Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Doutorado em Matemática Computacional

AST
Um modelo para automação de horários escolares

Jalila Rios dos Santos

Tese de Doutorado

Recife
16 de maio de 2008

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Jalila Rios dos Santos

AST

Um modelo para automação de horários escolares

Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática Computacional.

Orientador: *Prof. Dr. Sóstenes Luiz Soares Lins*

Recife
16 de maio de 2008

Santos, Jalila Rios dos

AST Um modelo para automação de horários escolares / Jalila Rios dos Santos. – Recife : O Autor, 2008.

xxiii, 194 p. : il., fig., tab.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática Computacional, 2008.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Otimização combinatória. 2. Agendamento de horário. 3. Grafo híbrido. 4. Busca tabu. I. Título.

519.64 CDD (22.ed.) MEI2008-063

UFPE 60 ANOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Doutorado em Matemática Computacional

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

JALILA RIOS DOS SANTOS

"AST UM MODELO PARA AUTOMAÇÃO DE HORÁRIOS ESCOLARES"

A Banca Examinadora composta pelos Professores Sóstenes Luiz Soares Lins (Presidente), Silvio de Barros Melo, Manoel José Machado Soares Lemos, todos da Universidade Federal de Pernambuco, Flavio Keidi Miyazawa, da Universidade Estadual de Campinas, Gauss Moutinho Cordeiro, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, considera a candidata:

(X) APROVADA COM DISTINÇÃO ( ) APROVADA ( ) REPROVADA

Secretaria do Programa de Doutorado em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, aos 16 dias do mês de maio de 2008.

PROF. SÓSTENES LUIZ SOARES LINS
PRESIDENTE

PROF. SILVIO DE BARROS MELO
1° EXAMINADOR

PROF MANOEL JOSÉ MACHADO SOARES LEMOS
2° EXAMINADOR

PROF. FLAVIO KEIDI MIYAZAWA
3° EXAMINADOR

PROF. GAUSS MOUTINHO CORDEIRO
4ª EXAMINADOR

Av. Prof. Luis Barros Freire, s/nº, Cidade Universitária - CEP: 50670-901 - Recife - PE
FONE/FAX: (81) 2126-8412 - E-mail: ppgmc@ufpe.br Home Page: www.ppgmc.ufpe.br

A Deus e à minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela salvação em Cristo. Pela sua infinita misericórdia e graça com as quais tem conduzido minha vida. Em quem me regozijo.

Aos meus familiares cujo amor moldou-me e me faz forte. Fonte de alegrias e de sabedoria. Dedico-lhes amor e honra. Especialmente a: José Constantino e Jarilma, meus pais, minha irmã Jaamara, seu esposo Tony e meu sobrinho Pedro, meus irmãos Jobson e Jarbas. E a minha querida avó Maria Lopes de Souza Rios.

A aqueles que o Senhor providenciou-me como uma família adotiva aqui neste lugar: a família do Presb.º Severino José dos Santos e Cléa Almeida do Santos, e a família de Dra. Célia Maria Almeida de Queiroz. Obrigada pela sua existência, acolhida e amor.

Agradeço aos amigos feitos durante estes anos, a maior parte encontrados na Igreja Presbiteriana de Cidade Universitária e na UFPE. Dividimos experiências, carinho, compreensão e apoio. Sem os quais esta jornada seria muito mais dura.

Cito especialmente aos amigos e colegas de doutorado: Calitéia Santana de Souza, Líliam Medeiros, Alex Dias Ramos, Lauro Didier Lins e Donald Pianto. E os amigos Shirlane Alves dos Santos, Eduardo Soares Bezerra, e família do Rev. Jair Sabino e Raquel Falcão.

A Bernadete Didier Lins agradeço o carinho e atenção.

Agradeço aos amigos a mais tempo, que na minha ausência estiveram torcendo e orando por mim pra que fosse bem sucedida aqui. Notavelmente a Congregação Presbiterial em Morada das Árvores, Feira de Santana, Bahia, dirigida pelo Rev. Ailton Vilela Dourado.

Minha gratidão aos professores desta instituição com os quais tive prazer em aprender. Destaco aos professores Dr. Sóstenes Lins e Dr. Manoel Lemos.

Agradeço ao professor Dr. Sóstenes Lins por ter-me proposto este tema de trabalho, pelas discussões e orientações. Também ao colega e amigo Lauro Lins pelas discussões sobre o trabalho, notavelmente na primeira fase. Com quem aprendi bastante do que sei em termos de programação.

Abracei ao tema de trabalho. Um problema que embora possa soar simples e sem muita relevância, mas que de fato é extremamente complexo e cuja base é comum a um grande número de outros problemas. Um desafio!

Os vários caminhos trilhados, mesmo aqueles em que tive de retornar ao ponto de partida, me deram uma maior compreensão e maturidade com relação ao problema. Permitindo assim que, com perseverança e determinação, fosse construído este trabalho.

Agradeço ao Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco (CAp) por ter sido campo de experimentação para meu trabalho. Aos professores do CAp: Rogério Ignácio, Marta Bibiano e Lúcia Durão, pelo tempo dedicado em me passar os dados necessários, pelas discussões dos resultados e sugestões.

Agradeço também ao Centro Integrado de Educação Assis Chateaubriand (CIEAC) por me fornecer dados para minhas experiências.

E às secretárias Valéria Bittencourt e Ângela Farias da UFPE.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro recebido durante os anos de mestrado e doutorado.

"O temor do Senhor é o princípio da sabedoria . . . "
". . . eu sei com certeza que bem sucede aos que temem a Deus."
—SALOMÃO (Provérbios 9:10 e Eclesiastes 8:12)

Resumo

O trabalho aqui apresentado consiste de um modelo para automação de horários escolares, cujo problema está baseado no estudo de casos brasileiros, e também consiste de uma análise da relação entre as restrições do problema e sua complexidade.

O problema automação de horários escolares é um problema NP-completo, mesmo nos casos mais simples, onde as restrições mantidas são o mínimo absolutamente necessário. Aqui são construídas ou apresentadas provas desta relação entre as restrições e o problema.

O modelo usa programação inteira para encontrar uma solução viável inicial. Uma vez encontrada, é aplicada uma heurística desenvolvida para trabalhar com trocas locais via um grafo chamado *grafo híbrido*. A solução viável inicial também pode ser encontrada por uma heurística que usa trocas via o grafo híbrido. Estas heurísticas são essencialmente meta-heurísticas *busca tabu*. O grafo híbrido, que é facilmente construído dos dados do problema, permitiu a definição de movimentos (mudanças) que aplicados a uma solução preservam o atendimento a um grande número de restrições. A descoberta do grafo híbrido fez uma grande diferença em nosso trabalho: nenhuma outra estrutura de dados na literatura (tanto quanto sabemos) tem a flexibilidade de acompanhar uma troca de horários atribuídos a um par de encontros às suas últimas conseqüências. As trocas são rápidas e milhares de soluções viáveis podem ser facilmente geradas e comparadas. A idéia do grafo híbrido tem aplicações a uma grande variedade de problemas de horários e de restrições de conflitos.

Palavras-chave: Automação de horários escolares, Fator para complexidade, Programação inteira, Grafo Híbrido e Busca Tabu.

Abstract

The work here presented is about a model for automation of school timetable. It is tailored to deal with most of the restrictions found in the Brazilian schools. It also studies the relation between the constraints of the problem and its theoretical complexity.

The school timetable problem is NP-complete even in the simplest cases, where the constraints are kept to a minimum absolutely necessary. Here are constructed and presented proofs of the above relation between the restrictions and the theoretical problem.

The model uses integer programming to find a feasible initial solution. Once this is found, some heuristics to improve it are applied. Theses heuristics perform local interchanges on a graph called *hybrid graph*. The initial feasible solution also can be found by heuristics based on the hybrid graph. These heuristics are essentially *tabu search* meta-heuristics. The hybrid graph which is easily constructed from the input of the problem, permits the definition of moves (changes) which when applied to a viable solution maintains a lot of the required constraints. The discovery of the hybrid graph made a big difference in our work: no other data structure in the literature (as far as we know) has its flexibility to carry out a simple interchange of the times assigned to a pair of meetings to its ultimate consequences. The changes are quick and thousands of viable solutions are easily generated and compared. The idea of the hybrid graph has applications to a great variety of problems that involve timetable and conflict constraints.

Keywords: Automated School Timetabling, Factor for the complexity, Integer Programming, Hybrid Graph and Tabu Search.

Sumário

1 Prefácio **1**

2 Bases **3**
2.1 Os diferentes problemas de alocação de horários educacionais 3
2.2 Formulação e complexidade 4
2.2.1 Complexidade computacional 5
2.3 O problema básico STP 7
2.4 O modelo Class-Teacher generalizado 11
2.5 Relação entre restrições e a complexidade do problema 12
2.6 Como o problema vem sendo tratado 15

3 O Problema Automação de Horários Escolares **19**
3.1 Requerimentos para viabilidade 19
3.2 Características desejáveis 25
3.3 O que nosso modelo contempla 27
3.4 Variações 27
3.5 Diferentes razões para a NP-completude 28
3.6 Subproblemas polinomialmente solúveis 33

4 O modelo matemático com Programação Linear Inteira **41**
4.1 Alguns modelos matemáticos anteriores com IP 41
4.2 Nosso modelo 44
4.2.1 Dados 45
4.2.2 Variáveis 46
4.2.3 Restrições 48
4.2.4 Função objetivo 53
4.3 Algumas condições necessárias 53

5 Meta-heurística Busca Tabu e outras **55**
5.0.1 Busca Local 55
5.1 Busca Tabu 56
5.2 Simulated Annealing 57
5.3 Algoritmos Genéticos 59
5.4 Características importantes às meta-heurísticas 60
5.5 Meta-heurísticas e automação de horários escolares 61

6 O Grafo Híbrido **77**
6.1 O subgrafo $GH(h, h', \mathscr{S})$ 80
6.2 O Movimento 82
6.3 Movimento seqüencial 86
6.4 Propriedades 90

7 Os modelos heurísticos **97**
7.1 Estrutura com variáveis de decisão do modelo 97
7.2 Heurística para encontrar uma solução viável 99
7.2.1 Encontrando uma solução quase viável 100
7.2.2 Encontrando uma solução viável a partir de uma quase viável 103
7.3 Heurística para aproximação de uma solução viável ótima 108

8 Resultados experimentais **113**
8.1 Características do CAp 113
8.2 Características do CIEAC 115
8.3 As instâncias usadas nos testes 117
8.4 Escolha dos parâmetros 120
8.5 Diagnóstico dos horários em uso 123
8.6 Equipamento 125
8.7 Solução viável inicial: por IP ou por heurística 126
8.8 Aproximação de uma solução ótima 129
8.9 Ajustes automáticos 131

9 Conclusões **133**

A Dados das instâncias: arquivo texto **135**

B CAp 2007 **139**

C CAp 2008 **161**

D Depoimento **187**

Lista de Figuras

2.1 Grafo $G(V,A)$ 14

3.1 Grafo $H(V,A)$ 35
3.2 Grafo associado a MCMPVS com $\Gamma(\{l\}) = \Gamma(\{l'\})\ \ \forall l$ e $l' \in L_i, \forall i = 1,\ldots,q$ 37
3.3 Grafo $H'(V',A')$ 39

5.1 Função aptidão f_{ap} 65
5.2 Procedimento Interturmas 68

6.1 Grafo Híbrido 78
6.2 Outras arestas de proibição 79
6.3 Subgrafo $GH(h,h',\mathscr{S})$ 81
6.4 Quadro horário de turmas CAp0 (parte 1) 92
6.5 Quadro horário de turmas CAp0 (parte 2) 93
6.6 Exemplo de $GH(h,h') \mid X$ e $\mathscr{T}(h,h')$ 94
6.7 Exemplo de $GH(h,h') \mid X$ 95
6.8 Exemplos de movimento envolvendo aulas geminadas 95

7.1 “Branch and Bound” usado 112

Lista de Tabelas

6.1 Aulas geminadas envolvidas num conjunto candidato a movimento 88
6.2 Movimentos $mov(h,h',T)$ e $movSeq(h,h',T) = mov(h-1,h'+1,T')$ 89

8.1 Características das instâncias do CAp de 2007 e 2008 116
8.2 Características do turno matutino do CIEAC 118
8.3 Características do turno vespertino do CIEAC 118
8.4 Classes do CIEAC 118
8.5 Sobre as aulas do CIEAC e seus δ na instâncias "Ideal" 120
8.6 Parâmetros relativos à Construção de uma solução quase viável 121
8.7 Parâmetros relativos à Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável 121
8.8 Parâmetros relativos à Aproximação de uma solução viável ótima 121
8.9 Diagnóstico dos horários em uso, e após a aplicação de AST sobre estes 124
8.10 Diagnóstico dos horários em uso relativos a instâncias artificiais 124
8.11 Diagnóstico dos horários em uso relativamente a CIEAC Mat Ideal 125
8.12 Solução inicial com IP 126
8.13 Solução quase viável com heurística 127
8.14 Solução viável com heurística 127
8.15 Aproximação de uma solução ótima 129
8.16 Aproximação de uma solução ótima (continuação) 130
8.17 Ajustes automáticos de uma solução 131

Lista de Algoritmos

5.1 Um algoritmo de busca local 56
5.2 Um algoritmo Busca Tabu 57
5.3 Um algoritmo Simulated Annealing 58
5.4 Um Algoritmo Genético 60

6.5 Construção do conjunto $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ 83

7.6 Construção de uma solução quase viável 104
7.7 Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável 107
7.8 Aproximação de uma solução ótima 111

CAPÍTULO 1

Prefácio

O problema de determinar horários para os encontros letivos entre professores e classes (turmas, grupos de alunos), respeitando a disponibilidade de horários de cada professor, os horários de aula de cada classe, e o fato de que um professor ou turma participa no máximo de um encontro a cada momento, é conhecido na literatura como *School Timetabling Problem* (STP). Um problema difícil, reconhecido como um problema NP-completo ([EIS76]). Os programas computacionais para sua solução em geral fazem uso de alguma heurística.

O problema de fazer o quadro de horários de uma escola na vida real é ainda mais desafiador. A realidade de cada problema trás outros requerimentos (além dos presentes em STP) para viabilidade da solução e ainda características desejáveis, baseados em critérios educacionais, organizacionais, físicos ou pessoais. Estes variando de sistema educacional para sistema educacional, de país para país, e mesmo entre a rede pública de ensino e a rede privada.

Daí, em geral, as soluções apresentadas são específicas para um determinado público. E torna-se até mesmo difícil comparar os modelos e seus resultados.

Este trabalho olha especialmente para os horários escolares brasileiros. Contudo, a definição do problema de automação de horários que usamos aplica-se a casos semelhantes.

Numa tentativa de atender a um maior número possível de requerimentos e características deste problema desenvolvemos o modelo **AST**, *Automated School Timetabling*. Ele reúne programação inteira e heurísticas desenvolvidas sobre um grafo chamado **Grafo Híbrido** (*GH*), sendo essencialmente meta-heurísticas Busca Tabu.

O AST tem duas partes principais. Na primeira, usando programação inteira ou uma heurística, encontramos uma solução viável para o problema desconsiderando as características desejáveis. Na segunda, através de uma meta-heurística Busca Tabu buscamos encontrar uma solução que atenda aos requerimentos de viabilidade e minimize o não atendimento das características desejáveis, partindo da solução viável encontrada na primeira parte.

O Grafo Híbrido foi extremamente importante para a execução deste trabalho, pois, através deste, pudemos determinar uma forma de a partir de um quadro de horários *quase viável*, que atende a certos critérios de viabilidade, encontrar outros quadros também *quase viáveis*. Isto, fazendo uso de um *movimento* definido em uma parte específica (uma componente ou mais) de um subgrafo do *GH* associado ao quadro atual.

Ambas as heurísticas das duas partes usam o movimento como definido através do *GH*.

A escolha do movimento na segunda heurística é, então, guiada pelo objetivo de minimizar o não atendimento das características desejáveis e manter o atendimento dos demais requerimentos de viabilidade, não incluídos no conceito de quase viabilidade, dado que iniciamos a segunda parte com um quadro viável.

Como a quase viabilidade se refere a maior parte dos requerimentos de viabilidade, o Grafo

Híbrido e o movimento definido sobre ele foram, talvez, a maior contribuição deste trabalho, seguidos pelo modelo AST.

O quadro de horários de uma escola quando feito manualmente, mesmo por funcionários experientes, pode levar semanas para ficar pronto, muitas vezes mais que um mês. Nosso modelo apresenta soluções satisfatórias quanto às questões a que se propõe em poucos minutos.

Dados de dois colégios públicos bem diferentes foram usados para testar nosso modelo. Um é o Colégio de Aplicação (CAp) da Universidade Federal de Pernambuco. O outro é o Centro Integrado de Educação Assis Chateaubriand (CIEAC), um colégio estadual em Feira de Santana, Bahia. O primeiro consiste num problema mais duro, nele se encontram quase todos os requerimentos que AST pode levar em conta, incluindo o fato de que as aulas das classes ocorrem em dois turnos. No CAp há restrições relativas a aulas dadas para classes juntas, subturmas, professores substitutos, aulas simultâneas, pré-alocações e salas especiais, que não ocorrem em CIEAC. O colégio CAp possui 14 turmas, poucas em comparação ao CIEAC que no turno com menos turmas possui 36 (funciona nos três turnos e cada classe usa um único turno). Contudo, o número de aulas em classes equivalentes é maior no CAp do que no CIEAC.

Assim podemos dizer que temos duas fontes de dados bem interessantes, uma com maior complexidade e outra com maior quantidade de dados. Foram feitos também testes com dados gerados a partir de modificações nestes.

Este trabalho apresenta-se da seguinte forma. No Capítulo 2 o leitor encontrará uma explanação sobre os problemas de alocação de horários educacionais, sua complexidade computacional, o problema básico STP, alguns casos especiais ou extensões, e uma breve descrição do que vem sendo feito academicamente sobre os horários escolares. O Capítulo 3 discorre sobre o problema automação de horários escolares definido com base no estudo de casos brasileiros, variações e o que nosso modelo contempla. Também trás subproblemas NP-completos, e polinomialmente solúveis. O Capítulo 4 trata do modelo de programação linear inteira. Uma apresentação do conceito (e exemplos) de meta-heurísticas é apresentado no Capítulo 5, onde também comenta-se seu uso no problema de automação de horários escolares. O Grafo Híbrido e o movimento definido sobre ele são o tema do Capítulo 6. Os modelos heurísticos desenvolvidos para a primeira e segunda parte de AST se encontram no Capítulo 7. No Capítulo 8 estão descritas as instâncias e os resultados experimentais. Finalmente, as conclusões e perspectivas compõem o Capítulo 9.

No Apêndice A há uma explicação quanto ao formato dos arquivos texto que trazem os dados das instâncias. Nos dois apêndices seguintes disponibilizamos o arquivo de algumas instâncias. E no Apêndice D há um depoimento dado por um membro da Comissão de elaboração de horários 2008 do CAp, que acompanhou nosso trabalho com os dados que nos foram fornecidos pelo CAp.

CAPÍTULO 2

Bases

O problema de alocação de horários educacionais consiste em determinar os horários de encontros entre professores e alunos por um período, que em geral é uma semana, satisfazendo uma série de restrições.

As restrições variam bastante. Especialmente em função do tipo de instituição (escolas ou universidades), e se os encontros são para aulas ou para exames.

Como se trata de um problema de difícil solução, de natureza combinatória e que quando feito manualmente demanda muito tempo de trabalho, despertou grande interesse. E muitos estudos e trabalhos têm sido publicados desde a década de 60 na área.

Séries de conferências internacionais tem ajudado a incentivar e disseminar produções neste campo de pesquisa. Citamos as conferências do PATAT, "Practice and Theory of Automated Timetabling", que ocorrem a cada dois anos desde 1995 (com exceção da terceira conferência que ocorreu após três anos). E citamos também as sessões especiais do WATT, o "EURO Working Group on Automated Timetabling", que também tomam lugar a cada dois anos (alternando-se com o PATAT) nas conferências da EURO ou do IFORS. A EURO é a "Association of European Operational Research Societies" dentro do IFORS, o "International Federation of Operational Research Societies". As primeiras sessões do WATT ocorreram em 1997, 1998 e 1999, só então passaram a ser bi-anuais.

2.1 Os diferentes problemas de alocação de horários educacionais

Existem três principais categorias de problemas de alocação de horários em instituições educacionais. São elas:

- Alocação de horários escolares.
- Alocação de horários universitários (de cursos).
- Alocação de horários de exames.

As três categorias buscam a alocação temporal e ou espacial dos *eventos* (lições ou exames) levando em conta as disponibilidades de tempo dos envolvidos (as vezes chamados de *recursos*) e respeitando a um conjunto de restrições. As disponibilidades de tempo dos professores e restrições que declaram a impossibilidade de algum recurso tomar parte em mais de um evento por horário (*restrições de conflito*) são contempladas por todas as categorias.

As diferenças aparecem nas restrições em três principais aspectos: na alocação temporal dos eventos, na definição de grupos de alunos e na alocação dos locais para os eventos.

Nos horários escolares, em geral, os grupos de alunos já estão definidos, são as classes ou turmas. E é com as classes que o problema é definido, não com os alunos. Duas importantes restrições são a restrição de conflito para professores e a restrição de conflito para classes: um professor não pode ensinar, nem uma classe assistir, duas aulas num mesmo horário. A disposição temporal dos eventos deve seguir várias regras como, por exemplo, respeitar um número máximo de lições de uma mesma disciplina numa turma por dia. E se a disposição espacial faz parte do problema, restrições relativas ao tipo de sala adequado a determinada aula podem surgir.

Nos horários de exames deve-se atender a restrição de conflito para os alunos e o maior objetivo é que exista tempo suficiente entre consecutivos exames de cada estudante. Dois exames podem inclusive acontecer ao mesmo tempo numa mesma sala com um professor fiscal, contanto que nenhum aluno esteja participando dos dois exames e a capacidade da sala seja respeitada.

Nas universidades, como os cursos tem uma parte do currículo obrigatória e outra não, cada aluno escolhe as matérias optativas que deseja cursar e muitos diferentes currículos são possíveis. Além disso, os alunos podem cursar disciplinas de diferentes períodos letivos (ano, semestre) graças a um sistema de "pré-requisitos". Alocar os horários para as disciplinas oferecidas dos diversos cursos, algumas oferecidas em multiplicidade, definir o grupo de seus alunos e locais dos eventos sem que haja qualquer conflito entre as disciplinas pretendidas na escolha dos alunos é quase impossível. Daí o maior ganho é obter um horário que atenda uma maior quantidade de alunos em suas preferências. Atendendo a restrições de conflito para professores e salas. E a definição dos grupos de alunos está ligada a cada disciplina oferecida.

Certamente entre os problemas pertencentes a uma mesma categoria existem várias diferenças, especialmente na formulação das restrições e a importância dada a elas, baseada na realidade de cada problema contemplado. Além disso, alguns casos não se encaixam em uma única categoria, possuem características em mais de uma. Como, por exemplo, o problema dos horários nas escolas secundárias que permitem aos alunos a escolha de parte de seus currículos, que se assemelha aos horários universitários com relação aos grupos de alunos das disciplinas. Num ou noutro, parte do problema é definir os grupos de alunos.

Na referência [Sch99b] o leitor encontrará uma explanação sobre o tema automação de horários educacionais que trás separadamente para cada categoria imformação das principais publicações, modelos, algoritmos e técnicas desenvolvidas ao longo do tempo até então.

Nós vamos nos ater aos horários escolares.

2.2 Formulação e complexidade

Um problema de alocação de horários educacionais pode ser formulado de duas maneiras: como um *problema de busca* ou como um *problema de otimização*.

Quando formulado como um problema de busca o objetivo é encontrar uma solução que atenda a todos os requerimentos, uma *solução viável*.

Quando formulado como um problema de otimização objetiva-se encontrar uma solução que atenda a um conjunto de *restrições rígidas* e minimize (ou maximize) o valor de uma função objetivo associada a um conjunto de *restrições relaxadas*. São restrições relativas a

características desejáveis, sem as quais uma solução ainda é aceitável. Já as restrições rígidas necessariamente devem ser satisfeitas por uma solução viável. A função objetivo diz, então, se uma solução é ou não melhor que outra, em relação a alguns aspectos.

Algumas vezes problemas de busca são formulados como problemas de otimização para se valer das técnicas de otimização. Minimiza-se uma medida da *distância para viabilidade*. E visando facilitar a busca por uma melhor solução (em, de fato, problemas de otimização) algumas formulações incluem medidas para a não satisfação de parte das restrições rígidas na função objetivo, em geral com parâmetros que imprimem maior grandeza e importância diante das restrições relaxadas.

Um exemplo de problema com seus dados específicos é chamado uma *instância*.

Tanto para os problemas de busca como para os problemas de otimização existe um problema associado chamado *problema de decisão*. Um problema de decisão é um problema para o qual a resposta é sim ou não. Para um dado problema (uma instância) de busca corresponde a responder se existe ou não uma solução viável. Para uma instância de um problema de otimização corresponde a responder se existe uma solução com valor para a função objetivo menor ou igual (maior ou igual) a um dado valor.

Ao nos referirmos a complexidade de um problema em qualquer destas formulações estaremos nos referindo a complexidade de sua versão como problema de decisão.

Na subseção seguinte daremos uma breve explanação sobre complexidade computacional.

2.2.1 Complexidade computacional

Dois importantes conceitos na compreensão da complexidade computacional são:

Definição 2.1 (Tamanho da entrada)**.** Dada uma instância X de um problema Π, o *tamanho da entrada* $L(X) = l$ é o comprimento de uma representação binária da representação "padrão" da instância.

Definição 2.2 (Tempo de execução)**.** Dado um problema Π, um algoritmo A para Π, e uma instância X, seja $f_A(X)$ o número de operações elementares requeridas para rodar o algoritmo A para a instância X. O *tempo de execução* do algoritmo A é dado em função do tamanho da entrada l por $f(l)$, e denotado por $O(f(l))$, para $c \cdot f(l) = \sup_X\{f_A(X) : L(X) = l\}$, onde $c > 0$ e é uma constante. Isto é, existe uma implementação de A a qual termina depois de no máximo $c \cdot f(l)$ passos computacionais para todas as instâncias de tamanho l.

A *complexidade de um algoritmo A* é a menor função f para qual A tem tempo de execução $O(f(l))$. E a *complexidade de um problema* Π é a menor função f para qual existe um algoritmo com tempo de execução $O(f(l))$ para Π, isto é, a complexidade mínima sobre todos os possíveis algoritmos para Π.

Um algoritmo A é dito ser em *tempo polinomial* para o problema Π se seu tempo de execução é limitado por uma função polinomial. Do contrário ele é dito ser em *tempo superpolinomial*. Um problema é dito ser *polinomialmente solúvel* se, e somente se, existe um algoritmo em tempo polinomial que soluciona o problema. São os chamados problemas "fáceis", do contrário são chamados "difíceis".

Para demonstrar a importância destes conceitos observe o seguinte exemplo. Digamos que um computador leve 10^{-9} segundos (um nanosegundo) para computar uma operação elementar. Um algoritmo com tempo de execução $O(n!)$ poderia levar mais que 77 anos para rodar uma instância de tamanho 20. E para uma instância de tamanho 21 esta conta superaria 16 séculos (1619,34 anos). O tempo de execução cresce exponencialmente em função do tamanho da instância para os algoritmos em tempo superpolinomial. O que os torna impraticáveis para a maioria das instâncias.

A classe de problemas $\mathscr{P}$ corresponde aos problemas de decisão que são polinomialmente solúveis.

A classe de problemas $\mathscr{NP}$ é formada pelos problemas de decisão onde para toda instância cuja resposta é *sim* (instância sim) existe um *certificado compacto*, um conjunto de dados com um tamanho que é polinomial no tamanho da instância, tal que é possível verificar em tempo polinomial se a instância tem resposta *sim*. Por exemplo, uma solução viável é um certificado compacto para um problema de busca.

Claramente, $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{NP}$.

Definição 2.3 (Redução polinomial)**.** Sejam Π e Π' dois problemas em $\mathscr{NP}$. O problema Π é reduzível polinomialmente a Π' se, e somente se, existe um algoritmo que mapeia as instâncias i do problema Π até instâncias i' do problema Π', tal que

- o algoritmo é em tempo polinomial e
- i é uma instância sim de Π se, e somente sim, i' é uma instância sim de Π'.

Se Π é reduzível polinomialmente para Π', denotamos por $\Pi \propto \Pi'$, e dizemos que Π é um caso especial de Π'.

A classe de problemas $\mathscr{NPC} \subseteq \mathscr{NP}$, dos chamados problemas **NP-completos**, é formada pelos problemas considerados mais difíceis em $\mathscr{NP}$. Um problema Π' é $\mathscr{NPC}$ se, e somente se, $\forall\, \Pi \in \mathscr{NP}$ temos $\Pi \propto \Pi'$ (Π' é chamado NP-difícil) e $\Pi' \in \mathscr{NP}$.

Uma comum maneira usada para provar que um dado problema pertence a esta classe é usando o conceito de redução polinomial como mostrado na proposição seguinte.

Proposição 2.1. *Sejam* Π *e* $\Pi' \in \mathscr{NP}$.

i. Se $\Pi' \in \mathscr{P}$ *e* $\Pi \propto \Pi'$ *então* $\Pi \in \mathscr{P}$.

ii. Se $\Pi \in \mathscr{NPC}$ *e* $\Pi \propto \Pi'$ *então* $\Pi' \in \mathscr{NPC}$.

(ii). Temos que $\Pi \in \mathscr{NPC}$, daí $\forall\, \Pi'' \in \mathscr{NP}$ temos $\Pi'' \propto \Pi$. Como $\Pi \propto \Pi'$, então $\Pi'' \propto \Pi'$, $\forall\, \Pi'' \in \mathscr{NP}$. Isto é, $\Pi' \in \mathscr{NPC}$. □

Stephen Cook, em 1971, foi quem introduziu formalmente a classe $\mathscr{NP}$ e mostrou a existência de um problema NP-completo. Em seguida, Karp introduziu o método de redução polinomial para provar que vários problemas eram NP-completos.

Muitos problemas já foram demonstrados ser $\mathscr{NPC}$. De fato, esta é considerada a regra, não a exceção.

Alguns conhecidos problemas em $\mathscr{P}$ são: Árvore de máximo peso, Emparelhamento em um grafo bipartido, Máximo fluxo, Coloração em um grafo intervalar, Programação inteira totalmente unimodular. Exemplos de problemas em $\mathscr{NPC}$ são: "Satisfiability" (SAT), 3-SAT, Problemas de Cobertura, "Carteiro viajante", Programação inteira, Empacotamento, Emparelhamento 3-dimensional, K-coloração de um grafo.

Uma questão por enquanto em aberto é se $\mathscr{P} = \mathscr{NP}$.

2.3 O problema básico STP

No Prefácio demos uma definição informal do problema básico de automação de horários escolares, conhecido como STP. Vejamos agora uma definição mais formal.

