



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE VÓRTICES NO  
SUPERCONDUTOR BSCCO COM DEFEITOS COLUNARES**

por

**LEONARDO MEDEIROS DE QUEIROZ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (Orientador-UFPE)

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva (DF - UFPE)

Enzo Granato (LAS-INPE)

Recife - PE, Brasil  
Abril - 2010

Queiroz, Leonardo Medeiros de.

Simulação computacional de vórtices no BSCCO  
com defeitos colunares / Leonardo Medeiros de  
Queiroz. - Recife: O Autor, 2010.

xvi, 99 p.: il. fig. tab.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Física do estado sólido. 2. Supercondutores.
3. Simulação (computadores). Título.

530.41

(22.ed.)

FQ 2010-052



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## **Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado**

---

**Leonardo Medeiros de Queiroz**

### **SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE VÓRTICES NO SUPERCONDUTOR BSCCO COM DEFEITOS COLUNARES**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Maurício Domingues Coutinho Filho (Presidente e Orientador) e Clécio Clemente de Souza Silva, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e pelo Pesquisador Enzo Granato, do Laboratório Associado de Sensores e Materiais do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, consideram o candidato:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

☐ Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em oito de abril de dois mil e dez.

  
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho  
Presidente e Orientador

  
Prof. Clécio Clemente de Souza Silva

  
Pesquisador Enzo Granato

*A meus pais, Josué e Miriam.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Maurício Coutinho, por sua amizade, paciência (e nem eu tenho paciência comigo às vezes) e, principalmente, pela enorme contribuição na minha formação como cientista. Sempre disposto a conversar sobre física, suas conversas sempre conseguem me deixar mais motivado ao ver a empolgação com que fala; é um exemplo de dedicação e gosto pela ciência, exemplo este que deve inspirar irremediavelmente minha carreira sempre.

Ao professor Ernesto Raposo, que, além de ter ministrado duas disciplinas para mim durante meu primeiro ano na graduação, sempre foi um ótimo colaborador e, em todas as vezes de que precisei, esteve disposto a ajudar.

Ao professor Leonardo Viana, que, mesmo estando longe a maior parte do tempo, deu contribuições cruciais no início do meu trabalho.

Aos meus colegas de laboratório: professor Renê, Eglânio, Fernanda, Karlla, Sandoildo, Fernando e Jorge Armando. A Allan, por nossos estudos em dupla e pela motivação que me dava ver seu interesse pelo assunto que resultou nesta dissertação.

A todos os professores que fizeram parte desta caminhada até aqui, um muitíssimo obrigado. Para citar alguns: Mauro Copelli (um dos melhores, senão o melhor, professor que já tive.), José Américo, Marcelo Gomes (simplesmente excelente), José Rios, Albino, Cid, Antônio Azevedo (ótimas aulas de Mecânica Quântica), etc.

À professora Sandra, pela hospitalidade em sua casa sempre que precisei conversar com o professor Maurício lá.

Ao professor Marcílio, que me fez dar os primeiros passos na ciência e influenciou decisivamente na minha carreira não deixando fenecer meu sonho de ser físico.

Agradeço também às pessoas que fizeram esses meus seis anos de UFPE mais alegres: os amigos que fiz durante o curso. A Fernanda (novamente), Sérgio, Diogo, Cerda, Bruno, Eduardo, Domingos, Milena, Thiago Nunes (mais alto que eu), Victor Hugo, Thiago Sobral, Rafael Alves, Messias, Chencarek, Douglas (Quem sabe eu ainda não vou pras aulas de aikidô?), Gerson, Vladimir, Daniéverton, Plínio. Em particular, a Eglânio (novamente). Nossas conversas me apresentaram a um modo de pensar radicalmente novo. Sério. Agradeço-o por isso e por sua amizade. Se houver alguém de que eu tenha esquecido, peço desculpas. Existe a possibilidade de ser o cansaço mental típico do fim da maratona que é escrever uma dissertação.

Agradeço a meus amigos de fora da UFPE, podem não ser muitos, mas são excelentes. Ao pessoal da L.E.G.A.L.: Anderson, Danillo, Cristiano e Ronaldo. Nossas conversas, piadas, jogos, cinemas, e etc sempre me fazem muito bem. A Helene, a Jussara Patrícia, a Luiz Antônio (nossos papos “cabeça” são muito bons) e a Amarílis, que também me deu a maior força pra estar acabando esta dissertação.

Agradeço a Cristiane, por sua compreensão e por seu afeto. Também pela força que sempre me deu.

Agradeço a meus familiares. Meus pais, Josué e Miriam, que são os responsáveis por eu estar onde estou. Sem o incentivo e o apoio que sempre recebi deles, tudo seria proibitivamente muito mais difícil pra mim. A minha irmã Layze, por fazer minha vida mais agradável com sua companhia e sua amizade. A meu tio Mário, minha tia Neuza, tia Suzy, tia Rosa, tia Mirtes, que me ajudaram em algum momento desta caminhada. Se esqueci alguém, peço desculpas.

Finalmente, agradeço ao apoio financeiro dado pelo CNPq durante meu mestrado e ao Departamento de Física da UFPE como um todo, pela ótima infra-estrutura oferecida. A todos os funcionários que tornam nossa vida sustentável aqui no departamento, um muito obrigado.

*Thou, nature, art my goddess; to thy laws my services are bound...*

—W. SHAKESPEARE (King Lear)

# Resumo

Nesta dissertação, apresentamos os desenvolvimentos teóricos associados à fenomenologia da supercondutividade e, em seguida, olhamos em maior detalhe os resultados advindos da teoria de Lawrence e Doniach para supercondutores de altas temperaturas em camadas, incluindo o cálculo de quantidades importantes para o desenvolvimento das simulações numéricas que descrevemos abaixo.

Simulamos o processo de derretimento de um sistema de linhas de vórtice tridimensional com defeitos colunares via simulação Monte Carlo usando o modelo de Lawrence e Doniach, variando a densidade de vórtices em relação à densidade de defeitos na amostra. Utilizamos parâmetros do BSCCO num campo magnético perpendicular aos planos de  $\text{CuO}_2$  e paralelo aos defeitos. Verificamos um derretimento em duas etapas para certos valores da concentração de vórtices em relação aos defeitos.

Investigamos mais atentamente a natureza dessas etapas do derretimento simulando o sistema de linhas de vórtice à medida em que diminuímos a temperatura e observamos a existência de histerese, caracterizando a transição de fase de primeira ordem e também os estados metaestáveis do sistema. Testamos também os efeitos da interação magnética entre vórtices panqueca em camadas diferentes e verificamos que não existem divergências significativas entre os resultados obtidos com e sem presença da interação magnética.

**Palavras-chave:** Supercondutores; Alta temperatura crítica; BSCCO; Simulação; *Bose Glass*; Defeitos colunares

# Abstract

In this dissertation we present the theoretical developments associated to the phenomenology of superconductivity and, then, we look in more detail at the results that arise from the Lawrence-Doniach model for layered high- $T_c$  superconductors, including the calculation of important quantities for the development of the numerical simulations described below.

We simulated the melting process of a 3D system of vortex lines with columnar defects by Monte Carlo method using Lawrence-Doniach model, varying the ratio between the vortex and the defect density of the sample. We use BSCCO parameters in a magnetic field that is perpendicular to the  $\text{CuO}_2$  planes and parallel to the defects. We verify a two-step melting for certain values of the concentration of vortices relative to the defects.

We investigated more carefully the nature of this two-step process of melting by simulating the system of vortex lines as we decrease the temperature and we observed the existence of hysteresis characterizing a first-order phase transition and the metastable states of the system as well. We tested the effect of the electromagnetic interaction between pancake vortices in different layers and we verified that there are no great changes between the results.

**Keywords:** Superconductors; High- $T_c$ ; BSCCO; Simulation; Bose Glass; Columnar Pinning

# Sumário

|          |                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Supercondutores de Baixa Temperatura Crítica</b>    | <b>1</b>  |
| 1.1      | Características Básicas de um Supercondutor Tipo I     | 1         |
| 1.2      | As equações de London                                  | 3         |
| 1.3      | O Modelo de Ginzburg-Landau                            | 8         |
| 1.3.1    | Campos Críticos                                        | 12        |
| 1.3.1.1  | O Campo Crítico $H_c$                                  | 12        |
| 1.3.1.2  | O Campo Crítico $H_{c2}$                               | 12        |
| 1.3.1.3  | O Campo Crítico $H_{c3}$                               | 15        |
| 1.3.2    | Vórtices em Supercondutores tipo II                    | 16        |
| 1.3.2.1  | O Campo Crítico $H_{c1}$                               | 16        |
| 1.3.2.2  | Estudo de um Vórtice Isolado                           | 17        |
| 1.3.2.3  | Interação entre Linhas de Vórtice                      | 20        |
| <b>2</b> | <b>Supercondutores de Alta Temperatura Crítica</b>     | <b>22</b> |
| 2.1      | Teoria de Ginzburg-Landau Anisotrópica                 | 22        |
| 2.1.1    | Líquidos de Linha                                      | 26        |
| 2.1.2    | Derretimento da Rede de Vórtices                       | 28        |
| 2.1.3    | Analogia entre Linhas de Fluxo e Bósons Bidimensionais | 34        |
| 2.2      | O Modelo de Lawrence-Doniach                           | 35        |
| 2.3      | Vórtices no Modelo de Lawrence-Doniach                 | 40        |
| 2.3.1    | Interação Eletromagnética entre Vórtices-Panqueca      | 40        |
| 2.3.2    | Energia Josephson                                      | 47        |

|          |                                                                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>Defeitos e Ancoragem de Vórtices</b>                                                                    | <b>52</b> |
| 3.1      | Mecanismos de Ancoragem                                                                                    | 53        |
| 3.2      | Defeitos Colunares                                                                                         | 54        |
| 3.2.1    | Um Defeito e Um Vórtice                                                                                    | 56        |
| 3.2.2    | Dois Defeitos e um Vórtice                                                                                 | 59        |
| 3.2.3    | Vários Defeitos e Vários Vórtices                                                                          | 61        |
| 3.3      | Possíveis Fases Desordenadas                                                                               | 63        |
| <b>4</b> | <b>Simulação de Vórtices no BSCCO com Defeitos Colunares</b>                                               | <b>67</b> |
| 4.1      | O BSCCO como um Supercondutor em Camadas                                                                   | 67        |
| 4.2      | Modelagem de Matéria de Vórtices no BSCCO                                                                  | 67        |
| 4.3      | Resultados das Simulações                                                                                  | 72        |
| 4.3.1    | Estudo da Estabilidade dos Estados do Sistema de Vórtices: Rede de Abrikosov como Configuração Inicial     | 72        |
| 4.3.2    | Estudo da Estabilidade dos Estados do Sistema de Vórtices: Estados Meta-Estáveis como Configuração Inicial | 80        |
| 4.3.3    | Efeito da Interação Eletromagnética                                                                        | 89        |
| 4.3.4    | Efeito da Amostragem da Desordem                                                                           | 91        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões</b>                                                                                          | <b>93</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Diagrama ilustrando o efeito Meissner em um supercondutor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2  |
| 1.2  | Dependência do campo crítico $H_c$ com a temperatura.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 2  |
| 1.3  | Corrente persistente e fluxo num supercondutor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 3  |
| 1.4  | Variação típica do campo magnético dentro de um supercondutor, mostrando o comprimento de penetração $\lambda$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 7  |
| 1.5  | Comparação entre $\xi$ e $\lambda$ na interface de um supercondutor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 11 |
| 1.6  | Diagramas mostrando o aparecimento de pontos fixos na energia livre para $\alpha < 0$ , ocasionando a transição de fase normal-supercondutor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 13 |
| 1.7  | Comparação entre as transições de fase de supercondutores tipo I e II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 15 |
| 1.8  | Diagrama de fase típico para um supercondutor tipo II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 17 |
| 1.9  | Diagrama mostrando o comportamento do campo e da amplitude do parâmetro de ordem em função da distância num supercondutor fortemente tipo II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 18 |
| 1.10 | Diagrama mostrando uma rede de Abrikosov, com os vórtices dispostos numa rede triangular.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 21 |
| 2.1  | Evolução das temperaturas críticas dos supercondutores de altas temperaturas mostrando as estruturas cristalinas dos principais compostos supercondutores <i>high-T<sub>c</sub></i> , como a do $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ , a do $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , a do $\text{MgB}_2$ e a do $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ . Bem como mostrando a evolução nas temperaturas críticas dos chamados Supercondutores baseados em ferro. | 23 |

- 2.2 Gráfico da dependência em  $T$  do desvio médio quadrático ( $\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle$ ) das trajetórias das linhas de vórtice obtido por meio de simulação numérica para alguns valores de campo aplicado. As linhas sólidas marcam a dependência linear em  $T$  das curvas numéricas, característico de uma linha de vórtices derretida, como a que tratamos na seção 2.1.1. No detalhe, a transição descontínua na temperatura de derretimento para campo aplicado  $B = 10T$ . 27
- 2.3 Esquema mostrando as linhas de vórtice e os planos de  $\text{CuO}_2$  nos três regimes: (a) desacoplado, (b) entrelaçado e (c) desentrelaçado. 29
- 2.4 Figura mostrando o derretimento de uma rede de vórtices, mostrando, de cima para baixo, as configurações 3D dos sistemas (a) antes de derreter e (b) derretido, bem como suas respectivas projeções bidimensionais e gráficos do fator de estrutura associado. O derretimento é indicado pelo desaparecimento dos picos de Bragg do fator de estrutura. 31
- 2.5 Diagrama de fase esquemático para o BSCCO. 33
- 2.6 Diagrama de fase experimental para o BSCCO obtido por dois trabalhos experimentais diferentes. 34
- 2.7 Diagrama mostrando o campo magnético gerado por um único vórtice. 42
- 2.8 Gráfico comparando o formato de gráfico da energia magnética em função de distância planar  $R$  para  $z = 10^{-5}\lambda_{ab} \ll R$  (Linha negra) com a gráfico de uma reta do tipo  $y = x$  (linha vermelha) 47
- 2.9 Gráfico comparando o formato de gráfico da energia magnética em função de distância planar  $R$  para  $z = \lambda_{ab}R$  48
- 2.10 Diagrama mostrando uma linha de vórtice com um vórtice panqueca deslocado. 50
- 3.1 Efeito da introdução de defeitos colunares sobre a curva de irreversibilidade para  $\text{Ti}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  54
- 3.2 Sistema de linhas de vórtices na presença de defeitos colunares. 55

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3 | Esquema de uma linha de fluxo interagindo com um defeito colunar.                                                                                                                                                                                                                           | 56 |
| 3.4 | Gráfico da energia livre de ligação para a ancoragem da figura 3.3                                                                                                                                                                                                                          | 59 |
| 3.5 | Representação de um vórtice “tunelando” entre dois defeitos colunares.                                                                                                                                                                                                                      | 60 |
| 3.6 | Isolante de Mott                                                                                                                                                                                                                                                                            | 64 |
| 3.7 | Diagrama de Fase no limite de defeitos com alta força de ancoragem                                                                                                                                                                                                                          | 65 |
| 3.8 | Diagrama de Fase mostrando uma região onde ocorre o <i>Bragg glass</i>                                                                                                                                                                                                                      | 66 |
| 4.1 | Estrutura da célula unitária do BSCCO-2212                                                                                                                                                                                                                                                  | 68 |
| 4.2 | Vórtices-panqueca ligados pela interação Josephson                                                                                                                                                                                                                                          | 69 |
| 4.3 | Gráfico mostrando o comportamento do primeiro pico de Bragg do fator de estrutura $S(\mathbf{k}_{Bragg})$ e do parâmetro de ordem hexática $\Psi_6$ se variarmos a temperatura de uma amostra de BSCCO com (a) $B_\phi = B/4$ , (b) $B_\phi = B$ , (c) $B_\phi = 4B$ e (d) $B_\phi = 16B$ . | 73 |
| 4.4 | Projeção no plano perpendicular aos defeitos da configuração da rede de vórtices (a) $1K$ , (b) $T = 27K$ , (c) $T = 40K$ e (d) $T = 50K$ para $B_\phi = B/4$ .                                                                                                                             | 74 |
| 4.5 | Configuração 3D de vórtices em $T = 40K$ para o caso $B_\phi = B/4$ . Símbolos azuis representam defeitos enquanto símbolos vermelhos representam vórtices.                                                                                                                                 | 75 |
| 4.6 | Projeção no plano perpendicular aos defeitos da configuração da rede de vórtices (a) $T = 1K$ , (b) $T = 30K$ , (c) $T = 40K$ , (d) $T = 50K$ e (f) $T = 60K$ para $B_\phi = B$ .                                                                                                           | 76 |
| 4.7 | Configuração 3D de vórtices em (a) $T = 40K$ e (b) $T = 50K$ para o caso $B_\phi = B$ . Símbolos azuis representam defeitos enquanto símbolos vermelhos representam vórtices.                                                                                                               | 77 |
| 4.8 | Projeção no plano perpendicular aos defeitos da configuração da rede de vórtices (a) $T = 23K$ , (b) $T = 30K$ , (c) $T = 48K$ , (d) $T = 55K$ e (e) $T = 64K$ para $B_\phi = 4B$ .                                                                                                         | 78 |

- 4.9 Configuração 3D de vórtices em  $T = 48K$  para o caso  $B_\phi = 4B$ . Símbolos azuis representam defeitos enquanto símbolos vermelhos representam vórtices. 79
- 4.10 Primeiro pico de Bragg do fator de estrutura para  $B_\phi = B/4$  para várias temperaturas iniciais  $T_0$  a partir das quais o sistema é resfriado. 81
- 4.11 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 20K$  para  $T_0 = 42K$  ( $B_\phi = B/4$ ). 81
- 4.12 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 20K$ , (c)  $T = 40K$  e (d)  $T = 50K$  para  $T_0 = 64K$  ( $B_\phi = B/4$ ). 82
- 4.13 Primeiro pico de Bragg do fator de estrutura para  $B_\phi = B$  para várias temperaturas iniciais  $T_0$  a partir das quais o sistema é resfriado. 83
- 4.14 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 10K$  para  $T_0 = 17K$  ( $B_\phi = B$ ). 83
- 4.15 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 20K$ , (c)  $T = 30K$  e (d)  $T = 40K$  para  $T_0 = 42K$  ( $B_\phi = B$ ). 84
- 4.16 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 20K$  e (c)  $T = 40K$  para  $T_0 = 60K$  ( $B_\phi = B$ ). 85
- 4.17 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  (b)  $T = 20K$  e (c)  $T = 50K$  para  $T_0 = 64K$  ( $B_\phi = B$ ). 86
- 4.18 Primeiro pico de Bragg do fator de estrutura para  $B_\phi = 4B$  para várias temperaturas iniciais  $T_0$  a partir das quais o sistema é resfriado. 87
- 4.19 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 20K$  para  $T_0 = 47K$  ( $B_\phi = 4B$ ). 87
- 4.20 Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 20K$  e (b)  $T = 50K$  para  $T_0 = 58K$  ( $B_\phi = 4B$ ). 88
- 4.21 Comparação entre a evolução de  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$  na ausência e na presença da interação magnética entre vórtices em camadas diferentes ( $B_\phi = B$ ). 90

- 4.22 Curvas de  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$  *versus* temperatura para diferentes distribuições da desordem para os casos (a)  $B_\phi = B/4$ , (b)  $B_\phi = B$  e (c)  $B_\phi = 4B$ . 92

# Lista de Tabelas

|     |                                                                                                                                                 |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Tabela que mostra a correspondência entre quantidades relativas ao sistema de linhas de fluxo e quantidades relativas aos bósons bidimensionais | 35 |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

# Supercondutores de Baixa Temperatura Crítica

Começaremos aqui pelo estudo das propriedades físicas dos supercondutores de baixas temperaturas. Consideram-se baixas as temperaturas abaixo de  $\sim 30K$ , limite previsto teoricamente pela teoria BCS [1, 2], primeira teoria microscópica da supercondutividade desde sua descoberta [3] em 1911. Esta teoria descreve o estado supercondutor como consequência da condensação de Bose-Einstein de pares de Cooper (elétrons ligados entre si por um potencial atrativo devido à interação dos elétrons com a rede cristalina). Tais supercondutores podem ser divididos em dois grupos: os supercondutores tipo I e tipo II, dependendo se o supercondutor possui ou não um estado intermediário onde se formam vórtices de corrente em seu interior. Primeiramente, vamos enumerar algumas características básicas dos supercondutores tipo I para então estudarmos algumas teorias fenomenológicas da supercondutividade e a definição em termos mais rigorosos dos dois tipos de supercondutores.

## 1.1 Características Básicas de um Supercondutor Tipo I

- *Condutividade infinita*: É a característica que dá nome aos supercondutores. Há uma temperatura crítica  $T_c$  em que um material perde totalmente sua condutividade elétrica.
- *Efeito Meissner*: Um supercondutor tende a expelir completamente o fluxo magnético de seu interior [5](veja figura 1.1). Este fenômeno ocorre somente para campos externos suficientemente baixos. De fato, existe um campo crítico que depende da temperatura da amostra. Experimentos mostram que a dependência deste campo  $H_c$  com a temperatura

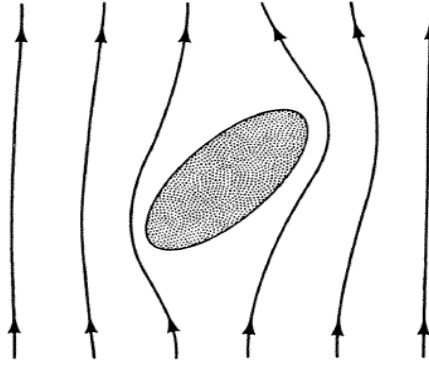


Figura 1.1: Diagrama ilustrando o efeito Meissner em um supercondutor. Retirado da referência [4].

é dada aproximadamente por

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (1.1)$$

conforme vemos na figura 1.2.

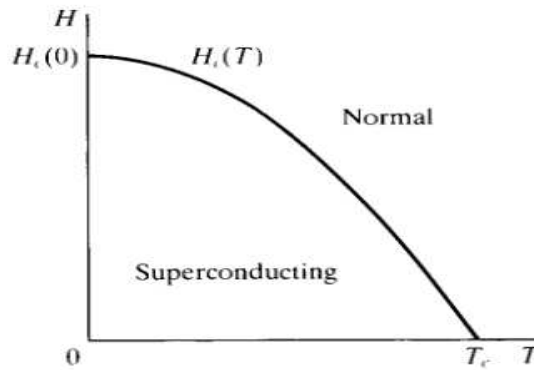


Figura 1.2: Dependência do campo crítico  $H_c$  com a temperatura. Retirado da referência [6].

- *Correntes Persistentes e Quantização do Fluxo Magnético:* Considere um anel comum submetido a um campo externo constante perpendicular a seu plano. Resfriamos a amostra até ela se tornar supercondutora e começar a expelir o fluxo formando uma corrente. Se retirarmos o campo, a corrente continua fluindo e o fluxo através do anel permanece

constante [7] (veja figura 1.3) e quantizado [8, 9] em unidades de

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e}. \quad (1.2)$$

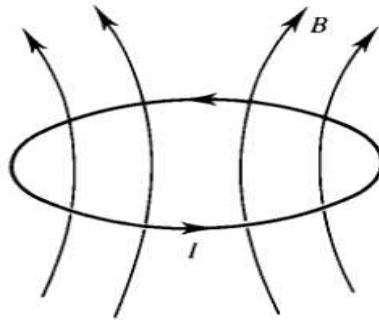


Figura 1.3: Corrente persistente e fluxo num supercondutor. Retirado da referência [6].

- *Transição de Fase de Segunda Ordem:* Durante a transição metal normal-supercondutor a campo zero, há uma mudança descontínua no calor específico (efeitos de flutuações são desprezíveis) e não há calor latente [10], o que caracteriza uma transição de fase de segunda ordem.

## 1.2 As equações de London

Em 1935, os irmãos Fritz e Heinz London desenvolveram uma teoria macroscópica da supercondutividade [11] que obteve êxito em descrever as propriedades eletrodinâmicas dos supercondutores (a condutividade infinita e o efeito Meissner). Não é possível fazer uma dedução das equações de London partindo de primeiros princípios antes de se conhecer a teoria microscópica da supercondutividade [12, 1, 2]. No entanto, podemos dar uma justificativa física para tais equações, seguindo os passos dados na referência [13], se considerarmos inicialmente a

densidade de elétrons supercondutores  $n_s$  constante no material. Desta forma, a equação de Newton na presença dos campos é dada pela força de Lorentz:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{h} \right), \quad (1.3)$$

onde  $q$  é a carga dos portadores (os pares de Cooper). Na equação (1.3),  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  é o campo de velocidades do superfluido carregado; assim,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{h} \right). \quad (1.4)$$

Repare agora que a identidade vetorial

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \quad (1.5)$$

pode ser utilizada usando  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$  para se obter

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (1.6)$$

e podermos, então, expressar (1.4) na forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{q}{m} \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \left[ (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{q}{mc} \mathbf{h} \right]. \quad (1.7)$$

Exceto pelo termo da pressão, esta é a equação de Euler para um fluido carregado invíscido, o que era esperado, visto que foi assim que modelamos o movimento das cargas num supercondutor. Até agora, modelamos apenas a característica da condutividade infinita (no fato de que não existe termo dissipativo na equação (1.3)), mas queremos mais. Queremos também modelar o efeito Meissner e esperamos que existam soluções de (1.7) em que possamos ver tal efeito.

Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (1.7), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} - \frac{q}{m} \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q}), \quad (1.8)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{mc} \mathbf{h}. \quad (1.9)$$

Utilizando a lei de Faraday em (1.8), obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q}). \quad (1.10)$$

Reparemos agora que, se em  $t = 0$ ,  $\mathbf{Q} = 0$  (o que acontece se, por exemplo,  $\mathbf{v} = 0$  e  $\mathbf{h} = 0$ ), pela equação (1.10) podemos concluir que

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = 0 \quad \text{em } t = 0. \quad (1.11)$$

Derivando a equação (1.10) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} = \nabla \times \left( \mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{Q} \right). \quad (1.12)$$

Em  $t = 0$ ,  $\mathbf{Q} = 0$  e (1.11) é válida, assim

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } t = 0. \quad (1.13)$$

E, se continuarmos com este procedimento, veremos que todas as derivadas temporais de  $\mathbf{Q}$  se anulam em  $t = 0$ . Considerando  $\mathbf{Q}$  uma função analítica, isso implica que

$$\mathbf{Q} = 0, \quad \text{para todo } t. \quad (1.14)$$

Assim, se  $\mathbf{Q} = 0$  em um determinado instante, será nulo em todos os instantes. Agora lançamos mão da hipótese de que as soluções possíveis para um estado supercondutor são justamente aquelas em que  $\mathbf{Q} = 0$  em algum instante. Assim, as equações

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{q}{mc} \mathbf{h}} \quad (1.15)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{q}{m} \mathbf{E}} \quad (1.16)$$

são válidas em qualquer instante. Estas são as equações de London.

Podemos extrair uma consequência importante das equações acima se percebermos que

$$\mathbf{J} = n_s q \mathbf{v}, \quad (1.17)$$

pois, tomando o rotacional da equação acima e usando a equação (1.15), obtemos

$$\mathbf{h} = -\frac{mc}{n_s q^2} \nabla \times \mathbf{J}. \quad (1.18)$$

Usando agora a lei de Ampère para reescrever o rotacional da densidade de corrente em termos do campo  $\mathbf{h}$ , temos, finalmente

$$\mathbf{h} = \frac{mc^2}{4\pi n_s q^2} \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (1.19a)$$

ou

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu^2 \mathbf{h} = 0, \quad (1.19b)$$

onde  $\mu = 1/\lambda_L$  com

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s q^2}} \quad (1.20)$$

definido como o comprimento de penetração de London (veja figura 1.4). A equação (1.19b) nos mostra que o campo magnético decai exponencialmente no interior do material supercon-

dutor:

$$h \sim e^{-z/\lambda} \quad (1.21)$$

ou seja, o efeito Meissner está contido nas equações de London.

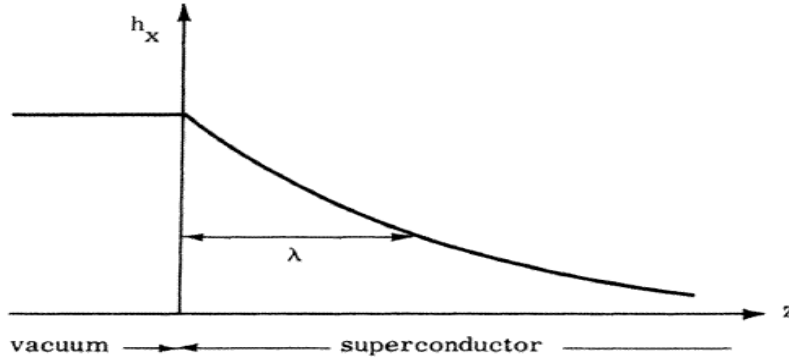


Figura 1.4: Variação típica do campo magnético dentro de um supercondutor, mostrando o comprimento de penetração  $\lambda$ . Retirado da referência [4].

Podemos fazer uma simplificação adicional nas equações e as deixarmos em termos das correntes e dos campos se atentarmos para o fato de que o termo não-linear na equação (1.16) pode ser desprezado para velocidades não-relativísticas (confira na referência [13], para uma argumentação detalhada). Assim, as equações (1.15), (1.16) e (1.17) se tornam

$$\mathbf{h} = -c \nabla \times (\Lambda \mathbf{J}); \quad (1.22)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\partial(\Lambda \mathbf{J})}{\partial t}, \quad (1.23)$$

onde

$$\Lambda = \frac{4\pi\lambda_L^2}{c^2} = \frac{m}{n_s q^2} \quad (1.24)$$

### 1.3 O Modelo de Ginzburg-Landau

Como a transição de fase para um supercondutor é de segunda ordem para campo aplicado igual a zero, podemos pensar em uma teoria do tipo Landau para descrever essas transições. Isto foi feito pelo próprio Landau e por Vitaly Ginzburg [14] e resultou na teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau (1950). Esta teoria vai além da dos irmãos London, pois descreve, além das propriedades eletrodinâmicas do estado supercondutor, como o efeito Meissner, várias propriedades termodinâmicas de forma bastante acurada. Neste modelo, definimos um parâmetro de ordem como uma função complexa da posição no espaço e escrevemos a energia livre de Helmholtz em função deste parâmetro:

$$\mathcal{F}_s[\psi, \mathbf{A}] = \mathcal{F}_n + \int d^3 r \left[ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right], \quad (1.25)$$

onde  $\mathcal{F}_s$  e  $\mathcal{F}_n$  são as energias livres das fases supercondutora e normal, respectivamente.

