1}^T \lambda(t)$), a atividade média $\langle \lambda \rangle$, o máximo evento ($\lambda_{\max}$) e o número de corridas n_c em cada série.

Como podemos ver, apesar de T chegar a valores bem grandes, a atividade A_T permanece bem menor que no caso das séries da Tabela 1.1, e o cilindro deslizou as 100 vezes em uma única corrida, em praticamente todas as séries. Podemos atribuir essa queda sensível da atividade a dois fatores: primeiro, o número de eventos que tiveram grande e média magnitude nesse caso diminuiu bastante, em relação às séries da Figura 1.2. E em segundo, muitas das T batidas não resultaram em deslizamentos; como consequência, no eixo temporal aparecem lacunas de tamanhos variáveis associadas a $\lambda = 0$. O expoente de Hurst para essas séries foi $H = 0.52 \pm 0.05$, essencialmente o mesmo do ruído branco; ou seja, as séries no regime R2 não apresentam persistência nem antipersistência. Assim, a supressão de memória ($H \simeq 0.5$) está acompanhada da intermitência nessas séries.

O tipo de experimento estudado nesta Tese envolve o movimento conhecido como “*stick-slip*” (gruda-desliza), termo usado para descrever a dinâmica de um sistema que se move de maneira intermitente, transitando entre um estado cinético e outro estático. Essa dinâmica constitui um dos aspectos mais importantes do estudo de atrito entre superfícies deslizantes, e tem uma vasta literatura relacionada [24, 25, 26, 27, 28]. No entanto, o procedimento ilustrado na Figura 1.1 estabelece uma diferença fundamental em relação aos experimentos anteriores sobre esse tipo de movimento: Agora, o bloco se move em resposta à ação repetida de um martelo que provê perturbações na calha, e não devido à ação de uma força que o puxa



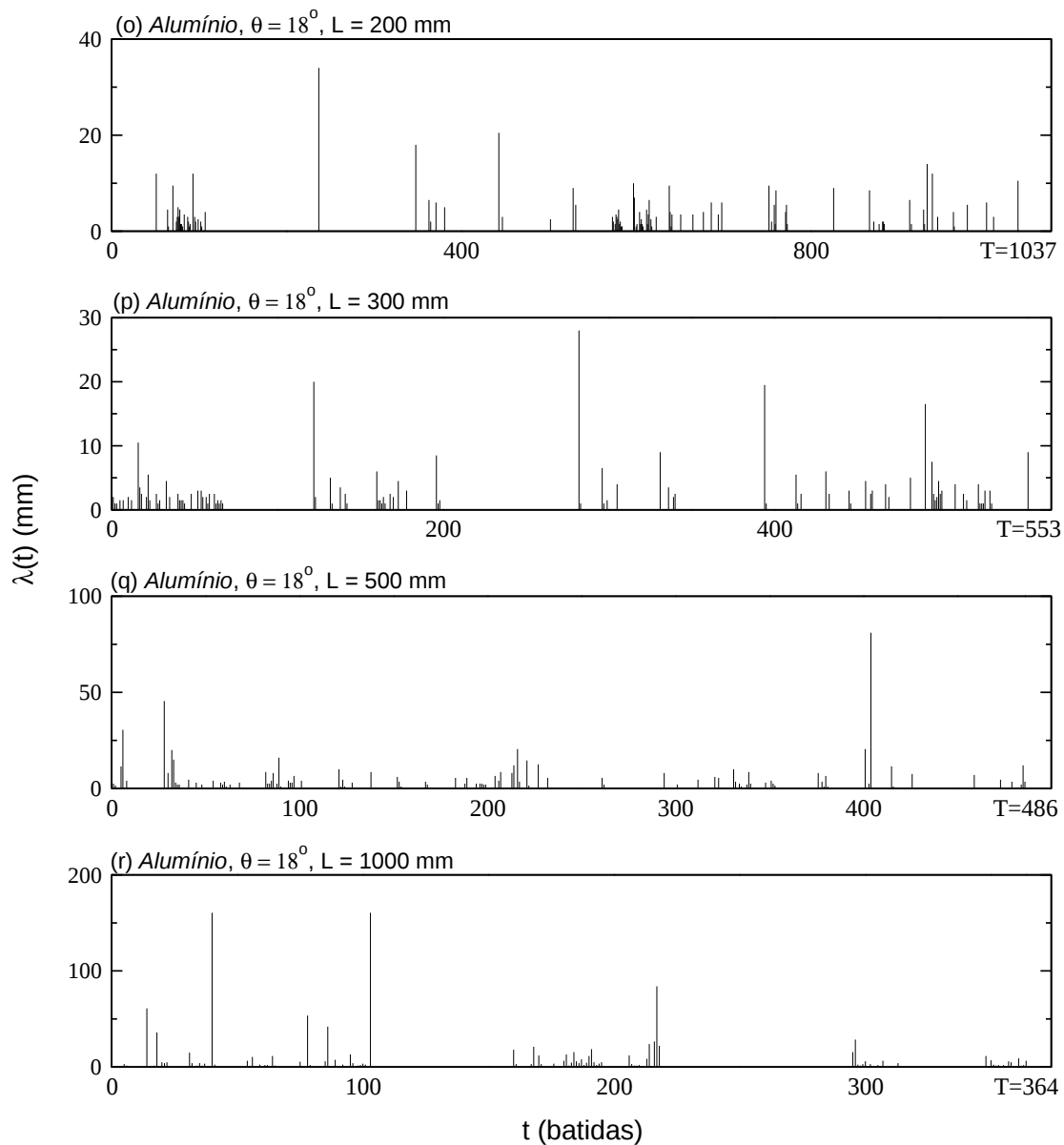


Figura 1.3: Séries de deslizamento obtidas com cilindros de alumínio, no regime $0.15 < (\theta_c - \theta)/\theta_c < 0.45$. Em cada série estão indicados o comprimento L do cilindro e a inclinação da calha, θ .

com velocidade constante. Como mostramos anteriormente, os experimentos com deslizamento de blocos discutidos aqui são complementares a outros experimentos com deslizamento de grãos [9, 11] e líquidos [15], bem como a modelos de terremotos [16, 19, 20] e de autômato celular de avalanches em pilhas de areia [8].

A análise de Hurst discutida acima indica correlações numa escala macroscópica, e é uma medida da *tendência* média da atividade em crescer ou diminuir ao longo do tempo. Nos próximos capítulos, vamos estudar a distribuição temporal dos deslizamentos em uma escala mais fina. No Capítulo 2, vamos investigar como a atividade de deslizamento se comporta próximo a um grande evento, calculando a taxa com que acontecem os eventos menores; no Capítulo 3, vamos calcular a dimensão fractal e a lacunaridade do suporte onde a atividade está concentrada, bem como estudaremos a susceptibilidade de deslizamento como função do comprimento do cilindro, no limite de carregamento vagaroso (regime R2); e finalmente, no Capítulo 4, mostraremos uma análise multifractal das séries de deslizamento no regime R1. Um resumo dos resultados será apresentado no Capítulo 5.

Capítulo 2

Lei de Omori e log-periodicidade em séries intermitentes

Se injetarmos energia continuamente em diversos sistemas de não-equilíbrio de muitas partículas, observaremos uma complexa distribuição temporal de respostas ou descargas de energia, as quais não possuem nem magnitude nem duração características. Importantes exemplos de sistemas e fenômenos associados a este tipo de comportamento temporal incluem pilhas de areia [11] e outros materiais granulares [29], emissões acústicas em rochas vulcânicas [30] e processos de microfraturas em geral [31], reestruturação de domínios em sistemas magnéticos [32], turbulência [33], entre outros. Como vimos no Capítulo 1, seqüências de deslizamentos de blocos em superfícies rugosas inclinadas, quando estas são submetidas a pequenas perturbações controladas, dão origem a leis de escala não triviais para a distribuição espacial dos eventos [17]. Adicionalmente, os efeitos de persistência e antipersistência observados nas séries intermitentes obtidas com cilindros [22] indicam uma complexa distribuição dos deslizamentos ao longo do tempo. Esses deslizamentos são um processo de dissipação de energia na interface que o bloco forma com a superfície inclinada. Assim, uma conexão é possível, em princípio, entre os deslizamentos considerados nesta Tese e a dinâmica não-linear de terremotos, os quais ocorrem quando um limiar de dissipação é superado na interface de rochas geológicas.

Terremotos não ocorrem de uma maneira puramente aleatória, e raramente acontecem como eventos isolados, fazendo parte em geral de seqüências de eventos sísmicos menores chamados “*foreshocks*” e “*aftershocks*”, os quais aparecem antes e depois, respectivamente, do grande evento denominado “*mainshock*”. Seqüências de terremotos que não estão associadas a um “*mainshock*” são denominadas “*swarms*”.

2.1 Lei de Omori para os deslizamentos

Uma importante relação estatística para a distribuição de “*aftershocks*” foi apresentada por Omori em 1895 [18], o qual estudou o comportamento da atividade sísmica sucedendo o terremoto de Kobe, em 1891. A lei de Omori, como é hoje conhecida, diz que a taxa com que os “*aftershocks*” aparecem após o grande evento escala com o tempo t decorrido desde o “*mainshock*” como:

$$n(t) \sim t^{-p}, \quad (2.1)$$

onde o expoente p é aproximadamente igual a 1.0. A lei de Omori tem sido usada com sucesso nos últimos anos para descrever várias seqüências de “*aftershocks*”. Devido especialmente a problemas de detecção de pequenos eventos no estágio inicial da seqüência, uma forma modificada para a lei de Omori tem sido muito usada [34]: $n(t) \sim (t + c)^{-p}$, onde c é uma constante. Frequentemente, os “*aftershocks*” são definidos de maneira que o maior evento na seqüência é tipicamente 1 ordem de magnitude menor que o “*mainshock*”. Apesar de o expoente p não mudar significativamente com o limiar de magnitude acima do qual os “*aftershocks*” são contados, nem apresentar dependência sistemática com a magnitude do “*mainshock*” correspondente, esse índice (em geral $p = 0.9$ a 1.5) difere de seqüência a seqüência. Essa variabilidade pode estar relacionada às condições tectônicas da região, tais como heterogeneidade estrutural, temperatura e pressão, mas ainda não é muito claro qual fator é mais significativo no controle do valor de p . De uma maneira geral, qualquer modelo para terremotos deveria em princípio reproduzir tanto a lei de Gutenberg & Richter, apresentada no Capítulo 1, quanto a lei de Omori. Em particular, nos últimos anos, a comunidade científica tem dedicado atenção especial à primeira, em conexão principalmente com a teoria de criticalidade auto-organizada de Bak, Tang e Wiesenfeld.

Nesta seção, estudaremos como a atividade de deslizamento nas séries temporais no regime R2, mostradas na Figura 1.3, se comporta após um grande evento, o qual chamaremos de “*mainsliding*” (MS). Em algumas das séries, identificamos um ou mais grandes eventos, os quais são sucedidos por seqüências de deslizamentos bem menores. Dessas seqüências, selecionamos aquelas que satisfazem as seguintes condições: (i) a média dos “*afterslidings*” na seqüência, $\langle \lambda_{as} \rangle$, é da ordem de $0.1 \lambda_{MS}$, isto é, 1 ordem de magnitude menor que o “*mainsliding*”; e (ii) o número de eventos na seqüência, N_{as} , é no mínimo $= 30$ (isto é, aproximadamente $1/3$ do número de eventos da série, $N = 100$). As seqüências de “*afterslidings*” estudadas estão listadas na Tabela 2.1. Na segunda coluna desta tabela, identificamos a série

temporal que deu origem à seqüência. O instante t_1 em que ocorreu o “*mainsliding*” está mostrado na coluna 3, enquanto que a magnitude deste, λ_{MS} , aparece na coluna 5. Uma seqüência de “*afterslidings*” é interrompida quando ocorrer um

Seq.	Série de deslizamento	t_1	t_2	λ_{MS} (mm)	$\langle \lambda_{as} \rangle$ (mm)	N_{as}
1	(k) $\theta = 14^\circ$, $L = 10$ mm	287	1750	106.0	9.89	47
2	(m) $\theta = 15^\circ$, $L = 50$ mm	1415	1692	29.0	3.49	61
3	(q) $\theta = 18^\circ$, $L = 500$ mm	28	404	45.5	5.08	84

Tabela 2.1: Seqüências de “*afterslidings*” de deslizamentos estudadas nesta Tese. A segunda coluna identifica a série correspondente da Figura 1.3. O instante em que ocorre o “*mainsliding*”, o qual tem magnitude λ_{MS} , é assinalado como t_1 . N_{as} é o número de deslizamentos entre t_1 e t_2 . Observe que a média desses deslizamentos, $\langle \lambda_{as} \rangle$, é aproximadamente 1 ordem de magnitude menor que λ_{MS} .

grande deslizamento em t_2 (coluna 4), de tal maneira que $\lambda(t_2)$ é da ordem de λ_{MS} , ou quando $t_2 = T$ (final da série). Dessa forma, as seqüências 1 e 3 poderiam ser divididas em duas partes: uma seqüência menor de “*afterslidings*” do evento λ_{MS} (em t_1), e outra de “*foreslidings*” antecedendo o deslizamento ocorrido em t_2 . Nesta seção, estudaremos a atividade de deslizamento *entre* esses dois grandes eventos¹, em particular usando a equação (2.1) para a distribuição de “*afterslidings*” do primeiro grande deslizamento. O número N_{as} de deslizamentos entre os dois grandes eventos de cada seqüência está indicado na última coluna da Tabela 2.1. Como podemos ver, a média dos deslizamentos, $\langle \lambda_{as} \rangle$ (coluna 6), é aproximadamente 1 ordem de magnitude menor que o grande evento ocorrido em t_1 (MS).

Estamos interessados em calcular a taxa com que os “*afterslidings*” dessas seqüências aparecem em um instante t após o “*mainsliding*” (ao qual atribuímos $t = 0$). Observe que se $n(t) \sim t^{-p}$, então a distribuição acumulada $N(t)$ deve ter o seguinte comportamento:

$$N(t) = \int_0^t n(t') dt' \Rightarrow N(t) \sim t^{1-p}. \quad (2.2)$$

Na equação acima, $N(t)$ é o número de eventos ocorridos desde o grande evento, em $t = 0$, até o instante t :

$$N(t) = \sum_{t'=0}^t \Theta[\lambda(t')],$$

onde a função $\Theta(x)$ satisfaz $\Theta(x) = 1$, para $x > 0$ e $\Theta(x) = 0$, caso contrário.

¹Observe que, na seqüência 2, o segundo grande evento não aparece, de maneira que $t_2 = T = 1692$.

As Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostram $N(t) \times t$ para todas as seqüências da Tabela 2.1. Em cada figura, destacamos no gráfico menor a seqüência de “*afterslidings*” correspondente. A linha contínua em cada gráfico representa o ajuste $N(t) = kt^\alpha$, obtido com a regressão lei de potência do *xmgrace*. Como podemos ver, essa linha descreve razoavelmente o comportamento de $N(t)$ para todas as seqüências analisadas. Escrevemos o expoente α como $\alpha = 1 - p$, de forma que os valores de k e p para cada seqüência estão indicados na Tabela 2.2. Assim, a taxa com a qual

Seq.	k	p
1	$\approx 6.14 \times 10^{-6}$	-1.29 ± 0.05
2	≈ 0.03	-0.39 ± 0.04
3	≈ 1.00	0.25 ± 0.01

Tabela 2.2: Valores de k e p obtidos com o *xmgrace*, usando o ajuste $N(t) = kt^{1-p}$ para as seqüências de “*afterslidings*” listadas na Tabela 2.1.

os eventos menores aparecem após um grande deslizamento obedece a uma lei de potência remanescente da lei de Omori (2.1), mas com expoente p *anômalo*, o qual varia de seqüência a seqüência.

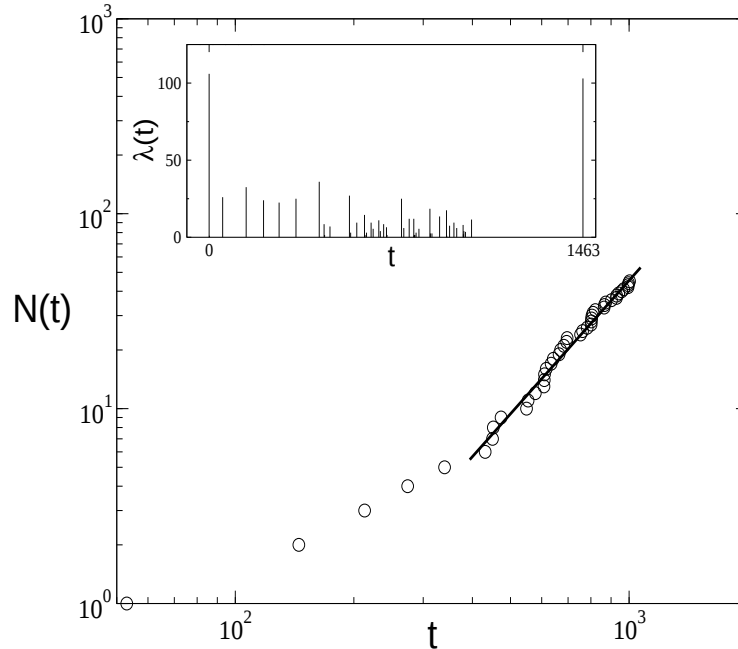


Figura 2.1: O gráfico principal mostra a distribuição acumulada $N(t)$ para a seqüência 1 da Tabela 2.1. Essa seqüência está destacada no gráfico menor. A linha contínua representa o ajuste $N(t) = 6.14 \times 10^{-6} \times t^{2.29}$.

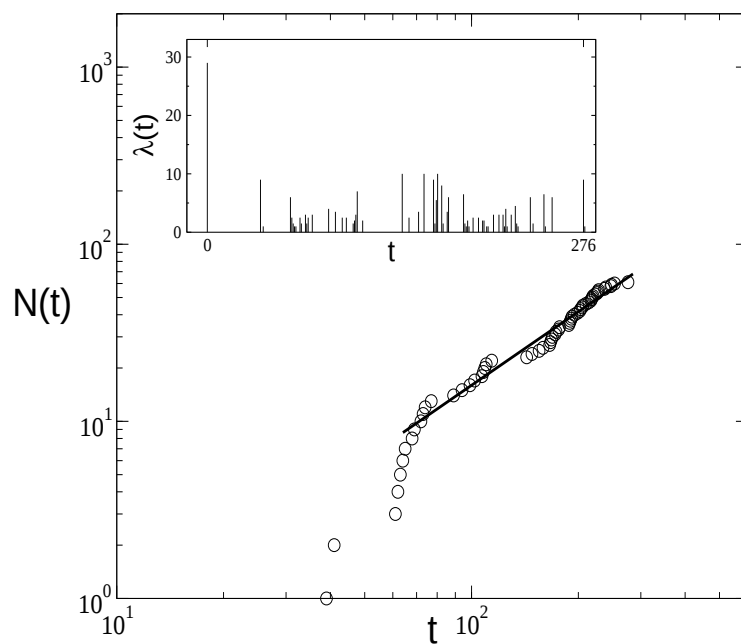


Figura 2.2: O mesmo da Figura 2.1 para a sequência 2 da Tabela 2.1. A linha contínua representa o ajuste $N(t) = 0.03 \times t^{1.39}$.

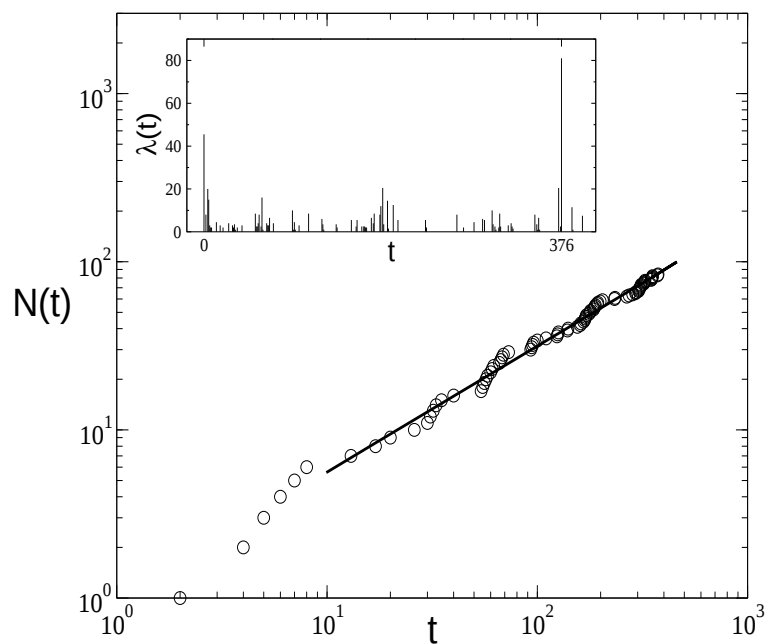


Figura 2.3: O mesmo das Figuras 2.1 e 2.2 para a sequência 3 da Tabela 2.1. A linha contínua representa o ajuste $N(t) = 1.00 \times t^{0.75}$.

2.2 Correções log-periódicas da Lei de Omori

Nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, podemos ver que a distribuição acumulada de “*afterslings*” desenvolve várias oscilações em torno do ajuste lei de potência $N(t) \sim t^{1-p}$, as quais aparecem devido à intermitência na atividade de deslizamento. Flutuações como essas são também observadas em seqüências de “*aftershocks*” de terremotos. Nos últimos anos, uma nova maneira de caracterizar essas seqüências tem sido empregada, introduzindo correções log-periódicas para o comportamento em lei de potência. Assim, a lei de Omori representa um caso particular de uma equação mais geral [35, 36]:

$$N(t) = kt^{1-p}[1 + b \cos(\omega \ln t + \varphi)], \quad (2.3)$$

onde a correção $kt^{1-p}[b \cos(\omega \ln t + \varphi)]$ é essencialmente a parte real da lei de potência kt^z , cujo expoente de escala z é um número complexo $z = (1 - p) + i\omega$. Aparentemente, o primeiro a sugerir uma relevância teórica de correções log-periódicas para a Física foi Novikov em 1966, para descrever fluidos turbulentos (intermitentes) [35]. Recentemente, expoentes complexos têm sido encontrados em diversos sistemas fora-do-equilíbrio apresentando intermitência, como por exemplo nas emissões acústicas provenientes da ruptura em sistemas fortemente desordenados [37], ou na estrutura hierárquica de aglomerados de DLA [38], entre outros.

A presença de correções log-periódicas associadas a um observável de um sistema tem uma importante implicação física. Leis de escala da forma $Y \sim X^\alpha$ aparecem em muitos sistemas como consequência da invariância de escala da variável Y com relação a uma mudança arbitrária do parâmetro $X \rightarrow \lambda X$. Isto é, o valor relativo do observável em duas escalas diferentes não depende de X , uma vez que

$$\frac{Y(\lambda X)}{Y(X)} = \frac{(\lambda X)^\alpha}{X^\alpha} = \lambda^\alpha$$

é função apenas da razão das duas escalas. Quando essa relação é válida para qualquer valor de λ real, então dizemos que a invariância de escala é *contínua*, refletindo a ausência de um comprimento de escala característico no sistema. Os últimos anos registraram um crescente interesse por sistemas físicos exibindo invariância de escala *discreta*, um tipo mais fraco de invariância de escala, na qual o sistema ou o observável é invariante por escala apenas para certos valores de λ , os quais formam em geral um conjunto contável infinito de valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ que podem ser escritos como $\lambda_n = \lambda^n$. λ é chamado nesse caso de razão de escala fundamental. Pode-se mostrar que esse tipo de simetria aparece quando o expoente da relação $Y \sim X^\alpha$ é um número complexo da forma $\alpha' + i\omega$, onde $\omega = 2\pi/\ln \lambda$ (veja por exemplo, a referência [35] pa-

ra uma introdução didática à invariância de escala discreta em sistemas complexos). Neste caso, a razão do observável Y em duas escalas diferentes será a mesma apenas quando a transformação em X for do tipo $X \longrightarrow \lambda^n X \Rightarrow \ln X \longrightarrow n \ln \lambda + \ln X$. O termo $\ln \lambda$ define o período das oscilações em torno da lei de potência.

Estruturas log-periódicas nos dados indicam que o sistema e/ou os mecanismos físicos subjacentes possuem comprimentos de escala característicos. Por muito tempo, invariância de escala discreta permaneceu um conceito restrito a sistemas “artificiais”, tais como sistemas hierárquicos, estruturas recursivas com lacunas regulares, etc. Só recentemente tem sido verificado que invariância de escala discreta e suas correções log-periódicas associadas, podem aparecer *espontaneamente*, isto é, sem a necessidade de uma estrutura hierárquica pré-existente. Esse comportamento é particularmente interessante, uma vez que a sua verificação pode representar restrições para a física do sistema. De fato, a lei de Gutenberg & Richter estudada no Capítulo 1, a qual descreve a distribuição de energias em terremotos (e blocos-motos), pode ser obtida a partir de uma variedade de mecanismos. De uma maneira geral, grande quantidade de sistemas físicos diferentes foram estudados nas últimas décadas exibindo invariância de escala contínua, de forma que a existência de leis de potência com expoentes universais dificilmente pode ser usada como vínculo para modelar esses sistemas. Ao contrário, acredita-se que a presença de padrões log-periódicos pode estar associada a importantes estruturas físicas, as quais estariam ‘escondidas’ numa descrição por invariância de escala contínua [35].

Nesta seção, estamos interessados em usar a equação (2.3) para descrever as distribuições de “*afterslidings*”, $N(t)$, mostradas nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3. Para cada seqüência, encontramos os 5 parâmetros k, p, b, ω e φ , usando a regressão não-linear do *xmgrace* para a equação (2.3). Em todos os ajustes, escolhemos os valores do parâmetro p como sendo aproximadamente os mesmos da Tabela 2.2. Os resultados para os outros parâmetros estão mostrados na Tabela 2.3. Observe que o parâmetro k , para cada seqüência, permaneceu praticamente o mesmo da Tabela 2.2. As linhas

Seq.	k	p	b	ω	φ
1	8.5×10^{-6}	-1.25	0.058	23.4	5.82
2	0.03	-0.37	0.118	7.42	342.95
3	1.00	0.25	0.082	9.84	-2.0

Tabela 2.3: Resultados para os valores dos parâmetros da equação (2.3), obtidos com a regressão não-linear do *xmgrace* para a distribuição acumulada $N(t)$ das três seqüências de “*afterslidings*” da Tabela 2.1. Em todos os ajustes, os valores de p foram escolhidos como próximos dos resultados mostrados na Tabela 2.2.

contínuas das Figuras 2.4, 2.5 e 2.6 representam a equação (2.3) com os parâmetros da Tabela 2.3. Em cada figura, mostramos com círculos vazados, a curva $N(t) \times t$ correspondente à seqüência de “*afterslidings*” que deu origem ao ajuste.

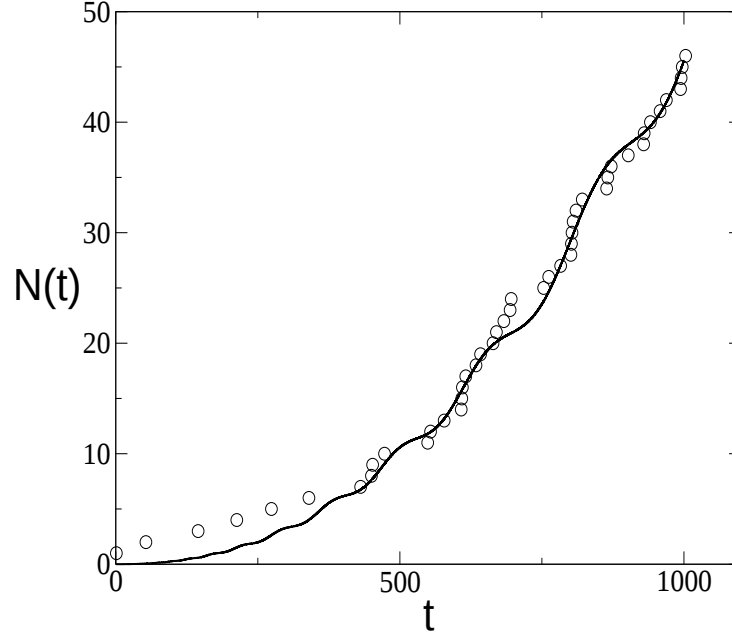


Figura 2.4: Os círculos vazados representam $N(t) \times t$ para a seqüência 1 da Tabela 2.1, enquanto que a linha cheia corresponde à expressão $N(t) = kt^{1-p}[1 + b \cos(\omega \ln t + \varphi)]$, onde $k = 8.5 \times 10^{-6}$, $p = -1.25$, $b = 0.058$, $\omega = 23.4$ e $\varphi = 5.82$.

Para verificar o significado das oscilações log-periódicas mostradas nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6, bem como para realizar um teste independente do valor da freqüência que aparece na Tabela 2.3, e portanto da razão preferida de escala, $\lambda = \exp(2\pi/\omega)$, realizamos uma análise espectral do *Resíduo*:

$$R(t) \equiv \frac{N(t) - kt^{1-p}}{kbt^{1-p}}. \quad (2.4)$$

As Figuras 2.7, 2.8 e 2.9 mostram $R(t) \times \ln(t)$ para as seqüências 1, 2 e 3, respectivamente, usando os valores de k , p e b correspondentes na Tabela 2.3. A transformação (2.4) deveria produzir uma função $\cos(\omega \ln t + \varphi)$ pura se a equação (2.3) fosse uma descrição perfeita para as curvas $N(t)$. Na próxima seção, estudaremos as oscilações log-periódicas em torno da lei de potência $N(t) \sim t^{1-p}$, isto é, o resíduo $R(t)$, usando o método espectral conhecido como periodograma de Lomb, o qual é largamente aplicado na análise de séries temporais intermitentes [39, 40].

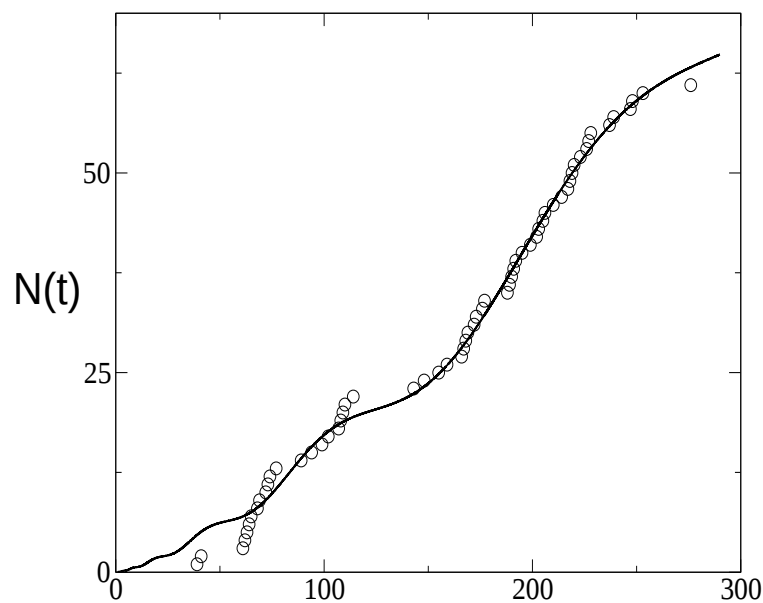


Figura 2.5: O mesmo que na Figura 2.4 para a seqüência 2 da Tabela 2.3. Os parâmetros para a linha cheia (equação (2.3)) são: $k = 0.03$, $p = -0.37$, $b = 0.118$, $\omega = 7.42$ e $\varphi = 342.95$.