Definição 2.4 (School Timetable Problem)**.** Seja P um conjunto de *professores*, C um conjunto de *classes* (turmas) e H um conjunto de *horários letivos*, todos conjuntos finitos. Para todo professor i e classe j, seja $E_{ij} = \{e_{ij}^1, \ldots, e_{ij}^{r_{ij}}\}$ o conjunto de encontros que o professor i precisa ter com a classe j, exatamente r_{ij} encontros ($r_{ij} \geq 0$). Defina E como o conjunto de todos os encontros. Seja a disponibilidade de tempo do professor i dada por $H_i \subseteq H$. E seja $H_j \subseteq H$ o conjunto de horários onde a classe j pode assistir aulas. Denotamos por p_e e c_e, onde e é um encontro, o professor e a classe de e, respectivamente. O *School Timetabling Problem* (STP) consiste em determinar um horário letivo $h_e \in H$ para cada encontro e tal que:

i. $\forall\, e \text{ e } e' \in E, e \neq e', p_e = p_{e'} \Rightarrow h_e \neq h_{e'}$.

ii. $\forall\, e \text{ e } e' \in E, e \neq e', c_e = c_{e'} \Rightarrow h_e \neq h_{e'}$.

iii. $\forall\, e \in E, h_e \subseteq H_{p_e} \cap H_{c_e}$.

Em outros termos, consiste em *atribuir para cada encontro um horário possível* (assim, atender as demandas r_{ij} e disponibilidades de tempo dos envolvidos) *garantindo a não existência de conflitos*: dois encontros diferentes de um mesmo professor ou classe precisam ter diferentes horários.

Este problema também é conhecido como *Class-Teacher Problem*, ou simplesmente como Timetable Problem (TT). E foi primeiro proposto por Gotlieb em 1963. Nesta versão foram usadas variáveis binárias s_{ij}^k, que assumiam valor 1 se o professor i encontra a classe j no horário k (horário possível para o encontro), e 0 caso contrário. E os requerimentos, além da satisfação das disponibilidades de tempo, foram modelados por:

$$\sum_k s_{ij}^k = r_{ij}, \quad \sum_i s_{ij}^k \leq 1, \quad \sum_j s_{ij}^k \leq 1$$

Gotlieb propôs um método computacional iterativo para a construção dos horários e conjecturou que este método seria capaz de dizer que não existe uma solução ou, caso contrário, retornar uma ([CG64]). Em [SS74] foi dado um contra-exemplo para esta conjectura. Mais tarde em 1976, S. Even, A. Itai e A. Shamir provaram em [EIS76] que o Timetable Problem, é NP-completo. Dito melhor, o problema de decisão associado: Dada uma instância de TT, existe uma alocação de horários que atende a todos os requerimentos? é um problema NP-completo.

Para provar que TT é NP-completo, foi provado que uma versão restrita do problema, o Restricted Timetable Problem (RTT), é ainda NP-completa. A demonstração é feita através de uma redução polinomial do problema 3-SAT para o RTT (3-SAT $\propto$ RTT). O problema 3-SAT é um problema NP-completo.

Definição 2.5 (3-SAT)**.** Dado um conjunto de *literais* $L = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$ que podem assumir valor *verdadeiro* ou *falso* e $\overline{x}$ é a negação lógica de x. Dada uma família de cláusulas $D_1, \ldots, D_k$, onde cada D_j, $j = 1, \ldots, k$, é da forma $(a \vee b \vee c)$, para $\{a, b, c\} \subseteq L$. O problema 3-SAT é determinar se existe uma escolha para os valores dos literais em L que faz a expressão $D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$ verdadeira.

Definição 2.6. O RTT é um problema TT (STP) com as seguintes restrições:

- $|H| = 3$
- $\forall j \in C, H_j = H$
- $\forall i \in P$, $|H_i| \in \{2, 3\}$ e $|H_i| = \sum_j r_{ij}$
- $\forall i \in P, j \in C, r_{ij} \in \{0, 1\}$.

No mesmo artigo foi provado que duas outras restrições são polinomialmente solúveis: TT com "professores binários" ($\forall i \in P$, $|H_i| = 2$) e TT sem restrições de tempo ($\forall i \in P, j \in C$, $H_i = H_j = H$).

Para o primeiro problema foi dado um algoritmo que encontra uma solução se esta existe, ou determina sua inexistência. As alocações são progressivas. A idéia é ao fazer a alocação dos dois horários de um professor, verificar se o conjunto de todas as conseqüentes necessárias alocações causam alguma inviabilidade. Se for assim, inverte-se a alocação do professor. Não obtendo êxito novamente para o mesmo, concluísse que não há solução viável. E como no máximo se retorna um passo para cada professor temos um algoritmo em tempo polinomial.

No segundo problema, TT sem restrições de tempo, há sempre solução se há "aparente viabilidade",

$$\forall i \in P, \sum_j r_{ij} \leq |H| \quad e \quad \forall j \in C, \sum_i r_{ij} \leq |H|. \tag{2.1}$$

Demonstração. Mostra-se que é possível construir um multi-grafo bipartido $G(X, Y, E')$, com $P \subseteq X, C \subseteq Y$, com r_{ij} arestas entre x_i e y_j, cujos demais vértices "artificiais" e arestas incidentes a eles tem a função de completar o grau de cada vértice do grafo até $|H|$.

Sejam as quantidades $n = |P|$, $m = |C|$, $h = |H|$,

$$r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}, \quad \nu = m - \lfloor \frac{r}{h} \rfloor \quad e \quad \mu = n - \lfloor \frac{r}{h} \rfloor.$$

Representamos os conjuntos de vértices por

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_\nu\} \text{ e}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \cup \{\eta_1, \eta_2 \ldots, \eta_\mu\},$$

onde cada x_i representa um professor, y_j uma classe, e os vértices ξ_k e η_l são artificiais.

Entre cada x_i e y_j são construídas r_{ij} arestas paralelas. Além das $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}$ arestas já existentes para cada x_i constrói-se $h - \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$ entre este e os vértices η_l. E para cada y_j, além das $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}$ arestas já existentes, constrói-se $h - \sum_{i=1}^{n} r_{ij}$ entre este e os vértices ξ_l. Sempre respeitando máximo grau igual h. Daí, completa-se o grau dos vértices ξ_k e η_l até h entre eles.

Isso é possível. Porque o total de arestas que devemos construir para completar o grau dos vértices $x_1, \ldots, x_n$ é $n \cdot h - r$, para tanto devemos ter $\mu \cdot h \geq n \cdot h - r$, o que é verdadeiro. E analogamente, para poder completar o grau dos vértices $y_1, \ldots, y_m$, precisamos ter $\nu \cdot h \geq m \cdot h - r$, o que também é verdadeiro. Por fim, o número de arestas para completar o grau dos vértices $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ é $\nu \cdot h - (m \cdot h - r) = r - \lfloor \frac{r}{h} \rfloor \cdot h$. E para os vértices $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ resta construir $\mu \cdot h - (n \cdot h - r) = r - \lfloor \frac{r}{h} \rfloor \cdot h$ arestas. Como a quantidade é a mesma não há dificuldade em construir as arestas que restam entre os vértices ξ_k e η_l.

Assim, temos um multi-grafo bipartido $G(X, Y, E')$ com o grau de todos os vértices igual a h, um grafo *h-regular*.

Seja $\Gamma(A)$ o conjunto de vértices $B \subseteq Y$ tal que $\exists\, ab \in E'$, $a \in A$, $b \in B$.

Proposição 2.2. *O grafo $G(X, Y, E')$ satisfaz a condição de Hall*

$$\forall A \subseteq X, |\Gamma(A)| \geq |A|.$$

Demonstração. O fato de que $G(X, Y, E')$ é h-regular, implica que existem $h \cdot |\Gamma(A)|$ arestas incidentes a $\Gamma(A)$ em G. Como isto inclui todas as arestas incidentes a A, temos

$$h \cdot |\Gamma(A)| \geq h \cdot |A|,$$

e, dado que $h > 0$, temos $|\Gamma(A)| \geq |A|$, a condição de Hall. □

E, portanto, pelo Teorema de Hall ([Hal35]) existe um emparelhamento M (conjunto de arestas sem vértice comum) que cobre X (contém todos os vértices de X).

Neste ponto, associa-se um horário $h_1 \in H$ a cada um dos encontros representados pelas arestas de M entre vértices de P e C. Retira-se o conjunto de arestas M e o grafo resultante tem todos os vértices com grau $h - 1$, ainda abraça a condição de Hall, e um novo emparelhamento que cobre X pode ser encontrado, que determinará a alocação dos encontros representados para um novo horário. Isto é, repete-se o processo h vezes, ou até que todos os encontros $(x_i y_j)$ tenham sido alocados.

De fato, por construção, X e Y tem o mesmo número de vértices, $n + \nu = m + \mu$, daí o emparelhamento que cobre X também cobre Y, temos um emparelhamento perfeito.

Como existe um algoritmo em tempo polinomial para encontrar um emparelhamento máximo num grafo bipartido dado por Hopcroft e Karp [HK73] temos um algoritmo em tempo polinomial que encontra uma solução viável para o problema. □

Uma outra maneira de encontrar uma solução para o problema STP sem restrições às disponibilidades de tempo, dada por de Werra em 1985, é através da coloração própria das arestas do grafo bipartido $G(P, C, E)$. Onde as r_{ij} arestas paralelas entre $i \in P$ e $j \in C$ representam os encontros entre estes. A coloração própria das arestas consiste em dar cores diferentes a arestas adjacentes. Se existe uma coloração cujo número de cores não é maior que $|H|$, cada

diferente cor pode ser atribuída a um diferente horário de H. E nós temos uma solução para o problema satisfazendo todas as restrições.

O mínimo número t tal que existe uma coloração própria das arestas de um multi-grafo com t cores é o seu *index cromático*, denotado por $\chi'(G)$. O conhecido Teorema de Coloração de König diz que para qualquer multi-grafo bipartido G temos $\chi'(G) = \Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ é o máximo grau de G (em [K̈16]). Então, para que exista uma coloração com $|H|$ cores ou menos, basta que haja a aparente viabilidade já citada em (2.1). Existem vários algoritmos em tempo polinomial para encontrar uma coloração própria das arestas de um multi-grafo bipartido com número de cores mínimo. O algoritmo com melhor tempo conhecido foi dado por Cole, Ost e Shirra [COS01] com $O(|E| \cdot \log D)$, sendo $D = \Delta(G)$.

Sabemos que o problema de automação de horários escolares é NP-completo dado que uma versão tão "simples" como STP o é. E de fato muitas outras restrições são consideradas importantes e acrescidas às versões. O próprio Gotlieb declarava que para construir um horário para um problema real várias outras restrições surgiriam, inclusive com relação a pré-alocações, a encontros com mais de uma classe ou para parte de uma, e prioridades as mais variadas deveriam ser levadas em conta.

Boa parte dos trabalhos desenvolvidos neste campo de pesquisa se ocuparam em modelar e avaliar extensões para os problemas de automação de horários educacionais mencionados, demonstrando a NP-completude destes ou que alguns casos especiais eram polinomialmente solúveis. Embora estes casos polinomiais sejam tão restritos que não tragam alento diante dos problemas mais próximos da realidade, seu estudo poderia trazer maior conhecimento do problema, e talvez idéias de como tratar aqueles. Além disso, sua proximidade com outros problemas combinatórios (NP-completos) como, por exemplo, Problemas de Coloração, "Open Shop", ..., foi outra fonte de interesse.

A conexão entre o problema de automação de horários educacionais e a coloração de vértices pode ser vista na seguinte formulação. Seja dado um problema de automação de horários educacionais onde temos um conjuntos de horários, um conjunto de recursos (professores, classes, salas) e um conjunto de encontros. Cada encontro requer um subconjunto de recursos, e cada recurso tem um subconjunto de horários onde é disponível. Daí um horário é disponível para um encontro se cada recurso deste encontro tem disponibilidade para este horário. Uma solução é alocar para cada encontro um horário disponível para este de forma que nenhum recurso participe em dois ou mais encontros alocados em um mesmo horário. Seja um grafo onde os encontros e horários são representados por vértices. Entre dois horários quaisquer, entre um encontro e um horário não disponível para este, e entre dois encontros com algum recurso em comum haja uma aresta. Se há uma coloração dos vértices deste grafo, isto é, dois vértices adjacentes tem cores diferentes, com número de cores menor ou igual ao número de horários temos uma solução para o problema de automação de horários com cada cor correspondendo a um horário [SS79].

Quanto a coloração de arestas nós já temos visto um exemplo na demonstração de STP sem restrições de tempo dada por De Werra.

O clássico modelo *Open Shop Scheduling* (OSS) é dado por um conjunto de processadores $\{P_1, \ldots, P_m\}$ e um conjunto de trabalhos $\{J_1, \ldots, J_n\}$. Cada trabalho J_j consistindo de tarefas $T_{1j}, \ldots, T_{mj}$, onde cada T_{ij} tem tempo de processamento $t_{ij} \geq 0$ e deve ser processada por

P_i. Nenhum processador pode executar duas tarefas simultaneamente, nem duas tarefas de um mesmo trabalho podem ser executadas simultaneamente. No modelo *Preemptive* (POSS) são permitidas interrupções a qualquer momento durante a execução de qualquer tarefa T_{ij}. Podemos comparar os professores aos processadores e as classes aos trabalhos, cujas tarefas seriam as aulas entre professores e classe.

2.4 O modelo Class-Teacher generalizado

Uma extensão do problema Class-Teacher sem restrições de tempo foi dada por Asratian em 1980, chamada *Generalized Class-Teacher Model*. Também chamado de "University Timetable Model". Diremos que é o *Problema Automação de Horários Universitários Básico*.

Definição 2.7 (Generalized Class-Teacher Model)**.** Sejam dados um conjunto de professores $\mathscr{T} = \{P_1, \ldots, P_n\}$, um conjunto de classes $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$. E para $\mathscr{C}$ seja dada uma partição em p grupos de classes $G_1, \ldots, G_p$, tal que, além das aulas dadas por um professor a uma classe (as "individual lectures" em $\mathscr{B}$), teremos aulas dadas por um professor para todas as classes de um grupo juntas, chamadas "group-lectures" e o conjunto delas $\mathscr{A}$. São requeridas a_{il} aulas dadas pelo professor P_i ao grupo de classes G_l, e b_{ij} aulas dadas pelo professor P_i a classe C_j. Cada encontro letivo dura um período, e um conjunto de períodos é dado $H = \{1, \ldots, t\}$. Determinar uma alocação de horários para o modelo significa associar um período em H para cada aula em $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ tal que nenhuma classe e nenhum professor está envolvido em mais de uma aula por período.

Observe que se $a_{il} = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ e $l = 1, \ldots, p$, ou se todos os grupos contém apenas uma classe temos o modelo Class-Teacher sem restrições de tempo (um problema polinomial).

Definição 2.8 (Professor-Lecturer Model)**.** O *Professor-Lecturer Model* é uma caso especial do Generalized Class-Teacher Model onde o conjunto de professores é particionado em dois conjuntos: o de professores $L_1, \ldots, L_s$ que ensinam somente a classes, chamados de "lecturer", e os professores $P_1, \ldots, P_r$ que ensinam apenas a grupos de classes, chamados de "professor".

O problema de decisão associado: existe uma alocação de horários para o modelo de horários universitários usando t períodos? é um problema NP-completo. Em [AdW02], por Asratian e De Werra, encontramos uma prova disso usando uma redução polinomial de um problema equivalente ao RTT para um modelo Professor-Lecturer com $t = 3$ e $p = 4$ (períodos e grupos, respectivamente).

O problema equivalente ao RTT de que falamos é definido exatamente como em RTT trocando-se apenas as restrições entre professores e classes, cuja alteração real é $\forall i = 1, \ldots, n$, $H_i = H$ e $\forall j = 1, \ldots, m$, $|H_j| \in \{2, 3\}$ e $|H_j| = \sum_i r_{ij}$.

Também, os mesmos autores mais Durand, deram uma outra prova da NP-completude em [dWAD02]. Desta feita, usaram uma redução polinomial de um problema VS para um modelo Professor-Lecturer com $t = 3$ e $p = 3$. Onde VS designa o problema *V-seqüencial coloração em um bipartido multi-grafo* $G(V, W, E)$, isto é, uma coloração das arestas de G tal que para cada vértice $v \in V$ as arestas adjacentes a v tem cores $1, 2, \ldots, d_G(v)$ (grau de v em G). Este problema é um conhecido problema NP-Completo, mesmo se $\Delta(G) = 3$.

Observe que para provar a NP-completude do Problema Automação de Horários Universitários Básico provou-se a NP-completude do modelo Professor-Lecturer.

Para o caso onde o modelo Professor-Lecturer tem no máximo dois grupos de classes foi apresentado um procedimento em tempo polinomial baseado em fluxo sobre rede para encontrar uma alocação de horários usando no máximo t períodos em [dWAD02]. Também em [AdW02], para o problema de automação de horários universitários básico, foi descrito um algoritmo que sob algumas condições "naturais" encontra uma alocação usando número de horários menor ou igual a $\frac{7}{6}$ do número mínimo de horários.

Nosso interesse neste problema se dá pelo fato de que professores dando aula para mais de uma turma juntas não é exclusividade das instituições universitárias, também acontece nas escolas. Aplica-se a classes unidas para assistir a algumas aulas juntas e também à idéia de *subturmas*. Veja na próxima seção.

2.5 Relação entre restrições e a complexidade do problema

Por exemplo, se os alunos tem um conjunto de disciplinas obrigatórias e parte do currículo optativa, em geral chamamos o conjunto de alunos que assistem às aulas das disciplinas obrigatórias juntos de uma classe, e às partes disjuntas desta classe com diferentes opções de currículo chamamos de *subturmas*. Imagine uma escola com um conjunto de professores e um conjunto de classes, sem restrições de tempo, cujo alvo de uma aula dada por um professor pode ser uma classe, uma subturma ou mais de uma classe juntas. Seja o problema de determinar os horários de aula levando em conta restrições de demanda (número de aulas entre um professor e um alvo), e as restrições de conflito, que neste caso são: não termos um professor, uma classe ou uma subturma, participando em mais de uma aula ao mesmo tempo. No caso de subturma, isto significa: mesmo que como parte de uma classe. Este problema é aquivalente a uma extensão do Problema Automação de Horários Universitários Básico, cuja extensão é simplesmente não exigir que os grupos de classes sejam uma partição do conjunto de classes original.

Para concluirmos esta equivalência basta tratamos as classes como "grupo de classes" onde as "classes" são as subturmas, e às classes que assistem aulas juntas tratarmos também como grupo de classes (das subturmas das classes que a compõem). Ou seja, as subturmas correspondem às "classes" e todo o resto a "grupos de classes". Isto torna nossa definição do problema desta escola equivalente a extensão do Problema Automação de Horários Universitários Básico que citamos. Dada esta equivalência a um problema que é extensão de um outro NP-completo, chegamos a conclusão de que o problema de que tratamos é NP-completo.

Inclusive se deseja-se unir subturmas de classes diferentes com uma mesma opção de disciplina para assistir às aulas desta juntas, ou unir uma classe com uma subturma, é perfeitamente compatível com grupos de classes na extensão do problema.

Definição 2.9 (Problema do Horário Escolar com Subturmas e União de Turmas)**.** Sejam dados um conjunto de professores $\{P_1,\ldots,P_n\}$, um conjunto de classes $\mathscr{C}=\{C_1,\ldots,C_m\}$, e para cada classe $C_j\in\mathscr{C}$ seja dada uma partição em q_j *subturmas* C_k^j, $k=1,\ldots,q_j$ com $q_j\geq 2$. Sejam dados p conjuntos $G_1,\ldots,G_p$, chamados *união de turmas*, tal que os elementos de cada G_l

são subturmas ou classes e $|G_l| \geq 2$. Uma aula dada a uma união de turmas é dada a todas as classes e subturmas que a compõem juntas. A cada professor P_i são requeridas a_{il} aulas dadas a união de turmas G_l, a'_{ijk} aulas dadas a subturma C_k^j, e b_{ij} aulas dadas a classe C_j, para $l = 1,\ldots,p$; $j = 1,\ldots,m$ e $k = 1,\ldots,q_j$ (com a_{il}, a'_{ij_k} e $b_{ij} \geq 0$). Cada encontro letivo dura um período, e é dado um conjunto de períodos $H = \{1,\ldots,t\}$. O *Problema do Horário Escolar com Subturmas e União de Turmas* consiste em associar um período em H para cada aula tal que nenhuma subturma, classe, ou professor esteja envolvido em mais de uma aula por período. No caso de subturmas ou classes isto significa que nem mesmo como parte de uma classe ou união de turmas.

Teorema 2.1. *O Problema do Horário Escolar com Subturmas e União de Turmas é um problema NP-completo.*

Demonstração. Este problema é equivalente a uma extensão do Problema Automação de Horários Universitários Básico, um problema NP-completo, cuja extensão é simplesmente não exigir que os "grupos de classes" sejam uma partição do conjunto de "classes" original. □

Podemos dizer que dada a existência de aulas dadas para subturmas ou união de turmas (ou subturmas) suas restrições de conflito são *um fator para a complexidade*. Dado que, havendo apenas classes disjuntas, temos o problema Class-Teacher (STP = TT) sem restrições de tempo que é polinomialmente solúvel. Também por esta razão, podemos dizer que a presença de restrições associadas a disponibilidade de tempo é um fator para a complexidade, pois o problema STP é NP-completo.

Nas últimas seções do próximo capítulo o leitor encontrará informação sobre semelhante avaliação de várias outras restrições que se aplicam ao problema de automação de horários escolares. Por hora, vamos tratar das restrições de conflito para professores ou classes.

Para mostrar que a presença das restrições de conflito para professores (ou classes) é um fator para a complexidade do problema de automação de horários escolares vamos mostrar que se retirarmos apenas estas restrições do problema STP temos um problema polinomialmente solúvel. Tal qual o problema de Máximo Fluxo.

Proposição 2.3. *O problema STP sem restrições de conflito para professores é um problema polinomialmente solúvel. Assim também é STP sem restrições de conflito para classes.*

Demonstração. Usaremos para o problema a mesma notação definida em STP.

Seja $G(V,A)$ um grafo formado pelos vértices distinguidos s e t, os vértices p_i (um para cada professor i) em V_P, e os c_{jh} (um para cada combinação de classe j e horário $h \in H_j$, disponível para as aulas da classe) em V_{CH}. As arestas do grafo, em A, são dirigidas e dadas por:

- uma aresta sp_i para cada professor i, com capacidade $\sum_j r_{ij}$,
- uma aresta $p_i c_{jh}$ para cada professor i, classe j com $r_{ij} > 0$ e horário $h \in H_i$ (disponível para o professor i), com capacidade 1.
- uma aresta $c_{jh}t$ para cada c_{jh}, com capacidade 1
- uma aresta de retorno ts, com capacidade infinita.

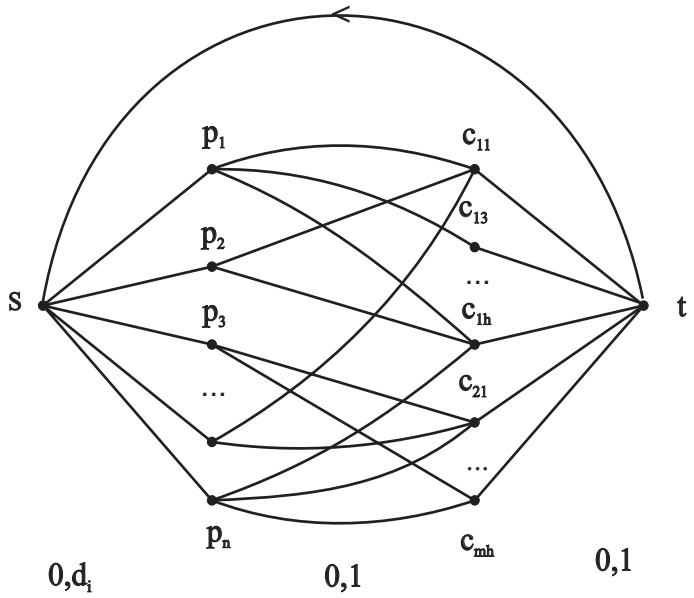


Figura 2.1 Grafo representando STP sem restrições de conflito para os professores. Os pares de valores (l_a, u_a) abaixo das colunas de arestas são os limite inferior e capacidade de cada aresta a da coluna, exceto para aresta de retorno ts (com $0, \infty$). Para as arestas $a = sp_i$, temos $u_a = d_i = \sum_j r_{ij}$. As arestas são dirigidas da esquerda para direita, exceto a aresta de retorno ts.

Todas as arestas com limite inferior igual a zero. Associamos a cada aresta a uma variável x_a inteira, com $l_a \leq x_a \leq u_a$, onde l_a é seu limite inferior e u_a sua capacidade (limite superior). Um dado $x = (\ldots, x_a, \ldots)$ define um *fluxo* para este grafo se temos

$$\forall v \in V, \sum_{\forall u \in V,\ uv \in A} x_{uv} - \sum_{\forall w \in V,\ vw \in A} x_{vw} = 0,$$

uma conservação, o que entra é o mesmo que sai em um vértice. E é dito *viável* se são respeitados os limites. O valor do fluxo é igual ao valor de x_{ts}. E, embora a capacidade de ts seja infinita, claramente num fluxo x_{ts} tem valor máximo dado por $\sum_i \sum_j r_{ij}$. Observe a figura 2.1.

Afirmamos que qualquer solução para o problema STP sem restrições de conflito para os professores pode ser mapeada polinomialmente até um fluxo máximo neste grafo com valor $\sum_i \sum_j r_{ij}$. E vice-versa.

Para encontrarmos o fluxo máximo, dada uma solução de nosso problema, basta que para todo encontro, entre o professor i e a classe j, alocado para um horário h (possível para a aula: $h \in H_i \cap H_j$) façamos

$$x_{p_i c_{jh}} = 1,$$

os valores de x_a com a entre V_P e V_{CH} não usados na alocação de horários devem ter $x_a = 0$ e os demais valores de x_a serão dados pela necessidade de manter a conservação de fluxo em cada vértice. O fluxo terá valor $\sum_i \sum_j r_{ij}$, pois é o número de alocações da solução.

Agora verifiquemos que dado um fluxo máximo para o gráfico $G(V, A)$ com valor $\sum_i \sum_j r_{ij}$ obtemos uma solução para nosso problema alocando os encontros entre i e j nos horários h onde

$x_{p_i c_{jh}} = 1$. A demanda para cada professor será satisfeita pois sp_i terá valor $\sum_j r_{ij}$ para cada i, pela conservação de fluxo ($x_{ts} = \sum_i \sum_j r_{ij}$). Também pela conservação de fluxo não haverá conflito para as classes dadas as capacidades $u_{c_{jh}t} = 1$. Além disso, por construção, qualquer aresta entre V_P e V_{CH} representa uma alocação para um horário possível para o encontro.

Demos uma redução do problema STP sem restrições de conflito para os professores até um problema de Máximo Fluxo, um problema polinomial. Logo, STP sem restrições de conflito para os professores é um problema polinomial.

Analogamente, STP sem restrições de conflito para as classes é um problema polinomial. Sua prova usa o grafo $G'(V', A')$ descrito abaixo.

Seja $G'(V', A')$ um grafo formado pelos vértices distinguidos s' e t', os vértices c_j (um para cada classe j) em V_C, e os p_{ih} (um para cada combinação de professor i e horário $h \in H_i$, disponível para o professor) em V_{PH}. As arestas do grafo, em A', são dirigidas e dadas por:

- uma aresta $s'c_j$ para cada classe j, com capacidade $\sum_i r_{ij}$,
- uma aresta $c_j p_{ih}$ para cada classe j, professor i com $r_{ij} > 0$ e horário $h \in H_j$ (disponível para a classe j), com capacidade 1.
- uma aresta $p_{ih}t'$ para cada p_{ih}, com capacidade 1
- uma aresta de retorno $t's'$, com capacidade infinita.

Todas as arestas com limite inferior igual a zero. □

Corolário 2.1. *O problema STP sem as restrições de um dos três tipos: restrições de conflito para professores, restrições de conflito para classes e restrições à disponibilidade de tempo; é um problema polinomialmente solúvel.*

2.6 Como o problema vem sendo tratado

Como trata-se de um problema NP-completo soluções exatas são viáveis apenas para instâncias muito pequenas ou muito simples. Não é o caso dos problemas reais.

As primeiras ferramentas empregadas tinham semelhança à maneira como um horário é feito manualmente [SS79]. São as chamadas *heurísticas diretas* baseadas em aumentos sucessivos. A alocação dos encontros é feita uma a uma até que seja completada para todos os encontros. Em geral, os encontros "mais restritos" são alocados primeiro. O que muda é o conceito de "mais restrito" entre as ferramentas. É comum a necessidade de alterar alguma alocação feita anteriormente para que um horário seja liberado e o encontro que pretende-se alocar atualmente possa usá-lo. O sistema SCHOLA apresentado por Junginger (1986) é um típico exemplo.

Depois surgiram trabalhos usando técnicas mais gerais como *programação inteira* ou *fluxo sobre redes* (em grafos). E mais tarde usando redução à *coloração de grafos*, um problema bem estudado. De Werra, entre outros, contribuiu bastante com estas duas últimas modelagens (veja, por exemplo, [dW97], [AdW02], [dWAD02], [dW02]).

Neufeld and Tartar (1974) mostraram a equivalência entre resolver o problema STP com pré-alocações e a coloração das arestas de um grafo associado com restrições externas [NT74]. Tendo cada encontro representado por um vértice e havendo arestas entre vértices representando encontros com professor ou classe em comum. Provaram também que o grafo com as restrições externas poderia ser substituído por outro sem estas restrições.

Schmidt and Ströhlein em [SS79] trazem uma bibliografia anotada dos primeiros trabalhos, com uma enorme quantidade de referências. Um dos trabalhos mais recentes relatando as pesquisas na área é [Sch99b] dado por Schaerf.

Schaerf conta que vários pesquisadores acreditam que o problema de alocação de horários educacionais não possa ter sua solução totalmente automatizada, seja porque algumas razões que fazem uma solução melhor que outra seriam dificilmente modeladas, ou seja porque no enorme espaço de busca o ser humano seria capaz de indicar regiões mais promisoras que o sistema poderia não ser hábil para encontrar. Daí, muitos sistemas permitirem aos usuários ajustes manuais pelo menos no final. Os sistemas que requerem uma intervenção humana muito grande são chamados de *interativos* ou *semi-automáticos*.

Um exemplo de sistema interativo é o dado por Chahal e de Werra (1989). Usando fluxo sobre redes é feita a alocação de encontros para um horário por vez. Primeiro os horários com menos professores disponíveis. Busca-se máximo fluxo com mínimo custo, alocando para aquele horário a maior quantidade possível de encontros com professores e turmas cujo grau de liberdade é menor (com relação aos horários que ainda são disponíveis e o número de encontros faltando alocar para estes). Como não são feitas alterações nos horários alocados anteriormente o resultado pode ter encontros não alocados. E uma intervenção humana é exigida. Antes, Ostermann and de Werra (1983) apresentaram um modelo semelhante com um grafo por horário, e de Werra (1985) com um grafo por classe.

Técnicas de busca também usadas em *Inteligência Artificial* tem sido freqüentemente usadas para resolver o problema. Citamos *Algoritmos Genéticos*, "*Simulated Annealing*", *Busca Tabu*, *Programação Lógica* e *Programação de Restrições*.