As configurações de equilíbrio do sistema são aquelas que satisfazem as equações

$$\frac{\delta \mathcal{F}_s}{\delta \psi^*} = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{F}(\psi^* + \delta \psi^*) - \mathcal{F}(\psi^*)}{\delta \psi^*} = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\delta \mathcal{F}_s}{\delta \mathbf{A}} = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{F}(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) - \mathcal{F}(\mathbf{A})}{\delta \mathbf{A}} = 0. \quad (1.27)$$

$$1) \mathcal{F}_s(\psi^* + \delta \psi^*) - \mathcal{F}_s(\psi^*) = \int d^3 r \left\{ \delta \psi^* \left[ \alpha \psi + \beta \psi^* \psi^2 + \frac{q}{2mc} \mathbf{A} \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \psi \right) \right] - \frac{\hbar}{2mi} \nabla \delta \psi^* \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \psi \right) \right\}. \quad (1.28)$$

Integrando o último membro de (1.28) por partes:

$$\int d^3 r \nabla \delta\psi^* \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \psi \right) = \oint_S da \delta\psi^* \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \psi \right) - \int d^3 r \delta\psi^* \nabla \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \psi \right), \quad (1.29)$$

onde  $S$  é a superfície fronteira do supercondutor e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a esta superfície. O primeiro termo de (1.29) é zero se considerarmos que  $\delta\psi^* = 0$  na superfície ou

$$\mathbf{n} \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \psi \right) = 0 \quad (1.30)$$

em  $S$ . A condição (1.30) é bastante plausível, pois nos diz que não há fluxo de elétrons saindo nem entrando no supercondutor.

Substituindo este resultado em (1.28), vemos que

$$\mathcal{F}_s(\psi^* + \delta\psi^*) - \mathcal{F}_n(\psi^*) = \int d^3 r \delta\psi^* \left[ \alpha\psi + \beta\psi^*\psi^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \right]. \quad (1.31)$$

Aplicando o resultado (1.31) em (1.26), obtemos

$$\boxed{\alpha\psi + \beta\psi^*\psi^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0.} \quad (1.32)$$

$$2) \mathcal{F}(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) - \mathcal{F}(\mathbf{A}) = \int d^3 r \left\{ \delta\mathbf{A} \cdot \frac{q}{2mc} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \right] + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \right\} \quad (1.33)$$

Integrando o último termo de (1.33) por partes:

$$\int d^3 r \nabla \times \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \oint_S da \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} \times \mathbf{n} - \int d^3 r \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{h}. \quad (1.34)$$

O primeiro termo de (1.34) é nulo se  $\delta \mathbf{A} = 0$  em  $S$  ou se

$$\mathbf{h} \times \mathbf{n} = 0 \quad (1.35)$$

em  $S$ . A condição (1.35) corresponde a dizer que o campo magnético é perpendicular à superfície do supercondutor.

Substituindo este resultado em (1.33), temos

$$\int d^3 r \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{q}{2mc} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \right] - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{h} \right\}. \quad (1.36)$$

E substituindo (1.36) em (1.27), obtemos, finalmente

$$\boxed{\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{h} = \frac{q\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{q^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}.} \quad (1.37)$$

As equações (1.32) e (1.37) são as equações de Ginzburg-Landau.

A equação (1.32) nos permite ver uma característica importante dos supercondutores. Para isto, façamos  $\mathbf{A} = 0$  em (1.32) e definamos

$$f = \frac{\psi}{|\psi_\infty|} \quad \text{com} \quad |\psi_\infty| = \sqrt{\frac{-\alpha(T)}{\beta}} > 0. \quad (1.38)$$

Desta forma, a (1.32) torna-se

$$\xi^2(T) \nabla^2 f + f - |f|^2 f = 0, \quad (1.39)$$

onde

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha(T)|}. \quad (1.40)$$

Isso nos leva à conclusão de que as equações de Ginzburg-Landau nos induzem naturalmente à definição de uma nova escala de comprimento para o sistema, além do comprimento de penetração: o comprimento de coerência  $\xi$ . Para termos uma visão do significado físico deste comprimento, consideremos a versão linearizada da equação (1.39) em uma dimensão. Fazemos  $f \approx 1 + g(x)$ , onde  $g(x) \ll 1$  e, em primeira ordem em  $g$ , a equação (1.39) se torna

$$\xi^2 g'' - 2g = 0, \quad (1.41)$$

cuja solução é da forma

$$g(x) \sim e^{\pm \sqrt{2}x/\xi(T)}. \quad (1.42)$$

Isto nos mostra que pequenas variações de  $\psi$  em torno de  $\psi_\infty$  decaem com um comprimento característico  $\xi(T)$ , o *comprimento de coerência* do sistema (veja figura 1.5).

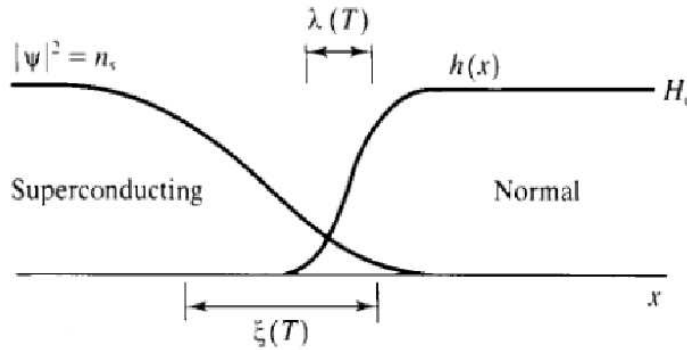


Figura 1.5: Comparação entre  $\xi$  e  $\lambda$  na interface de um supercondutor. Retirado da referência [6].

### 1.3.1 Campos Críticos

#### 1.3.1.1 O Campo Crítico $H_c$

Agora vamos estudar o modelo de Ginzburg-Landau sob a variação de um campo magnético externo. Como já dissemos na seção 1.1, existe um campo crítico termodinâmico  $H_c$  dado aproximadamente por (1.1) acima do qual a supercondutividade se perde. Este campo é dado pela equação:

$$\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_s = V \frac{H_c^2}{8\pi}, \quad (1.43)$$

onde  $V$  é o volume da amostra.

Na ausência de gradientes do parâmetro de ordem  $\psi$  e de campos, a equação (1.32) torna-se

$$\alpha\psi + \beta\psi^*\psi^2 = 0 \quad \therefore |\psi| = |\psi_\infty| = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, \quad (1.44)$$

se  $\alpha < 0$ . Caso contrário,  $\psi = 0$  e não há supercondutividade (veja figura 1.6). Substituindo este resultado na equação (1.25), obtemos

$$\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_s = V \frac{\alpha^2}{2\beta} \quad \therefore \boxed{H_c = \sqrt{4\pi \frac{\alpha^2}{\beta}}}. \quad (1.45)$$

#### 1.3.1.2 O Campo Crítico $H_{c2}$

Se  $|\psi|^2 \ll |\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$ , podemos ignorar o termo não-linear da equação (1.32) e escrever:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = |\alpha| \psi. \quad (1.46)$$

Esta equação é idêntica à equação de Schrödinger para uma partícula de carga  $q$  sob ação de um campo magnético.  $|\alpha|$  assume o papel da auto-energia do sistema.

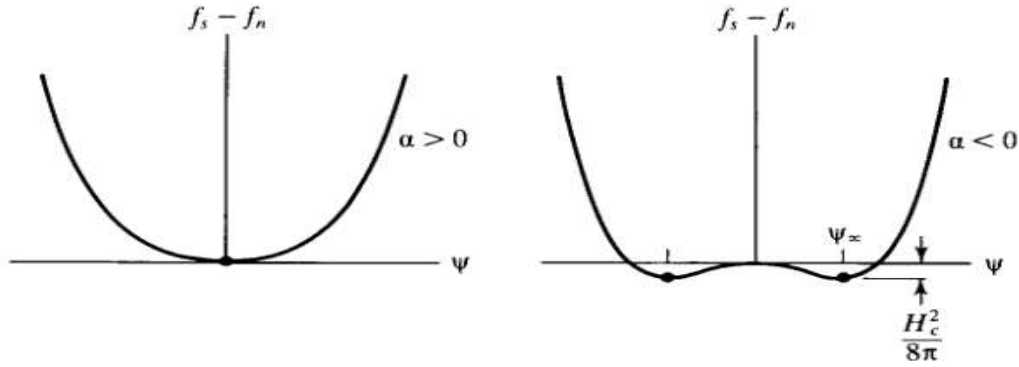


Figura 1.6: Diagramas mostrando o aparecimento de pontos fixos na energia livre para  $\alpha < 0$ , ocasionando a transição de fase normal-supercondutor. Retirado da referência [6].

Consideremos agora o problema de um supercondutor na presença de um campo externo  $\mathbf{H} = H\hat{z}$ . Escolhamos um *gauge* tal que  $\mathbf{A} = Hx\hat{y}$ . Substituindo isto na equação (1.46), temos

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} Hx \hat{y} \right)^2 \psi = |\alpha| \psi \quad \therefore \quad \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{q\hbar}{imc} Hx \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2m} \left( \frac{qH}{c} \right)^2 x^2 \right] \psi = |\alpha| \psi. \quad (1.47)$$

Supondo uma solução da seguinte forma:

$$\psi = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x), \quad (1.48)$$

e substituindo em (1.47), temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f'' + \frac{1}{2m} \left( \frac{qH}{c} \right)^2 (x - x_0)^2 f = \left( |\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) f, \quad (1.49)$$

onde

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{qH}. \quad (1.50)$$

A equação (1.49) nada mais é que a conhecida equação de Schrödinger para o oscilador

harmônico com frequência

$$\omega = \frac{qH}{mc}. \quad (1.51)$$

E sabemos que as auto-energias do oscilador harmônico são dadas por

$$|\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = \hbar \frac{qH}{mc} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.52)$$

Rearrmando os termos da equação (1.52), obtemos os valores possíveis para  $H$  sem que se desfaça a supercondutividade:

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi(2n+1)} \left( \frac{1}{\xi^2} + k_z^2 \right), \quad (1.53)$$

onde  $\Phi_0$  e  $\xi$  estão definidos em (1.2) e (1.40), respectivamente. Vemos, assim, que os valores de  $H$  possuem um limite superior, onde  $k_z = 0$  e  $n = 0$ . Este valor é

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2(T)}. \quad (1.54)$$

Comparando agora os valores dos campos críticos  $H_c$  e  $H_{c2}$ , vemos que

$$H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_c, \quad (1.55)$$

onde

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}, \quad (1.56)$$

onde  $\lambda$  está definido em (1.20), com  $n_s = |\psi_\infty|^2$ .

O resultado (1.55) nos permite identificar dois tipos básicos de supercondutores. Os chamados do *tipo I* (para os quais  $H_{c2} < H_c$ , ou seja,  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) e os do *tipo II* (para os quais  $H_{c2} > H_c$ , ou seja  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ).

A diferença crucial entre os dois tipos de supercondutores é a espécie de transição de fase

que ocorre quando se varia o campo. Nos supercondutores tipo I a transição é de primeira ordem, com a amostra permanecendo normal abaixo do campo  $H_{c2} < H_{c1}$  e havendo um salto descontínuo para a supercondutividade em  $H_{c2}$ , além de haver histerese na volta, com a amostra permanecendo supercondutora até atingir o campo  $H_{c1}$ , como vemos na figura 1.7. Já nos supercondutores tipo II, a transição é de segunda ordem e a amostra se torna supercondutora continuamente a partir de  $H_{c2}$ .

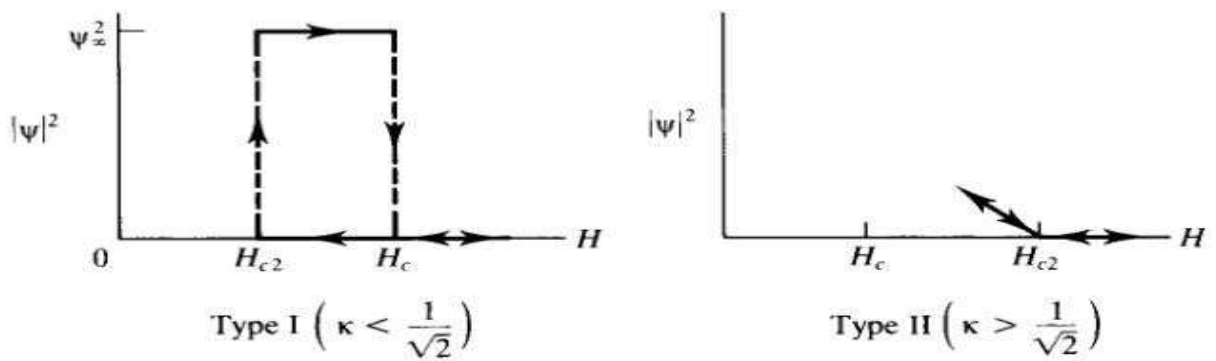


Figura 1.7: Comparação entre as transições de fase de supercondutores tipo I e II. Retirado da referência [4].

### 1.3.1.3 O Campo Crítico $H_{c3}$

No tratamento feito para acharmos o campo  $H_{c2}$  não consideramos os efeitos das condições de contorno (1.30) para  $\psi$  na superfície do supercondutor. Se levarmos em conta estas condições, como feito por Saint-James e de Gennes [15] em 1963, veremos que a supercondutividade pode aparecer numa camada de largura  $\sim \xi$  perto da interface metal-isolante para um campo aplicado paralelo à interface  $H_{c3}$  aproximadamente 1,695 vezes maior que  $H_{c2}$ . Não vamos detalhar os cálculos que levam a esta conclusão aqui, mas podemos dizer que as condições de contorno para  $\psi$  na presença de um campo paralelo à superfície do supercondutor leva à existência de soluções de (1.49) com  $H > H_{c2}$  e com um campo máximo dado por  $H_{c3} = 1.695H_{c2}$  para uma amostra semi-infinita. Maiores detalhes nas referências [15] e [6].

### 1.3.2 Vórtices em Supercondutores tipo II

No restante desta dissertação, focaremos apenas em supercondutores tipo II e não nos importaremos com os efeitos de bordas. Os supercondutores de altas temperaturas, incluindo o BSCCO, são todos tipo II.

#### 1.3.2.1 O Campo Crítico $H_{c1}$

Queremos obter o valor do campo a partir do qual é permitida a penetração do fluxo magnético sob a forma de um vórtice. Este campo denotaremos por  $H_{c1}$ .

Consideremos o caso de um campo aplicado homogêneo e que a energia de um vórtice por unidade de comprimento é  $\epsilon_1$ . Na transição,

$$G_s(\text{sem vórtices}) = G_s(\text{um vórtice}), \quad (1.57)$$

onde  $G_s$  é a energia livre de Gibbs do supercondutor:

$$G_s = F_s - \frac{H}{4\pi} \int h \, d^3 r. \quad (1.58)$$

Na ausência de fluxo,  $G_s = F_s$  e a equação (1.57) se torna

$$F_s = F_s + \epsilon_1 L - \frac{H_{c1} \Phi_0 L}{4\pi} \quad \therefore \quad \boxed{H_{c1} = \frac{4\pi \epsilon_1}{\Phi_0}}, \quad (1.59)$$

onde  $L$  é o comprimento da linha de fluxo no supercondutor.

Entre  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  existe uma fase onde o campo magnético penetra no material em forma de vórtices (chamada, alguma vezes de “fase de Shubnikov” em homenagem a Lev Shubnikov, que descobriu experimentalmente esta fase [16]. No entanto, Shubnikov não teve meios de descrever tal fase, coisa que só ocorreu mais tarde, quando Abrikosov [17] previu e descreveu

teoricamente esta fase.); abaixo de  $H_{c1}$ , existe o efeito Meissner e o campo não penetra o supercondutor, enquanto entre  $H_{c2}$  e  $H_{c3}$  a supercondutividade fica restrita à superfície. Um diagrama com estas fases pode ser visto na figura 1.8.

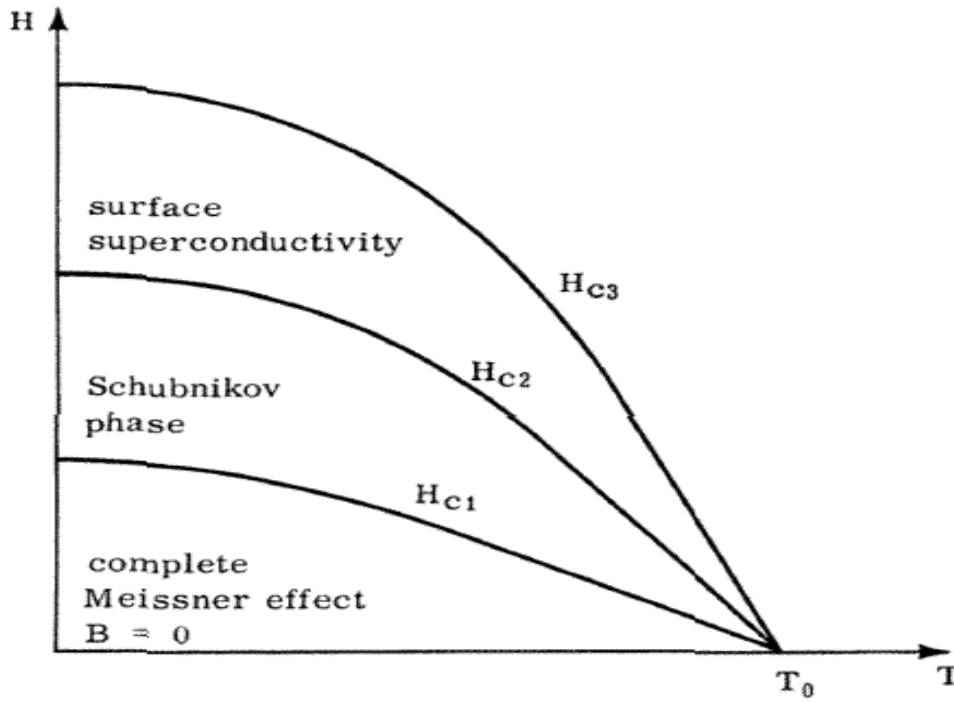


Figura 1.8: Diagrama de fase típico para um supercondutor tipo II. Retirado da referência [4].

### 1.3.2.2 Estudo de um Vórtice Isolado

O cálculo de  $\epsilon_1$  na equação (1.59) é em geral impossível de ser feito analiticamente. No entanto, podemos nos restringir ao caso em que  $\kappa \gg 1$ , em que se podem obter resultados analíticos. Neste limite de um supercondutor fortemente tipo II, a aproximação de London é válida para  $r \gg \xi$ , onde  $r$  é a distância de um ponto ao centro do vórtice. Isto acontece porque, da mesma forma que na equação (1.42),  $|\psi|$  é aproximadamente constante nesta região. Um esquema do comportamento aproximado de  $|\psi|$  e  $h$  pode ser visto na figura 1.9. Assim, para  $r \gg \xi$ , vale a

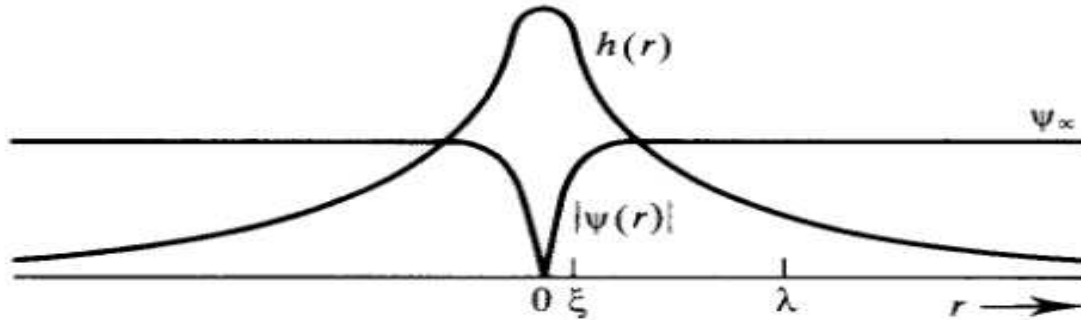


Figura 1.9: Diagrama mostrando o comportamento do campo e da amplitude do parâmetro de ordem em função da distância num supercondutor fortemente tipo II. Retirado da referência [6].

equação (1.19b), com uma pequena modificação para acomodar a ideia dos vórtices:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{h} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \hat{z} \delta(\boldsymbol{\rho}). \quad (1.60)$$

A delta de Dirac na equação (1.60) vem diretamente da condição de quantização do fluxo:

$$\Phi = \frac{c}{q} \oint \left( m \mathbf{v}_s + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{l} = n \Phi_0. \quad (1.61)$$

A partir de (1.61), com  $n = 1$ , podemos obter a componente  $z$  de (1.60) utilizando o teorema de Stokes e as equações de Maxwell.

Podemos obter facilmente a solução exata da equação (1.60) usando análise de Fourier. O resultado é

$$h(\rho) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{\rho}{\lambda} \right), \quad (1.62)$$

onde  $K_0$  é a função de Neumann de ordem zero de argumento imaginário. Assim,  $h$  decai exponencialmente como  $e^{-\rho/\lambda}$  para  $\rho$  grande e diverge logaritmicamente como  $\ln(\lambda/\rho)$  para  $\rho \rightarrow 0$ . No entanto, nossa aproximação não vale para  $\rho \rightarrow 0$  e  $h$  na verdade é bem comportado

nesta região também. De fato

$$h(\rho) \rightarrow \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left( \frac{\pi\lambda}{2\rho} \right)^{1/2} e^{-\rho/\lambda} \quad \rho \rightarrow \infty; \quad (1.63)$$

$$h(\rho) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left( \ln \frac{\lambda}{\rho} + 0.12 \right) \quad \xi \ll \rho \ll \lambda. \quad (1.64)$$

De posse do campo  $h(\rho)$ , podemos finalmente calcular a energia de um vórtice isolado por unidade de comprimento:

$$\epsilon_1 = \frac{m}{2} n_s \int v^2 d^2 r + \frac{1}{8\pi} \int h^2 d^2 r = \frac{1}{8\pi} \int [h^2 + \lambda^2 (\nabla \times \mathbf{h})^2] d^2 r, \quad (1.65)$$

onde as integrais são computadas na região  $\rho > \xi$ . Usando integração por partes no segundo termo do último membro da equação (1.65),

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} d^2 r + \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint (\mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.66)$$

e usando (1.60), podemos simplificar o primeiro termo:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int h \Phi_0 \delta(\rho) d^2 r + \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint (\mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.67)$$

Como a integração não passa por  $\rho = 0$ , o primeiro termo de (1.67) é nulo. O segundo termo é nulo na fronteira  $\rho \rightarrow \infty$ , mas, na fronteira  $\rho = \xi$  ele dá uma contribuição não-nula:

$$\epsilon_1 = \frac{\lambda^2}{8\pi} \left( h \frac{dh}{d\rho} 2\pi\rho \right)_{\xi}. \quad (1.68)$$

Usando (1.64),

$$\epsilon_1 \approx \frac{\Phi_0}{8\pi} h(\xi) = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa. \quad (1.69)$$

Substituindo finalmente em (1.59),

$$H_{c1} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \kappa = \frac{H_c}{\sqrt{2\kappa}} \ln \kappa. \quad (1.70)$$

Para  $\kappa \gg 1$ ,  $H_{c1} \ll H_c$ . De fato, a não ser pelo fator  $\ln \kappa$ ,  $H_c$  é a média geométrica de  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ .

### 1.3.2.3 Interação entre Linhas de Vórtice

Na aproximação  $\kappa \gg 1$ , as equações para o campo são lineares (veja equação (1.60)) e podemos usar superposição para tratar de dois vórtices localizados nas posições  $\rho_1$  e  $\rho_2$ :

$$h(\rho) = [h(|\rho - \rho_1|) + h(|\rho - \rho_2|)]\hat{z}. \quad (1.71)$$

Substituindo isto em (1.67), obtemos

$$\epsilon = \frac{\Phi_0}{8\pi} [h(|\xi - \rho_1|) + h(|\xi + \rho_2|) + h(|\rho_1 - \xi - \rho_2|) + h(|\rho_2 - \xi - \rho_1|)], \quad (1.72)$$

Onde  $\xi = \xi\hat{\rho}$ . Os dois primeiros termos do lado direito de (1.72) constituem as auto-energias de cada linha de vórtice, enquanto os dois últimos constituem a energia de interação entre as duas linhas de fluxo. Como, em geral queremos o campo para  $\rho_1 - \rho_2 \gg \xi$ , esta energia é

$$V_{12} = \frac{\Phi_0}{4\pi} h(|\rho_1 - \rho_2|) = \boxed{2\epsilon_0 K_0 \left( \frac{(|\rho_1 - \rho_2|)}{\lambda} \right)}, \quad (1.73)$$

(Utilizamos a equação (1.62) na última passagem.) onde

$$\epsilon_0 = \frac{\Phi_0^2}{16\pi^2\lambda^2}. \quad (1.74)$$

A interação (1.73) é de caráter repulsivo, decai exponencialmente para distância grandes e

varia logaritmicamente para pequenas distâncias. Para um sistema de vários vórtices, Abrikosov [17] encontrou primeiramente que a configuração mais estável era uma rede quadrada. No entanto, um trabalho posterior de Kleiner, Roth e Autler ([18]), corrigiu o trabalho de Abrikosov e mostrou que os vórtices tendem a ficar numa rede triangular, a *rede de Abrikosov* (veja figura 1.10). A distância  $a_\Delta$  entre os vórtices nesta rede pode ser obtida observando-se que cada célula unitária contém um vórtice e possui uma área igual a  $a_\Delta^2 \sin(2\pi/3) = (\sqrt{3}/2)a_\Delta^2$ . Assim, para  $N$  células unitárias,

$$H = \frac{N\Phi_0}{N(\sqrt{3}/2)a_\Delta^2} \therefore a_\Delta = \left( \frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}H} \right)^{1/2}. \quad (1.75)$$

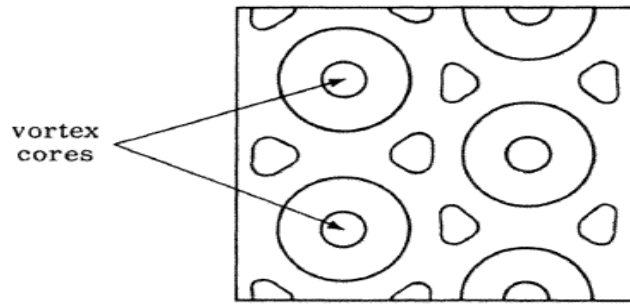


Figura 1.10: Diagrama mostrando uma rede de Abrikosov, com os vórtices dispostos numa rede triangular. Retirado da referência [4].

## Supercondutores de Alta Temperatura Crítica

Em 1986, Bednorz e Müller [19] descobriram que o composto cerâmico LaBaCuO apresenta supercondutividade a  $\sim 30K$ , um pouco acima do limiar sugerido pelo mecanismo elétron-fônon da teoria BCS [12, 1, 2]. Esta descoberta deu origem à família dos óxidos de cobre, protótipos dos supercondutores de altas temperaturas (veja figura 2.1 abaixo). Entre as características destes supercondutores, estão:

- *Estrutura em camadas.* Os supercondutores de alta temperatura possuem estrutura de camadas supercondutores intercaladas por camadas isolantes (veja figura 4.2). O modelo ideal para a descrição das propriedades físicas destes materiais é o modelo de Lawrence-Doniach [20] (Veja seção 2.2).
- *Anisotropia.* Esses supercondutores possuem propriedades físicas diferentes ao longo dos planos supercondutores e na direção perpendicular a esses planos. A massa efetiva, comprimento de penetração e de coerência são diferentes para essas duas direções.
- *Supercondutores tipo II.* Todos os supercondutores de alta temperatura são tipo II. Portanto, existe penetração de vórtices entre os campos críticos  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ . Estes vórtices interagem entre si da forma que mostraremos posteriormente.

### 2.1 Teoria de Ginzburg-Landau Anisotrópica

Podemos utilizar a teoria de Ginzburg-Landau contínua anisotrópica [23, 6] para descrever os supercondutores de alta temperatura nos casos em que a distância entre os planos supercondu-

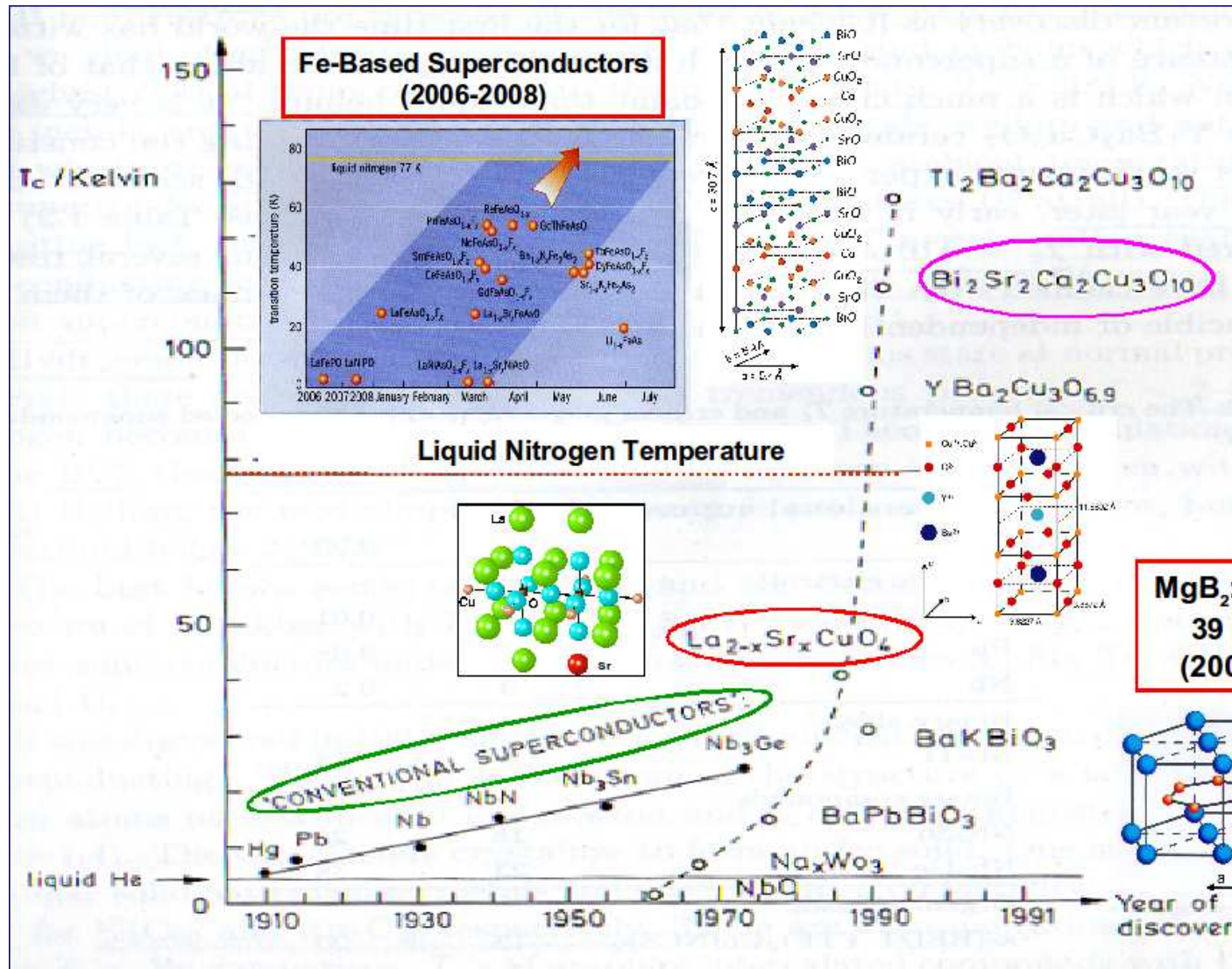


Figura 2.1: Evolução das temperaturas críticas dos supercondutores de altas temperaturas mostrando as estruturas cristalinas dos principais compostos supercondutores *high-T<sub>c</sub>*, como a do Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>CaCu<sub>2</sub>O<sub>8</sub>, a do YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub>, a do MgB<sub>2</sub> e a do La<sub>2-x</sub>Sr<sub>x</sub>CuO<sub>4</sub>. Bem como mostrando a evolução nas temperaturas críticas dos chamados Supercondutores baseados em ferro (*Iron-based superconductors*) [21]. Retirado, dentre outros, da referência [22].

tores pode ser negligenciada. As equações (1.32) e (1.37) são válidas, mas temos duas massas efetivas:  $m_{ab}$  no plano supercondutor e  $m_c$  no eixo  $z$ . Podemos, então, reescrever tais equações como:

$$\alpha\psi + \beta\psi^*\psi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \left[ \frac{1}{m} \right] \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi = 0; \quad (2.1a)$$

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{h} = \left[ \frac{1}{m} \right] \left[ \frac{q\hbar}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{q^2}{c} |\psi|^2 \mathbf{A} \right], \quad (2.1b)$$

onde

$$\left[ \frac{1}{m} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{ab}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_c} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

é o tensor de massa, diagonal devido à escolha de sistema de eixos que fizemos.