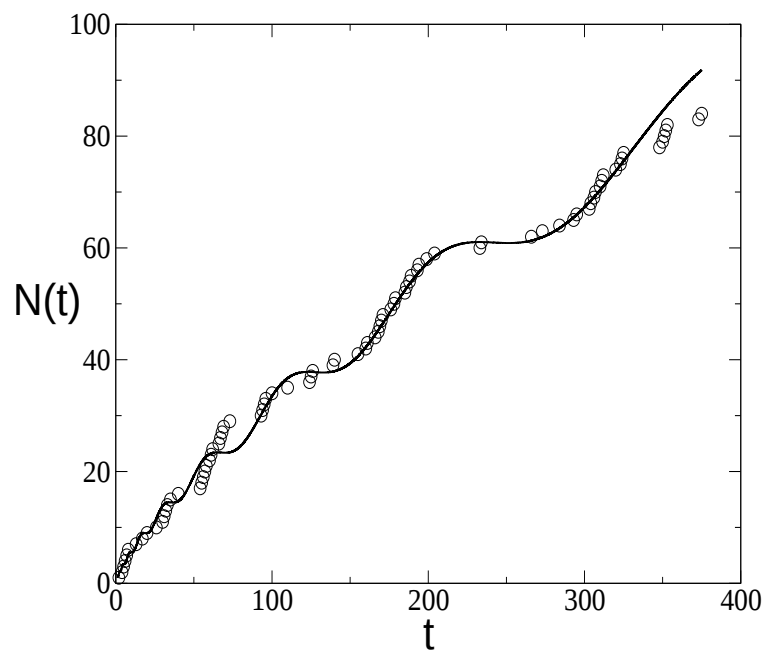


Figura 2.6: O mesmo que nas Figuras 2.4 e 2.5 para a seqüência 3 da Tabela 2.1, usando $k = 1.00$, $p = 0.25$, $b = 0.082$, $\omega = 9.84$ e $\varphi = -2.0$.

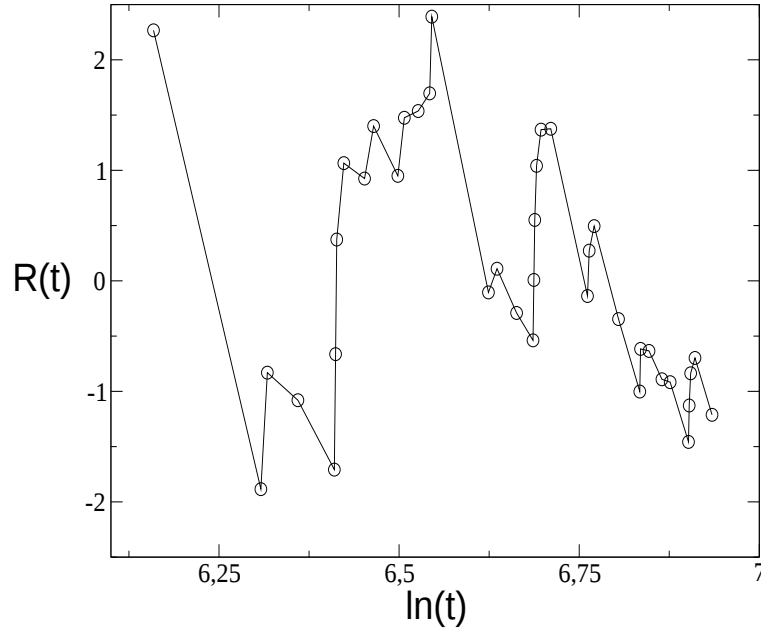


Figura 2.7: Resíduo $R(t)$, definido pela equação (2.4), correspondente às oscilações em torno da lei de potência $N(t) \sim t^{1-p}$ para a sequência 1.

2.3 Análise espectral das oscilações log-periódicas

Uma maneira de encontrar a frequência dominante nas oscilações de $R(t)$, seria calcular o módulo quadrado da transformada de Fourier discreta associada aos valores de $R(t_i)$, $t_1 < t_i < t_2$, usando o *xmgrace*. A transformada de Fourier discreta de um conjunto $\{h(t_i), i = 1, 2, 3, \dots\}$ é definida como:

$$H\{h(t_i)\} = \sum_{i=1}^{N-1} h(t_i) \exp(-2\pi i f t_i / N) = \sum_{i=1}^{N-1} h(t_i) \exp(-i \omega t_i / N), \quad (2.5)$$

onde escrevemos $\omega = 2\pi f$. O módulo quadrado de $H(f)$ define o *periodograma* clássico:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{N} |H(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^{N-1} h(t_i) \exp(-i \omega t_i / N) \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N-1} h(t_i) \cos(\omega t_i / N) \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^{N-1} h(t_i) \sin(\omega t_i / N) \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Essa equação pode ser calculada para qualquer valor da frequência angular ω , e a presença de um sinal periódico é indicada por um alto valor de $P(\omega)$ naquela

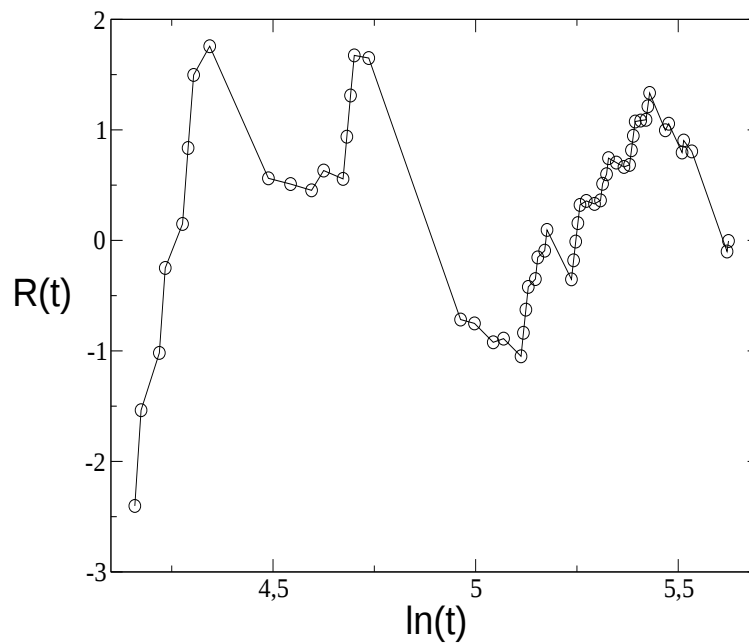


Figura 2.8: O mesmo que na Figura 2.7 para a sequência 2 da Tabela 2.1.

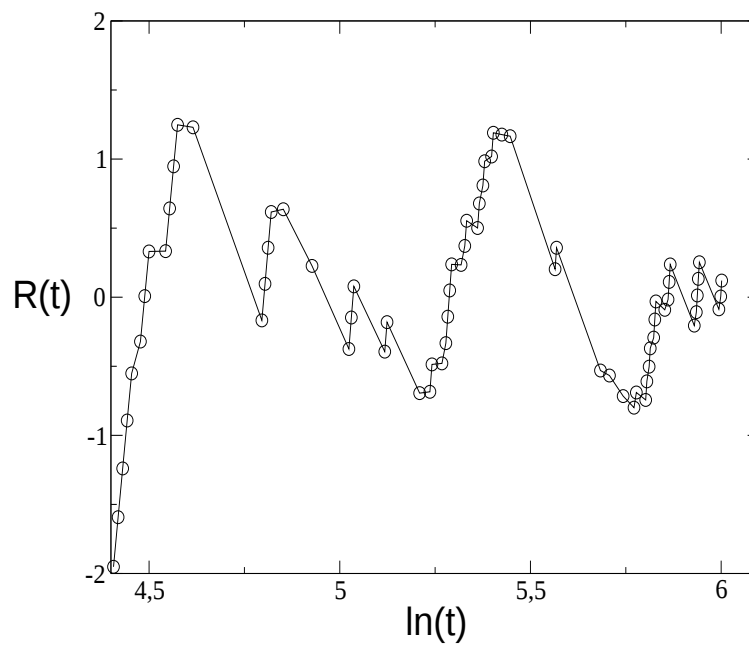


Figura 2.9: O mesmo que nas Figuras 2.7 e 2.8 para a sequência 3 da Tabela 2.1.

freqüência. No entanto, esse método espectral tem várias limitações. A equação (2.6) está definida para um conjunto de dados igualmente espaçados $h_n = h(n\Delta)$, $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, onde a razão $1/\Delta$ é chamada de taxa de amostragem dos dados. Essa taxa define a freqüência de Nyquist: $f_c \equiv 1/2\Delta$, acima da qual toda a informação sobre sinais periódicos está sujeita a distorções, devido ao efeito de “*aliasing*” [41]. O espectro de um conjunto não-uniforme de dados é muito mais complexo que o de um conjunto uniforme, uma vez que para o primeiro não existe uma região de freqüência, como no caso de dados regularmente espaçados. Mesmo na situação mais simples de dados sem ruído contendo uma periodicidade definida, o pico mais elevado não necessariamente ocorre no período correto, como ilustraremos a seguir.

Um método de análise espectral para dados não-uniformemente amostrados foi desenvolvido em meados da década de 70 por N. R. Lomb [42], o qual propôs a seguinte modificação para a equação (2.6):

$$P(\omega) \equiv \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{\left[\sum_j (h_j - \bar{h}) \cos w(t_j - \tau) \right]^2}{\sum_j (h_j - \bar{h})^2 \cos^2 w(t_j - \tau)} + \frac{\left[\sum_j (h_j - \bar{h}) \sin w(t_j - \tau) \right]^2}{\sum_j \sin^2 w(t_j - \tau)} \right\}, \quad (2.7)$$

onde

$$\bar{h} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i; \quad \sigma^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2; \quad \tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_j \sin(2\omega t_j)}{\sum_j \cos(2\omega t_j)}.$$

Lomb mostrou que o uso da constante τ , definida da maneira acima, torna o valor de P completamente independente de qualquer translação de t_i ; ou seja, τ dá ao periodograma uma invariância de translação temporal. Lomb mostrou ainda que a equação (2.7) é idêntica ao resultado obtido ao se estimar o conteúdo harmônico de um conjunto de dados, em uma dada freqüência, através do ajuste:

$$h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

usando o método dos mínimos quadrados. Este fato sugere que o método de Lomb pode se mostrar em geral mais bem sucedido que o periodograma clássico, no caso especial da amostragem irregular, uma vez que a equação (2.7) provê uma análise “por ponto”, ao contrário do periodograma clássico, o qual pesa os pontos “por intervalo”. Para verificar isso, testamos as equações (2.6) e (2.7) para a função $y(t) = \cos(2\pi \times 0.05 \times t)$, calculada para vários valores de t não-uniformemente distribuídos

no intervalo $0 < t < 500$, como ilustrado na Figura 2.10(a). Os resultados para $P(f)$ ($f = \omega/2\pi$) usando os dois periodogramas acima estão mostrados na Figura 2.10(b). Chamamos o eixo vertical do periodograma clássico de $|H(f)|^2$, para diferenciar de $P(f)$ para o periodograma de Lomb. Como podemos ver na figura, o maior valor de $P(f)$ no periodograma de Lomb corresponde à frequência original $f = 0.05$. Por outro lado, o método da transformada de Fourier, o qual implementa a equação (2.6) considerando que os dados estão igualmente espaçados de $\Delta \sim 1/N$, não apontou a frequência correta $f = 0.05$, estando o pico deslocado de 50% no eixo horizontal ($f \rightarrow 0.025$). Assim, o periodograma de Lomb é largamente utilizado na análise espectral de dados não-uniformemente amostrados ou apresentando intermitência, em particular em áreas como astronomia [42], sismologia [43, 39], economia [44], entre outras [45, 38, 46].

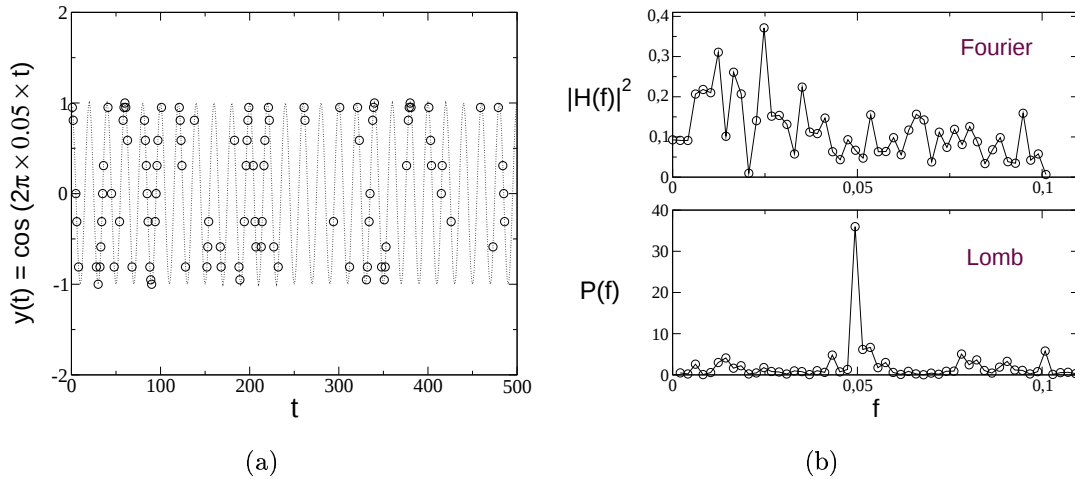


Figura 2.10: A linha tracejada em (a) representa a função $y(t) = \cos(2\pi \times 0.05 \times t)$ calculada para $t = 1, 2, \dots, 500$. Desses valores de t , selecionamos 100 (círculos vazados) para a análise espectral em (b). Os valores de t escolhidos correspondem às perturbações do martelo que resultaram em um deslizamento não nulo na série (q) da Figura 1.3. Como podemos ver, o periodograma de Lomb indicou a frequência original ($f = 0.05$), enquanto no método de Fourier, o sinal periódico está deslocado de 50% ($f = 0.025$).

Muitas vezes, os dados h_i são a soma de um sinal periódico e ruído (isto é, erros observacionais). Na teoria de detecção de sinais, o ruído é frequentemente considerado como aleatório, o que significa que erros observacionais ocorrendo em instantes diferentes são estatisticamente independentes. Além disso, o ruído é também assumido como tendo uma distribuição normal com média zero e variância σ_0^2 constante (daí o termo “ruído gaussiano”). Dificuldades práticas em análise es-

espectral de dados experimentais aparecem porque o ruído pode influenciar fortemente no sinal observado. Assim, uma vez que o espectro de potência foi calculado, uma pergunta natural é: “O quão significativo é o pico no periodograma $P_N(f)$?”. A *hipótese nula* corresponde ao caso em que todos os dados são valores aleatórios com uma distribuição gaussiana. Uma propriedade muito interessante do periodograma de Lomb é que, no caso da hipótese nula, $P_N(f)$ tem uma distribuição de probabilidade exponencial², com média unitária, em qualquer valor da frequência f . Em outras palavras, a probabilidade $\mathcal{P}(z)$ de $P_N(f)$ ter algum valor positivo entre z e $z + dz$ é $\exp(-z) dz$. Segue daí que a distribuição acumulada é dada por $F(z) = \int_0^z \mathcal{P}(z') dz' = 1 - \exp(-z)$; portanto, se calcularmos $P_N(f)$ para M frequências independentes, a probabilidade de que nenhuma delas tenha valor de $P_N(f)$ maior que z é $[1 - \exp(-z)]^M$. A probabilidade de *alarme falso* da hipótese nula é definida como:

$$\mathcal{P}(> z) = 1 - [F(z)]^M = 1 - [1 - \exp(-z)]^M. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) dá o *nível de significância* de qualquer pico que aparece no periodograma de Lomb; um pequeno valor da probabilidade de alarme falso indica uma alta significância para o sinal periódico observado. Para calcular $\mathcal{P}(> z)$, precisamos estimar o número de frequências independentes, M , a serem usadas, uma vez que o procedimento natural seria calcular $P_N(f)$ como função de várias frequências estreitamente espaçadas num determinado intervalo de frequência. Horne e Baliunas [40, 47] usaram experimentos de Monte Carlo para determinar M em vários casos. Em geral, quando as frequências amostradas estão no intervalo entre 0 e a frequência de Nyquist $1/2\Delta$, M é muito próximo do número de pontos na amostra, N , e este resultado é aproximadamente independente do grau de uniformidade da distribuição. À medida em que observamos frequências maiores que f_c , M cresce proporcionalmente.

Uma vez determinado o valor de M , podemos estimar o nível de significância de qualquer valor de z , usando a equação (2.8). De uma maneira geral, podemos usar essa expressão para encontrar um valor de z tal que, se $P(f)$ exceder esse valor, a falha em considerar o pico correspondente como significativo é muito pequena. Invertendo a equação (2.8), obtemos:

$$z_0 = -\ln [1 - (1 - \mathcal{P}_0)^{1/M}], \quad (2.9)$$

onde $\mathcal{P}_0$ é a probabilidade de alarme falso da hipótese nula. Como estamos interes-

²Pode-se mostrar que essa propriedade é válida apenas quando $P_N(f)$ é escrito com o termo $1/\sigma^2$ na equação (2.7) – daí o nome “periodograma *normalizado*”.

sados em pequenos valores de $\mathcal{P}$, a equação (2.9) pode ser escrita como:

$$z_0 \approx \ln(M/\mathcal{P}_0). \quad (2.10)$$

Ou seja, se tomarmos $\mathcal{P}_0 = 0.001$, o que significa um nível de significância de 99.9%, z_0 é dado por:

$$z_0 \approx \ln(M/0.001) \approx 6.91 + \ln(M). \quad (2.11)$$

Para calcular o periodograma de Lomb das oscilações mostradas na seção anterior, utilizamos o programa *period* do livro *Numerical Recipes in C*, de Press e colaboradores [47]. Este programa implementa a equação (2.7) para M valores da frequência f , onde M é dado por:

$$M = \frac{ofac \times hifac}{2} \times N_i, \quad (2.12)$$

onde $hifac = f_{\max}/f_c$ corresponde à máxima frequência a ser investigada (em geral $hifac = 1$, de forma que observamos f até a frequência de Nyquist, $f_c = 1/2\Delta$), N_i é o número de pontos na amostra, e $ofac$ é um fator de “oversampling”: enquanto na transformada de Fourier discreta analisamos $N/2$ frequências distanciadas de $1/\Delta$, agora podemos observar frequências num intervalo menor, de forma que $N/2 \rightarrow N/2 \times ofac$.

Como exemplo, mostramos no gráfico principal da Figura 2.11, o periodograma de Lomb para o resíduo da Figura 2.9, correspondente à seqüência 3, usando $hifac = 1$ e $ofac = 2$, de maneira que $M = [(2 \times 1)]/2 \times N_{as} = 84$. O nível de significância 99.9% corresponde neste caso a $z_0 = 6.91 + \ln(84) \approx 11.34$. Podemos ver que $P(f)$ é significativamente maior que z_0 para dois valores da frequência: $f_1 \simeq 1.50$ e $f_2 \simeq 3.66$. A primeira corresponde a $\omega_1 \simeq 9.42$, essencialmente o mesmo da Tabela 2.3. No gráfico menor, mostramos o resultado obtido com o periodograma clássico, o qual implementa a transformada de Fourier discreta para os N_{as} pontos da amostra. Como podemos observar, um alto valor de $|H(f)|^2$ aparece para $f_H \approx 1.47$, um valor não muito diferente do encontrado pelo periodograma de Lomb. No entanto, o aspecto dos dois periodogramas é bem diferente, uma vez que a segunda frequência $\omega_2 \simeq 22.98$ não aparece no gráfico de $|H(f)|^2$. Na Figura 2.12, mostramos o ajuste obtido com a equação (2.3), usando os parâmetros $k = 1.02$, $p = 0.26$, $b = -0.05$, $\omega \approx 22.5$ e $\varphi = 54.61$ (linha cheia), juntamente com a curva $N(t)$ para a seqüência 3 (círculos vazados).

As Figuras 2.13 e 2.14 mostram o periodograma de Lomb para os resíduos das Figuras 2.7 e 2.8, correspondentes às seqüências 1 e 2, respectivamente. Para essas seqüências, usamos $ofac = 2$ e $hifac = 1$, de forma que $M = N_{as}$ nos dois

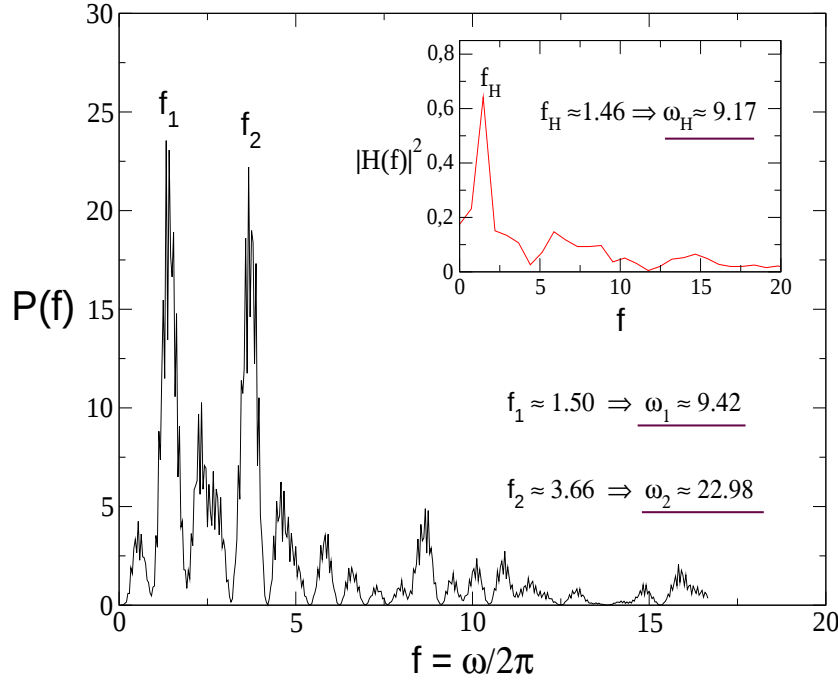


Figura 2.11: Periodograma de Lomb, calculado com a equação (2.7), para o resíduo da Figura 2.9, correspondente à seqüência 3. O gráfico menor mostra o periodograma clássico obtido com a transformada de Fourier discreta.

casos. Dessa forma, o nível de significância de 99.9% corresponde a $z_0 \approx 10.76$ para a seqüência 1 e $z_0 \approx 11.02$ para a seqüência 2. Para esta última seqüência, podemos ver que a freqüência indicada no periodograma correspondente, $f \simeq 1.18 \Rightarrow \omega \simeq 7.42$, é essencialmente a mesma que aparece na Tabela 2.3, encontrada com o ajuste do *xmgrace*. Por outro lado, o periodograma da seqüência 1, indicou uma segunda freqüência, $f \simeq 2.01 \Rightarrow \omega = 12.63$, além do valor $f \simeq 3.82 \Rightarrow \omega = 23.98$, próximo do valor $\omega = 23.4$ que aparece na Tabela 2.3. Na Figura 2.15, mostramos o ajuste (2.3) correspondente a essa nova freqüência, usando os parâmetros $k = 8.5 \times 10^{-6}$, $p = -1.25$, $b = 0.056$, $\omega = 12.8$ e $\varphi = 22.18$.

Os resultados obtidos nos periodogramas das Figuras 2.11, 2.13 e 2.14, indicam sinais periódicos significativos para as oscilações de $N(t)$ em torno da lei de potência t^{1-p} , onde $N(t)$ é a distribuição acumulada de deslizamento *após* um grande evento haver ocorrido. Apesar de as seqüências 1 e 3 estarem associadas a um grande deslizamento em t_f , as correções log-periódicas para a lei de potência remanescente da lei de Omori (2.1), descrevem razoavelmente o comportamento de $N(t)$, assim como para a seqüência 2, a qual não é sucedida por um grande evento no instante t_f . Na próxima seção, estudaremos uma seqüência de pequenos eventos *antecedendo* um grande evento, isto é, uma seqüência de “*foreslidings*”.

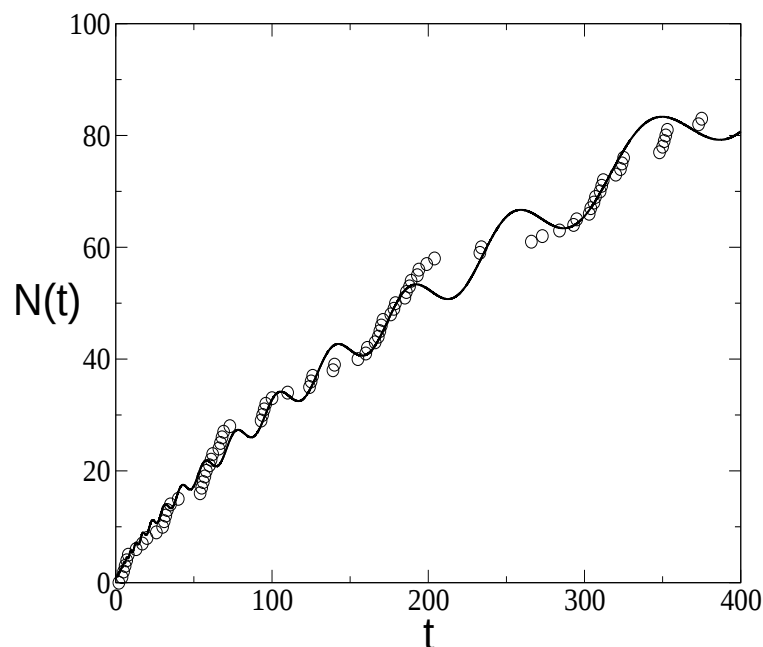


Figura 2.12: Os círculos vazados correspondem a $N(t)$ para a seqüência 3, enquanto que a linha contínua representa o ajuste (2.3) com os parâmetros $k = 1.02$, $p = 0.26$, $b = -0.05$, $\omega = 22.5$ e $\varphi = 54.61$.

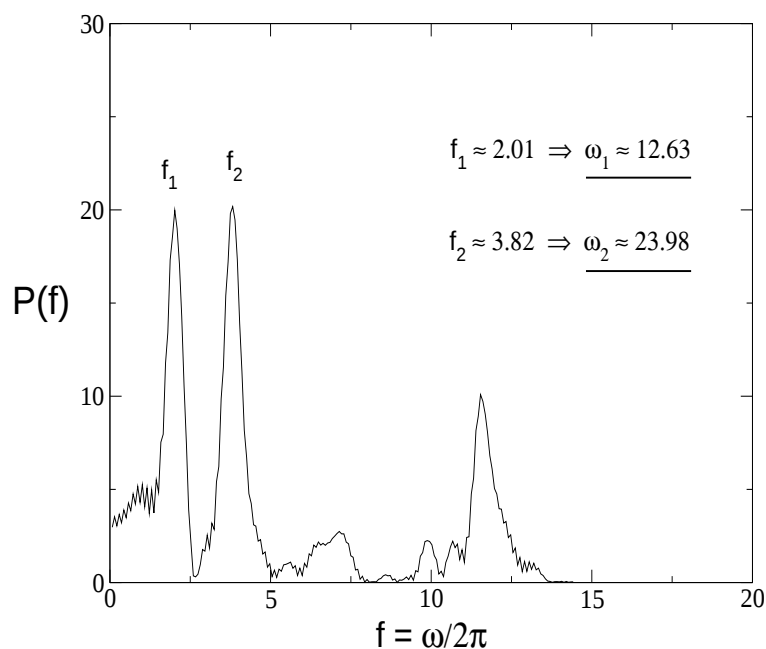


Figura 2.13: Periodograma de Lomb para o resíduo da Figura 2.7, correspondente à seqüência 1. Os valores de $ofac$ e $hifac$ foram 2 e 1, respectivamente, assim como no cálculo de $P(f)$ para a seqüência 3.

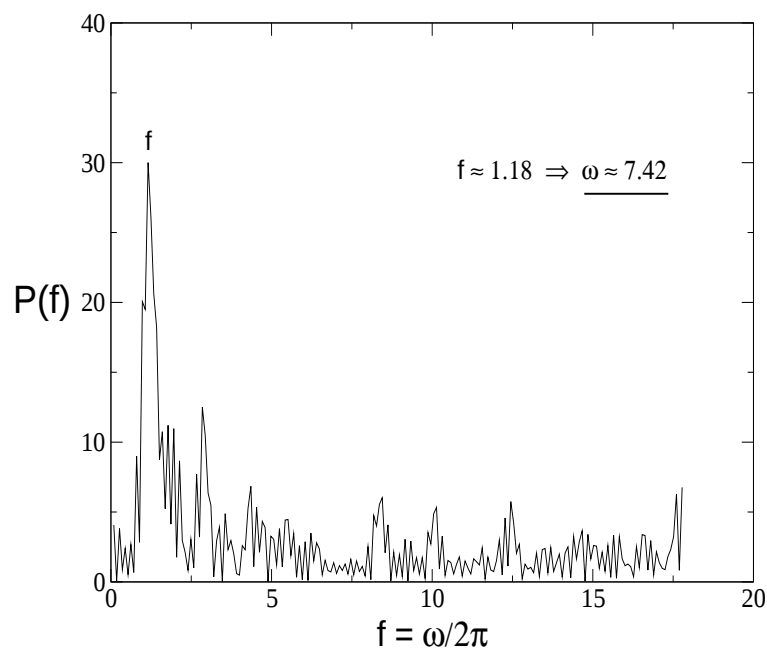


Figura 2.14: O mesmo da Figura 2.13 para o resíduo da Figura 2.8, correspondente à sequência 2.