A maior vantagem das duas últimas é a capacidade de expressar as restrições de forma declarativa. Já em 1987 Charles Murphy [Mur87] apresenta uma planilha eletrônica, TIMELOG, que seria usada interativamente na construção de horários escolares, escrita em PROLOG, uma linguagem de programação com solver para Programação Lógica. Mais recentemente temos a tese de Kenneth K. Chin-A-Fat, de 2004, que trás um método em Programação Lógica para construir os quadros de horários das escolas Holandesas. Construção esta que envolve a determinação de cada grupo de alunos que assistirão juntos a certas sessões de uma disciplina que optaram. O problema é modelado como um "Propositional Satisfiability Problem" (SAT).

Um modelo interativo para problemas de automação de horários escolares usando extensões de Programação de Restrições foi apresentado no PATAT IV em 2004 por H. Cambazard, F. Demazeau, N. Jussien e P. David [CDJD05]. Este modelo usa Programação de Restrições Baseada em Explanações (e-restrições). Uma *explanação* recorda informações que justificam uma decisão do solver, como a redução do domínio de uma variável ou uma contradição. Ela é dada por um conjunto de restrições (subconjunto das restrições originais) e um conjunto de decisões feitas durante a busca. Estas explanações viabilizam um método de solução de restrições dinâmico reativo, onde há uma "aprendizagem", evitando recomeçar do zero uma

busca após modificações. Uma vez encontrado um quadro de horários viável, ele é otimizado quanto às restrições relativas a características desejáveis com um método Busca Tabu usando as habilidades dinâmicas do solver de restrições baseado em explanações.

Citamos também o trabalho de Michael Marte que apresentou modelos e algoritmos em sua tese em 2002 com Programação de Restrições (veja [Mar00] e [Mar01]). Um resumo extendido apresentado no PATAT VI em 2006 por F. Jacobsen, A. Bortfeldt e H. Gehring [JBG06] apresenta uma comparação entre o método de Marte com Programação de Restrições e um método Busca Tabu, quanto a encontrar uma solução viável em 1500 instâncias já testadas pelo método de Marte. O método Busca Tabu empregado foi relativamente simples e os resultados apresentaram desempenhos semelhantes, mas a comparação tem menor relevância dado que duas restrições não haviam ainda sido incluídas nos testes.

A estratégia de *paralelizar* a busca também tem sido empregada. Fazendo possível que máquinas diferentes realizem tarefas relativamente independentes simultaneamente. Citamos o trabalho [Š05] de Petr Šlechta (no PATAT 2004), que determina uma decomposição pela aplicação (e posterior avaliação) de um algoritmo de "propagação" de duas cores nos vértices de um grafo associado. Esta decomposição produz três conjunto de encontros, sendo que uma vez alocados os encontros do primeiro conjunto (chamemos de removido), a alocação dos encontros dos demais conjuntos é independente entre estes. Essa decomposição e alocação parcial (do conjunto removido) é aplicada repetidas vezes, uma vez em cada conjunto restante de cada aplicação.

O trabalho de Jeffrey H. Kingston [Kin06] bem diferente dos demais trás uma heurística em tempo polinomial para encontrar "boas soluções" usando modelos de pesquisa operacional em cinco fases: determinação de subconjuntos de períodos do quadro de horários, construção de blocos de aulas (sobre os quadros), alocação de horários, ajustes nos horários e alocação de recursos (professores e salas).

No Capítulo 5 falaremos também sobre Busca Tabu, Simulated Annealing e Algoritmos Genéticos; e sobre trabalhos com estas técnicas.

Segundo Schaerf, o fato dos problemas de automação de horários escolares serem solucionados por algoritmos de busca local especializados confirma que estes são os mais duros entre os problemas educacionais. E acredita que, por outro lado, os problemas de automação de horários universitários são geralmente mais complexos para formalizar, mas os mais simples do ponto de vista combinatorial. Estes poderiam ser bem modelados com métodos construtivos implementados com programação lógica de restrições.

CAPÍTULO 3

O Problema Automação de Horários Escolares

O problema de automação de horários que passamos a descrever refere-se ao sistema educacional aplicado no Brasil ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio. Não obstante, pode se aplicar a outros casos semelhantes.

Durante os anos do Ensino Fundamental e Médio (4 e 3 anos, respectivamente) os alunos assistem às aulas (encontros letivos) em grupos de alunos que estão no mesmo "ano letivo". São as classes ou turmas. Cada aluno participa de uma turma. As matérias ou disciplinas deste ano letivo são ministradas por vários professores. Em geral, cada matéria de uma turma é ensinada por um único professor.

O horário de aulas de cada turma é definido sobre uma grade semanal. Também em geral, ocorrem em um turno já definido, mas podem ocorrer em dois turnos.

Os anos letivos mais avançados possuem um número maior de aulas, mesmo de disciplinas. E uma turma pode não ter em todos os dias o mesmo número de aulas.

3.1 Requerimentos para viabilidade

Então, dados os conjuntos: de professores P, classes C, matérias M, todos os encontros das matérias de cada classe E e horários H; temos os requerimentos básicos para viabilidade:

i. dois encontros de um mesmo professor precisam ocorrer em horários diferentes.

ii. dois encontros da uma mesma classe precisam ocorrer em horários diferentes.

iii. o horário de cada encontro deve respeitar a disponibilidade de tempo do professor e da turma envolvidos na aula.

Nada impede que um professor ensine em uma turma duas ou mais matérias diferentes. Por exemplo, o professor de Português pode ser também o de Literatura. O item i permanece igual.

No caso brasileiro as classes têm uma sala correspondente, mas algumas aulas podem requerer *salas especiais*, outras que não a sala da classe como, por exemplo, laboratórios de Química, Informática, Física, salas de Música, Artes, ..., quadras para Educação Física. E estas salas podem não ter disponibilidade de tempo total, seja por motivos organizacionais ou pedagógicos. Daí, temos um conjunto de salas especiais S, e iii deve ser reescrito como segue:

iii. o horário de cada encontro deve respeitar a disponibilidade de tempo dos *elementos* envolvidos na aula. Onde os *elementos* podem ser do tipo professor, turma ou sala.

E acrescentamos:

iv. os encontros numa mesma sala especial devem ocorrer em horários diferentes.

Existe um limite ao número de aulas de uma disciplina que pode ocorrer por dia para uma turma. Este número pode ser geral, válido para toda disciplina, ou específico para cada uma. E assume valor igual a 1 ou 2. Quando num dia ocorrem dois encontros de uma disciplina numa turma estes devem ser em horários seqüenciais, são as *aulas geminadas*. Caso a turma tenha aulas em dois turnos, estas aulas geminadas não devem estar parte em cada turno. Por motivos pedagógicos, para cada disciplina numa turma há um número mínimo de aulas geminadas semanais. E, por força de lei, um professor deve ensinar no máximo 8 aulas por dia. Sendo que, por motivos pedagógicos, uma escola pode requerer um número menor que este como o número máximo diário. Assim,

v. o número diário de encontros de uma dada disciplina numa classe deve respeitar o número máximo diário de encontros desta.

vi. os encontros de uma dada disciplina numa classe num dia devem ser seqüenciais e em um turno, aulas geminadas.

vii. o número mínimo semanal de aulas geminadas de uma dada disciplina numa classe deve ser respeitado.

viii. o número diário de encontros de um professor deve respeitar o seu número máximo permitido.

Em alguns casos, algumas aulas são dadas para parte dos alunos de uma classe enquanto a outra parte tem outra aula noutra sala, definindo assim *subturmas*. Um exemplo é subdividir uma classe para que parte dela (subturma 1) tenha aula de Espanhol, enquanto a outra parte (subturma 2) tenha aula de Inglês. Ou, como é comum no último ano do Ensino Médio, para que as subturmas tenham mais aulas da área que pretendem prestar concurso vestibular.

Também é possível que algumas aulas sejam dadas para mais de uma turma (subturma) ao mesmo tempo, *união de turmas*. Por exemplo, sejam duas turmas de 1º Ano o 1ºA e o 1ºB, podemos ter aulas de Educação Física dadas para 1ºA e o 1ºB juntos ou aulas de Inglês dadas para as subturmas 1ºA 2 e 1ºB 2 juntas.

Consideramos individualmente cada subturma ou união de turmas (subturmas) como classes, chamamos de *turmas especiais*. Portanto, cada turma especial deve respeitar os requerimentos ii, iii, v, vi e vii como qualquer *classe (turma) padrão*. Quanto ao item iii, respeitar a disponibilidade de tempo de uma turma especial é respeitar a disponibilidade de tempo de cada classe padrão que a origina.

Os outros requerimentos decorrentes das turmas especiais são:

ix. os encontros que envolvem uma subturma devem ocorrer em horários diferentes dos usados pelos encontros que envolvem a classe que a origina.

x. os encontros de uma união de turmas devem ocorrer em horários diferentes dos usados pelos encontros que envolvem as classes que a originam ou (sub)turmas que a compõem.

Algumas vezes requere-se que as aulas de determinadas disciplinas e turmas ocorram ao mesmo tempo, as *aulas simultâneas*. Observe que falamos de duas ou mais aulas simultâneas e, conseqüentemente, dois ou mais professores, diferente de uma aula com um professor dada a uma união de turmas. Podemos ter vários *grupos de aulas simultâneas*. Vamos denotar por $G \subset \mathscr{P}(C \times M)$ o conjunto deles, necessariamente disjuntos.

xi. os encontros de uma disciplina numa turma pertencente a um grupo de aulas simultâneas devem ocorrer nos mesmos horários dos encontros das demais disciplinas do grupo (nas turmas determinadas).

Menos comum, contudo possível, é o requerimento que determinada aula ocorra em determinado horário a priori, a *alocação estática*. Temos, então, um conjunto A com a alocação estática destes encontros.

xii. os encontros com alocação estática devem ter seus horários respeitados.

Quando uma escola possui várias salas especiais de um mesmo *tipo*, por exemplo, mais de uma quadra de esportes ou mais de um laboratório de Informática, uma aula pode requerer qualquer sala especial de um grupo delas. Vejamos outro exemplo. Imagine uma classe de 3º Ano que se subdivide em subturma 3º 1 e 3º 2 para assistir aulas extras de Matemática e Biologia, respectivamente. A subturma 3º 1 pode assistir estas aulas de Matemática na sala da classe 3° e, sendo assim, a subturma 3º 2 terá que se deslocar para uma outra sala para suas aulas extras de Biologia. E entre as salas especiais somente algumas são consideradas possíveis ou satisfatórias, seja por causa do número de alunos desta subturma ou por outro motivo que não necessariamente o tipo da sala. Resumindo, uma aula que precisa ocorrer numa sala especial pode não requerer uma especificamente, mas requerer que ocorra em qualquer sala de um *grupo de salas especiais possíveis* para esta aula. Observe que, neste caso, não se faz necessário que todos os encontros de uma disciplina numa turma ocorram numa mesma sala especial, exceto para aulas geminadas. Além disso, os grupos de salas especiais possíveis requeridos pelas disciplinas das turmas não necessariamente particionam o conjunto S de salas especiais.

A distribuição das salas de aula das classes padrão pode ser incluída no problema de automação de horários requerendo que: todos os encontros de parte das disciplinas da classe padrão, digamos M'_c, ocorram numa mesma sala possível; mas, na prática, o comum é a Direção da escola determinar que sala pertence a que classe antes.

Em geral, a Direção da escola também determina que professor vai ensinar para cada turma cada disciplina, claro respeitando a formação acadêmica de cada professor. Contudo, quando o horário é feito manualmente, podem haver trocas nesta determinação que possam facilitar a conclusão da construção do horário sem prejuízos. Por exemplo, isso pode ser feito quando há muitas classes de um mesmo ano letivo: o professor de Matemática do 2ºA pode ser trocado com o professor de Matemática do 2ºB. Novamente observa-se que há uma flexibilidade: uma disciplina de uma turma não precisa ter o professor que a ensina determinado a priori. Pode-se determinar um conjunto de professores possíveis para esta tarefa. É certo, entretanto, que apenas um destes professores deve lecionar os encontros desta disciplina nesta turma. E que esta escolha não deve sobrecarregar alguns professores e sub-utilizar outros, com relação a *carga horária* contratada.

Nestes casos tratados nos últimos parágrafos percebemos que o problema de automação de horários ganha um sentido mais amplo do que determinar os horários para cada encontro respeitando as restrições i a xii. A esta definição acrescenta-se: determinar o professor e a sala do encontro quando estes não estão já determinados. Sendo que, se faz necessário respeitar mais estas restrições:

xiii. cada encontro deve ser alocado para uma sala possível (compatível).

xiv aulas geminadas precisam ser alocadas para uma mesma sala.

xv. todos os encontros de uma disciplina de uma turma, devem ter o mesmo professor, um professor possível.

xvi. o número de encontros semanais de um professor deve respeitar um valor mínimo e um máximo.

xvii. os encontros das disciplinas em M'_c da classe padrão c devem ocorrer numa mesma sala.

Imagine, ainda, que é de conhecimento prévio da Direção da escola que um dado professor irá se ausentar por algum período (por exemplo, licença prêmio, maternidade, ...) e esta deseja que o horário já contemple a substituição deste professor nas disciplinas das turmas que ensina por outro(s) já determinado(s). Isto é, que não seja necessário mudar o horário para que esta substituição seja realizada. A substituição pode se dar também em apenas parte das aulas.

Seja B o conjunto de professores que necessita ser substituído total ou parcialmente. Para cada professor $p \in B$, seja $L_p \subset M \times C$ o conjunto com as disciplinas das turmas de p em que será substituído, todas determinadas a priori. Temos a função

$$f_p : L_p \to P \ ,$$

$$f_p(m,c) = p_s \ ,$$

que leva cada disciplina m da turma c de p em L_p até o *professor substituto* para esta, p_s. É preciso que os horários destes encontros de m em c de p também estejam contidos na disponibilidade de tempo de p_s. Isto é, o professor substituto deve ser considerado um dos "elementos envolvidos na aula", na restrição iii. Além disso,

xviii. para cada encontro com professor determinado que precisa ser substituído, seu substituto para esta disciplina desta turma não pode lecionar no mesmo horário alocado para este encontro.

Acrescente-se a tudo isso a possibilidade de a instituição educacional possuir várias sedes e alguns de seus professores ensinarem em mais de uma sede. Observe que a disponibilidade de tempo de um professor p, H_p, estará associada às sedes em que ele pode ensinar. Seja I o conjunto de sedes. Seja H_{pi} o conjunto de horários disponíveis para o professor p na sede i, $H_p = \bigcup_{i \in I} H_{pi}$, uma união não necessariamente disjunta. Havendo mais de uma sede, o horário h de um encontro respeita a disponibilidade de tempo de p (na restrição iii) se, dado que a classe do encontro pertence a sede i, temos $h \in H_{pi}$.

A existência de um *deslocamento* estará caracterizada sempre que um professor lecionar encontros que se seguem, em um dia, em sedes diferentes. O tempo de um deslocamento entre duas sedes pode variar, especialmente em função do tipo de condução. Daí, a função

$$d_p : I \times I \rightarrow N \ ,$$

$$d_p(i,j) = d_{pij} \ ,$$

indica a distância em minutos de i a j para p, podendo ocorrer $d_{pij} \neq d_{pji}$. Denotemos por D_p o conjunto com a disponibilidade de tempo do professor p para deslocamentos, isto é, com os intervalos de tempo onde p pode se deslocar. D_p não precisa conter a sua disponibilidade de tempo total. Cada professor p pode restringir o número de deslocamentos que pode ocorrer numa parte de D_p determinando um número máximo, por exemplo, no máximo um deslocamento por turno, ou por dia. Seja $\bar{D}_p \subset \mathscr{P}(D_p)$. A função

$$\bar{d_p} : \bar{D}_p \rightarrow N^+ \ ,$$

$$\bar{d_p}(T) = \tau \ ,$$

corresponde a cada parte de tempo determinada T um número máximo de deslocamentos τ que pode ocorrer nesta parte da disponibilidade de p.

Os requerimentos abaixo são, então, exigidos para viabilidade.

xix. *deslocamentos viáveis*: existência de tempo suficiente entre dois encontros de um professor p que se seguem, em um dia, em sedes diferentes para o deslocamento entre elas, sendo que o intervalo de tempo do deslocamento está inteiramente contido em D_p;

xx. o *número máximo de deslocamentos* de cada professor para uma dada parte de D_p deve ser respeitado;

Assim, estamos em condições de definir o que seria uma solução viável para o nosso Problema Automação de Horários Escolares.

Definição 3.1 (Espaço viável)**.** Dados: I o conjunto de sedes, C o conjunto de classes (padrão, subconjunto C', ou turmas especiais, subconjunto C''), M o conjunto de matérias, E o conjunto com todos os encontros letivos das matérias de cada classe, P o conjunto de professores, S o conjunto de salas especiais, H o conjunto de horários, G o conjunto de grupos de aulas simultâneas, A o conjunto de encontros com alocação estática, B o conjunto de professores que necessitam de substituição e $\forall c \in C'$, $M'_c \subset M$ o conjunto de matérias que determinarão a sala da turma padrão (C'', S, G, A, B e os M'_c possivelmente vazios).

Seja $H_c \subset H$ o conjunto de horários letivos da classe c, $H_{pi} \subset H$ o conjunto de horários disponíveis do professor p na sede i e $H_s \subset H$ o conjunto de horários disponíveis da sala especial s.

Seja $E_{cm} = \{e^1_{cm}, \ldots, e^{r_{cm}}_{cm}\}$ o conjunto dos r_{cm} encontros que a matéria m deve ter na classe c, com um número máximo de encontros diários α_{cm} e um número mínimo de aulas geminadas semanais δ_{cm}. Denotamos por c_e e m_e, onde e é um encontro, a turma (especial ou não) e a matéria do encontro, respectivamente. Seja $S_{cm} \subset S$ o conjunto de possíveis salas especiais s

para os encontros de m em c. Seja $P_{cm} \neq \emptyset$ o conjunto de possíveis professores p para lecionar os encontros de m em c.

Para cada professor $p \in P$, seja α_p o número máximo de encontros diários e sejam β_p e γ_p os seus mínimo e máximo número de encontros semanais. Seja L_p o conjunto de disciplinas das turmas de $p \in B$ que precisam de substituto, e f_p a função que determina o professor substituto para cada uma destas.

Seja D_p a disponibilidade de p para deslocamentos, $\overline{d_p}$ a função que indica o número máximo de deslocamentos de p para cada parte de sua disponibilidade em $\overline{D_p}$. E seja d_p a função que indica em minutos o tempo de deslocamento de p entre duas sedes.

Encontrar uma solução viável para o *Problema Automação de Horários Escolares* é determinar para cada encontro $e \in E$: o professor p_e, se este ainda não foi determinado ($|P_{c_e m_e}| \neq 1$); a sala especial s_e, se necessário ($|S_{c_e m_e}| \geq 2$); e o horário h_e em que deve ocorrer; respeitando as restrições acima i a xx.

Observe que, dada a Definição 3.1, se para cada m de c ($|E_{cm}| > 0$), temos $S_{cm} = \emptyset$, a restrição iv é sempre satisfeita, torna-se desnecessária.

Analogamente, ocorre com as restrições:

- ix e x, se não existem turmas especiais, $C'' = \emptyset$;
- xi, se não existem grupos de aulas simultâneas, $G = \emptyset$;
- xii, se não há qualquer alocação estática, $A = \emptyset$;
- xiii, se $\forall(c,m)$ temos $|S_{cm}| \leq 1$.
- xiv, se $\forall(c,m)$ com $\alpha_{cm} = 2$ temos $|S_{cm}| \leq 1$.
- xv, se o professor para cada m de c já foi determinado, $|P_{cm}| = 1$;
- xvi, se $\forall p \in P$ temos: $\beta_p = 0$ e $\gamma_p \geq |H|$; ou o número de encontros semanais de p é uma constante NE_p, devido a $|P_{cm}| = 1$ para cada m de c, com $\beta_p \leq NE_p \leq \gamma_p$;
- xvii, se para toda classe padrão $c \in C'$, $M'_c = \emptyset$;
- xviii, se nenhum professor se ausentará; e
- xix e xx, se temos apenas uma sede, $|I| = 1$.

Daí, podemos definir uma solução viável para o problema mais básico como sendo:

Definição 3.2 (Espaço viável do problema básico)**.** Dados: C o conjunto de classes, M o conjunto de matérias, E o conjunto com todos os encontros letivos das matérias de cada classe, P o conjunto de professores, S o conjunto de salas especiais (possivelmente vazio), H o conjunto de horários .

Seja $H_c \subset H$ o conjunto de horários letivos da classe c, $H_p \subset H$ o conjunto de horários disponíveis do professor p e $H_s \subset H$ o conjunto de horários disponíveis da sala especial s.

Seja $E_{cm} = \{e^1_{cm}, \ldots, e^{r_{cm}}_{cm}\}$ o conjunto dos r_{cm} encontros que a matéria m deve ter na classe c, com um número máximo de encontros diários α_{cm} e um número mínimo de aulas geminadas semanais δ_{cm}. Denotamos por c_e e m_e, onde e é um encontro, a turma e a matéria do encontro, respectivamente. Seja $S_{cm} \subset S$ o conjunto de possíveis salas especiais s para os encontros de m em c.

Para cada professor $p \in P$, seja α_p o número máximo de encontros diários.

Encontrar uma solução viável para o *Problema Automação de Horários Escolares Básico* é determinar para cada encontro $e \in E$: a sala especial s_e, se necessário ($|S_{c_e m_e}| \geq 2$), e o horário h_e em que deve ocorrer; respeitando as restrições acima i a viii, mais as restrições xiii e xiv.

Observe que ainda indicamos entre as características do problema básico o conjunto das salas especiais. Isto porque em geral o problema apresenta pelo menos uma "sala" (quadra) para as aulas de Educação Física.

3.2 Características desejáveis

Entre as soluções viáveis, algumas são consideradas melhores que outras segundo *características desejáveis*. Estas baseadas em critérios pedagógicos, organizacionais, físicos ou pessoais.

Antes de passar a citá-las, formalizemos algumas definições:

Definição 3.3 (Quadro de horários)**.** Dada uma grade semanal de horários letivos de um colégio, a apresentação das aulas nos horários alocados de um professor, turma ou sala sobre esta grade formam o que chamamos de *quadro de horários*.

Definição 3.4 (Janela)**.** Dado o quadro de horários de um professor, uma *janela* é qualquer horário em sua disponibilidade sem atividade entre dois horários com aulas num mesmo dia e entre os quais não houve deslocamento. Assim, podemos ter entre duas aulas de um professor várias janelas.

Definição 3.5 (Espalhamento e espalhamento ruim)**.** Dada uma disciplina de uma turma e seu número máximo de encontros diários. A disposição dos dias em que foram alocados seus encontros na semana formam seu *espalhamento*. Se todos seus encontros podem ser alocados no mínimo em dois dias é considerado um *espalhamento ruim* cada par de dias vizinhos, seguidos, onde haverá encontros desta. Senão, se todos seus encontros podem ser alocados no mínimo em três (ou mais) dias, cada trio de dias vizinhos é um espalhamento ruim, e também cada par de dias vizinhos com aulas geminadas se pode haver dia com uma aula apenas ($r_{cm} - 2 \cdot \delta_{cm} > 0$). O par último dia e primeiro está entre os pares de dias vizinhos (não é parte de um trio).

As características desejáveis mais freqüentes no Brasil e, também, para as quais é dada maior importância são:

1. menor número de dias e turnos usados na alocação de horários para as aulas de cada professor;
2. menor número de espalhamentos ruins;
3. menor número de janelas.

Os ítens 1 e 3 referem-se à *compacticidade* do quadro de horários de cada professor.

Em geral, a grade de horários de uma escola num turno por dia possui pelo menos um intervalo de tempo sem atividades para alunos e professores, o "intervalo ou recreio". Como não é interessante do ponto de vista pedagógico que aulas geminadas sejam separadas por um intervalo, temos outra característica desejável:

4. menor número de aulas geminadas separadas por intervalo.

Também deseja-se:

5. evitar que professores ministrem aulas em todos os dias letivos.

6. evitar que professores venham ao colégio para dar apenas uma aula num dia.

7. evitar que os encontros de alguma disciplina de alguma turma ocorram em certos horários.

8. evitar sobrecarregar uma turma num dia com aulas que pertençam a um dado grupo de disciplinas.

9. evitar que todos os professores de um grupo estejam trabalhando num certo horário.

10. evitar aulas consecutivas de diferentes turmas em salas especiais que precisam de alguma preparação.

É desejável garantir, tanto quanto possível, um "dia de folga" a cada professor (item 5).

Um exemplo para o item 7 seria evitar que aulas práticas de Educação Física ocorram em horários seguidos imediatamente de outras aulas. Isto é, priorizar horários anteriores a intervalos ou os últimos horários do turno, para que os alunos tenham tempo suficiente de tomar banho antes da próxima aula ou não precisem retornar a sala de aula. Observe que a característica é avaliada sobre uma disciplina de uma turma. No caso de evitar que os encontros de Matemática das turmas ocorram nos últimos horários, podemos, por exemplo, chegar a um resultado satisfatório onde parte das turmas tenha uma aula nestes horários, e não considerar satisfatório encontrar um horário onde somente algumas poucas turmas possuam todos os seus encontros nestes horários.

Disciplinas que demandam muitas atividades para serem feitas em casa podem ser definidas pela coordenação pedagógica como pertencentes a um grupo de disciplinas T. Sendo desejável não ultrapassar um certo número θ_T destas ocorrendo num dia para cada turma. Uma sobrecarga seria caracterizada e medida pela diferença a mais. Outros motivos podem motivar a criação de um grupo de disciplinas como este e até mais de um. Cada um devendo ser contemplado pelo item 8.

A característica descrita no item 9, pode se referir, por exemplo, a um grupo de professores que deve poder atender aos pais dos alunos nos primeiros e últimos horários do turno.

Quanto ao item 10, podemos exemplificar com aulas de duas turmas em um laboratório de Química. O ideal seria que houvesse um horário vago entre as aulas das turmas no quadro de horários da sala, para que o laboratório seja limpo e preparado para as aulas seguintes.

Note que algumas características são contraditórias em algum aspecto. Por exemplo, se o item 9 referir-se a um horário que não o primeiro ou o último de um turno, seu atendimento implica em um professor do grupo não trabalhando num dado horário, o que pode caracterizar uma janela para este. E quanto maior a compacticidade, podemos ter um pior espalhamento.

3.3 O que nosso modelo contempla

Na presente tentativa de desenvolver uma ferramenta útil à solução do problema contemplamos os dezesseis primeiros requerimentos mais o requerimento xviii, e buscamos minimizar o não atendimento das seis primeiras características desejáveis apresentadas mais a seguinte.

0. evitar que o número de janelas de cada dia exceda um número máximo desejável ς.

Portanto, ainda não atendemos aos requerimentos relacionados a existência de mais de uma sede (xix e xx) e, quanto ao requerimento xvii, consideramos que as classes padrão tem suas salas definidas a priori pela direção do colégio (como é comumente praticado) logo já é satisfeito. E algumas aulas requerem salas especiais.

Para simplificação, trocamos o requerimento xiv, exigência de salas especiais iguais para aulas geminadas de uma disciplina numa turma, por um outro que o engloba. Consideramos como requerimento em nosso modelo:

xiv'. todos os encontros de uma disciplina numa turma que requer sala especial devem ocorrer numa mesma sala.

O cumprimento das demandas de aulas é um requerimento implícito em "determinar as alocações *para cada encontro*", isto é, para todos. Por isso, não é listado e numerado entre os outros em nossas definições de solução viável do problema e do problema básico.

O importância que o colégio dá a cada característica desejável varia de instituição para instituição e isto é levado em conta em nosso modelo. Isto acontece mediante a entrada de parâmetros.

3.4 Variações

Acreditamos ter descrito, da forma mais geral possível, os mais comuns requerimentos de viabilidade e características desejáveis do problema de automação de horários escolares no Brasil. Citamos agora algumas características que também podem ser desejáveis em alguns casos. E em seguida apresentamos situações que exigiriam outros requerimentos.

11. minimizar o deslocamento dos professores entre as salas de uma mesma sede.

12. evitar que cada professor tenha aulas no conjunto de horários não desejáveis por ele; ou, dadas as preferências dos professores por determinados horários, maximizar o atendimento destas.

Deseja-se que os encontros de uma disciplina estejam espalhados sobre os dias da semana, mas a maneira como se define um espalhamento aceitável ou ruim varia.

Se uma turma possui mais horários do que precisa, isto é, é deixado ao modelo determinar os horários de aula da turma, faz-se desejável minimizar o número de horários vagos no quadro da turma. E se esta turma assiste aulas em dois turnos vizinhos, pode-se desejar que um dos dois

horários nesta vizinhança, o último do primeiro turno ou o primeiro do seguinte, fique vago. Em nosso modelo consideramos que os horários das turmas são conhecidos e correspondem ao número exato de aulas destas.

Alguns colégios possuem duas grades de horários diferentes de forma que parte das turmas tem intervalo enquanto as outras não e em seguida o inverso acontece. Isso pode ser motivado por um espaço físico reduzido para os alunos permanecerem no intervalo. Contudo, esta solução trás outro problema: o barulho dos alunos no intervalo atrapalhando os que estão em aula. A existência de grades diferentes exigiria uma re-definição do problema, dado que os diferentes horários letivos poderiam ter intervalos de tempo em comum.

Já o caso onde os horários letivos não têm intervalos de tempo em comum mas são diferentes em alguns dias da semana não causaria a re-definição do problema. Nosso modelo AST suporta este tipo de grade horária semanal.

Também ocorrem casos onde a grade de horários se estende sobre duas semanas.

Se deseja-se determinar os quadros de horários de um colégio que funciona os três turnos de uma só vez e tem professores que trabalham em mais de um turno é requerido que não trabalhe no primeiro horário de um turno que se segue a um turno onde trabalha no último horário. Por exemplo, professores que trabalham nos turnos matutino e noturno, estes não devem trabalhar no primeiro horário da manhã seguinte a noite em que trabalharam no último horário.

Outra situação que apresentamos é quando parte do problema é formar as turmas, levando em conta a capacidade das salas de aula, e as preferências dos alunos pelas disciplinas optativas (pequena parte das disciplinas que não é obrigatória, e que caracterizam turmas especiais).

Em alguns países os colégios se assemelham às universidades no sentido de disciplinas obrigatórias e optativas oferecidas em vários horários com professores diferentes, onde a expressão "turma de alunos" só faz sentido no âmbito de uma disciplina.

As diferenças podem ser sentidas também na importância dada a certos critérios desejáveis frente a outros. Por exemplo, em nosso país o ensino público contrata professores com uma carga horária de trabalho definida, parte em sala de aula e outra fora dela, nas atividades de preparação e correção. Minimizar janelas nos horários destes professores seria um critério tão importante quanto minimizar o número de dias que este vem trabalhar no colégio. Agora, em algumas regiões, algumas escolas particulares pagam pela quantidade de horas letivas e pelos intervalos entre elas. E portanto, para estas o critério de minimizar janelas é muito mais importante do que minimizar a quantidade de dias que o professor trabalha.

3.5 Diferentes razões para a NP-completude

Na seção 2.5 falamos sobre a relação existente entre algumas restrições e a complexidade do problema. Novamente, ao falarmos de complexidade de um problema, estaremos nos referindo a complexidade de sua versão de decisão.

Mostramos que dada a existência de aulas para subturmas ou união de turmas (ou subturmas) suas restrições de conflito são um fator para a complexidade. Bem como são fatores para a complexidade: a presença de restrições na disponibilidade de tempo, restrições de conflito para professores e restrições de conflito para classes.