Utilizando a mesma aproximação usada no estudo que fizemos de um vórtice isolado em 1.3.2.2, podemos reobter todos aqueles resultados para nosso caso anisotrópico:

$$h(\rho) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_{ab}^2} K_0 \left( \frac{\rho}{\lambda_{ab}} \right); \quad (2.3a)$$

$$\epsilon_{ab} = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}} \right)^2 \ln \left( \frac{\lambda_{ab}}{\xi_{ab}} \right); \quad (2.3b)$$

$$V_{12} = 2\epsilon_0 K_0 \left( \frac{(|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|)}{\lambda_{ab}} \right). \quad (2.3c)$$

Aqui temos  $\lambda_{ab}$ ,  $\xi_{ab}$  e  $\epsilon_0$  igual ao das definições (1.20), (1.40) e (1.73), mas com  $m = m_{ab}$ .

Usaremos definições análogas para  $\lambda_c$  e  $\xi_c$ .

Podemos, ao invés de resolver novamente os mesmo problemas para o caso anisotrópico, fazer a identificação (veja [24]):

$$\tilde{\mathbf{r}} = (x, y, z/\gamma) \quad \tilde{\mathbf{A}} = (A_x, A_y, \gamma A_z) \quad \tilde{\mathbf{h}} = (\gamma h_x, \gamma h_y, h_z), \quad (2.4)$$

onde  $\gamma = (m_c/m_{ab})^{1/2}$ .

Podemos, agora, trabalhar como no caso isotrópico com  $m = m_{ab}$  e depois aplicar as transformações (2.4). Uma situação interessante é quando as linhas de vórtice não são retas, mas variam lentamente com  $z$ , o que permite que a interação entre elas continue sendo local em  $z$ . Façamos primeiro o caso isotrópico para depois aplicar as mudanças (2.4). A equação (1.60) se torna

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{h} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \hat{\mathbf{l}}(z) \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(z)), \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{r}(z)$  é a curva da linha de fluxo no supercondutor e  $\hat{\mathbf{l}}(z)$  é o vetor unitário na direção do vetor tangente à curva  $\mathbf{r}(z)$ . Como  $\mathbf{r}(z)$  varia lentamente com  $z$ , podemos fazer  $\hat{\mathbf{l}}(z) \approx \hat{\mathbf{z}}$  e tratar  $\mathbf{r}(z)$  como uma constante para obter

$$h(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_{ab}^2} K_0 \left( \frac{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(z)|}{\lambda_{ab}} \right). \quad (2.6)$$

Calculamos agora a energia  $\epsilon_1$  fazendo a conversão de (2.6) a partir de (2.4):

$$|\mathbf{h}(\mathbf{r})| = |\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r})| \left[ \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right]^{1/2}, \quad (2.7)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{h}$  e o eixo  $z$  (ou seja, o ângulo entre a linha de fluxo e o eixo  $z$ ). Desta forma,

$$\epsilon_1(\theta) = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}} \right)^2 \ln \kappa_{ab} \left[ \frac{m_{ab}}{m_c} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (2.8)$$

Como estamos considerando  $\theta$  pequeno,

$$\epsilon_1(\theta) \approx \epsilon_1(0) \left( 1 + \frac{m_{ab} - m_c}{m_c} \theta^2 \right). \quad (2.9)$$

### 2.1.1 Líquidos de Linha

A energia total de uma linha é dada por

$$\int_0^L dz \epsilon(\theta) \left[ 1 + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} \approx \epsilon_1(0)L + \frac{1}{2}\epsilon_1(0)\frac{m_{ab}}{m_c} \int_0^L dz \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)^2. \quad (2.10)$$

Calculemos agora a média térmica de  $|\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2$  [25]:

$$\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \exp \left[ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_B T} \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 ds \right]}{\int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) \exp \left[ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_B T} \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 ds \right]}, \quad (2.11)$$

onde  $\int \mathcal{D}\mathbf{r}(s)$  denota uma integral de caminho de Feynman, i.e., uma soma sobre todos os estados possíveis de uma linha de fluxo com  $\mathbf{r}(0)$  e  $\mathbf{r}(L)$  fixos.

Introduzindo a transformada de Fourier de  $\mathbf{r}(z)$ :

$$\mathbf{r}(k) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dz e^{-ikz} \mathbf{r}(z) \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{r}(z) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikz} \mathbf{r}(k), \quad (2.12b)$$

e substituindo em (2.11), obtemos

$$\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle = \frac{1}{L} \sum_{q,q'} \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{r} (e^{i(q+q')z} - 2e^{iqz} + 1) \mathbf{r}(q) \cdot \mathbf{r}(q') \exp \left( -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_B T} \sum_k k^2 |\mathbf{r}(k)|^2 \right)}{\int \mathcal{D}\mathbf{r} \exp \left( -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_B T} \sum_k k^2 |\mathbf{r}(k)|^2 \right)}. \quad (2.13)$$

Assim,

$$\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle = \frac{1}{L} \sum_{q,q'} (e^{i(q+q')z} + 2e^{iqz} + 1) \langle \mathbf{r}(q) \cdot \mathbf{r}(q') \rangle. \quad (2.14)$$

Usando o teorema da equipartição:

$$\langle \mathbf{r}(q) \cdot \mathbf{r}(q') \rangle = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1 q'^2} \left\langle \mathbf{r}(q) \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}(-q')} \right\rangle = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1 q'^2} \delta_{q,-q'} k_B T, \quad (2.15)$$

onde  $E$  é a energia total da linha e  $\tilde{\epsilon}_1 = (m_{ab}/m_c)\epsilon_1$ . Substituindo (2.15) em (2.14), obtemos

$$\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle = \frac{1}{L} \sum_q \frac{2k_B T}{\tilde{\epsilon}_1 q^2} (1 - e^{iqz}) \quad (2.16)$$

Aproximando o somatório de (2.16) por uma integral em  $q$ , obtemos

$$\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\tilde{\epsilon}_1} |z|. \quad (2.17)$$

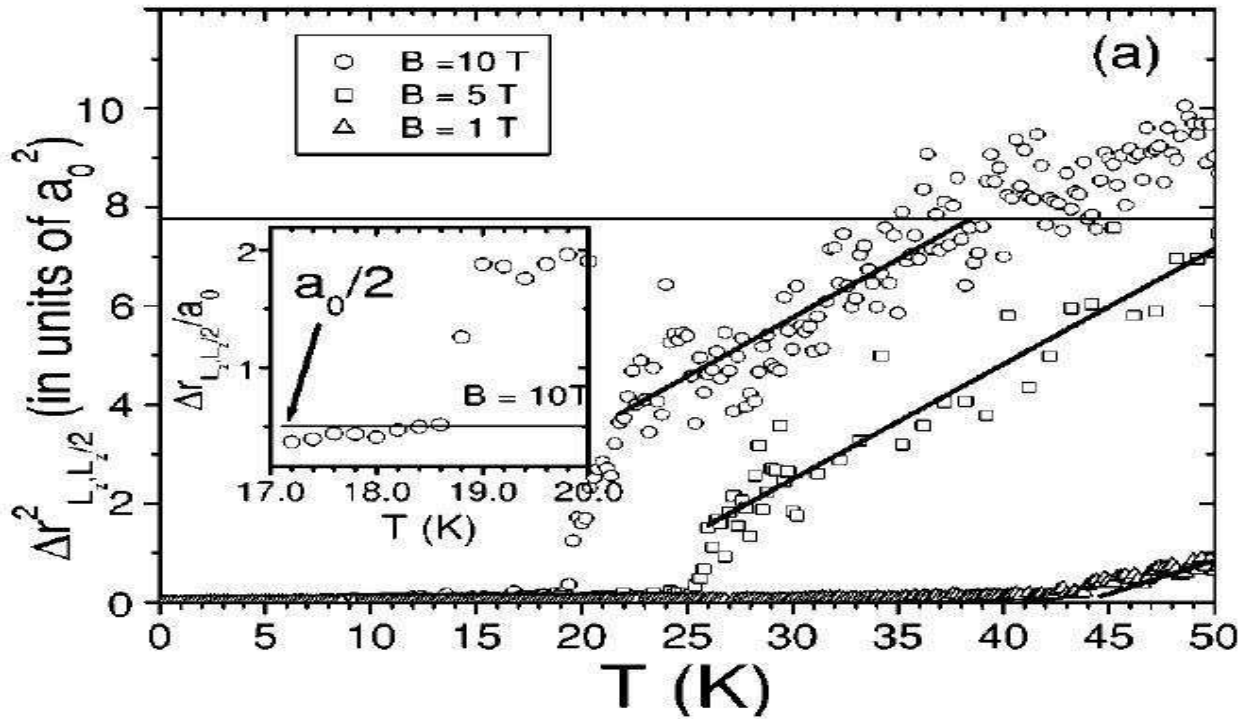


Figura 2.2: Gráfico da dependência em  $T$  do desvio médio quadrático ( $\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle$ ) das trajetórias das linhas de vórtice obtido por meio de simulação numérica para alguns valores de campo aplicado. As linhas sólidas marcam a dependência linear em  $T$  das curvas numéricas, característico de uma linha de vórtices derretida, como a que tratamos na seção 2.1.1. No detalhe, a transição descontínua na temperatura de derretimento para campo aplicado  $B = 10T$ . Retirado da referência [26].

Desta forma, vemos que as linhas de fluxo tendem a se difundir com  $z$  como numa cami-

nhada aleatória:

$$\sqrt{\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle} = \sqrt{2D|z|}, \quad \text{onde} \quad D = \frac{k_B T}{\tilde{\epsilon}_1} = \frac{m_c}{m_{ab}} \frac{4\pi k_B T}{\Phi_0 H_{c1}} \quad (2.18)$$

é a constante de difusão da linha. A dependência linear de  $\langle |\mathbf{r}(z) - \mathbf{r}(0)|^2 \rangle$  foi constatada em [26], como pode ser visto na figura 2.2. Assim, se  $\sqrt{\langle |\mathbf{r}(z)|^2 \rangle}$  é maior que a distância média  $a_0$  entre os vórtices, dizemos que o sistema está *entrelaçado* [27] no sentido de que as linhas de vórtice ficam entrelaçadas entre si. Usando (1.75), podemos fazer  $a_0^2 = \Phi_0/H$  e obter o comprimento de entrelaçamento, que indica a profundidade em  $z$  no qual o sistema começa a ficar entrelaçado:

$$l_z = \frac{\tilde{\epsilon}_1 a_0^2}{2k_B T} = \frac{\tilde{\epsilon}_1 \Phi_0}{2k_B H T}. \quad (2.19)$$

Se  $H < H_{x1} = \tilde{\epsilon}_1 \Phi_0 / 2Lk_B T$ , onde  $L$  é a espessura da amostra supercondutora, o sistema é dito desentrelaçado. Aumentando o campo externo de modo que  $H > H_{x1}$ , o sistema se torna entrelaçado e o entrelaçamento aumenta até que  $H > H_{x2} = \tilde{\epsilon}_1 \Phi_0 / 2sk_B T$ , onde  $s$  é a espessura dos planos de  $\text{CuO}_2$ . Neste último regime, os vórtices se entrelaçam já no primeiro plano de  $\text{CuO}_2$  e são ditos estar “super-entrelaçados” ou “desacoplados”. O sistema se comporta como um conjunto de planos formados por vórtices-panqueca pontuais fracamente interagentes (Veja figura 2.3).

Estes cálculos, apesar de terem sido feitos para apenas uma linha de fluxo, são válidos sempre que a interação entre os vórtices for desprezível, o que ocorre quando o ruído térmico for grande o suficiente, ou seja, quando a linha de fluxo estiver na fase “líquida”.

### 2.1.2 Derretimento da Rede de Vórtices

Levemos agora em conta a interação entre os vórtices. A energia livre de Gibbs para um sistema de  $N$  vórtices é dada por

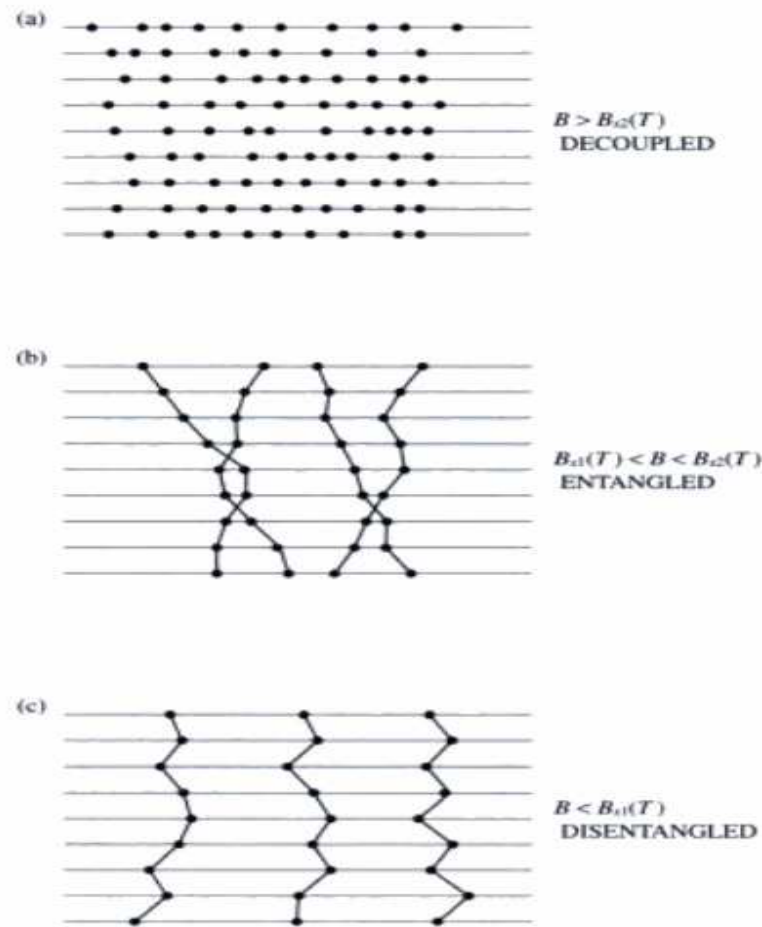


Figura 2.3: Esquema mostrando as linhas de vórtice e os planos de  $\text{CuO}_2$  nos três regimes: (a) desacoplado, (b) entrelaçado e (c) desentrelaçado. Retirado da referência [28].

$$G_s = \left( \epsilon_1 - \frac{H\Phi_0}{4\pi} \right) NL + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\epsilon}_1 \int_0^L dz \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int dz V(\mathbf{r}_i(z) - \mathbf{r}_j(z)), \quad (2.20)$$

onde  $\epsilon_1 = \epsilon_1(0)$  e  $V$  representa a energia de interação entre os vórtices. Evidentemente, podemos elaborar toda uma mecânica estatística a partir de (2.20). Isto é exatamente o que faremos a partir daqui até o final desta seção.

Primeiramente, vamos nos debruçar sobre o derretimento das linhas de vórtice. Utilizaremos aqui um argumento simples, mas cujos resultados são corretos, cuja essência se encontra na referência [27]. Para uma análise mais cuidadosa, veja [25]. Um exemplo de derretimento de linhas de vórtices para o BSCCO pode ser visto na figura 2.4 [26] e um tratamento para alguns supercondutores baseados em ferro aplicando teoria elástica em sua plena forma pode ser visto em [29].

Considere uma linha de vórtice numa rede. Vamos estudar esta linha considerando que ela sente um potencial efetivo produzido pelas demais linhas. Para linhas aproximadamente no eixo  $z$ , o sistema fica em equilíbrio na rede de Abrikosov em  $T = 0$  e podemos estudar as deformações desta rede devido à temperatura finita introduzindo uma variável  $\mathbf{u}(z)$  que caracteriza o desvio desta linha em relação à sua posição de equilíbrio. Supondo pequeno este desvio, podemos reescrever a energia livre (2.20), a menos de constantes:

$$G = \int_0^L dz \left[ \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_1 \left( \frac{d\mathbf{u}}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} K u^2 \right], \quad (2.21)$$

onde  $K$  é uma constante que estimaremos mais adiante.

Calculemos agora a média térmica de  $\mathbf{u}(z)$ :

$$\langle |\mathbf{u}(z)|^2 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{u}(s) |\mathbf{u}(z)|^2 \exp \left\{ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_B T} \int_0^L \left[ \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \right)^2 + K u^2 \right] ds \right\}}{\int \mathcal{D}\mathbf{u}(s) \exp \left\{ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_B T} \int_0^L \left[ \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \right)^2 + K u^2 \right] ds \right\}}. \quad (2.22)$$

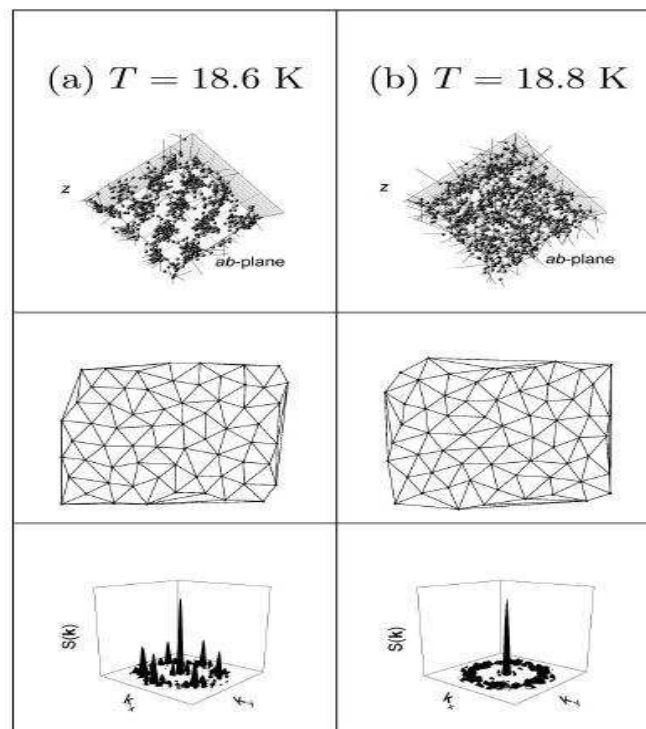


Figura 2.4: Figura mostrando o derretimento de uma linha de vórtices, mostrando, de cima para baixo, as configurações 3D dos sistemas (a) antes de derreter e (b) derretido, bem como suas respectivas projeções bidimensionais e gráficos do fator de estrutura associado. O derretimento é indicado pelo desaparecimento dos picos de Bragg do fator de estrutura. Retirado da referência [26].

Aplicando o mesmo procedimento da subseção anterior, obtemos

$$\langle |\mathbf{u}(z)|^2 \rangle = \frac{1}{L} \sum_q \frac{k_B T}{\tilde{\epsilon}_1 q^2 + K} \quad (2.23)$$

Aproximando o somatório acima por uma integral em  $q$  novamente, obtemos

$$\langle |\mathbf{u}(z)|^2 \rangle = \frac{k_B T}{2\sqrt{\tilde{\epsilon}_1 K}}. \quad (2.24)$$

Agora precisamos calcular a constante  $K$ . Usando o resultado (1.73) para a interação entre linhas de vórtice e sabendo que as linhas estão em equilíbrio quando numa rede de Abrikosov, na qual a distância entre dois vórtices é dada por (1.75), podemos dizer que

$$K \approx \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda_{ab}^2} \left. \frac{d^2 K_0}{d\rho^2} \right|_{\rho=a_\Delta}. \quad (2.25)$$

Usando os limites (1.63) e (1.64), obtemos

$$K \approx \frac{\epsilon_0}{a_\Delta^2}, \quad \text{se } a_\Delta \ll \lambda_{ab}; \quad (2.26a)$$

$$K \approx \frac{\epsilon_0}{a_\Delta^2} \left( \frac{a_\Delta}{\lambda_{ab}} \right)^{3/2} e^{-a_\Delta/\lambda_{ab}}, \quad \text{se } a_\Delta \gg \lambda_{ab}, \quad (2.26b)$$

onde  $\epsilon_0$  está definido em (1.74).

Agora vamos obter as temperaturas de derretimento a partir do critério de Lindemann, que diz que a fusão ocorre quando

$$\frac{\langle |\mathbf{u}(z)|^2 \rangle}{a_\Delta^2} = c_L^2, \quad (2.27)$$

onde  $c_L$  é uma constante da ordem de  $0.10 - 0.15$ . Assim,

$$k_B T_m \approx c_L^2 \epsilon_0 \left( \frac{m_{ab}}{m_c} \right)^{1/2} a_\Delta \quad \text{se } a_\Delta \ll \lambda_{ab}; \quad (2.28a)$$

$$k_B T_m \approx c_L^2 \epsilon_0 \left( \frac{m_{ab}}{m_c} \right)^{1/2} a_\Delta \left( \frac{a_\Delta}{\lambda_{ab}} \right)^{3/2} e^{-a_\Delta/2\lambda_{ab}} \quad \text{se } a_\Delta \gg \lambda_{ab}. \quad (2.28b)$$

Um diagrama de fase esquemático para o BSCCO está mostrado na figura 2.5. Um diagrama de fase com pontos experimentais e resultados de simulação numérica pode ser visto na figura 2.6.

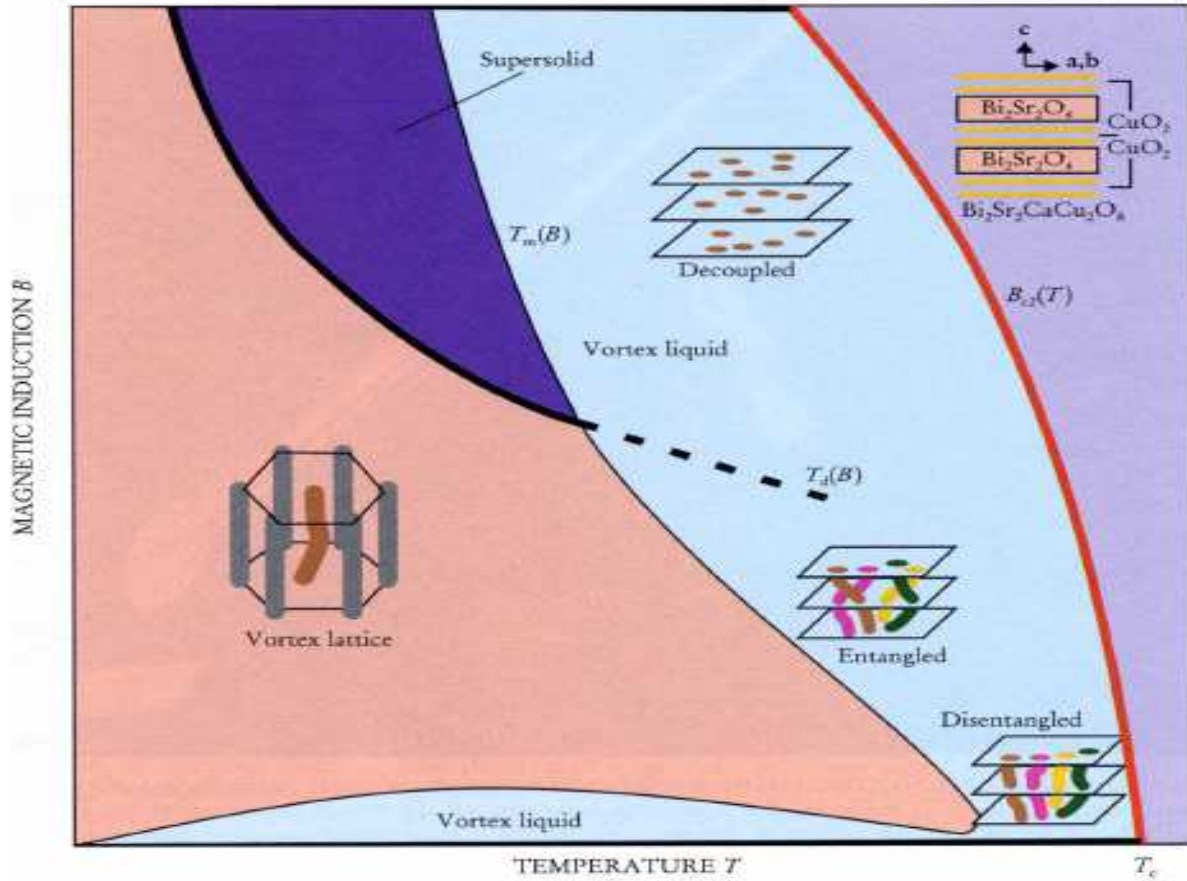


Figura 2.5: Diagrama de fase esquemático para o BSCCO, mostrando os regimes de vórtices desentrelaçados, entrelaçados e desacoplados na fase líquida, além de uma fase sólida e uma fase supersólida. Retirado da referência [27].

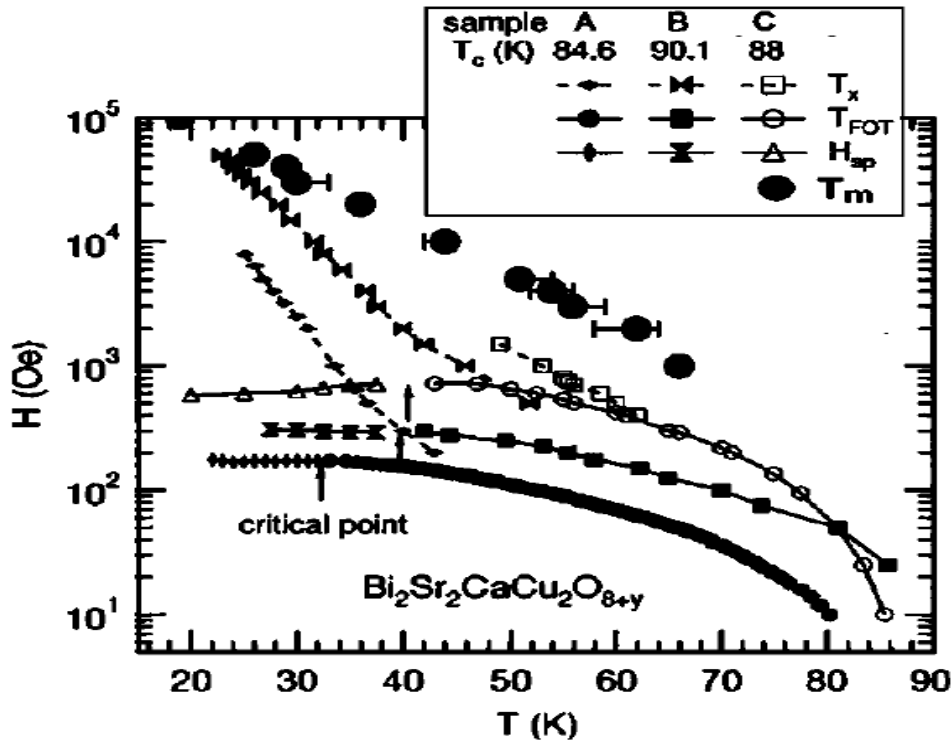


Figura 2.6: Diagrama de fase experimental para o BSCCO obtido por dois trabalhos experimentais diferentes, mostrando também temperaturas de derretimento obtidas por simulações numéricas ( $T_m$ , círculos cheios) feitas pelo nosso grupo [26]. As amostras A e B foram medidas por Shibauchi et al. [30] e a amostra C foi medida por Fuchs et al. [31].  $T_{FOT}$  é a temperatura da transição de primeira ordem para campos baixos;  $H_{sp}$  marca o segundo pico da curva de magnetização;  $T_x$  está associado ao derretimento da fase supersólida. Retirado da referência [26].

### 2.1.3 Analogia entre Linhas de Fluxo e Bósons Bidimensionais

Podemos fazer uma analogia entre linhas de fluxo e partículas em duas dimensões, onde a coordenada  $z$  faz o papel do tempo. De fato, David Nelson [32, 25] fez uma analogia entre a mecânica estatística de linhas de vórtices e a dinâmica quântica de um sistema de bósons interagentes em duas dimensões. Nesta seção, vamos dar uma ideia de como essa analogia se processa.