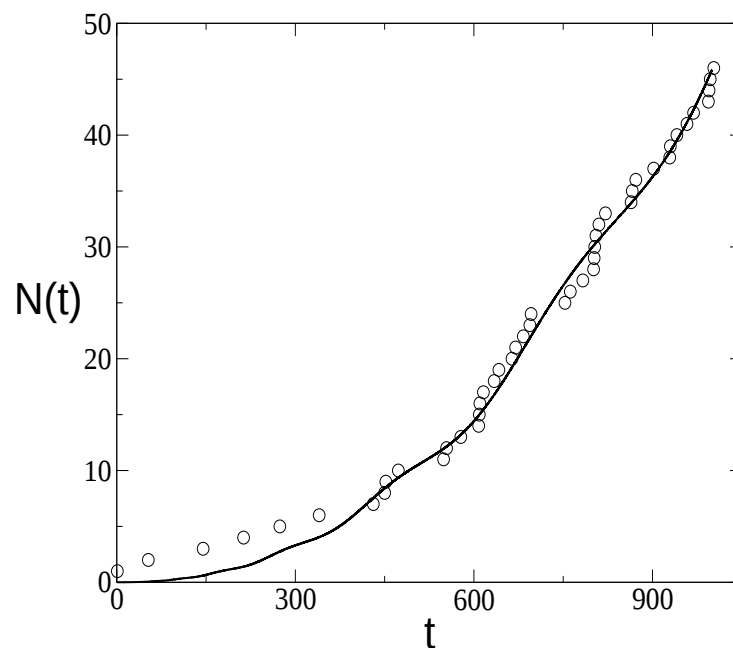


Figura 2.15: Os círculos vazados correspondem a $N(t)$ para a sequência 1, enquanto que a linha contínua representa o ajuste (2.3) com os parâmetros $k = 8.5 \times 10^{-6}$, $p = -1.25$, $b = 0.056$, $\omega = 12.8$ e $\varphi = 22.18$.

2.4 Estudo da atividade precursora de um grande deslizamento

A seqüência que vamos estudar nesta seção está ilustrada na Figura 2.16. Esta seqüência corresponde à série de deslizamento (r) (Figura 1.3), obtida com o cilindro de alumínio de 1000 mm de comprimento, a uma inclinação $\theta = 18^\circ$. Como podemos ver, uma série de pequenos eventos, os quais têm tamanho médio $\langle \lambda \rangle = 7.00$ mm, antecedem um deslizamento bem maior, de magnitude $\lambda_c = 84.0$ mm, o qual ocorre no instante $t_c = 217$.

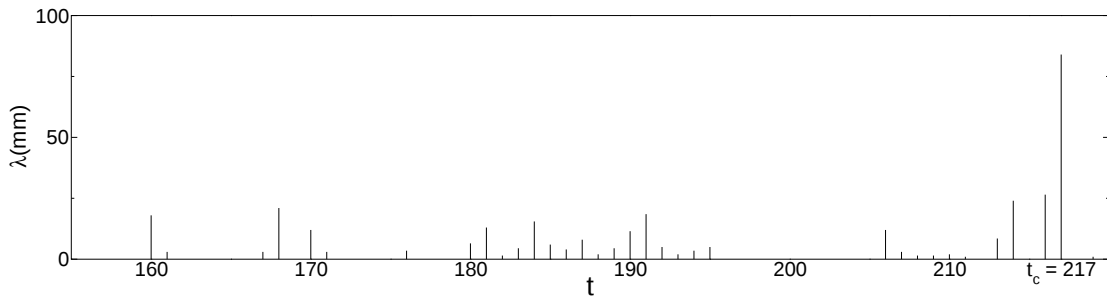


Figura 2.16: Seqüência de “foreslidings” estudada nesta seção. A seqüência corresponde à série (r) da Figura 1.3.

De particular interesse nessa seqüência é o fato de que o primeiro “foresliding”, em $t_1 = 160$, ocorre após 57 perturbações do martelo desde o último deslizamento não nulo (ocorrido em $t = 103$) que antecede a seqüência (veja Figura 1.3(r)). Por outro lado, o número de eventos dentro da janela de tamanho $t_c - t_1 = 57$, correspondente à seqüência, é igual a $N_{fs} = 32$, o que significa que aproximadamente 1.8 batidas são necessárias, em média, para um deslizamento ocorrer. Em outras palavras, o grande evento registrado em t_c é precedido por uma *aceleração* na atividade de deslizamento, ou, equivalentemente, na dissipação de energia em resposta às batidas do martelo. Comportamento semelhante tem sido observado em várias seqüências de “foreshocks” antecedendo grandes terremotos [48, 37], emissões acústicas em rupturas [37], e mesmo na evolução do mercado financeiro antecendo “crashes” de bolsas de valores [49]. Uma importante hipótese teórica usada na abordagem desses sistemas, envolve uma analogia do grande evento como sendo um *ponto crítico*. Em particular, na teoria de fenômenos críticos aplicada a terremotos, um grande terremoto é considerado como o ponto culminante de uma cascata de eventos, os quais ocorrem em uma área que se estende, muitas vezes, sobre distâncias bem maiores que a área da ruptura sísmica. Dessa forma, a atividade precursora de

um grande terremoto é caracterizada por uma equação do tipo:

$$N(t) = A + k(t_c - t)^\alpha, \quad (2.13)$$

onde t_c é o instante correspondente ao “ponto crítico”, isto é, ao grande terremoto, e $N(t) = \int_0^t n(t')dt'$, onde $n(t')$ é a taxa com que os “*foreshocks*” aparecem em um instante $t < t_c$. Uma descrição mais sofisticada para o comportamento de $N(t)$ envolve correções log-periódicas para a lei de potência (2.13):

$$N(t) = A + k(t_c - t)^\alpha \{1 + b \cos[\omega \ln(t_c - t) + \varphi]\}. \quad (2.14)$$

Nesta seção, usamos a equação (2.14) para estudar a distribuição $N(t)$ dos “*foreslidings*” da Figura 2.16. Os resultados para os parâmetros A , k , α , b , ω e φ , obtidos com o *xmgrace*, foram: $A \approx 71.73$, $k \approx -0.79$, $\alpha \approx 0.90$, $b \approx 0.19$, $\omega \approx 4.28$ e $\varphi \approx -3.27$. Na Figura 2.17, mostramos com a linha cheia o ajuste (2.14) com esses parâmetros, juntamente com a curva $N(t)$ para os eventos antecedendo o deslizamento em $t_c = 217$ (círculos vazados). Para estimar a significância do sinal periódico ω , realizamos a análise do resíduo:

$$R(t) \equiv \frac{N(t) - A - k(t_c - t)^\alpha}{kb(t_c - t)^\alpha}, \quad (2.15)$$

mostrado na Figura 2.18. O periodograma de Lomb para as oscilações log-periódicas está mostrado na Figura 2.19. Podemos observar um sinal periódico de grande significância estatística para a frequência $f \approx 0.74 \Rightarrow \omega \approx 4.64$, um valor próximo da frequência obtida com o ajuste (2.14), usando o *xmgrace*.

A seqüência estudada nesta seção apresenta uma importante diferença em relação às seqüências analisadas na Seção 2.1. Nestas seqüências, os pequenos deslizamentos foram selecionados *entre* dois grandes eventos, com exceção apenas da seqüência 2, na qual foi investigada a atividade sucedendo o grande evento em $t_1 = 1415$. Em particular, para a seqüência 3, o expoente $p > 0$ indica um *decaimento* na taxa com que os pequenos deslizamentos aparecem, um comportamento tipicamente observado em seqüências de “*aftershocks*” de terremotos. Em outras palavras, não obstante o grande deslizamento em $t_2 = 404$, encontramos uma descrição razoável para a distribuição acumulada dos deslizamentos da seqüência, usando a equação da lei de Omori para os “*afterslidings*”, com correções log-periódicas (Figuras 2.6 e 2.12). Por outro lado, a seqüência 1 representa um caso particularmente interessante, uma vez que o expoente $p < 0$ (comportamento observado também para a seqüência 2), indica um *acréscimo* na taxa de atividade de deslizamento.

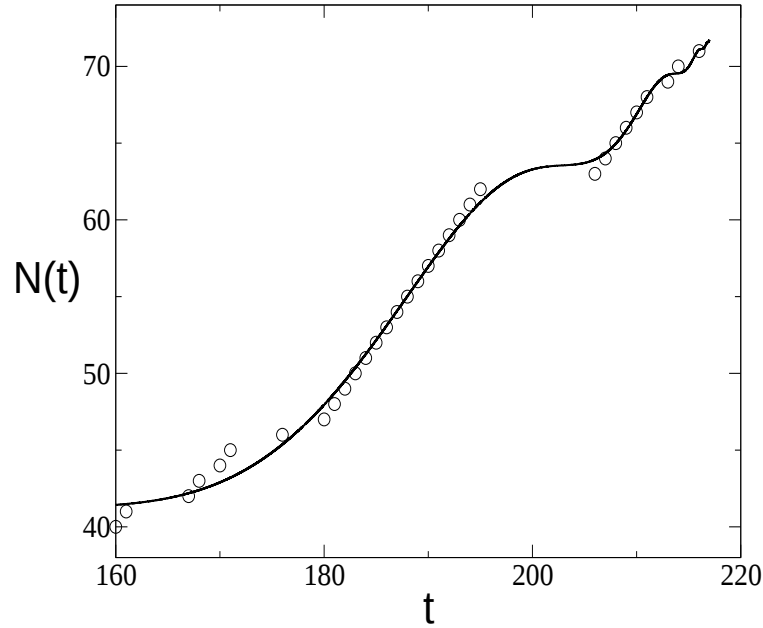


Figura 2.17: Os círculos vazados representam a distribuição acumulada $N(t)$ para os “foreslidings” antecedendo o deslizamento em $t_c = 217$ (veja a Figura 2.16). A linha contínua corresponde ao ajuste (2.14), usando os parâmetros $A \approx 71.73$, $k \approx -0.79$, $\alpha \approx 0.90$, $b \approx 0.19$, $\omega \approx 4.28$ e $\varphi \approx -3.27$.

A relativa proximidade dos pequenos eventos em relação ao primeiro grande deslizamento, como mostra o gráfico menor da Figura 2.1, sugere que essa sequência representa de fato uma sequência de “*afterslidings*” sucedendo o grande deslizamento em $t_1 = 287$, na série (k) da Figura 1.3. Adicionalmente, podemos observar um intervalo de tempo (isto é, de batidas) relativamente longo entre o último evento na sequência e o grande deslizamento em $t_2 = 1750$. Ao contrário, o aumento na atividade de deslizamento associado à sequência da Figura 2.16, ocorre após uma longa lacuna de atividade, de tamanho da ordem da duração da sequência. Assim, acreditamos que esta sequência seja uma sequência genuína de “*foreslidings*” associada ao grande deslizamento em $t_c = 217$.

No próximo capítulo, apresentaremos uma análise da atividade de deslizamento em uma escala de tempo mais reduzida, calculando a dimensão fractal e a lacunaridade do suporte dos deslizamentos.

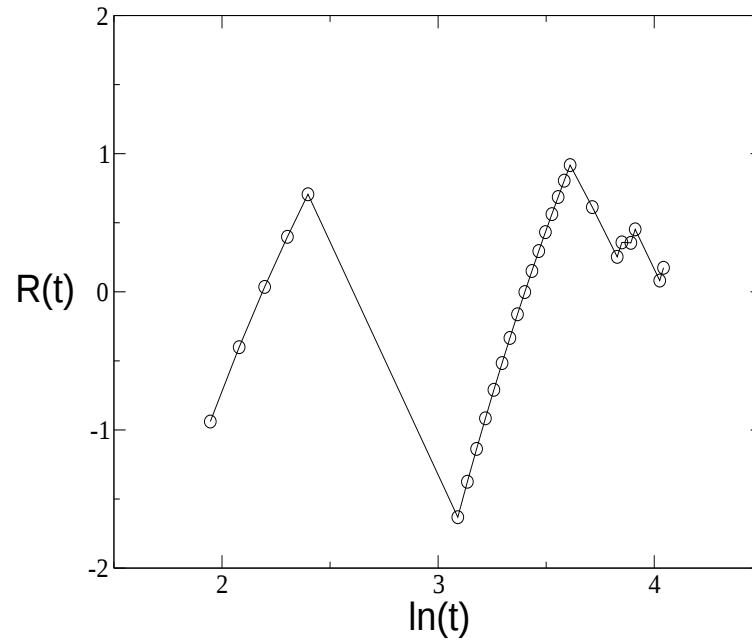


Figura 2.18: Resíduo $R(t)$, definido pela equação (2.15), associado ao ajuste mostrado na Figura 2.17.

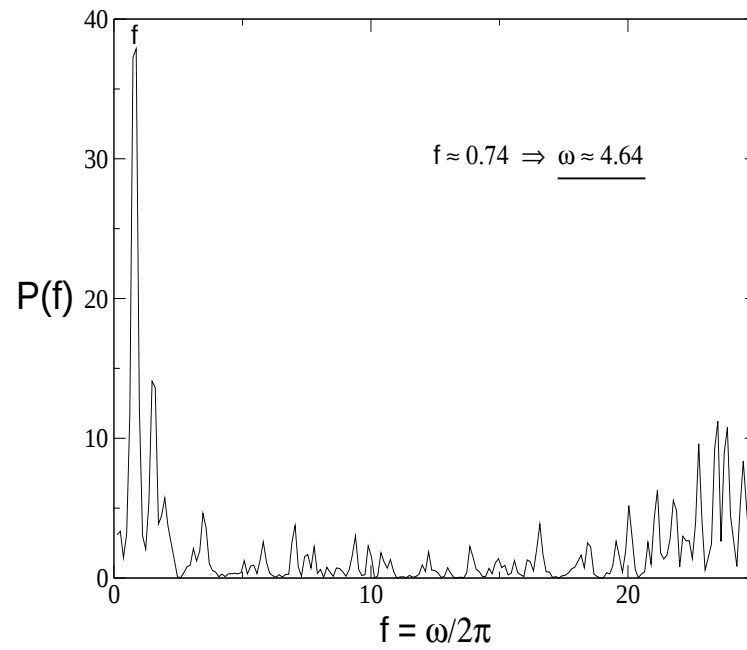


Figura 2.19: Periodograma de Lomb para o resíduo da Figura 2.18, usando $ofac = 2$ e $hifac = 1$.

Capítulo 3

Estrutura do suporte temporal de dissipação

As leis de escala estudadas no Capítulo 1 são relações entre variáveis macroscópicas independentes da ordem temporal dos deslizamentos. Por outro lado, a correção log-periódica examinada no Capítulo 2 é definida para uma mesoescala temporal associada aos intervalos entre dois grandes eventos dentro de uma série. A partir de agora, vamos estudar variáveis estatísticas que são fortemente relacionadas aos detalhes *microscópicos* das séries.

A atividade de deslizamento em uma série temporal está concentrada num conjunto de unidades temporais ao qual chamamos *suporte temporal de dissipação*; ou seja, o suporte é o conjunto de batidas t nas quais ocorreram deslizamentos $\lambda \neq 0$. Como vimos no Capítulo 1, há dois regimes para a inclinação da calha que resultam em comportamentos bem diferentes da atividade de deslizamento. No regime R1, toda pancada do martelo faz o bloco se mover; como consequência, o suporte dessas séries ocupa todo o eixo temporal, uma vez que todos os “sítios” t estão preenchidos. Porém no regime R2, um número variável de perturbações é necessário para um único deslizamento ocorrer; o suporte de dissipação onde a atividade está concentrada é bem rarefeito, e o eixo temporal dessas séries está repleto de lacunas. Neste capítulo, vamos quantificar a distribuição temporal da atividade de deslizamento, calculando na Seção 3.1 a dimensão fractal do suporte de dissipação das séries mostradas nas Figuras 1.2 e 1.3. Na Seção 3.2, usaremos o conceito de lacunaridade para estudar a distribuição das lacunas de atividade ao longo do suporte das séries intermitentes, no regime R2. Na Seção 3.3, mostraremos que, no limite de carregamento vagaroso, a susceptibilidade para deslizar aumenta com o tamanho do cilindro. Acreditamos que a observação desse fenômeno poderá ajudar na compreensão da dinâmica de “*stick-slip*”, a qual constitui uma das mais intrigantes manifestações do atrito entre

superfícies deslizantes.

Nas últimas décadas, muitos conceitos foram usados para descrever sistemas complexos. O termo *fractal* foi introduzido por Mandelbrot em 1967 para definir objetos que têm uma forma rugosa ou uma geometria fragmentada, e que podem ser subdivididos em partes, cada uma sendo uma cópia reduzida do objeto inteiro [23, 18]. Fractais são freqüentemente auto-similares e independentes da escala. Sua distribuição espacial (ou temporal) pode ser quantificada pela *dimensão fractal*. Objetos Euclidianos, como uma linha, um quadrado ou um cubo, têm dimensão d inteira (1, 2, 3), enquanto um ponto tem dimensão $d = 0$. Um objeto fractal tem dimensão D fracionária. Se $d_1 < D < d_2$, então d_2 é chamada dimensão de embebedimento do fractal. A dimensão fractal pode ser calculada através do método da contagem de caixas [23], se existir a relação de escala $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$, onde $N(\epsilon)$ é o número mínimo de caixas d_2 -dimensionais necessárias para cobrir o objeto. Neste caso, o expoente

$$D = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \log [N(\epsilon)] / \log [1/\epsilon]$$

é chamado *dimensão de capacidade* do objeto. Várias outras definições para D , as quais não serão discutidas aqui, podem ser encontradas na literatura [23, 50].

Existem muitos tipos de fractais que podem ser gerados através de um processo recursivo. Fractais desse tipo são chamados *determinísticos*. Um exemplo é o conjunto de Cantor triádico, mostrado na Figura 3.1. Para construir esse fractal, retiramos inicialmente a terça parte central do segmento unitário; depois fazemos o mesmo com os segmentos restantes, e assim por diante. Observe que a cada iteração,

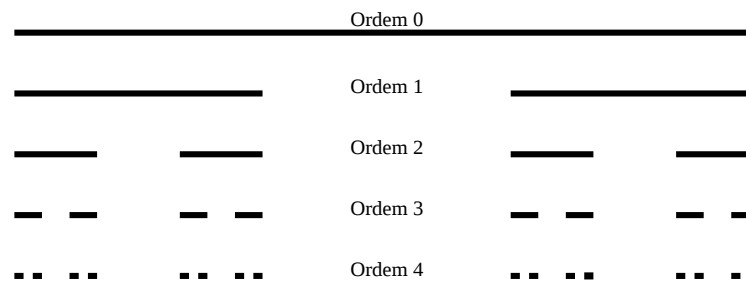


Figura 3.1: Conjunto de Cantor triádico até a quarta iteração. A primeira iteração funciona como o gerador, de maneira que todos os segmentos na iteração (ou ordem) i são substituídos pelo gerador para obter o conjunto de ordem $i + 1$.

a aparência dos fragmentos menores é exatamente a mesma do segmento original com a terça parte central removida, ou seja, o conjunto de Cantor é auto-similar. Nesse caso, a dimensão pode ser calculada através da contagem de caixas, simplesmente observando que o número $N(\epsilon/3)$ de caixas de tamanho $\epsilon/3$ que cobrem

o conjunto está relacionado com o número $N(\epsilon)$ como $N(\epsilon/3) = 2 N(\epsilon)$. Assim, independentemente da iteração, temos

$$\frac{N(\epsilon)}{N(\epsilon/3)} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon/3} \right)^{-D} \Rightarrow \frac{1}{2} = 3^{-D} \Rightarrow D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309 \dots,$$

onde D aqui é chamado de *dimensão de similaridade*.

Fractais que são gerados por regras não determinísticas são chamados aleatórios ou randômicos. Por exemplo, se em vez de removermos a terça parte central, dividirmos o primeiro segmento em três pedaços iguais e escolhermos aleatoriamente qual dos três remover, prosseguindo dessa maneira *ad infinitum*, obteremos um conjunto de Cantor aleatório. Fractais que aparecem na natureza são tipicamente randômicos. Seu campo de aplicações na Física é extremamente amplo, sendo encontradas estruturas fractais em fragmentação e fraturas, nuvens e montanhas, falhas geológicas, turbulência, entre muitos outros sistemas naturais [18, 23, 21]. Dizemos que esses fractais são auto-similares *estatisticamente*, uma vez que as flutuações que aparecem dentro de escalas diferentes não são suficientes para determinar em qual escala estamos observando. Objetos fractais encontrados na natureza são invariantes por escala apenas dentro de um certo intervalo de tamanho. Devido a limitações impostas pela física, existe auto-similaridade apenas entre um tamanho de corte inferior ($\epsilon_{\min}$) e outro superior ($\epsilon_{\max}$), sendo a lei de escala $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$ válida somente para $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$. Essa é uma situação diferente portanto, do conjunto de Cantor da Figura 3.1, para o qual existe apenas um limite superior (tamanho do segmento original = 1), e o processo recursivo pode ser aplicado por infinitas iterações. Na primeira seção, vamos usar o método da contagem de caixas para encontrar a dimensão D do suporte no qual a atividade de deslizamento está distribuída ao longo das séries temporais estudadas nesta Tese.

3.1 Dimensão fractal do suporte dos deslizamentos

Para as séries de deslizamento da Figura 1.2, o intervalo de inclinação da calha é tal que o bloco tem uma alta susceptibilidade para deslizar. No limite $\lambda \rightarrow \lambda_{\min} = 1.0 \text{ mm}$, a dimensão D do suporte temporal onde a atividade está concentrada é igual à dimensão de embebedimento $d = 1$, uma vez que todos os “sítios” t estão ocupados por um deslizamento de comprimento no mínimo igual a 1.0 mm . No entanto, quando o limiar de dissipação λ cresce, o número de deslizamentos que excederam um certo valor λ diminui. Adicionalmente, a atividade de deslizamento

não está mais uniformemente distribuída ao longo do eixo temporal, como podemos ver na Figura 3.2, para o caso de um cilindro de alumínio a uma inclinação $\theta = 35^\circ$. A atividade a que nos referimos está representada na figura pelas pequenas bolinhas, obtidas pela intersecção da série temporal $\lambda(t)$ com a linha horizontal, a qual indica o limiar de dissipação. Essas bolinhas definem uma espécie de conjunto de Cantor embebido no eixo temporal.

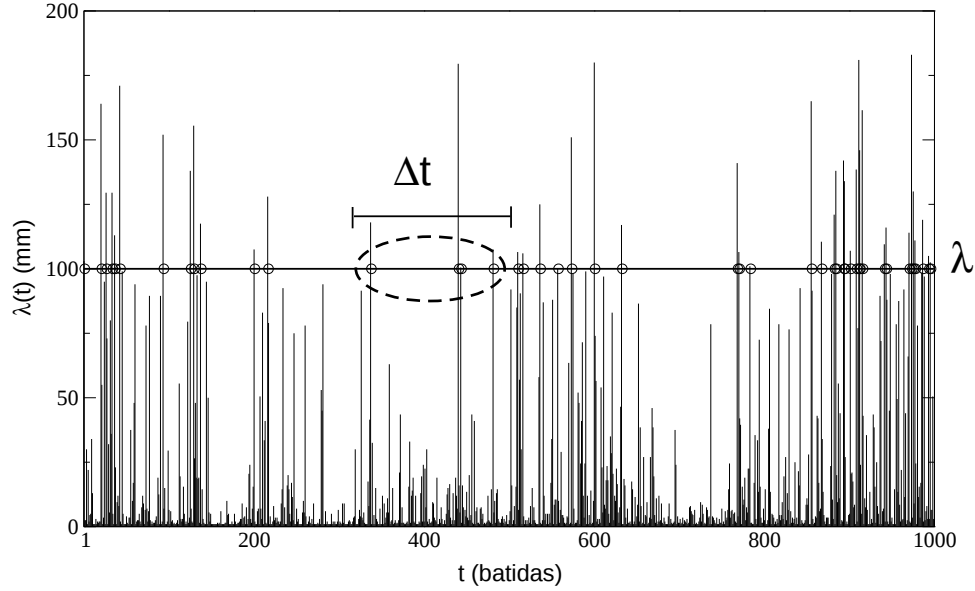


Figura 3.2: Série de deslizamento para o caso de um cilindro de alumínio a uma inclinação $\theta = 35^\circ$. A linha contínua horizontal define o limiar de dissipação λ genérico usado no método da contagem de caixas como descrito na Seção 3.1. Δt é o tamanho das caixas usadas para cobrir o conjunto dos pontos sobre a linha, os quais representam a atividade em um nível de deslizamento λ .

Para quantificar as correlações presentes nas respostas em um certo nível de dissipação, vamos estudar as propriedades geométricas dos conjuntos onde a atividade a partir de um certo limiar λ está concentrada [51]. Para isso, usamos o método da contagem de caixas, mencionado no início deste capítulo, para calcular a dimensão fractal desses conjuntos; isto é, nós contamos o número $N_\lambda(\epsilon)$ de caixas 1-dimensionais de tamanho ϵ necessárias para cobrir o suporte de dissipação em um nível λ . Aqui, ϵ é definido como $\Delta t/T$, onde Δt é o comprimento correspondente da caixa em unidades de batidas. O programa A.2 fornece as curvas¹ $N(\epsilon) \times \epsilon$ para vários valores de λ entre $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$, com ϵ variando de 10^{-3} até 10^0 . Para cada

¹Observe que $N(\epsilon)$ é o número *mínimo* de caixas necessárias para cobrir o suporte de dissipação. A dimensão que calculamos nesta seção, portanto, é a dimensão de capacidade, definida no início deste capítulo.

uma das séries da Figura 1.2, mostramos 15 dessas curvas na Figura 3.3. Como podemos ver em todos os gráficos da figura, $N(\epsilon)$ apresenta uma tendência a escalar com ϵ^{-D} em 1 a 3 décadas em ϵ , dependendo do limiar λ . O expoente

$$D(\lambda) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log [N_\lambda(\epsilon)]}{\log [1/\epsilon]}$$

é interpretado aqui como a dimensão fractal do suporte de dissipação de tamanho $\geq \lambda$. Para todos os valores do limiar λ na Figura 3.3, tiramos os valores de $D(\lambda)$ a partir das inclinações das curvas $N_\lambda(\epsilon)$ no intervalo $10^{-3} \leq \epsilon \lesssim 2 \times 10^{-2}$, usando a regressão lei de potência do *xmgrace*. Como podemos observar, nesse intervalo, as curvas $N_\lambda(\epsilon)$ seguem aproximadamente uma relação de escala em ϵ para todos os valores de λ mostrados na figura. Esse comportamento sugere que as diferentes geometrias definidas pela distribuição temporal dos eventos, nos vários níveis de dissipação, são auto-similares, estatisticamente, dentro de um intervalo na escala temporal que vai de $\epsilon_{\min} = 10^{-3}$ (comprimento de corte definido pelo tamanho finito da série, $T = 10^3$), até um limite superior $\epsilon_{\max}$. A caixa retangular de lados tracejados indica o intervalo variável de tamanho de caixas estudado em cada série.

Os valores de $D(\lambda)$ para as nove séries da Figura 1.2 estão mostrados na Figura 3.4. Esta figura está com a escala horizontal normalizada com relação ao máximo deslizamento $\lambda_{\max}$, mostrado na Tabela 1.1, para cada série temporal. Como podemos observar, a dimensão segue em média um decaimento logarítmico para as nove séries, independente do material do bloco e da inclinação da calha. A Figura 3.5 mostra $\langle D(\lambda/\lambda_{\max}) \rangle$ calculado a partir das nove curvas da Figura 3.4. Esse gráfico foi obtido dividindo-se a Figura 3.4 em nove intervalos logarítmicos para $\lambda/\lambda_{\max}$, e calculando-se a média de D dentro de cada intervalo (veja o programa A.3 para detalhes). A linha reta que passa pelos pontos é o ajuste:

$$D(\lambda/\lambda_{\max}) = a - b \ln(\lambda/\lambda_{\max}), \quad (3.1)$$

onde $a = 0.03 \pm 0.05$ e $b = 0.18 \pm 0.01$ são os parâmetros obtidos com a regressão logarítmica do *xmgrace*. Observe que, quando $\lambda \rightarrow \lambda_{\min} = 1$, temos $D \rightarrow 1$ (dimensão da linha, $d = 1$), enquanto $D \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}$, como esperado.

A equação (3.1) dá a dimensão do suporte de deslizamentos que tiveram magnitude relativa maior ou igual a $\lambda/\lambda_{\max}$. Na referência [17], o número de eventos $\mathcal{N}(\geq \lambda)$ a partir do limiar λ foi contado, e a lei de potência $\mathcal{N}(\geq \lambda) \sim \lambda^{-0.5}$, remanescente da lei de Gutenberg e Richter, foi encontrada. Nesta seção, nós usamos o método da contagem de caixas para estudar como esses eventos se distribuem ao longo do tempo.

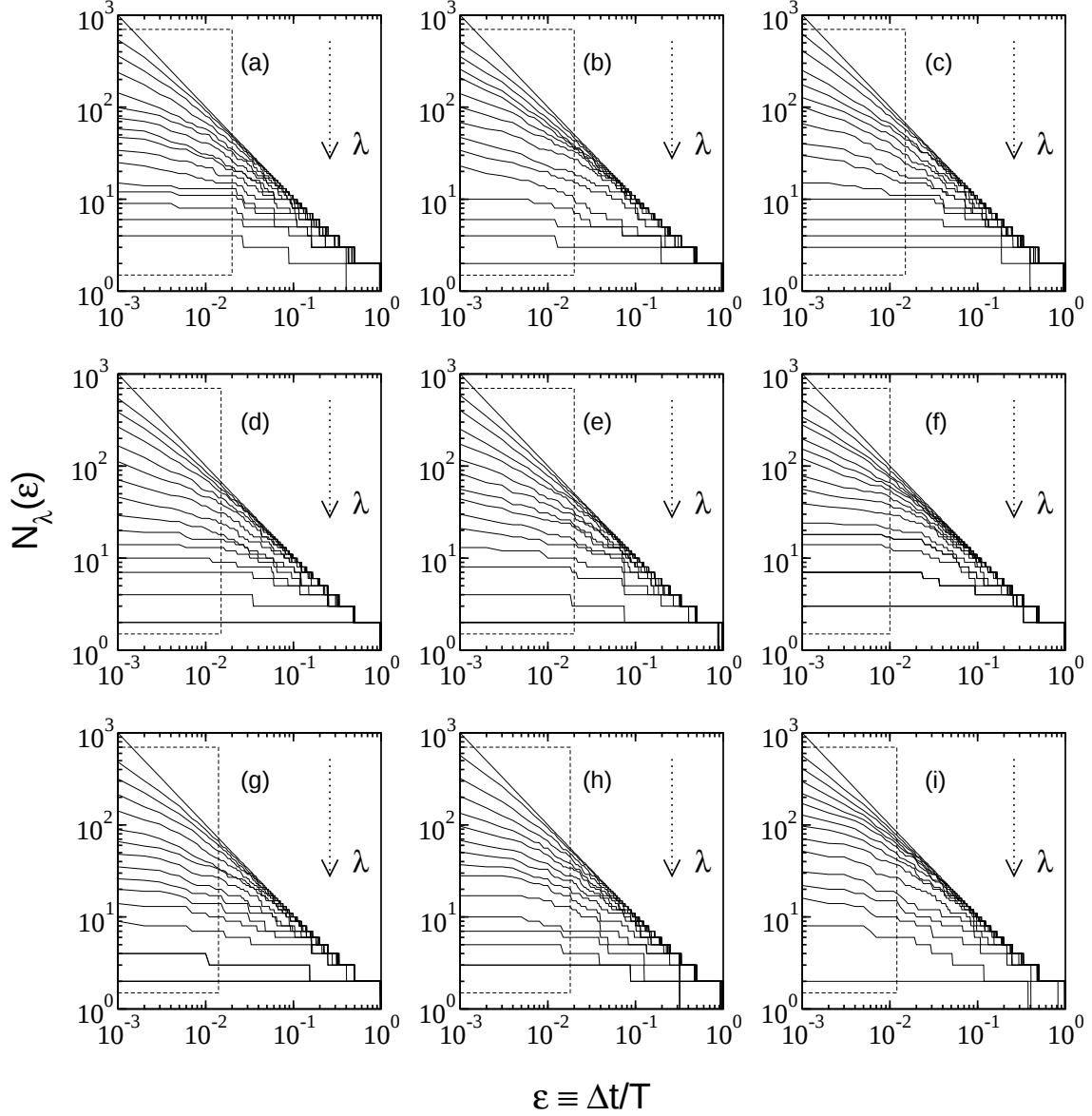


Figura 3.3: $N_\lambda(\epsilon) \times \epsilon$ para as nove séries de deslizamentos da Figura 1.2, correspondendo a 15 valores diferentes de λ para cada série. A região delimitada pela caixa retangular de lados tracejados indica o intervalo $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$, onde $\epsilon_{\min} = 0.001$ para todas as séries, enquanto $0.01 \leq \epsilon_{\max} \leq 0.02$, dependendo da série.