As três últimas junto às restrições de demanda compõem STP que é NP-completo, mas

STP sem qualquer restrição de um dos três tipos é um problema polinomialmente solúvel. Semelhantemente, se acrescentamos à STP sem restrições na disponibilidade de tempo (um problema polinomial) as restrições de conflito associadas às subturmas ou união de turmas temos um problema NP-completo.

Em [Wil02], Robertus Willemen trás a construção de um problema de automação de horários escolares mais amplo (TC, Timetable Construction), no sentido em que, além de determinar os horários dos encontros e as salas para estes, parte do problema é determinar que *grupos de alunos* farão parte de uma das turmas definidas por uma disciplina (que optaram ou devem cursar, no seu nível). Como cada grupo pode ter um aluno, este problema pode corresponder a determinar que alunos assistirão a que turma da disciplina. Os grupos de alunos são uma entrada do problema, cada grupo tem o mesmo nível e currículo. Além disso, uma disciplina de uma turma pode ser ensinada por diferentes professores. Por exemplo, as aulas teóricas dadas por um certo professor e as práticas por outro. Isto é, cada aula da disciplina da turma é associada a um professor. Em nosso problema todas as aulas da disciplina da turma são associadas ao mesmo professor. Junto às restrições de conflito para as turmas (*su*), tomam lugar as *restrições de conflito para os grupos de alunos* (*st*): não assistirem a mais de uma aula por horário, mesmo que como parte de diferentes turmas. Requer-se também (*ss*) que a soma do número de alunos dos grupos alocados para uma turma de uma disciplina não exceda um número limite associado à disciplina. As demais restrições são as restrição de conflito para professores (*te*), restrições à disponibilidade de tempo dos professores (*ta*), aulas em bloco devendo ser alocadas em horários consecutivos (*bt*), não alocar mais que um dado número máximo de aulas de uma disciplina numa turma por dia (*ed*, "restrições educacionais"), restrições de conflito para as salas (*ro*), compatibilidade da sala alocada com o tipo requerido (*rc*) e alocação de aulas em bloco (geminadas) numa mesma sala (*rb*). Os blocos de aulas são dados, tem tamanho dois, e uma relação diz se dois horários são consecutivos, excluindo os separados por intervalo.

Observe que no problema TC são consideradas as disponibilidades de tempo apenas para os professores. Todas as restrições exceto as restrições diretamente associadas aos grupos de alunos (*st* e *ss*) são também restrições de nosso problema. Ao nosso problema não foi dada a tarefa de alocar os grupos de alunos para as turmas. E todas as aulas da disciplina da turma são associadas ao mesmo professor.

Vários subproblemas deste descrito a pouco são usados por Willemen para dar diferentes provas da NP-completude do problema TC. Estes subproblemas diferem do original por limitações (determinação) de alguns dados de entrada, por desconsiderar restrições ou ter um ou mais tipos de alocações determinadas (de horários, grupos de alunos ou salas).

Algumas restrições podem ser ignoradas por escolher parâmetros que fazem com que qualquer solução as satisfaçam (pode ser feito, por exemplo, para *ss*, *ed*, *ta*, *bt*, *rb* e *rc*). Restrições de conflito para algum tipo de elemento não consideradas num subproblema podem ser modeladas introduzindo um diferente elemento deste tipo para cada encontro. Por exemplo, se não há restrições de conflito para professores pode-se usar um diferente professor para cada encontro. E se fazemos a disponibilidade de tempo de cada professor igual a um horário apenas, temos uma alocação de horários já determinada a priori. Usando idéias semelhantes a estas Willemen prova que cada subproblema é um caso especial de TC, pode ser reduzido polinomialmente ao problema TC.

Então, mostrando que estes subproblemas são também NP-completos, ele dá diferentes razões, focando diferentes restrições, para que TC seja NP-completo. Também mostra que retirando deste subproblema o tipo de restrição em foco temos um problema polinomialmente solúvel. Podemos dizer que esse tipo de restrição é um fator para a complexidade de TC.

Os subproblemas considerados focam cada uma das restrições de TC exceto as restrições de conflito para professores (*te*), turmas (*su*) e salas (*ro*).

Todos os subproblemas consideram a necessidade de atender as demandas, de fazer a alocação de todos os encontros.

São eles (todos NP-completos):

1. Determinar a alocação dos horários levando em conta as restrições de conflito para turmas, para os professores, e a disponibilidade de tempo para os professores. Sendo que sem as restrições na disponibilidade de tempo dos professores (*ta*) o problema é polinomialmente solúvel.

2. Determinar a alocação dos horários havendo já a alocação dos grupos de alunos para as turmas, respeitando as restrições de conflito para as turmas e para os grupos de alunos (*st*). Se são permitidos conflitos para os grupos de alunos ou se a alocação dos grupos de alunos para as turmas é equivalente a distribuir os alunos até classes disjuntas temos um problema polinomialmente solúvel.

3. (*Subproblema com ed*) Determinar a alocação dos horários com apenas um grupo de alunos (conseqüentemente uma turma), respeitando a disponibilidade de tempo dos professores, as restrições de conflito para o grupo de alunos (e para a turma, já que correspondem) e o número máximo de alocações dos encontros de cada disciplina por dia (*ed*) igual a 1 para todas as disciplinas.

4. Determinar a sala compatível para cada encontro (*rc*) sendo já dada a alocação dos horários, respeitando as restrições de conflito para as salas, havendo aulas em bloco e requerendo-se portanto a alocação dos encontros destas numa mesma sala (*rb*). Sem as restrições *rb* o problema é polinomial. Também é polinomial sem as restrições *rc*, mesmo com as restrições *rb*.

5. Determinar a alocação dos horários, dada a alocação dos grupos de alunos para as turmas, respeitando as restrições de conflito para os grupos de alunos e para os professores, as restrições na disponibilidade de tempo dos professores, e aulas em bloco alocadas em horários consecutivos (*bt*). O problema é NP-completo mesmo se há somente um grupo de alunos.

6. Determinar a alocação dos grupos de alunos para as turmas das disciplinas respeitando as restrições sobre o tamanho das turmas (*ss*). Sem estas restrições o problema é trivial.

7. Determinar a alocação dos grupos de alunos para as turmas das disciplinas, dada uma alocação dos horários, respeitando as restrições sobre o tamanho das turmas (*ss*) e as restrições de conflito para os grupos de alunos. Sem as restrições *ss* o problema é polinomial.

Nos subproblemas onde já foi dada uma alocação dos grupos de alunos para as turmas, respeitar as restrições de conflito para os grupos de alunos e turmas corresponde a respeitar as restrições de conflito para subturmas, união de turmas e classes na nossa definição do Problema Automação de Horários Escolares. E se a prova da NP-completude destes não exige a possibilidade de haver diferentes professores para as aulas de uma disciplina em uma turma podemos usá-las em relacionados subproblemas do Problema Automação de Horários Escolares.

O primeiro subproblema não trás qualquer novidade.

O segundo se compara ao Problema do Horário Escolar com Subturmas e União de Turmas, pois já foi dada a alocação dos grupos de alunos para as turmas. Só que neste subproblema não há restrições de conflito para professores. Daí, sabemos que o Problema do Horário Escolar com Subturmas e União de Turmas sem restrições de conflito para professores é ainda NP-completo.

A prova da NP-completude do segundo problema é de Cooper e Kingston (1996). Mediante uma redução do Problema de K-Colorabilidade de um Grafo, problema NP-completo, até o caso especial onde há grupos de alunos com apenas duas disciplinas em seu currículo, cada disciplina tem apenas uma aula e determina apenas uma turma. Cada vértice do grafo é associado a única aula de uma disciplina. Cada aresta é associada a um grupo de alunos, cujas disciplinas correspondentes aos vértices desta formam seu currículo. O número de cores usado para coloração dos vértices deve ser menor ou igual a K, o número de horários.

A NP-completude do terceiro subproblema é dada por Willemen usando uma redução polinomial do seguinte problema ao Subproblema com *ed*.

Definição 3.6 (Multiple choice matching with partitioned vertex sets (MCMPVS))**.** Uma instância de MCMPVS é dada por um grafo bipartido $G(L,T,E)$, uma partição do conjunto de vértices L em $L_1,\ldots,L_q$ conjuntos, uma partição do conjunto de vértices T em $T_1,\ldots,T_n$ conjuntos, e uma partição do conjunto de arestas E em $q \cdot n$ conjuntos $E_{ij} = (L_i \times T_j) \cap E$. O objetivo é encontrar um emparelhamento $M \subset E$ tal que

- $\forall l \in L$, $\exists t \in T$ tal que $(l,t) \in M$ e
- $\forall i = 1,\ldots,q, \forall j = 1,\ldots,n,\ |E_{ij} \cap M| \leq 1$.

Como é possível verificar se um emparelhamento satisfaz as condições citadas acima para uma instância de MCMPVS em tempo polinomial, trata-se de um problema $\mathscr{NP}$. E como é dada uma prova de que SAT $\propto$ MCMPVS, o problema MCMPVS é NP-completo.

Para provar a redução MCMPVS $\propto$ (Subproblema com *ed*) basta associar cada vértice em L a uma aula, as aulas correspondentes aos vértices do conjunto L_i a uma mesma disciplina da turma, cada t a um horário, T_j ao conjunto de horários de um dia, e as arestas entre l e t indicam a disponibilidade de tempo do professor da aula representada para o horário t. Qualquer emparelhamento num grafo bipartido cujo segundo conjunto de vértices é T, conjunto de horários, respeitará qualquer restrição de conflito. Além disso, o emparelhamento requerido em MCMPVS usa todos os $l \in L$, garante a alocação de todas as aulas, e no máximo uma aresta em E_{ij}, uma alocação para uma disciplina num dia. Observe que os professores de duas aulas de uma mesma disciplina da turma devem ser diferentes, conforme sejam diferentes os vizinhos $\Gamma(\{l\}) \neq \Gamma(\{l'\})$ dos vértices representantes destas aulas l e $l' \in L_i$, para algum i.

De fato a prova da redução polinomial SAT $\propto$ MCMPVS determina a construção de uma instância de MCMPVS para qualquer instância do problema SAT, usando $\Gamma(\{l\}) \neq \Gamma(\{l'\})$, para quaisquer dois vértices l e $l' \in L_i, \forall i = 1, \ldots, q$. Assim, este terceiro subproblema e a prova de sua NP-completude não podem acrescentar nada a respeito do Problema Automação de Horários Escolares, por definição.

O quarto subproblema corresponde a um subproblema do Problema Automação de Horários Escolares de forma direta. As demonstrações, da NP-completude e dos casos polinomiais, são dadas por Carter e Tovey (1992).

No quinto problema temos novamente a alocação dos grupos de alunos para as turmas a priori. A prova é dada por Ten Eikelder e Willemen (2001). Prova-se que o problema "Bipartite Matching with Relations" (BMR) é NP-completo por uma redução: 3SAT $\propto$ MBR; e que MBR é um caso especial do subproblema.

O quinto subproblema com apenas um grupo de alunos corresponde a determinar a alocação de horários de uma classe respeitando as restrições de conflito para a classe, para os professores, as restrições na disponibilidade de tempo dos professores, e aulas em bloco alocadas em horários consecutivos. Sem esta última restrição, basta construir o grafo bipartido $G(L, T, E)$, com os vértices de L representando as aulas, os vértices de T os horários, as arestas em E as possíveis alocações (respeitando as disponibilidades) da aula l para o horário t, e encontrar um emparelhamento que cubra todos os vértices em L.

Há uma redução polinomial do Problema de Empacotamento ("Bin Packing") ao sexto subproblema para as turmas de uma disciplina. Assim o sexto subproblema é NP-completo como o de Empacotamento.

O sétimo subproblema da lista foi provado por Ten Eikelder e Willemen (2001). Prova-se que o problema "Multiple Bipartite Matching with Maxima" (MBMM) é NP-completo e um caso especial do sétimo subproblema.

Estes dois últimos subproblemas não possuem ligação com o nosso Problema Automação de Horários Escolares.

Assim, do que tratamos na seção 2.5 e nesta seção, temos que: as restrições de conflito para professores e turmas (i e ii), na disponibilidade de tempo dos elementos (iii), restrições determinando que havendo duas aulas num dia de uma mesma disciplina e turma sejam geminadas (vi), restrições de conflito relativas a subturmas e união de turmas (ix e x), restrições relativas a alocação de salas possíveis (xiii) e se para aulas geminadas sendo salas iguais (xiv); são fatores para a complexidade do Problema Automação de Horários Escolares.

Outro trabalho da mesma época que trata da complexidade do problema de automação de horários escolares com certas restrições (especialmente com relação a (in)disponibilidades de tempo) é o artigo [dW02] de Dominique de Werra. Ele apresenta STP como um problema de reconstrução de imagens em tomografia, relacionando os resultados de complexidade dos dois problemas. Formulações com coloração de arestas são bastante usadas. Um dos resultados é que STP sem restrições de tempo e com pré-alocações é NP-completo. STP sem restrições de tempo e: com máximo número de aulas por horário devido ao número de salas disponíveis no mesmo, ou exclusivamente, com aulas seqüenciais são também provados NP-completos.

Daí, podemos acrescentar à nossa lista de fatores para a complexidade do Problema Automação de Horários Escolares as restrições relativas a alocação estática (xii) e conflito para

salas (iv). E sabemos que, mesmo que todas as salas sejam compatíveis com todas as aulas e as disponibilidade de tempo sejam completas para todos, se há um número máximo de salas que podem ser usadas por horário, então o problema de determinar os horários sem conflito para professores e classes respeitando estes máximos é ainda NP-completo.

3.6 Subproblemas polinomialmente solúveis

Definição 3.7 (Subproblema com α_{cm})**.** Dados: C o conjunto de classes, M o conjunto de matérias, E o conjunto com todos os encontros letivos das matérias de cada classe, P o conjunto de professores e H o conjunto de horários .

Seja $H_c \subset H$ o conjunto de horários letivos da classe c e $H_p \subset H$ o conjunto de horários disponíveis do professor p.

Seja $E_{cm} = \{e^1_{cm}, \ldots, e^{r_{cm}}_{cm}\}$ o conjunto dos r_{cm} encontros que a matéria m deve ter na classe c, com um número máximo de encontros diários α_{cm}. Denotamos o professor da matéria m na classe c por p_{cm}.

Encontrar uma solução para este subproblema é determinar para cada encontro $e \in E$ o horário h_e em que deve ocorrer, um horário possível (iii), respeitando as restrições de conflito para classes (ii), e o número máximo de encontros diários (v).

O Subproblema com *ed* no caso onde as aulas de uma disciplina para uma turma são dadas pelo mesmo professor, denotemos por *Subproblema com ed e 1pt*, é um caso especial do Subproblema com α_{cm}. Visto que com um grupo de alunos há apenas a alocação deste para as únicas turmas correspondentes às disciplinas em seu currículo. Estas turmas são portanto idênticas e podem ser consideradas uma, uma classe c'. As demais restrições correspondem às apresentadas aqui, considerando que $H_{c'} = H$.

Provaremos que:

Teorema 3.1. *O Subproblema com α_{cm} é polinomialmente solúvel.*

Como o (Subproblema com *ed* e *1pt*) $\propto$ (Subproblema com α_{cm}), temos:

Corolário 3.1. *O Subproblema com ed e 1pt é polinomialmente solúvel.*

Demonstração. Para provarmos que o Subproblema com α_{cm} é polinomialmente solúvel vamos provar que há uma redução deste a um problema de Máximo Fluxo.

Denotamos por $H_d \subset H$ os horários contidos em um dia d, e por d_h o dia do horário $h \in H$.

Seja $H(V,A)$ um grafo formado pelos vértices:

- s e t, os vértices distinguidos,
- os vértices (c,m) em V_{CM}, um vértice para cada matéria m de cada classe c,
- os vértices (c,m,d) em V_{CMD}, um para cada dia possível para as aulas de m em c,
- os vértices (c,h) em V_{CH}, um para cada horário $h \in H_c$.

E as arestas, em A, são dirigidas e dadas por:

- uma aresta $s(c,m)$ para cada (c,m), com $u_{s(c,m)} = r_{cm}$,
- uma aresta $(c,m)(c,m,d)$ para cada (c,m,d), com $u_{(c,m)(c,m,d)} = \alpha_{cm}$,
- uma aresta $(c,m,d)(c,h)$ para cada $h \in H_{p_{cm}} \cap H_d \cap H_c$, com $u_{(c,m,d)(c,h)} = 1$,
- uma aresta $(c,h)t$ para cada (c,h), com $u_{(c,h)t} = 1$ e
- uma aresta de retorno ts, com $u_{ts} = \infty$.

E o limite inferior $l_a = 0$, $\forall a \in A$. O problema de Fluxo Máximo consiste em encontrar um fluxo viável $x = (\ldots, x_a, \ldots)$ inteiro de máximo valor. Isto é, com $l_a \leq x_a \leq u_a$ e havendo conservação do fluxo:

$$\forall v \in V, \sum_{\forall u \in V,\ uv \in A} x_{uv} - \sum_{\forall w \in V,\ vw \in A} x_{vw} = 0.$$

Um limite superior para o valor do fluxo, x_{ts}, é dado por $\sum_{\forall (c,m) \in V_{CM}} r_{cm}$.

Observe a figura 3.1. Nesta figura está representada apenas uma turma c_1. Havendo mais turmas, teríamos estruturas semelhantes, uma ao lado da outra, tantas quanto o número de turmas, ligadas aos vértices distinguidos s e t, mais a aresta de retorno.

Afirmamos que qualquer solução para o Subproblema com α_{cm} pode ser mapeada polinomialmente até um fluxo máximo neste grafo com valor $\sum_{\forall (c,m) \in V_{CM}} r_{cm}$. E vice-versa.

Para encontrarmos o fluxo máximo, dada uma solução do Subproblema com α_{cm}, basta que para cada encontro e^k_{cm} de m em c, $\forall k = 1, \ldots, r_{cm}$, e seu horário h_e (possível para a aula: $h \in H_{p_{cm}} \cap H_c$) dado pela solução façamos

$$x_{(c,m,d_{h_e})(c,h_e)} = 1,$$

os valores de x_a com a entre V_{CMD} e V_{CH} não usados na alocação de horários devem ter $x_a = 0$ e os demais valores de x_a serão dados pela necessidade de manter a conservação de fluxo em cada vértice. O fluxo terá valor $\sum_{\forall (c,m) \in V_{CM}} r_{cm}$, pois é o número de alocações da solução.

Verifiquemos que dado um fluxo máximo para o gráfico $H(V,A)$ com valor $\sum_{\forall (c,m) \in V_{CM}} r_{cm}$ obtemos uma solução para nosso problema alocando os encontros de m em c nos horários h onde $x_{(c,m,d)(c,h)} = 1$. A demanda para cada disciplina m de cada classe c será satisfeita pois $s(c,m)$ terá valor r_{cm}, pela conservação de fluxo ($x_{ts} = \sum_{\forall (c,m) \in V_{CM}} r_{cm}$). Também pela conservação de fluxo não haverá conflito para as classes dadas as capacidades $u_{(c,h)t} = 1$. Por construção, qualquer aresta entre V_{CMD} e V_{CH} representa uma alocação para um horário possível para o encontro. E principalmente, foi respeitada a restrição sobre o número máximo de encontros diários α_{cm} de uma matéria m de uma classe c, graças a conservação de fluxo junto ao fato de que cada vértice $(c,m,d) \in V_{CMD}$ é alvo de uma única aresta $(c,m)(c,m,d)$ com $u_{(c,m)(c,m,d)} = \alpha_{cm}$.

Temos uma redução do Subproblema com α_{cm} até um problema de Máximo Fluxo, um problema polinomial. Logo, o Subproblema com α_{cm} é um problema polinomial. □

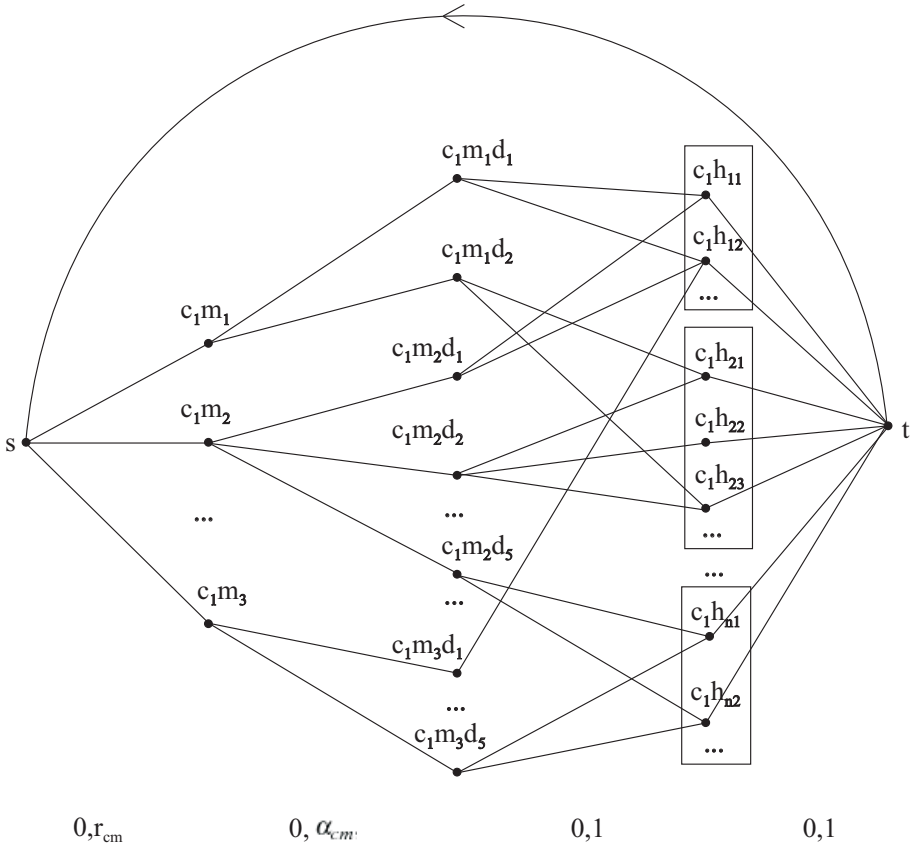


Figura 3.1 Grafo representando um Subproblema com α_{cm}. Nesta figura está representada apenas uma turma c_1. Havendo mais turmas, teríamos estruturas semelhantes, tantas quanto as turmas, ligadas aos vértices distinguidos s e t. Os pares de valores (l_a, u_a) abaixo das colunas de arestas são os limite inferior e capacidade de cada aresta a da coluna, exceto para aresta de retorno ts (com $0, \infty$). As arestas são dirigidas da esquerda para direita, exceto a aresta de retorno ts.

Usando semelhante idéia podemos provar que:

Teorema 3.2. *O problema MCMPVS com* $\Gamma(\{l\}) = \Gamma(\{l'\}) \ \ \forall l$ *e* $l' \in L_i, \forall i = 1, \ldots, q$ *é um problema polinomialmente solúvel.*

Demonstração. Há uma redução polinomial deste problema, com $G(L,T,E)$, até o problema de Máximo Fluxo no grafo dado por:

Seja um grafo formado pelos vértices:

- s e s', os vértices distinguidos,
- os vértices L_i, para cada parte de L,
- os vértices (L_i, T_j), se $\exists l \in L_i, t \in T_j$ tal que $lt \in E$
- os vértices $t_k \in T$.

E as arestas são dirigidas e dadas por:

- uma aresta sL_i para cada L_i, com $u_{sL_i} = |L_i|$,
- uma aresta $L_i(L_i, T_j)$ para cada (L_i, T_j), com $u_{L_i(L_i,T_j)} = 1$,
- uma aresta $(L_i, T_j)t_k$ para cada $t_k \in T_j$ tal que $\exists l \in L_i, lt_k \in E$, com $u_{(L_i,T_j)t_k} = 1$,
- uma aresta $t_k s'$ para cada $t_k \in T$, com $u_{t_k s'} = 1$ e
- uma aresta de retorno $s's$, com $u_{s's} = \infty$.

Veja o exemplo na figura 3.2.

Observe que, como $\Gamma(\{l\}) = \Gamma(\{l'\}) \ \ \forall l$ e $l' \in L_i, \forall i = 1, \ldots, q$ em $G(L,T,E)$, a escolha das $|L_i|$ arestas $(L_i, T_j)t_k$ dadas pelo fluxo determina os vértices t_k que serão associados aos vértices $l \in L_i$ numa ordem qualquer num emparelhamento M para $G(L,T,E)$ sem prejuízo algum, garantindo que $\forall \ T_j$ no máximo um $t_k \in T_j$ foi escolhido para L_i (pela conservação de fluxo). E um fluxo neste grafo, dada uma solução M para $G(L,T,E)$, é obtido fazendo $x_{(L_i,T_j)t_k} = 1$ se $\exists l \in L_i, lt_k \in M$; $x_{(L_i,T_j)t_k} = 0$ caso contrário; e os demais valores de x serão dados pela conservação do fluxo. □

Se trocarmos as restrições de conflito para classes por restrições de conflito para professores no Subproblema com α_{cm}, denotemos por Subproblema 2 com α_{cm}, temos que:

Teorema 3.3. *O Subproblema 2 com* α_{cm} *é polinomialmente solúvel.*

Demonstração. A prova é análoga a dada para o Subproblema com α_{cm} usando o grafo $H'(V', A')$.

Seja $H'(V', A')$ um grafo formado pelos vértices:

- s e t, os vértices distinguidos,
- os vértices (c,m) em V'_{CM}, um vértice para cada matéria m de cada classe c,

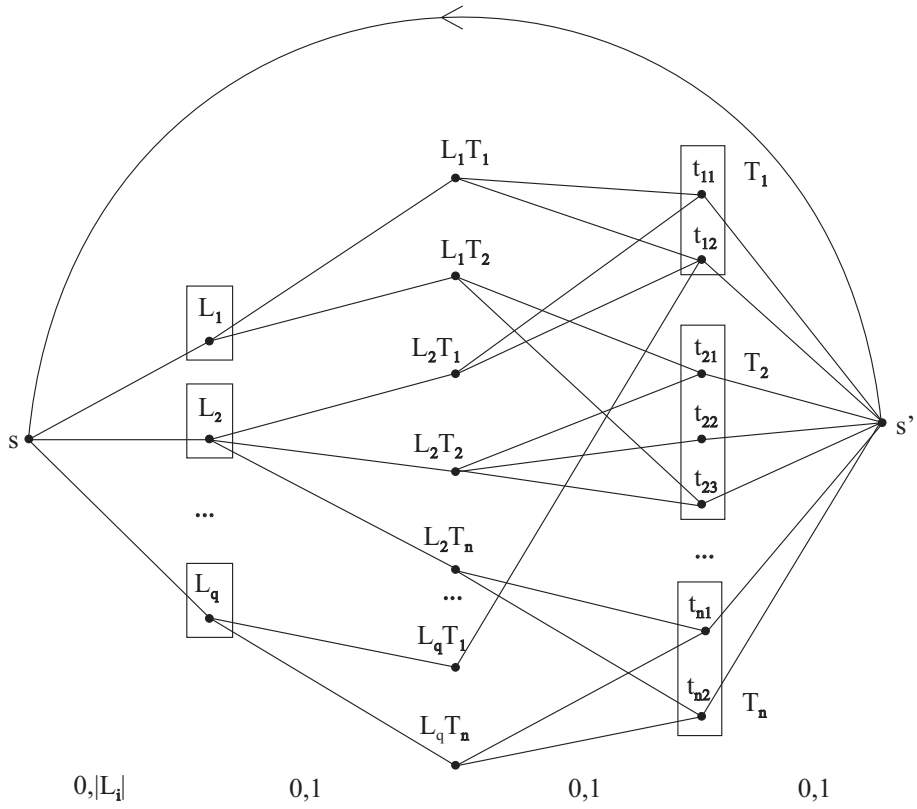


Figura 3.2 Grafo associado a um exemplo de MCMPVS com $\Gamma(\{l\}) = \Gamma(\{l'\}) \quad \forall l$ e $l' \in L_i, \forall i = 1, \ldots, q$. Os pares de valores (l_a, u_a) abaixo das colunas de arestas são os limite inferior e capacidade de cada aresta a da coluna, exceto para aresta de retorno $s's$ (com $0, \infty$). As arestas são dirigidas da esquerda para direita, exceto a aresta de retorno $s's$.

- os vértices (c,m,d) em V'_{CMD}, um para cada dia possível para as aulas de m em c,
- os vértices (p,h) em V'_{PH}, um para cada horário $h \in H_p$.

E as arestas, em A', são dirigidas e dadas por:

- uma aresta $s(c,m)$ para cada (c,m), com $u_{s(c,m)} = r_{cm}$,
- uma aresta $(c,m)(c,m,d)$ para cada (c,m,d), com $u_{(c,m)(c,m,d)} = \alpha_{cm}$,
- uma aresta $(c,m,d)(p_{cm},h)$ para cada $h \in H_c \cap H_d \cap H_{p_{cm}}$, com $u_{(c,m,d)(p_{cm},h)} = 1$,
- uma aresta $(p,h)t$ para cada (p,h), com $u_{(p,h)t} = 1$ e
- uma aresta de retorno ts, com $u_{ts} = \infty$.

As arestas que mais interessam são as $(c,m,d_{h_e})(p_{cm},h_e)$ entre V_{CMD} e V_{PH} que possuem $x_{(c,m,d_{h_e})(p_{cm},h_e)} = 1$, correspondentes a alocação dos encontros $e \in E_{cm}$ nos horários h_e. □

A mudança ocorre no último conjunto de vértices, na última coluna, de (c,h) para (p,h). E visualmente percebe-se que não teremos estruturas independentes para cada classe, como no Subproblema com α_{cm}, com apenas os vértices s e t em comum. Um vértice (p,h) será alvo de arestas partindo de cada (c,m,d_h) onde p ensina m para c (turma que dispõe o horário h). Lembramos que p pode ensinar várias turmas e matérias diferentes de uma mesma turma. Veja Figura 3.3

Os subproblemas do Problema Automação de Horários Escolares referidos aqui, Subproblema com α_{cm} e Subproblema 2 com α_{cm}, polinomialmente solúveis, têm maior valor teórico que prático, visto que suas soluções podem apresentar conflitos para professores ou para classes, respectivamente.