Em primeiro lugar, percebemos que a função de partição grã-canônica para um sistema de

$N$  vórtices é

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \mathcal{D}\mathbf{r}_1(z) \cdots \int \mathcal{D}\mathbf{r}_N(z) e^{-E/k_B T}, \quad (2.29)$$

onde  $E$  é a energia do sistema. Esta função de partição pode ser imaginada como uma integral de trajetória de Feynman com tempo imaginário para o ensemble grão-canônico. Identificando  $E$  de (2.29) com o  $G_s$  da equação (2.20), podemos fazer as correspondências mostradas na tabela 2.1.

| Linhas de Vórtice     | $\tilde{\epsilon}_1$ | $k_B T$ | $L$          | $\frac{H\Phi_0}{4\pi} - \epsilon_1$ | $\frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda_{ab}^2} K_0(\rho/\lambda_{ab})$ |
|-----------------------|----------------------|---------|--------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Bósons Bidimensionais | $m$                  | $\hbar$ | $\beta\hbar$ | $\mu$                               | Potencial de Interação entre Bósons                             |

Tabela 2.1: Tabela que mostra a correspondência entre quantidades relativas ao sistema de linhas de fluxo e quantidades relativas aos bósons bidimensionais

Essa analogia é bastante útil, pois podemos, a partir de resultados conhecidos da mecânica estatística de bósons bidimensionais, obter informações interessantes sobre o sistema de linhas de fluxo, e vice-versa. Por exemplo, sabe-se que bósons 2D podem existir em três estados: um estado cristalino, um estado superfluido e um estado líquido normal. Esses estados possuem análogos para o sistema de vórtices: um estado cristalino de linhas (rede de Abrikosov), um estado superfluido de linhas (líquido de linhas entrelaçado) e um estado líquido normal de linhas (líquido de linhas desentrelaçado). Todos estes estados estão ilustrados na figura 2.5

## 2.2 O Modelo de Lawrence-Doniach

O modelo fenomenológico ideal para a descrição de um supercondutor em camadas é o modelo de Lawrence-Doniach [20, 33]. Neste modelo, escrevemos a energia livre de Gibbs do sistema de camadas separadas por uma distância  $d$  umas das outras em termos de parâmetros de ordem

locais  $\psi_n(\mathbf{r})$  para as posições  $\mathbf{r}$  na  $n$ -ésima camada:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\psi_n, \mathbf{A}] = \int d^2r \left\{ d \sum_n \left[ \alpha |\psi_n|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi_n|^4 + \frac{1}{2m_{ab}} \left| \left( -i\hbar \nabla_{ab} + \frac{2\pi\hbar}{\Phi_0} \mathbf{A}_{ab} \right) \psi_n \right|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\hbar^2}{2m_c d^2} \left| \psi_{n+1} \exp \left( \frac{2\pi i}{\Phi_0} \int_0^{(n+1)d} A_z dz \right) - \psi_n \exp \left( \frac{2\pi i}{\Phi_0} \int_0^{nd} A_z dz \right) \right|^2 \right] + \right. \\ \left. + \int dz \left( \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \right) \right\}. \quad (2.30) \end{aligned}$$

As somas são sobre todas as camadas e  $d^2r$  é o elemento de área de cada camada.  $m_{ab}$  denota a massa efetiva na direção do plano formado por cada camada (plano  $xy$ ) e  $m_c$  denota a massa efetiva na direção  $z$ . Dado um vetor  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_{ab}$  significa a projeção deste vetor no plano  $xy$  (na (2.30) e em todas as demais equações deste capítulo). Se assumirmos os módulos  $|\psi_n(\mathbf{r})|^2$  constantes ( $=|\psi|^2$ ) para cada  $n$  e  $\mathbf{r}$  e considerarmos apenas as fases, (2.30) torna-se, a menos de constantes,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\varphi_n, \mathbf{A}] = \int d^2r \sum_n d \left\{ \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{2m_{ab}} \left( \nabla_{ab} \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}_{ab} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d^2} \left[ 1 - \cos \left( \varphi_{n+1} - \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{nd}^{(n+1)d} A_z dz \right) \right] \right\} + \int d^3r \left( \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \right) \quad (2.31) \end{aligned}$$

Podemos encontrar, agora, relações que devem ser satisfeitas pelas fases e pelos potenciais no equilíbrio ao acharmos os pontos fixos de  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \varphi_n} = 0 &\Rightarrow \frac{\mathcal{G}[\varphi_n + \delta \varphi_n] - \mathcal{G}[\varphi_n]}{\delta \varphi_n} = 0, \\
\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A_z} = 0 &\Rightarrow \frac{\mathcal{G}[A_z + \delta A_z] - \mathcal{G}[A_z]}{\delta A_z} = 0, \\
\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{A}_{ab}} = 0 &\Rightarrow \frac{\mathcal{G}[\mathbf{A}_{ab} + \delta \mathbf{A}_{ab}] - \mathcal{G}[\mathbf{A}_{ab}]}{\delta \mathbf{A}_{ab}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
1) \mathcal{G}[\varphi_n + \delta \varphi_n] - \mathcal{G}[\varphi_n] &= \int d^2 r \, d \left\{ \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_{ab}} \nabla_{ab} \delta \varphi_n \cdot \left( \nabla_{ab} \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}_{ab} \right) \right. \\
&+ \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d^2} \delta \varphi_n \left[ \text{sen} \left( \varphi_n - \varphi_{n-1} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{(n-1)d}^{nd} A_z dz \right) - \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{sen} \left( \varphi_{n+1} - \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{nd}^{(n+1)d} A_z dz \right) \right] \right\}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo acima por partes, obtemos ainda

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}[\varphi_n + \delta \varphi_n] - \mathcal{G}[\varphi_n] &= \int d^2 r \, \delta \varphi_n d \left\{ -\frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_{ab}} \left( \nabla_{ab}^2 \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \nabla_{ab} \cdot \mathbf{A} \right) \right. \\
&+ \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d^2} \left[ \text{sen} \left( \varphi_n - \varphi_{n-1} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{(n-1)d}^{nd} A_z dz \right) - \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{sen} \left( \varphi_{n+1} - \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{nd}^{(n+1)d} A_z dz \right) \right] \right\}. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Desta forma, da equação (2.32), deduzimos que

$$\boxed{\frac{m_c d^2}{m_{ab}} \left( \nabla_{ab}^2 \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \nabla_{ab} \cdot \mathbf{A} \right) = \text{sen}(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_{n-1}) - \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n)}, \tag{2.35}$$

onde

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_0^{nd} A_z dz. \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
2) \mathcal{G}[A_z + \delta A_z] - \mathcal{G}[A_z] = & \int d^2 r \sum_n \left[ \left( \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d} \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{nd}^{(n+1)d} \delta A_z dz \right) \times \right. \\
& \times \left. \sin \left( \varphi_{n+1} - \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{nd}^{(n+1)d} A_z dz \right) \right] + \int d^3 r \left[ \frac{1}{4\pi} (\partial_y \delta A_z \hat{x} - \partial_x \delta A_z \hat{y}) \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4\pi} (\partial_y \delta A_z \hat{x} - \partial_x \delta A_z \hat{y}) \cdot \mathbf{H} \right]. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Podemos simplificar o primeiro termo do lado direito da equação acima se definirmos

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \varphi_n(x, y) + \int_{nd}^{(n+1)d} A_z dz, \quad \text{se } nd \leq z < (n+1)d \quad (2.38)$$

e usarmos

$$\sum_n \int d^2 r \int_{nd}^{(n+1)d} dz = \int d^3 r \quad (\text{Em toda a amostra}). \quad (2.39)$$

A definição (2.38) nos permite estender a integral em  $z$  a todo o primeiro termo. Já (2.39) nos permite transformar a integral em cada plano na integral no volume todo. Integrando por partes o segundo termo e assumindo o *gauge* de Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ), a equação (2.37) torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}[A_z + \delta A_z] - \mathcal{G}[A_z] = & \int d^3 r \delta A_z \left\{ \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d} \frac{2\pi}{\Phi_0} \sin [\tilde{\varphi}(z+d) - \tilde{\varphi}(z)] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4\pi} [\nabla^2 A_z - (\nabla \times \mathbf{H})_z] \right\} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

e, da equação (2.32), deduzimos que

$$\boxed{\nabla^2 A_z = \frac{4\pi}{c} \{ j_z^{ext} + j_J \sin [\tilde{\varphi}(z+d) - \tilde{\varphi}(z)] \}}, \quad (2.41)$$

onde  $j_z^{ext}$  é a corrente na direção  $z$  provocada pelo campo externo  $\mathbf{H}$ , e

$$j_J = \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d} \frac{2\pi c}{\Phi_0} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} 3) \mathcal{G}[\mathbf{A}_{ab} + \delta \mathbf{A}_{ab}] - \mathcal{G}[\mathbf{A}_{ab}] &= \int d^2 r \, d \sum_n \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_{ab}} \frac{2\pi}{\Phi_0} \delta \mathbf{A}_{ab} \cdot \left( \nabla_{ab} \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}_{ab} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int d^3 r \, \{ [\partial_z \delta A_x \hat{y} - \partial_z \delta A_y \hat{x} + (\partial \delta A_y - \partial_y \delta A_x) \hat{z}] \cdot (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}) \}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Integrando o segundo termo do lado direito por partes e usando o *gauge* de Coulomb novamente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mathbf{A}_{ab} + \delta \mathbf{A}_{ab}] - \mathcal{G}[\mathbf{A}_{ab}] &= \int d^2 r \, d \sum_n \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_{ab}} \frac{2\pi}{\Phi_0} \delta \mathbf{A}_{ab} \cdot \left( \nabla_{ab} \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}_{ab} \right) + \\ &- \frac{1}{4\pi} \int d^3 r \, \delta \mathbf{A}_{ab} \cdot [\nabla^2 \mathbf{A}_{ab} - (\nabla \times \mathbf{H})_{ab}]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Rearranjando os termos de (2.44), e lembrando da equação (2.32), concluímos

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A}_{ab} = \mathbf{j}_{ab}^{ext} + \frac{d}{\lambda_{ab}^2} \sum_n \delta(z - nd) \left( \mathbf{A}_{ab} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla_{ab} \varphi_n \right)}, \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{j}_{ab}^{ext}$  é a corrente planar provocada pelo campo  $\mathbf{H}$  e

$$\lambda_{ab}^2 = \frac{m_{ab} \Phi_0^2}{4\pi \hbar^2 |\psi|^2}. \quad (2.46)$$

Agora podemos fazer um sumário das equações de Lawrence-Doniach:

$$\begin{aligned} \frac{m_c d^2}{m_{ab}} \left( \nabla_{ab}^2 \varphi_n + \frac{2\pi}{\Phi_0} \nabla_{ab} \cdot \mathbf{A} \right) &= \sin(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_{n-1}) - \sin(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n); \\ \nabla^2 A_z &= \frac{4\pi}{c} \{ j_z^{ext} + j_J \sin[\tilde{\varphi}(z+d) - \tilde{\varphi}(z)] \}; \\ \nabla^2 \mathbf{A}_{ab} &= \mathbf{j}_{ab}^{ext} + \frac{d}{\lambda_{ab}^2} \sum_n \delta(z - nd) \left( \mathbf{A}_{ab} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla_{ab} \varphi_n \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

### 2.3 Vórtices no Modelo de Lawrence-Doniach

O objetivo desta sessão é resolver as equações (2.47) para obtermos o comportamento dos campos e correntes. Verificaremos a presença de vórtices no modelo e estudaremos a fundo como eles interagem. O conhecimento da interação entre vórtices é um ponto fundamental no artesanato de um programa que simule o comportamento de um sistema de vários vórtices interagentes. Todos os cálculos daqui em diante serão feitos supondo  $j^{ext} = 0$ .

#### 2.3.1 Interação Eletromagnética entre Vórtices-Panqueca

Calculemos primeiro a interação eletromagnética entre vórtices-panqueca [34, 33]. Começaremos calculando o potencial vetor para o caso  $j_J = 0$  e em que existe um único vórtice no plano  $z = 0$ . Este vórtice pode ser descrito pelo fato de que

$$\nabla_{ab} \varphi_n = -\frac{\hat{\phi}}{\rho} \delta_{n0}, \quad (2.48)$$

onde  $\hat{\phi}$  é o vetor unitário na direção  $\phi$  nas coordenadas polares usuais,  $\rho$  é a distância radial polar e  $\delta_{ij}$  é a delta de Kronecker.

Agora, podemos usar este fato na equação (2.45) para resolvê-la, mas, antes, vamos simplificar a equação por meio de uma pequena aproximação: se considerarmos que mudanças

da ordem de  $d$  em  $z$  causam variações muito pequenas em  $\mathbf{A}_{ab}$ , podemos considerar

$$\sum_n \delta(z - nd) \mathbf{A}_{ab}(x, y, nd) \frac{nd}{n} \approx \int \delta(z - u) \mathbf{A}_{ab}(x, y, u) du = \mathbf{A}_{ab}(x, y, z), \quad (2.49)$$

eliminando, assim, as várias deltas de Dirac. Desta forma, a equação (2.45) se torna

$$\lambda_{ab}^2 \nabla^2 \mathbf{A}_{ab} - \mathbf{A}_{ab} = -\frac{\Phi_0 d}{2\pi\rho} \delta(z) \hat{\phi}, \quad (2.50)$$

que é bem mais fácil de ser resolvida. Podemos primeiro solucionar (2.49) no espaço de Fourier.

Para tal, devemos saber a transformada de Fourier do lado direito da equação:

$$\int \delta(z) \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3r = -\frac{2\pi i}{\kappa} \hat{\phi} \quad (2.51)$$

onde  $\kappa = |\mathbf{k}_{ab}|$  (lembrando que, durante este capítulo, o  $ab$  subscrito em um vetor denota a projeção deste vetor no plano  $xy$ ).

Agora, podemos escrever (2.49) no espaço de Fourier:

$$-\lambda_{ab}^2 k^2 \tilde{\mathbf{A}}_{ab} - \tilde{\mathbf{A}}_{ab} = \frac{id\Phi_0}{\kappa} \hat{\phi}, \quad (2.52)$$

resultando

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ab} = -\frac{id\Phi_0}{\kappa(1 + \lambda_{ab}^2 k^2)} \hat{\phi}. \quad (2.53)$$

Agora o que precisamos é calcular a transformada inversa de (2.53). obtemos, assim

$$\boxed{\mathbf{A}_{ab}(\rho, z) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}} \frac{d}{\rho} (e^{-|z|/\lambda_{ab}} - e^{-r/\lambda_{ab}}) \hat{\phi}}. \quad (2.54)$$

Obtemos o campo gerado por este “vórtice panqueca” fazendo  $\nabla \times \mathbf{A}_{ab}$ . Assim, é fácil ver

que

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}^2} \frac{d}{r} e^{-r/\lambda_{ab}}; \quad (2.55)$$

$$\mathbf{B}_{ab}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}^2} \frac{d}{R} \left( \text{sign } z \, e^{-|z|/\lambda_{ab}} - \frac{z}{r} e^{-r/\lambda_{ab}} \right) \hat{\rho}. \quad (2.56)$$

(Estes campos estão esboçados na figura 2.7.)

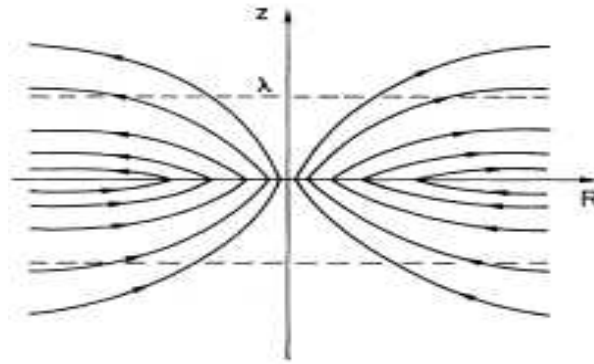


Figura 2.7: Diagrama mostrando o campo magnético gerado por um único vórtice. Retirado da referência [33].

Calculemos também a densidade superficial de corrente nas camadas gerada pelo vórtice.

Para isso, basta ver que

$$\mathbf{J}_{ab} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_{ab} = -\frac{c}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{A}_{ab} = -\frac{cd}{4\pi\lambda_{ab}^2} \sum_n \delta(z-nd) \left( \mathbf{A}_{ab} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla_{ab} \varphi_n \right), \quad (2.57)$$

usando (2.45) na última passagem. Sabendo que a relação entre as densidades superficial e volumétrica de corrente é dada por

$$\mathbf{J}_{ab}(\mathbf{r}) = \sum_n \delta(z-nd) \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}, nd), \quad (2.58)$$

vemos claramente que

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}, nd) = -\frac{cd}{4\pi\lambda_{ab}^2} \left[ \mathbf{A}_{ab}(\boldsymbol{\rho}, nd) + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla_{ab} \varphi_n \right]. \quad (2.59)$$

Isso nos diz que, um vórtice panqueca provoca o surgimento de uma densidade de corrente em cada camada  $n$  dada por

$$\mathbf{K}_n = -\frac{c\Phi_0 d^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^3 \rho} (e^{-|z_n|/\lambda_{ab}} - e^{-r_n/\lambda_{ab}}) \hat{\phi}, \quad (2.60)$$

onde  $z_n = nd$  e  $r_n = \sqrt{\rho^2 + z_n^2}$ . Na camada onde se encontra o vórtice ( $n = 0$ ), esta expressão é acrescida da corrente que constitui o próprio vórtice. Se acrescentarmos um outro vórtice numa camada  $n \neq 0$  a uma distância planar  $\rho = R$  do primeiro, podemos calcular a energia magnética entre eles lembrando que a força de Lorentz que o campo gerado por um exerce sobre o outro é

$$\mathbf{F} = F_\rho \hat{\rho} = \frac{1}{c} K_\varphi \phi_0 \hat{\rho}. \quad (2.61)$$

Assim, a energia magnética de interação entre os dois é dada por

$$-\int_0^R F_\rho d\rho = \int_0^R \frac{\Phi_0^2 d^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^3 \rho} \left[ \exp\left(\frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}}\right) - \exp\left(\frac{-r_n}{\lambda_{ab}}\right) \right] d\rho. \quad (2.62)$$

O primeiro termo da integral é fácil de calcular:

$$\int_0^R \frac{\phi_0^2 d^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^3 \rho} \exp\left(\frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}}\right) d\rho = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\phi_0^2 d^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^3} \exp\left(\frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}}\right) \log\left(\frac{R}{a}\right). \quad (2.63)$$

A divergência logarítmica deste termo será solucionada posteriormente. O segundo termo de (2.62) nos demandará maior atenção. Primeiramente, expandimos o integrando em uma série

de potências em  $r_n$ :

$$\int \frac{1}{\rho} \exp\left(\frac{-r_n}{\lambda_{ab}}\right) d\rho = \int \frac{1}{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{-r_n}{\lambda_{ab}}\right)^m d\rho = \int \frac{1}{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\rho^2 + z_n^2}{\lambda_{ab}^2}\right)^{m/2} d\rho. \quad (2.64)$$

Analisemos agora cada termo da série separadamente:

$$\int \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{\lambda_{ab}^m} \frac{(\rho^2 + z_n^2)^{m/2}}{\rho} d\rho = \int \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{|z_n|}{\lambda_{ab}}\right)^m \frac{[1 + (\rho/z_n)^2]^{m/2}}{\rho} d\rho. \quad (2.65)$$

Fazendo a mudança de variável  $x = (\rho/z_n)^2$ , obtemos

$$\int \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{|z_n|}{\lambda_{ab}}\right)^m \frac{[1 + (\rho/z_n)^2]^{m/2}}{\rho} d\rho = \int \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{|z_n|}{\lambda_{ab}}\right)^m \frac{(1+x)^{m/2}}{2x} dx. \quad (2.66)$$

Expandindo novamente, agora em série de potências de  $x$ :<sup>1</sup>

$$\int \frac{(1+x)^{m/2}}{x} = \int \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-m/2)_k}{k!} x^k dx, \quad (2.67)$$

onde  $(-m/2)_k$  é o símbolo de Pochhammer:  $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$ . Integrando agora termo a termo da série, obtemos

$$\int \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-m/2)_k}{k!} x^k = \log x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (-m/2)_{k+1}}{(k+1)!} \frac{x^{k+1}}{k+1}. \quad (2.68)$$

Usando agora a propriedade do símbolo do Pochhammer:  $(a)_{k+1} = a(a+1)_k$  e notando que  $(1)_k = k!$  e  $(2)_k = (k+1)!$ , podemos expressar este resultado em termos de funções

<sup>1</sup>Em geral, a função que estamos expandindo não é analítica para  $|x| > 1$ . No entanto, podemos resolver este problema por meio de algumas deduções matemáticas, cujo resultado é o mesmo que seria se tivéssemos simplesmente integrado sobre valores de  $x$  menores que um e extrapolado para toda a reta real por meio de continuação analítica, como faremos.

hipergeométricas generalizadas:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x)^{m/2}}{x} &= \log x + \frac{m}{2} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k (1-m/2)_k}{(2)_k (2)_k} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= \log x + \frac{mx}{2} {}_3F_2 \left( 1, 1, 1 - \frac{m}{2}; 2, 2; -x \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Podemos agora usar (2.69) em (2.64):

$$\int \frac{1}{\rho} \exp \left( \frac{-r_n}{\lambda_{ab}} \right) d\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right)^m \left[ \log \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right) + \frac{m\rho^2}{4z_n^2} {}_3F_2 \left( 1, 1, 1 - \frac{m}{2}; 2, 2; -\frac{\rho^2}{z_n^2} \right) \right]. \quad (2.70)$$

O termo logarítmico da série:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right)^m \log \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right) \Bigg|_{\rho=\lambda_{ab}}^{\rho=R} = \lim_{a \rightarrow 0} \exp \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right) \log \left( \frac{R}{a} \right) \quad (2.71)$$

se cancela com (2.63), eliminando, assim, a divergência logarítmica. E finalmente obtemos a energia de interação magnética entre dois vórtices em camadas diferentes:

$$E_{EM} = -\frac{\Phi_0^2 d^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right)^m \frac{mR^2}{4z_n^2} {}_3F_2 \left( 1, 1, 1 - \frac{m}{2}; 2, 2; -\frac{R^2}{z_n^2} \right). \quad (2.72)$$

Até onde vai nosso conhecimento, não existe na literatura científica até o presente momento a expressão (2.72) para a energia de interação eletromagnética entre vórtices-panqueca. O cálculo analítico de tal expressão constitui, portanto, uma contribuição original desta dissertação.

Podemos agora obter alguma informação sobre a energia magnético em determinados limites. No caso  $|z_n| \ll R \ll \lambda_{ab}$ , podemos considerar apenas o primeiro termo da série (2.72),

<sup>2</sup>Tais funções só podem ser definidas para  $|x| > 1$  por meio de continuação analítica. Ao admitirmos que  $x$  pode assumir valores nesse intervalo, estamos implicitamente fazendo uma extrapolação que, felizmente, é válida.

pois, apesar de as funções hipergeométricas

$${}_3F_2 \left( 1, 1, 1 - \frac{m}{2}; 2, 2; -\frac{R^2}{z_n^2} \right) \quad (2.73)$$

poderem possuir termos de ordem  $(R/|z_n|)^l$  com  $l < m$ , tais correspondem, na série (2.72), a

$$\left( \frac{|z_n|}{\lambda_{ab}} \right)^m \left( \frac{R}{|z_n|} \right)^l = \left( \frac{|z_n|}{\lambda_{ab}} \right)^{m-l} \left( \frac{R}{\lambda_{ab}} \right)^l \ll \left( \frac{R}{\lambda_{ab}} \right)^l, \quad \text{para } l < m. \quad (2.74)$$

Assim, até para  $l = 1$ , o termo da série correspondente é  $\ll R/\lambda_{ab}$  e podemos ver que os termos com  $m > 1$  da série (2.72) são negligenciáveis neste regime. Podemos, assim, escrever

$$E_{mag} \approx -\frac{\phi_0^2 \lambda_{ab}}{4\pi^2 \Lambda^2} \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right) \frac{R^2}{4z_n^2} {}_3F_2 \left( 1, 1, \frac{1}{2}; 2, 2; -\frac{R^2}{z_n^2} \right). \quad (2.75)$$

Mas

$${}_3F_2 \left( 1, 1, \frac{1}{2}; 2, 2; -\frac{R^2}{z_n^2} \right) = -\frac{4z_n^2}{R^2} \left[ \log \left( \frac{1 + \sqrt{1 + R^2/z_n^2}}{2} \right) - \sqrt{1 + R^2/z_n^2} + 1 \right]. \quad (2.76)$$

Então,

$$\begin{aligned} E_{mag} &\approx \frac{\phi_0^2 \lambda_{ab}}{4\pi^2 \Lambda^2} \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right) \left[ \log \left( \frac{1 + \sqrt{1 + R^2/z_n^2}}{2} \right) - \sqrt{1 + R^2/z_n^2} + 1 \right] \\ &\approx \frac{\phi_0^2 \lambda_{ab}}{4\pi^2 \Lambda^2} \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \left[ \log \left( \frac{R}{2|z_n|} \right) - \frac{R}{|z_n|} \right] \approx \frac{\phi_0^2 \lambda_{ab}}{4\pi^2 \Lambda^2} \frac{R}{\lambda_{ab}} \sim \frac{R}{\lambda_{ab}}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

que é igual ao resultado visto em [33], calculado no mesmo regime. De fato, se construirmos um gráfico da energia magnética em função de  $R$  neste regime, vemos praticamente uma reta (veja figura 2.8).

Por outro lado, no regime  $R \gg \lambda_{ab}$ , a energia se comporta como um logaritmo, como podemos perceber pela figura 2.9.

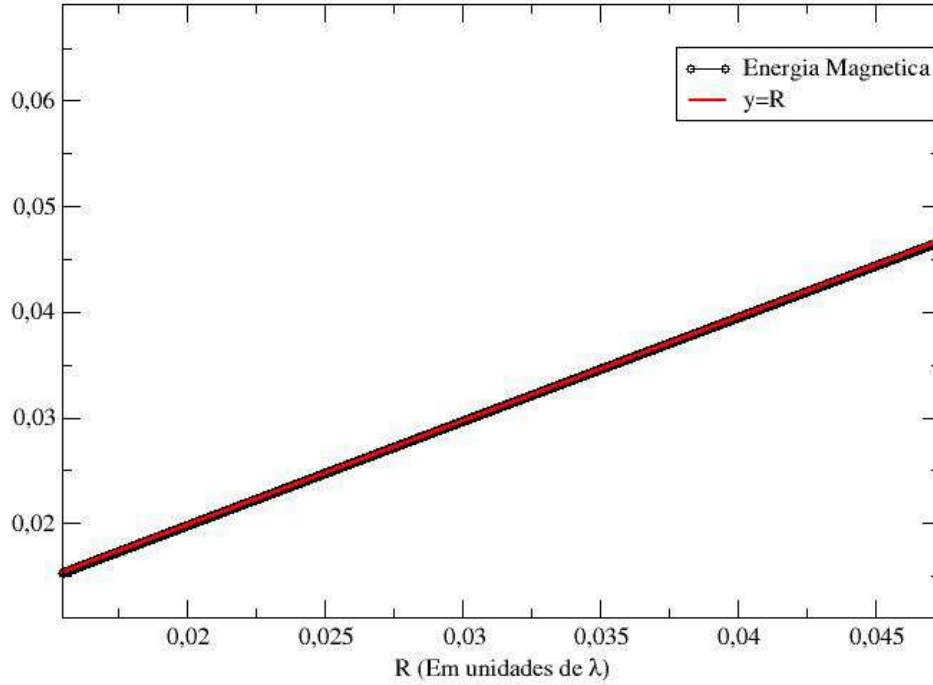


Figura 2.8: Gráfico mostrando o formato de gráfico da energia magnética em função de distância planar  $R$  para  $z = 10^{-5}\lambda_{ab} \ll R$  (linha negra) com a gráfico de uma reta do tipo  $y = x$  (linha vermelha).

### 2.3.2 Energia Josephson

A interação Josephson se dá entre vórtices em camadas adjacentes e é dada, de acordo com a equação (2.31), por

$$E_J = \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{m_c d} \int d^2r [1 - \cos(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n)] \quad (2.78)$$

para a interação entre as camadas  $n$  e  $n + 1$ .  $\tilde{\varphi}_n$  é o da definição (2.36). Para conhecermos o comportamento de  $E_J$ , devemos encontrar os  $\tilde{\varphi}_n$ , o que faremos a partir das equações (2.47). Agora fica impossível introduzir um único vórtice panqueca, pois as equações dependem da diferença de fase entre planos vizinhos e precisamos conhecer todas as diferenças de fase de todos os planos para obter uma solução para as equações. Primeiramente, usando (2.35) e o

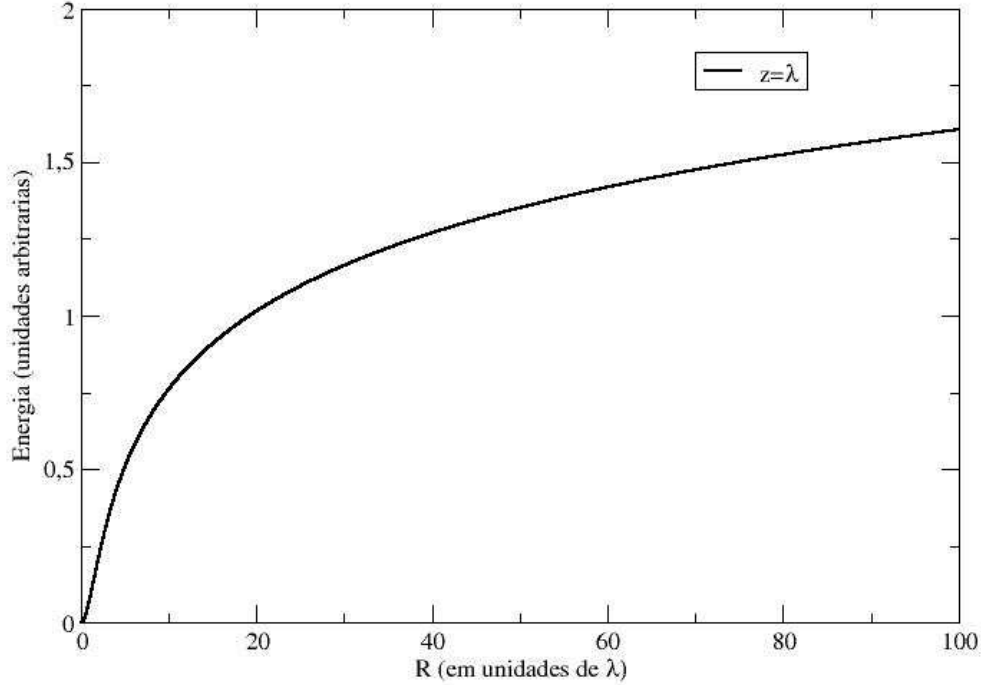


Figura 2.9: Gráfico comparando o formato de gráfico da energia magnética em função de distância planar  $R$  para  $z = \lambda_{ab}$ .

*gauge* de Coulomb,

$$\frac{m_c d^2}{m_{ab}} \left( \nabla_{ab}^2 \varphi_n - \frac{2\pi}{\Phi_0} \partial_z A_z \right) = \text{sen}(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_{n-1}) - \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n). \quad (2.79)$$

Subtraindo a equação acima para  $\varphi_{n+1}$  da equação para  $\varphi_n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{m_c d^2}{m_{ab}} \left\{ \nabla_{ab}^2 (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - \frac{2\pi}{\Phi_0} [\partial_z A_z(nd + d) - \partial_z A_z(nd)] \right\} = 2 \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) - \\ - \text{sen}(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_{n-1}) - \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+2} - \tilde{\varphi}_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Do lado esquerdo da equação acima

$$\begin{aligned} \partial_z A_z(nd+d) - \partial_z A_z(nd) &= \int_{nd}^{(n+1)d} \partial_z^2 A_z dz = \int_{nd}^{(n+1)d} dz \left\{ \frac{4\pi}{c} j_J \text{sen}[\tilde{\varphi}(z+d) - \tilde{\varphi}(z)] - \right. \\ &\quad \left. - \nabla_{ab}^2 A_z \right\} = \frac{4\pi j_J}{c} \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) - \nabla_{ab}^2 \int_{nd}^{(n+1)d} A_z dz. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Substituindo (2.81) em (2.80),

$$\begin{aligned} \frac{m_c d^2}{m_{ab}} \left\{ \nabla_{ab}^2 (\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) - \frac{8\pi^2 j_J}{\Phi_0 c} \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) \right\} &= 2 \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) - \\ &\quad - \text{sen}(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_{n-1}) - \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+2} - \tilde{\varphi}_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Rearranjando os termos acima,

$$\begin{aligned} \nabla_{ab}^2 (\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) &= \frac{1}{\Lambda^2} [2 \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) - \text{sen}(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_{n-1}) - \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+2} - \tilde{\varphi}_{n+1})] + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_c^2} \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n), \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde

$$\Lambda = \gamma d = d \sqrt{\frac{m_c}{m_{ab}}} \quad (2.84)$$

e

$$\lambda_c = \gamma \lambda_{ab}. \quad (2.85)$$

Estes dois comprimentos constituem as duas escalas do problema. Para distâncias planares  $\rho \gg \Lambda$ , podemos aproximar a equação (2.83) para uma equação diferencial contínua:

$$\left[ \nabla_{ab}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \partial_z^2 - \frac{1}{\lambda_c^2} \right] \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.86)$$

onde  $\Phi(\mathbf{r})$  denota a diferença de fase entre camadas adjacentes na aproximação do contínuo. Repare que a equação acima corresponde a aplicarmos as transformações (2.4) ao sistema de coordenadas. Assim, esta aproximação corresponde ao limite do Ginzburg-Landau anisotrópico.