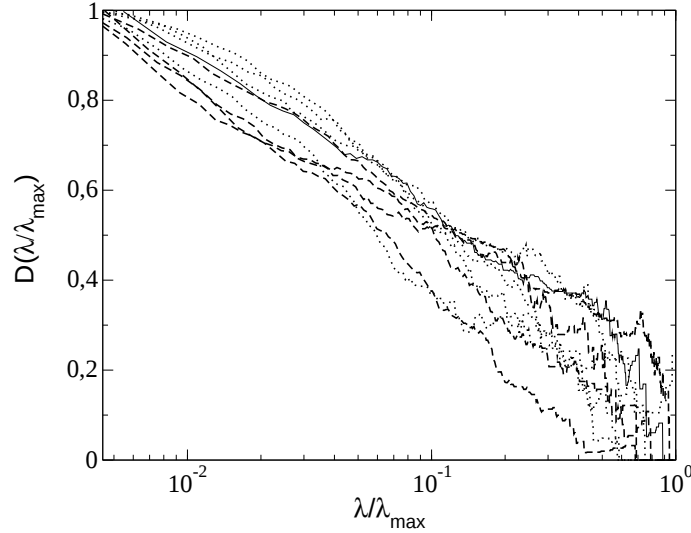


Figura 3.4: Dimensão fractal $D(\lambda)$ do suporte de dissipação, como função do limiar λ mostrado na Figura 3.2, para todas as séries da Figura 1.2. As linhas tracejadas se referem às séries com cilindros de PVC, as pontilhadas correspondem a blocos de latão, de seção quadrada, enquanto a linha contínua mais clara foi obtida a partir da série com cilindro de alumínio.

Para testar nossos resultados para as séries de deslizamento, nós utilizamos o método desta seção para calcular $D(\lambda)$ para um conjunto de 9 séries sintéticas com 1000 eventos descorrelacionados variando aleatoriamente de 1.0 mm a 250.0 mm, com uma precisão de 0.5 mm. Isso foi feito para investigar o efeito de flutuações totalmente randômicas do comprimento dos deslizamentos no comportamento de $D(\lambda/\lambda_{\max})$. As séries foram geradas com o programa A.4. Uma série randômica típica está mostrada na Figura 3.6(a). Claramente, essa série é significativamente diferente das séries experimentais mostradas na Figura 1.2. Na Figura 3.6(b), mostramos 15 curvas $N(\epsilon) \times \epsilon$, para aproximadamente os mesmos valores de λ ilustrados na Figura 3.3 para as séries de deslizamento. A Figura 3.6(c) mostra as 9 curvas $D(\lambda/\lambda_{\max})$ correspondentes às séries aleatórias estudadas. Como podemos ver, D nesse caso não segue o decaimento logarítmico da equação (3.1). Assim, concluímos que a forma com que os deslizamentos se distribuem no suporte temporal não segue uma distribuição totalmente aleatória, como pode ser visto comparando as Figuras 3.5 e 3.6(c). A equação (3.1) é uma medida da distribuição *temporal* dos deslizamentos em diferentes níveis de dissipação das séries no regime R1, em adição à lei de escala estudada em [17], para a distribuição *espacial* dos eventos.

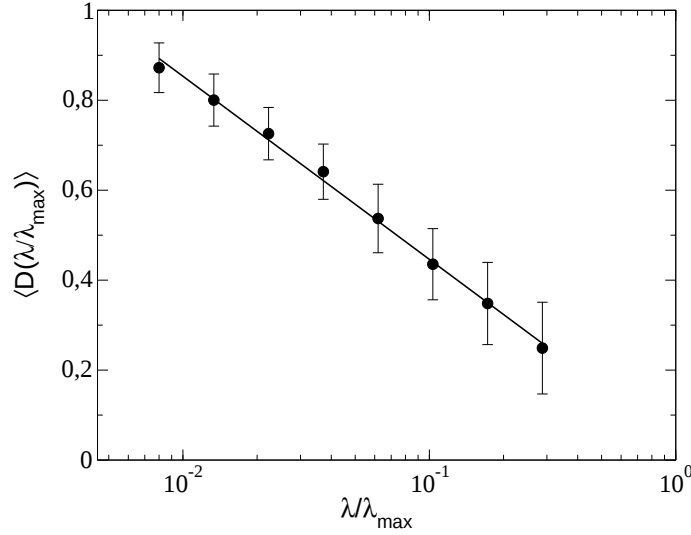


Figura 3.5: Valor médio da dimensão fractal do suporte de dissipação das séries da Figura 1.2, mais barras de erro, como função de $\lambda/\lambda_{\max}$. A linha contínua representa o ajuste $\langle D(\lambda/\lambda_{\max}) \rangle = a - b \ln(\lambda/\lambda_{\max})$, $a = 0.034$ e $b = 0.18$.

As séries no regime R2, mostradas na Figura 1.3, apresentam intermitência na atividade. Como consequência, o suporte de dissipação total dessas séries possui muitas lacunas. Vamos usar o método da contagem de caixas para calcular a dimensão do *suporte total* $\lambda_{\min}$ para essas séries. No gráfico menor da Figura 3.7, mostramos $N_{\lambda_{\min}}(\epsilon) \times \epsilon$ para as nove séries nesse regime, onde $\epsilon = \Delta t/T$ é o tamanho normalizado da caixa 1-dimensional de Δt unidades, usada para cobrir os 100 eventos em cada série. No gráfico principal, mostramos a curva $\langle N_{\lambda_{\min}}(\epsilon) \rangle \times \langle \epsilon \rangle$, representada pelos círculos cheios, mais barras de erro. Essa curva foi obtida dividindo-se o eixo horizontal do gráfico menor em 15 intervalos iguais, e calculando-se a média dos valores de ϵ e $N_{\lambda_{\min}}(\epsilon)$ dentro de cada intervalo, usando o programa A.3. Como podemos ver na figura, $N_{\lambda_{\min}}$ não tende a escalar com ϵ^{-D} por todo o intervalo de variação de ϵ , uma vez que a curva definida pelas bolinhas cheias, no gráfico log-log, não é uma linha reta.

Os símbolos ‘*’ na Figura 3.7 representam $\langle N_{\lambda_{\min}} \rangle$ para 9 conjuntos de Cantor aleatórios, cada um com 100 eventos. Esses conjuntos foram definidos da seguinte maneira: primeiro, levamos o algoritmo apresentado no início deste capítulo até a sétima iteração, obtendo 9 conjuntos de Cantor randômicos de ordem 7, com $N = 2^7 = 128$ eventos, distribuídos ao longo de $T = 3^7 = 2187$ “perturbações”, ou unidades de tempo ‘ t ’. Em seguida, retiramos aleatoriamente 28 eventos de cada um deles, obtendo 9 séries temporais de “deslizamentos” com $T = 2187$ perturbações e $N = 100$ eventos. Observe que $T = 2187$ está muito próximo da média dos valores de

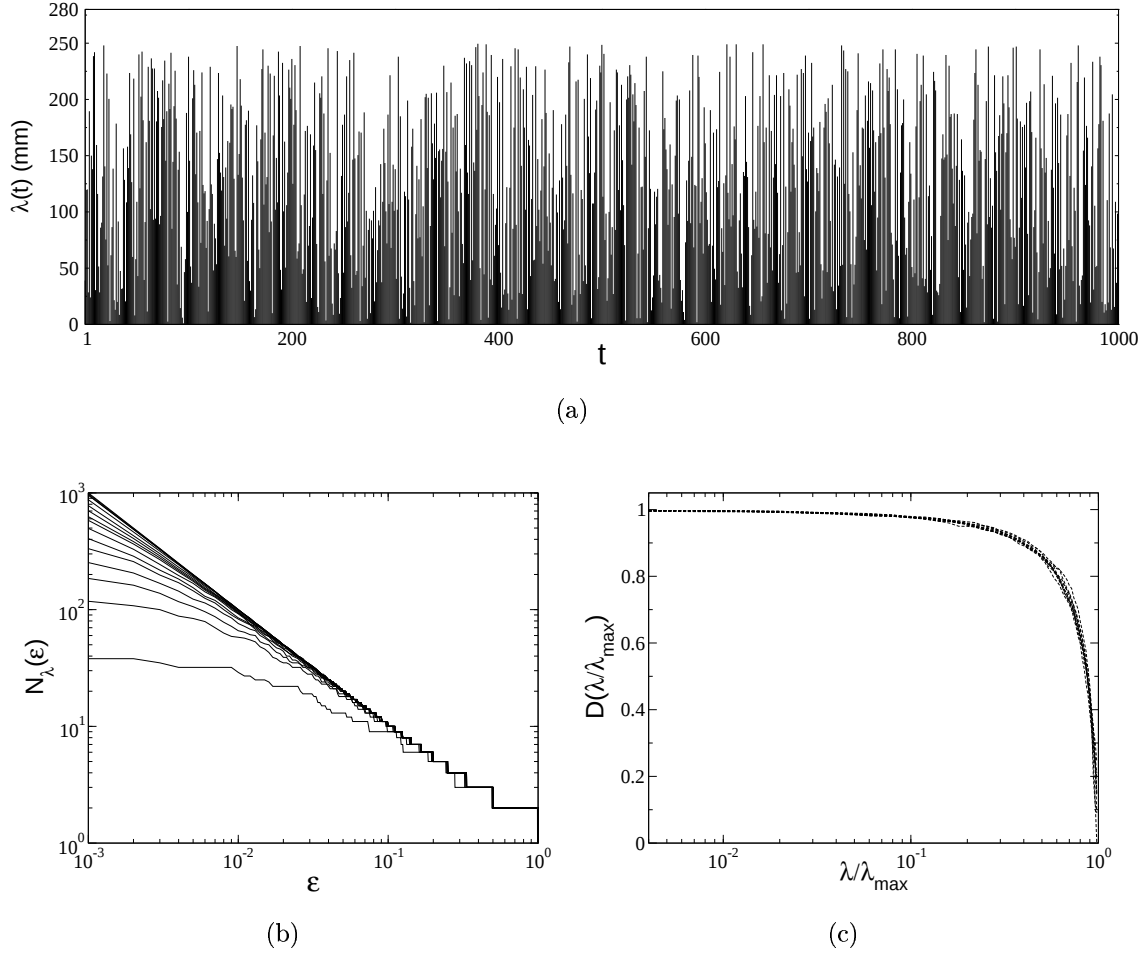


Figura 3.6: (a) Típica realização de uma das 9 séries randômicas analisadas. Uma comparação dessa série com as séries da Figura 1.2 mostra a grande diferença entre as séries reais de deslizamentos consideradas nesta Tese e as séries sintéticas aleatórias. Em (b), mostramos $N_\lambda(\epsilon) \times \epsilon$ para a série sintética da Figura 3.6(a), com aproximadamente os mesmos valores de λ estudados na Figura 3.3 para as séries de deslizamentos. Em (c), temos $D(\lambda) \times \lambda$ para as nove séries sintéticas analisadas. Como podemos ver, o comportamento de $D(\lambda)$ é bem diferente do caso das séries de deslizamentos reais (Figura 3.5).

T para as séries de deslizamento no regime R2, $\langle T \rangle \simeq 2175$, como pode ser visto na Tabela 1.3. O ajuste lei de potência para a curva dos conjuntos de Cantor randômicos está representado pela linha pontilhada que acompanha os símbolos ‘*’. Esta linha tem inclinação $D = 0.60 \pm 0.01$. Observe que, embora não possamos afirmar em princípio que uma lei de potência do tipo ϵ^{-D} está definida para a curva dos círculos cheios, o ajuste da linha pontilhada descreve razoavelmente o comportamento de $N(\epsilon)$ para as séries de deslizamento no regime R2, dentro das incertezas estatísticas, por quase duas décadas em ϵ (no intervalo $4.0 \times 10^{-3} \lesssim \epsilon \lesssim 1.8 \times 10^{-1}$). Ou seja, essas séries têm um comportamento parecido com o modelo de um conjunto de Cantor aleatório “modificado”, como descrito acima.

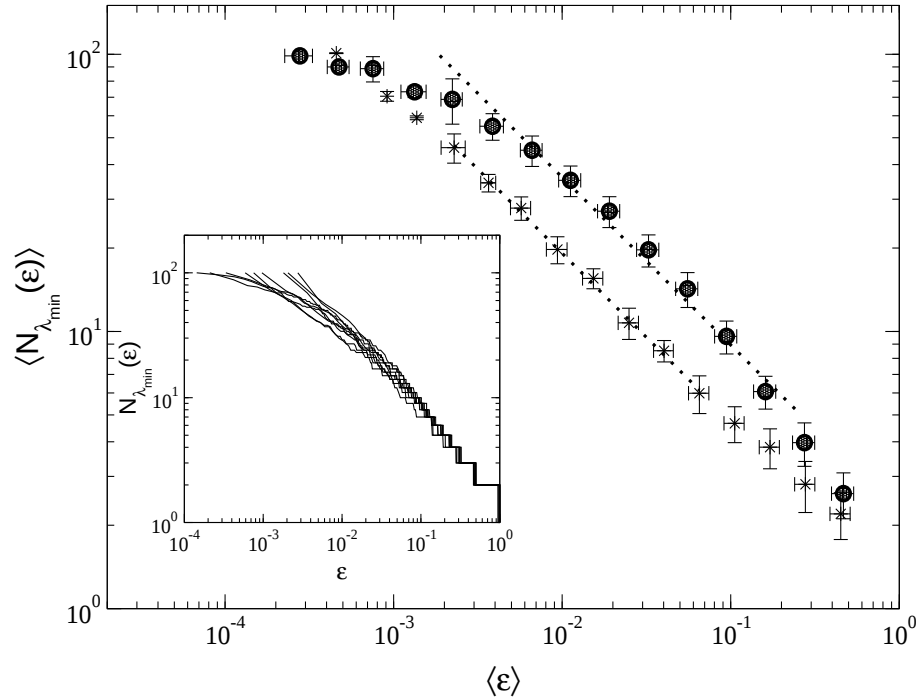


Figura 3.7: A curva definida pelos círculos cheios representa o número médio de caixas 1-dimensionais de tamanho $\epsilon = \Delta t/T$ necessárias para cobrir o suporte de dissipação total $\lambda_{\min}$ das séries no regime R2, mostradas na Figura 1.3, como função de $\langle \epsilon \rangle$. Os símbolos ‘*’ mostram as mesmas quantidades para um conjunto de nove conjuntos de Cantor aleatórios com $N = 100$ e $T = 2187$ (veja texto para detalhes). O ajuste lei de potência para estes símbolos está representado pela linha pontilhada, a qual tem inclinação $D = 0.61 \pm 0.01$. Os resultados para $\langle N_{\lambda_{\min}}(\epsilon) \rangle$ correspondentes às séries de deslizamento foram obtidos a partir das nove curvas $N_{\lambda_{\min}}(\epsilon) \times \epsilon$ mostradas no gráfico menor.

Para comparação, aplicamos o método dessa Seção ao conjunto de Cantor triádico de ordem 7, com $T = 2187$ e $N = 128$ eventos, dos quais retiramos 28

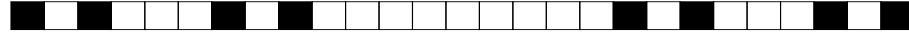
para simular uma série temporal com 2187 batidas e 100 deslizamentos. Usando a contagem de caixas para esse conjunto, obtivemos o mesmo valor de D ($D = 0.60 \pm 0.01$) encontrado acima para os símbolos ‘*’. No entanto, o conjunto definido agora tem uma origem bem diferente em relação ao conjunto aleatório do parágrafo anterior, uma vez que as iterações que levam ao conjunto de Cantor triádico de ordem 7 seguem um processo totalmente determinístico. Apesar disso, os resultados para D indicam propriedades geométricas similares para os dois tipos de distribuição. Na próxima seção, apresentaremos um método que quantifica melhor as diferenças entre esses dois conjuntos.

3.2 Lacunaridade das séries intermitentes

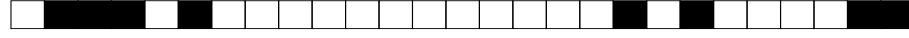
Na descrição de conjuntos fractais, a dimensão D que calculamos com o método da contagem de caixas constitui uma medida quantitativa da distribuição de massa. Conjuntos que apresentam características bastante diferentes podem fornecer, no entanto, o mesmo valor de D . Para ilustrar esse fato, mostramos na Figura 3.8 o conjunto de Cantor triádico, juntamente com um conjunto de Cantor aleatório, ambos de terceira ordem, com $N = 8$ e $T = 27$. Usando o método da contagem de caixas descrito no início deste capítulo, encontramos que os dois conjuntos têm o mesmo valor de D ($\simeq 0.63$), uma vez que a relação $N(\epsilon/3) = 2 N(\epsilon)$ permanece válida para os dois casos, independentemente da iteração. Observe que no conjunto de Cantor (Figura 3.8(a)) aparecem duas lacunas de 1 quadrado branco, mais duas de 3 quadrados e uma lacuna central de 9 quadrados, enquanto que o conjunto de Cantor randômico (Figura 3.8(b)) possui três lacunas de 3 quadrados, uma de 4 quadrados e uma de 12 quadrados. Uma diferença fundamental entre esses dois conjuntos está, portanto, na *distribuição de tamanhos* dos espaços vazios ao longo da linha.

Em 1982 Mandelbrot introduziu o conceito de *lacunaridade* como uma medida da distribuição de tamanhos de espaços vazios em sistemas fractais [18]. Uma lacunaridade grande significa a presença de grandes espaços vazios, enquanto que uma pequena lacunaridade está associada a uma distribuição mais uniforme de tamanhos de lacunas. Para um conjunto de N unidades de massa distribuídas ao longo da linha, a lacunaridade máxima é obtida se aglomerarmos todas as N unidades em uma das extremidades, deixando vazio todo o restante da linha, como mostra a Figura 3.8(c). A esta distribuição chamaremos conjunto compacto.

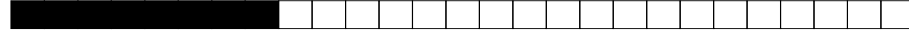
Uma definição quantitativa de lacunaridade foi desenvolvida em 1991 por Allain e Cloitre [18]. Para ilustrar essa definição, vamos calcular a lacunaridade do



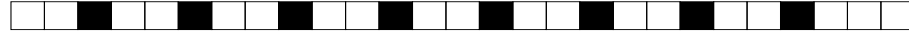
(a) conjunto de Cantor triádico



(b) conjunto de Cantor randômico



(c) conjunto compacto



(d) conjunto mais uniforme

Figura 3.8: Cada segmento de linha de tamanho 27 contém 8 unidades de massa, as quais estão representadas pelos quadrados pretos. Na figura temos (a) um conjunto de Cantor triádico de terceira ordem, (b) um conjunto de Cantor aleatório, também de terceira ordem, (c) um conjunto compacto e (d) uma distribuição mais uniforme de massa ao longo da linha.

conjunto de Cantor triádico da Figura 3.8(a), com 8 eventos distribuídos ao longo de 27 sítios. Se cada sítio tem comprimento $t = 1$, o conjunto completo tem, portanto, um comprimento $T = 27$. Definimos uma janela de tamanho r , tal que $1 \leq r \leq T$, tomando os r primeiros sítios da linha. Transladando essa janela ao longo dos sítios, o número de passos necessários para se atingir o final da linha será:

$$R(r) \equiv T - r + 1, \quad (3.2)$$

de forma que $R(1) = 27$, $R(3) = 25$, $R(9) = 19$ e $R(27) = 1$. Seja s_i o número de sítios ocupados que estão dentro da janela no i -ésimo passo ao longo da linha. Para o conjunto de Cantor da Figura 3.8(a), teremos, com uma janela de tamanho $r = 9$, $s_1 = s_{19} = 4$, $s_2 = s_3 = s_{17} = s_{18} = 3$, $s_{4 \leq i \leq 7} = s_{13 \leq i \leq 16} = 2$, $s_8 = s_9 = s_{11} = s_{12} = 1$ e $s_{10} = 0$. Vamos chamar de $n(s, r)$ o número de passos da janela de tamanho r com s sítios ocupados. Para o nosso exemplo teremos, com $r = 9$, $n(0, 9) = 1$, $n(1, 9) = 4$, $n(2, 9) = 8$, $n(3, 9) = 4$, $n(4, 9) = 2$ e $n([5 \leq n \leq 8], 9)$. Dentro dos $R(r)$ passos da janela de tamanho r ao longo da linha, a probabilidade de encontrarmos

nela s sítios ocupados será portanto:

$$p(s, r) = \frac{n(s, r)}{R(r)}. \quad (3.3)$$

Com $r = 9$, encontramos para o nosso exemplo $p(0, 9) = 1/19$, $p(1, 9) = 4/19$, $p(2, 9) = 8/19$, $p(3, 9) = 4/19$, $p(4, 9) = 2/19$ e $p([5 \leq n \leq 8], 9) = 0$. Sejam os momentos de primeira e segunda ordem $M_1(r)$ e $M_2(r)$, respectivamente, definidos de acordo com as seguintes equações:

$$M_1(r) = \sum_{s=1}^r s p(s, r); \quad (3.4a)$$

$$M_2(r) = \sum_{s=1}^r s^2 p(s, r). \quad (3.4b)$$

A *lacunaridade* $\mathcal{L}$ é definida pela equação:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{M_2(r)}{[M_1(r)]^2}. \quad (3.5)$$

Substituindo os valores de $p(s, 9)$ calculados acima para $0 \leq s \leq N = 8$ em (3.4a) e (3.4b), obtemos $M_1(9) = 40/19$ e $M_2(9) = 104/19$. Assim, para uma janela de tamanho $r = 9$, temos $\mathcal{L}(9) = 1.235$ para o conjunto de Cantor da Figura 3.8(a). Procedendo da mesma forma para o conjunto de Cantor randômico da Figura 3.8(b), obtemos $\mathcal{L}(9) = 1.545$, um valor maior do que o encontrado para o conjunto de Cantor triádico. Para a distribuição compactada (Figura 3.8(c)), com os 8 primeiros sítios ocupados, obtemos $\mathcal{L}(9) = 2.991$. Este é o maior valor de $\mathcal{L}$ para $r = 9$, $T = 27$ e $N = 8$. A Figura 3.9 mostra os valores de $\mathcal{L}(r)$ para o conjunto de Cantor triádico (Figura 3.8(a)), o conjunto de Cantor randômico (Figura 3.8(b)), o conjunto compacto (Figura 3.8(c)) e o conjunto mais uniformemente distribuído da Figura 3.8(d). Observe que este último tem a menor lacunaridade para todos os valores de r . Por outro lado, os conjuntos de Cantor triádico e randômico possuem lacunaridades bem distintas. Assim, o conceito de lacunaridade pode ser implementado como uma medida da distribuição de massa em conjuntos fractais, em adição à sua dimensão fractal.

Para N unidades de massa distribuídas ao longo de T sítios, com $T \geq N$, tomando $r = T$, temos $R(T) = 1$ e

$$n(s, T) = \begin{cases} 1, & \text{se } s = N \\ 0, & \text{se } s \neq N. \end{cases} \quad (3.6)$$

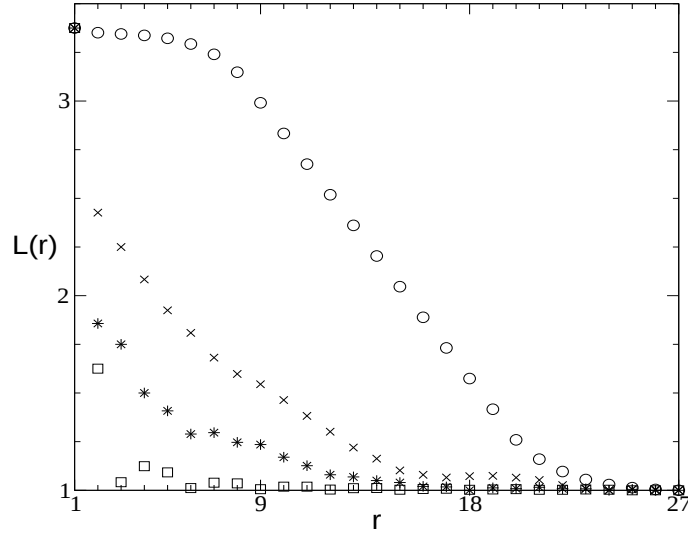


Figura 3.9: Lacunaridades $\mathcal{L}$ como função do tamanho da janela r para as quatro distribuições mostradas na Figura 3.8. Os símbolos são “o” para a distribuição compactada, “x” para o conjunto de Cantor aleatório, “*” para o conjunto de Cantor triádico e “□” para a distribuição mais uniforme.

Portanto as equações para $M_1(T)$, $M_2(T)$ e $\mathcal{L}(T)$ ficam:

$$\begin{aligned}
 M_1(T) &= \sum_{s=0}^T \left(s \times \frac{n(s, T)}{R(T)} \right) = N \times \frac{1}{1} = N; \\
 M_2(T) &= \sum_{s=0}^T \left(s^2 \times \frac{n(s, T)}{R(T)} \right) = N^2 \times \frac{1}{1} = N^2; \\
 \Rightarrow \mathcal{L}(T) &= \frac{M_2(T)}{[M_1(T)]^2} = \frac{N^2}{[N]^2} \Rightarrow \mathcal{L}(T) = 1,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

independente da distribuição. Por outro lado, se $r = 1$, teremos $R(1) = T$, $n(1, 1) = N$ e $n(0, 1) = T - N$. As equações (3.4a), (3.4b) e (3.5) ficam:

$$\begin{aligned}
 M_1(1) &= \sum_{s=0}^1 \left(s \times \frac{n(s, 1)}{R(1)} \right) = 0 \times \frac{N}{T-N} + 1 \times \frac{N}{T} = \frac{N}{T}; \\
 M_2(1) &= \sum_{s=0}^1 \left(s^2 \times \frac{n(s, 1)}{R(1)} \right) = 0^2 \times \frac{N}{T-N} + 1^2 \times \frac{N}{T} = \frac{N}{T}; \\
 \Rightarrow \mathcal{L}(1) &= \frac{M_2(1)}{[M_1(1)]^2} = \frac{N/T}{[N/T]^2} \Rightarrow \mathcal{L}(1) = \frac{T}{N}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para uma distribuição sem espaços vazios, $N = T \Rightarrow L(1) = 1$. Neste caso, temos:

$$n(s, r) = \begin{cases} 1, & \text{se } s = r \\ 0, & \text{se } s \neq r, \end{cases} \quad (3.9)$$

com $n(r, r) = R(r) = T - r + 1$. Substituindo estes resultados nas equações para $M_1(r)$ e $M_2(r)$, obtemos $\mathcal{L}(r) = 1 \forall r$, para a linha completamente preenchida. Note que $\mathcal{L}(r) = 1$ é o menor valor para a lacunaridade².

As séries de deslizamento no regime R1, mostradas na Figura 1.2, são tais que $N = T$; de acordo com a equação (3.7), temos portanto $\mathcal{L}(r) = 1$ para as séries no regime R1. Nesta seção, estudamos a lacunaridade para o suporte de dissipação total das séries de deslizamento intermitentes mostradas na Figura 1.3, as quais correspondem ao regime R2. Tais séries apresentam ao todo $N = 100$ eventos, mas um comprimento variável da linha do suporte, definido pelo número de batidas T dadas pelo martelo na calha até ocorrerem todos os N eventos. As curvas $\mathcal{L}(r/T)$ para as nove séries nesse regime estão mostradas no gráfico menor do lado esquerdo da Figura 3.10, em escala logarítmica. Duas curvas desse gráfico estão mostradas no gráfico do lado superior direito da Figura 3.10, em linhas contínuas. Podemos observar que uma dessas linhas, a qual corresponde a $\mathcal{L}(r/T)$ para a série (o) da Figura 1.3 ($L = 200$ mm, $\theta = 18^\circ$), se aproxima mais da linha tracejada. Esta última linha representa $\mathcal{L}(r/T)$ para uma realização do conjunto de Cantor triádico, de ordem 7, modificado, isto é, com $T = 3^7 = 2187$, mas com $N = 2^7 - 28 = 100$ eventos, como descrito no final da Seção 3.1. A outra linha contínua corresponde à série (m) ($L = 50$ mm, $\theta = 15^\circ$). Observe que essa curva tem um comportamento mais parecido com o da linha pontilhada, a qual representa $\mathcal{L}(r/T)$ para o conjunto de Cantor aleatório modificado, com 100 eventos. Podemos ver na figura que a lacunaridade deste conjunto é bem diferente da lacunaridade para o conjunto de Cantor triádico, com o mesmo número de eventos, muito embora os dois conjuntos tenham a mesma dimensão $D \simeq 0.61 \pm 0.01$.

Os círculos cheios no gráfico principal da Figura 3.10 representam $\langle L(r/T) \rangle$ para as nove séries de deslizamento no regime R2. Como pode ser visto na figura, a linha tracejada, correspondendo à lacunaridade para o conjunto de Cantor triádico com 100 eventos, acompanha os valores médios de $\mathcal{L}(r/T)$ para os deslizamentos, dentro das incertezas estatísticas. Os gráficos principais das Figuras 3.7 e 3.10 mostram que as séries de deslizamento da Figura 1.3 têm um comportamento similar, tanto quanto à dimensão, quanto à distribuição de lacunas ao longo do suporte. Por outro lado, o desvio acentuado de uma das curvas $\mathcal{L}(r/T)$, em relação à média

²veja apêndice B.1.