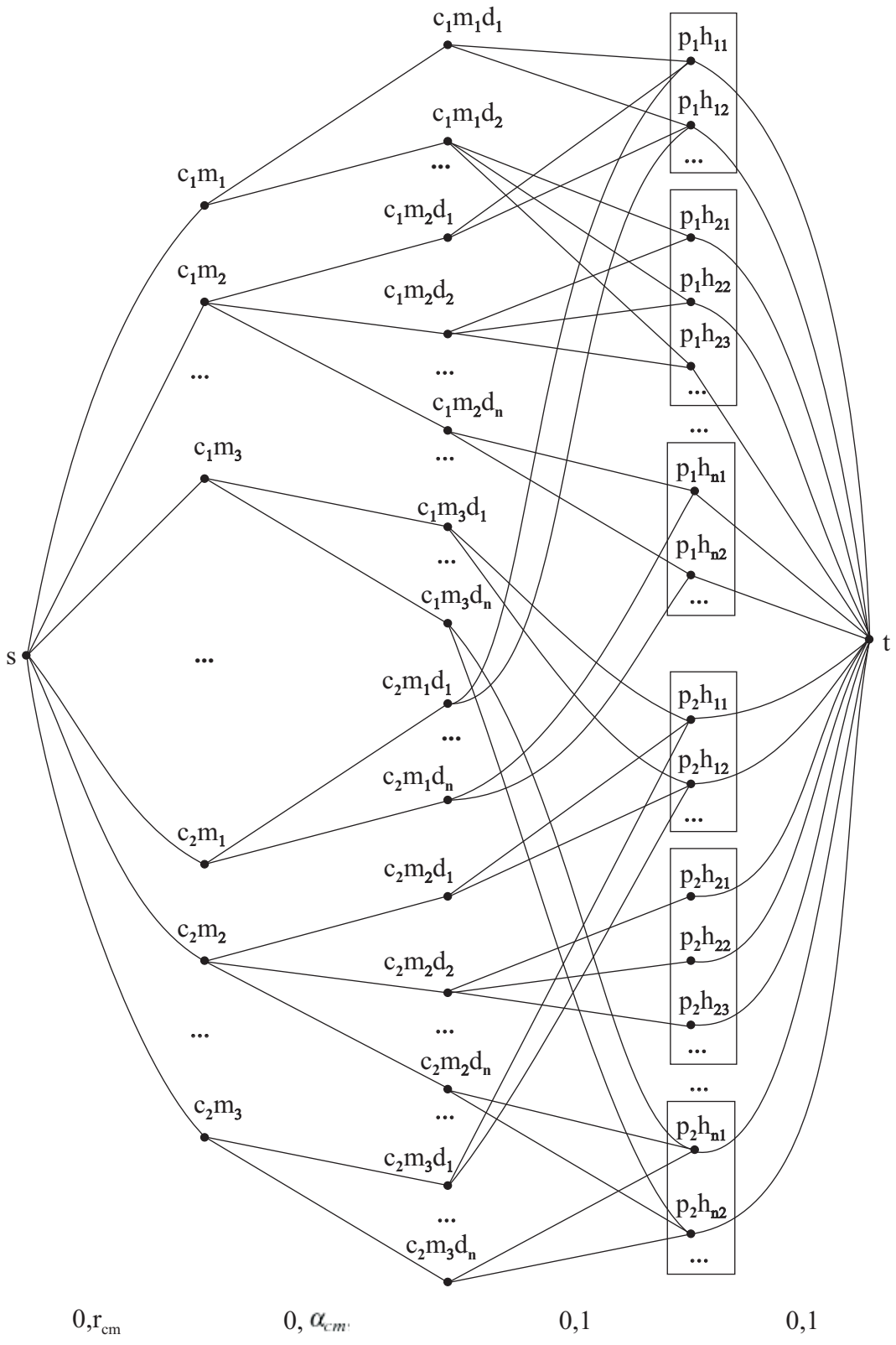


Figura 3.3 Grafo representando um Subproblema 2 com α_{cm}. Os pares de valores (l_a, u_a) abaixo das colunas de arestas são os limite inferior e capacidade de cada aresta a da coluna. As arestas são dirigidas da esquerda para direita, exceto a aresta de retorno ts não representada.

CAPÍTULO 4

O modelo matemático com Programação Linear Inteira

Optamos por modelar também com Programação Matemática Inteira (IP) a busca por uma solução viável do nosso Problema Automação de Horários Escolares.

Otimizadores foram desenvolvidos ao longo dos anos para trabalhar com Programação Matemática. O fato deles conterem algoritmos como Branch and Bound, Cutting Plane e heurísticas, permitem a execução de modelos para algumas instâncias de problemas NP-completos, instâncias com um tamanho "razoável" [Wol98].

Uma interessante discussão acontece nos últimos tempos com relação ao tamanho de problemas que podem ser resolvidos usando uma "formulação linear de tamanho limitado polinomialmente" para problemas inteiros. Veja [Hof06] e [Dia07].

Apesar de ser um problema de busca, optamos por descrevê-lo como um problema de otimização, cujo objetivo, maximizar o número de alocações, é satisfazer a demanda total de aulas. Sendo possível chegar a um resultado que satisfaz todas as restrições que consideramos em nosso modelo mas é uma solução parcial quanto à demanda, não havendo uma total. Neste caso, a solução parcial nos dá uma percepção de quais dados de entrada poderiam ser alterados para permitir a existência de uma solução completa. Especialmente, os dados referentes às disponibilidades de tempo dos professores.

Optamos por não descrever nosso problema completo, com as características desejáveis também, porque a execução do programa levaria tempo demais, um tempo não admissível para nós. A solução inicial encontrada por este método (ou, opcionalmente, por uma heurística) será ponto de partida para um método de aproximação de uma solução ótima.

4.1 Alguns modelos matemáticos anteriores com IP

A idéia de descrever o problema com uma formulação matemática inteira não é uma novidade. Como vimos na seção 2.3, o próprio **Gotlieb** propôs uma tal formulação usando variáveis binárias ([CG64]). As variáveis usadas por nós são também todas binárias.

Marcone J. F. Souza, em [Sou00], dá um modelo de programação matemática para um problema de automação de horários escolares cujas restrições de viabilidade são: o atendimento às demandas, as restrições de conflito para professores e classes (correspondem a i e ii), o respeito às disponibilidades de tempo (iii), ao número máximo diário de encontros de uma disciplina numa turma (v), sendo este 2 ou 1 (no caso de Educação Física); e tem como características desejáveis minimizar: o número de janelas no quadro dos professores, o número de dias trabalhados por cada, e o não atendimento ao número mínimo requerido de aulas geminadas. A

função objetivo deste problema de otimização é dada por uma expressão linear no número de janelas, número de dias trabalhados e número de aulas geminadas faltando para alcançar o mínimo requerido (função que deve ser minimizada). Os coeficientes da função objetivo usados nos testes foram, respectivamente, 3, 9 e 1.

Observe que neste problema são permitidos encontros não geminados num dia de aula se seu número não supera o máximo diário de encontros da disciplina na turma.

As principais variáveis usadas são

$$x_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } i \text{ é alocado à turma } j \text{ no dia } k \text{ e horário diário } l; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As demais tem seu valor obtido destas.

Lá é mostrado também como formular restrições referentes a duas aulas simultâneas.

O modelo foi implementado utilizando o modelador e otimizador Xpress-MP versão 1.1, com a opção de estratégia de corte automático ativada. Os testes deste modelo foram realizados num microcomputador Pentium-III, 600 MHz, de 256 MB de memória RAM, com sistema operacional Linux. E os resultados apresentados foram os melhores obtidos após 12 horas de processamento, quando eram interrompidos, em 7 casos diferentes. Em três deles sequer uma solução viável foi encontrada, problemas com 12, 13 e 20 turmas. Um caso com 14 turmas teve uma 1ª solução viável encontrada após aproximadamente 10 horas e 45 minutos. Os demais casos possuíam número de turmas menor ou igual a 8.

O autor também se dedicou a vários modelos heurísticos, entre os quais destacamos o uso da meta-heurística Busca Tabu. Falaremos mais sobre seu trabalho no capítulo seguinte.

Em [dS06], **Vânia N. de Sousa** mostra duas formulações para outro problema de automação de horários escolares. O problema considera como restrições para a viabilidade: o atendimento às demandas, as restrições de conflito para professores (i), para classes (ii), as restrições relativas a disponibilidade de tempo (iii) e restrições ao número máximo diário de encontros de uma disciplina numa turma (v) com valor máximo 2 para todas. As características desejáveis neste problema são:

- dias de aula de uma disciplina numa turma alternados,
- evitar janelas no quadro de horários dos professores,
- evitar em cada horário tenha mais aulas de Educação Física do que número de quadras da instituição,
- evitar que aulas de uma mesma disciplina num dia sejam separadas por aulas de outras disciplinas,
- atender um número mínimo de aulas duplas requeridas por um professor a uma turma,
- minimizar o número de dias que um professor ensina.

Também tem a entrada para cada professor e horário de um valor, indicando suas preferências por horário de trabalho. E deseja-se atender a estas tanto quanto possível.

A primeira característica desejável se assemelha a nossa nº 2, contudo nossa definição de espalhamento ruim é menos restritiva com disciplinas cujas aulas precisam ser dadas em pelo menos três dias (por exemplo, disciplinas com número de aulas igual a 5 e máximo diário 2), não considerando espalhamento ruim um par de dias vizinhos onde ocorrem aulas da disciplina se há apenas uma aula num destes.

O terceiro item é justificado como característica desejável pela concepção de que o número de aulas de Educação Física excedente ao número de quadras é dado de forma teórica na sala da turma.

Os ítens quarto e quinto são em nosso modelo considerados restrições para a viabilidade. No segundo modelo de Vânia também, e portanto deixam a lista de características desejáveis. Mas no primeiro modelo, uma solução final pode ter para uma turma num dia duas aulas de uma mesma disciplina separadas por várias outras.

Os modelos de Vânia trabalham com número exato de horários disponíveis para uma turma igual ao número de aulas desta, e usa restrições para indicá-los no conjunto total de horários. Como o modelo foi elaborado para no máximo uma disciplina de um professor por turma, professores que lecionam mais de uma são modelados junto a professores "falsos", que são considerados nas restrições deste.

Os dois modelos apresentados diferem na escolha das variáveis e, como conseqüência, no conjunto de restrições matemáticas. Em ambas formulações trata-se de um problema de otimização, cujo objetivo é minimizar o valor da função objetivo que descreve o não atendimento, ou a distância ao atendimento, das características desejáveis descritas, em expressões lineares que associam um peso a cada parcela relativa a cada característica. Os experimentos apresentados usaram peso igual a 1 para todas as características (do modelo) exceto a característica relativa ao número de janelas, com peso 19.

As principais variáveis no primeiro modelo são

$$x_{ptdh} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ dá aula para a turma } t \\ & \text{iniciando no horário de aula } h \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As demais variáveis são auxiliares e têm seu valor definido através do valor destas, mediante restrições.

No segundo modelo as principais variáveis são

$$x_{ptdh} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ dá } \textit{aula dupla} \text{ para a turma } t \\ & \text{iniciando no horário de aula } h \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_{ptdh} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ dá } \textit{aula simples} \text{ (unitária)} \\ & \text{para a turma } t \text{ no horário de aula } h \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Variáveis que se relacionam da seguinte forma: o número de aulas duplas ministrado pelo professor p para a turma t durante a semana deve ser exatamente o número mínimo requerido,

e o número de aulas simples exatamente o restante para completar a demanda de aulas; além disso, para cada *dh* garante-se que no máximo uma das variáveis

$$\begin{array}{rl} y_{ptdh}, & \\ x_{ptdh}, & \text{se } h \text{ não é o último do dia } d, \text{ e} \\ x_{ptd(h-1)}, & \text{se } h \text{ não é o primeiro do dia } d, \end{array}$$

terá valor 1, evitando assim sobreposições de aulas iguais. As demais variáveis são auxiliares e têm seu valor definido através do valor destas, mediante restrições.

As restrições que tratam de conflito para professores e turmas garantem ao mesmo tempo a não sobreposição de aulas iguais. Isto ficará mais claro na seção sobre nossas restrições, pois em nosso modelo usamos variáveis semelhantes que também representam aulas simples e duplas.

O segundo modelo apresentado possui um menor número de variáveis e restrições que o primeiro. Algumas variáveis auxiliares e restrições relacionadas a elas tornaram-se desnecessárias na presença das variáveis de aula dupla. E os experimentos mostraram maior eficiência do segundo modelo em relação ao primeiro.

Nos experimentos em [dS06] foi utilizado o modelador e otimizador Xpress-MP versão 1.6 com as funções de pré-processamento e estratégia de corte ativadas. Com a execução sendo interrompida após 6 horas de processamento, retornando a melhor solução obtida até então. Apenas um experimento com 3 turmas (do turno noturno de uma escola) obteve solução ótima, em torno de 45 minutos. Motivo pelo qual, métodos heurísticos foram investigados pela autora, incluindo Busca Local Aleatória e Busca Tabu.

Para maior clareza do contexto: os experimentos citados foram realizados em um microprocessador Pentium 4, 1.9 GHz, de 384 MB de RAM, com sistema operacional Microsoft Windows XP.

4.2 Nosso modelo

Nosso problema foi descrito no Capítulo 3. E na seção 3.3 delimitamos o que nosso modelo trata. Mas em resumo podemos dizer que temos por tarefa: determinar o professor e a sala do encontro, quando necessário, e determinar o horário *de cada* encontro; satisfazendo as restrições i a xvi mais a restrição xviii, e buscamos minimizar o não atendimento das características desejáveis de 0 a 6. Ficando de fora as restrições relativas a existência de mais de uma sede (xix e xx) e a restrição xvii, por considerarmos que a Direção da escola determina a priori que sala pertence a que turma, e algumas aulas requerem salas especiais.

Aqui nosso objetivo é encontrar uma solução viável inicial, portanto não trataremos de características desejáveis em nosso modelo com IP. Essa decisão é estratégica haja visto que o tempo de processamento para encontrar uma solução viável é extremamente menor. E acreditamos ter boas ferramentas para encontrar soluções melhores a partir desta.

Como já foi dito anteriormente, o modelo aplica-se a quadros de horários (da instituição) onde não há intersecção entre os intervalos de tempo correspondentes aos horários letivos, podendo existir dias com diferentes intervalos de tempo correspondendo a seus horários letivos, e dia com maior número de horários letivos que outro.

Consideramos que há um intervalo (“recreio”) entre dois horários letivos de um dia se a distância em minutos entre estes é maior que 0 e menor que 30 minutos (em geral está entre 10 e 20 minutos), e que há uma mudança de turno se é maior ou igual aos 30 minutos.

4.2.1 Dados

Os dados necessários são:

- H, o conjunto de horários letivos;
- D, o conjunto de índices d dos dias de aula da instituição;
- os H_d, $\forall d \in D$, dão uma partição de H em conjuntos de horários diários;
- $H'_d \subseteq H_d$, o conjunto de horários anteriores a mudanças de turno num dia d;
- C, o conjunto de classes: padrão, subconjunto C', ou turmas especiais, subconjunto C'';
- M, o conjunto de matérias;
- P, o conjunto de professores;
- S, o conjunto de salas especiais;
- G, o conjunto de grupos de aulas simultâneas;
- A, o conjunto de encontros com alocação estática;
- B, o conjunto de professores que necessitam de substituição;
  C'', S, G, A e B possivelmente vazios;
- $\forall c \in C'$, $H_c \subseteq H$ o conjunto de horários letivos da classe c;
- $\forall p \in P$, $H_p \subseteq H$ o conjunto de horários disponíveis do professor p;
- $\forall s \in S$, $H_s \subseteq H$ o conjunto de horários disponíveis da sala especial s;

- $\forall c \in C$, $\forall m$ de c, são dados:
  - r_{cm}, o número dos encontros que a matéria m deve ter na classe c,
  - α_{cm}, o número máximo de encontros diários,
  - δ_{cm}, o número mínimo de aulas geminadas semanais,
  - $S_{cm} \subseteq S$, o conjunto de possíveis salas especiais para os encontros de m em c,
  - $P_{cm} \subseteq P$, $P_{cm} \neq \emptyset$, o conjunto de possíveis professores para lecionar os encontros de m em c;

- $\forall p \in P$, são dados:
  - α_p, o número máximo de encontros diários,
  - β_p e γ_p, os seus mínimo e máximo número de encontros semanais;
- $\forall p \in B$,
  - L_p, o conjunto de disciplinas das turmas de p que precisam de substituto, e
  - f_p, a função que determina o professor substituto para cada uma destas disciplinas;
- $\forall c \in C'$,
  - ST_c, o conjunto de subturmas da classe padrão c,
  - UT_c, o conjunto de uniões de turmas que envolvem a classe padrão c,
  - $\forall c_i \in ST_c : UT_{c_i}$, o conjunto de uniões de turmas que envolvem a subturma c_i de c.

Lembramos que não há restrições quanto ao número de classes padrão e (ou) subturmas que formam uma união de turmas. Contudo, uma união de turmas não deve conter uma classe padrão e uma subturma da mesma, uma sobreposição. Daí,

$$\forall c_i \in ST_c,\ UT_{c_i} \cap UT_c = \emptyset.$$

Quanto ao mais, tudo é permitido, inclusive $UT_{c_i} \cap UT_{c_j} \neq \emptyset$, para algum $\{c_i, c_j\} \in ST_c$. Isto é, alguma união de turmas contendo subturmas de uma mesma turma.

Mantemos aqui a notação usada no Capítulo 3, e acrescentamos mais algumas. A entrada do programa que implementa o modelo não é exatamente assim, uma lista. No momento apropriado falaremos da implementação. Por hora, informamos que foi usada a linguagem Java, uma linguagem de programação orientada a objetos, e de dentro do projeto nesta linguagem foi chamada a biblioteca Xpress Builder Library BCL e a biblioteca do Xpress-Optimizer, para construir e executar o modelo. Isto nos permitiu aliar programação em alto nível com controle dos dados e a funcionalidade do Xpress-MP.

4.2.2 Variáveis

Os índices d e h correspondem aqui a identificação do dia de um horário letivo e de sua posição na lista de horários do dia, respectivamente. Portanto a identificação de um horário aqui será dada pelos dois índices: o horário h do dia d, ou o horário dh.

Para não pesar a notação, a posição seguinte à posição h de um dia, $h+1$, será denotada aqui por h'.

As variáveis são:

- $\forall c \in C$,

  $\forall m$ de c com $r_{cm} - \delta_{cm} \cdot \alpha_{cm} > 0$,

  $\forall p \in P_{cm}$ e

$\forall\ dh \in H_c \cap H_p$ se $S_{cm} = \emptyset$ ou $\exists s \in S_{cm},\ dh \in H_s$.

$$x_{cmpdh} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ leciona a matéria } m \\ & \text{para a turma } c \text{ no horário } h \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $\forall c \in C$,

  $\forall m$ de c com $\alpha_{cm} = 2$,

  $\forall p \in P_{cm}$ e

  $\forall\ dh \in (H_d - H'_d) \cap H_c \cap H_p$ se $dh' \in H_c \cap H_p$ e se $S_{cm} = \emptyset$ ou $\exists s \in S_{cm},\ \{dh, dh'\} \subseteq H_s$.

$$x'_{cmpdh} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ dá } \textit{aulas geminadas} \text{ da matéria} \\ & m \text{ para a turma } c \text{ nos horários } h \text{ e } h' \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $\forall c \in C$,

  $\forall m$ de c com $|P_{cm}| > 1$ e

  $\forall p \in P_{cm}$.

$$y_{cmp} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ leciona a} \\ & \text{matéria } m \text{ para a turma } c; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $\forall c \in C$,

  $\forall m$ de c com $r_{cm} - \delta_{cm} \cdot \alpha_{cm} > 0$ e $|S_{cm}| > 1$,

  $\forall s \in S_{cm}$ e

  $\forall\ dh \in H_c \cap H_s$ se $\exists p \in P_{cm},\ dh \in H_p$.

$$xs_{cmsdh} = \begin{cases} 1, & \text{se na sala especial } s \text{ ocorre aula da matéria} \\ & m \text{ para a turma } c \text{ no horário } h \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $\forall c \in C$,

  $\forall m$ de c com $\alpha_{cm} = 2$ e $|S_{cm}| > 1$,

  $\forall s \in S_{cm}$ e

  $\forall\ dh \in (H_d - H'_d) \cap H_c \cap H_s$ se $dh' \in H_c \cap H_s$ e se $\exists p \in P_{cm},\ \{dh, dh'\} \subseteq H_p$.

$$xs'_{cmsdh} = \begin{cases} 1, & \text{se na sala } s \text{ ocorrem aulas geminadas da matéria} \\ & m \text{ para a turma } c \text{ nos horários } h \text{ e } h' \text{ do dia } d; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $\forall c \in C$,

  $\forall m$ de c com $|S_{cm}| > 1$ e

  $\forall s \in S_{cm}$.

$$z_{cms} = \begin{cases} 1, & \text{se na sala especial } s \text{ ocorre aula} \\ & \text{da matéria } m \text{ para a turma } c; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como pode-se observar, apenas as variáveis que realmente são necessárias e podem assumir valor não nulo em alguma solução são criadas. Evitamos um grande número de variáveis e restrições sobre elas, para, por exemplo, impedir que aulas sejam alocadas em horários não possíveis (indisponíveis). As variáveis x'_{cmpdh} também evitam restrições impedindo duas aulas não geminadas no mesmo dia, e suas possíveis variáveis auxiliares. Transformando a restrição que garante o respeito ao número máximo diário α_{cm} (1 ou 2) na restrição que diz que apenas uma aula simples ou um par de aulas geminadas de uma mesma disciplina numa turma podem ocorrer no mesmo dia (inequações 4.13).

As variáveis xs_{cmsdh} e xs'_{cmsdh} aparecem quando m de c requer uma sala num conjunto com pelo menos 2 salas especiais possíveis, e são usadas na escolha da sala. As xs'_{cmsdh} servem para garantir que aulas geminadas ocorram em salas iguais (xiv). E as variáveis z_{cms} são criadas e usadas somente quando requer-se que todos os encontros de m em c ocorram numa mesma sala (xiv').

As restrições que modelam as relações entre as variáveis e as restrições de viabilidade são apresentadas na seção seguinte.

4.2.3 Restrições

Quando aqui denotarmos a soma de variáveis em um índice (ou conjunto deles) queremos significar a soma das variáveis que *existem* alterando-se apenas aquele índice (ou os índices) no maior conjunto que os contém ou num domínio determinado. Caso não existam tais variáveis esta soma equivale a zero.

Primeiro vejamos algumas restrições que modelam relações entre as variáveis:

$$\forall x_{cmpdh}: \quad x_{cmpdh} \leq y_{cmp}, \tag{4.1}$$

$$\forall x'_{cmpdh}: \quad x'_{cmpdh} \leq y_{cmp}, \tag{4.2}$$

$$\forall xs_{cmsdh}: \quad xs_{cmsdh} \leq z_{cms}, \tag{4.3}$$

$$\forall xs'_{cmsdh}: \quad xs'_{cmsdh} \leq z_{cms}. \tag{4.4}$$

As demais relações entre as variáveis serão garantidas junto às restrições de viabilidade. Que passamos a descrever.

As restrições de conflito para professores (i) que não substituem qualquer outro são:

$\forall p \in P,\ \forall d \in D:$

$$\sum_{cm}(x_{cmpd1} + x'_{cmpd1}) \leq 1, \tag{4.5}$$

$$\sum_{cm}(x_{cmpdh} + x'_{cmpdh} + x'_{cmpd(h-1)}) \leq 1, \quad 1 < h < |H_d| \tag{4.6}$$

$$\sum_{cm}(x_{cmpd|H_d|} + x'_{cmpd(|H_d|-1)}) \leq 1. \tag{4.7}$$

No caso dos professores que também trabalharão substituindo professor(es) em alguma(s) disciplina(s), as restrições de conflito são formuladas para garantir que não haverá conflito entre suas aulas e as que substituirá, e serão apresentadas mais tarde nesta seção.

Pra facilitar a compreensão das próximas restrições, usaremos

$$Soma_{cd1} = \sum_{mp}(x_{cmpd1} + x'_{cmpd1}),$$

$$Soma_{cdh} = \sum_{mp}(x_{cmpdh} + x'_{cmpdh} + x'_{cmpd(h-1)}),\ 1 < h < |H_d|$$

$$Soma_{cd|H_d|} = \sum_{mp}(x_{cmpd|H_d|} + x'_{cmpd(|H_d|-1)}).$$

Correspondem às restrições de conflito para classes (padrão e turmas especiais, ii, ix e x):

$\forall c \in C',\ \forall d \in D,\ \forall h \in H_d:$

se $ST_c = \emptyset$:

$$Soma_{cdh} + \sum_{\bar{c} \in UT_c} Soma_{\bar{c}dh} \leq 1; \tag{4.8}$$

senão:

$$Soma_{cdh} + \sum_{\bar{c} \in UT_c} Soma_{\bar{c}dh} + Soma_{c_i dh} + \sum_{\bar{c} \in UT_{c_i}} Soma_{\bar{c}dh} \leq 1,\ \forall c_i \in ST_c. \tag{4.9}$$

As restrições quanto a disponibilidade de tempo dos elementos envolvidos nos encontros (iii) já foi garantida na criação das variáveis.

Correspondem às restrições de conflito para salas especiais (iv):

$\forall s \in S,\ \forall d \in D:$

$$\sum_{cm}(xs_{cmsd1} + xs'_{cmsd1}) \leq 1, \tag{4.10}$$

$$\sum_{cm}(xs_{cmsdh} + xs'_{cmsdh} + xs'_{cmsd(h-1)}) \leq 1, \quad 1 < h < |H_d| \tag{4.11}$$

$$\sum_{cm}(xs_{cmsd|H_d|} + xs'_{cmsd(|H_d|-1)}) \leq 1. \tag{4.12}$$

A restrição abaixo relativa ao número máximo de encontros diários α_{cm} de uma disciplina m numa turma c (v) é também responsável pela não sobreposição de encontros de m em c quando existem as variáveis x_{cmpdh} e x'_{cmpdh} (quando $r_{cm} - \delta_{cm} \cdot \alpha_{cm} > 0$ e $\alpha_{cm} = 2$). Além disso, garante que na mesma situação não haverão duas aulas não geminadas em um dia (vi). A obrigatoriedade de que aulas geminadas ocorram num mesmo turno do dia (vi) já foi garantida quando da criação das variáveis.

$\forall c \in C,\ \forall m$ de $c, \forall d \in D$:

$$\sum_{ph,\ \forall h \neq |H_d|} (x_{cmpdh} + x'_{cmpdh}) + \sum_{p} x_{cmpd|H_d|} \leq 1. \tag{4.13}$$

Para garantir o número mínimo δ_{cm} de aulas geminadas semanais (vii), usamos:

$\forall c \in C,\ \forall m$ de c, com $\alpha_{cm} = 2$ e $\delta_{cm} > 0$:

$$\sum_{pdh,\ \forall h \neq |H_d|} x'_{cmpdh} \geq \delta_{cm}. \tag{4.14}$$

A restrição relativa ao número máximo de encontros diários α_p de um professor p (viii):

$\forall p \in P,\ \forall d \in D, \alpha_p < |H_d \cap H_p|$:

$$\sum_{cmh, \forall h \neq |H_d|} (x_{cmpdh} + x'_{cmpdh}) + \sum_{cm} x_{cmpd|H_d|} \leq \alpha_p. \tag{4.15}$$

Na restrição seguinte usaremos:

$$Soma_{cmd1} = \sum_{p} (x_{cmpd1} + x'_{cmpd1}),$$

$$Soma_{cmdh} = \sum_{p} (x_{cmpdh} + x'_{cmpdh} + x'_{cmpd(h-1)}),\ 1 < h < |H_d|$$

$$Soma_{cmd|H_d|} = \sum_{p} (x_{cmpd|H_d|} + x'_{cmpd(|H_d|-1)}).$$

Havendo grupos de aulas simultâneas, em G, devemos ter as restrições (xi):

$\forall G_j = \{(c,m)_{j1}, \ldots, (c,m)_{j|G_j|}\} \in G,\ \forall d \in D,\ \forall h \in H_d$:

$$Soma_{c_{j1} m_{j1} dh} = Soma_{c_{jk} m_{jk} dh},\ \forall (c,m)_{jk} \in G_j,\ k \neq 1. \tag{4.16}$$

E havendo alocações estáticas, $A \neq \emptyset$, temos as restrições (xii):

$\forall (c,m,p,H_{cmp}) \in A$:

$$x_{cmpd1} + x'_{cmpd1} = 1,\ \forall d1 \in H_{cmp}, \tag{4.17}$$

$$x_{cmpdh} + x'_{cmpdh} + x'_{cmpd(h-1)} = 1,\ \forall dh \in H_{cmp},\ 1 < h < |H_d|, \tag{4.18}$$

$$x_{cmpd|H_d|} + x'_{cmpd(|H_d|-1)} = 1,\ \forall d|H_d| \in H_{cmp}. \tag{4.19}$$

A sala alocada para um encontro deve ser uma sala compatível (xiii), e aulas geminadas devem ser alocadas para a mesma sala (xiv). As restrições abaixo garantem estes requerimentos e relacionam as variáveis x e x' com xs e xs'.

$\forall c \in C,\ \forall m$ de c com $|S_{cm}| \geq 2,\ \forall d \in D$:

$$\sum_{p \in P_{cm}} x_{cmpdh} = \sum_{s \in S_{cm}} xs_{cmsdh},\ \forall h \in H_d, \tag{4.20}$$

$$\sum_{p \in P_{cm}} x'_{cmpdh} = \sum_{s \in S_{cm}} xs'_{cmsdh},\ 1 \leq h < |H_d|. \tag{4.21}$$

Descartando as equações resultantes em (4.16), (4.20) e (4.21) que, após a verificação da existência das variáveis, equivalem a $0 = 0$.

Para determinar que todos os encontros de m em c ocorram numa mesma sala possível (alternativa a xiv'), acrescentamos:

$\forall c \in C,\ \forall m$ de $c,\ |S_{cm}| \geq 2$:

$$\sum_{s \in S_{cm}} z_{cms} = 1. \tag{4.22}$$

Como todos os encontros de uma matéria m numa turma c devem ter o mesmo professor possível (xv), precisamos das restrições abaixo.

$\forall c \in C,\ \forall m$ de $c,\ |P_{cm}| \geq 2$:

$$\sum_{p \in P_{cm}} y_{cmp} = 1. \tag{4.23}$$

Seja o *número de encontros obrigatórios* de $p \in P$:

$$O_p = \sum_{cm,\ P_{cm} = \{p\}} r_{cm}.$$

As restrições relativas ao número mínimo e ao máximo de encontros semanais de um professor, β_p e γ_p, são (xvi):

$\forall p \in P,\ \beta_p > O_p$:

$$\sum_{cm} r_{cm} \cdot y_{cmp} \geq \beta_p - O_p. \tag{4.24}$$

$\forall p \in P,\ \gamma_p < |H_p|$:

$$\sum_{cm} r_{cm} \cdot y_{cmp} \leq \gamma_p - O_p. \tag{4.25}$$

Outra vez, lançamos mão de notações:

$$Soma_{pd1} = \sum_{cm} (x_{cmpd1} + x'_{cmpd1}),$$

$$Soma_{pdh} = \sum_{cm} (x_{cmpdh} + x'_{cmpdh} + x'_{cmpd(h-1)}),\ 1 < h < |H_d|$$

$$Soma_{pd|H_d|} = \sum_{cm} (x_{cmpd|H_d|} + x'_{cmpd(|H_d|-1)}).$$

Havendo professores que necessitarão ser substituídos total ou parcialmente. Seja

$$B'_{p_s} = \{(c,m,p) : \forall p \in B,\ \forall (c,m) \in L_p,\ \text{com}\ \ f_p(c,m) = p_s\}.$$

E sejam

$$Soma'_{p_s d1} = \sum_{cmp \in B'_{ps}} (x_{cmpd1} + x'_{cmpd1}),$$

$$Soma'_{p_s dh} = \sum_{cmp \in B'_{ps}} (x_{cmpdh} + x'_{cmpdh} + x'_{cmpd(h-1)}),\ 1 < h < |H_d|$$

$$Soma'_{p_s d|H_d|} = \sum_{cmp \in B'_{ps}} (x_{cmpd|H_d|} + x'_{cmpd(|H_d|-1)}).$$

Temos as restrições (xviii, que incluem as restrições i para os professores substitutos):

$\forall p_s \in P,$ tal que $\exists p \in B, (c,m) \in L_p,\ f_p(c,m) = p_s,$ e $\forall d \in D$:

$$Soma'_{p_s d1} + Soma_{p_s d1} \leq 1, \tag{4.26}$$

$$Soma'_{p_s dh} + Soma_{p_s dh} \leq 1,\ 1 < h < |H_d|, \tag{4.27}$$

$$Soma'_{p_s d|H_d|} + Soma_{p_s d|H_d|} \leq 1. \tag{4.28}$$

As seguintes restrições garantem que não serão alocados mais encontros da matéria m na turma c que a demanda r_{cm}:

$\forall c \in C,\ \forall m$ de c :

$$\sum_{pdh,\ \forall h \neq |H_d|} (x_{cmpdh} + 2 \cdot x'_{cmpdh}) + \sum_{pd} x_{cmpd|H_d|} \leq r_{cm}. \tag{4.29}$$

4.2.4 Função objetivo

Com a finalidade de facilitar a busca por uma solução viável, nosso modelo é um modelo de otimização com todas as restrições de viabilidade como suas restrições, cuja escolha de professores e salas é concomitante a escolha dos horários dos encontros, e temos por objetivo maximizar o número de alocações de encontros (até o valor da demanda, se possível).