Também devemos usar as condições de contorno para os vórtices [35]:

$$(\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x)(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) = 2\pi \sum_{\nu} [\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{n,\nu}) - \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{n+1,\nu})], \quad (2.87)$$

onde  $\boldsymbol{\rho}_{n,\nu}$  é a posição do  $n$ -ésimo vórtice da  $\nu$ -ésima linha de fluxo. Para o caso de um vórtice panqueca deslocado da linha de vórtices, como na figura 2.10, a equação (2.83) se torna

$$\nabla_{ab}^2(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n) = \left( \frac{1}{\Lambda^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \text{sen}(\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n). \quad (2.88)$$

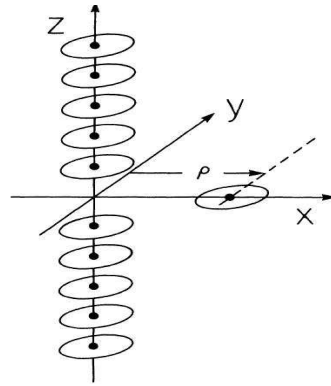


Figura 2.10: Diagrama mostrando uma linha de vórtice com um vórtice panqueca deslocado. Retirado da referência [34].

Após algumas aproximações [33] e aplicando as condições de contorno (2.87), podemos

obter a seguinte expressão para a energia Josephson [36]:

$$E_J = \frac{d\Phi_0^2}{8\pi^3\lambda_{ab}^2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\lambda_{ab}}{d} \right) \right] \left( \frac{r_1^2}{(\gamma d)^2} - 1 \right) \ln \left( \frac{\gamma d}{r_1} \right) \quad \text{se } r_1 \leq \gamma d; \quad (2.89)$$

$$= \frac{d\Phi_0^2}{8\pi^3\lambda_{ab}^2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\lambda_{ab}}{d} \right) \right] \left( \frac{r_1}{(\gamma d)} - 1 \right) \quad \text{caso contrário,} \quad (2.90)$$

onde  $r_1 = |\mathbf{r}_i(z+1) - \mathbf{r}_i(z)|$  com  $\mathbf{r}_i(z)$  a posição da do vórtice panqueca pertencente à  $i$ -ésima linha de fluxo.

## Defeitos e Ancoragem de Vórtices

Se injetarmos uma supercorrente  $\mathbf{J}$  num material supercondutor com uma linha de vórtice em repouso, esta linha sofre uma força de Lorentz por unidade de comprimento dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{\Phi_0}{c} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.1)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário na direção da linha. Esta força faz com que parte da energia da supercorrente vá para o movimento do vórtice, havendo, assim, dissipação de energia e levando ao surgimento de uma resistência elétrica efetiva dentro do supercondutor. No entanto, imperfeições do material podem gerar um potencial de ancoragem sobre o vórtice e impedi-lo de se movimentar sob a ação de uma corrente, desde que esta corrente seja tal que a força exercida por ela sobre o vórtice seja menor que a força de ancoragem produzida pelos defeitos. Assim, o estudo dos defeitos num supercondutor é de grande interesse tecnológico, além do óbvio interesse científico. Nosso objetivo neste capítulo é estudar as contribuições dos defeitos no material para a estabilidade do sistema de linhas em função da temperatura e do campo magnético, no contexto em que as contribuições oriundas do modelo de Ginzburg-Landau para o sistema puro indicam a rede de Abrikosov como o estado fundamental da fase supercondutora. Falaremos dos principais mecanismos de ancoragem em supercondutores de alta temperatura. No entanto, estudaremos mais profundamente apenas os defeitos colunares, que é foco de nossas simulações computacionais descritas no próximo capítulo.

### 3.1 Mecanismos de Ancoragem

Entre os mecanismos de ancoragem de vórtices mais estudados em supercondutores de alta temperatura estão:

- *Defeitos Pontuais.* Bastante comum e que pode ser causado, por exemplo, por deficiência de oxigênio nos planos de  $\text{CuO}_2$ . Estas vacâncias funcionam como centros de ancoragem [37], onde a força que cada defeito exerce sobre um vórtice aumenta linearmente com a distância à vacância até que, a uma distância da ordem de  $\xi(T)$ , há um decaimento exponencial dessa força de ancoragem.
- *Fronteiras de Grãos e Fronteiras Geminadas (Grain Boundaries e Twin Boundaries).* Presentes, por exemplo, no  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  (YBCO) [38, 39, 40, 41]. Como a estrutura cristalina do YBCO é ortorrômbica, as direções  $a$  e  $b$  do plano supercondutor não são exatamente iguais. As fronteiras de grãos são interfaces entre domínios onde a orientação da rede muda. Fronteiras geminadas também aparecem em alguns dos supercondutores baseados em ferro [42, 43].
- *Defeitos Artificiais.* Como vimos, defeitos em supercondutores de alta temperatura são objetos desejáveis até certo ponto, pois garantem que as linhas de fluxo não se movam sob a ação de uma corrente externa e, por conseguinte, não haja dissipação no supercondutor. Um meio de incrementar a ancoragem dos vórtices é produzindo defeitos artificiais nas amostras [44]. Entre as formas mais usadas de introduzir defeitos artificiais em supercondutores está a irradiação de íons pesados [45] produzindo defeitos lineares (veja figura 3.1). Um procedimento muito eficiente de se ancorar os vórtices é introduzir defeitos colunares orientados na mesma direção dos fluxos [46]. Um tratamento teórico dos defeitos colunares utilizando a analogia entre linhas de fluxo e bósons bidimensionais foi feito por Nelson e Vinokur [47, 48]. Este tratamento está na mesma linha da que vamos

fazer a partir da próxima seção deste capítulo.

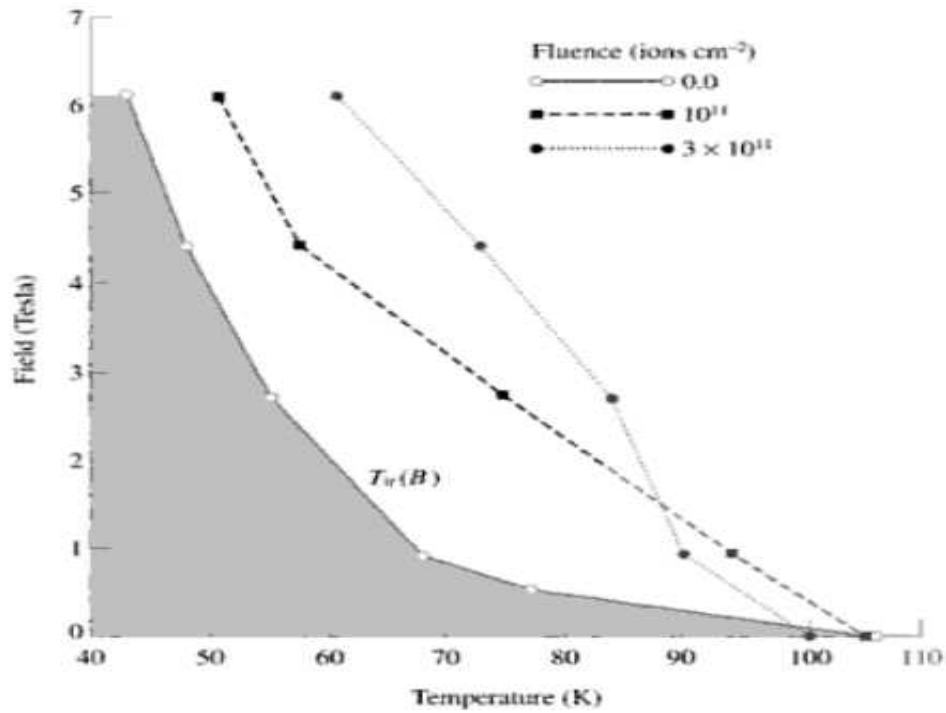


Figura 3.1: Efeito da introdução de defeitos colunares sobre a curva de irreversibilidade para  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  [45]. Abaixo da curva a resistividade do supercondutor é zero. Retirado da referência [28].

## 3.2 Defeitos Colunares

Nesta seção seguiremos os passos das referências [47, 48, 28]. Primeiramente, definimos a energia livre de Helmholtz para um sistema de  $N$  vórtices e  $M$  defeitos no nosso modelo (veja figura 3.2), onde os defeitos colunares e o campo externo são ambos paralelos ao eixo  $z$ .

Usando a mesma notação que em (2.49):

$$F = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_1 \sum_{j=1}^N \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{r}_j(z)}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_0^L V(|\mathbf{r}_i(z) - \mathbf{r}_j(z)|) dz + \sum_{j=1}^N \int_0^L V_D[\mathbf{r}_j(z)] dz, \quad (3.2)$$

onde

$$V_D(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^M V_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_k) \quad (3.3)$$

com  $\mathbf{R}_k$  fazendo o papel da posição do defeito  $k$ ; e  $V(\mathbf{r}) = 2\epsilon_0 K_0(r/\lambda_{ab})$ . O potencial  $V_1$  de cada defeito é o de um poço de potencial cilíndrico cuja profundidade por unidade de comprimento é  $U_0$  e cujo raio efetivo é  $b_0 = \max(c_0, \xi_{ab})$ , onde  $c_0 \approx 25 - 40 \text{ \AA}$  é o raio dos defeitos colunares (veja figura 3.3).

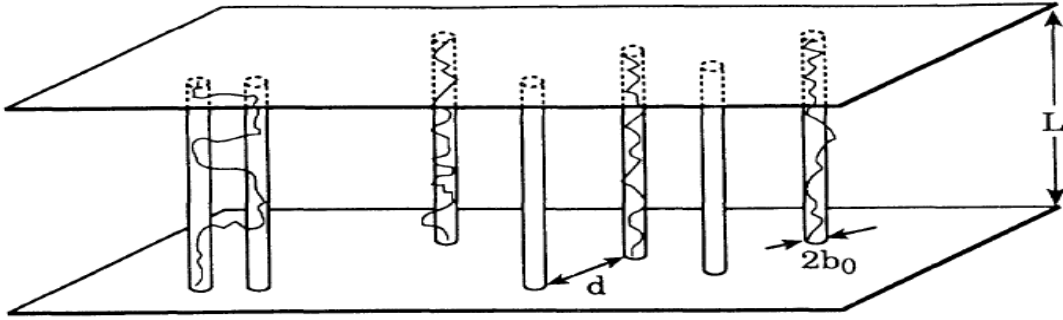


Figura 3.2: Sistema de linhas de vórtices na presença de defeitos colunares. Retirado da referência [48].

Ao invés de proceder diretamente para o sistema de muitos vórtices e muitos defeitos, vamos primeiro obter alguns resultados interessantes para sistemas mais simples envolvendo apenas uma ou duas linhas de fluxo e alguns defeitos colunares.

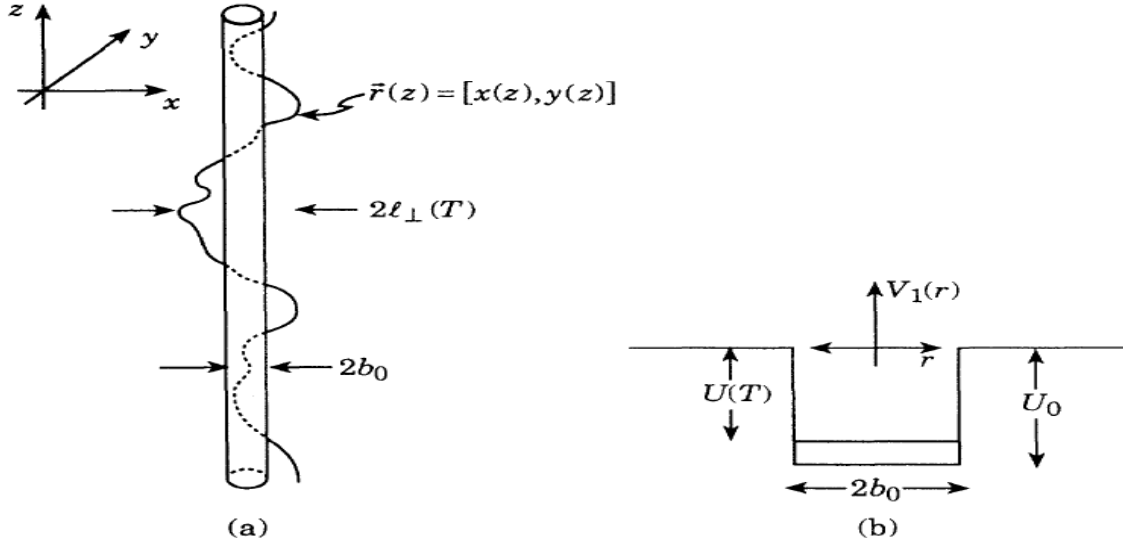


Figura 3.3: (a) Esquema de uma linha de fluxo interagindo com um defeito colunar. (b) Potencial gerado por um defeito, onde  $U_0$  é substituído por  $U(T)$  devido à flutuação térmica. Retirado da referência [48].

### 3.2.1 Um Defeito e Um Vórtice

Calculemos primeiramente a energia livre de ligação  $U(T)$  por unidade de comprimento do sistema, dada por

$$e^{U(T)L/k_BT} = \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{r}(z) \exp \left[ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_BT} \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{k_BT} \int_0^L V_1[\mathbf{r}(z)] dz \right]}{\int \mathcal{D}\mathbf{r}(z) \exp \left[ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_BT} \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)^2 dz \right]}. \quad (3.4)$$

Aplicando a analogia entre linhas de fluxo e partículas quânticas (bósons) bidimensionais, podemos dizer que o numerador do lado direito da equação (3.4), isto é,

$$Z(\mathbf{r}; 0, L) = \int \mathcal{D}\mathbf{r}(z) \exp \left[ -\frac{\tilde{\epsilon}_1}{2k_BT} \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{k_BT} \int_0^L V_1[\mathbf{r}(z)] dz \right] \quad (3.5)$$

obedece à “equação de Schrödinger”:

$$\left( -\frac{(k_B T)^2}{2\tilde{\epsilon}_1} \nabla_{ab}^2 + V_1(\mathbf{r}) \right) Z(\mathbf{r}; 0, L) = -k_B T \frac{\partial}{\partial L} Z(\mathbf{r}; 0, L). \quad (3.6)$$

Escrevemos agora  $Z(\mathbf{r}, 0; L)$  em termos dos autovalores da “equação de Schrödinger” acima:

$$Z(\mathbf{r}, 0; L) = \sum_n \psi_n(\mathbf{r}) \psi_n(0) e^{-E_n L/T}. \quad (3.7)$$

Com  $Z(\mathbf{r}, 0; L)$  escrito desta forma, podemos perceber que, se  $L \rightarrow \infty$ , o único termo do somatório da equação (3.7) que contribui significativamente é o de energia mais baixa,  $E_0$ . Assim  $U(T) = -E_0(T)$ , resultado da equação

$$\left( -\frac{(k_B T)^2}{2\tilde{\epsilon}_1} \nabla_{ab}^2 + V_1(\mathbf{r}) \right) \psi_0(\mathbf{r}) = E_0 \psi_0(\mathbf{r}). \quad (3.8)$$

Podemos achar  $\psi_0$  e  $E_0$  aplicando os métodos usuais da mecânica quântica. O resultado para  $\psi_0$  constitui-se de uma soma de funções de Bessel. Vale a pena notar que, se  $U_0$  for tal que o sistema possa ser aproximado por um poço infinito,

$$U(T) \approx U_0 - x_{01}^2 \frac{k_B^2 T^2}{2\tilde{\epsilon}_1 b_0^2}, \quad (3.9)$$

onde  $x_{01}$  é o primeiro zero da função de Bessel  $J_0$ . Isso nos faz acreditar, mesmo sem fazer os cálculos que  $U(T)$  é da forma

$$U(T) = U_0 f(T/T^*), \quad (3.10)$$

onde  $k_B T^* = b_0 \sqrt{\tilde{\epsilon}_1 U_0}$  é uma escala de temperatura importante para o sistema e (3.9) é uma aproximação para  $U_0$  grande, ou seja, para  $T \ll T^*$ .

Outra quantidade importante é o comprimento de localização  $\ell_{\perp}$ :

$$\ell_{\perp}^2 = \frac{\int d^2r r^2 \psi_0^2(r)}{\int d^2r \psi_0^2(r)}, \quad (3.11)$$

que mede o raio médio da trajetória da linha de fluxo em torno do centro de ancoragem (como mostrado na figura 3.3). Para  $T \ll T^*$ , obtemos

$$\ell_{\perp} = b_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa}\right), \quad (3.12)$$

onde  $\kappa \approx k_B T / \sqrt{2\tilde{\epsilon}_1 U(T)} \ll b_0$  é a distância até a qual a “partícula” penetra na região classicamente proibida.

Para  $T \gg T^*$ , por sua vez, temos (veja figura 3.4)

$$U(T) = \frac{1}{2}U_0 \left(\frac{T}{T^*}\right)^2 e^{-2(T/T^*)^2}, \quad (3.13)$$

e o comprimento de localização resulta

$$\ell_{\perp} \approx \frac{1}{\kappa} = \frac{k_B T}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}_1 U(T)}} = b_0 e^{(T/T^*)^2}. \quad (3.14)$$

Agora vamos calcular a corrente crítica, que faz com que as linhas se “desagarem” dos defeitos, como função da temperatura. Dada uma corrente perpendicular à direção dos vórtices, usando a equação (3.1), temos  $F_c = J_c \Phi_0 / c$ . Para temperaturas baixas, esperamos que  $F_c \approx U_0 / b_0$ , assim,

$$J_c \approx \frac{cU_0}{\Phi_0 b_0}. \quad (3.15)$$

No entanto, para temperaturas mais altas ( $T \gg T^*$ ), é natural pensarmos que, para reobtermos

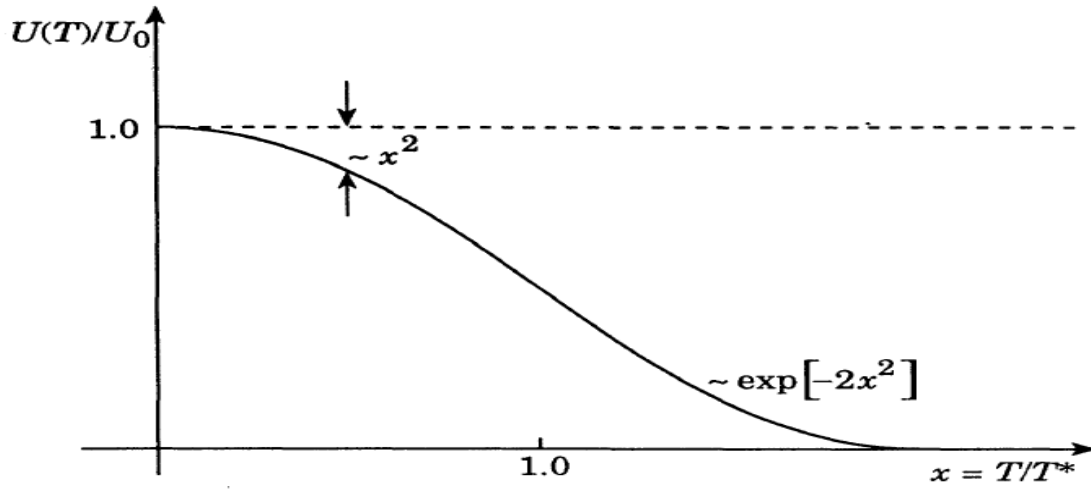


Figura 3.4: Gráfico da energia livre de ligação para a ancoragem da figura 3.3. Retirado da referência [48].

a corrente crítica, basta substituir  $U_0$  e  $b_0$  por  $U(T)$  e  $\ell_{\perp}$ , respectivamente:

$$J_c \approx J_c(0) e^{-3(T/T^*)^2}. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Dois Defeitos e um Vórtice

Estudaremos aqui o caso de dois defeitos localizados na posições  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  e um só vórtice, que pode tunelar de um defeito pra outro (Veja figura 3.5). Neste caso, o potencial de ancoragem é dado por

$$V_2(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + V_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2). \quad (3.17)$$

O potencial  $V_1$  é o mesmo da subseção anterior, com a mesma profundidade  $U_0$  e o mesmo raio  $b_0$ . A distância entre os vórtices é  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = d_{12} \gg \ell_{\perp}(T)$ , como na figura 3.5.

Como num poço duplo quântico, as configurações relevantes são aquelas em que a “partícula” está localizada em um ou em outro poço. Construíamos, pois, dos estados fundamentais de um só poço,  $\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)$  e  $\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$ , uma base para nosso espaço de Hilbert. Nessa base,

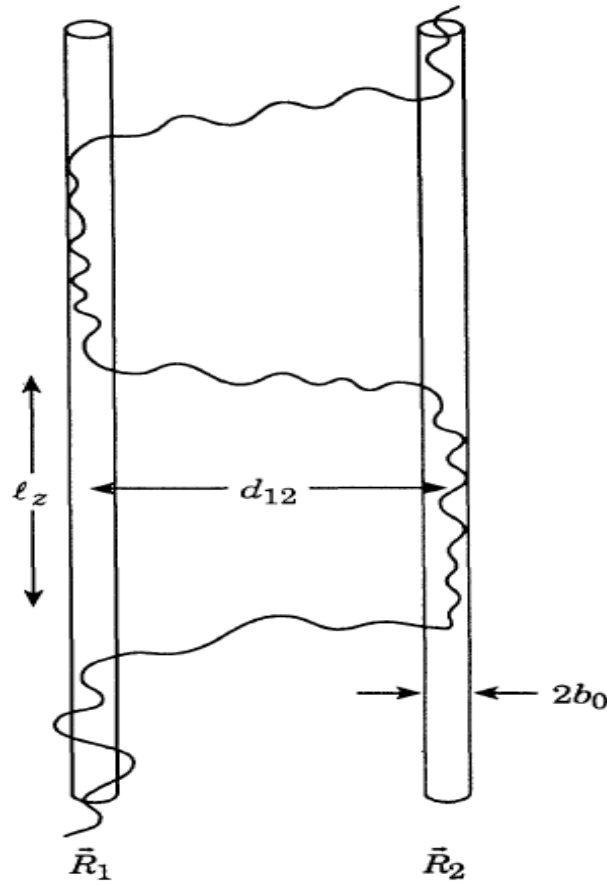


Figura 3.5: Representação de um vórtice “tunelando” entre dois defeitos colunares. Retirado da referência [48].

a representação matricial do hamiltoniano é escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_0 & t \\ t & E_0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde  $E_0$  é a energia do estado fundamental obtida na subseção anterior e  $t > 0$  é o elemento da matriz hamiltoniana que permite o tunelamento entre os poços. Os autovalores de  $\mathcal{H}$  são, portanto,

$$E_{\pm} = E_0 \pm t. \quad (3.19)$$

Estas são as duas energias mais baixas do sistema em questão.

Agora precisamos encontrar um valor para  $t$ . Com esse intuito, vamos usar o método variacional e minimizar

$$E(\psi) \equiv \frac{\int d^2r \left( \frac{k_B T^2}{2\tilde{\epsilon}_1} \psi^* \nabla_{ab} \psi + V_2 |\psi|^2 \right)}{\int d^2r |\psi|^2}, \quad (3.20)$$

usando a função tentativa

$$\psi(\mathbf{r}) = \alpha \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \beta \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2). \quad (3.21)$$

O mínimo ocorre para o caso em que  $\alpha = \beta$  e tem energia  $E_0 - t$ , com

$$t \approx \text{constante} \times \frac{U(T)}{\sqrt{E_{12}/k_B T}} e^{-E_{12}/k_B T}, \quad (3.22)$$

onde  $U(T) = -E_0(T)$  e

$$E_{12} = \sqrt{2\tilde{\epsilon}_1 U(T)} d_{12}. \quad (3.23)$$

A linha de fluxo deslocaliza e vem zigzagueando em torno de um dos defeitos até chegar a uma distância  $\ell_\perp(T) \ll d_{12}$ , onde ela continua zigzagueando e ocasionalmente tunela para o outro defeito. Isso acontece em média cada vez que a linha percorre uma distância no eixo  $z$  da ordem (veja figura 3.5)

$$\ell_z \approx \left( \frac{b_0^2 \tilde{\epsilon}_1}{k_B T} e^{2(T/T^*)^2} \right) e^{E_{12}/k_B T}. \quad (3.24)$$

### 3.2.3 Vários Defeitos e Vários Vórtices

Podemos fazer uma analogia entre o comprimento de localização discutido na subseção 3.2.1 e o raio de Bohr, podendo os defeitos serem comparados a núcleos atômicos que “seguram” os vórtices (elétrons). Para o caso de muitos defeitos e vórtices, podemos generalizar o ha-

miltoniano (3.18) para um modelo de *tight binding* (modelo de Bose-Hubbard), que permite que os vórtices façam transições entre os sítios (defeitos colunares) aleatoriamente espalhados na amostra. Podemos, assim, afirmar que o hamiltoniano do nosso sistema de partículas bidimensionais equivalente é

$$\mathcal{H} = -\mu \sum_j a_j^\dagger a_j + \sum_{i \neq j} t_{ij} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i) + V_{int} \sum_j a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j, \quad (3.25)$$

Onde  $a_j^\dagger$  e  $a_j$  são operadores bosônicos de criação e destruição, respectivamente, que agem sobre vórtices num defeito colunar localizado em  $\mathbf{R}_j$ .  $\mu$  é o potencial químico do sistema, os  $t_{ij}$  possuem a mesma função que o  $t$  da subseção anterior e  $V_{int}$  representa o potencial típico de interação entre dois vórtices no mesmo sítio. Este modelo é uma aproximação para os estados de mais baixa energia do sistema cuja função de partição grã-canônica é dada por

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N L / k_B T} \text{Tr}(e^{-\mathcal{H}_N L / k_B T}), \quad (3.26)$$

onde

$$\mathcal{H}_N = -\frac{(k_B T)^2}{2\tilde{\epsilon}_1} \sum_{j=1}^N \nabla_{ab}^2 + \epsilon_0 \sum_{i \neq j} K_0 \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\lambda_{ab}} \right) + \sum_{j=1}^N V_D(\mathbf{r}_j). \quad (3.27)$$

Podemos obter os elementos de matriz  $t_{ij}$  generalizando o  $t$  encontrado em (3.22):

$$t_{ij} = t(d_{ij}) \approx \text{constante} \times \frac{U(T)}{\sqrt{E_{ij}/k_B T}} e^{-E_{ij}/k_B T}, \quad (3.28)$$

onde

$$E_{ij} = \sqrt{2\tilde{\epsilon}_1 U(T)} d_{ij}. \quad (3.29)$$

Uma estimativa razoável para  $V_{int}$  pode ser feito se notarmos que, no mesmo sítio, os vórtices ficam a uma distância muito pequena um do outro, da ordem de  $\xi_{ab}$ . Utilizando o limite (1.64),

obtemos

$$V_{int} \approx 2\epsilon_0 \ln \left( \frac{\lambda_{ab}}{\xi_{ab}} \right). \quad (3.30)$$

Este valor dá conta da repulsão entre dois vórtices no mesmo sítio.

### 3.3 Possíveis Fases Desordenadas

As “partículas” descritas pelo hamiltoniano (3.25) são bósons, pois o estado fundamental de hamiltonianos que possuem simetria de troca, como em (3.27), é bosônico. Podemos, assim, utilizar todos os métodos e resultados da teoria de localização de bósons em duas dimensões para este problema. De fato, M. Fisher et al [49] já trataram do caso de um sistema de muitos bósons cuja interação entre si é de curto alcance sob ação de um potencial aleatório. Eles identificaram uma fase vítrea, a qual chamaram de *Bose glass* (ou vidro de Bose, numa tradução literal), e analogia ao *Fermi glass* (ou vidro de Fermi) [50] para sistema de férmions fortemente correlacionados. Esta fase é caracterizada por uma compressibilidade finita do fluido de bósons e susceptibilidade superfluida infinita; Além disso, eles previram também uma outra fase, o *isolante de Mott* com compressibilidade nula e com um hiato (*gap*) de energia finito para a criação de partículas.

Nelson e Vinokur aplicaram a analogia entre bósons 2D e linhas de fluxo propondo que as mesmas fases encontradas por [49] podem ser encontradas no sistema de vórtices. Basta fazer a correspondência de acordo com a tabela 2.1: o caso  $T = 0$  para os bósons corresponde ao limite  $L \rightarrow \infty$  para os vórtices, variar a temperatura do sistema de vórtices corresponde a mudar a constante de Planck; assim, o limite de altas temperaturas corresponde à fase superfluida, enquanto o limite  $T \rightarrow 0$  é mapeado no limite clássico do sistema de bósons. Desta forma, à medida que aumentamos a temperatura, o sistema de bósons associado vai ficando “mais quântico” e os vórtices vão ficando mais deslocalizados. Em contrapartida, à medida que dimi-

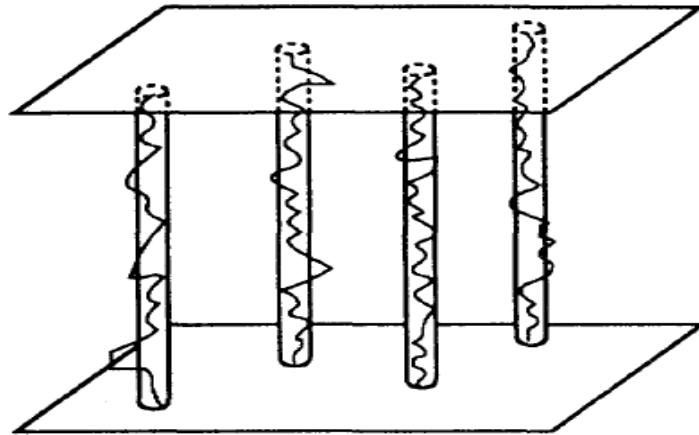


Figura 3.6: Isolante de Mott: cada vórtice está ancorado num defeito colunar. Retirado da referência [48].

nuímos a temperatura, o sistema de bósons associado vai ficando “mais clássico” e os vórtices vão ficando mais localizados em torno dos defeitos, passando pelas fases de *Bose glass* e de isolante de Mott, que, de acordo com a previsão de Nelson e Vinokur, acontece quando a densidade de vórtices é no mínimo igual à de defeitos (veja figura 3.6). Na fase isolante de Mott, o campo dentro da amostra fica estagnado em  $B = B_\phi = n\Phi_0$ , onde  $n$  é a densidade de defeitos da amostra (A figura 3.7 mostra um diagrama apontando essas fases; A curva  $B^*(T)$  mostra a região do diagrama abaixo da qual a interação entre os vórtices deixa de ser importante).

Existe uma fase análoga ao vidro de Bose para o caso de defeitos pontuais: o *vortex glass* [51], ou vidro de vórtices, em tradução literal. Apesar de análogas, Nelson e Vinokur argumentam que essas duas fases são bem distintas, visto que os defeitos pontuais aleatórios fazem com que o sistema tenha, desprezando a anisotropia própria dos supercondutores de alta temperatura, simetria angular; Isto não acontece no caso dos defeitos colunares: existe uma dependência pronunciada da posição da linha de irreversibilidade em relação ao ângulo entre o campo aplicado e os defeitos, como verificado experimentalmente por Worthington et al. [52] para o YBCO.