(veja gráficos menores da Figura 3.10), representa uma diferença significativa na distribuição de tamanhos de lacunas para a série (m), característica que não aparece explicitamente na Figura 3.7.

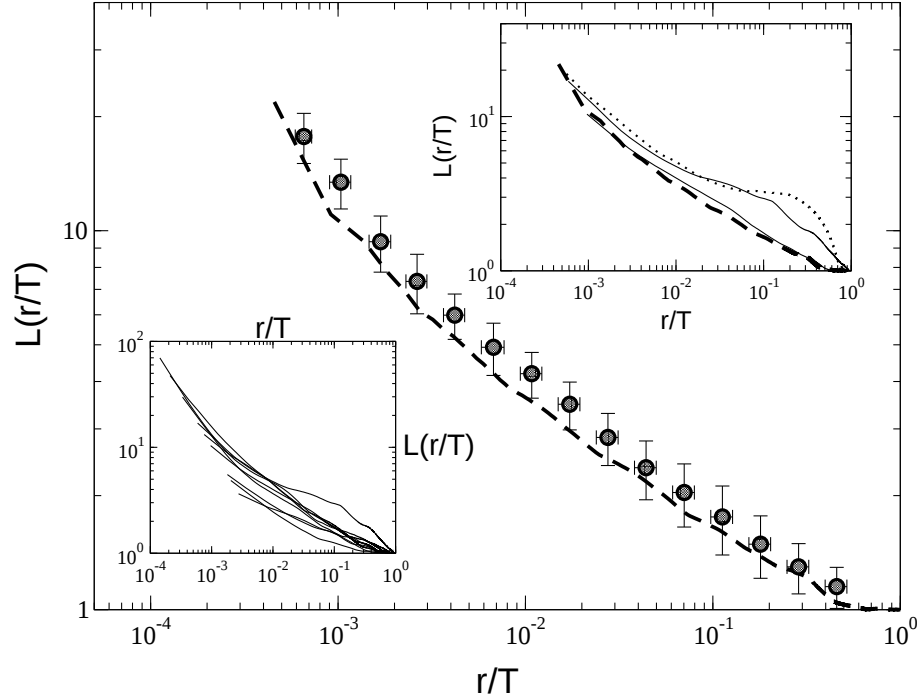


Figura 3.10: O gráfico no lado inferior esquerdo mostra $\mathcal{L}(r/T)$ para as nove séries de deslizamento da Figura 1.3. No gráfico principal, mostramos $\langle L(r/T) \rangle$ (círculos cheios), mais barras de flutuação, juntamente com a curva $\mathcal{L}(r/T)$ (linha tracejada) para um conjunto de Cantor triádico, de ordem 7 ($T = 3^7 = 2187$ e $N = 2^7 = 128$) com 28 eventos retirados aleatoriamente, representando uma série de ‘deslizamentos’ com $T = 2187$ e $N = 100$. A lacunaridade para um conjunto de Cantor aleatório de ordem 7, modificado da mesma maneira, está mostrada na figura no lado superior direito (linha pontilhada). A linha contínua mais próxima dessa curva representa $\mathcal{L}(r/T)$ para a série de deslizamento (m) ($L = 50$ mm e $\theta = 15^\circ$), enquanto a lacunaridade da série (o) ($L = 200$ mm e $\theta = 18^\circ$) é mais parecida com a linha tracejada (conjunto de Cantor triádico).

3.3 Susceptibilidade de deslizamento como função do comprimento do cilindro

“It is one of the dirty little secrets of physics that while we physicists can tell you a lot about quarks, quasars and other exotica, there is still no universally accepted explanation of the basic laws of friction.” David A. Kessler [52].

Nos últimos anos, uma enorme quantidade de trabalhos teóricos e experimentais têm sido publicados nas mais importantes revistas de Física, dedicados à compreensão do atrito entre superfícies deslizantes. Na realidade, as duas leis básicas do atrito, as quais são ainda hoje ensinadas e usadas freqüentemente, foram enunciadas em 1699 por Amonton, e eram conhecidas mesmo antes por Leonardo da Vinci. A primeira lei de Amonton diz que o atrito é proporcional à normal F_N , ou seja, à força perpendicular à direção de deslizamento; e a segunda lei diz que o atrito não depende da área macroscópica aparente de contato entre os dois corpos. No século XVIII, Coulomb sintetizou essas duas leis escrevendo $F_{\text{at}} = \mu F_N$, onde $\mu \equiv F_{\text{at}}/F_N$ é o *coeficiente de atrito*, o qual pode ser cinético (μ_c) ou estático (μ_e). A experiência mostra que $\mu_c < \mu_e$, refletindo as naturezas diferentes da interação entre as superfícies, para os dois regimes da dinâmica. Hoje se conhece que a existência do atrito está intimamente ligada à interação das rugosidades das superfícies em contato. Exceto para materiais muito elásticos como a borracha, a área real na qual o atrito ocorre, A_{real} , é em geral muito menor que a área aparente, A_{ap} , da interface. Os tamanhos dos contatos são geralmente muito maiores que os tamanhos moleculares (1 a 10 μm vs. $\sim 1\text{ nm}$), sendo usualmente menores que a espessura h da região da interface onde ocorre a interação. Como consequência, a força de atrito, nesse caso, é proporcional à área real de contato entre as superfícies, sendo no entanto independente da área aparente da interface. Diversas simulações e modelos matemáticos têm sido desenvolvidos nas últimas décadas para explicar como ocorrem as interações na interface de duas superfícies deslizantes, mas o assunto ainda é tema de muita pesquisa [28, 53, 54, 55, 56].

Como discutido no final do Capítulo 1, os deslizamentos dos blocos ao longo da calha de alumínio envolvem a dinâmica conhecida como *“stick-slip”*, na qual o movimento ocorre de maneira intermitente. Em particular, nos experimentos com cilindros de alumínio, no regime de baixos ângulos, um número variável de batidas do martelo é necessário para que um único deslizamento ocorra, podendo esse número chegar a até 600. Há cinquenta anos atrás, Bowden e Leben [21] já haviam notado que a força de atrito entre dois metais em movimento relativo exibe grandes

flutuações tanto para superfícies secas quanto para lubrificadas. Características semelhantes foram observadas também no atrito entre rochas, de maneira que Brace e Byerlee [21] em 1966, propuseram esse tipo de comportamento como um mecanismo para terremotos. Várias razões podem ser enumeradas para explicar o grande interesse da comunidade científica nesse fenômeno. De fato, uma possível conexão com falhas geológicas o torna muito interessante. Por outro lado, em aplicações práticas, muitas vezes é necessário eliminar ou reduzir as flutuações no atrito, as quais em geral estão associadas a instabilidades, vibrações, etc.; tais flutuações tendem, por exemplo, a reduzir o tempo de vida de muitos equipamentos. Finalmente, existe uma esperança de que uma melhor caracterização do movimento “*stick-slip*” venha a aumentar a compreensão do atrito em geral.

Cada série da Figura 1.3 é constituída de 100 deslizamentos do cilindro ao longo da calha, os quais decorrem após T_{100} perturbações do martelo. Na Tabela 1.3, podemos ver que T_{100} ($\equiv T$ na quinta coluna da tabela) decresce monotonicamente da primeira série ($T_{100} = 6979$ para o cilindro de comprimento $L = 5$ mm), até a última ($T_{100} = 364$ para $L = 1000$ mm). A Figura 3.11 mostra no gráfico principal o número de batidas do martelo, $T_{100}(L)$, necessárias para o cilindro escorregar 100 vezes, como função do comprimento L . A linha cheia representa o ajuste lei de potência:

$$T_{100}(L) \sim L^{-0.56}. \quad (3.10)$$

Como podemos ver na Figura 3.11, a equação (3.10) acompanha os círculos cheios independentemente da inclinação reduzida $(\theta_c - \theta)/\theta_c$, a qual flutuou de 0.15 a 0.38, como ilustrado no gráfico menor da figura. Assim, à medida em que o cilindro aumenta de comprimento, mantendo-se fixa a sua densidade linear assim como outros parâmetros geométricos, *menos* batidas são necessárias para ocorrerem os 100 deslizamentos.

Para avaliar o significado do ajuste mostrado na Figura 3.11, contamos, adicionalmente, o número de batidas $T_N(L)$ necessárias para o cilindro deslizar N vezes, onde variamos N de 1 até 100, para todas as séries. Os resultados estão mostrados na Figura 3.12. Como podemos ver nessa figura, o comportamento em lei de potência persiste para diferentes valores de N , de forma que podemos escrever:

$$T_N(L) \sim L^{-\alpha_N}, \quad (3.11)$$

onde o expoente α_N está mostrado no gráfico menor da figura. De particular interesse na figura, é o fato de α_N convergir para o valor $\simeq 0.56$, no limite $N \rightarrow \infty$, isto é, quando $N \gtrsim 80$ eventos.

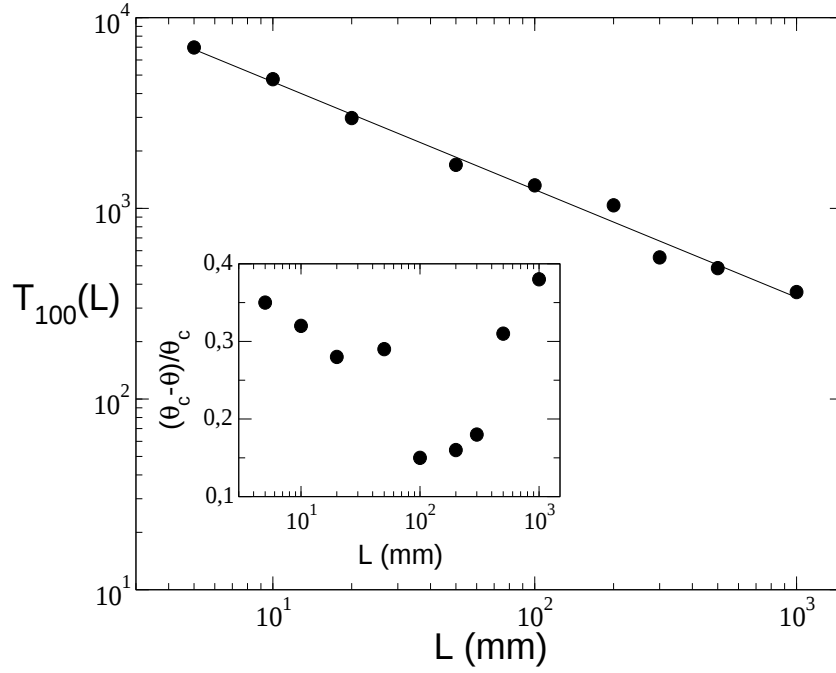


Figura 3.11: Número $T_{100}(L)$ de perturbações do martelo necessárias para ocorrerem 100 deslizamentos, como função do comprimento L do cilindro de alumínio; $T_{100}(L)$ identifica o tamanho das séries temporais no regime R2, mostradas na Figura 1.3. A linha contínua representa o ajuste $T_{100}(L) \sim L^{-\alpha_{100}}$, $\alpha_{100} \simeq 0.56$. O gráfico menor mostra as flutuações da inclinação reduzida $(\theta_c - \theta)/\theta_c$.

A observação de que cilindros maiores escorregam em média mais facilmente, em resposta às perturbações do martelo, parece confrontar, em um certo sentido, com a quarta coluna da Tabela 1.3, a qual mostra o ângulo crítico como função do comprimento do cilindro. Os dados dessa tabela estão mostrados na Figura 3.13. Como podemos ver, o ângulo crítico θ_c *aumenta* com o comprimento do cilindro. Isto é, partindo da inclinação $\theta = 0$ e aumentando θ vagarosamente, o primeiro a deslizar é o cilindro menor, o qual está associado a um coeficiente de atrito estático $\mu_e(L_0/L)$ menor, enquanto que as Figuras 3.11 e 3.12 sugerem exatamente o contrário para o comportamento de μ_e . No entanto, devemos notar que o mecanismo de levantar a calha é completamente diferente do processo de perturbar o sistema mantendo um dado ângulo fixo, de forma que o atrito entre o cilindro e a calha se manifesta diferentemente nos dois casos.

Dessa forma, definimos a *susceptibilidade de deslizamento* do cilindro de comprimento L , com relação às batidas do martelo, como:

$$\chi_N(L) \equiv \frac{N}{T_N(L)}, \quad (3.12)$$

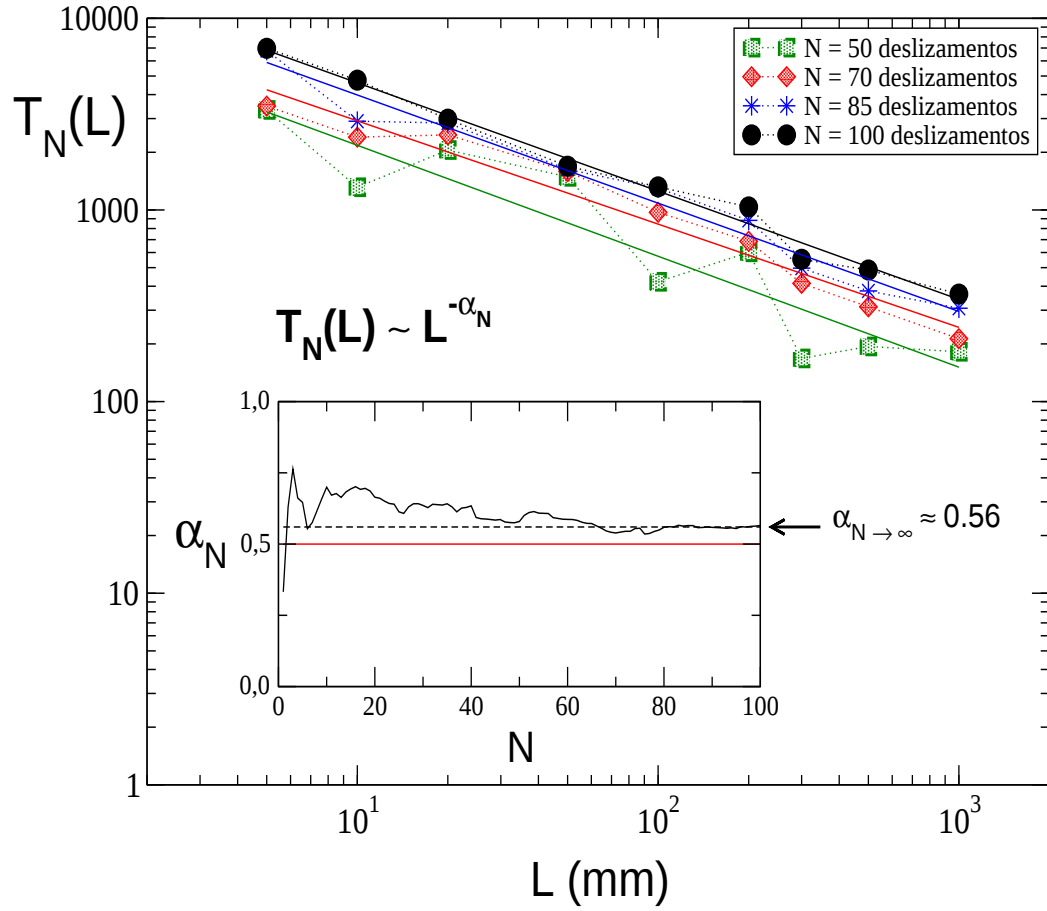


Figura 3.12: Número de batidas, $T_N(L)$, necessárias para o cilindro de comprimento L escorregar N vezes, a partir da primeira perturbação do martelo. Observe que $T_N(L) \sim L^{-\alpha_N}$, ao longo de uma variação de L por um fator de 200. No gráfico menor, mostramos $\alpha_N \times N$.

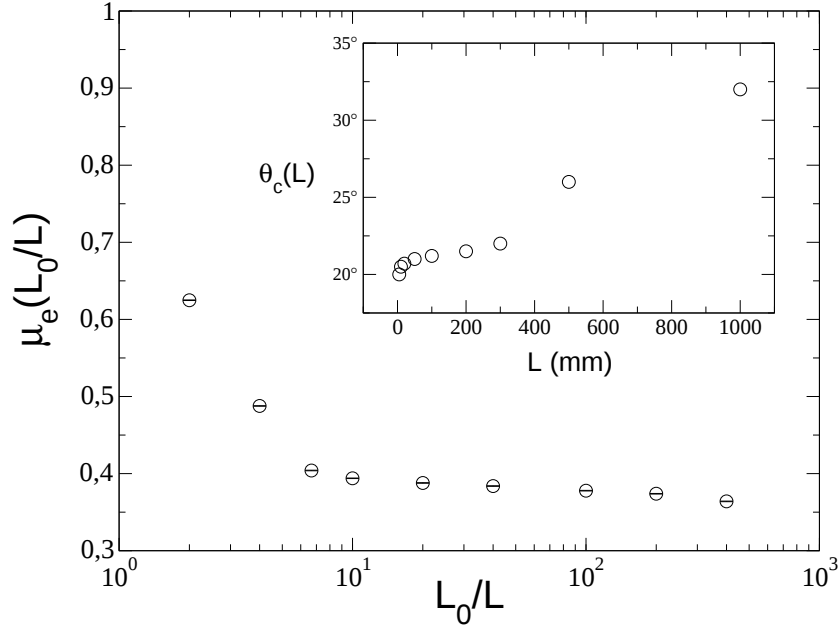


Figura 3.13: Coeficiente de atrito estático $\mu_e = \tan(\theta_c)$ como função de L_0/L . O gráfico menor mostra $\theta_c \times L$ (veja Tabela 1.3).

onde $T_N(L)$ é o número de batidas necessárias para ocorrerem N deslizamentos, para um cilindro de comprimento L . Observe que, substituindo a relação de escala (3.11) na equação (3.12), temos:

$$\chi_N(L) \sim L^{\alpha_N}. \quad (3.13)$$

De fato, de acordo com a Figura 3.12, a susceptibilidade $\chi_N(L)$ *aumenta* com o comprimento do cilindro. Isso poderia ser interpretado a partir do argumento de que os cilindros maiores estão em média mais próximos do centro perturbador, isto é, do martelo, como pode ser visto na Figura 1.1. Dessa maneira, o pulso elástico originado da batida do martelo se propaga ao longo da superfície alcançando o cilindro menor com uma amplitude mais baixa, devido à dissipação da energia mecânica. De uma maneira geral, portanto, esperaríamos que os deslizamentos ocorressem mais facilmente à medida em que os cilindros se aproximassem da base da calha. No entanto, a Figura 3.14 mostra que a distância ao centro perturbador *não* interfere na taxa de deslizamento. Nessa figura, podemos ver que o deslizamento acumulado $A_t \equiv \sum_{t'=1}^t \lambda(t')$ segue um crescimento aproximadamente linear com o número de perturbações do martelo, mantendo uma inclinação constante, a qual varia no entanto com o comprimento do cilindro. Uma possível explicação para esse comportamento se baseia no efeito de “*gripagem*”, isto é, o cilindro vai “*atolando*” à medida

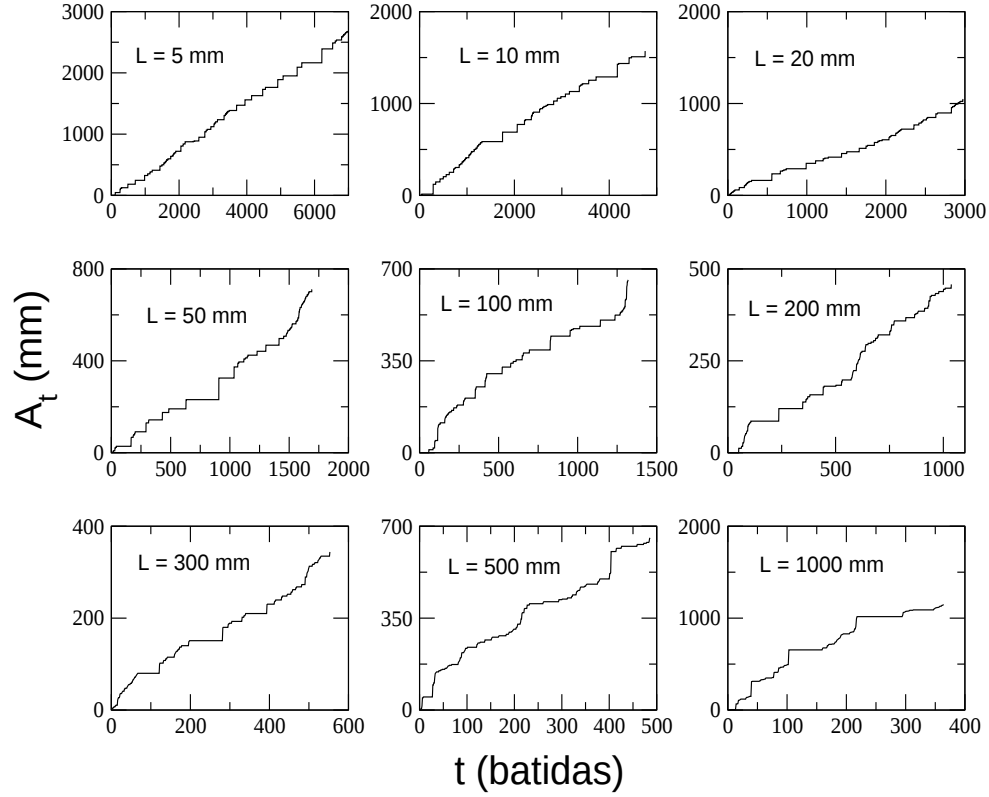


Figura 3.14: Deslizamento acumulado $A_t \equiv \sum_{t'=1}^t \lambda(t')$ como função do número de perturbações do martelo, t , decorridas desde a primeira batida (instante $t' = 1$).

em que desliza ao longo da superfície. Ou seja, o efeito da gripagem compensa a proximidade em relação ao centro da perturbação, de maneira que a taxa dA_t/dt permanece aproximadamente constante ao longo da superfície.

Como discutimos anteriormente, o atrito entre duas superfícies deslizantes está ligado à natureza da interface, a qual é caracterizada por uma estrutura rugosa que determina o número de contatos entre as superfícies. A *espessura* ou a altura h da interface é definida como o desvio médio padrão das coordenadas z_i correspondentes à altura das rugosidades, em relação ao plano (x, y) colocado em $z = \bar{z}$. Em particular, no limite em que $h \rightarrow 0$, teríamos as duas superfícies “coladas”, de maneira que $\chi \rightarrow 0$ nesse limite. Por outro lado, à medida em que “despregamos” as superfícies, esperamos uma redução no número de contatos, os quais são intimamente ligados à força de atrito, e um conseqüente aumento no valor de χ . Assim, podemos escrever a seguinte relação:

$$\chi \sim h, \quad (3.14)$$

para a susceptibilidade de deslizamento como função da altura da rugosidade da interface. Essa relação deve ser válida em um certo intervalo de variação de h , $h_1 \leq h \leq h_2$. Experimentos recentes com superfícies rugosas fraturadas [57], mostram que a coordenada h na direção perpendicular ao plano (x, y) da superfície tem o seguinte comportamento de escala³: $h(kx, ky) = k^\zeta h(x, y)$, onde ζ é chamado *expoente de rugosidade*. Por outro lado, em muitas situações práticas, é conhecido que para superfícies metálicas, esse expoente tem um valor próximo de 0.5. No caso particular dos deslizamentos de cilindros de alumínio considerados nesta Tese, os contatos com a calha ocorrem em uma interface unidimensional, como podemos ver na Figura 1.1. Neste caso, a relação de escala acima deve ser escrita como $h(kx) = k^\zeta h(x)$. Observe que, para dois cilindros de comprimentos L_1 e L_2 , devemos ter, fazendo $x \rightarrow L_1$, $k \rightarrow L_2/L_1$,

$$h\left(\frac{L_2}{L_1} L_1\right) = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^\zeta h(L_1) \Rightarrow \frac{h(L_2)}{h(L_1)} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^\zeta \Rightarrow h(L) \sim L^\zeta. \quad (3.15)$$

Assim, das equações (3.15) e (3.14), obtemos:

$$\chi(L) \sim L^\zeta \quad (3.16)$$

Comparando as equações (3.16) e (3.13), podemos escrever o seguinte resultado:

$$\zeta = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N \cong 0.56, \quad (3.17)$$

um valor muito próximo do expoente de rugosidade 0.5 verificado para superfícies metálicas [57].

³Esse tipo de relação é conhecido como lei de escala *auto-afim*, na qual coordenadas distintas escalam de maneiras diferentes.

Capítulo 4

Análise multifractal das séries de deslizamentos

O cálculo da dimensão fractal que fizemos no Capítulo 3 não leva em conta as diferentes intensidades de deslizamento dentro das caixas de tamanho ϵ necessárias para cobrir o suporte temporal onde a atividade ocorre. Apesar de D ser calculado em diferentes níveis de dissipação λ , nenhuma distinção foi feita entre as diferentes magnitudes dos eventos acima da linha na Figura 3.2, uma vez que o método da contagem de caixas atribui o mesmo peso para caixas associadas a intensidades de deslizamento completamente diferentes. Claramente, a dimensão fractal examinada no Capítulo 3 não é suficiente para descrever a rica variedade de níveis de dissipação que existe em uma série temporal de deslizamento. Assim, vamos considerar agora o ‘peso’ de cada uma das caixas, definindo a seguinte medida normalizada para a i -ésima caixa:

$$m_i(\epsilon) = \Lambda_i(\epsilon) / \Lambda_{T_\epsilon}, \quad (4.1)$$

onde $\Lambda_i(\epsilon) = \sum_{t=(i-1)\Delta t+1}^{i\Delta t} \lambda(t)$ é a atividade de deslizamento dentro da caixa, isto é, a soma de todos os eventos $\lambda(t)$ que ocorreram num instante t dentro da i -ésima caixa, e $\Lambda_{T_\epsilon} = \sum_{t=1}^{T_\epsilon} \lambda(t)$ é a soma da atividade de todas as caixas de tamanho ϵ necessárias para cobrir o suporte total. Em particular, estamos interessados em verificar se a medida $m_i(\epsilon)$ é caracterizada por um espectro de singularidades $f(\alpha)$, como observado nos últimos anos em vários fenômenos físicos, entre os quais podemos citar dinâmica caótica [58], descarga de voltagem em redes aleatórias de resistores [59], turbulência [50], processos de crescimento [60] e dedos viscosos [61], entre outros. O espectro $f(\alpha)$ é definido a partir de duas hipóteses de escala: A primeira, é que a medida dentro de uma caixa de tamanho ϵ escala com ϵ^α , onde α é um expoente que pode ter diferentes valores, dependendo da região do suporte.

Assim, escrevemos:

$$m_i(\epsilon) \sim \epsilon^{\alpha_i}, \quad (4.2)$$

identificando o expoente α_i como associado à i -ésima caixa de tamanho ϵ . A segunda hipótese é que o número de vezes em que α_i tem um valor entre α' e $\alpha' + d\alpha'$ é da forma:

$$dn(\alpha') \sim d\alpha' \rho(\alpha') \epsilon^{-f(\alpha')}, \quad (4.3)$$

onde $f(\alpha')$ é uma função contínua. O expoente $f(\alpha')$ reflete as diferentes dimensões dos conjuntos sobre os quais as singularidades de intensidade α' estão distribuídas. Assim, o suporte de dissipação total pode ser caracterizado por um conjunto de singularidades com expoente α , cada uma com sua própria dimensão fractal $f(\alpha)$.

Uma descrição alternativa das propriedades multifractais de um sistema envolve as dimensões generalizadas D_q [60, 62]. O espectro de dimensões D_q para as séries de deslizamento da Figura 1.2 será estudado na Seção 4.1. Na Seção 4.2, usaremos o método de Chhabra e Jensen [63] para calcular a função $f(\alpha)$. Mostraremos que esse método é totalmente equivalente à descrição multifractal usando as dimensões D_q .

4.1 Dimensões generalizadas D_q

As dimensões generalizadas D_q são definidas como [58, 62]:

$$D_q = \frac{1}{(q-1)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log M_q(\epsilon)}{\log \epsilon} \right], \quad (4.4)$$

onde

$$M_q(\epsilon) = \sum_i m_i^q(\epsilon) \quad (4.5)$$

é a soma das medidas generalizadas $m_i^q(\epsilon)$ sobre todas as caixas de tamanho ϵ , com $q \neq 1$. $M_q(\epsilon)$ é chamado *momento generalizado* de ordem q . Observe que D_0 é justamente a dimensão fractal que calculamos no Capítulo 3, uma vez que quando $q = 0$, temos $M_0(\epsilon) = N_{\lambda_{\min}}(\epsilon)^1$. Quando todos os valores de D_q são iguais, independentes de q , então temos um fractal homogêneo ($D_q = D_0 \forall q$). Um *multifractal* está definido se for satisfeita a relação de escala

$$M_q(\epsilon) \sim \epsilon^{(q-1)D_q}, \quad (4.6)$$

¹Na análise multifractal realizada neste capítulo, as caixas são colocadas na linha $\lambda_{\min} = 1.0$ mm, a qual define o suporte de dissipação total.

sendo encontrados diferentes valores de D_q . A definição acima para os momentos generalizados é válida para valores de $q \neq 1$. No apêndice B.2 apresentamos uma expressão para $M_1(\epsilon)$.

Para cada série da Figura 1.2, o programa A.6 implementa a equação (4.5) para vários valores do parâmetro q , e salva num arquivo as curvas $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ correspondentes. Nos 9 gráficos da Figura 4.1, mostramos várias dessas curvas, as quais correspondem a q variando de -10 a 10 , em intervalos $\Delta q = 2.5$. Como podemos ver nessa figura, há uma tendência de os momentos $M_q(\epsilon)$ seguirem uma relação de escala com ϵ , para um intervalo $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$, o qual varia de 1 a 3 décadas em ϵ , dependendo da série e do valor de $|q|$. Esse comportamento, no entanto, é modulado por oscilações de amplitude crescente com o valor absoluto de q , as quais aparecem como consequência do *tamanho finito* das séries. Observe que as quantidades relevantes do suporte temporal das séries de deslizamento são o comprimento, T , e a distância entre dois eventos, $(\Delta t)_{\min} = 1$. O espectro multifractal associado à relação de escala acima é encontrado *apenas* para um intervalo intermediário $\epsilon_{\min} \gg (\Delta t)_{\min}/T = 0.001$, $\epsilon_{\max} \ll T/T = 1$. Definimos a inclinação de cada curva $M_q(\epsilon)$ nesse intervalo como $(q - 1)D_q$. Para cada gráfico da Figura 4.1, calculamos o espectro D_q em diferentes intervalos $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$. As inclinações das curvas $M_q(\epsilon)$ são calculadas usando o *xmgrace*, e os resultados para cada valor de q são divididos em seguida por $(q - 1)$.