A função objetivo é portanto:

$$\max \sum_{cmpdh,\ \forall h \neq |H_d|} (x_{cmpdh} + 2 \cdot x'_{cmpdh}) + \sum_{cmpd} x_{cmpd|H_d|}$$

4.3 Algumas condições necessárias

Uma solução viável que atenda a demanda total no caso de haverem apenas classes padrão existirá somente se forem satisfeitas as seguintes condições necessárias, embora não suficientes (também observadas por outros autores).

- $\forall dh \in H,\ |\{p \in P :\ dh \in H_p\}| \geq |\{c \in C' :\ dh \in H_c\}|$ e
- $\forall dh \in H$ e $\forall c \in C', |\{p \in P :\ dh \in H_p \text{ e } \exists m \in M, p \in P_{cm}\}| \geq |\{dh\} \cap H_c\}|$.

O primeiro item trás a noção de que para qualquer horário de funcionamento da instituição o número de professores disponíveis para lecionar deve ser maior ou igual ao número de classes padrão que possuem este horário de aula. E o segundo item garante que em cada horário de aula de uma classe padrão existe pelo menos um professor disponível neste horário que pode ensinar alguma disciplina para ela.

Havendo união de turmas o primeiro item não é necessário, pois um professor pode ensinar duas ou mais turmas ao mesmo tempo.

Havendo turmas especiais em geral, reescrevemos o segundo item assim:

- $\forall dh \in H$ e $\forall c \in C', |\{p \in P :\ dh \in H_p \text{ e } \exists m \in M,$
  $p \in P_{cm} \vee (P_{c_i m},\ \forall c_i \in ST_c) \vee (P_{\bar{c}\bar{m}},\ \forall \bar{c} \in (\bigcup_{c_i \in ST_c} UT_{c_i}) \cup UT_c)\}| \geq |\{dh\} \cap H_c\}|$.

Aplicamos testes referentes à estas condições a priori em nosso modelo, a fim de perceber alterações necessárias nos dados do problema para o atendimento da demanda.

Claramente devemos também ter

$$\forall p \in P,\ |H_p| \geq \max(\beta_p, O_p),\ \text{e}$$

$$\forall c \in C',\ |H_c| \geq \sum_m r_{cm} + \sum_{\bar{c}m,\ \bar{c} \in UT_c} r_{\bar{c}m} + \max_{c_i \in ST_c} \{\sum_m r_{c_i m} + \sum_{\bar{c}m,\ \bar{c} \in UT_{c_i}} r_{\bar{c}m}\}.$$

Diante da tarefa de escolher professores para algumas disciplinas, para uma alocação total devemos ter:

$$\forall c \in C, \forall m \text{ de } c, |P_{cm}| > 1,\ \exists p \in P_{cm}, \sum_{dh,\ \forall h \neq |H_d|} (x_{cmpdh} + 2 \cdot x'_{cmpdh}) + \sum_d x_{cmpd|H_d|} \geq r_{cm}.$$

O que indica que há um professor candidato que pode assumir a disciplina com disponibilidade suficiente para lecionar todos os encontros em salas possíveis (dada a construção das variáveis).

A exigência de salas iguais para os encontros de m em c diz que para algum professor candidato p satisfazendo a condição anterior (ou o professor já determinado) tenhamos:

$$\text{Se } |S_{cm}| > 1,\ \exists s \in S_{cm}, \sum_{dh,\ \forall h \neq |H_d|} (xs_{cmsdh} + 2 \cdot xs'_{cmsdh}) + \sum_{d} xs_{cmsd|H_d|} \geq r_{cm}.$$

E dado 4.14 devemos ter algum professor (candidato ou determinado) p com número de dias com horários iniciais possíveis para aula dupla da disciplina m na turma c maior ou igual ao mínimo δ_{cm}.

Os experimentos com este modelo e os demais serão reportados no Capítulo 8.

CAPÍTULO 5

Meta-heurística Busca Tabu e outras

Diante de problemas muito difíceis, NP-completos, o uso de heurísticas é comum e justificável, numa tentativa de encontrar boas soluções num tempo computacional razoável.

As Meta-heurísticas são heurísticas de busca local melhoradas por terem o potencial para escapar de ótimos locais. Citamos Busca Tabu, Simulated Annealing e Algoritmos Genéticos. Existem várias outras.

Elas também são bastante usadas nos problemas de automação de horários educacionais em geral. Aqui vamos referir seu uso nos problemas de horários escolares.

Primeiro daremos uma breve apresentação de busca local e das Meta-heurísticas que citamos ([Wol98]).

5.0.1 Busca Local

Seja um problema de otimização combinatória:

$$\min_{\mathscr{S} \subset \mathscr{N}} \{c(\mathscr{S}) : def(\mathscr{S}) = 0\},$$

onde $c(\mathscr{S})$ é uma função custo e $def(\mathscr{S}) \geq 0$ uma medida da inviabilidade do conjunto $\mathscr{S}$.

Em qualquer algoritmo de busca local são necessárias as definições de *solução*, *vizinhança* $Q(\mathscr{S})$ de cada solução $\mathscr{S} \subset \mathscr{N}$ (no espaço de busca), e uma *função objetivo* $f_{obj}(\mathscr{S})$. Esta pode, por exemplo, ser igual a função custo $c(\mathscr{S})$ para $\mathscr{S}$ viável e ∞ para $\mathscr{S}$ inviável, ou $c(\mathscr{S}) + a \cdot def(\mathscr{S})$, com $a > 0$, onde $def(\mathscr{S})$ é uma medida da inviabilidade de $\mathscr{S}$. A escolha da vizinhança depende da estrutura do problema.

Um algoritmo de busca local é visto no Algoritmo 5.1. Este algoritmo corresponde ao *steepest descent method* (SD). Se ao invés de avaliar todos os vizinhos, for testado aleatoriamente um vizinho por iteração, aceitando-o se tem melhor valor objetivo que a melhor solução guardada, chamamos esta busca local de *randomized descent method* (RD). Ela para após um número máximo de movimentos sem melhora. O *randomized non-ascendent method* (RNA) é como o RD, mas aceita vizinhos que tem *melhor ou igual* valor objetivo que a melhor solução guardada. Isto permite uma maior exploração do espaço de busca podendo após um certo número de movimentos encontrar uma direção de melhora. Os movimentos que levam a soluções com valor igual são chamados *movimentos laterais*. Se permitimos movimentos laterais em SD e usamos um máximo número de iterações sem melhora como critério de parada, temos o *steepest non-ascendent method* (SND).

Algoritmo *Um algoritmo de busca local.*
Entrada
$\mathscr{S}$: uma solução inicial.
Saída $\mathscr{S}^H$: solução heurística.

```
1  S^H ← S
2  tem ← falso
3  repita
4      tem ← falso
5      para cada S' em Q(S) faça
6          se f_obj(S') < f_obj(S^H) então
7              S^H ← S'
8              tem ← verdade
9      S ← S^H
10 até tem = falso
11 devolva S^H {Um ótimo local.}
```

Algoritmo 5.1 Um algoritmo de busca local.

5.1 Busca Tabu

A idéia da meta-heurística Busca Tabu para escapar de um ótimo local é *mover* para a melhor solução na vizinhança, mesmo que esta tenha o valor da função objetivo pior. Como podem ocorrer ciclos ($\mathscr{S}^k \to \mathscr{S}^{k+1} \to \mathscr{S}^k \to \mathscr{S}^{k+1} \ldots$) certos movimentos ou soluções são proibidos, feitos *tabu*.

Não sendo razoável guardar todas as soluções já visitadas e compará-las com a nova solução, é feita uma lista com as mais recentes soluções, ou modificações, chamada *lista tabu*.

De forma geral, um algoritmo Busca Tabu (BT) pode ser descrito como no Algoritmo 5.2. A atualização da lista tabu pode ser feita acrescentando ao final da lista o último movimento escolhido e retirando o primeiro da lista.

Os parâmetros específicos da meta-heurística Busca Tabu são:

- *Escolha de* $Q'(\mathscr{S})$. Dependendo do número de operações para encontrar cada vizinho de $\mathscr{S}$ e do tamanho de $Q(\mathscr{S})$, podemos ter $Q'(\mathscr{S})$ igual a $Q(\mathscr{S})$, menos as soluções impedidas pela lista tabu. Ou $Q'(\mathscr{S})$ pode ter um tamanho fixo com um certo número de vizinhos de $\mathscr{S}$, escolhidos aleatoriamente ou por alguma regra heurística.

- *Tamanho da lista tabu*. Escolher o tamanho da lista tabu muito pequeno pode torná-la ineficaz contra os ciclos. Segundo Wolsey [Wol98]: "O valor mágico $t = 7$ é freqüentemente citado como uma boa escolha."

- *Critério de parada*. Em geral, é o número de iterações, ou um número máximo de iterações sem melhora no valor de $f_{obj}(\mathscr{S}^H)$. Pode ser também uma combinação dos dois: o que acontecer primeiro.

Algoritmo *Um algoritmo Busca Tabu.*
Entrada
$L = \emptyset$: uma lista tabu.
$\mathscr{S}$: uma solução inicial.
$\mathscr{C}$: critério de parada.
Saída $\mathscr{S}^H$: solução heurística.

```
1 S^H ← S
2 enquanto C não for satisfeito faça
3     Escolha Q'(S) ⊆ Q(S) com soluções não-tabu.
4     S' = arg min{f_obj(R) : R ∈ Q'(S)}
5     S ← S'
6     Atualize L
7     se f_obj(S) < f_obj(S^H) então
8         S^H ← S
9 devolva S^H
```

Algoritmo 5.2 Um algoritmo Busca Tabu.

Um outro critério que pode ser usado é o *critério de aspiração*. Ele indica se uma solução que no momento é tabu pode perder este status e se tornar avaliável. Isto pode acontecer porque a solução tem valor objetivo melhor que $f_{obj}(\mathscr{S}^H)$ ou por ser interessante sob algum outro aspecto. Podem haver mais de um destes critérios.

A maneira como o problema é modelado, dada sua estrutura, interfere na construção da vizinhança, na lista tabu (seja de soluções ou de modificações que levariam a elas), tornando mais eficiente a busca, mais rápida, ou o contrário. Assim deve receber especial atenção.

Uma frase interessante dita por Wolsey [Wol98]: "Busca Tabu pode ser vista como uma estratégia de busca que tenta tomar vantagem do histórico de busca e da estrutura do problema inteligentemente."

5.2 Simulated Annealing

A meta-heurística Simulated Annealing (SA) é uma busca local probabilística. E é inspirada na *dispersão de calor*.

Em cada iteração um vizinho é sorteado. Se o candidato avaliado $\mathscr{S}'$ tem melhor valor objetivo que a solução atual $\mathscr{S}$ (ou igual), então ele é aceito como próxima solução, senão é aceito com probabilidade estritamente entre 0 e 1.

O valor desta probabilidade de aceitação é dado por $e^{\frac{-\triangle}{T}}$, onde $\triangle = f_{obj}(\mathscr{S}') - f_{obj}(\mathscr{S})$ e T é uma variável chamada *Temperatura*. Assim, dada uma temperatura T, a probabilidade de aceitação de uma solução candidata é inversamente proporcional ao valor da diferença $\triangle$. Um candidato com valor da função objetivo um pouco pior (maior) que o da solução atual terá maior probabilidade de ser aceito do que um candidato com valor muito pior (alto) em comparação ao atual.

Algoritmo *Um algoritmo Simulated Annealing.*
Entrada
$\mathscr{S}$: uma solução inicial.
T_0: a temperatura inicial.
nSA: nº de iterações na temperatura T.
α: razão de esfriamento $(0 < \alpha < 1)$.
ε: valor próximo de zero $(\varepsilon > 0)$.
Saída $\mathscr{S}^H$: solução heurística.

```
1  S^H ← S
2  T ← T_0
3  intT ← 0
4  enquanto T > ε faça
5      enquanto intT < nSA faça
6          intT ← intT + 1
7          Escolha aleatoriamente S' ∈ Q(S)
8          △ = f_obj(S') − f_obj(S)
9          se △ ≤ 0 então
10             S ← S'
11             se f_obj(S) < f_obj(S^H) então
12                 S^H ← S
13         senão
14             Escolha aleatoriamente x, 0 < x < 1
15             se x < e^(−△/T) então
16                 S ← S'
17     T ← α · T
18     intT ← 0
19 devolva S^H
```

Algoritmo 5.3 Um algoritmo Simulated Annealing.

O valor da temperatura T permanece o mesmo por um certo número de iterações e então decresce por um fator chamado *razão de resfriamento* α, $0 < \alpha < 1$, fazendo $T \leftarrow \alpha \cdot T$. Assim, como T decresce lentamente ao longo das iterações, a probabilidade de aceitar soluções com piores valores também decresce. Espera-se que com um suficiente número de interações seja possível escapar de ótimos locais.

A *temperatura inicial* T_0, o *número de iterações com uma mesma temperatura nSA*, e o *critério de parada* são os outros parâmetros. O número *nSA* representa o tempo necessário para que um sistema alcance o equilíbrio numa certa temperatura. E o critério de parada é quando a temperatura T se aproxima de zero, $T < \varepsilon$ (ε pequeno), indicando que o sistema está estável, e nenhuma solução com piora será aceita ($T \to 0 \Rightarrow e^{\frac{-\triangle}{T}} \to 0$). Retornando um "bom" mínimo local.

Veja um exemplo do algoritmo em 5.3.

5.3 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AG) trabalham com uma "*população*" finita de soluções $\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_k$ ao invés de apenas uma, e são inspirados pelas *teorias de evolução*. A cada iteração a população evolui (de forma probabilística) para a próxima geração.

Cada indivíduo da população (solução) é chamado de *cromossomo*, e cada componente de sua representação de *gene*.

Cada iteração possui as seguintes etapas:

- *Avaliação da aptidão* dos indivíduos. Usa uma função aptidão f_{ap}.
- *Seleção de pais*, pares de soluções, conforme a aptidão destes. A solução $\mathscr{S}_i$ é escolhida com probabilidade $\frac{f_{ap}(\mathscr{S}_i)}{\sum_{j=1}^{k} f_{ap}(\mathscr{S}_j)}$.
- *Recombinação*. Cada par de pais é combinado, com alguma probabilidade, para formar um ou dois cromossomos filhos. Cada cromossomo filho tendo parte de seus genes correspondente a de um de seus pais.
- *Mutação*. Alguns dos cromossomos filhos têm alguns poucos genes modificados com com alguma probabilidade.
- *Seleção da população*. A próxima população é selecionada, com igual número de indivíduos ao da população inicial, dentre os membros da população anterior e seus cromossomos filhos, de acordo com a aptidão e alguma probabilidade.

Em alguns casos o AG pode apresentar uma etapa chamada "reprodução" onde são feitas cópias dos indivíduos conforme maior aptidão destes, para em seguida formarem-se os pares de pais.

Quando trata-se de um problema combinatório cujo valor da função objetivo deve ser minimizado, como as melhores soluções devem ter maior valor da função aptidão em AG, costuma-se mapear os valores da primeira na segunda. De forma que menores valores de f_{obj} são levados em maiores valores de f_{ap}, e vice versa. Isto pode ser feito por uma função monotonicamente decrescente.

A seleção da nova população usa sempre alguma probabilidade, para que indivíduos menos aptos também sobrevivam, e o processo possa escapar de ótimos locais.

Uma das grandes vantagens desta meta-heurística é que ao final temos um conjunto de "boas" soluções, permitindo a escolha daquela que mais agrada aos interesses em geral. Afinal, nem todas as características de uma boa solução de um problema real são claras ou podem ser consideradas no modelo facilmente.

O critério de parada pode, por exemplo, ser o número de interações ou a população atingir um certo nível de aptidão.

Veja um exemplo deste algoritmo em 5.4.

Algoritmo *Um Algoritmo Genético.*
Entrada
P_0: uma população inicial.
$\mathscr{C}$: critério de parada.
Saída P^H: solução heurística.
1 $t \leftarrow 0$
2 $P(t) \leftarrow P_0$
3 **enquanto** $\mathscr{C}$ não for satisfeito **faça**
4 Avalie a aptidão em $P(t)$
5 $P_p(t) \leftarrow$ seleção de pais em $P(t)$
6 $P_f(t) \leftarrow$ recombinação em $P_p(t)$
7 $P_f(t) \leftarrow$ mutação em $P_f(t)$
8 $P(t+1) \leftarrow$ seleção da população em $P(t) \cup P_f(t)$
9 $\mathscr{S}^H \leftarrow P(t+1)$
10 $t \leftarrow t+1$
11 **devolva** $\mathscr{S}^H$

Algoritmo 5.4 Um Algoritmo Genético. Usamos $P_p(t)$ e $P_f(t)$ para denotar, respectivamente, os conjuntos de cromossomos pais e de cromossomos filhos de uma população $P(t)$.

5.4 Características importantes às meta-heurísticas

Alguns conceitos gerais são importantes para qualquer algoritmo de busca local melhorada e devem ser levados em conta quando da escolha dos parâmetros.

São estas características:

- *Comunicação*. Reflete a capacidade de ir de uma solução a outra, preferencialmente com poucos movimentos. Deseja-se ser possível ir de qualquer solução a pelo menos uma solução ótima.
- *Diversificação*. Indica a facilidade em ir a diferentes regiões do espaço busca. Facilitam isso: uma longa lista tabu, uma temperatura inicial alta e reiniciar com outras soluções.
- *Intensificação*. Trata-se de medidas para intensificar as buscas em determinada região. Citamos: uma melhor escolha da vizinhança e tomar $Q'(\mathscr{S})$ temporariamente maior em regiões promisoras.

Sem uma boa comunicação o modelo pode não ser eficiente, apresentando uma busca restrita no espaço de soluções. Essa comunicação pode ser comprometida, por exemplo, pela escolha da vizinhança e do movimento usado para percorrê-la.

Quanto a intensificação e diversificação, temos idéias conflitantes que devem ser equilibradas. As meta-heurísticas, não raro, são implementadas com modificações que, sob certos critérios, ativam métodos de intensificação ou diversificação. Na seção seguinte, enquanto falamos do uso das meta-heurísticas no problema de automação de horários escolares, será possível verificar alguns exemplos.

Apesar das meta-heurísticas serem métodos bem gerais, podendo ser aplicados a uma grande gama de problemas, elas precisam ter seu método de busca definido para cada tipo de problema. É preciso definir o que é uma solução, a vizinhança, os operadores (movimento, recombinação, mutação, ...), função objetivo, ..., e neste momento a observância das características que apresentamos pode definir o grau de eficiência do algoritmo.

5.5 Meta-heurísticas e automação de horários escolares

Muitos pesquisadores optaram por trabalhar com meta-heurísticas ou modelos híbridos (envolvendo mais de uma meta-heurística, ou unindo à outras técnicas) nos problemas de automação de horários escolares.

Algo comum à boa parte dos trabalhos é o uso de uma estrutura semelhante para guardar (definir) uma solução. Em geral, é usada uma matriz, tendo cada linha correspondente a um professor e cada coluna a um horário. Os valores desta matriz pertencem a um *alfabeto* $\mathscr{A}$ e correspondem às turmas, horários vagos, horários reservados para alguma atividade que não lecionar (ou para substituição) e horários indisponíveis. Cada posição da matriz apresenta exatamente um símbolo, e cada linha tem o conjunto de seus símbolos definido pelos dados relacionados ao professor da linha, antes de mais nada. Os símbolos de horários indisponíveis, e possivelmente outros horários reservados pela a instituição, não podem ter suas posições alteradas durante a execução do modelo. Chamemos estes símbolos de *fixos*, e denotemos seu conjunto por $\mathscr{A}_f \subseteq \mathscr{A}$. O número de vezes que o símbolo de uma turma j aparece numa linha i corresponde exatamente ao valor da demanda r_{ij} de encontros desta turma com o professor i.

Usando esta estrutura já há um ganho: a satisfação das demandas e a garantia de que não haverá conflito para professores (um professor participando de duas aulas ao mesmo tempo); se os movimentos ou operações (no caso de AG) mantém a característica de um único símbolo por posição na matriz. Se, além disso, os movimentos ou operações não alteram a posição dos símbolos de $\mathscr{A}_f$, as restrições quanto a disponibilidade de tempo dos professores serão satisfeitas.

A satisfação das restrições de conflito para classes pode ser observada nas colunas: se o símbolo de cada classe j aparece no máximo uma vez por coluna. Havendo $H_j = \sum_i r_{ij}$ para alguma classe j, seu símbolo deve aparecer exatamente uma vez em cada coluna correspondente a um de seus horários disponíveis, em H_j.

A função objetivo costuma ser composta em partes que têm uma relação hierárquica com respeito ao valor dos coeficientes destas. Como é comum trabalhar com soluções inviáveis durante a execução da heurística, a parte que mede a inviabilidade costuma ter peso muito maior que as demais (relativas a restrições relaxadas). As outras partes tem pesos relativos a sua importância na classificação de uma solução viável como melhor.

Movimentos comuns são: a troca de dois símbolos numa linha (de um professor) da matriz representante da solução, sendo símbolos não pertencentes a $\mathscr{A}_f$; e a troca da seqüência de símbolos correspondentes aos horários de um dia pelos símbolos de outro dia numa mesma linha.

Observe que o número de movimentos definidos pela troca de dois símbolos de uma linha não pertencentes a $\mathscr{A}_f$ necessários para ir de uma solução a outra é no máximo igual ao número

de símbolos não fixos.

Também foram usados outras representações e outros movimentos. Por exemplo, o movimento definido por **Costa** (1994) para uma heurística **Busca Tabu**, muda o horário alocado de uma única aula, podendo provocar conflitos para um professor, turma, ou "sobreposição de salas", mais aulas requerendo um tipo de sala no horário do que o número de salas deste tipo disponíveis. As restrições de conflito e sobreposição de salas foram "relaxadas", para uma maior liberdade de busca no espaço de soluções. Uma vizinhança é definida por todas as soluções encontradas a partir de um movimento sobre a solução corrente.

Inicia-se com um quadro de horários que respeita as seguintes "restrições essenciais": pré-alocação, disponibilidades de tempo de professores e turmas, distribuição das aulas nos dias da semana, aulas duplas seqüenciais (seu número é conhecido a priori), restrições à seqüências de aulas (difíceis) num dia de uma turma, e a restrição relativa a "Intervalo variável de refeição". Esta última impede que, havendo duas opções de horários vizinhos para intervalo, um professor ou turma participe em aulas nos dois horários, equivale a escolher o intervalo destes. Entre as restrições relaxadas estavam: as restrições de conflito para professores, para turmas, sobreposição de salas, indisponibilidade de certas matérias para alguns horários, "restrições geográficas" (evitam aulas consecutivas em locais distantes), compacidade (menor número de janelas e aulas isoladas no quadro de horários de um professor) e balancear o número de turmas que escolhe cada um dos dois intervalos de refeição. Durante todo o método as restrições essenciais são respeitadas. E a função objetivo é formada por uma combinação linear de medidas relacionadas às sete restrições relaxadas, $f_{obj}(Q) = \sum_{i=1}^{7} w_i \cdot f_i(Q)$. A solução inicial é encontrada por um método construtivo que evita os conflitos para professores, conflitos para turmas e sobreposição de salas numa certa ordem, tanto quanto possível, já que não são alteradas as alocações feitas nos passos anteriores.

Duas listas tabu são usadas. A primeira, com comprimento menor, contém as últimas aulas que foram usadas num movimento, e impede que estas aulas sejam envolvidas em qualquer movimento. A segunda, guarda a aula e o horário anterior a mudança, impedindo que apenas o movimento inverso seja efetuado. Na fase final do método, apenas a segunda lista é considerada.

Também são usadas duas funções de aspiração. Dado um quadro de horários Q, são definidas duas medidas

$$g_1(Q) = \sum_{i=1}^{3} q_i \cdot f_i(Q) \text{ e } g_2(Q) = f_{obj}(Q), \text{ onde } q_i = \frac{w_i}{w_1+w_2+w_3}.$$

As restrições de conflito para professores, para turmas e restrições de sobreposição de salas são, respectivamente, relacionadas aos índices i, $1, 2$ e 3. Seja $A_1(z)$ o menor valor de g_1 encontrado quando é feito um movimento a partir de um quadro Q'' com $g_1(Q'') = z$, e seja $A_2(z)$ o menor valor de g_2 nas mesmas condições. Um movimento de Q a Q' deixa de ser tabu, se uma das condições se verifica:

$$g_1(Q') < A_1(g_1(Q)) \text{ ou } \{g_1(Q') = A_1(g_1(Q)) \text{ e } g_2(Q') < A_2(g_1(Q))\}.$$

O próximo movimento é escolhido entre aqueles cujas aulas provocaram a violação de alguma restrição relaxada, chamadas "aulas conflitantes". Mas se existem aulas conflitantes envolvidas na violação das restrições de conflito para professores ou classes, ou sobreposição

de salas, a escolha deve ser feita apenas entre estas. A cada iteração é gerado um número máximo de pares (a_i, d_j), aula conflitante e dia qualquer, e em seguida é selecionado o melhor movimento entre os movimentos $a_i \rightarrow h_k$, onde h_k é o melhor horário do dia d_j para mover a_i. Claro, respeitando as listas tabu e critérios de aspiração.

A estratégia de diversificação usada é uma redução drástica no valor dos coeficientes w_1, w_2 e w_3 relacionados às restrições de conflito e sobreposição de salas durante um certo número de iterações. Isso é feito após visitar um quadro de horários sem violação destas restrições, e estar a um certo número de iterações sem melhora no valor de melhor solução encontrada. Em seguida, retorna-se aos valores iniciais que são bem maiores em relação às demais restrições relaxadas. Assim espera-se visitar outras regiões promissoras ainda não exploradas.

O critério de parada é um número máximo de iterações sem mudança no valor da melhor solução encontrada.

Abramson (1991) também usa um movimento que muda apenas o horário de uma aula, só que usando **Simulated Annealing**. Seu problema considera cada aula como uma combinação de elementos, como turma, professor e sala. E cada aula tem um horário associado, que pode ser mudado através de um movimento. A função objetivo é dada pelo número de conflitos para turmas, professores e salas. Em [AKD99] ele faz experimentos para o mesmo problema com seis esquemas diferentes de resfriamento. O que demonstrou muito melhor resultados foi o esquema de "reaquecimento como uma função do custo". Quando o método identifica estar num mínimo local o valor da temperatura é aumentado bastante e segue-se o resfriamento a partir dele. A nova temperatura é dada por: $T_{new} = \theta \cdot f_{obj}(\mathscr{S}^b) + T_{msp}$, onde $\mathscr{S}^b$ é a melhor solução encontrada, T_{msp} é a temperatura onde ocorre "maximum specific heat" e θ um parâmetro de valor pequeno. A T_{msp} é a temperatura onde o valor encontrado quando se calcula a variância da função objetivo sobre um número de testes na temperatura é máximo. Acredita-se que seja a temperatura onde há uma mudança de fase no modelo, durante a fase anterior a T_{msp} seria resolvido o "grosso" da estrutura de uma solução (a melhora no valor da função objetivo é maior e em pouco tempo), e depois desta temperatura as mudanças abarcariam os detalhes, mudanças menores e mais lentas.

Um outro movimento pode ser definido trocando-se os horários de duas aulas de uma mesma turma, ao invés de um mesmo professor. É o movimento usado por **Mike** (2001) [Wri01]. Seu problema tem poucas restrições e é modelado com **Simulated Annealing** e com **Threshold Acceptance** (TA), usando em ambos "Subcost-Guided Search" (SGS). Este último método, de busca guiada por sub-custos, é uma estratégia de diversificação, onde a busca objetiva melhorar parte de seus objetivos não importado o efeito no todo. Essa diversificação teria a qualidade de não apenas distanciar a busca de uma região já explorada, mas também de dirigir a busca para uma região promissora sob alguns aspectos.

O método Threshold Acceptance é uma variação do Simulated Annealing proposta por Dueck e Scheuer (1990). Ao invés de usar a probabilidade de aceitação como em SA, ele aceita uma solução de piora $\mathscr{S}'$ se ela satisfaz um "threshold" $T_h > 0$ (limite): se $\triangle < T_h$, onde $\triangle = f_{obj}(\mathscr{S}') - f_{obj}(\mathscr{S})$. Se não é *muito pior* que a solução corrente. O valor de T_h é decrescido gradualmente a cada iteração, por exemplo por um fator constante pequeno r, $T_h \leftarrow \max(0, T_h - r)$. O critério de parada pode ser um número máximo de iterações sem mudança no valor da melhor solução encontrada. Uma diferença entre SA e TA é o fato de que

SA pode aceitar soluções "muito piores" com uma pequena probabilidade, o que não ocorre em TA.

O Subcost-Guided Search foi incorporado a cada modelo, SA e TA, e os resultados foram comparados, inclusive com os modelos sem SGS. Em SA, duas formas de SGS foram usadas, a que apresentou melhor desempenho foi usada com TA também. Seja ∇ o valor do melhor decrescimento de sub-custo, a probabilidade de aceitar uma pior solução em SA passa a ser

$$e^{\frac{-\triangle'}{T}}, \text{ onde } \triangle' = \triangle \cdot e^{\frac{-\theta \cdot \nabla}{\triangle}},$$

sendo θ é um parâmetro. Quando $\nabla = 0$ temos $\triangle' = \triangle$, e $\triangle' \to 0$ quando ∇ é muito maior que $\triangle$. Isto é, há um acréscimo na probabilidade de aceitar uma solução pior, se o valor da piora é menor que a capacidade de melhora já verificada. Os melhores resultados foram obtidos com $\theta = 1$.

Para que fosse possível uma melhor comparação com SA, TA sem SGS foi implementado usando como critério de decréscimo para T_h a mesma razão de resfriamento de SA, e a condição para aceitar uma solução pior foi: $e^{\frac{-\triangle}{T_h}} < 0,5$. Já o modelo TA com SGS, foi implementado substituindo nesta fórmula $\triangle$ por $\triangle'$, o mesmo já definido para *SA*.

Os resultados indicaram uma melhora nos experimentos com SGS e que esta melhora não está diretamente associada ao efeito da probabilidade envolvida em SA, já que esta melhora também ocorre em TA.