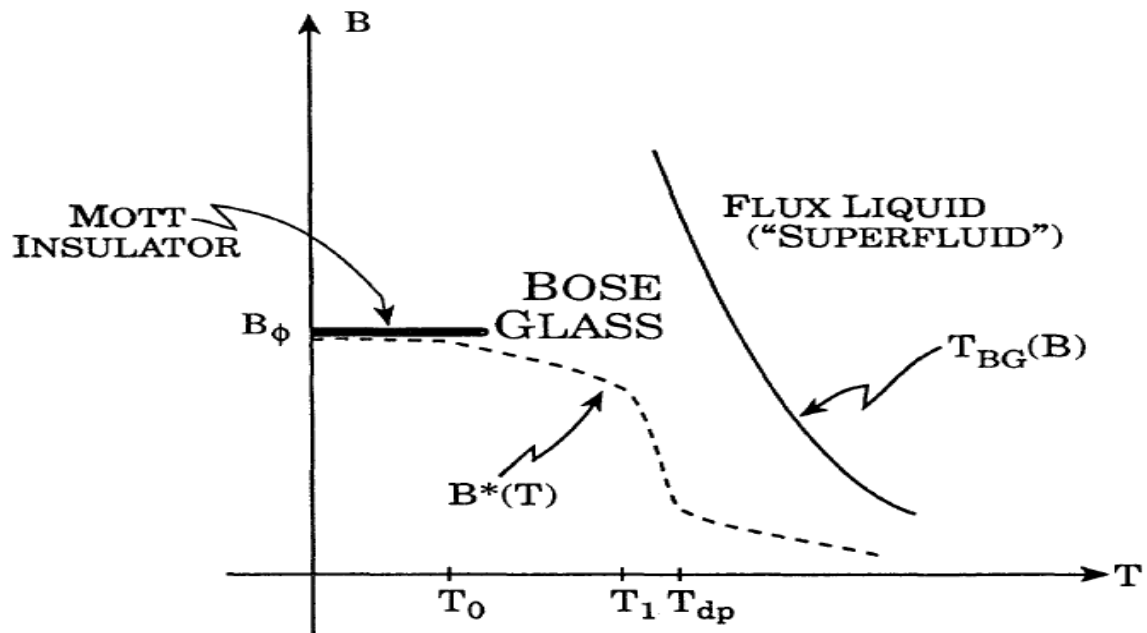


Figura 3.7: Diagrama de Fase no limite de defeitos com alta força de ancoragem. A fase isolante de Mott aparece para  $B_\phi = B$  e existe uma transição de fase entre a fase líquida e o *Bose glass* em  $T_{BG}(B)$ . Retirado da referência [48].

Tanto a teoria do *Bose glass* quanto a do *vortex glass* produzem vários resultados que já foram verificados experimentalmente. No entanto, alguns experimentos [54, 55, 56] indicaram a existência de ordem de longo alcance para o sistema de vórtices em amostras fracamente desordenadas, o que é usualmente incompatível com uma fase vítrea. Enfrentando esse problema, Giamarchi e Le Doussal [57, 53] desenvolveram uma teoria de linhas de fluxo na presença de fraca desordem que prevê a existência de uma fase chamada de *Bragg glass*, ou vidro de Bragg. Esta fase é caracterizada por apresentar um decaimento com lei de potência da ordem cristalina. Um diagrama de fase proposto em [53] contendo esta fase pode ser visto na figura 3.8. Tal fase também foi prevista por algumas simulações numéricas elaboradas por Dasgupta e Valls ([58, 59]). Assim como existe um paralelo entre o *vortex glass* e o *Bose glass*, é natural pensarmos que também existe uma fase para defeitos correlacionados análoga ao *Bragg glass* para o caso de defeitos pontuais. Os próprios Giamarchi e Le Doussal nomearam esta fase de

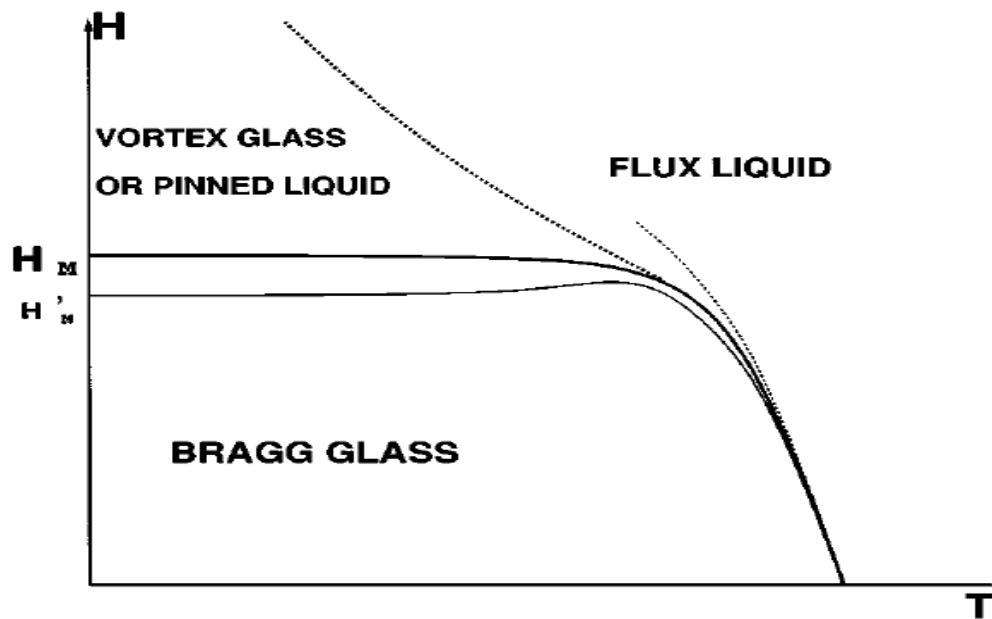


Figura 3.8: Diagrama de Fase mostrando uma região onde ocorre o *Bragg glass*. Retirado da referência [53].

*Bragg-Bose glass* [53].

# **Simulação de Vórtices no BSCCO com Defeitos Colunares**

## **4.1 O BSCCO como um Supercondutor em Camadas**

O BSCCO, que foi descoberto em 1988 por Maeda et al. [60], é na verdade uma família de compostos supercondutores de altas temperaturas cuja fórmula generalizada é  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_n\text{Cu}_{n+1}\text{O}_{2n+6}$ , onde  $n$  é um número natural. Para  $n = 1$  (o mais comumente estudado), o composto possui uma estrutura que contém “bicamadas” de  $\text{CuO}_2$ : dois planos de  $\text{CuO}_2$  separadas por uma camada de cálcio (veja figura 4.1).

Em geral, as análises que são feitas a partir da teoria de Ginzburg-Landau anisotrópica, sem considerar o efeito da estrutura de camadas dos supercondutores geram resultados insatisfatórios para o BSCCO. Isso porque ele é um supercondutor fortemente anisotrópico e a análise de suas características requer um modelo que leve em conta a estrutura discreta de planos que ele possui. Por isso, é necessário analisar este composto sob a luz do modelo de Lawrence-Doniach, que vimos no capítulo 2, para analisar de forma mais precisa a física do BSCCO.

## **4.2 Modelagem de Matéria de Vórtices no BSCCO**

Executamos os mesmos procedimentos aplicados com sucesso em trabalhos anteriores do grupo [26, 62]. Podemos imaginar uma linha de fluxo num supercondutor em camadas como uma série de vórtices-panqueca pontuais em cada plano ligados por uma interação Josephson (veja

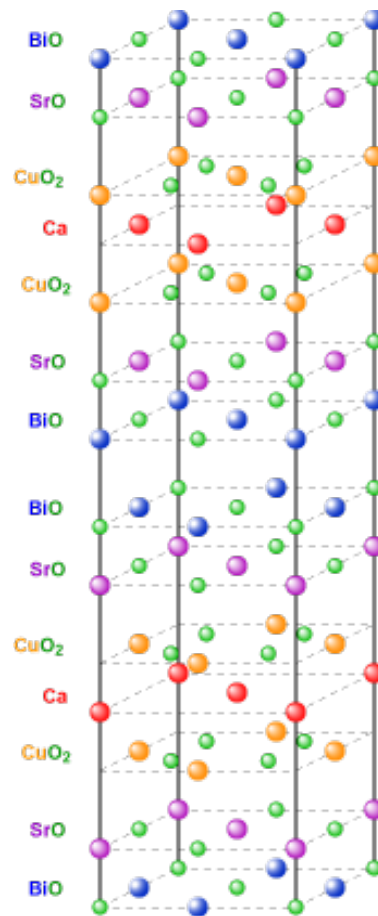


Figura 4.1: Estrutura da célula unitária do BSCCO-2212 ( $n = 1$ :  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ ). Retirado do site [61].

figura 4.2).

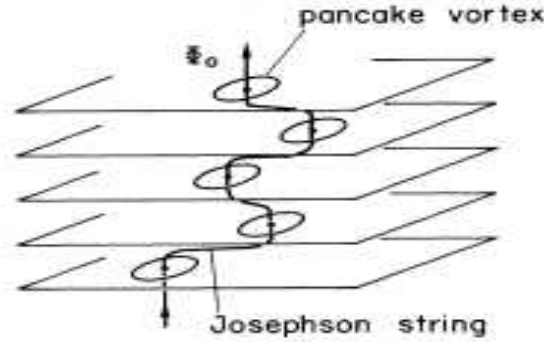


Figura 4.2: Estrutura em camadas típicas de um supercondutor de alta temperatura mostrando a estrutura dos vórtices-panqueca ligados via interação Josephson. Retirado da referência [33].

Foram executadas simulações Monte Carlo de um sistema com 64 linhas de vórtice numa rede de  $256 \times 222 \times N_z$ , com  $N_z = 64$  camadas e com condições de contorno periódicas em todas as direções. Inicializamos o sistema com uma rede de Abrikosov em  $T = 1$  K e aumentamos  $T$  em passos de 1 K. Usamos  $10^5$  passos Monte Carlo para cada temperatura e escolhemos parâmetros do BSCCO [33]: Sejam  $d$  a distância entre os planos de  $\text{CuO}_2$ ,  $s$  a espessura de tais planos,  $T_c$  a temperatura crítica do material e  $\lambda_0$  o comprimento de penetração tal que  $\lambda_{ab}(T) = \lambda_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$ , utilizamos [62]

$$d = 15\text{\AA}, T_c = 87\text{K}, s = 1.66\text{\AA}, \lambda_0 = 1414.2\text{\AA}, \xi_{ab} = 40\text{\AA}, \gamma = 100. \quad (4.1)$$

Os resultados do modelo de Lawrence-Doniach, discutidos no capítulo 2, serão tomados como base para as expressões das energias de interação entre os vórtices. Considerando cada plano como uma pequena camada supercondutora anisotrópica de espessura  $s$ , para vórtices no mesmo plano, a repulsão magnética, advinda do modelo de Ginzburg-landau anisotrópico pela equação (2.3c):

$$V_{plano} = \frac{\Phi_0^2 s}{8\pi^2 \lambda_{ab}^2} K_0 \left( \frac{|\mathbf{r}_{ij}(z)|}{\lambda_{ab}} \right); \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{r}_{ij} = |\mathbf{r}_i(z) - \mathbf{r}_j(z)|$  e  $\mathbf{r}_j(z)$  é a posição do vórtice panqueca pertencente à  $i$ -ésima linha de fluxo.

O acoplamento Josephson entre vórtices pertencentes à mesma linha de fluxo e em camadas adjacentes é, como na equação (2.89):

$$V_J = \frac{d\Phi_0^2}{8\pi^3\lambda_{ab}^2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\lambda_{ab}}{d} \right) \right] \left( \frac{r_1^2}{(\gamma d)^2} - 1 \right) \ln \left( \frac{\gamma d}{r_1} \right) \quad \text{se } r_1 \leq \gamma d; \quad (4.3)$$

$$= \frac{d\Phi_0^2}{8\pi^3\lambda_{ab}^2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\lambda_{ab}}{d} \right) \right] \left( \frac{r_1}{\gamma d} - 1 \right) \quad \text{caso contrário.} \quad (4.4)$$

Aqui  $r_1 = |\mathbf{r}_i(z+1) - \mathbf{r}_i(z)|$ , onde  $\mathbf{r}_i(z)$  é a posição da  $i$ -ésima linha de vórtice no plano  $z$  e  $\gamma = \sqrt{m_{ab}/m_c}$ .

Introduzimos defeitos colunares distribuídos aleatoriamente sobre a amostra. O potencial de desordem  $V_D$  é tal que, na versão contínua, temos:

$$\overline{V_D(\boldsymbol{\rho})V_D(\boldsymbol{\rho}')} = E_p \delta_2(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \quad (4.5)$$

onde  $\delta_2(\boldsymbol{\rho})$  é a função delta de Dirac bidimensional. Temos assim, uma energia total

$$E = \sum_{(i \neq j), z} V_{plano}(|\mathbf{r}_{ij}(z)|) + \sum_{i, z} V_J(|\mathbf{r}_i(z+1) - \mathbf{r}_i(z)|) + \sum_j V_D[\mathbf{r}_j(z)] \quad (4.6)$$

Em nossa implementação numérica,  $\boldsymbol{\rho}$  e  $\boldsymbol{\rho}'$  assumem valores discretos em pontos da rede bidimensional ( $256 \times 222$  pontos).

Nosso programa calculou o primeiro pico de Bragg do fator de estrutura,  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$ , onde  $S(\mathbf{k}) = S(\mathbf{k}, z=0)$  é o fator de estrutura planar no espaço dos momentos  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ , dado por:

$$S(\mathbf{k}, z) = \frac{1}{\Omega N} \sum_r \langle n(0,0)n(\mathbf{r}, z) \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.7)$$

onde  $\Omega$  é uma constante de normalização de modo que, para uma rede de Abrikosov,  $S(K_{Bragg}) = 1$ , e  $n(\boldsymbol{\rho}, z)$  denota a densidade de vórtices na posição  $(\boldsymbol{\rho}, z)$ ; e o parâmetro de ordem orienta-

cional local (ou parâmetro de ordem hexática)

$$\Psi_6 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{z_i} \sum_{j=1}^6 e^{6i\theta_{ij}}, \quad (4.8)$$

onde  $\theta_{ij}$  é o ângulo de ligação entre dois vórtices-panqueca vizinhos e  $z_i$  é o número de vizinhos no plano da  $i$ -ésima pancake. Repare que, para uma rede hexagonal,  $\theta_{ij} = \pi/3$  para quaisquer  $i$  e  $j$  e  $\Psi_6 = 1$ .

O algoritmo utilizado foi o de Metropolis [63], consistindo das seguintes etapas:

- Primeiro, faz-se um passo-tentativa modificando aleatoriamente a posição de um vórtice pancake;
- Calcula-se a energia  $E$  da nova configuração de vórtices após o passo;
- Se a energia da nova configuração for menor que a da configuração anterior, o passo é aceito;
- Caso contrário, a probabilidade de aceitação do passo é proporcional ao fator de Boltzmann  $\sim e^{-E/k_B T}$ . Este último passo serve para dar conta das flutuações em torno da configuração de energia mínima.
- Repetimos os procedimentos acima, agora pegando como configuração inicial a configuração escolhida a partir dos passos anteriores.

Fazemos isso até alcançarmos o número total de passos de Monte Carlo desejados. No entanto, descartamos uma certa quantidade dos primeiros passos para equilíbrio. No nosso caso, o número de passos descartados é  $n_0 = 2 \times 10^4$ .

### 4.3 Resultados das Simulações

#### 4.3.1 Estudo da Estabilidade dos Estados do Sistema de Vórtices: Rede de Abrikosov como Configuração Inicial

Primeiramente fizemos algumas simulações onde se variou a razão entre a concentração de defeitos ( $n_d = B_\phi/\Phi_0$ ) e a concentração de vórtices ( $n = B/\Phi_0$ ). Executamos simulações para  $B_\phi = B/4$ ,  $B_\phi = B$ ,  $B_\phi = 4B$  e  $B_\phi = 16B$ . Assim, testamos tanto os regimes de baixa quanto de alta concentração de defeitos. Nosso objetivo é saber quais são os estados estáveis e meta-estáveis do sistema e como eles se comportam à medida que aumentamos a concentração de defeitos colunares. Em todas as simulações cujos resultados serão apresentados neste capítulo, escolhemos como parâmetros  $B = 1kG$  e  $E_p = -100K$  (em unidades de  $k_B$ ) e utilizamos condições periódicas de contorno em todas as direções.

Verificamos que, quando o número de linhas de vórtice é bem menor que o número de defeitos ( $B_\phi = B/4$ ) (Figura 4.3a), os parâmetros medidos se comportam aproximadamente como se não houvesse defeitos a baixas temperaturas. Em  $T \approx 23K$  há uma variação abrupta tanto de  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$  quanto de  $\Psi_6$ , o que indica uma mudança para a fase de *Bose Glass* e somente um *plâteau* é formado. Em  $T \approx 43K$ , há uma nova mudança de fase e a rede derrete como se não houvesse defeitos.

Quando o número de linhas de vórtice é igual ao de defeitos ( $B_\phi = B$ ) (Figura 4.3b), há a formação de mais de um *plâteau*, além de uma transição mais suave para a fase onde o derretimento ocorre como se não houvessem defeitos. Apesar desta transição mais suave, verificamos que a rede sai da fase de *Bose Glass* também em  $T \approx 43K$ , onde percebemos uma saída abrupta do segundo *plâteau*. Podemos fazer uma análise parecida para o caso  $B_\phi = 4B$  (Figura 4.3c).

Em todos os casos anteriores há um derretimento em duas etapas do sistema de linhas de fluxo [62, 64]: primeiro os vórtices se desprendem dos defeitos e depois o sistema derrete como

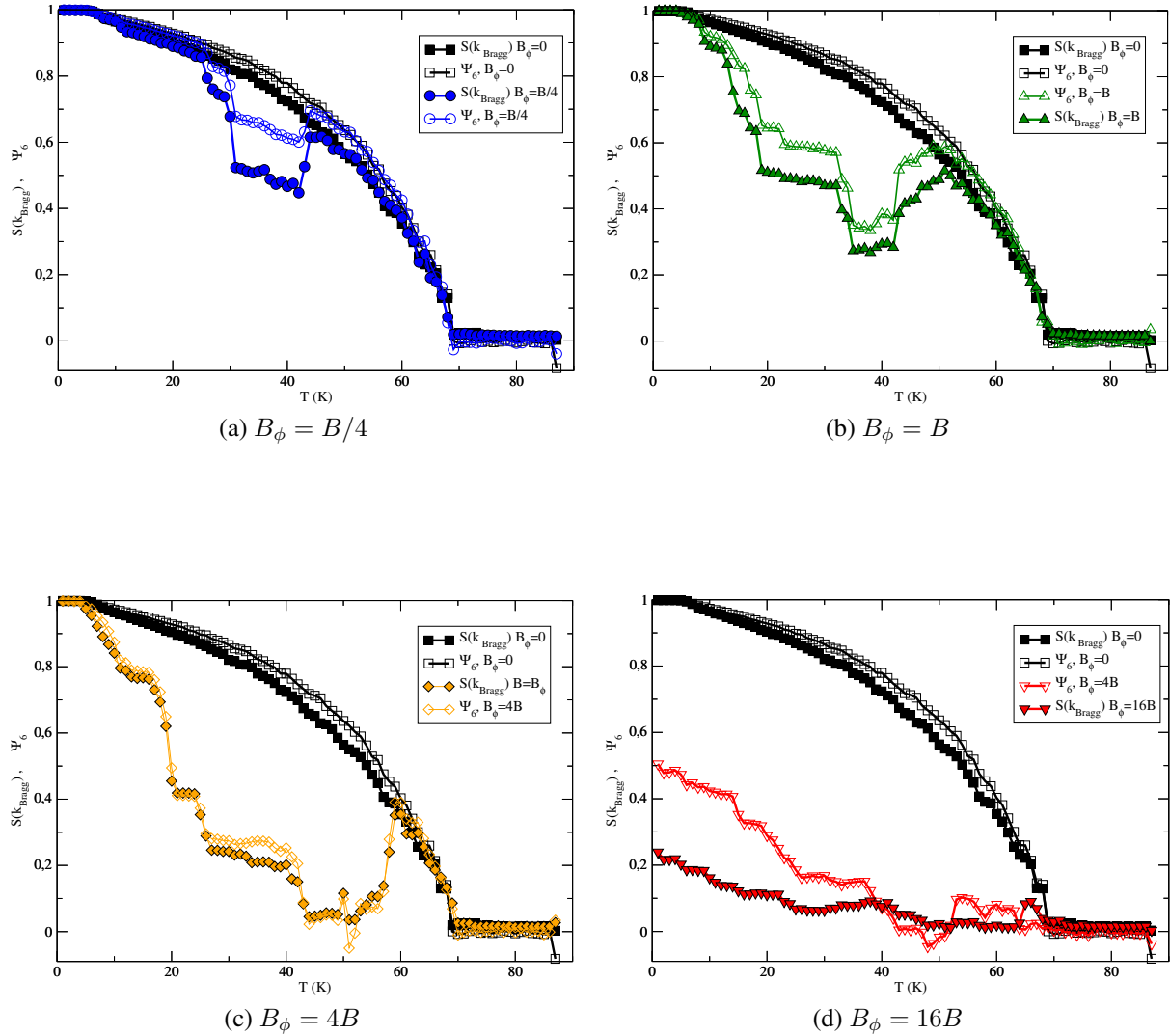


Figura 4.3: Gráfico mostrando o comportamento do primeiro pico de Bragg do fator de estrutura  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$  e do parâmetro de ordem hexática  $\Psi_6$  se variarmos a temperatura de uma amostra de BSCCO com (a)  $B_\phi = B/4$ , (b)  $B_\phi = B$ , (c)  $B_\phi = 4B$  e (d)  $B_\phi = 16B$ .

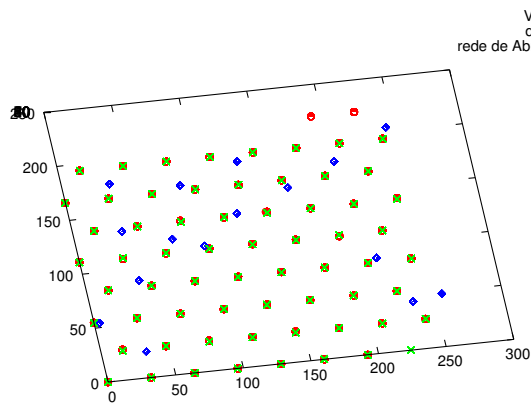
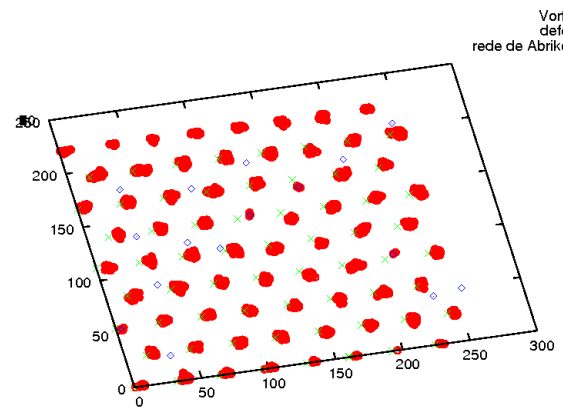
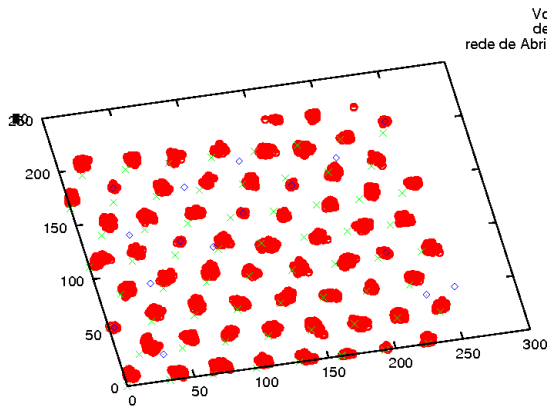
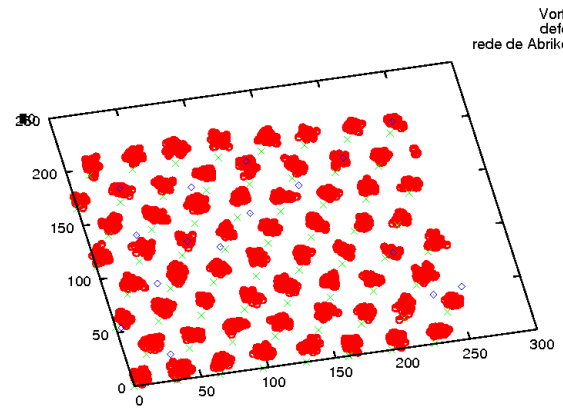
(a)  $T = 1K$ (b)  $T = 27K$ (c)  $T = 40K$ (d)  $T = 50K$ 

Figura 4.4: Projeção no plano perpendicular aos defeitos da configuração da rede de vórtices (a)  $1K$ , (b)  $T = 27K$ , (c)  $T = 40K$  e (d)  $T = 50K$  para  $B_\phi = B/4$ .

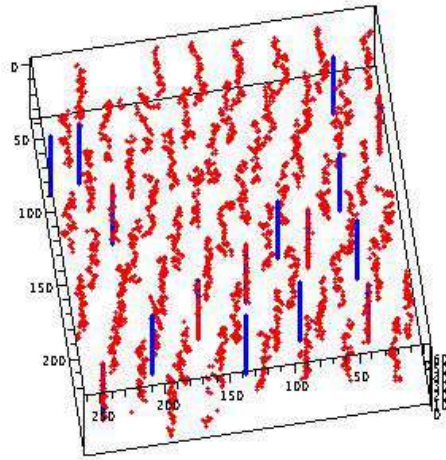


Figura 4.5: Configuração 3D de vórtices em  $T = 40K$  para o caso  $B_\phi = B/4$ . Símbolos azuis representam defeitos enquanto símbolos vermelhos representam vórtices.

se não houvesse defeitos. Já quando  $B_\phi = 16B$ , isso não acontece. O número de defeitos é tão grande que a maior parte dos vórtices ficam ancorados neles e não se desprendem até a temperatura de derretimento do sistema puro. Algo parecido acontece para campos altos [62], o que pode indicar o fato de que esse comportamento e essas fases dependem também da densidade de defeitos em si e não só da razão entre a densidade de defeitos e a de linhas de fluxo.

As figuras 4.4 a 4.8 mostram a configuração da rede para os três primeiros casos em certos valores relevantes da temperatura. Na figura 4.4b, vemos um *Bose glass* com alguns poucos vórtices ancorados nos defeitos. Na figura 4.4c, mais alguns vórtices estão ancorados, como vemos na figura 4.5; no entanto, o *Bose glass* é menos estável que no caso anterior devido a flutuações térmicas. A figura 4.4d mostra uma rede de Abrikosov termicamente distorcida, sem vórtices ancorados, como se não houvesse defeitos; isso condiz com o gráfico 4.3a, onde vemos que, nessa temperatura ( $50K$ ), o sistema está num estado onde ele derrete como numa amostra pura.

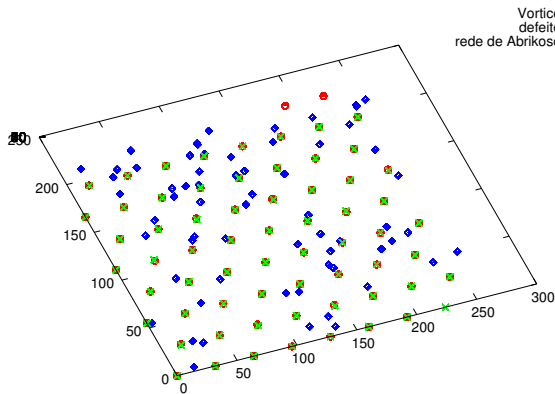
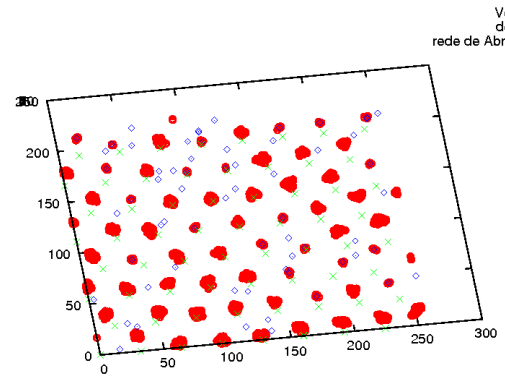
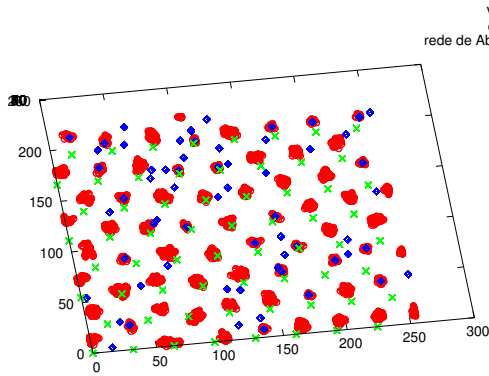
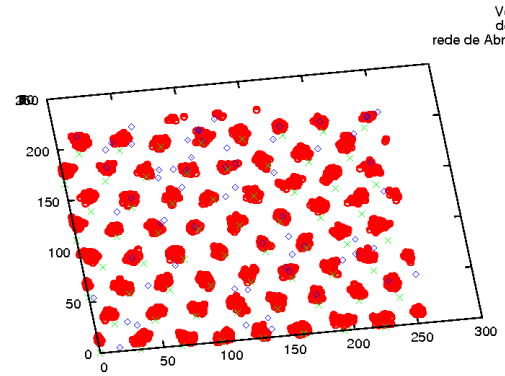
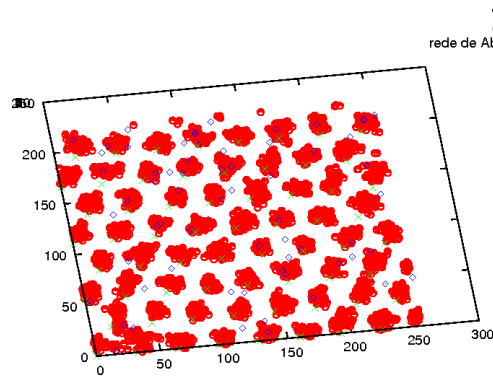
(a)  $T = 1K$ (b)  $T = 30K$ (c)  $T = 40K$ (d)  $T = 50K$ (e)  $T = 60K$ 

Figura 4.6: Projeção no plano perpendicular aos defeitos da configuração da rede de vórtices (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 30K$ , (c)  $T = 40K$ , (d)  $T = 50K$  e (f)  $T = 60K$  para  $B_\phi = B$ .