Para ilustrar o método que utilizamos nesta seção, mostramos na Figura 4.2 as curvas $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ correspondentes à série (a) da Figura 1.2, com q variando de -10 a 0 e ϵ no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$. Os triângulos vazios representam $M_q(\epsilon)$ para 8 valores de ϵ definidos a partir da divisão desse intervalo em sete segmentos de tamanhos iguais na escala $\log(\epsilon)$. Na figura mostramos também os valores de $M_q(\epsilon)$ calculados para todos os tamanhos da caixa ϵ tais que $1/\epsilon = T/\Delta t$ é um número inteiro (símbolos ‘*’). Isso foi feito para estudar como as flutuações em $M_q(\epsilon)$ afetam o cálculo das inclinações das curvas dentro do intervalo considerado. Observe que os símbolos ‘*’ da figura correspondem aos divisores de $T = 1000$ neste intervalo, isto é, $\Delta t \equiv T\epsilon = 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100$ e 125 . Para estes valores de $\Delta t = T\epsilon$, a cobertura do suporte é feita de forma que $T_\epsilon = T$; ou seja, colocando as caixas de forma ordenada ao longo da linha, com o início da primeira caixa em $t = 1$, a extremidade da última caixa corresponde a $t = T = 1000$. Para tratar as caixas com tamanhos que não satisfazem a essa condição, o programa A.6 utiliza ‘condições de contorno periódicas’, de forma que $T_\epsilon > T$ nesses casos, variando com o tamanho da caixa.

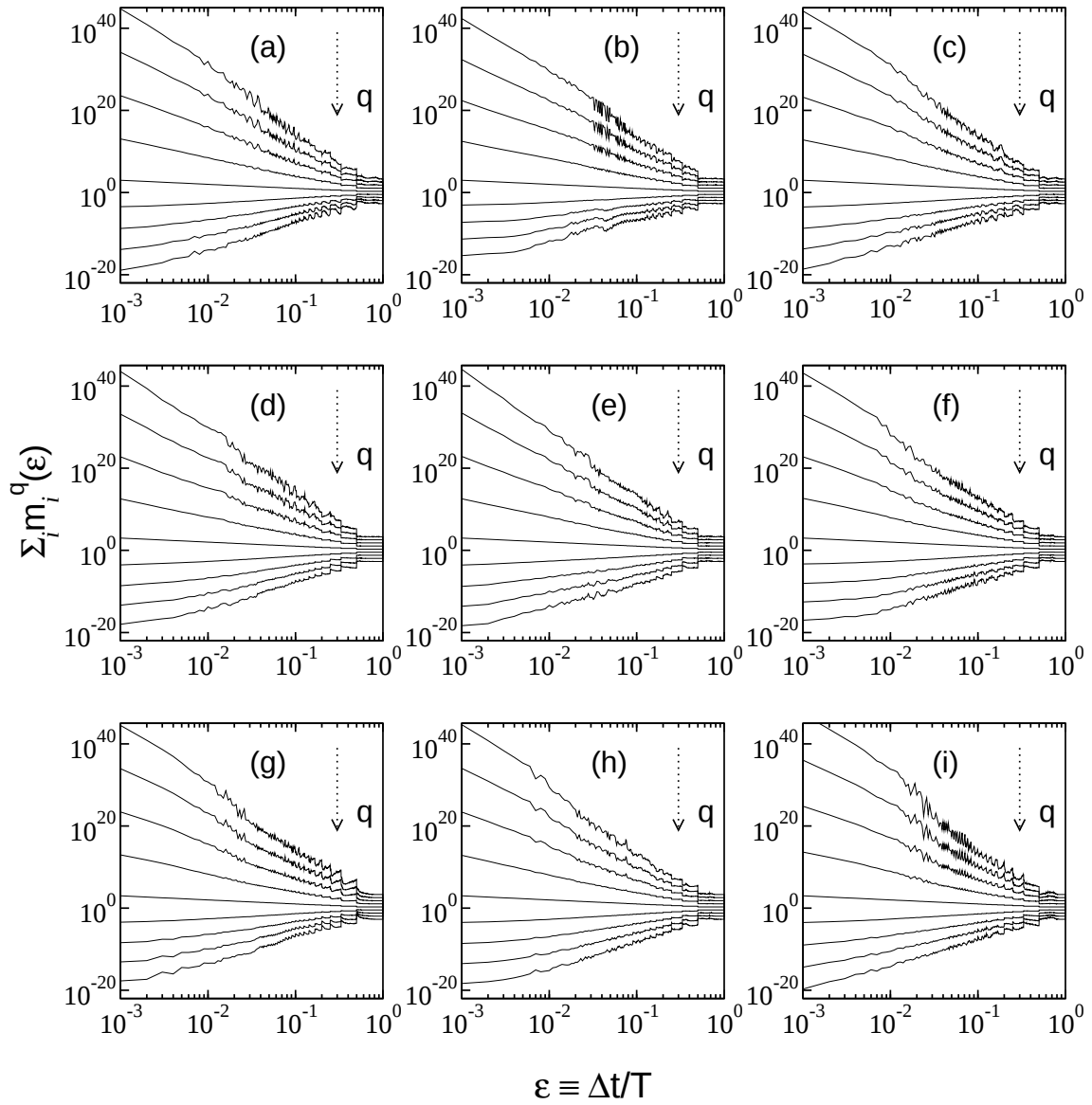


Figura 4.1: Momentos generalizados $M_q(\epsilon)$ para as nove séries de deslizamento mostradas na Figura 1.2, no regime R1. Em cada gráfico, as curvas $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ correspondem a valores de q variando de -10 a 10 , em intervalos de $\Delta q = 2.5$.

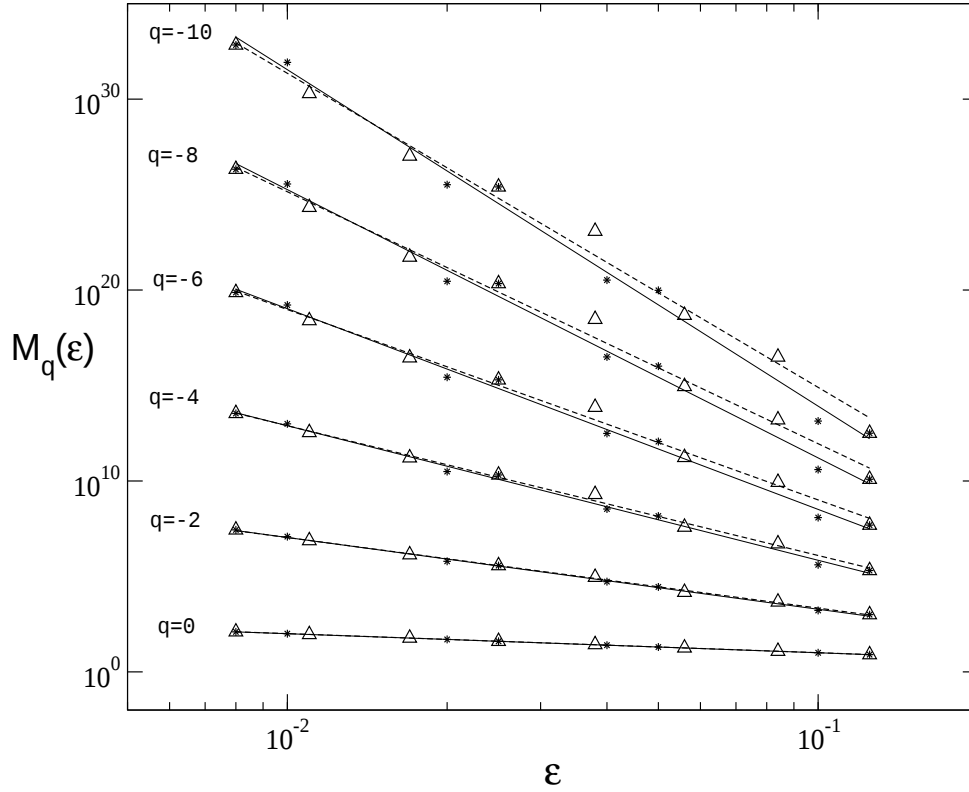


Figura 4.2: $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ para diferentes valores de q entre -10 e 0 , no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$, correspondente à série (a) da Figura 1.2 (cilindro de alumínio, $\theta = 35^\circ$). Cada símbolo '*' (caixas tipo A) se refere a um valor de ϵ tal que $1/\epsilon$ é um número inteiro, enquanto que os símbolos 'Δ' (caixas tipo B) representam 8 valores de ϵ distribuídos de maneira aproximadamente uniforme no eixo $\log(\epsilon)$. As inclinações das curvas definidas por '*' e 'Δ' estão representadas pelas linhas contínuas e tracejadas, respectivamente.

Cada linha tracejada na Figura 4.2 representa a inclinação da curva $M_q(\epsilon)$ definida pelos triângulos vazios, enquanto que as linhas cheias representam as inclinações correspondentes aos símbolos '*'. Como podemos ver na figura, à medida em que o valor absoluto de q cresce, aumenta também a amplitude das oscilações que acompanham o ajuste lei de potência, tanto para os símbolos '*', quanto para os símbolos 'Δ'. Adicionalmente, as diferenças entre as inclinações das linhas aumentam à medida em que $|q|$ cresce. Para verificar o efeito dessas diferenças na estimativa de D_q , usaremos o seguinte procedimento: primeiro, calculamos o coeficiente angular da curva definida pelos valores de ϵ tais que $1/\epsilon$ é um número inteiro. Chamaremos essas caixas de ϵ *tipo A*. Em seguida, calculamos D_q usando 8 valores de ϵ distribuídos de maneira aproximadamente uniforme ao longo do eixo $\log(\epsilon)$, dentro desse intervalo. A essas caixas, chamaremos ϵ *tipo B*.

A inclinação da curva definida pelos símbolos ‘*’ (tipo A) na Figura 4.2, em $q = 0$, é igual a $-D_0 = -1$, como esperado, independente da região $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$. No entanto, devido às flutuações em T_ϵ para os símbolos vazados (tipo B), essa inclinação pode diferir de $-D_0$ em até $\Delta D_0 = 0.15$, dependendo do intervalo em ϵ considerado. Observe que essas pequenas flutuações são significativamente amplificadas à medida em que o expoente q da equação (4.5) cresce em valor absoluto, o que explica as divergências cada vez maiores entre as inclinações das linhas cheias e tracejadas na Figura 4.2.

Nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b) mostramos como exemplo o espectro D_q da série (g) (cilindro de PVC, $\theta = 29^\circ$), obtido a partir das inclinações das curvas $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ em diferentes intervalos $\epsilon_{\min}$, $\epsilon_{\max}$. A primeira figura se refere aos valores de ϵ tipo A, enquanto a segunda figura está associada a oito valores de ϵ tipo B para cada intervalo. Escolhemos as regiões $0.001 \leq \epsilon \leq 0.025$ (triângulos cheios), $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$ (círculos) e $0.025 \leq \epsilon \leq 0.500$ (símbolos ‘×’). Para a curva dos triângulos, a qual corresponde à situação mais próxima do limite $\epsilon \rightarrow 0$ na equação (4.4), podemos ver que D_q não segue um decaimento monotônico com q ; isto é, diferentes valores de $q < 0$ podem estar associados a um mesmo valor de D_q para esse caso. Observamos um comportamento semelhante nas séries (a), (b), (c), (d), (f), (h) e (i). Por outro lado, a Figura 4.3(b) mostra que as flutuações em $M_q(\epsilon)$ no intervalo $0.025 \leq \epsilon \leq 0.500$ estão associadas a uma incerteza de $\Delta D_0 \cong 0.12$; em outras palavras, D_0 estimado com os símbolos ‘×’ é aproximadamente 0.88, um valor bem diferente da dimensão do suporte $D_0 = d = 1.0$. Um desvio ΔD_0 muito menor é observado quando as caixas temporais estão no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$, para o qual $\Delta D_0 \cong 0.0025 \Rightarrow D_0 \cong 0.9975$, uma estimativa bem mais próxima de $D_0 = 1$. Resultados não muito diferentes são obtidos com $\epsilon_{\min}$ variando entre 0.005 e 0.010 e $\epsilon_{\max}$ entre 0.060 e 0.200, dependendo da série.

Na Figura 4.4, mostramos para as nove séries de deslizamento da Figura 1.2, as curvas $D_q \times q$ obtidas no intervalo *intermediário* $\epsilon_{\min} = 0.008$ e $\epsilon_{\max} = 0.125$. Cada círculo vazio corresponde à média das inclinações de $M_q(\epsilon)$ para as caixas tipo A e tipo B (linhas cheias e tracejadas na Figura 4.2), enquanto as barras de erro são definidas como a diferença entre essas inclinações. Como pode ser visto na figura, há uma significativa diferença entre as dimensões generalizadas D_q . Conseqüentemente, a estrutura das séries de deslizamento é descrita por um conjunto infinito de expoentes.

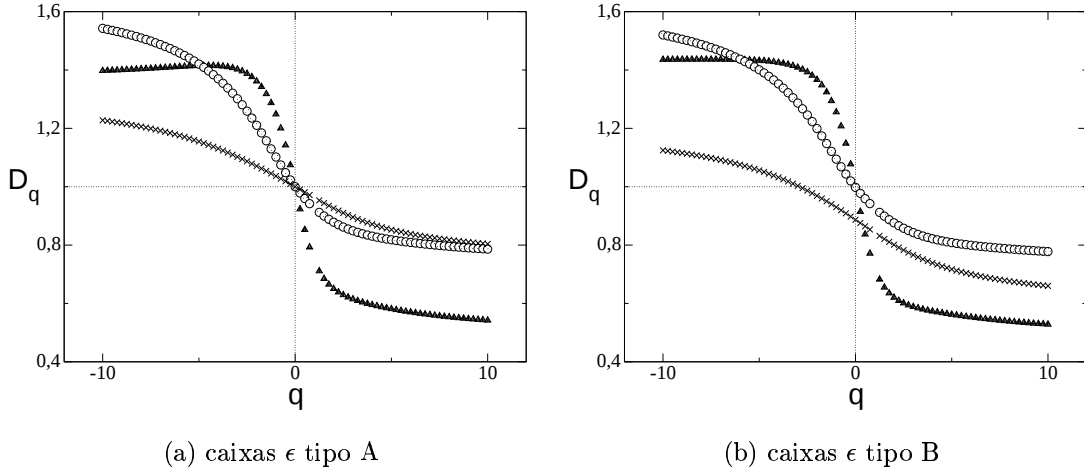


Figura 4.3: Espectro D_q da série (g) (cilindro de PVC, $\theta = 29^\circ$), calculado a partir das inclinações de $M_q(\epsilon)$ em diferentes intervalos: $0.001 \leq \epsilon \leq 0.025$ (triângulos), $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$ (círculos) e $0.025 \leq \epsilon \leq 0.500$ (símbolos ‘×’).

Para testar os resultados obtidos nesta seção para as séries de deslizamento, calculamos o espectro D_q para as nove séries sintéticas mencionadas na Seção 3.1, cada uma das quais com 1000 ‘deslizamentos’ variando aleatoriamente entre $\lambda_{\min} = 1.0$ mm e $\lambda_{\max} = 250.0$ mm. Observe que, no limite $T \rightarrow \infty$, esses eventos têm uma distribuição de *probabilidade* uniforme ao longo do suporte. As linhas cheias na Figura 4.5(a) mostram as curvas $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ correspondentes a uma realização típica dessas séries, para os mesmos valores de q estudados na Figura 4.1 para as séries de deslizamento. Como comparação, mostramos em linhas tracejadas as mesmas quantidades para uma série uniforme de 1000 deslizamentos de magnitude $\lambda(t) = 100$ mm. Esta série tem o espectro trivial $D_q = 1$, como podemos verificar a partir das equações (4.5) e (4.6).

Podemos observar nas Figuras 4.5(b) e 4.5(c) que a curva correspondente ao limite $\epsilon \rightarrow 0$ está associada a um espectro multifractal. Ou seja, caixas muito pequenas “enxergam” as flutuações descontínuas de $\lambda(t)$ nessas séries. À medida em que o intervalo de caixas assume valores maiores, no entanto, o comportamento médio de $m_i(\epsilon)$ se aproxima de uma distribuição uniforme. Como consequência, o espectro dessas séries se aproxima da linha $D_q = 1$ para valores de ϵ crescentes. Por outro lado, como discutimos acima para as séries de deslizamento, a Figura 4.5(c) mostra que o efeito de tamanho finito para caixas muito grandes está associado a um desvio considerável na estimativa do valor de d , calculado a partir da inclinação de $M_0(q)$. Assim, calculamos o espectro D_q na região intermediária do gráfico dos

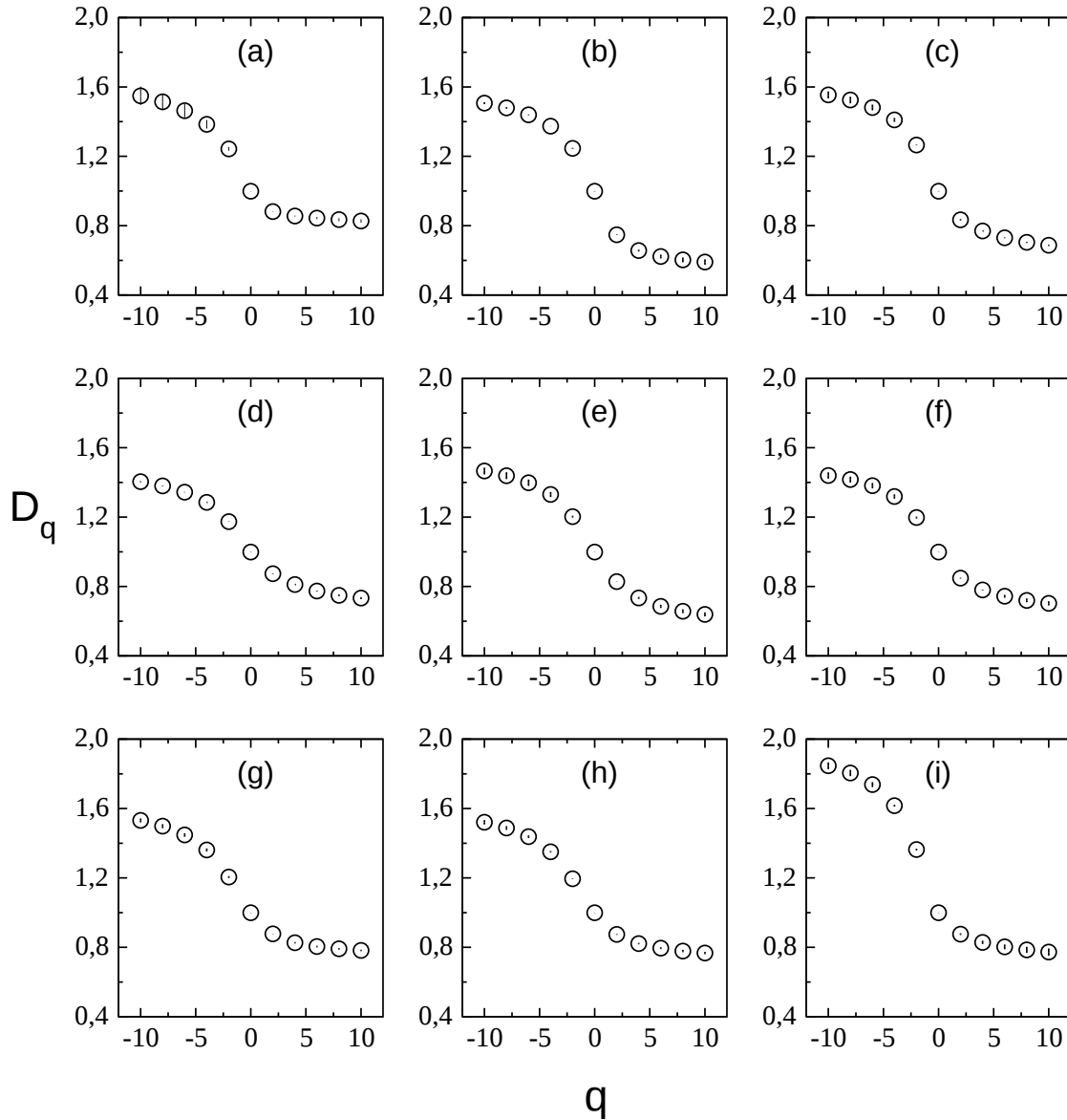


Figura 4.4: Dimensões generalizadas D_q para as nove séries de deslizamento da Figura 1.2, no regime R1. As barras de erro correspondem à diferença entre as inclinações das linhas cheia (para as caixas tipo A) e tracejada (para as caixas tipo B), definidas de acordo com a Figura 4.2. As curvas mostradas nos gráficos acima foram obtidas com ϵ no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$.

momentos, para todas as séries temporais estudadas nesta Tese.

Na Figura 4.6, mostramos as curvas $D_q \times q$ obtidas no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$, para as nove séries sintéticas (linhas tracejadas indicadas pelas setas), juntamente com o espectro das séries de deslizamento (linhas contínuas) obtidas no mesmo intervalo. As Figuras 4.6(a) e 4.6(b) correspondem às caixas ϵ dos tipos A e B, respectivamente. Como podemos ver nas figuras, o conjunto das curvas D_q das séries sintéticas *não* possui a forma sigmóide reversa característica do espectro das séries de deslizamento. O comportamento médio das curvas tracejadas é o de uma linha reta, a qual forma uma pequena inclinação com a linha horizontal $D_q = 1$. Quanto maior o comprimento T das séries sintéticas, mais baixa é a inclinação da linha, e mais próximos de $D_0 = 1$ são os valores de D_q . Para ilustrar esse fato, mostramos com uma linha pontilhada nas Figuras 4.5(b) e 4.5(c), o espectro D_q para uma série sintética de comprimento $T = 10^5$, obtido com ϵ entre 0.8% e 12.5% do comprimento da série. Como podemos ver, as dimensões D_q são bem mais próximas de $D_0 = 1$, em comparação com o espectro das séries sintéticas de tamanho $T = 10^3$.

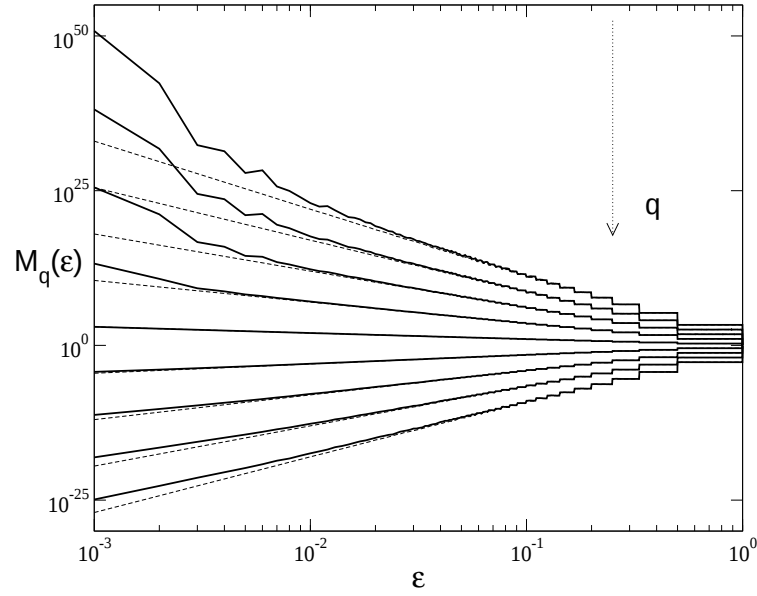
De particular interesse na Figura 4.6 é o desvio acentuado da curva representada pelos símbolos ‘ $\times$ ’ em relação às outras curvas D_q das séries de deslizamento, para $q < 0$. A série correspondente a essa curva é a série (i) da Figura 1.2 (cilindro de PVC, $\theta = 30^\circ$). Podemos observar que esta série, a qual corresponde à inclinação mais próxima de θ_c , tem um aspecto diferente das outras seqüências no regime R1. De fato, o deslizamento médio $\langle \lambda(t) \rangle$ para a série (i) é 31.59 mm, enquanto que para as outras séries, esta quantidade variou de 10.12 mm a 18.46 mm. Essa diferença, no entanto, não foi suficiente para distinguir a série (i) das outras seqüências, pelo método da contagem de caixas apresentado na Seção 3.1, segundo o qual as séries da Figura 1.2 têm todas o mesmo comportamento $D(\lambda) \sim \ln(1/\lambda)$. Por outro lado, a análise multifractal desta seção indicou valores de D_q bem maiores para a série (i), em relação às outras séries, associados a $q < 0$, embora nenhuma diferença qualitativa tenha sido apontada.

À medida em que q varia na equação (4.5), diferentes subconjuntos, os quais estão associados a índices α' diferentes, se tornam dominantes. De (4.5), (4.3) e (4.2), obtemos:

$$M_q(\epsilon) = \int d\alpha' \rho(\alpha') \epsilon^{-f(\alpha')} \epsilon^{q\alpha'}. \quad (4.7)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$, a integral acima é dominada pelo termo com o menor valor de $\tau' \equiv q\alpha' - f(\alpha')$. Um mínimo para τ' ocorrerá quando

$$\left. \frac{d}{d\alpha'} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha'} f(\alpha') \right|_{\alpha'=\alpha(q)} = q. \quad (4.8)$$



(a)

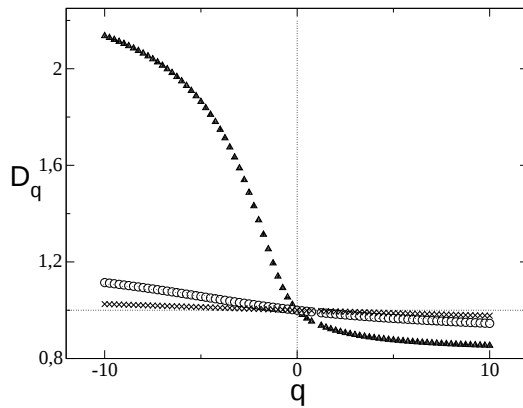
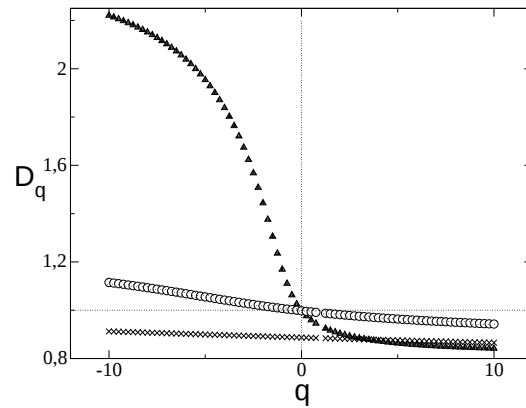
(b) caixas ϵ tipo A(c) caixas ϵ tipo B

Figura 4.5: As linhas cheias na Figura (a) mostram $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ para uma realização típica das séries sintéticas analisadas nesta Tese. As mesmas quantidades estão mostradas para uma série uniforme ($\lambda(t) = 100\text{mm}$), representada pelas linhas tracejadas. Para a série aleatória, mostramos nas Figuras (b) e (c) o espectro D_q correspondente, obtido em diferentes intervalos $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$ (veja legenda da Figura 4.3).

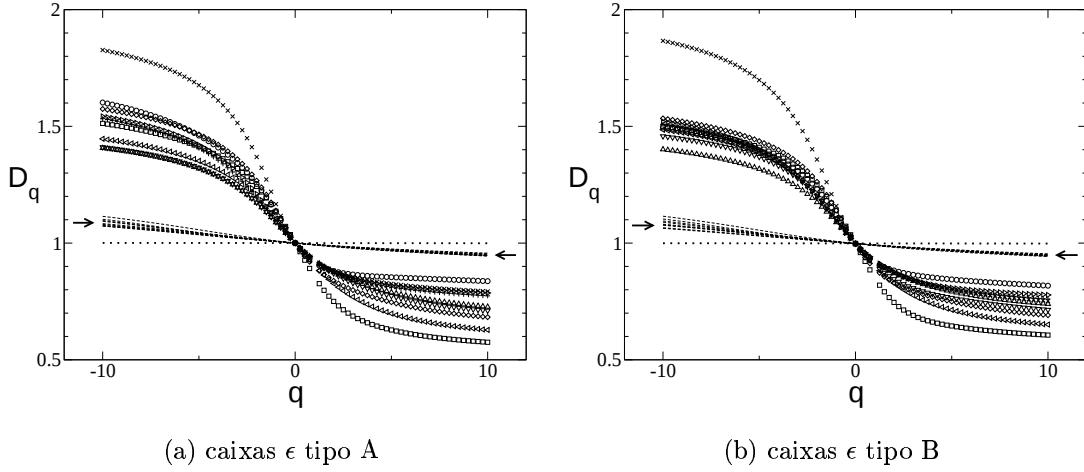


Figura 4.6: As curvas associadas aos símbolos correspondem ao espectro D_q das séries de deslizamento, enquanto as curvas tracejadas, indicadas pelas setas, representam D_q para as nove séries sintéticas de tamanho $T = 10^3$, mencionadas na Seção 3.1. Para a Figura (a), usamos caixas de comprimentos Δt divisores de $T = 1000$, no intervalo $0.8\% \leq \Delta t/T \leq 12.5\%$, enquanto que na Figura (b), tomamos 8 valores de $\epsilon = \Delta t/T$ uniformemente distribuídos nesse intervalo. Observe que as dimensões D_q para uma série aleatória de tamanho $T = 10^5$ (linha pontilhada) são bem mais próximas de $d = 1$, em relação às séries sintéticas menores.

$$\left. \frac{d^2}{d(\alpha')^2} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} > 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2}{d(\alpha')^2} f(\alpha') \right|_{\alpha'=\alpha(q)} < 0. \quad (4.9)$$

Por outro lado, da equação (4.4), temos

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] = \frac{1}{q-1} \tau(q). \quad (4.10)$$

Derivando a equação (4.10) com relação a q , e notando que

$$\frac{df(\alpha(q))}{dq} = \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq} = q \frac{d\alpha}{dq},$$

obtemos:

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [D_q(q-1)]. \quad (4.11)$$

Assim, conhecendo o espectro D_q , as funções $\alpha(q)$ e $f(q)$ podem ser encontradas com as equações (4.11) e (4.10). Alternativamente, conhecendo $f(\alpha)$ e o espectro de valores de α , D_q pode ser encontrado também com (4.10). No entanto, para encontrar $\alpha(q)$ na primeira situação, é necessário antes ajustar a curva D_q obtida de

dados experimentais a uma função suave, sobre a qual é aplicada a derivada (4.11). Um método para calcular a função $f(\alpha)$ diretamente, o qual pode ser prontamente aplicado para a análise de dados de experimentos reais, foi desenvolvido por Chhabra e Jensen [63]. Vamos usá-lo para estudar as séries de deslizamento.

4.2 Método de Chhabra e Jensen para calcular a função $f(\alpha)$

O método de Chhabra e Jensen consiste em calcular as funções $f(q)$ e $\alpha(q)$ a partir da família de medidas normalizadas $\mu(q)$, definida abaixo:

$$\mu_i(q, \epsilon) = \frac{[m_i(\epsilon)]^q}{\sum_j [m_j(\epsilon)]^q}. \quad (4.12)$$

Observe que para $q > 1$, $\mu(q)$ amplifica as regiões mais singulares da medida $m(\epsilon)$, enquanto que para $q < 1$, $\mu(q)$ acentua as regiões menos singulares. Por outro lado, quando $q = 1$, temos $\mu_i(1, \epsilon) = m_i(\epsilon)$, a medida original.