Colorni, **Dorigo** e **Maniezzo** em [CDM98] 1998 comparam o desempenho de várias meta-heurísticas (**SA**, **BT** e **AG**, mais adaptações). O conjunto das várias restrições do problema é dividido em quatro conjuntos, considerados em três níveis de importância: condições para viabilidade, condições de gerenciamento (que incluem os requerimentos didáticos e os organizacionais) e condições que dizem respeito a cada professor (requerimentos pessoais). A função objetivo expressa uma hierarquia entre estes requerimentos dando bem maior peso a não satisfação dos requerimentos para viabilidade. As soluções são modeladas pela estrutura de matriz já citada, com linhas correspondendo a professores e colunas a horários, e os *movimentos de busca* são a troca dos símbolos de dois horários ou de dois dias de um professor (usados por SA e BT).

A função de aptidão f_{ap} foi definida para AG por um procedimento dinâmico linear. Em cada população são verificados o mínimo e máximo valor encontrados da função objetivo, estes valores determinam um intervalo mapeado linearmente até o intervalo determinado pelos valores MAXFIT e MINFIT da função aptidão (constantes do modelo). Com o mínimo valor da função objetivo correspondendo ao valor de MAXFIT e o máximo valor de f_{obj} ao valor de MINFIT. Assim ao maximizar a função aptidão estamos minimizando a função objetivo. E, além disso, consegue-se discriminar soluções com valores de f_{obj} muito próximos. Observe a figura 5.1.

A operação de *recombinação* é feita, conforme uma probabilidade, para cada par de indivíduos pais da seguinte maneira: são selecionadas as *n* linhas com melhor avaliação parcial para a função aptidão do melhor indivíduo do par, estas são combinadas com as linhas do outro indivíduo do par correspondentes às restantes para formar o primeiro "filho", e o segundo é formado pelas linhas não usadas de ambos. A operação de mutação usada é a *k-mutação*, mutação de ordem k, que consiste na troca de *k* consecutivos símbolos por outros *k* consecutivos símbolos

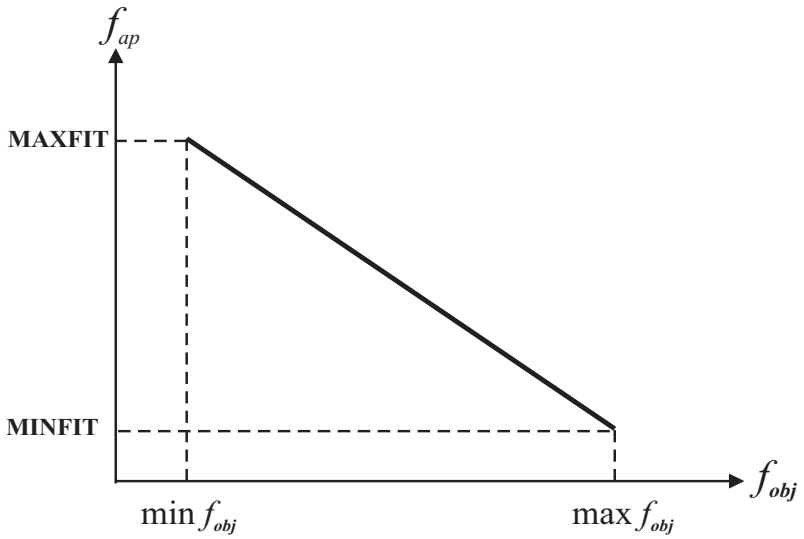


Figura 5.1 Função aptidão f_{ap}. Determinada linearmente em função dos valores min f_{obj} e max f_{obj} encontrados na população, e das constantes MAXFIT e MINFIT.

não sobrepostos àqueles numa mesma linha. Os movimentos de busca citados a pouco são, portanto, casos especiais de mutação, de ordem 1 e a "mutação de dias". Cada operação ocorre conforme uma probabilidade específica.

As operações de recombinação e mutação freqüentemente podem gerar soluções inviáveis durante a aplicação de AG em problemas combinatórios. Algumas maneiras usadas para tentar evitar isso são:

- mudar a representação das soluções para que as operações sejam aplicadas de forma consistente,
- definir as operações de modo que gerem somente soluções viáveis, ou
- definir algum operador "reparador genético" para transformar soluções inviáveis em viáveis (uma operação de "filtragem").

Uma operação "filtro" foi definida para o modelo AG deste trabalho com movimentos de troca de dois símbolos para uma linha (professor), e combinações destes.

O uso de SA encontrou resultados piores que os horários feitos manualmente. E duas adaptações foram propostas. Numa delas quando o modelo passa um certo número de iterações sem melhora é feita uma *reinicialização da temperatura* e segue-se o processo de resfriamento normal. A outra versão é SA com *relaxação do problema*, nas mesmas circunstâncias de estabilização os pesos associados aos requerimentos para viabilidade na função objetivo recebem valores pequenos por um certo número de iterações (também pequeno), voltando em seguida aos valores normais. Este último modelo com SA teve resultados melhores.

O modelo com AG (incluindo a operação filtro) teve desempenho melhor que o SA com relaxação do problema. Também foi avaliado um modelo AG com *busca local*. Isto é, após as

operações de recombinação e mutação é aplicada uma busca local em duas fases. Na primeira, usando trocas de dois horários de uma linha tenta-se corrigir inviabilidades sem piorar requerimentos didáticos e organizacionais, e na segunda fase busca-se (com estes movimentos e o de troca de dias) melhorar o valor da função objetivo em geral. Este obteve os segundos melhores resultados na avaliação geral.

Os melhores resultados na avaliação geral foram apresentados por BT com *relaxação do problema*, uma adaptação semelhante a que descrevemos para SA. Os resultados do modelo BT simples foram razoáveis, mas ainda melhores que SA com reinicialização da temperatura.

Outro trabalho que apresenta uma comparação entre várias meta-heurísticas é a tese de **Marcone Souza** [Sou00]. Ele compara o desempenho dos métodos **BT**, **GRASP com BT**, **SA**, **Annealing Microcanônico** (AM), **Otimização Microcanônica** (OM) e uma adaptação destes usando um procedimento *Intraturmas-Interturmas* (II) desenvolvido por ele. Num problema de horários escolares com as seguintes restrições para viabilidade: restrições de conflito para professores, para turmas, restrições para o atendimento das demandas, quanto às disponibilidades dos professores e número máximo de encontros de uma matéria por dia numa turma. Os critérios desejáveis são o atendimento ao maior número possível de aulas duplas requeridas pelos professores, e fazer os horários dos professores tão compactos quanto possível (poucos dias e janelas). Nesta formulação, duas aulas não geminadas num dia são possíveis se o número máximo diário permite.

Novamente temos cada solução do problema modelada pela *estrutura* de matriz (linhas correspondendo a professores e colunas a horários). E o *movimento* definido é o de troca da posição de dois elementos não fixos (turmas), numa linha. Dados a estrutura e movimento, dois tipos de inviabilidade podem se apresentar, e são definidos como tipo 1 e 2, respectivamente: existência de conflito para turma ou turma com horário vago; e desrespeito ao número máximo de encontros diários de uma matéria numa turma. A *função objetivo*, que deve ser minimizada, dá maior peso às inviabilidades de tipo 1 e 2 (denotemos por f_1 e f_2 estas parcelas), e menor para as partes relativas a insatisfação de critérios desejáveis (denotemos por f_3). Todos os algoritmos usam os conceitos definidos neste parágrafo.

GRASP (Procedimento de busca adaptativa gulosa e randomizada) é um método iterativo com duas fases, uma construtiva onde uma solução é gerada elemento a elemento, e outra de busca local, que pesquisa um ótimo local na vizinhança da solução construída. Na fase construtiva os elementos são ordenados de acordo com uma função adaptativa gulosa g numa lista, que estima os benefícios de escolher um tal elemento. Entre os melhores um elemento é escolhido aleatoriamente para ser acrescentado na solução, em seguida a lista é atualizada para refletir as mudanças decorrentes da escolha feita. Quando dizemos escolher aleatoriamente "entre os melhores" queremos dizer numa *lista de candidatos restrita* (LCR), que pode ser definida assim: $LCR = \{e \in E : g(e) \leq \min_E g + \alpha \cdot (\max_E g - \min_E g)\}$, onde E é o conjunto de elementos candidatos, e $0 \leq \alpha \leq 1$. Se $\alpha = 0$ temos um procedimento puramente guloso, se $\alpha = 1$ temos um procedimento puramente aleatório.

O algoritmo *Annealing Microcanônico* é uma variação do Simulated Annealing. E simula a variação dos estados de um sistema físico a energia constante. O algoritmo *Otimização Microcanônica* é uma alternativa ao AM. Ele alterna-se entre duas fases: inicialização e amostragem. Na primeira aceita apenas movimentos de melhora, na outra aceita movimentos randômicos

com um certo grau de liberdade.

O método Busca Tabu usa o critério de aspiração mais simples, o movimento deixa de ser tabu se tem melhor valor que a melhor solução guardada.

O procedimento Intraturmas-Interturmas é baseado em caminhos mínimos e é aplicado sempre que encontra-se uma solução sem inviabilidade do tipo 1. Primeiro ele é aplicado com o objetivo de corrigir qualquer inviabilidade do tipo 2 (se existe alguma tal inviabilidade), e em seguida novamente com o objetivo de melhorar a avaliação dos critérios desejáveis.

O procedimento é semelhante nas duas vezes. Assim, supondo que temos um horário viável ($f_1 = f_2 = 0$), vamos descrever o método Intraturmas. Para cada turma é construído um grafo cujos vértices são os horários da turma e as arestas dirigidas h_1h_2 indicam que a aula que ocorre no horário de origem da aresta h_1 pode ser transferida para o horário de chegada h_2 sem causar qualquer inviabilidade. Logo, o professor da aula em h_1 deve estar desocupado em h_2 e demais restrições da aula devem ser respeitadas em h_2. A cada aresta é associado um peso que indica a variação de f_3 restrita ao professor envolvido. Daí um ciclo de custo negativo garante a realocação de todas as aulas envolvidas e pressupõe um custo menor na parcela f_3 da função objetivo para o quadro de horários. Contudo como um tal ciclo pode envolver mais de uma vez um mesmo professor, o custo pode não ser menor e mesmo alguma inviabilidade pode surgir, por isso, após trocar as aulas de um ciclo negativo candidato, deve-se fazer uma avaliação. Uma vez desaprovado ele é evitado. Após uma troca determinada por um ciclo de custo negativo o grafo é atualizado. E enquanto houverem ciclos de custo negativo (não evitados) no grafo da turma, são feitas as trocas correspondentes. O mesmo procedimento é executado para cada turma.

Em seguida o procedimento Interturmas é aplicado se existem ainda arcos de custo negativo. Digamos que exista uma aresta h_1h_2 da turma c com custo negativo (para o professor p), e o professor $\bar{p}$ dando aula em h_2 para c está ensinando em uma outra turma c' no horário h_1. Neste caso, se houver um caminho no grafo de c' de h_2 para h_1, cujo custo em c' somado ao custo de h_1h_2 em c for negativo, considera-se que existe um ciclo de custo negativo envolvendo as duas turmas ligadas pelos horários h_1 e h_2, e que podemos transferir o professor $\bar{p}$ da turma c para a turma c' no horário h_2 e da turma c' para a turma c no horário h_1 (com custo zero). Observe a figura 5.2. Como no procedimento Intraturmas, após trocar as aulas de um ciclo negativo candidato deve-se fazer uma avaliação. Uma vez encontrado um ciclo de melhora, são feitas as trocas, atualizações e o procedimento Intraturmas é chamado novamente, pois pode produzir melhora promovida pelas alterações.

A geração de uma solução inicial é construtiva. Ordenando os horários mais críticos e aulas mais críticas, usa uma LCR. Tenta alocar a próxima aula (sorteada em LCR) de forma viável, caso não seja possível permitindo inviabilidade do tipo 2, e se ainda assim não for possível permitindo inviabilidade do tipo 1.

Foram feitos testes com as meta-heurísticas BT, SA, AM e OM, a partir de uma solução inicial gerada pelo método descrito a pouco. E também uma adaptação destas usando o procedimento Intraturmas-Interturmas: BT-II, SA-II, AM-II, OM-II e GBT-II; esta última trata-se de um modelo GRASP cuja fase de busca local é Busca Tabu, e também chama II. A maneira como II foi introduzido nas meta-heurísticas foi a mesma, sempre que uma solução sem inviabilidade do tipo 1 era encontrada pela primeira vez para um dado valor da função objetivo, o método

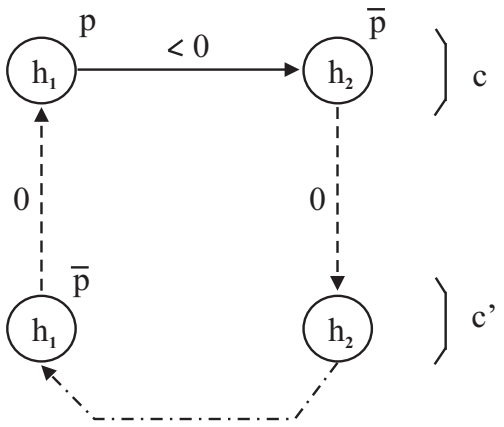


Figura 5.2 Procedimento Interturmas. Aqui apresentamos um ciclo envolvendo o grafo de duas turmas, com uma aresta h_1h_2 de custo negativo em c e um caminho em c'. Este ciclo tem custo negativo se o custo do caminho de h_2 a h_1 em c' somado ao custo de h_1h_2 em c é um valor negativo. Após as trocas, o professor $\overline{p}$ terá aula nos mesmos horários, mas nas turmas trocadas, o professor h terá sua aula em c num novo horário h_2 (ao invés de h_1) e os demais professores envolvidos no ciclo conforme as alterações indicadas pelas arestas do caminho em c'.

II era executado. A restrição quanto a uma vez por valor da função objetivo foi imposta para impedir que a meta-heurística tivesse seu tempo aumentado muito por II.

Foi observado que cada adaptação com II produziu melhores resultados que o algoritmo original. Melhoras acima de 21% em média para SA e OM, no caso de AM de 26% em média, mas no caso de BT a melhora foi de $2,5$% em média. Isto não indicando que o algoritmo BT-II seja menos eficiente que as demais adaptações, pelo contrário, indicando que o puro BT tem um desempenho já muito bom, uma vez observada a classificação geral e esta percentagem.

Os resultados indicam a seguinte classificação dos algoritmos: 1) GBT-II, 2) BT-II, 3) OM-II, 4) SA-II, 5) BT, 6) AM-II, 7) SA, 8) OM e 9) AM.

Novamente temos uma adaptação com Busca Tabu como sendo o melhor método entre os avaliados.

O autor escreveu vários outros trabalhos no tema junto a outros autores. Os artigos [SMO00], [SMO01], [SOM03], e [SOS04] trazem o algoritmo GBT-II com alguma variação, no caso de [SOM03] é usada o procedimento de reinicialização como uma estratégia de diversificação. Em [SdCG02] apresenta um método híbrido, um algoritmo genético que aplica o método BT na melhor solução da população gerada para refinamento desta, uma vez que sem isto o modelo encontra dificuldades para encontrar soluções viáveis.

Já em [SOa05] são apresentados modelos **BT**, usando o movimento que troca dois elementos numa linha, com estratégias de diversificação. Além da lista tabu existem as *memórias de termo longo*. O número de iterações que um movimento permanece na lista tabu é variável e depende de uma escolha aleatória num dado intervalo em torno de um parâmetro, denotado por *período tabu central* (quando o movimento entra na lista tabu). As memórias de longo termo são de dois tipos: *baseadas em transição* ou *baseadas em residência*. Na primeira são guardados para cada professor e turma o número de movimentos usados envolvendo os dois.

Na segunda é computado o número de vezes que uma dada lição ocorre num dado horário. Sempre que o método tem um certo número de iterações sem melhora o processo de diversificação é ativado, também por um um número de iterações já definido. Este processo consiste em influenciar a escolha por movimentos envolvendo encontros de professores e turmas para os quais foi computada pouca "transição", ou envolvendo alocações não usuais para encontros (baseada em residência), ou ainda os dois tipos, através de penalidades acrescidas ao valor da função objetivo. Sempre que a melhor solução guardada é atualizada, as memórias de longo termo são esvaziadas.

Uma razão de transição ou de residência é definida pela razão entre o valor atual guardado na memória e o valor médio desta posição da memória. As penalidades são dadas pelo produto do valor atual da função objetivo pela razão de transição (ou de residência) no caso de apenas um elemento do movimento representar uma aula, ou pela média das razões associadas às duas aulas.

Os experimentos foram feitos para BT e suas adaptações usando estratégia de diversificação com memória de longo termo baseada em transição (BTT), baseada em residência (BTR), e baseada nas duas (BTTR), todos com período tabu central. Também tiveram seu desempenho comparado com GBT-II. É interessante observar que BT com período tabu central obteve valores próximos a GBT-II, e em sua maioria melhores. Os algoritmos usando estratégia de diversificação foram significativamente melhores que GBT-II e BT, também rodando com tempo limite fixado. O algoritmo que apresentou melhores resultados foi BTTR. Assim temos uma formulação mais simples, mais robusta e mais rápida que GBT-II.

Vânia N. de Sousa em sua dissertação [dS06] apresentou um modelo que uni **Busca Local Aleatória** e **Busca Tabu** (BLA-BT), também usando movimentos de troca de dois símbolos numa linha da comum estrutura de matriz.

O problema tem as mesmas restrições para viabilidade apresentadas no trabalho de Marcone Souza. E além das mesmas características desejáveis, haviam também o espalhamento das aulas de uma disciplina numa turma pelos dias da semana (dias alternados), evitar aulas não geminadas de uma mesma disciplina numa turma num dia, evitar que o número de aulas de Educação Física ocorrendo num horário supere o número de Quadras.

Após encontrar uma solução inicial por método construtivo parcialmente guloso, segue-se aplicação do procedimento de Busca Local Aleatória. Ele consiste, em cada iteração, da aplicação do melhor movimento de melhora escolhido numa vizinhança aleatória da solução atual. E, no caso deste movimento envolver sobreposição de professores numa turma é aplicado em seguida outro chamado *movimento reparador-1*, ou não havendo este o *movimento reparador-2*. Os movimentos reparadores tem este nome apenas porque são aplicados ao professor do primeiro movimento envolvido na sobreposição ou num dos outros envolvidos (não participantes do primeiro movimento), respectivamente, com o objetivo de diminuir o número de conflitos. São também um movimento simples de troca de dois símbolos numa linha.

Uma vez que o critério de parada é encontrado, o método BT segue da melhor solução de BLA, sem movimentos reparadores e com critério de aspiração. E o processo BLA seguido BT pode se repetir por um dado número de ciclos sempre da melhor solução encontrada. Uma característica interessante da definição de BT aqui é número de iterações de permanência de um movimento como tabu. Dadas as quantidades limite T_{max} e T_{min} de permanência, é determinado

um conjunto $S = \{s_1, s_1 - \alpha, s_1 - 2\alpha, ..., s_1 - n\alpha\}$, com $s_1 \leq Tmax$, $s_1 - n\alpha \geq Tmin$ e $\alpha \in Z^+$. Se numa iteração foi escolhida $s_i = s_1 - (i-1)\alpha$, como a quantidade de iterações que o movimento permanece tabu, na iteração seguinte o movimento que entra na lista recebe s_{i+1} (ou s_1, no caso de $s_i = s_1 - n\alpha$). Isto permite intensificar as buscas em certa região ou diversificar para escapar de ótimos locais, dependendo da dinâmica dos movimentos tabu.

O resultados mostraram que a fase BLA proporcionou uma grande melhora na qualidade da solução inicial, acelerou o tempo para encontrar uma solução inicial, promoveu diversificação dados os ciclos, e uma melhora na qualidade da solução final. O procedimento BLA-BT encontrou sempre uma solução viável, o que não ocorreu em BT puro.

Em 1996 **Andrea Schaerf** já havia apresentado um modelo que uni **BT e RNA**, mais adaptações (veja em [Sch99a]). Neste problema o número máximo de encontros diários de um professor numa turma é uma das restrições relaxadas, e no grupo de restrições para viabilidade toma seu lugar a restrição de que algumas aulas devem ocorrer simultaneamente. Outros requerimentos relativos a características desejáveis além dos que citamos para o trabalho anterior foram o atendimento ao número mínimo e máximo de encontros diários de um professor, evitar períodos indesejáveis para os professores e evitar mover um professor de um lugar para outro entre consecutivos períodos.

Foi usada a estrutura de matriz para representar as soluções, incluindo símbolos que representam horários onde o professor fica disponível no colégio (por exemplo, para substituições). O movimento usado foi a troca de dois símbolos numa linha (de um professor), chamado aqui de *movimento atômico*. E o *movimento duplo* definido por um par deles quando o primeiro movimento causa alguma inviabilidade para corrigir esta (ou parte desta), e definido por um movimento caso contrário.

O método consiste de uma fase RNA (método descrito em 5.0.1) usando movimentos duplos, seguida de uma fase BT usando apenas movimentos atômicos, que se repetem num dado número de ciclos a partir da melhor solução encontrada anteriormente. Uma solução inicial é encontrada de forma construtiva.

Foi usada em BT uma relaxação adaptativa dos pesos relativos aos requerimentos para viabilidade ($W = 20$, bem maiores quando comparados aos demais pesos da função objetivo). São as penalidades quanto a: turmas tendo dois ou mais professores num horário ou horário vago quando devia ter aula, aulas que deveriam ser simultâneas mas não são, e professores ou turmas tendo aulas em horários não disponíveis para estas. A cada iteração os pesos são o produto de W por $\alpha_i, i = 1,2,3$, respectivamente para as restrições. Inicialmente temos $\alpha_i = 1, i = 1,2,3$. Caso ocorram n (foi usado 10) iterações seguidas com soluções apenas viáveis temos $\alpha_i \leftarrow \frac{\alpha_i}{\gamma}$, caso apenas soluções inviáveis temos $\alpha_i \leftarrow \alpha_i \cdot \gamma$, e se de ambos os tipos nada muda. O valor γ é escolhido randomicamente em $[1,8;2,2]$ na ocasião. E se o valor de α_i atinge valores menores que $\alpha_{i,min}$ ou maiores que $\alpha_{i,max}$ são substituídos pelo valor limite. Foram usados $\alpha_{i,min} = 0,01$, para $i = 1,2,3$, $\alpha_{1,max} = 1$, $\alpha_{2,max} = 10$ e $\alpha_{3,max} = 3$. Para garantir que em uma situação de estabilidade não coexistam diferentes origens de inviabilidade.

O gerenciamento da lista tabu é feito por dois mecanismos. O número de iterações em que um movimento permanece tabu é um inteiro sorteado no intervalo limitado pelos valores I_{min} e I_{max}. E um mecanismo de memória curta usa $I_{st} < I_{min}$ para evitar que outro movimento seja feito com um professor e um dos horários usados para ele nos últimos I_{st} movimentos

introduzidos na lista tabu.

O critério de aspiração permite um movimento tabu se tem melhor valor que a melhor solução guardada com relação ao valor da função objetivo sem relaxação. Movimentos que envolvem horários vagos e horários onde o professor fica disponível para alguma atividade que não dar aula são permitidos apenas quando promovem alguma melhora no valor da função objetivo (por exemplo, fechando uma janela). Caso contrário, sua escolha em detrimento de movimentos de piora, não traria qualquer benefício e impediria uma busca mais efetiva.

O método apresentou bons resultados nos testes feitos com diferentes escolas e parâmetros.

Uma observação feita por Schaerf diz respeito a vantagem de métodos interativos permitirem a execução a partir de uma boa solução já encontrada com alterações na definição do problema, mudando o foco para lições ou características mais críticas. E afirma que métodos construtivos são geralmente inaptos para criar um completo quadro de horários. Que em geral alocam 90% a 95% dos encontros, deixando os 10% a 5% restantes para o usuário fazer, o que pode ser extremamente difícil.

Como vimos, várias versões de **BT** tem sido propostas na literatura para tratar o problema de automação de horários escolares. Incluindo funções objetivo dinâmicas, memórias de termo longo, mais de uma lista tabu, complexos critérios (funções) de aspiração, oscilação de estratégias, . . . e especialmente variações da lista tabu (chamada memória de termo curto).

Em [GCS06], Gaspero, Chiarandini e Schaerf trazem uma comparação entre variações de lista tabu para o problema automação de horários de exames. Segundo eles as principais características de uma lista tabu são o *poder de proibição* e a *dinâmica da lista*. O primeiro determina que movimentos são proibidos pelo fato de um dado movimento estar na lista. Podem ser proibidos desde todos os movimentos com algum atributo em comum com este ou apenas aquele(s) com todos os atributos em comum, seu inverso (que, em geral, é o próprio movimento). Já a dinâmica da lista refere-se a maneira como é gerenciada a permanência de um movimento na lista. Pode ser um número fixo de iterações para qualquer movimento, um número inteiro escolhido randomicamente num dado intervalo quando o movimento vai entrar na lista, ou selecionado adaptativamente conforme o estado atual da busca ou algum recente histórico dela.

Mas o que pode ser feito por uma meta-heurística bem formulada se possuir uma definição de movimento deficiente, incapaz de visitar certas soluções? Uma solução considerada ótimo local numa dada vizinhança segundo a definição de movimento usada, pode não ser assim considerada numa outra definição. Pensando nisso, os autores **Gaspero** e **Schaerf** apresentaram uma ferramenta chamada "**Neighborhood Portfolio**" em [GS06].

Este algoritmo explora várias combinações de diferentes movimentos, suas vizinhanças, com diferentes algoritmos de busca local. São definidas operações sobre vizinhanças: *união*, *seqüência* e *composição* de vizinhanças. Na união de vizinhanças qualquer um dos tipos de movimento definidos por elas, chamemos de movimentos atômicos, pode ser executado. Na seqüência de vizinhanças, os movimentos são definidos por uma cadeia de movimentos atômicos destas numa dada ordem. E a composição é mais geral, seus movimentos são também cadeias de movimentos mas não numa ordem definida, cada movimento podendo pertencer a qualquer vizinhança da composição. A combinação entre uma destas vizinhanças, resul-

tado de uma operação sobre vizinhanças ou não, e um algoritmo de busca local é chamada de "searcher", e uma estratégia de solução gerencia a ordem em que elas são aplicadas, sempre a partir da melhor solução encontrada pela anterior.

Os algoritmos de busca usados foram Hill Climbing (HC) e BT. Hill Climbing é um termo que se aplica a uma família de algoritmos de busca local que permitem movimentos apenas de melhora ou que mantém o mesmo valor (movimentos laterais), por exemplo o RNA.

Também foi definido um procedimento de pertubação, para dar maior possibilidade de escapar de áreas de atração para mínimos locais. Este envolve vários movimentos e a noção de sinergia entre eles, para que sejam avaliados aqueles que tem possibilidade de trazer um maior benefício.

Os experimentos foram feitos para os problemas automação de horários de cursos e de exames. E apresentaram resultados melhores do que a aplicação de simples vizinhanças.

Um trabalho que avalia diferentes movimentos no problema automação de horários escolares, [MCR05] de 2005, foi dado por **Melício**, **Caldeira** e **Agostinho Rosa**. Nele são comparados os chamados *movimentos simples*, *simples com heurística* e movimento *duplo intra-classe* num algoritmo **SD** ou **RD** (definidos em 5.0.1). O movimento simples escolhe uma aula, um horário em sua disponibilidade, e avalia se esta possível alocação garante as restrições para viabilidade, em caso positivo aloca, caso contrário deixa fora do quadro de horários. O movimento simples com heurística é executado da seguinte maneira: faz-se um movimento simples, se houve alocação escolhe-se outra aula no mesmo horário que a primeira foi alocada, caso contrário escolhe-se randomicamente outra aula, e alocamos esta outra aula no melhor horário de sua disponibilidade. O movimento duplo intra-classe consiste da escolha randômica de duas aulas de uma mesma classe, a tentativa de trocar os horários destas, e se para qualquer das aulas a alocação traga inviabilidade é escolhido o melhor horário para a outra.

Como durante a busca temos encontros fora da solução, uma solução parcial, a função objetivo possui uma penalidade para estas aulas com peso igual a soma de todas as outras penalidades multiplicadas cada uma pela quantidade máxima de violações da correspondente restrição que podem ocorrer mediante a alocação de uma aula num horário.

Os experimentos mostraram grande melhora nos resultados obtidos pela aplicação de movimentos duplos intra-classe com relação aos demais.

Outros trabalhos que envolvem busca local são rapidamente descritos em [dHLPR06] e [KOP06].

Grande parte dos modelos que usam AG incorporam os chamados reparadores genéticos.

Caldeira e **Agostinho Rosa** apresentaram um **AG** para o problema em 1997, [CR98]. A representação dos indivíduos é feita por uma lista de genes contendo cada um a identificação de um horário, e cuja posição identifica um encontro de uma classe para um assunto, ou um encontro de um professor para lecionar em uma classe. Isto é, cada encontro é representado duas vezes. E como são possíveis conflitos, uma função de reparo é definida.

A função objetivo não é uma expressão linear, possui também termos exponenciais, com o intuito de discriminar maiores violações de certas restrições. Três funções aptidão foram propostas e avaliadas. As melhores foram:

$$F_2(val) = \frac{k_2 \cdot wortsval - val}{k_2 \cdot wortsval - \overline{val}},\ k_2 \in]1, +\infty[,$$

$$F_3(val) = e^{(\ln k_3)\cdot\frac{val-bestval}{\overline{val}-bestval}},\ k_3 \in]0,1[,$$

onde *val* é o valor objetivo de um indivíduo, *worstval* é o pior *val*, *bestval* é o melhor e $\overline{val}$ é valor médio, definidos nesta população.

A reprodução dos indivíduos (cópia) é feita randomicamente, e a probabilidade de reproduzir um indivíduo é proporcional ao seu valor de aptidão. A recombinação é executada com certa probabilidade para pares escolhidos aleatoriamente, através de uma recombinação uniforme, onde cada gene é escolhido randomicamente de um dos pais para formar o primeiro indivíduo filho e os não escolhidos formam o segundo. A operação de mutação é a escolha aleatória de um novo horário para um dado gene, e cada gene tem uma certa probabilidade de sofrer mutação. A função de reparo muda o valor de um gene em conflito escolhendo um horário entre os livres para o professor e a classe, o mais próximo do horário atual.

Um procedimento chamado *ultra-elitismo* é aplicado para manter os melhores indivíduos na população. Dois métodos foram testados. No primeiro, os *n* melhores indivíduos entre os pais e filhos são mantidos na população que sobreviverá, os demais passarão pela seleção para sobrevivência. No segundo, os *m* indivíduos filhos e os *n* melhores pais sofrem uma reprodução conforme aptidão com vistas a uma posterior escolha randômica de *m* indivíduos entre estes, os *n* melhores dentre estes *m* permanecem, e segue-se a seleção para sobrevivência dos demais.

Os resultados experimentais mostraram que o primeiro método elitista trás melhores resultados que o segundo. A função de aptidão F_2 apresentou mais iterações que tiveram o melhor indivíduo da população com valor objetivo abaixo de um dado alvo, 90%, e a função F_3 convergiu mais rapidamente.

Fernandes, **Caldeira**, **Melicio** e **Agostinho Rosa** juntos produziram outro modelo com **AG** em 1998, [FCMR99]. Neste modelo as lições são definidas pelas seguintes informações: classe(s) ou subclasses, código do assunto, tipo ("lecturer", "tutorial", ...), duração em minutos, número de partes, professor(es), sala(s) ou conjunto de salas (para escolha). Um modelo mais geral. A unidade básica do quadro de horários é 60 minutos, as durações das partes das lições são múltiplos desta.