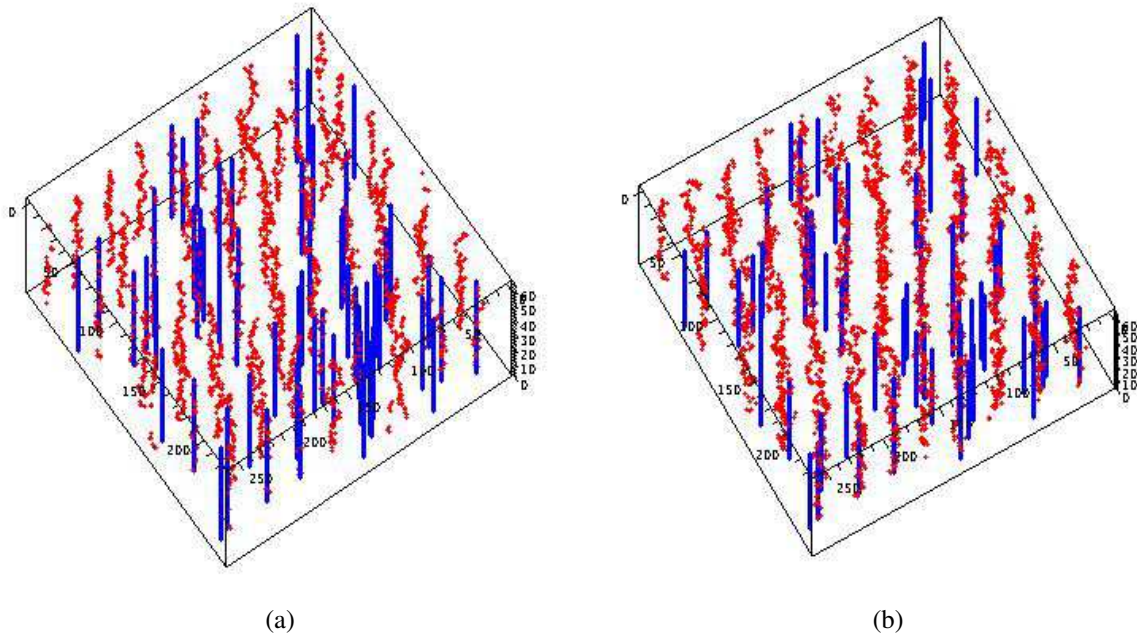


Figura 4.7: Configuração 3D de vórtices em (a)  $T = 40K$  e (b)  $T = 50K$  para o caso  $B_\phi = B$ . Símbolos azuis representam defeitos enquanto símbolos vermelhos representam vórtices.

Na figura 4.6, vemos algumas configurações relevantes para o caso em que  $B_\phi = B$ . Na figura 4.6b, vemos novamente um *Bose glass* (alguns vórtices ancorados); na figura 4.6c, observamos que o aumento do raio médio da trajetória do vórtice  $\sqrt{\langle |\mathbf{u}(z)|^2 \rangle}$  em  $z$  devido à agitação térmica como visto na equação (2.24) faz com que mais alguns vórtices se prendam a defeitos, como pode ser visto na figura 4.7a; na figura 4.6d, os vórtices ainda estão ancorados, mas, devido à agitação térmica, o comprimento de localização  $\ell_\perp$ , definido na equação (3.11), vai aumentando, o que faz com que alguns vórtices se prendam a mais de um defeito, como pode ser observado na figura 4.7b. Já na figura 4.6e, o sistema de vórtices está desancorado e derrete como se não houvesse defeitos.

Na figura 4.8, vemos as principais etapas da evolução do sistema de vórtices à medida que aumentamos a temperatura. na figura 4.8b, vemos uma configuração estável onde vários vórtices estão ancorados, enquanto outros permanecem livres. O aumento do raio médio da trajetória da linha de fluxo  $\sqrt{\langle |\mathbf{u}(z)|^2 \rangle}$  em  $z$  da equação (2.24) induzido pelo aumento da

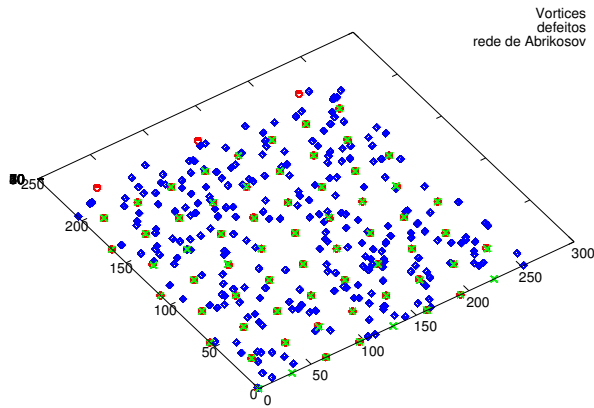
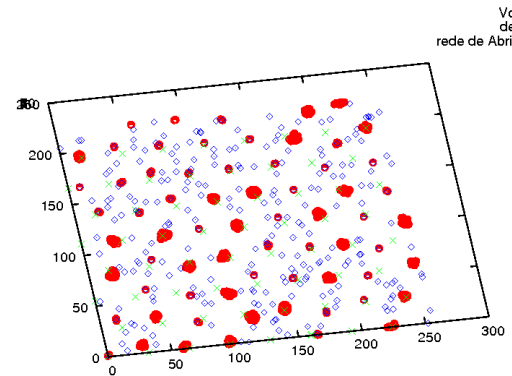
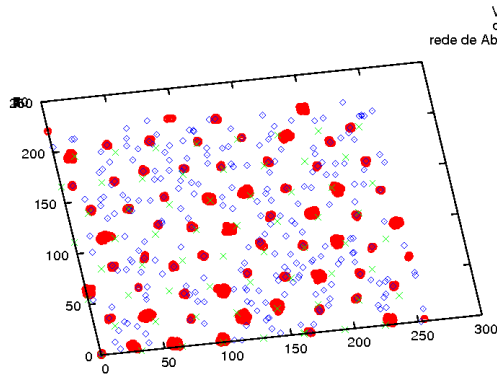
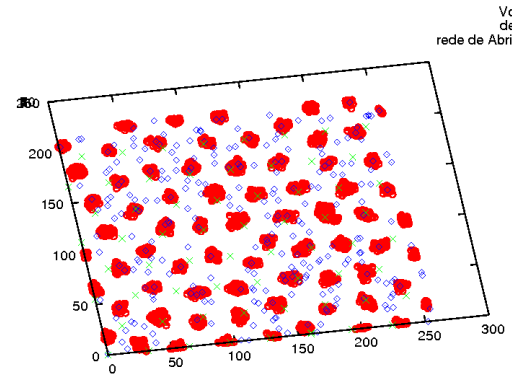
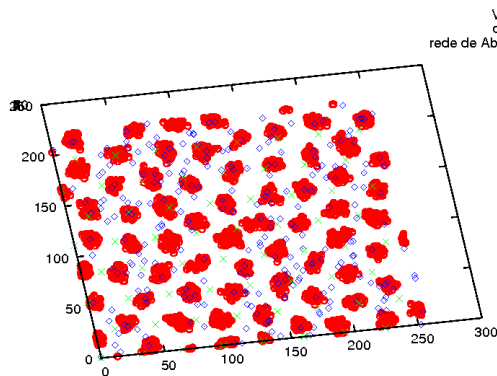
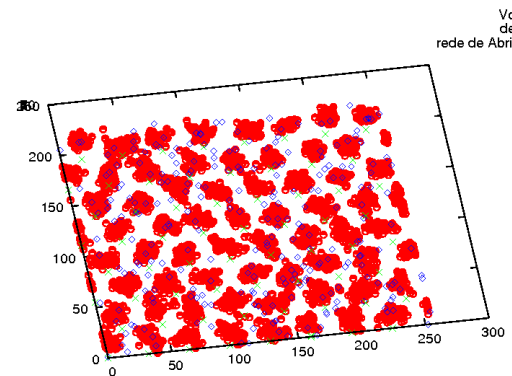
(a)  $T = 1K$ (b)  $T = 23K$ (c)  $T = 30K$ (d)  $T = 48K$ (e)  $T = 55K$ (f)  $T = 64K$ 

Figura 4.8: Projeção no plano perpendicular aos defeitos da configuração da rede de vórtices (a)  $T = 23K$ , (b)  $T = 30K$ , (c)  $T = 48K$ , (d)  $T = 55K$  e (e)  $T = 64K$  para  $B_\phi = 4B$ .

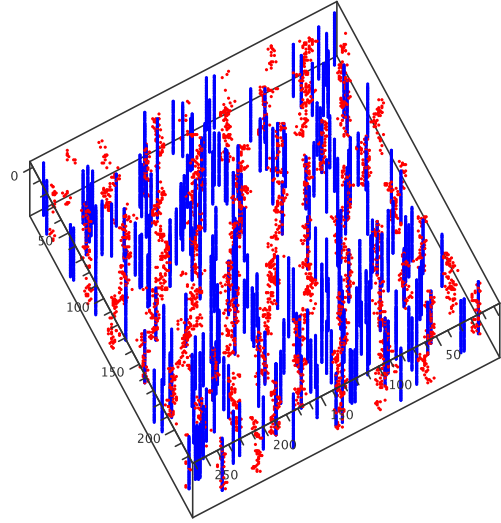


Figura 4.9: Configuração 3D de vórtices em  $T = 48K$  para o caso  $B_\phi = 4B$ . Símbolos azuis representam defeitos enquanto símbolos vermelhos representam vórtices.

temperatura faz com que mais vórtices se prendam a defeitos, o que leva à configuração vista na figura 4.8c. Nessa figura, também pode-se notar que o raio médio da trajetória da linha em  $z$  dos defeitos presos aos vórtices, o comprimento de localização  $\ell_\perp$ , também aumentou devido à agitação térmica. Ao aumentarmos ainda mais a temperatura, o aumento de  $\ell_\perp$  faz com que alguns vórtices fiquem agarrados em mais de um defeito, como na figura 4.8d. Na figura 4.8e, mais vórtices ficam presos a mais de um defeito; já na figura 4.8f, os vórtices se desprendem dos defeitos e o sistema derrete da mesma maneira do sistema puro.

Assim como num trabalho anterior do grupo [62], verificamos que a presença de defeitos colunares não muda a temperatura de derretimento da rede de vórtices. Verifica-se também a presença de uma fase de *Bose glass* que vai se tornando mais estável à medida que se introduz defeitos na amostra. Percebe-se também que a transição para o derretimento é mais suave quando  $B_\phi = B$ . Isto é uma indicação da presença do estado de rede de Abrikosov distorcida visto em [62].

Além disso, não vimos nenhuma fase hexática (onde somente a ordem hexática é diferente

de zero), o que era de se esperar, visto que em simulações com o sistema puro [26, 65] esta fase também não é estável.

### 4.3.2 Estudo da Estabilidade dos Estados do Sistema de Vórtices: Estados

#### Meta-Estáveis como Configuração Inicial

Agora vamos estudar mais profundamente a estabilidade dos estados encontrados na subseção anterior. Para isso, executamos vários processos em que, partindo da configuração encontrada para uma dada temperatura, ao invés de aumentarmos essa temperatura, diminuimos para ver se há histerese na volta e se a configuração para a aquela temperatura é estável. Os resultados para os casos em que  $B_\phi = B/4$ ,  $B_\phi = B$  e  $B_\phi = 4B$  estão nas figuras 4.10, 4.13 e 4.18. As figuras também contêm as "idas" (gráficos com a temperatura crescente) com e sem ancoragem para comparação. A partir desses gráficos, podemos comprovar a meta-estabilidade das configurações encontradas na subseção anterior.

Nas figuras 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17, são apresentadas algumas configurações de vórtices para o caso  $B_\phi = B$  em algumas temperaturas. A partir delas, podemos ver claramente que há um "congelamento" da rede de vórtices em uma fase vítrea (um *Bose Glass*). Os vórtices ficam no mesmo lugar em média (a menos da flutuação devido à temperatura) e a diferença entre os estados meta-estáveis partindo de temperaturas iniciais independentes é que, como em algumas configurações iniciais existem mais vórtices presos em defeitos que em outras, a posição em que os vórtices "congelam" é diferente. Nas figuras 4.11 e 4.12 vemos algumas configurações de vórtices para o caso  $B_\phi = B/4$ . Vemos que o congelamento da rede de vórtices não é tão efetivo quanto no caso anterior, pois há poucos defeitos, consequentemente, há poucos vórtices agarrados aos defeitos nos estados iniciais. Nas figuras 4.19 e 4.20, temos algumas configurações de vórtices para  $T_0 = 47K$  e  $T_0 = 58K$  quando  $B_\phi = 4B$  e podemos ver que o congelamento dos vórtices é mais forte neste caso. Assim, quanto maior a densidade de vórtices, mais estável é a configuração de vórtices congelada pelos defeitos.

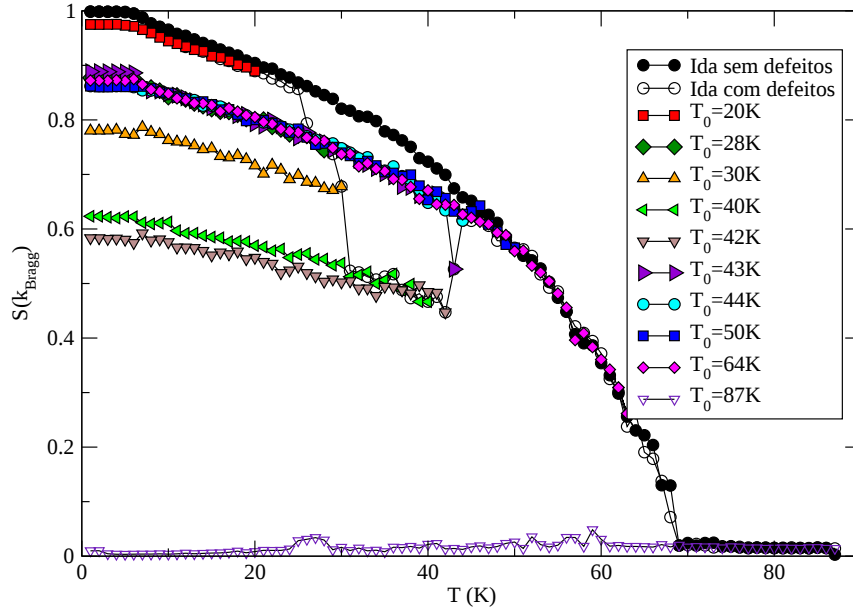


Figura 4.10: Primeiro pico de Bragg do fator de estrutura para  $B_\phi = B/4$  para várias temperaturas iniciais  $T_0$  a partir das quais o sistema é resfriado.

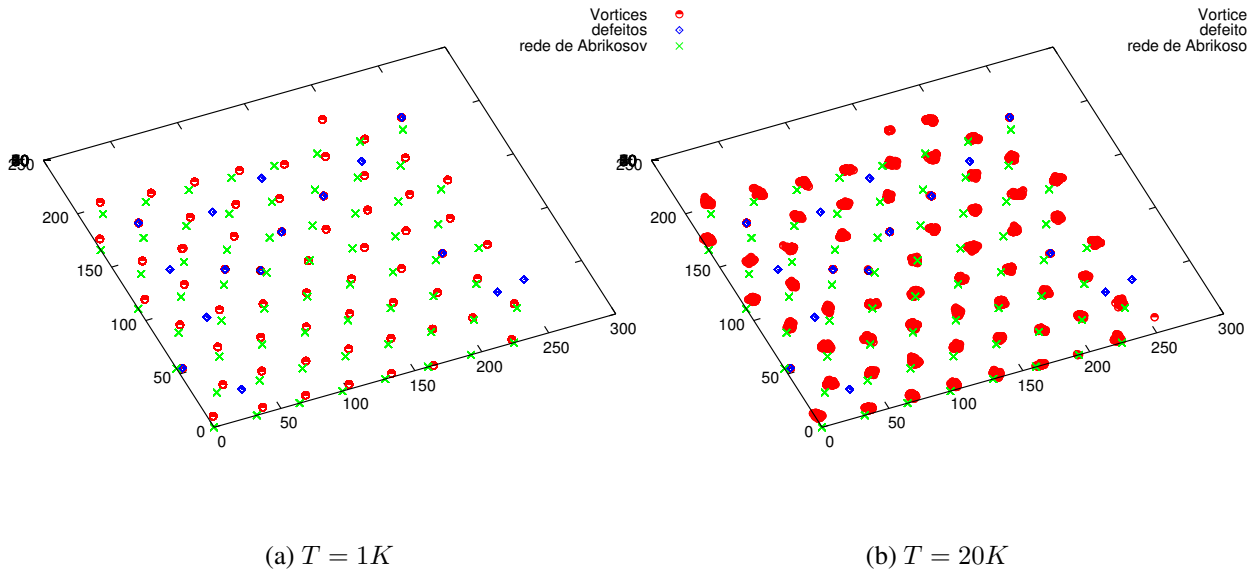


Figura 4.11: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 20K$  para  $T_0 = 42K$  ( $B_\phi = B/4$ ).

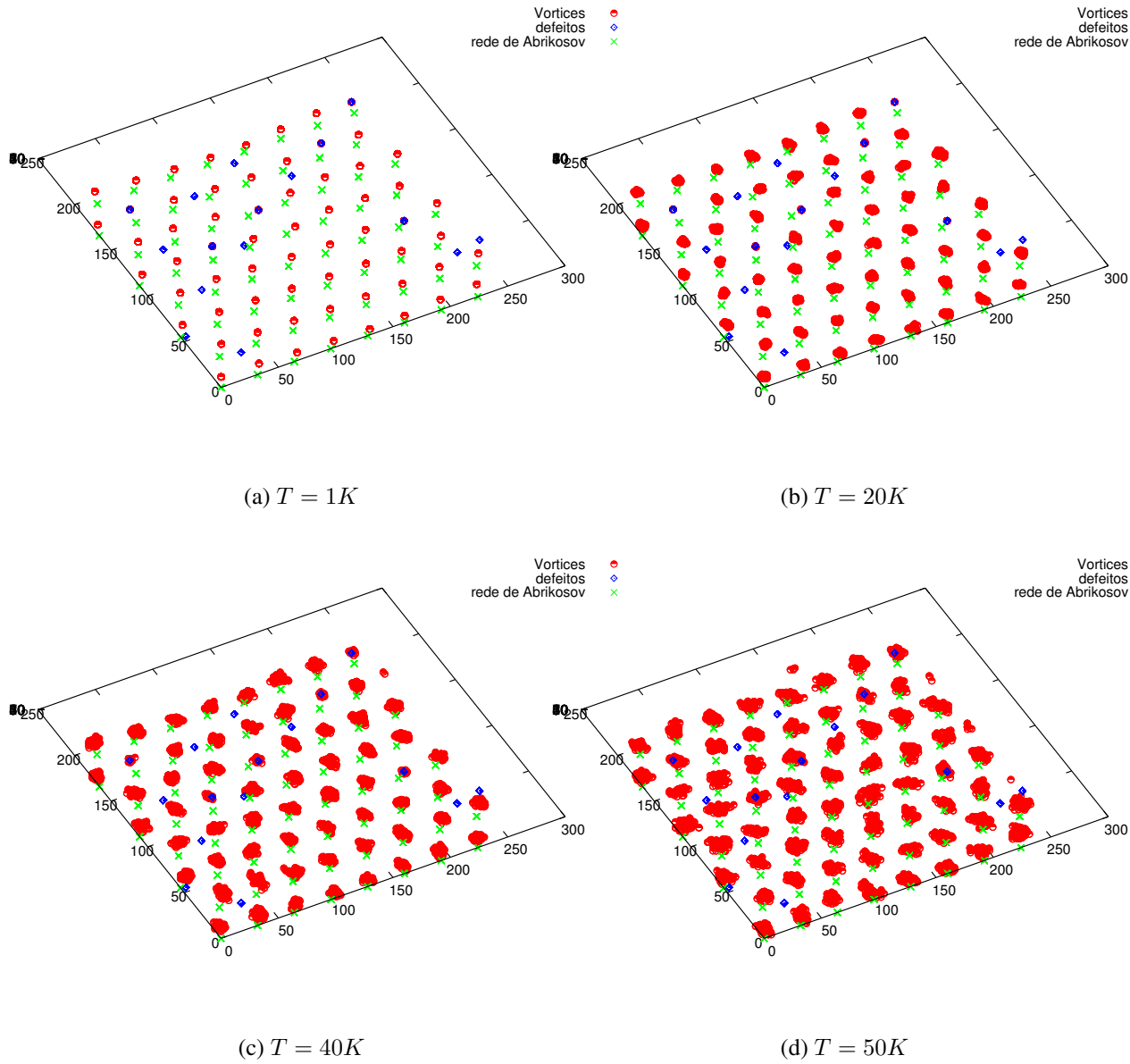


Figura 4.12: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 20K$ , (c)  $T = 40K$  e (d)  $T = 50K$  para  $T_0 = 64K$  ( $B_\phi = B/4$ ).

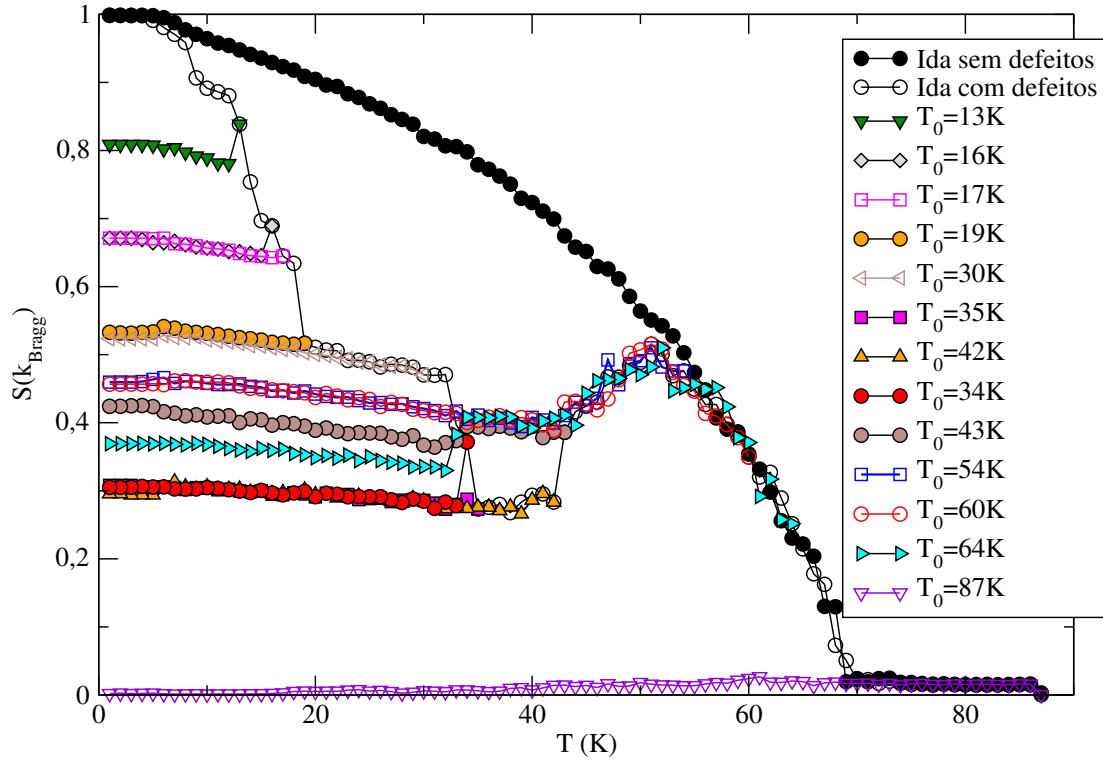


Figura 4.13: Primeiro pico de Bragg do fator de estrutura para  $B_\phi = B$  para várias temperaturas iniciais  $T_0$  a partir das quais o sistema é resfriado.

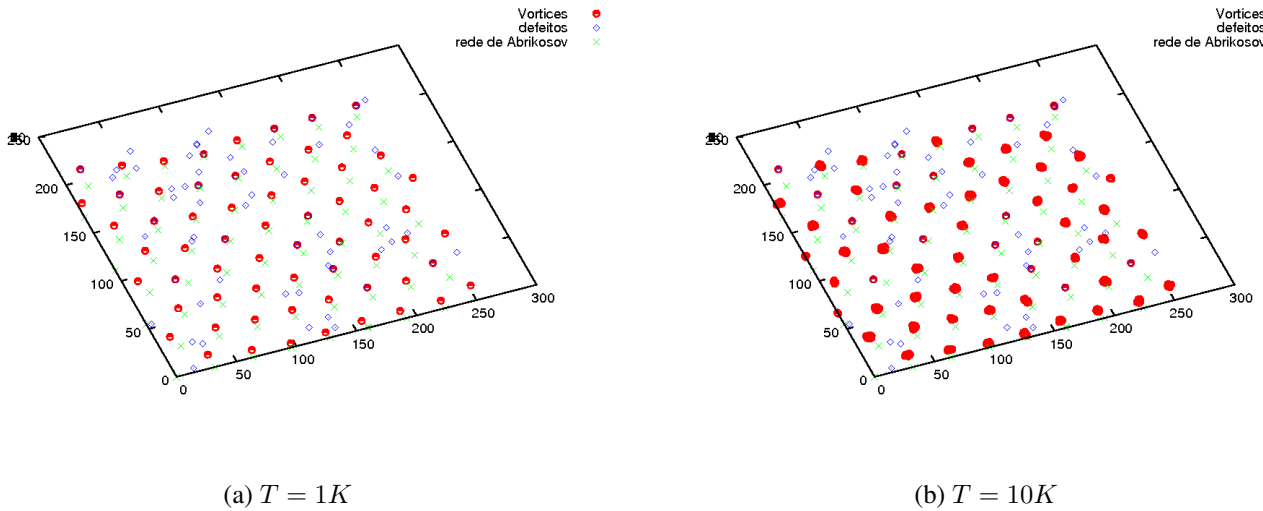


Figura 4.14: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 10K$  para  $T_0 = 17K$  ( $B_\phi = B$ ).

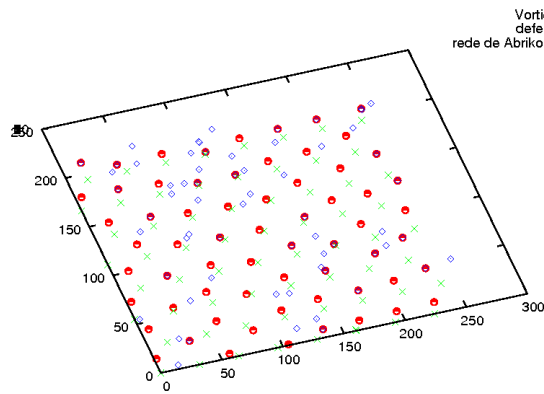
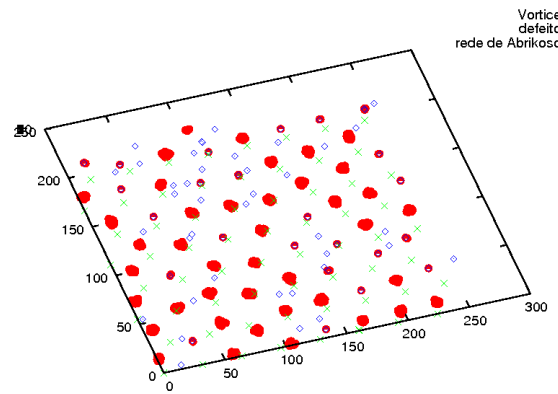
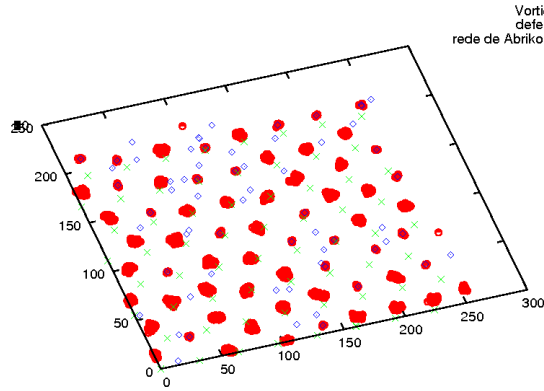
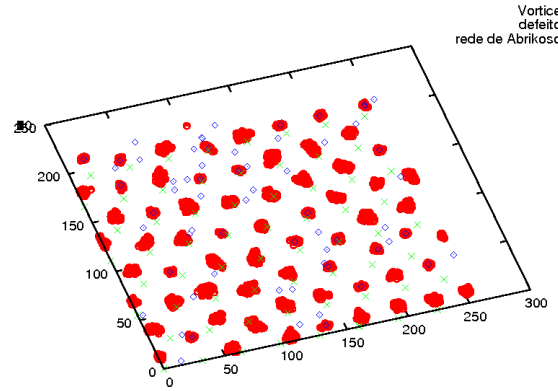
(a)  $T = 1K$ (b)  $T = 20K$ (c)  $T = 30K$ (d)  $T = 40K$ 

Figura 4.15: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 20K$ , (c)  $T = 30K$  e (d)  $T = 40K$  para  $T_0 = 42K$  ( $B_\phi = B$ ).

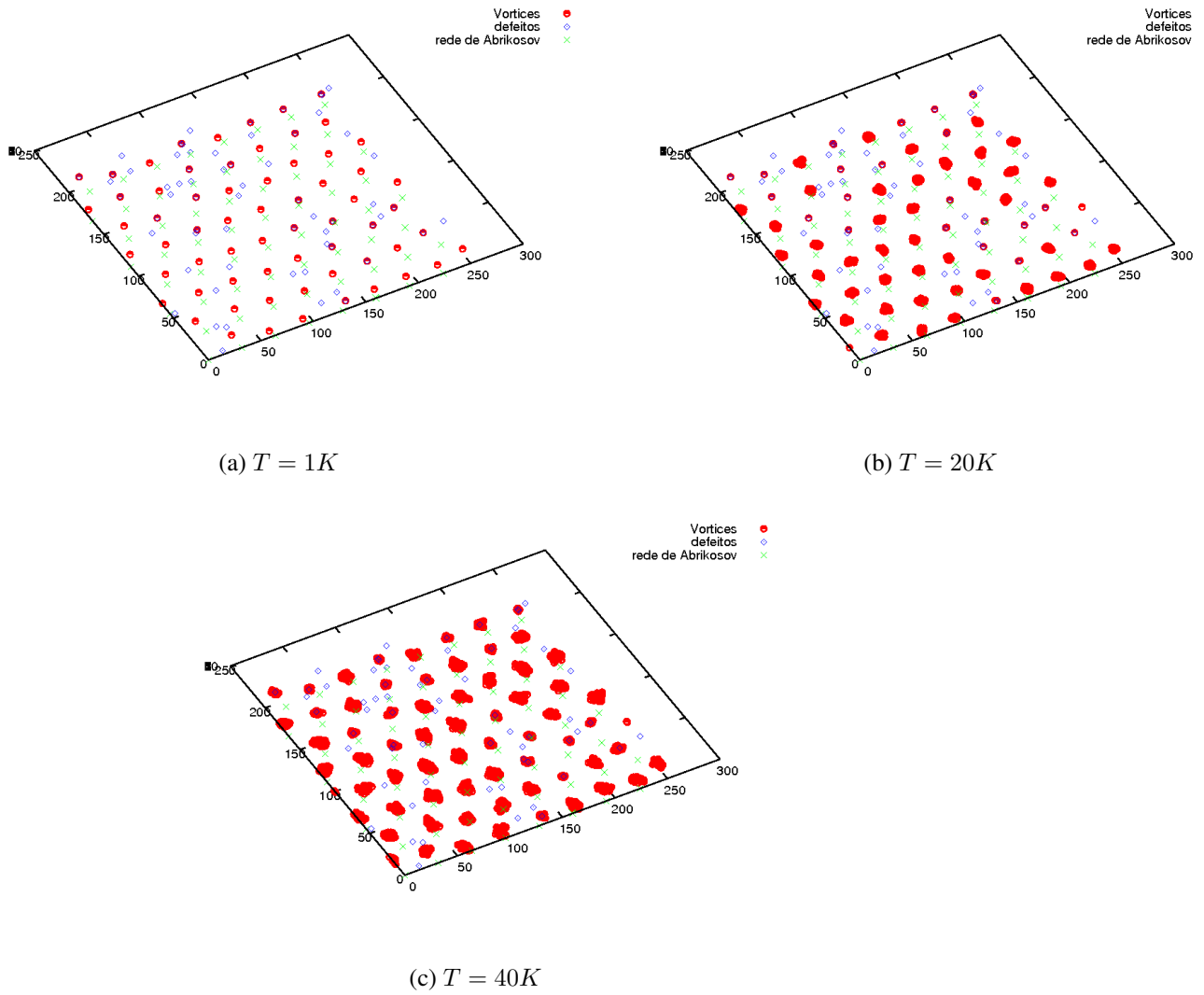


Figura 4.16: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$ , (b)  $T = 20K$  e (c)  $T = 40K$  para  $T_0 = 60K$  ( $B_\phi = B$ ).