Chhabra e Jensen usaram um teorema de Billingsley, o qual relaciona a entropia de Shannon de uma medida singular com a dimensão de Hausdorff [63] do suporte onde essa medida está distribuída. Assim, a dimensão de Hausdorff, $f(q)$, da medida normalizada $\mu(q)$ pode ser escrita como

$$f(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log[\mu_i(q, \epsilon)]}{\log \epsilon}, \quad (4.13)$$

Por outro lado, a função $\alpha(q)$ é calculada a partir do valor médio do expoente $\alpha_i = \log(m_i)/\log \epsilon$ com respeito a $\mu(q)$:

$$\alpha(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log[m_i(\epsilon)]}{\log \epsilon}. \quad (4.14)$$

As equações (4.13) e (4.14) relacionam uma dimensão de Hausdorff f com um expoente de singularidade médio α , como funções implícitas do parâmetro q . Podemos mostrar² que essas equações estão conectadas com a definição de D_q em (4.4), através da transformação de Legendre (4.10), isto é, $f = q\alpha - \tau$ e $\alpha = d\tau/dq$.

²Veja apêndice B.3

Para obter $f(q)$ e $\alpha(q)$, calculamos as inclinações das curvas $F_q(\epsilon) \times \log(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon) \times \log(\epsilon)$, onde

$$F_q(\epsilon) \equiv \sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log[\mu_i(q, \epsilon)]; \quad (4.15)$$

$$A_q(\epsilon) \equiv \sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log[m_i(\epsilon)] \quad (4.16)$$

são os numeradores que aparecem no lado direito das equações (4.13) e (4.14). Nas Figuras 4.7 e 4.8, mostramos $F_q(\epsilon) \times \epsilon$ e $A_q(\epsilon) \times \epsilon$, respectivamente, obtidos com o programa A.7, para as nove séries de deslizamento da Figura 1.2. Cada gráfico contém quatro curvas, correspondendo a $q = 0, 1, 2$ e 3 . Como podemos ver nessas figuras, as funções $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$ tendem a crescer logaritmicamente em um certo intervalo de variação em ϵ . Esse crescimento, no entanto, é acompanhado de oscilações cada vez maiores à medida em que cresce o valor de q . Assim como fizemos na Seção 4.1 para as dimensões generalizadas, encontramos as funções $f(q)$ e $\alpha(q)$ nesta seção a partir das inclinações das curvas $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$, estudando caixas dos tipos A e B no intervalo intermediário $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$. Vimos que o espectro D_q nesse intervalo revelou dimensões generalizadas diferentes para diversos valores de q entre -10 e 10 , dentro das incertezas associadas às diferenças entre as inclinações para os dois tipos de caixa. Observamos que as curvas $D_q \times q$ obtidas com a transformação de Legendre acima, a partir dos valores de $f(q)$ e $\alpha(q)$, são exatamente as mesmas da Figura 4.6, desde que sejam considerados para $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$ os mesmos valores de $\epsilon_{\min}$ e $\epsilon_{\max}$ utilizados na análise dos momentos $M_q(\epsilon)$.

No gráfico principal da Figura 4.9, mostramos as funções $f(q)$ e $\alpha(q)$ para a série (c) (prisma de latão, $\theta = 18^\circ$), obtidas no intervalo intermediário $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$, usando caixas dos tipos A e B. Na figura menor do lado superior direito, mostramos a função $f(\alpha)$ obtida a partir do gráfico $f(q) \times \alpha(q)$, isto é, para cada valor de q , colocamos no eixo horizontal o valor de $\alpha(q)$ correspondente, e no eixo vertical o valor de $f(q)$. Podemos observar que a função $f(\alpha)$ tem valor máximo $f_{\max} = 1$. Este valor corresponde a $q = 0$. O lado direito da curva $f(\alpha)$ está associado a valores negativos de q , enquanto o lado esquerdo representa valores de q positivos. O ponto no qual a reta $f = \alpha$ (linha tracejada) tangencia a curva $f(\alpha)$ corresponde a $q = 1$. Na Figura 4.10 mostramos as curvas $f(\alpha)$ obtidas para as nove séries de deslizamento no regime R1. Para todas as curvas, variamos q de -20 a 20 , em passos $\Delta q = 0.50$. Os círculos vazios representam a média das inclinações de $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$ associadas às caixas do tipo A e do tipo B, enquanto as barras de erro, mostradas para alguns valores de $f(\alpha)$, representam as diferenças entre essas inclinações.

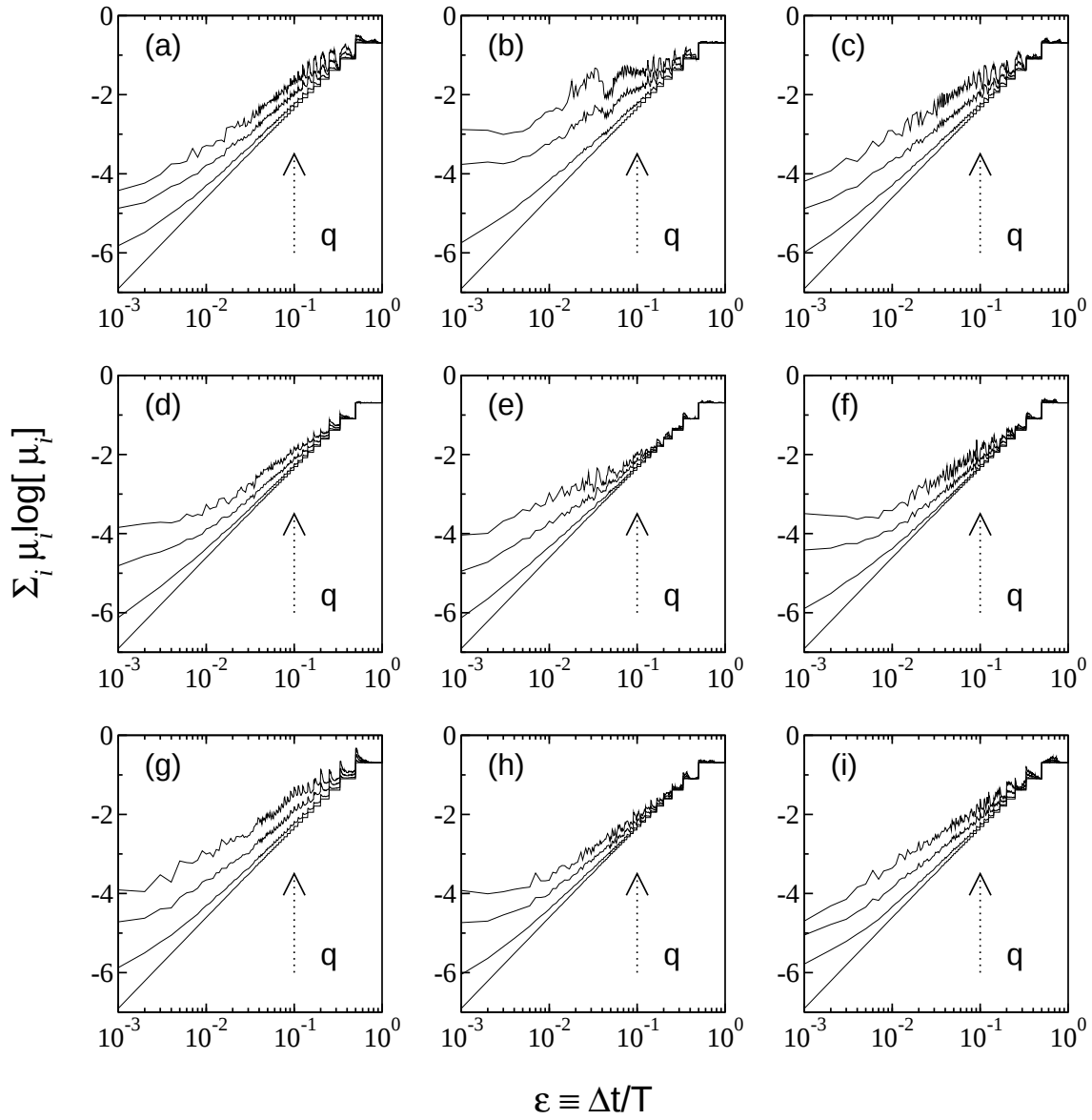


Figura 4.7: Curvas $F_q(\epsilon)$ para as nove séries de deslizamento da Figura 1.2. Os valores de q correspondentes são $q = 0, 1, 2$ e 3 .

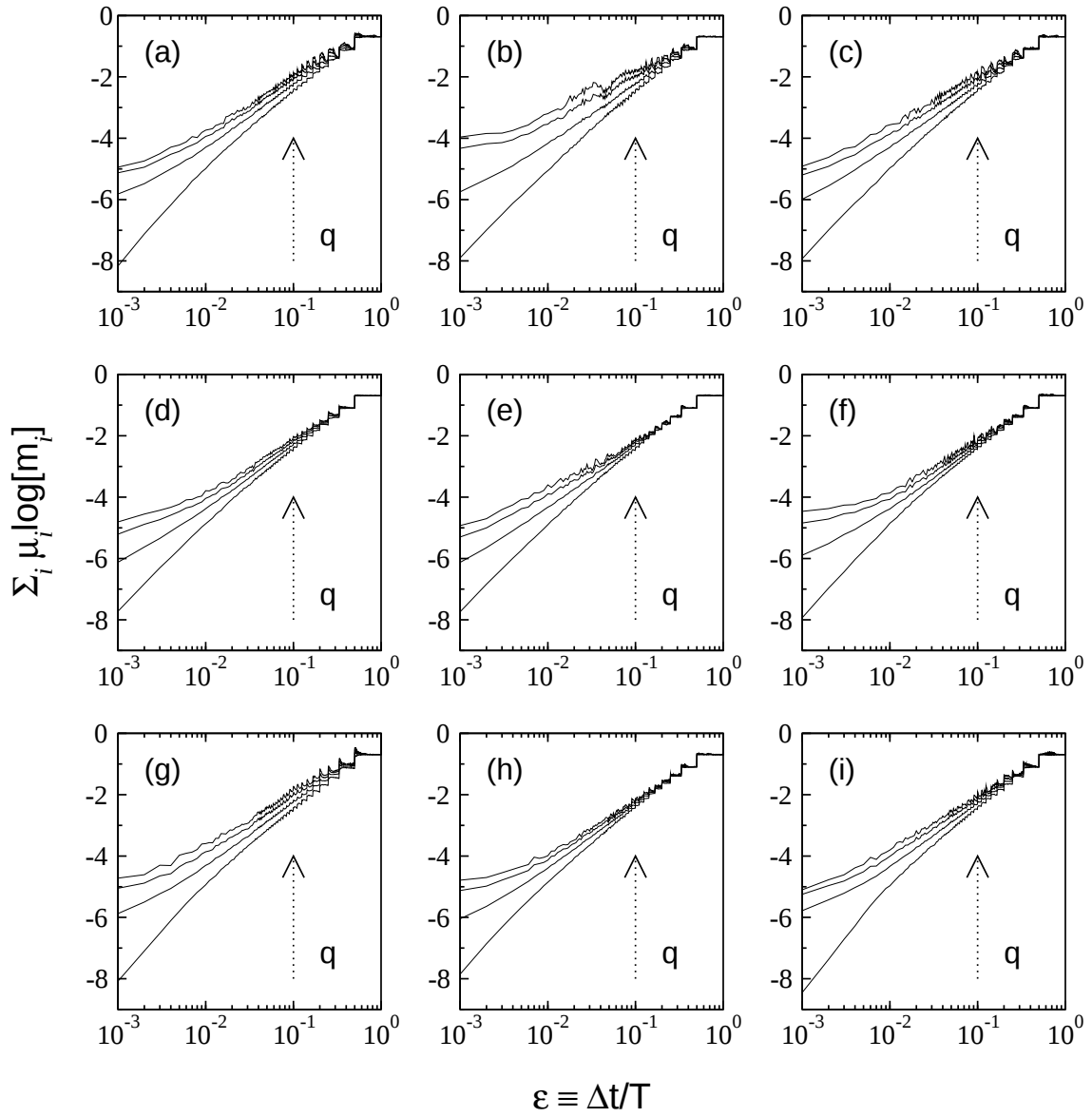


Figura 4.8: Curvas $A_q(\epsilon)$ para as nove séries de deslizamento da Figura 1.2. Os valores de q correspondentes são $q = 0, 1, 2$ e 3 .

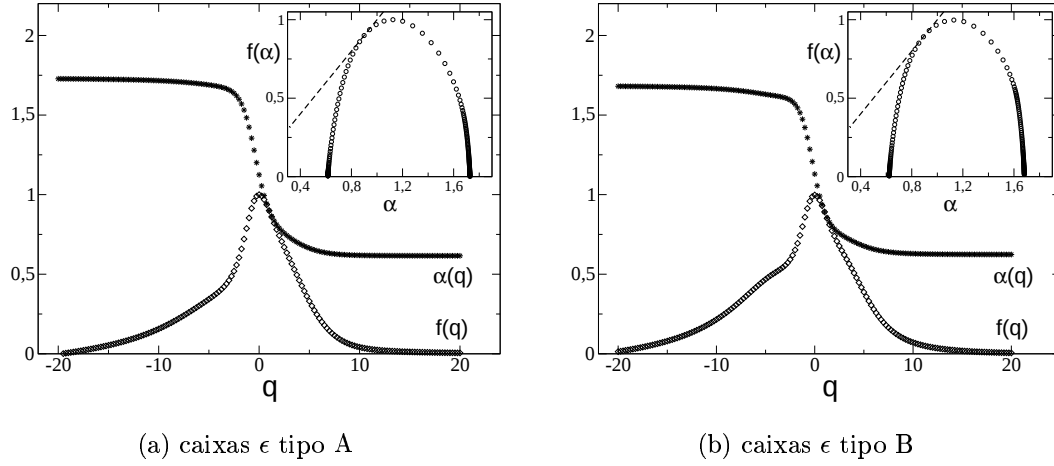


Figura 4.9: O gráfico principal de cada figura mostra $\alpha(q)$ e $f(q)$ para a série (c) (prisma de latão, $\theta = 18^\circ$). Essas curvas foram calculadas a partir das inclinações do gráfico (c) das Figuras 4.7 e 4.8 no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$. No lado superior direito das Figuras (a) e (b) acima, mostramos a função $f(\alpha)$ correspondente para cada caso. Observe que essa curva é tangente à reta $f(\alpha) = \alpha$ (linha tracejada).

Como comparação, mostramos na Figura 4.11 as funções $f(\alpha)$ para as nove séries sintéticas de tamanho $T = 1000$ (linhas tracejadas), juntamente com o espectro $f(\alpha)$ para as nove séries de deslizamento (linhas contínuas). Observe que, para as séries de deslizamento, o máximo de $f(\alpha)$ (indicado pelo círculo cheio) corresponde a $\alpha^* \simeq 1.11$. Este é o valor do expoente α que apresenta a maior dimensão de Hausdorff $f(\alpha)$ (a dimensão do suporte), sendo portanto o expoente dominante na equação (4.2). Por outro lado, as séries aleatórias têm $\alpha^* \simeq 1.00$, de forma que a massa escala trivialmente com o tamanho da caixa ϵ , ao longo do suporte. À medida em que aumentamos o tamanho T da série aleatória, o espectro $f(\alpha)$ associado se aproxima do ponto (1,1) (espectro da série uniforme), como podemos ver na Figura 4.11 para uma série sintética de tamanho $T = 10^5$, representada pela pequena mancha dentro do quadrado.

Neste capítulo, verificamos que as séries de deslizamento apresentam um espectro multifractal associado a leis de escala não-triviais com infinitos expoentes D_q e $f(\alpha)$ para a distribuição temporal da probabilidade de deslizamento. Uma importante restrição que fizemos nos dois tipos de análise multifractal diz respeito ao tamanho das caixas temporais ϵ estudadas nas equações (4.4), (4.13) e (4.14). Nas Figuras 4.1, 4.7 e 4.8, estudamos as inclinações das curvas $M_q(\epsilon)$, $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$ no limite em que $\epsilon \gg 0$, com $\epsilon \ll 1$, isto é, um intervalo *intermediário* de tamanhos da caixa ϵ , diferente do limite $\epsilon \rightarrow 0$ que aparece nas definições para D_q e $f(\alpha)$. Observe

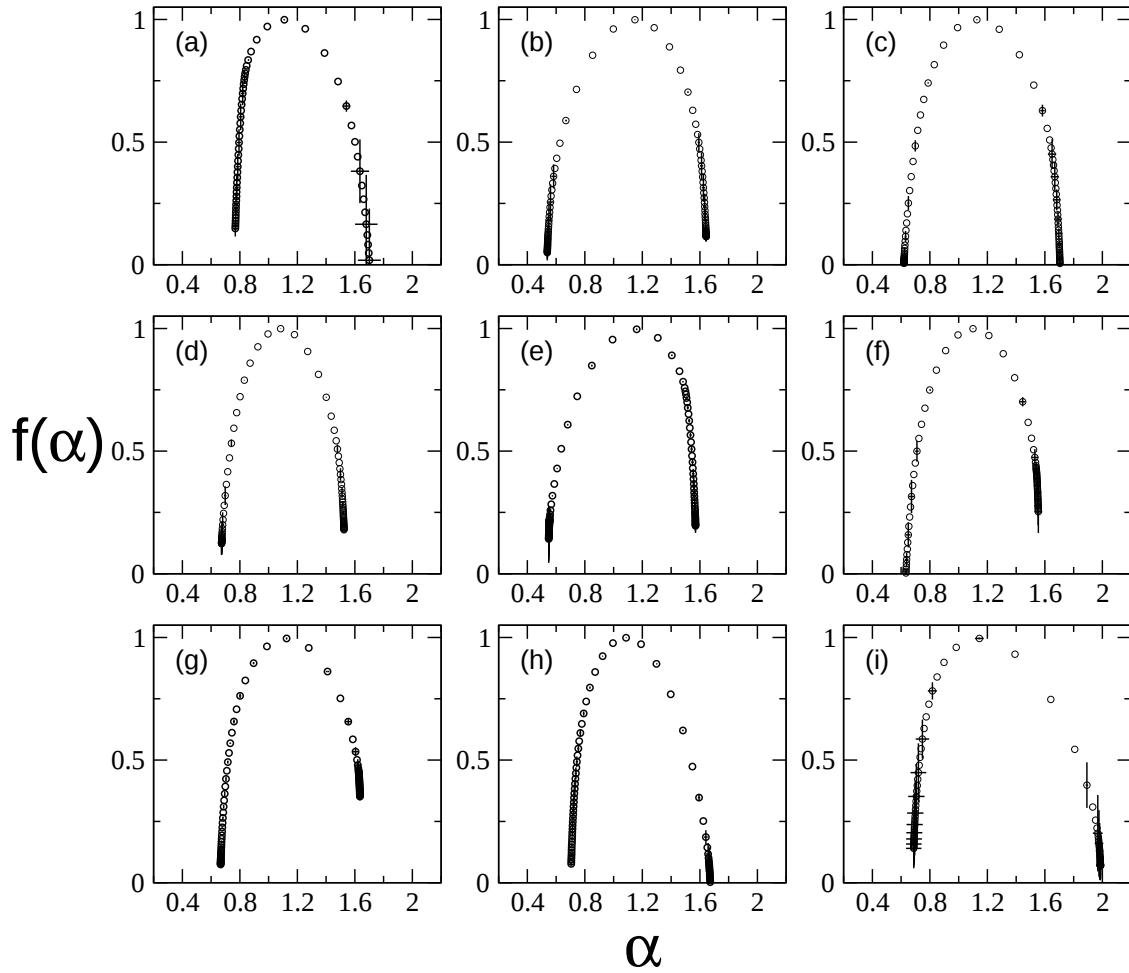


Figura 4.10: Curvas $f(\alpha)$ para as nove séries de deslizamento no regime R1, calculadas a partir das inclinações das curvas $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$ no intervalo $0.008 \leq \epsilon \leq 0.125$. As barras de erro estão associadas às flutuações dessas curvas para diferentes valores de q , como discutido no texto.

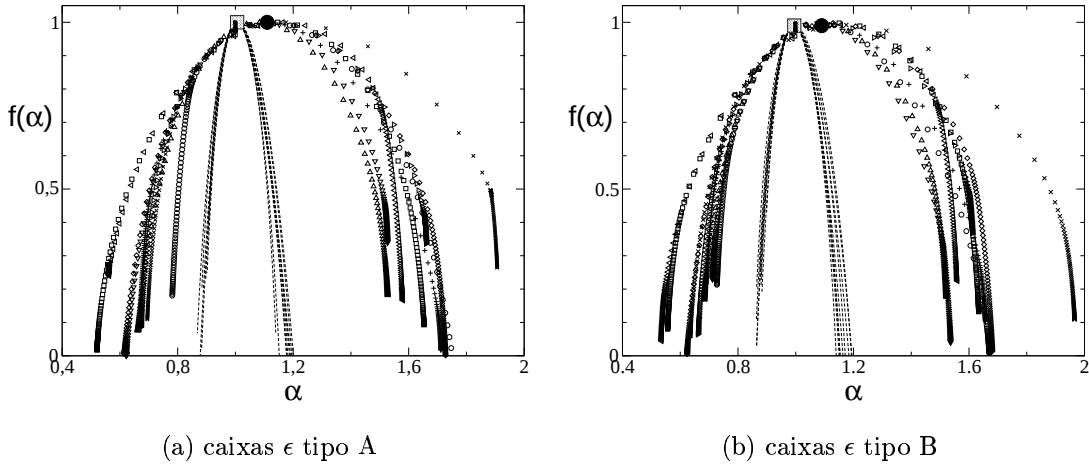
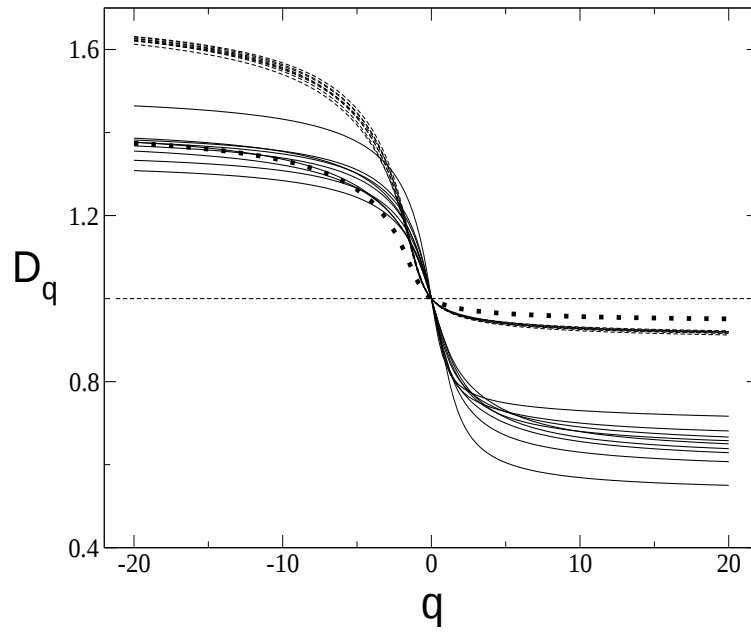
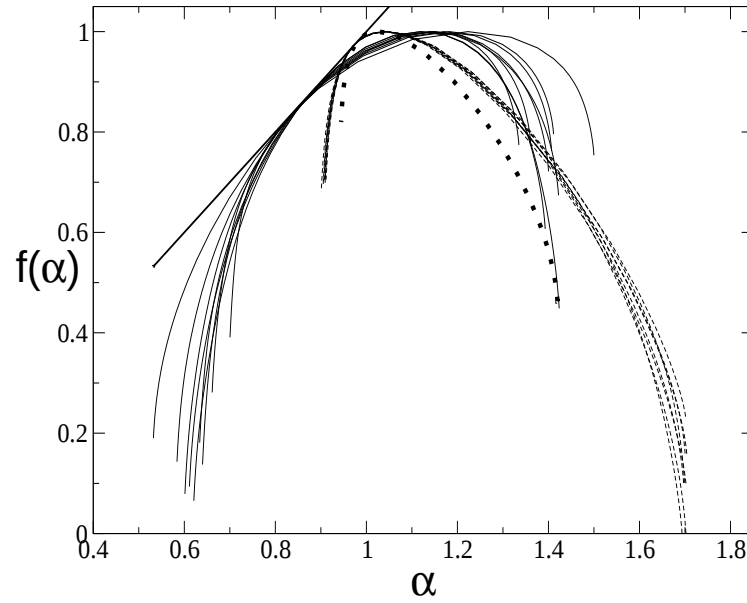


Figura 4.11: As curvas definidas pelos pequenos símbolos correspondem ao espectro $f(\alpha)$ das séries de deslizamento, enquanto as linhas tracejadas representam $f(\alpha)$ para as nove séries sintéticas de tamanho $T = 10^3$, mencionadas na Seção 3.1. O círculo cheio indica a coordenada $(\alpha^*, 1.0)$, onde $\alpha^* \simeq 1.11$ é o valor de α correspondente ao máximo da função $f(\alpha)$ para as séries de deslizamento. Para as séries sintéticas, $\alpha^* \simeq 1.00$ (indicado pelo quadrado). A mancha escura dentro do quadrado representa $f(\alpha)$ para uma série sintética de tamanho $T = 10^5$.

que o menor valor de ϵ que podemos usar para as séries da Figura 1.2 é $\epsilon \equiv 1/T = 1/1000 = 0.001$. Uma maneira de calcular D_q e $f(\alpha)$ diretamente, sem usar as figuras mencionadas acima, seria substituir esse valor de ϵ nas definições matemáticas (4.4), (4.13) e (4.14). Os resultados para as séries de deslizamento estão mostrados em linhas contínuas nas Figuras 4.12(a) e 4.12(b). Como comparação, utilizamos esse método para as nove séries aleatórias com $T = 1000$ (linhas tracejadas) e para uma série randômica do mesmo tipo, com $T = 100000$ (linha pontilhada). Podemos ver na figura, que as curvas D_q e $f(\alpha)$ para as séries aleatórias têm um aspecto muito diferente do esperado para uma distribuição de probabilidade uniforme, isto é, da linha $D_q = 1$. Essa diferença diminui, no entanto, com o tamanho da série. Em particular, podemos ver que a região $q < 0$ no gráfico D_q corresponde ao maior desvio do espectro das séries aleatórias, em relação a $D_q = 1$. Observe que para valores de q negativos, as caixas ϵ onde $m_i(\epsilon)$ tem valores muito pequenos, contribuem com parcelas extremamente grandes para a soma na equação (4.5). Os resultados das Figuras 4.12(a) e 4.12(b) mostram que, calculando-se D_q e $f(\alpha)$ diretamente das equações (4.4), (4.13) e (4.14), um espectro não-trivial de dimensões pode ser obtido mesmo para uma medida distribuída com uma probabilidade uniforme (isto



(a)



(b)

Figura 4.12: Curvas $D_q \times q$ (a) e $f(\alpha)$ (b) encontradas diretamente das equações (4.4), (4.13) e (4.14), usando $\epsilon = 1/T$. As linhas cheias e tracejadas correspondem, respectivamente, às séries de deslizamento e às séries aleatórias, de tamanho $T = 10^3$. A linha pontilhada diz respeito a uma série randômica de tamanho $T = 10^5$. Na Figura (a), a linha tracejada indica o espectro D_q da série uniforme ($D_q = 1$), enquanto na Figura (b) indicamos com uma linha reta a curva $f(\alpha) = \alpha$.

é, pelo menos aproximadamente³) ao longo do suporte. Diante desse cenário, a análise multifractal sobre dados experimentais, os quais em geral estão associados a uma amostragem finita, é feita usando um intervalo *intermediário* para ϵ , através, por exemplo, do gráfico dos momentos $M_q(\epsilon)$ e/ou das funções $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$, como estudado nas Seções 4.1 e 4.2 [62, 63, 64].

³Os resultados para as séries aleatórias não devem em geral ser considerados para 1 realização em particular, e sim para uma média sobre várias realizações (nesta Tese, consideramos 9 “amostras”, para comparar com as 9 séries de deslizamento da Figura 1.2) [47].

Capítulo 5

Conclusões

O objetivo deste trabalho foi estudar diversos aspectos estatísticos relacionados à distribuição temporal de deslizamentos de blocos sobre superfícies rugosas inclinadas, quando estas são submetidas a pequenas perturbações controladas, de acordo com a Figura 1.1. Estudos anteriores apontaram a existência de leis de escala não-triviais para a distribuição espacial dos eventos, a qual seguia a relação $n(\lambda) \sim \lambda^{-(1+b)}$, onde $n(\lambda)$ é o número de deslizamentos com magnitude λ , e $b = 0.50 \pm 0.05$. Esta lei de escala é remanescente da lei de Gutenberg & Richter para os terremotos, como discutido no Capítulo 1, sendo o expoente b , também, não muito diferente do encontrado no modelo de autômato celular para pilhas de areia, de Bak, Tang e Wiesenfeld.

No Capítulo 2, apresentamos uma análise sistemática da atividade de deslizamento próximo a um grande evento, no intuito de verificar efeitos de correlação temporal em uma mesoescala. Em particular, encontramos que a taxa com a qual os eventos menores aparecem depois de um grande deslizamento segue a lei de potência $n(t) \sim t^{-p}$, remanescente da lei de Omori para seqüências de “*aftershocks*” de terremotos. No entanto, o expoente p encontrado para os deslizamentos tem um valor *anômalo* $p \neq 1.0$, dependendo da série. Apesar do pequeno número de seqüências analisadas (três, ao todo, seguindo os requisitos estabelecidos na Seção 2.1), podemos observar na Tabela 2.2 que o valor de p , calculado com o *xmgrace*, aumenta com o tamanho do cilindro e com a inclinação da calha, não dependendo no entanto, da magnitude relativa dos “*afterslidings*”, nem do número de eventos na seqüência. Para estudar as oscilações em torno da lei de potência das Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, procuramos ajustar as curvas $N(t)$ à equação (2.3), a qual incorpora à lei de potência $N(t) = kt^{1-p}$, correções log-periódicas do tipo $kbt^{1-p} \cos[\omega \ln(t) + \varphi]$. Para encontrar os parâmetros k, p, b, ω e φ , utilizamos o *xmgrace*, o qual forneceu resultados para p e k não muito diferentes dos apresentados na Tabela 2.2. A análise espectral das oscilações residuais na Seção 2.3, utilizando o periodograma de Lomb, indicou alta

significância para o sinal periódico associado à frequência ω , em relação ao ruído, para todas as seqüências estudadas. A presença de correções log-periódicas nos dados, em torno de uma lei de escala pura, pode estar ligada à existência de uma razão de escala preferida $\lambda = \exp(\omega/2\pi)$, a qual, por sua vez, pode representar restrições para a física do sistema.

Na Seção 2.4, apresentamos a análise de uma seqüência de pequenos deslizamentos *antecedendo* um grande evento. A Figura 2.17 mostra que o ajuste da equação (2.14) para a distribuição acumulada $N(t)$ descreve razoavelmente o comportamento da atividade precursora do grande deslizamento em t_c . O significado do ajuste (2.14) se baseia na analogia do grande evento como sendo um “*ponto crítico*”, o qual é precedido de uma *aceleração* no processo de dissipação de energia. Embora uma única seqüência tenha sido estudada, acreditamos que esta seja uma seqüência genuína de “*foreslidings*”, ao contrário das seqüências analisadas na Seção 2.1, cujos eventos estão situados *entre* dois grandes deslizamentos.

No Capítulo 3, estudamos variáveis estatísticas que são fortemente dependentes dos detalhes *microscópicos* das séries de deslizamento. Na Seção 3.1, investigamos como a atividade de deslizamento em um certo limiar de dissipação λ se distribui ao longo do tempo, calculando a dimensão do suporte dos deslizamentos de magnitude $\geq \lambda$, para as séries no regime R1 ($0 < (\theta_c - \theta)/\theta_c < 0.36$). De particular interesse é o colapso das curvas $D(\lambda/\lambda_{\max}) \times \lambda/\lambda_{\max}$, mostradas na Figura 3.4 para todas as séries de deslizamento, independente da inclinação da calha, da geometria do bloco (cilíndrica ou prismática), e do tipo de material. O decaimento logarítmico de $\langle D(\lambda/\lambda_{\max}) \rangle$ mostrado na Figura 3.5, indicou características inteiramente diferentes em relação às séries aleatórias com eventos descorrelacionados (Figura 3.6), quanto à distribuição dos eventos em vários limiares de dissipação. Dessa forma, verificamos a existência de leis de escala não-triviais para a distribuição *temporal* dos eventos nas séries de deslizamento no regime R1, em adição à lei de escala $\mathcal{N}(\geq \lambda) \sim \lambda^{-b}$ ($b \cong 0.50$) para a distribuição *espacial* dos deslizamentos, apresentada no Capítulo 1.

Por outro lado, o método da contagem de caixas aplicado ao suporte dos deslizamentos das séries no regime R2 ($0.15 < (\theta_c - \theta)/\theta_c < 0.45$) revelou semelhanças entre as geometrias do suporte dessas séries e dos conjuntos de Cantor triádico e aleatório, ambos de ordem 7. Tal comportamento foi verificado também com o cálculo da lacunaridade, apresentado na Seção 3.2. Na última seção do Capítulo 3, apresentamos um estudo da susceptibilidade de deslizamento, definida pela equação (3.12), como função do comprimento do cilindro de alumínio associado a cada uma das séries no regime R2. Observamos que a susceptibilidade aumenta com o tama-

nho do cilindro, isto é, à medida em que o comprimento L aumenta, *menos* batidas do martelo são necessárias, em média, para o cilindro deslizar. A Figura 3.14 mostra que esse comportamento não pode ser explicado a partir do argumento de que cilindros maiores estão mais próximos do centro perturbador, isto é, do martelo, uma vez que a taxa da atividade de deslizamento, dA_t/dt , permanece essencialmente constante ao longo da calha. Por outro lado, o expoente de escala $\zeta \simeq 0.56$, na relação $T_N(L) \sim L^{-\zeta}$ (Figura 3.12), tem um valor muito próximo do expoente de rugosidade para superfícies metálicas, 0.50. Acreditamos que a observação desse comportamento poderá contribuir para a compreensão do fenômeno de “*stick-slip*”, o qual representa uma das mais intrigantes manifestações do atrito entre superfícies deslizantes.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos um estudo das propriedades multifractais do suporte de dissipação das séries no regime R1, calculando as dimensões generalizadas D_q e usando o método de Chhabra e Jensen para calcular a função $f(\alpha)$. Observamos que um número infinito de expoentes D_q são necessários para descrever a distribuição temporal dos deslizamentos. Os gráficos (a) e (b) das Figuras 4.6 e 4.11, mostram, por sua vez, uma grande diferença entre o espectro D_q das séries de deslizamento e as dimensões D_q para as séries aleatórias. No entanto, especial atenção deve ser dispensada para a metodologia empregada no cálculo das funções D_q e $f(\alpha)$, uma vez que a substituição direta dos valores de $\lambda(t)$ (dados experimentais) nas equações (4.4), (4.13) e (4.14), pode fornecer um espectro multifractal típico, mesmo que esses eventos estejam associados a uma distribuição de probabilidade uniforme, como mostrado nas Figuras 4.12(a) e 4.12(b). Assim, devido ao tamanho finito das séries temporais associadas aos dados experimentais, a análise multifractal deve ser realizada a partir dos gráficos dos momentos, como na Figura 4.1, e/ou dos gráficos das funções $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$ mostrados nas Figuras 4.7 e 4.8. Nesse caso, o cálculo dos coeficientes angulares das curvas correspondentes aos diferentes valores de q , deve ser realizado para uma região *intermediária* de tamanhos da caixa ϵ , a qual está associada a valores de Δt situados no intervalo $\Delta t_{\min} \ll \Delta t \ll T$, onde $\Delta t_{\min}$ é a distância entre dois eventos, e T é o tamanho da série.

Apêndice A

Programas (linguagem C)

Programa A.1 Para cada série temporal, este programa calcula o número de corridas, “ncorridas”, em que o bloco percorreu a calha. Para cada “corrida”, é determinado também o número de deslizamentos associado, “neventos_corrida[corrida]”.

```
t=tzero;
for(corrida=1;corrida<=neventos;corrida++)
    neventos_corrida[corrida]=0;
corrida=1;
while(t<=neventos)
{
    if(lambda[t+1]+sum[t]>calha)
        /* Esta linha verifica se a soma da magnitude do próximo desli-
           zamento com a atividade acumulada atual, sum[t], resulta em
           um valor maior que o tamanho da calha (calha=280 no regime R1
           e calha = 2000-L no regime R2, onde L é o comprimento do
           cilindro, em mm). Nesse caso, uma nova corrida se inicia. */
        {
            sum[t]=0;
            fprintf(corridas,"%i\t%i\n",corrida,neventos_corrida[corrida]);
            corrida+=1;
            neventos_corrida[corrida]=0;
        }
    neventos_corrida[corrida]++;
    t+=1;
}
ncorridas=corrida;
```

Programa A.2 Este programa conta o número *mínimo* “ncaixas” de caixas de tamanho “box” necessárias para cobrir o suporte de deslizamentos em um limiar de dissipação “limiar”. O programa guarda no arquivo “saida” o número “ncaixas” como função do tamanho da caixa, “box”, para vários valores de “limiar”. Observe que o coeficiente de cada curva “ncaixas” $\times$ “box” dá o negativo da dimensão de capacidade, definida no Capítulo 3.

```
for(limiar=1.0;limiar<10.0;limiar+=3.0)
{
    for(box=1; box<=total_de_batidas; box+=1)
    {
        ncaixas=0;
        x=tzero;
        while(x<=total_de_batidas)
        {
            while(lambda[x]-limiar<0 && x<=total_de_batidas)
            {
                x+=1;
            }
            ncaixas+=1;
            x+=box;
        }
        if(ncaixas!=0)
        {
            fprintf(saida,"%lf\t%i\n",(double)box/1000,ncaixas);
        }
    }
    fprintf(saida,"\n");
}
```

Programa A.3 Este programa divide os valores de x em “nbin” intervalos iguais, na escala logarítmica. O arquivo de entrada deve constar de duas colunas: x e y , onde x vai de “xmin” até “xmax”. O arquivo de saída contém os valores de $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ mais barras de flutuação definidas como a variância dentro de cada bin. Alternativamente, a coordenada x do n -ésimo bin pode ser definida como “anfang” (o início do bin).

```

a=nbin+1;
b=log(xmax/xmin);
factor=exp((1/a)*b);
anfang=xmin;
/* xmin, xmax e nbin são parâmetros de entrada. O primeiro bin é
   colocado com o início (anfang) em x=xmin. */
for(n=1;n<=nbin;n++)
{
    N=0; X=0; Y=0; somax=0; somay=0; acumy=0; acumx=0; Dmax=0; Dmin=1;
    step=anfang*factor; /* step indica o último valor de x considerado
                          no n-ésimo bin */
    for(t=1;t<=neventos;t++)
    {
        if(x[t]>=anfang && x[t]<step)
        {
            somay+=y[t]; somax+=x[t]; X+=1; Y+=1; N+=1;
        }
    }
    mediax=somax/X; mediay=somay/Y;
    for(t=1;t<=neventos;t++)
    {
        if(x[t]>=anfang && x[t]<step)
        {
            acumx=acumx+pow((x[t]-mediax),2);
            acumy=acumy+pow((y[t]-mediay),2);
            Dmax=Dmax>=y[t]?Dmax:y[t]; Dmin=Dmin<=y[t]?Dmin:y[t];
        }
    }
    sigmay=(pow((acumy/N),0.5)); sigmax=(pow((acumx/N),0.5));
    /* sigma=acum/N;*/
    sigmaUP=Dmax-mediay; sigmaDOWN=mediay-Dmin;
    fprintf(bin,"%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n",mediax,mediay,sigmax,sigmay);
    /* Para imprimir barras de flutuação somente para a coordenada y,
       podemos usar, fazendo x=anfang (início do bin):
       - ver figura de D em função do limiar no Capítulo 3 -
       fprintf(bin,"%lf\t%lf\t%lf\n",anfang,mediay,sigmay); */
    anfang=step;
}

```

Programa A.4 Este programa gera séries temporais com 1000 deslizamentos de comprimento λ variando aleatoriamente de $\lambda_{\min} = 1.0$ mm até $\lambda_{\max} = 250.0$ mm, com uma precisão de 0.5 mm.

```
/* inserir no cabeçalho; */
#include <time.h>
#include <sys/times.h>

/* inserir na definição de variáveis */
clock_t Ti,Tf;

/* rotina para gerar as séries: */

time (&Ti);
srandom(Ti);

for(t=1;t<=1000;t++)
{
    lambda[t]=(double)((random()%499)+2);
    fprintf(random1000,"%lf\n",lambda[t]/2);
}
```

Programa A.5 Este programa utiliza o método de Allain & Cloitre (1991) para calcular a lacunaridade das séries de deslizamento.

```
for(r=1;r<=total_de_batidas;r+=1)
{
  for(q=0;q<=neventos;q+=1)
  n[q]=0;
  M1=0;
  M2=0;
  Nr=total_de_batidas-r+1;
  step=1;
  while(step<=total_de_batidas-r+1)
  {
    q=0;
    for(m=step;m<=step+r-1;m+=1)
    {
      if(lambda[m]!=0)
      q+=1;
    }
    n[q]+=1;
    step+=1;
  }
  for(q=0;q<=MAXB-2;q+=1)
  {
    p[q]=n[q]/Nr;
    M1+=q*p[q];
    M2+=pow(q,2)*p[q];
  }
  Lr=M2/pow(M1,2);
  fprintf(lacunaridade,"%i\t%lf\n",r,Lr);
}
```

Programa A.6 Este programa calcula os momentos $M_q(\epsilon)$ para as séries de deslizamento no regime R1. A dimensão generalizada D_q é encontrada dividindo-se por $q - 1$ o negativo do coeficiente angular da curva $M_q(\epsilon) \times \epsilon$ correspondente. No algoritmo abaixo, $\epsilon = \text{"normbox"}$ e $M_q(\epsilon) = \text{"somaM"}$. A variável `lambdaper[x]` é definida de tal forma que `lambdaper[x] = lambda[x-T]`, para $T < x < 2T$ ("condição de contorno periódica").

```
for(q=qmin;q<=qmax;q+=dq)
{
  for(box=boxmin;box<=boxmax;box+=1)
  {
    for(i=tzero;i<neventos;i+=box) { M[i]=0 };
    somaM=0; i=tzero;
    while(i<neventos)
    /* observe que se colocarmos i<=neventos, uma caixa de
       tamanho = box será colocada com início em i=neventos,
       extrapolando a série. */
    {
      x=i;
      while(x<=(i+box-1))
      {
        M[i]+=lambdaper[x]/soma; x+=1;
      }
      i+=box;
    }
    for(t=tzero;t<neventos;t+=box)
    {
      somaM+=pow((M[t]),(double)q);
    }
    normbox=(double)box/neventos;
    if(somaM>=lim)
    {
      fprintf(slopes,"%lf\t%.40lf\n",normbox,somaM);
    }
  }
  fprintf(slopes,"\n");
}
```

Programa A.7 Este programa implementa o método de Chhabra e Jensen para calcular a função $f(\alpha)$ para as séries de deslizamento no regime R1. Para cada série, o programa grava nos arquivos “Fq” e “Aq”, respectivamente, as funções $F_q(\epsilon)$ e $A_q(\epsilon)$, definidas nas equações (4.15) e (4.16). O coeficiente angular de cada curva $F_q(\epsilon)$ ($A_q(\epsilon)$) é definido como $f(q)$ ($\alpha(q)$).

```
for(q=qmin;q<=qmax;q+=dq)
{
  for(tamanho_da_caixa=boxmin;tamanho_da_caixa<=boxmax;
    tamanho_da_caixa+=1)
  {
    sum=0;
    for(k=tzero;k<total_de_batidas;k+=tamanho_da_caixa)
    {
      P[k]=0; u[k]=0;
    }
    somaP=0; F=0; A=0;
    L=(double)tamanho_da_caixa/total_de_batidas;
    for(j=tzero;j<total_de_batidas;j+=tamanho_da_caixa)
    {
      x=j;
      while(x<=(j+tamanho_da_caixa-1))
      {
        P[j]+=lambdaper[x]; x+=1;
      }
      sum+=P[j];
    }
    for(j=tzero;j<total_de_batidas;j+=tamanho_da_caixa)
    {
      somaP+=pow((P[j]/sum),q);
    }
    for(i=tzero;i<total_de_batidas;i+=tamanho_da_caixa)
    {
      u[i]=pow((P[i]/sum),q)/somaP;
      F+=u[i]*log(u[i]); A+=u[i]*log(P[i]/sum);
    }
    fprintf(Fq,"%lf\t%.40lf\n",L,F);
    fprintf(Aq,"%lf\t%.40lf\n",L,A);
  }
  fprintf(Fq,"\n");
  fprintf(Aq,"\n");
}
```

Apêndice B

Verificações matemáticas

B.1 Lacunaridade

Para mostrar que $\mathcal{L}(r) \geq 1$, basta mostrar que $M_2(r) \geq [M_1(r)]^2$, ou equivalentemente, que $M_2(r) - [M_1(r)]^2 \geq 0$. A partir das equações (3.4a) e (3.4b), obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^r s^2 p(s, r) - \left[\sum_{s=0}^r s p(s, r) \right]^2 = \\ & \sum_{s=0}^r s^2 p(s, r) - \sum_{s=0}^r s p(s, r) \sum_{s'=0}^r s' p(s', r) = \\ & \sum_{s=0}^r s^2 p(s, r) - \sum_{s, s'=s} s s' p^2(s, r) - \sum_{s, s' \neq s} s s' p(s, r) p(s', r) = \\ & \sum_{s=0}^r s^2 [p(s, r) - p^2(s, r)] - \sum_{s, s' \neq s} s s' p(s, r) p(s', r) = \\ & \sum_{s=0}^r s^2 p(s, r) [1 - p(s, r)] - \sum_{s, s' \neq s} s s' p(s, r) p(s', r). \end{aligned}$$

Mas observe que

$$1 - p(s, r) = \sum_{s' \neq s} p(s', r).$$

Assim, ficamos com: $M_2(r) - [M_1(r)]^2 =$

$$\sum_{s=0}^r s^2 p(s, r) \sum_{s' \neq s} p(s', r) - \sum_{s, s' \neq s} s s' p(s, r) p(s', r) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s, s' \neq s} s^2 p(s, r) p(s', r) - \sum_{s, s' \neq s} s s' p(s, r) p(s', r) = \\
& \sum_{s, s' \neq s} p(s, r) p(s', r) [s^2 - s s'] = \\
& \sum_{s=0}^r \sum_{s'=0}^r (1 - \delta_{s, s'}) p(s, r) p(s', r) [s^2 - s s'] = \\
& \sum_{s=0}^r \sum_{s'=0}^r (1 - \delta_{s, s'}) p(s, r) p(s', r) \frac{1}{2} [s^2 - s s' - s' s + s'^2] = \\
& \frac{1}{2} \sum_{s=0}^r \sum_{s'=0}^r (1 - \delta_{s, s'}) p(s, r) p(s', r) [s - s']^2 \geq 0. \quad (\text{cq.})
\end{aligned}$$

B.2 Momento generalizado $M_1(\epsilon)$

A equação (4.4) está definida para $q \neq 1$. Para estudar o caso $q = 1$, vamos primeiro escrever

$$m^q = m m^{q-1} = m \exp(\ln m^{q-1}) = m \exp[(q-1) \ln m];$$

No limite de $\delta \rightarrow 0$, podemos usar $\exp(\delta) = 1 + \delta$, e então, para $q \rightarrow 1$ ($q-1 \ll 1$), obtemos:

$$m^q = m[1 + (q-1) \ln m].$$

Substituindo este resultado na equação (4.5), ficamos com:

$$M_q(\epsilon) = \sum_i m_i + (q-1) \sum_i m_i \ln m_i.$$

Mas como $\sum_i m_i = 1$, temos, para $q \rightarrow 1$,

$$M_q(\epsilon) = 1 + (q-1) \sum_i m_i \ln m_i, \quad q \rightarrow 1.$$

A dimensão D_1 é chamada de *dimensão de informação* [23].

B.3 Transformação de Legendre para as funções $f(q)$, $\alpha(q)$ e as dimensões generalizadas D_q

Vamos verificar que as funções $f(q)$ e $\alpha(q)$, definidas nas equações (4.13) e (4.14), se relacionam com as dimensões generalizadas D_q (equação (4.4)) através da transformação $\tau = q\alpha(q) - f(q)$, $\alpha = d\tau/dq$, onde $\tau(q) = (q-1)D_q$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tau}{dq} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dq} \left[\frac{\log [\sum_i m_i^q(\epsilon)]}{\log(\epsilon)} \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \frac{1}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \frac{d}{dq} \left[\sum_i m_i^q(\epsilon) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \frac{1}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \frac{d}{dq} \left[\sum_i \exp \{ \log [m_i^q(\epsilon)] \} \right] = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \frac{1}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \frac{d}{dq} \left[\sum_i \exp \{ q \log [m_i(\epsilon)] \} \right] = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \frac{1}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \left[\sum_i \exp \{ q \log [m_i(\epsilon)] \} \log [m_i(\epsilon)] \right] = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \left[\sum_i \left(\frac{m_i^q(\epsilon)}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \right) \log [m_i(\epsilon)] \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log [m_i(\epsilon)] = \alpha(q). \quad (\text{cqd.})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(q) &= q\alpha(q) - \tau(q) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{q}{\log(\epsilon)} \sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log [m_i(\epsilon)] - \frac{\log [\sum_k m_k^q(\epsilon)]}{\log(\epsilon)} \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \left[\sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log [m_i^q(\epsilon)] - \log \left(\sum_k m_k^q(\epsilon) \right) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \left[\sum_i \left(\frac{m_i^q(\epsilon)}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \right) \log [m_i^q(\epsilon)] - \log \left(\sum_k m_k^q(\epsilon) \right) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \left[\sum_i \frac{m_i^q(\epsilon) \log [m_i^q(\epsilon)]}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} - \frac{\sum_j m_j^q(\epsilon)}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \log \left(\sum_k m_k^q(\epsilon) \right) \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \left[\sum_i \frac{m_i^q(\epsilon) \log [m_i^q(\epsilon)]}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} - \sum_i \frac{m_i^q(\epsilon) \log [\sum_k m_k^q(\epsilon)]}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \left[\sum_i \left(\frac{m_i^q(\epsilon)}{\sum_j m_j^q(\epsilon)} \right) \log \left[\frac{m_i^q(\epsilon)}{\sum_k m_k^q(\epsilon)} \right] \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\epsilon)} \sum_i \mu_i(q, \epsilon) \log [\mu_i(q, \epsilon)] = f(q). \quad (\text{cq.})
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] K. Wiesenfeld. Resource Letter: Scl-1: Scaling laws. *American Journal of Physics*, 69(9):938–942, 2001.
- [2] R. Dugas. *A History of Mechanics*. Dover, New York, 1988.
- [3] D. Fuhrmann and Ch. Woell. The microscopic origins of sliding friction: a spectroscopic approach. *New Journal of Physics*, 1:1.1–1.9, 1998. <http://www.iop.org/EJ/art/S/3/680/nj1999001010001>.
- [4] G. L. Vasconcelos, F. V. Cunha-Jr., and J. J. P. Veerman. Chaotic behavior in a model for grain dynamics. *Physica A*, 295:261–267, 2001.
- [5] H. M. Jaeger, C. h. Liu, S. R. Nagel, and T. A. Witten. Friction in Granular Flows. *Europhysics Letters*, 11(7):619–624, 1990.
- [6] P.-A. Lemiaux and D. J. Durian. From Avalanches to Fluid Flow: A Continuous Picture of Grain Dynamics Down a Heap. *Physical Review Letters*, 85(20):4273–4276, 2000.
- [7] M. A. Aguirre, N. Nerone, A. Calvo, I. Ippolito, and D. Bideau. Influence of the number of layers on the equilibrium of a granular packing. *Physical Review E*, 62(1):738–743, 2000.
- [8] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59(4):381–384, 1987.
- [9] H. M. Jaeger, C.-h. Liu, and S. R. Nagel. Relaxation at the Angle of Repose. *Physical Review Letters*, 62(1):40–43, 1989.
- [10] K. Christensen and H. C. Fogedby. $1/f$ noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand. *Physical Review B*, 40(10):7425–7427, 1989.
- [11] G. A. Held, D. H. Solina II, D. T. Keane, W. J. Haag, P. M. Horn, and G. Grinstein. Experimental Study of Critical-Mass Fluctuations in an Evolving Sandpile. *Physical Review Letters*, 65(9):1120–1123, 1990.

- [12] J. Rosendahl, M. Vekic, and J. Kelley. Persistent self-organization of sandpiles. *Physical Review E*, 47(2):1401–1404, 1993.
- [13] M. Bretz, J. B. Cunningham, P. L. Kurczynski, and F. Nori. Imaging of Avalanches in Granular Materials. *Physical Review Letters*, 69(16):2431–2434, 1992.
- [14] E. Altshuler, O. Ramos, C. Martínez, L. E. Flores, and C. Noda. Avalanches in One-Dimensional Piles with Different Types of Bases. *Physical Review Letters*, 86(24):5490–5493, 2001.
- [15] B. Plourde, F. Nori, and M. Bretz. Water Droplet Avalanches. *Physical Review Letters*, 71(17):2749–2752, 1993.
- [16] J. M. Carlson and J. S. Langer. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Physical Review Letters*, 62(22):2632–2635, 1989.
- [17] V. P. Brito and M. A. F. Gomes. Block avalanches on a chute. *Physics Letters A*, 201:38–41, 1995.
- [18] D. L. Turcotte. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge, 2nd. edition, 1997.
- [19] K. Chen, P. Bak, and S. P. Obukhov. Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes. *Physical Review A*, 43(2):625–630, 1991.
- [20] Z. Olami, H. J. S. Feder, and K. Christensen. Self-Organized Criticality in a Continuous, Nonconservative Cellular Automaton Modeling Earthquakes. *Physical Review Letters*, 68(8):1244–1247, 1992.
- [21] A. Johansen. *Discrete scale invariance and other cooperative phenomena in spatially extended systems with threshold dynamics*. PhD thesis, The Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, 1997.
- [22] M. A. F. Gomes, F. A. O. Souza, and V. P. Brito. Persistence and intermittency in sliding of blocks. *J. Phys. D*, 31:3223–3228, 1998.
- [23] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, 1988.
- [24] D. P. Vallete and J. P. Gollub. Spatiotemporal dynamics due to stick-slip friction in an elastic-membrane system. *Physical Review E*, 47(2):820–827, 1993.
- [25] H. Yoshizawa, P. McGuiggan, and J. Israelachvili. Identification of a Second Dynamic State During Stick-Slip Motion. *Science*, 259:1305–1308, 1993.

- [26] B. Lin and P. L. Taylor. Model of spatiotemporal dynamics of stick-slip motion. *Physical Review E*, 49(5):3940–3947, 1994.
- [27] F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli, and C. Caroli. Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: Experiments and a heuristic model. *Physical Review E*, 49(6):4973–4988, 1994.
- [28] M. O. Robbins. *Jamming, Friction and Unsteady Rheology*. 1999. Chapter of *Jamming and Rheology: Constrained Dynamics on Microscopic and Macroscopic Scales*, A. J. Liu and S. R. Nagel, Eds. (Taylor and Francis, London, 2000).
- [29] B. Miller, C. O’Hern, and R. P. Behringer. Stress Fluctuations for Continuously Sheared Granular Materials. *Physical Review Letters*, 77(15):3110–3113, 1996.
- [30] P. Diodati, F. Marchesoni, and S. Piazza. Acoustic Emission from Volcanic Rocks: An Example of Self-Organized Criticality. *Physical Review Letters*, 67(17):2239–2243, 1991.
- [31] A. Petri, G. Paparo, A. Vespignani, A. Alippi, and M. Constantini. Experimental Evidence for Critical Dynamics in Microfracturing Processes. *Physical Review Letters*, 73(25):3423–3426, 1994.
- [32] J. S. Urbach, R. C. Madison, and J. T. Market. Interface Depinning, Self-Organized Criticality, and the Barkhausen Effect. *Physical Review Letters*, 75(2):276–279, 1995.
- [33] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1996.
- [34] T. Utsu, Y. Ogata, and R. S. Matsuura. The Centenary of the Omori Formula for a Decay Law of Aftershock Activity. *Journal of Physics of the Earth*, 43(1):1–33, 1995.
- [35] D. Sornette. Discrete scale invariance and complex dimensions. cond-mat/9707012, 1998. *Physics Reports* 297, 239-270 (1998).
- [36] E. J. R. Parteli, M. A. F. Gomes, E. Montarroyos, and V. P. Brito. Omori law for sliding of blocks on inclined rough surfaces. *Physica A*, 292:536–544, 2001.
- [37] A. Johansen and D. Sornette. Critical ruptures. *The European Physical Journal B*, 18:163–181, 2000.

- [38] D. Sornette, A. Johansen, A. Arneodo, J. F. Muzy, and H. Saleur. Complex Fractal Dimensions Describe the Hierarchical Structure of Diffusion-Limited-Aggregate Clusters. *Physical Review Letters*, 76(2):251–254, 1996.
- [39] Y. Huang, A. Johansen, M. W. Lee, H. Saleur, and D. Sornette. Artifactual log-periodicity in finite size data: Relevance for earthquake aftershocks. cond-mat/9911421, 1999. submitted to JGR in december/1999.
- [40] T. N. Arvanitis. Time-Series Analysis of MR Data: Can the Lomb-Scargle Periodogram be used in the future as a diagnostic tool for the identification of systematic errors in clinical MRI? http://www.cogs.susx.ac.uk/users/theoa/MRI_res/JMRM/period_future.html, october 2001.
- [41] E. O. Brigham. *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [42] N. R. Lomb. Least-Squares Frequency Analysis of Unequally Spaced Data. *Astrophysics and Space Science*, 39:447–462, 1976.
- [43] M. W. Lee and D. Sornette. Novel mechanism for discrete scale invariance in sandpile models. *The European Physical Journal B*, 15:193–197, 2000.
- [44] D. Sornette, A. Johansen, and J. P. Bouchaud. Stock Market Crashes, Precursors and Replicas. *J. Phys. I*, 6:167–175, 1996.
- [45] A. Johansen and D. Sornette. Evidence of Discrete Scale Invariance in DLA and Time-to-Failure by Canonical Averaging. *Internacional Journal of Modern Physics C*, 9(3):433–447, 1998.
- [46] A. Johansen, D. Sornette, and A. E. Hansen. Punctuated vortex coalescence and discrete scale invariance in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 138:302–315, 2000.
- [47] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge, 2nd. edition, 1992.
- [48] D. Sornette and C. G. Sammis. Complex Critical Exponents from Renormalization Group Theory of Earthquakes: Implications for Earthquake Predictions. *J. Phys. I*, 5:607–619, 1995.
- [49] A. Johansen, D. Sornette, and O. Ledoit. Predicting Financial Crashes Using Discrete Scalse Invariance. 1999.

- [50] H. G. E. Hentschel and I. Procaccia. The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors. *Physica D*, 8:435–444, 1983.
- [51] E. J. R. Parteli, M. A. F. Gomes, and V. P. Brito. Multifractality in time series of slide of blocks. *submitted to Physical Review E*, 2002.
- [52] D. A. Kessler. A new crack at friction. *Nature*, 413:260–261, 2001.
- [53] T. Poeschel and H. J. Herrmann. A simple geometrical model for solid friction. *Physica A*, 198:441–448, 1993.
- [54] M. S. Vieira and H. J. Herrmann. Self-similarity of friction laws. *Physical Review E*, 49(5):4534–4541, 1994.
- [55] A. Volmer and T. Nattermann. Towards a statistical theory of solid dry friction. *zpb*, 104:363–371, 1997.
- [56] E. Gerde and M. Marder. Friction and Fracture. *Nature*, 413:285–288, 2001.
- [57] A. Parisi, G. Caldarelli, and L. Pietronero. Roughness of fracture surfaces. [arXiv:cond-mat/0004374](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0004374).
- [58] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. Shraiman. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. *Physical Review A*, 33(2):1141–1151, 1986.
- [59] L. de Arcangelis, S. Redner, and A. Coniglio. Anomalous voltage distribution of random resistor networks and a new model for the backbone at the percolation threshold. *Physical Review B*, 31(7):4725–4727, 1985.
- [60] P. Meaking, A. Coniglio, and H. E. Stanley. Scaling properties for the surfaces of fractal and nonfractal objects: An infinite hierarchy of critical exponents. *Physical Review A*, 34(4):3325–3340, 1986.
- [61] J. Nittmann, H. E. Stanley, E. Touboul, and G. Daccord. Experimental Evidence for Multifractality. *Physical Review Letters*, 58(6):619–619, 1987.
- [62] T. Vicsek, F. Family, and P. Meakin. Multifractal Geometry of Diffusion-Limited Aggregates. *Europhysics Letters*, 12(3):217–222, 1990.
- [63] A. Chhabra and R. V. Jensen. Direct Determination of the $f(\alpha)$ Singularity Spectrum. *Physical Review Letters*, 62(12):1327–1330, 1989.
- [64] T. Tél and T. Vicsek. Geometrical multifractality of growing structures. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:L835–L840, 1987.