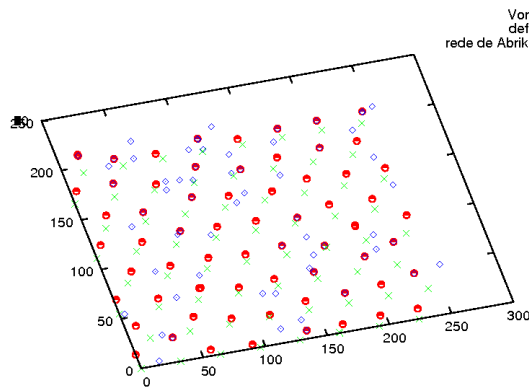
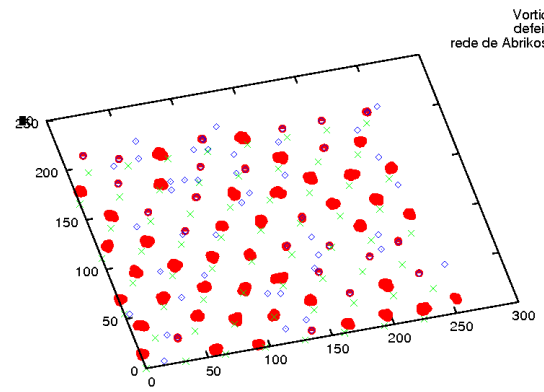
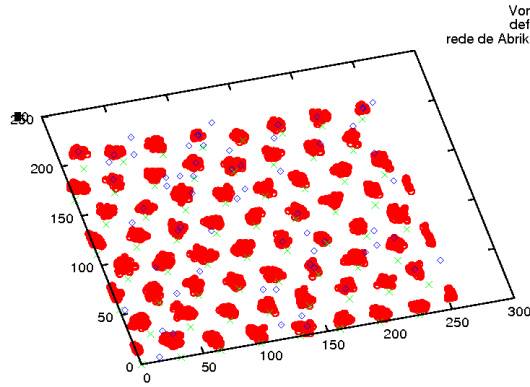
(a)  $T = 1K$ (b)  $T = 20K$ (c)  $T = 50K$ 

Figura 4.17: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  (b)  $T = 20K$  e (c)  $T = 50K$  para  $T_0 = 64K$  ( $B_\phi = B$ ).

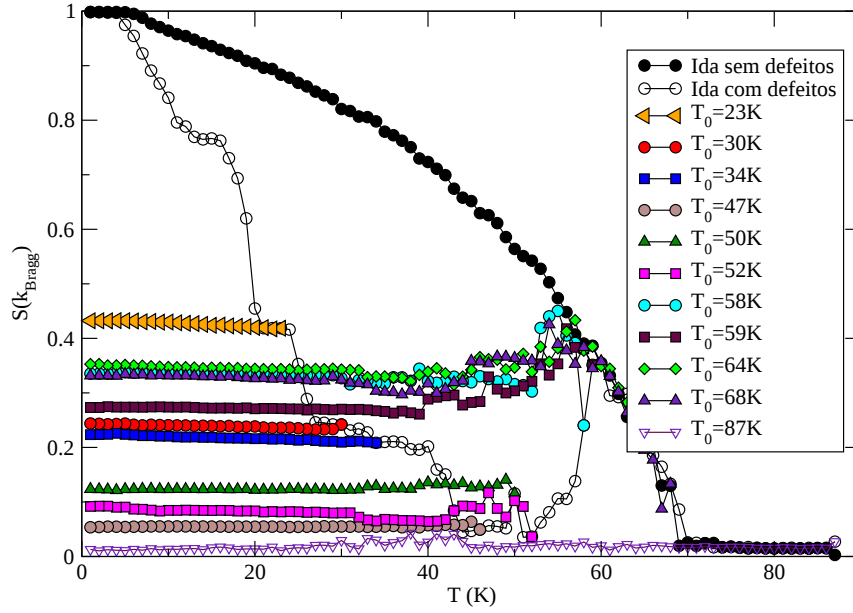


Figura 4.18: Primeiro pico de Bragg do fator de estrutura para  $B_\phi = 4B$  para várias temperaturas iniciais  $T_0$  a partir das quais o sistema é resfriado.

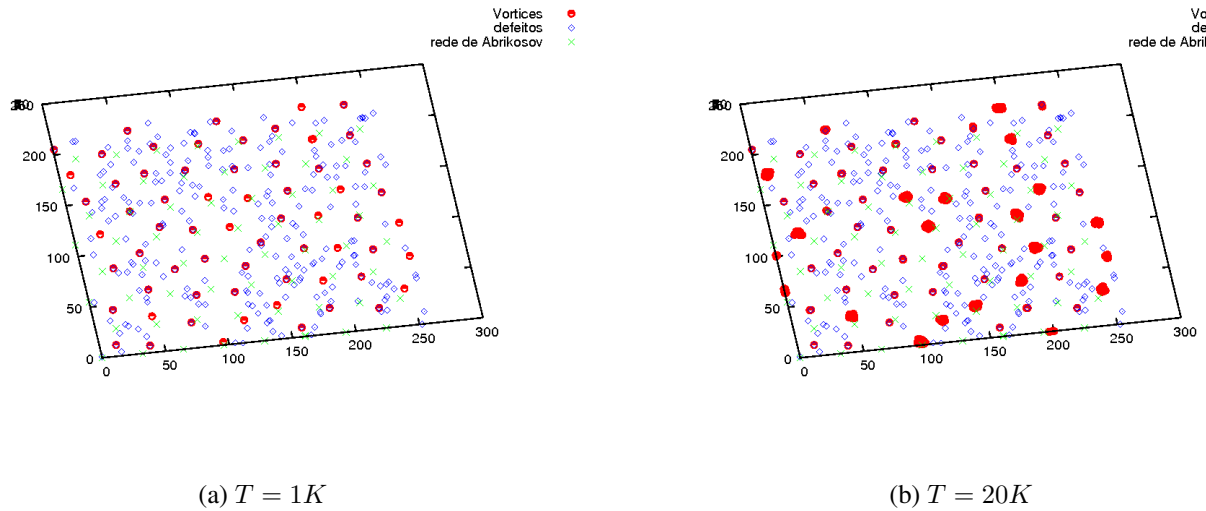


Figura 4.19: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 20K$  para  $T_0 = 47K$  ( $B_\phi = 4B$ ).

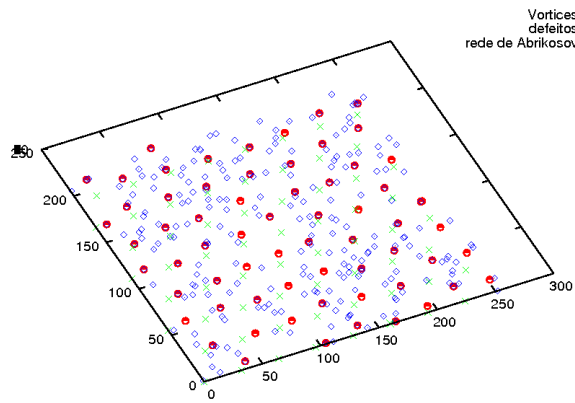
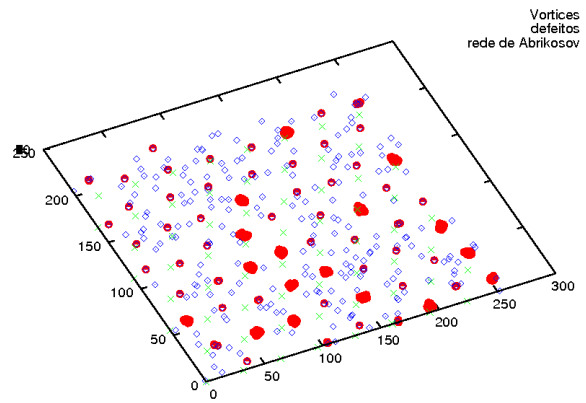
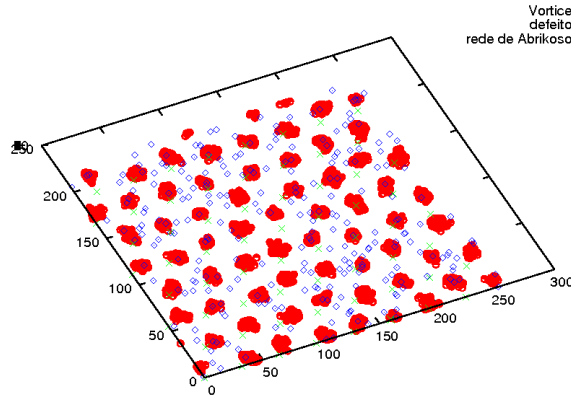
(a)  $T = 1K$ (b)  $T = 20K$ (c)  $T = 50K$ 

Figura 4.20: Configuração de vórtices em (a)  $T = 1K$  e (b)  $T = 20K$  e (b)  $T = 50K$  para  $T_0 = 58K$  ( $B_\phi = 4B$ ).

Além disso, não constatamos a existência da fase isolante de Mott em baixas temperaturas no caso  $B_\phi = B$ , fase esta prevista teoricamente por Nelson e Vinokur [48]. Na verdade, podemos dizer que isso já era esperado, pois, nosso sistema de vórtices talvez não seja bem modelado pelo hamiltoniano de Bose-Hubbard (equação (3.25)), que permite apenas a existência de vórtices ligados aos defeitos, coisa que se não se verifica na configuração inicial utilizada. Percebemos que, basicamente, os vórtices presos nos defeitos acabam funcionando como "vínculos" para o sistema: a rede de vórtices tende a ficar na configuração de menor energia a temperaturas baixas dado que certos vórtices não possam sair de algumas posições estabelecidas, pois estão ancorados nos defeitos. Acaba-se formando o mais próximo possível de uma rede Abrikosov, dada a posição fixa de alguns vórtices.

### 4.3.3 Efeito da Interação Eletromagnética

Também fizemos simulações para sabermos o efeito prático de introduzirmos no nosso modelo a interação eletromagnética entre vórtices em planos distintos visto na equação 2.72:

$$V_{EM} = -\frac{\Phi_0^2 d^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{-|z_n|}{\lambda_{ab}} \right)^m \frac{m R^2}{4z_n^2} {}_3F_{ab} \left( 1, 1, 1 - \frac{m}{2}; 2, 2; -\frac{R^2}{z_n^2} \right). \quad (4.9)$$

O resultado do cálculo de  $S(\mathbf{k}_{bragg})$  pode ser visto na figura 4.21. Podemos ver claramente que o sistema tende a permanecer no estado meta-estável em que ficaria mesmo sem a interação, quando resfriamos a amostra a partir de  $T_0 = 54K$ . Além disso, podemos observar que, apesar de uma diferença considerável entre as curvas das "idas" entre  $\sim 12 - 32K$ , em ambos os casos o sistema se acomodou em um *plâteau* estável e voltam a derreter sem a influência dos defeitos a partir da mesma temperatura. Podemos dizer, assim, que não houve diferença qualitativa entre os dois casos, pois ambos possuem os mesmos estados meta-estáveis.

Estes resultados numéricos corroboram a visão de Ryu et al. [36] de que a interação eletro-

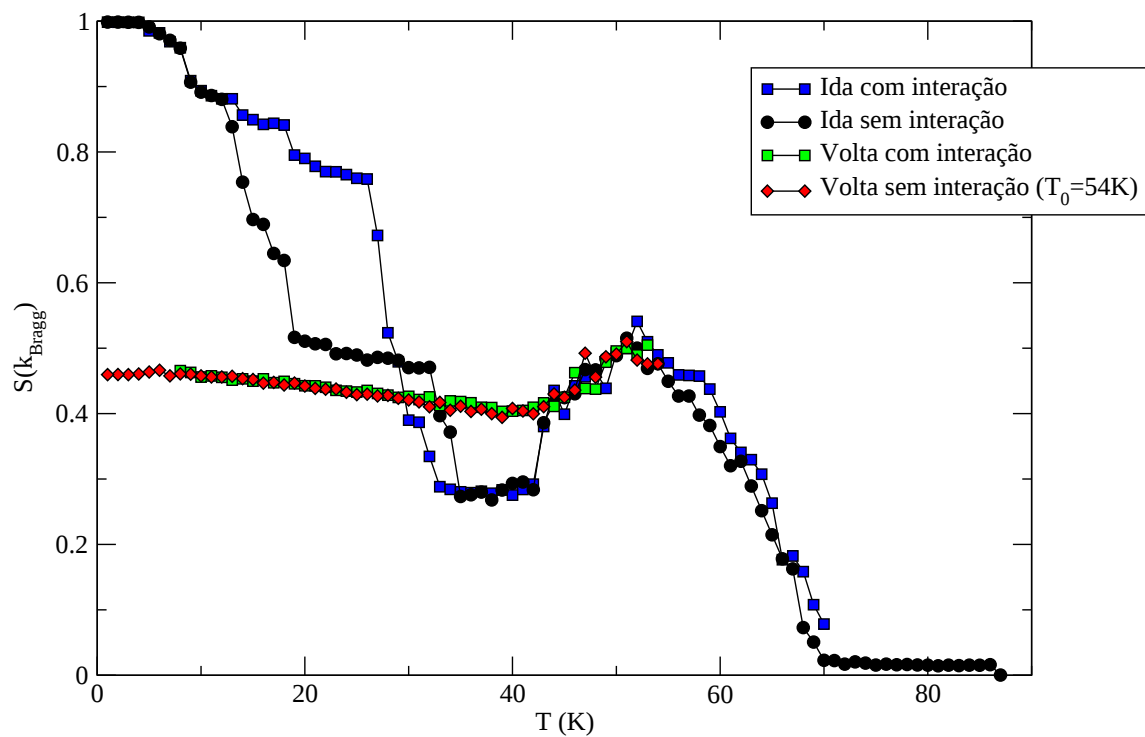


Figura 4.21: Comparação entre a evolução de  $S(k_{Bragg})$  na ausência e na presença da interação magnética entre vórtices em camadas diferentes ( $B_\phi = B$ ).

magnética entre vórtices em diferentes planos pode ser negligenciada no BSCCO. No entanto, mais investigações precisam ser feitas, por exemplo, sobre a natureza da discrepância entre as curvas de "ida" para certos valores da temperatura. Nesse caso da investigação do efeito das interações eletromagnéticas sobre o sistema, o trabalho é dificultado pelo grande número de operações que as simulações precisam fazer para calcular o valor total desta interação entre todos os vórtices, aumentando muito o tempo de simulação.

#### 4.3.4 Efeito da Amostragem da Desordem

Investigamos também o efeito da amostragem da desordem para os casos em que  $B_\phi = B/4$ ,  $B_\phi = B$  e  $B_\phi = 4B$ . A figura 4.22 mostra o  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$  em função da temperatura para algumas amostragens diferentes de desordem. Podemos perceber que a curva pode mudar bastante de um caso para o outro, mas sempre há a presença de estados *Bose glass* meta-estáveis. A temperatura em que o sistema começa a derreter como se não houvesse defeitos muda também. Talvez seja instrutivo fazer médias na desordem para obter resultados mais acurados para esta temperatura de derretimento.

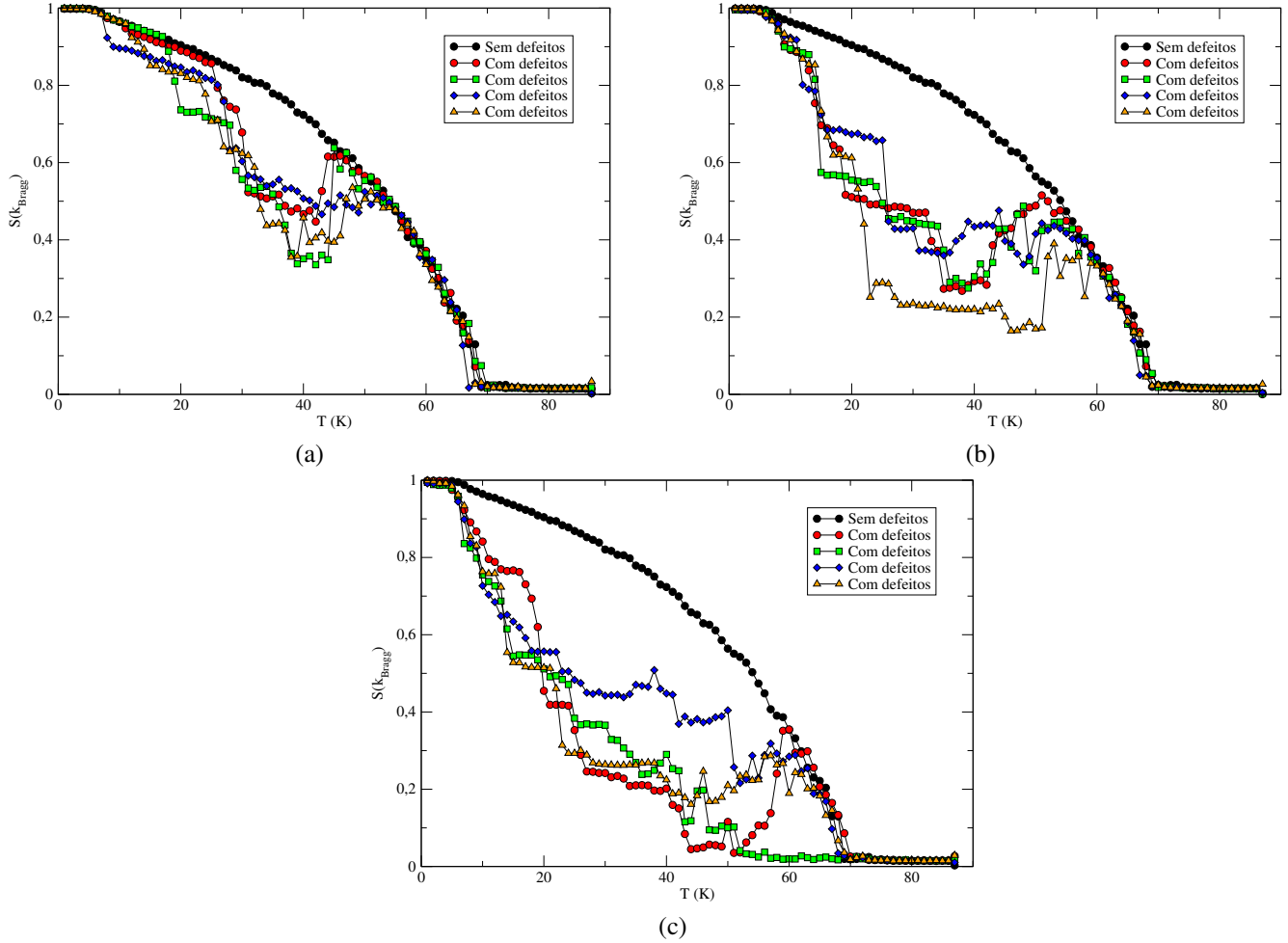


Figura 4.22: Curvas de  $S(\mathbf{k}_{Bragg})$  versus temperatura para diferentes distribuições da desordem para os casos (a)  $B_\phi = B/4$ , (b)  $B_\phi = B$  e (c)  $B_\phi = 4B$ .

## CAPÍTULO 5

# Conclusões

Nesta dissertação, estudamos o comportamento e os estados de equilíbrio de uma rede de vórtices no BSCCO na presença de defeitos colunares por meio de simulações computacionais. No capítulo 1, descrevemos resumidamente as propriedades dos supercondutores de baixas temperaturas por meio das duas mais importantes teorias fenomenológicas da supercondutividade: a teoria de London, que descreve adequadamente as propriedades eletrodinâmicas dos supercondutores em vários casos relevantes; e a teoria de Ginzburg-Landau, que descreve muito bem as propriedades eletro e termodinâmicas dos sistemas supercondutores. Por meio da teoria de Ginzburg-Landau, identificamos e descrevemos algumas propriedades importantes dos supercondutores tipo I e II, bem como apresentamos uma discussão sucinta sobre a dinâmica dos vórtices em supercondutores tipo II.

No capítulo 2, apresentamos os supercondutores de altas temperaturas e enumeramos suas principais características. Descrevemos também as duas principais teorias fenomenológicas mais adequadas para tratar tais supercondutores: a teoria de Ginzburg-Landau anisotrópica, conveniente para descrever fenômenos onde a estrutura de camadas própria dos supercondutores de altas temperaturas não é relevante; e a teoria de Lawrence-Doniach, que leva em conta a estrutura em planos desses compostos. Utilizamos a teoria de Ginzburg-Landau anisotrópica para obter alguns resultados importantes sobre os principais regimes em que um sistema de vórtices pode se encontrar e sobre as transições entre esses regimes. Utilizamos a analogia entre linhas de vórtice e bósons bidimensionais proposta por Nelson para obter informações relevantes sobre a termodinâmica de um sistema de linhas de fluxo. Em seguida, descrevemos o modelo de Lawrence-Doniach com um certo detalhe e falamos um pouco sobre a dinâmica

dos vórtices-panqueca nos planos supercondutores. Calculamos a energia eletromagnética de interação entre dois vórtices em camadas quaisquer, chegando numa expressão original, e a interação Josephson entre dois vórtices em camadas primeiras-vizinhas.

No capítulo 3, fizemos uma pequena revisão sobre o efeito da desordem no sistema de vórtices, focando na desordem causada por defeitos colunares aleatoriamente distribuídos sobre as amostras. Conseguimos alguns resultados interessantes partindo da analogia entre linhas de vórtices e bósons bidimensionais, o que permitiu fazer alguns cálculos simples utilizando apenas as ferramentas da mecânica quântica não-relativística. Ainda usando esta analogia, verificamos a possível existência de algumas fases desordenadas. Fases estas de extrema importância tanto científica quanto tecnológica para a fabricação de materiais supercondutores.

Finalmente, no capítulo 4, apresentamos os resultados de nossas simulações utilizando o modelo de Lawrence-Doniach com interação magnética repulsiva entre vórtices numa mesma camada. Aplicamos os resultados dos capítulos anteriores para estudar um sistema de vórtices num supercondutor fortemente anisotrópico (BSCCO) com defeitos colunares. Identificamos a presença de uma fase de *Bose glass* caracterizada por estados meta-estáveis onde alguns vórtices ficam presos aos defeitos, enquanto os outros permanecem “congelados”. Fase esta identificada a partir de *plateaux* do primeiro pico de Bragg do fator de estrutura e do parâmetro de ordem hexática do sistema. A partir das configurações de algumas temperaturas específicas, simulamos a volta com temperatura decrescente até  $T = 1K$  e verificamos a meta-estabilidade destes estados de *Bose glass*. Além disso, fizemos uma simulação para verificar a influência da energia eletromagnética de interação entre vórtices-panqueca sobre esses estados e concluímos que tais estados permanecem meta-estáveis e que tal energia não muda a temperatura em que o sistema começa a derreter como se não houvesse defeitos. Isto é um indicativo de que a energia eletromagnética não exerce muita influência nos resultados qualitativos, mas esta hipótese ainda precisa ser testada mais vezes posteriormente. Ao final, investigamos o efeito da amostragem da desordem no sistema e vimos que algumas quantidades, como a temperatura em que o sistema

derrete começa a derreter como se não houvesse defeitos, mudam, mas nos convencemos de que tais mudanças não influenciam as conclusões a que chegamos anteriormente.

## Referências Bibliográficas

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
- [2] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [3] H. K. Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden (1911).
- [4] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (W. A. Benjamin, 1966).
- [5] W. Meissner and R. Ochsenfeld, Naturwiss. **21**, 787 (1933).
- [6] M. Tinkham, *Introduduction to Superconductivity* (Dover, 2004).
- [7] J. File and R. G. Mills, Phys. Rev. Lett. **10**, 93 (1963).
- [8] B. S. Deaver and W. M. Fairbank, Phys. Rev. Lett. **7**, 43 (1961).
- [9] R. Doll and M. Näbauer, Phys. Rev. Lett. **7**, 51 (1961).
- [10] W. H. Keesom and J. A. Kok, Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden **221e** (1932).
- [11] F. London and H. London, Proc. Roy. Soc. (London) **A149**, 70 (1935).
- [12] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
- [13] F. London, *Superfluids*, vol. 1 (Dover, 1961).
- [14] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
- [15] D. Saint-James and P. G. Gennes, Phys. Lett. **7**, 306 (1963).
- [16] L. V. Shubnikov et al., Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **7**, 221 (1937).

- [17] A. A. Abrikosov, Soviet Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [18] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler, Phys. Rev. **133**, A1226 (1964).
- [19] J. G. Bednorz and K. A. Müller, Zeit. Phys. B **64**, 189 (1986).
- [20] W. E. Lawrence and S. Doniach, in *Proc. 12th Int. Conf. Low Temp. Phys.*, edited by E. Kanda (Keigaku, Tokyo, 1971), pp. 361–362.
- [21] Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono, J. Am. Chem. Soc. **130**, 3296 (2008).
- [22] M. Cyrot and D. Pavuna, *Introduction to Superconductivity and High-Tc Materials* (World Scientific, 1995).
- [23] G. Carneiro, notas de aula, Departamento de Física, UFPE (1996).
- [24] G. Blatter, V. B. Geshkenbein, and A. I. Larkin, Phys. Rev. Lett. **68**, 875 (1992).
- [25] D. R. Nelson and H. S. Seung, Phys. Rev. B **39**, 9153 (1989).
- [26] L. P. Viana, E. P. Raposo, and M. D. Coutinho-Filho, Phys. Rev. B **70**, 134516 (2004).
- [27] G. W. Crabtree and D. R. Nelson, Physics Today (1997).
- [28] D. R. Nelson, *Defects and Geometry in Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, 2002).
- [29] Q.-H. Chen, Q.-M. Nie, J.-P. Lv, and T.-C. A. Yeung, New Journal of Physics **11**, 035003 (2009).
- [30] T. Shibauchi, T. Nakano, M. Sato, T. Kisu, N. Kameda, N. Okuda, S. Ooi, and T. Tamegai, Phys. Rev. Lett. **83**, 1010 (1999).

- [31] D. T. Fuchs, E. Zeldov, T. Tamegai, S. Ooi, M. Rappaport, and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **80**, 4971 (1998).
- [32] D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **60**, 1973 (1988).
- [33] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
- [34] J. R. Clem, Phys. Rev. B **43**, 7837 (1991).
- [35] L. N. Bulaevskii, M. Ledvij, and V. G. Kogan, Phys. Rev. B **46**, 366 (1992).
- [36] S. Ryu, S. Doniach, G. Deutscher, and A. Kapitulnik, Phys. Rev. Lett. **68**, 710 (1992).
- [37] E. V. Thuneberg, J. Kurkijärvi, and D. Rainer, Phys. Rev. B **29**, 3913 (1984).
- [38] L. Y. Vinnikov, L. A. Gurevich, G. A. Yemelchenko, and Y. A. Ossipyan, Solid State Commun. **67**, 421 (1988).
- [39] G. J. Dolan, G. V. Chandrashekhar, T. R. Dinger, C. Feild, and F. Holtzberg, Phys. Rev. Lett. **62**, 827 (1989).
- [40] W. K. Kwok, U. Welp, G. W. Crabtree, K. G. Vandervoort, R. Hulscher, and J. Z. Liu, Phys. Rev. Lett. **64**, 966 (1990).
- [41] W. K. Kwok, U. Welp, V. M. Vinokur, S. Fleshler, J. Downey, and G. W. Crabtree, Phys. Rev. Lett. **67**, 390 (1991).
- [42] B. Kalisky, J. R. Kirtley, J. G. Analytis, J.-H. Chu, A. Vailionis, I. R. Fisher, and K. A. Moler, Phys. Rev. B **81**, 184513 (2010).
- [43] J. R. Kirtley, B. Kalisky, L. Luan, and K. A. Moler, Phys. Rev. B **81**, 184514 (2010).
- [44] M. Murakami, M. Morita, K. Doi, and K. Miyamoto, Japanese Journal of Applied Physics **28**, 1189 (1989).

- [45] R. C. Budhani, M. Suenaga, and S. H. Liou, Phys. Rev. Lett. **69**, 3816 (1992).
- [46] L. Civale, A. D. Marwick, T. K. Worthington, M. A. Kirk, J. R. Thompson, L. Krusin-Elbaum, Y. Sun, J. R. Clem, and F. Holtzberg, Phys. Rev. Lett. **67**, 648 (1991).
- [47] D. R. Nelson and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **68**, 2398 (1992).
- [48] D. R. Nelson and V. M. Vinokur, Phys. Rev. B **48**, 13060 (1993).
- [49] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).
- [50] P. W. Anderson, Comments on Solid State Phys. **2**, 193 (1970).
- [51] D. S. Fisher, M. P. A. Fisher, and D. A. Huse, Phys. Rev. B **43**, 130 (1991).
- [52] T. Worthington, W. Gallagher, D. Kaiser, F. Holtzberg, and T. Dinger, Physica C: Superconductivity **153-155**, 32 (1988).
- [53] T. Giamarchi and P. Le Doussal, Phys. Rev. B **55**, 6577 (1997).
- [54] C. A. Murray, P. L. Gammel, D. J. Bishop, D. B. Mitzi, and A. Kapitulnik, Phys. Rev. Lett. **64**, 2312 (1990).
- [55] R. Cubitt, E. M. Forgan, G. Yang, S. L. Lee, D. M. Paul, H. A. Mook, M. Yethiraj, P. H. Kes, T. W. Li, A. A. Menovsky, et al., Nature **365**, 407 (1993).
- [56] S. L. Lee, P. Zimmermann, H. Keller, M. Warden, I. M. Savić, R. Schauwecker, D. Zech, R. Cubitt, E. M. Forgan, P. H. Kes, et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 3862 (1993).
- [57] T. Giamarchi and P. Le Doussal, Phys. Rev. B **52**, 1242 (1995).
- [58] C. Dasgupta and O. T. Valls, Phys. Rev. B **74**, 184513 (2006).
- [59] C. Dasgupta and O. T. Valls, Phys. Rev. B **76**, 184509 (2007).

- [60] H. Maeda, Y. Tanaka, M. Fukutomi, and T. Asano, Japn. J. Appl. Phys. **27**, L209 (1988).
- [61] Wikipedia, *Bismuth strontium calcium copper oxide* — *wikipedia, the free encyclopedia* (2010), (Online; acessado em 8 de Setembro de 2010), URL [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bismuth\\_strontium\\_calcium\\_copper\\_oxide&oldid=376378796](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bismuth_strontium_calcium_copper_oxide&oldid=376378796).
- [62] L. P. Viana, E. Raposo, and M. Coutinho-Filho, Physica C **437-438**, 341 (2006).
- [63] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953).
- [64] S. Aktas and O. Gazioglu, Physica B **405**, 678 (2010).
- [65] S. Ryu and D. Stroud, Phys. Rev. B **54**, 1320 (1996).