Os indivíduos são representados por listas de genes cuja posição está associada a cada parte de uma lição, e cada parte de uma lição está associada a dois genes vizinhos, um trazendo a informação da sala escolhida e o seguinte o horário onde a parte toma início. Mapas com indisponibilidades de tempo e preferências por horários são avaliados para cada elemento envolvido, e gerados mapas para as lições.

A função de reparo aqui tenta corrigir as inviabilidades dadas por uma parte de uma lição escolhendo um novo horário aleatoriamente entre os horários vagos para os elementos envolvidos, caso exista algum. Isto seguindo uma ordem de prioridades, são avaliadas primeiro: lições com duração mais longa, com maior razão entre a duração e o número de possíveis horários livres, com sala pré-definida, e com professores com maior prioridade.

A função objetivo é não linear, como no trabalho anterior. E a função de aptidão, é dada por:

$$F(cost) = k^{\frac{cost-bestcost}{avaragecost-bestcost}},\ k \in]0,1[,$$

onde *cost* é o valor objetivo de um indivíduo, *bestcost* é o melhor e *avaragecost* é valor médio, definidos nesta população.

A seleção dos indivíduos é feita randomicamente, e a probabilidade de escolher um indivíduo é proporcional ao seu valor de aptidão. A recombinação pode se dar de por *um ponto*, *multi-ponto*, ou recombinação uniforme. Na recombinação por um ponto ou multi-ponto (foram usados 3 e 10 pontos), os indivíduos filhos são formados trocando partes dos genes dos indivíduos pais determinadas por este(s) ponto(s). Uma mutação é dada pela mudança do valor de um gene de forma randômica, conforme uma probabilidade. E como estratégia elitista em torno de 10% dos melhores indivíduos permanecem na população independente da seleção para sobrevivência.

Falemos sobre os melhoramentos usados. Temos a chamada "Best Chromosome Mutation" que cria uma cópia do melhor indivíduo e aplica exatamente uma mutação num gene deste. Quando a função de reparo não consegue resolver todos os conflitos, ela é executada na ordem inversa. E se ainda assim há indivíduos com conflito, o melhor entre estes é copiado e sofre uma mutação, é a "Bed Genes Mutation".

Os experimentos mostraram resultados comparáveis aos manuais. Com duração em torno de cinco horas.

No trabalho [WGO02] de **Wilke**, **Gröbner** e **Oster** com **AG** vários *operadores híbridos* são executados (com dadas probabilidades) sempre que há um certo número de gerações sem significativa melhora, e em seguida AG continua normalmente. São operações concebidas para realizar reparos associados a alguma violação de restrição. Se AG ou AG com operadores híbridos não consegue significativa melhora por um certo número de iterações é aplicado o *operador de reconfiguração* que muda randomicamente os valores das probabilidades associadas a cada operador híbrido e dos parâmetros próprios de AG.

A estrutura usada para uma solução é uma lista de matrizes, uma para cada classe, que cujas linhas estão associadas a dias, colunas a horas, e cada posição tem informações sobre a lição (classe, assunto, professor), sala e outras lições que devem ocorrer simultaneamente.

A função de aptidão de um indivíduo é inversamente proporcional ao número de violações de restrições por este. A seleção possui uma *estratégia elitista*, que é manter os dois indivíduos com melhor aptidão, e a seleção dos demais segue randomicamente com probabilidade baseada na aptidão. A recombinação se dá de duas maneiras: por um ponto ou dois na lista de classes da solução, assim é trocada parte das classes dos indivíduos determinada por este(s) ponto(s); ou é feita uma recombinação uniforme, onde cada classe é escolhida randomicamente de um dos pais para formar o primeiro indivíduo filho e as restantes formam o segundo. O operador mutação pode trocar duas lições de horário, mover uma lição para um horário vago, ou mudar randomicamente a sala de uma lição. E foi usada também a Best Chromosome Mutation.

Alguns dos operadores híbridos usados foram: mover lições pré-alocadas para seu correto horário, mudar a seqüência de aulas num dia quando há aulas que devem ser geminadas, mudar randomicamente uma lição de horário se há conflito para o professor ou para a sala, mudar uma lição de horário se há mais encontros deste mesmo assunto na classe durante um dia do que o permitido.

Foram feitos testes (com duração de dez horas cada) com AG, AG com operadores híbridos, e AG com operadores híbridos e operador de reconfiguração. O último teve notável melhor desempenho.

Em [RS06a] encontramos um algoritmo híbrido com **AG** e **BT**. Aqui as mutações tem o

papel principal de reparador genético, e isto pode ser feito de forma dirigida por informações relativas a violação de restrições por genes (VDM), ou através de BT. Neste segundo caso são usadas duas listas tabu, uma longa e outra curta, para evitar que estados de genes ou mutações se repitam. O algoritmo híbrido com AG e BT teve melhor desempenho que o algoritmo AG simples e o AG com VDM.

Um trabalho bem diferente dos demais é o de **Geraldo Ribeiro Filho** e **Luiz Lorena** [FL01] que trás um modelo chamado **Algoritmo Genético Construtivo** (AGC). Nele o problema é considerado um *clustering problem*. O interesse maior é formar p grupos com pares de professor e turma que podem ter aula ao mesmo tempo, sem conflito, cada grupo correspondendo a um período. Ao invés de indivíduos são avaliados "*esquemas e estruturas*" numa base comum, e são utilizadas duas funções objetivo nesta avaliação. Os pares (professor, turma) são representados por colunas com zeros e uns, com 1 nas duas posições que identificam o professor e a turma. Cada esquema é codificado por uma seqüência de símbolos 0, 1, e ♯, que tem a função de identificar colunas pertencentes a algum grupo, p colunas que identificam os p grupos, e colunas não tratadas no momento, respectivamente. As estruturas diferem dos esquemas por tratarem todas as colunas, não têm o símbolo ♯. Os operadores são definidos de forma bem particular.

Um **algoritmo genético multiobjetivo** chamado Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA) foi usado para tratar o problema em 2000 por **Carrasco** e **Margarida Pato**. Este modelo incorpora dois distintos objetivos, minimizar a insatisfação das restrições, para viabilidade e as relativas a características desejáveis, que dizem respeito às classes ou minimizar a insatisfação das restrições que dizem respeito aos professores. Considera-se que as restrições para viabilidade dizem respeito ao problema globalmente, e por isso tem suas penalidades adicionadas aos dois objetivos simultaneamente.

A avaliação dos indivíduos com relação aos distintos objetivos segue o conceito de *ótimo de Pareto*. Cada solução é classificada em termo de dominância por outra solução. Uma solução é dita *não dominada* se não há qualquer solução entre as demais melhor ou igual em todos os objetivos e melhor em pelo menos um. O que significa que se uma solução for melhor com respeito a algum objetivo precisa piorar com relação a algum outro.

Pelo processo de "ranking" dado por Goldberg (1989), o valor de aptidão de uma solução é então determinado pelo relativo grau de dominância da solução. A *frente de Pareto*, formada pelas soluções não dominadas, recebe rank 1, as próximas não dominadas (uma vez desconsideradas as soluções já classificadas) rank 2, e assim sucessivamente até que todas tenham sido classificadas. Daí, para obter o valor de aptidão basta inverter os valores de rank.

Mas para evitar perda de informações e convergência para poucas soluções, foi usado um procedimento de *fitness sharing*, o valor da função aptidão passa ser o valor dado pelo processo de Goldberg dividido por um valor associado ao número de similares indivíduos com o mesmo rank.

A representação dos indivíduos usa matrizes cujas linhas correspondem a salas e colunas a horários, e as posições identificam lições, que neste caso são definidas pela(s) turma(s), professor, duração (número de períodos), assunto e sala(s) possível (possíveis).

A seleção dos pares de indivíduos é randômica conforme os valores da função de aptidão. Após a recombinação os filhos substituem os pais na população. E alguns indivíduos são es-

colhidos randomicamente para sofrer alguma esporádica mutação. E nova avaliação da aptidão é realizada.

Antes de retomar o ciclo descrito no parágrafo anterior um procedimento é executado para guardar boas soluções. Existe um população elitista secundária. Nela são guardadas soluções não dominadas. Na população principal são identificadas soluções não dominadas, e estas são avaliadas quanto a similaridade com as soluções na população secundária. Se são suficientemente diferentes das que lá estão são candidatas a entrar neste conjunto, caso contrário não. Uma vez reunidas à segunda população é feita uma avaliação com relação a dominância, se novas soluções dominam outras, então estas dominadas são retiradas da população secundária.

A recombinação gera um filho A' escolhendo entre 80 e 95% das lições de um pai, digamos A, pertencentes aos professores que tem melhor valor parcial da função objetivo relativa aos professores, e as demais lições são tomadas do outro indivíduo pai B. É "guiado por professor". O segundo filho B' é formado de forma semelhante de B e A, mas é "guiado por classe". As lições que tomadas do segundo pai promoveriam conflito com relação a representação, são alocadas noutra posição (sala, horário) possível.

A mutação se dá em 1% das lições. As lições escolhidas são retiradas da solução e um procedimento encontra a melhor maneira de realocá-las, com mínimo acréscimo da penalização total.

Foram feitos testes combinando a presença ou ausência da secundária população e a função de aptidão obtida pelo processo de Goldberg ou "fitness sharing". Os melhores resultados foram obtidos na presença da população secundária e função aptidão de Goldberg, e também foi obtido o maior número de soluções não dominadas e número destas viáveis, mas com o grau de similaridade médio de 67%. Já a combinação de população secundária e "fitness sharing" obteve semelhantes bons resultados, segundo maior conjunto de soluções não dominadas e viáveis, e um grau de similaridade entre as soluções de 34%. O que permite uma maior variedade de opções para escolha da solução que mais agrada.

Nossa intenção com esta seção não foi cansar o leitor, mas trazer algumas informações da maneira como vem sendo tratado o problema de automação de horários escolares com meta-heurísticas. Quais adaptações foram reconhecidas necessárias ou eficientes para alcançar certos objetivos; comparações entre métodos, entre definições de movimentos, operações, parâmetros, estratégias de intensificação ou diversificação, ... Enfim, trazer alguma familiaridade com o problema e a dinâmica usada em sua solução.

Nossa explanação não teve a pretensão de ser completa, seja com relação a totalidade dos trabalhos existentes neste campo, seja com relação a cada trabalho citado. Nem seguiu uma ordem cronológica. A ordem de apresentação dos trabalhos seguiu uma linha de discussão que buscou alcançar o objetivo citado no parágrafo anterior.

Agora certamente se farão mais claras as razões que determinaram várias de nossas escolhas na tentativa de desenvolver uma ferramenta para tratar o problema. E também nossas perspectivas de futuros trabalhos.

CAPÍTULO 6

O Grafo Híbrido

O Grafo Híbrido (*GH*) foi criado numa tentativa de representar algumas relações entre os eventos, encontros letivos, que pretendemos alocar e entre estes e os possíveis horários. Assim, obter uma maior compreensão do problema e de como tratá-lo. Felizmente isto aconteceu.

Inicialmente vamos pensar no problema básico STP. Cujas restrições correspondem às três primeiras do nosso problema, não termos conflitos para os professores nem para as turmas (i e ii) e respeitarmos as disponibilidades de tempo (iii).

Podemos representar num grafo simples, sem arestas em paralelo nem laços, os requerimentos i, ii e iii da seguinte forma. Construímos um grafo completo cujos vértices correspondem aos horários $h \in H$. Acrescentamos um conjunto de vértices E representando cada encontro, onde cada vértice traz a informação da classe e do professor do encontro. E a cada dois vértices deste conjunto com professores iguais ou classes iguais acrescentamos uma aresta entre eles. Neste ponto, temos todas as chamadas *arestas de proibição*. As arestas de proibição formam o subgrafo completo em H, mais a união não disjunta de cliques, cada um determinado por todos os encontros de uma dada classe ou de um dado professor. Resta juntarmos a estas as *arestas de permissão*, que são as arestas que ligam cada encontro a cada horário possível para sua alocação. Chamamos este grafo de híbrido graças aos dois distintos tipos de arestas que possui.

Os vários encontros de um professor e uma turma para as aulas de uma disciplina são representados por tantos vértices quantos são os encontros. Vértices diferentes, embora contenham as mesmas informações.

Todo triângulo contendo exatamente duas arestas de permissão indica que não é possível fazer as duas alocações correspondentes a estas e satisfazer ao mesmo tempo i e ii ou determinar um único horário para um encontro (veja Figura 6.1). No máximo uma alocação destas é permitida. Por construção, só alocações correspondentes a arestas de permissão garantem iii.

Agora passaremos a representar problemas mais complexos com o *GH*. Com os vértices que representam os encontros trazendo a informação de todos os elementos envolvidos e novas arestas de proibição entre eles, conforme estes elementos em comum. Sabendo que, dado o problema de automação de horários escolares:

Proposição 6.1 (Regra)**.** *Qualquer solução viável deve respeitar a regra: para cada triângulo do GH contendo exatamente duas arestas de permissão a solução tem no máximo uma alocação correspondente a uma destas; e toda alocação corresponde a alguma aresta de permissão.*

Lembramos que as arestas de permissão ligam cada encontro a cada horário possível para sua alocação, e que isto significa horários que respeitam a disponibilidade de tempo dos elementos envolvidos na aula, que podem ser do tipo professor, turma ou sala.

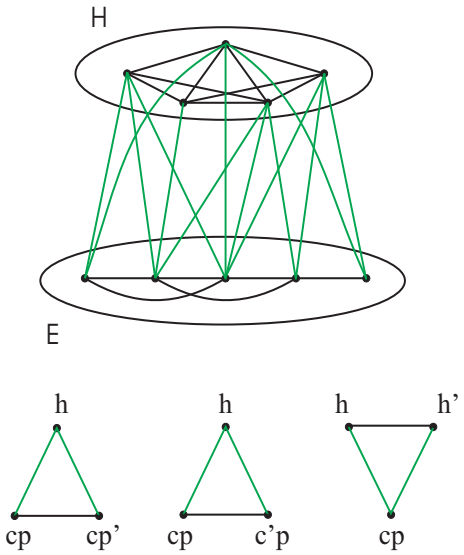


Figura 6.1 Grafo Híbrido. Neste as arestas de proibição estão em preto e as de permissão em verde. *E* está indicando o conjunto de vértices representando cada encontro e *H* o conjunto de horários. Observe também os possíveis triângulos com duas arestas de permissão. Nesta representação somente as informações de professor e turma do encontro estão sendo avaliadas.

Demonstração. Qualquer alocação de uma solução viável deve respeitar o requerimento iii, logo usa um horário possível para o encontro e assim corresponde a alguma aresta de permissão pela definição destas no *GH*. Suponhamos agora que existe uma solução viável para o problema que possui alocações correspondentes às duas arestas de permissão de um triângulo em *GH*. Este triângulo não pode possuir apenas um vértice representando encontro, pois caso isto fosse verdadeiro a solução teria alocado dois horários para o mesmo evento. Então, temos um vértice representando um horário *h* e dois representando encontros. Como há uma aresta de proibição entre estes, eles possuem um elemento em comum (do tipo professor, turma ou sala) e como em um momento um único evento pode ter a participação de qualquer elemento (restrições i, ii e iv) chegamos a um absurdo. □

Avaliemos o problema com o conjunto de salas especiais *S*. Uma vez definida a sala especial de cada encontro que requer alguma, garantindo xiv', acrescentamos a informação da sala ao vértice que representa o encontro. Arestas de proibição ligando encontros que possuam a mesma sala serão construídas. E qualquer solução que respeite a regra da Proposição 6.1 garantirá também a satisfação do requerimento iv.

No caso de haverem turmas especiais, subturmas e união de turmas, as arestas de proibição devem, além de ligar encontros com estes elementos em comum, também ligar os vértices dos encontros destas com os vértices das turmas que a originam. Na construção das arestas de permissão as turmas que originam uma turma especial são novamente importantes pois definem a disponibilidade de tempo desta. Uma solução que respeite a regra satisfará aos requerimentos ix e x então.

Na Figura 6.2 temos algumas arestas de proibição que fariam parte desta representação.

Figura 6.2 Outras arestas de proibição. Observamos as arestas de proibição no caso em que são requeridas salas especiais, existem encontros com subturmas ou união de turmas. Nos dois últimos casos são representados apenas os elementos dos encontros que implicam na existência das arestas de proibição.

Como todos os encontros com alocação estática devem ter seus horários respeitados (xii), cada um deve ter apenas a aresta de permissão para o seu horário. Pois embora hajam outros horários possíveis para todos os elementos envolvidos, estes já não são realmente possíveis para o encontro.

Havendo professor substituto para algumas disciplinas. Para cada encontro determinado para ter o professor substituído, seu substituto para esta disciplina desta turma não pode lecionar no mesmo horário alocado para este encontro (restrição xviii). Além disso, o professor substituto deve ser considerado um dos elementos do encontro. Portanto, deve ser levado em conta quando da avaliação dos horários possíveis para o encontro, e arestas de proibição ligarão cada encontro do professor substituto aos encontros que substituirá o professor.

Observe que citamos oito das dezessete restrições de nosso problema. Falemos das restrições não citadas. As restrições v, vii e viii contemplam características quantitativas do problema. É bem verdade que as restrições que citamos podem ser traduzidas de forma quantitativa, mas são essencialmente qualitativas, *restrições relacionais* que tratam entre encontros mais as restrições que determinam o respeito aos horários possíveis e às alocações estáticas. As restrições vi (sobre aulas geminadas) e xi (sobre aulas simultâneas) são relacionais, mas não foram representadas no *GH*. Como na presente avaliação os vértices trazem todas as informações do encontro, temos salas e professores determinados, as restrições xiii, xiv' (também xiv), xv e xvi devem ser satisfeitas a priori quando são determinados estes elementos.

Definição 6.1 (Solução quase viável)**.** Dado um problema de automação de horários escolares e a representação de seu *GH*, a qualquer solução que satisfaça a regra da Proposição 6.1 em *GH* e também a restrição xi sobre aulas simultâneas chamaremos *solução quase viável*.

Podemos de forma ingênua tentar construir uma solução quase viável a partir do *GH* para um problema que não possui aulas simultâneas. Começando por ordenar os encontros numa seqüência crescente em relação ao grau dos vértices que os representam. Isto é, uma lista crescente com relação a disponibilidade de tempo. E em seguida, escolhendo um dos horários possíveis determinados pelas arestas de permissão, fazemos a alocação de cada encontro se é possível fazê-lo respeitando a regra. Muito provavelmente, alguns encontros não poderão ser alocados, dadas as arestas de proibição que os ligam a encontros já alocados anteriormente para todos os horários indicados pelas arestas de permissão.

Quando nenhum destes horários pode ser usado podemos tentar liberar um dos horários h mudando a alocação do encontro e ligado pela aresta de proibição ao encontro não alocado de h para um outro h'.

Mas é preciso lembrar que esta alteração exige a avaliação das arestas de permissão de h'

(inclusive a existência de eh') e as arestas de proibição de e, para respeitarmos a regra. Caso contrário, esta mudança pode gerar outras para corrigir o desrespeito da regra.

Destas idéias surgiu nosso interesse em analisar um certo subgrafo de GH, que é nosso tema da próxima seção.

6.1 O subgrafo $GH(h,h',\mathscr{S})$

Dado um problema de automação de horários escolares, seu GH e uma solução $\mathscr{S}$, mesmo parcial. Definimos:

Definição 6.2. Sejam h e $h' \in H$, $h \neq h'$, denotemos por $E(h,h',\mathscr{S})$ ao conjunto dos vértices de E que representam encontros alocados em $\mathscr{S}$ para estes dois horários. O subgrafo $GH(h,h',\mathscr{S})$ é o subgrafo induzido $GH[\{h,h'\} \cup E(h,h',\mathscr{S})]$, cujas arestas são as que estão entre estes vértices.

Para simplificar a notação, algumas vezes quando não houver dúvida sobre qual solução estamos falando usaremos $E(h,h')$ e $GH(h,h')$ ao invés de $E(h,h',\mathscr{S})$ e $GH(h,h',\mathscr{S})$.

Denotaremos por X ao conjunto de arestas de proibição de $GH(h,h')$ e por Y ao conjunto das arestas de permissão. O subgrafo $GH(h,h')$ restrito às arestas de proibição será denotado por $GH(h,h') \mid X$.

Analisemos este subgrafo no caso de STP, onde os elementos são apenas do tipo classe padrão e professor, e temos uma solução $\mathscr{S}$ que atende a regra da Proposição 6.1. Olhando apenas para as arestas de proibição entre os encontros observaremos apenas circuitos pares e caminhos simples de encontros em horários alternados. Temos também:

Proposição 6.2. *Para qualquer problema que tenha como elementos envolvidos nos encontros apenas classes padrão e professores (não substitutos), e uma solução $\mathscr{S}$, mesmo parcial, atendendo a regra da Proposição 6.1. Para quaisquer h e $h' \in H$, $h \neq h'$, o subgrafo $GH(h,h') \mid X$ tem como componentes apenas circuitos pares e caminhos simples de encontros em horários alternados, mais a componente formada por uma aresta ligando h e h'.*

De forma geral, como as arestas de proibição entre os encontros de GH representam pelo menos um elemento comum aos encontros adjacentes, chamaremos à relação "ter um dado elemento comum" um *elo de ligação*, que será caracterizado por este elemento. Uma aresta pode representar mais de um elo de ligação entre dois encontros. Por exemplo, no caso de dois encontros de uma turma com o professor de uma disciplina a única aresta de proibição entre estes representa pelo menos dois elementos comuns, o professor e a turma, que caracterizam dois elos de ligação.

Cada elo indica um elemento que já participa de dois eventos. Sendo $\mathscr{S}$ uma solução que atende a regra da Proposição 6.1, estes encontros ocorrem em horários diferentes, em horários h e h'. Logo este elemento não pode fazer parte de nenhum outro encontro no subgrafo $GH(h,h')$ além daqueles dois que está ligando e, portanto, não temos elos repetidos neste. Daí, qualquer outro elo partindo de um destes encontros em $GH(h,h')$ deve ser com outro elemento do encontro.

Provemos, então, a Proposição 6.2.

Demonstração. Dado que a solução $\mathscr{S}$ atende a regra da Proposição 6.1, encontros ligados por arestas de proibição devem possuir horários diferentes e não temos elos entre os encontros de $E(h,h')$ repetidos. Como os elementos são apenas do tipo classe padrão e professor (não substituto), seus elos também o são. E como cada aresta de proibição representa pelo menos um elo, cada encontro pode pertencer no máximo a duas arestas de proibição. Logo, as componentes de $GH(h,h') \mid X$ relativas a estes vértices só podem ser circuitos ou caminhos simples em horários alternados. O que faz dos circuitos pares. A existência da componente formada pela aresta hh' é dada por construção de GH. □

Outra razão para que os circuitos sejam pares é que os elos alternam-se nos tipos turma e professor. Observe a Figura 6.3.

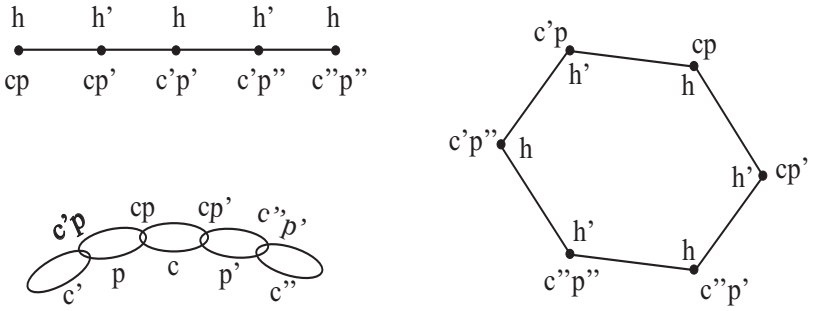


Figura 6.3 Subgrafo $GH(h,h',\mathscr{S})$. Exemplo de componentes de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$, cujas arestas são as de proibição. E representação dos "elos" de uma parte do ciclo.

Para mudar o horário de um encontro e de h para h' (ou vice-versa) e continuar a atender a regra podemos, uma vez verificadas as arestas de permissão em $GH(h,h')$, trocar todos os horários dos encontros na componente de $GH(h,h') \mid X$ que contém e. Não é possível trocar apenas parte da componente e manter a regra dadas as arestas de proibição.

No caso de termos apenas elementos do tipo turma padrão e professor (não substituto), sem alocação estática, basta verificarmos a existência de arestas de permissão dos encontros representados pelos vértices extremos dos caminhos simples para os horários que assumiriam na troca. Pois cada elemento que caracteriza um elo já participa de dois eventos nos horários h e h', e os encontros internos (dos caminhos simples e todos os dos circuitos) tem grau dois. Isto é, todos elementos destes encontros tem disponibilidade para os dois horários.

Os professores dos encontros internos continuarão dando aula nos dois horários mas em turmas diferentes. Já para o professor de um encontro num vértice extremo que não caracterizou o elo, feita a troca, obtemos um novo horário de aula alocado e sua liberação para o horário anterior. Isso pode acontecer com dois professores (elos extremos caracterizados por turmas). Analogamente acontece com os elementos turmas.

Neste contexto, são as trocas nos caminhos simples que podem liberar um horário para aquele encontro não alocado. Embora trocar os horários de um circuito de $GH(h,h') \mid X$ não traga qualquer mudança nos horários livres dos quadros de horários de qualquer elemento, essa troca pode trazer um novo cenário que permita outras trocas. Por exemplo, em componentes de encontros de $GH(h,h'')$ ou de $GH(h'',h')$ restrito às arestas de proibição.

Havendo outros elementos, turmas especiais, salas, professores substitutos, as componentes de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$ têm as mais diversas formas e faz-se necessário verificar a aresta de permissão em $GH(h,h',\mathscr{S})$ de cada encontro para o horário que vai assumir na troca, a fim de mantermos o atendimento da regra.

6.2 O Movimento

Obtida uma solução quase viável $\mathscr{S}$, a alocação dos horários de todos os encontros respeitando a regra na Proposição 6.1 e as aulas simultâneas, nos interessa poder encontrar outras soluções quase viáveis a partir desta.

A idéia é definir um movimento sobre o *GH* associado que garanta a passagem de uma solução quase viável para outra próxima. E, assim, trabalharmos com métodos de busca local no espaço destas soluções. Lembramos que elas atendem a quase todas as restrições relacionais do problema que definimos como objeto de nosso trabalho, exceto aulas geminadas.

Nem todas as componentes de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$ definem um movimento. Por não ser possível a inversão de horários dadas as arestas de permissão, Y, ou por causa das aulas simultâneas. Mas qualquer movimento que troque o horário de um encontro numa componente deve trocar todos os horários dos demais encontros desta componente, devido a X. Logo os movimentos devem ser caracterizados por uma ou mais componentes de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$. Vamos construir, então, para cada $\{h,h'\} \subset H$, $h \neq h'$, o conjunto $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ cujos elementos são conjuntos de encontros de uma ou mais componentes de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$, para os quais a inversão de horários leva a uma solução ainda quase viável.

Seja $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}) = \emptyset$. Dadas as componentes de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$ com encontros, as arestas de permissão Y, e $G = \{G_1,\ldots,G_r\}$, o conjunto dos grupos de aulas simultâneas do problema. Descartemos todas as componentes que possuem apenas dois encontros com os mesmos elementos (cuja troca não resultaria numa solução diferente). A cada componente restante K, correspondamos um conjunto formado por seus encontros T_K e o acrescentemos em $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$. Agora, para cada G_i $(i = 1,\ldots,r)$ busquemos entre os elementos de $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ aqueles que possuem encontros das aulas simultâneas deste grupo, removamos estes conjuntos e acrescentemos a $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ a união deles. Por fim, descartemos todos os elementos de $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ que possuem qualquer encontro sem aresta de permissão para a troca (isto inclui encontros com alocação estática). No Algoritmo 6.5 há um pseudo-código desta construção.

Por vezes, usaremos $\mathscr{T}(h,h')$ em lugar de $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ não causando isto confusão.

Assim, definimos:

Definição 6.3 (Movimento)**.** Dado um problema de automação de horário escolar, seu *GH* e uma solução quase viável $\mathscr{S}$. Definimos um *movimento* desta solução $\mathscr{S}$ até outra $\mathscr{S}'$ também quase viável a qualquer inversão de horários, de h para h' ou vice-versa, para todos os encontros em um conjunto $T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$, $\forall\{h,h'\} \subset H$, $h \neq h'$. Denotamos este movimento por $mov(h,h',T)$, e sua aplicação por $\mathscr{S}' = mov(h,h',T)\mathscr{S}$.

Trabalhar com este tipo de movimento é realmente proveitoso no sentido de que mantemos a satisfação de nove das dezessete restrições do nosso problema se começamos com uma solução viável ou quase viável. Lembramos que, como tratamos de uma representação dos

Algoritmo *Construção de* $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$
Entrada
$\mathscr{C}$: conjunto com cópias das componentes conexas de $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$ com encontros.
Y: conjunto das arestas de permissão em $GH(h,h',\mathscr{S})$.
$G = \{G_1,\ldots,G_r\}$: o conjunto dos grupos de aulas simultâneas do problema.
Saída $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$

```
1  T(h,h',S) ← ∅
2  para cada K em C faça
3      se V_K = {e,e'} e e ≡ e' {Encontros de uma mesma disciplina numa turma.} então
4          {Desconsidere V_K.}
5      senão
6          T_K ← {e : e ∈ V_K}
7          T(h,h',S) ← T(h,h',S) ∪ {T_K}
8  para cada G_i, (i = 1,...,r) faça
9      T_{G_i} ← ∅
10     para cada T em T(h,h',S) faça
11         se T ∩ G_i ≠ ∅ {T possui algum encontro destas aulas simultâneas.} então
12             T_{G_i} ← T_{G_i} ∪ T
13             T(h,h',S) ← T(h,h',S) − {T}
14     T(h,h',S) ← T(h,h',S) ∪ {T_{G_i}}
15 para cada T em T(h,h',S) faça
16     podeT ← verdade
17     para cada e em T faça {Verifique se é possível a inversão de horários.}
18         se (h_e = h e ∄ eh' ∈ Y) então
19             podeT ← falso
20             pare este laço {Vá para a linha 24.}
21         senão se (h_e = h' e ∄ eh ∈ Y) então
22             podeT ← falso
23             pare este laço {Vá para a linha 24.}
24     se podeT = falso então
25         T(h,h',S) ← T(h,h',S) − {T}
26 devolva T(h,h',S)
```

Algoritmo 6.5 Construção do conjunto $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$. Aqui V_K é o conjunto de vértices de K.

encontros com todos os seus elementos, já estão determinados os professores e salas especiais dos encontros, mais quatro restrições estão garantidas a priori: xiii, xiv', xv e xvi. Restando apenas as restrições v, vi, vii e viii.

Escolher que movimento executar numa busca por horários viáveis melhores precisa levar em conta apenas os requerimentos de viabilidade restantes e as características desejáveis.

Um único movimento pode envolver mais que uma dezena de encontros. No caso de termos apenas turmas padrão ou professores (não substitutos), este número pode chegar ao valor máximo de duas vezes o número de turmas que possui os dois horários h e h'.

É como um efeito dominó: quando derrubado um dominó, aqueles que estão próximos são também derrubados, e os vizinhos destes, e assim sucessivamente; restando aqueles que estão suficientemente distantes.

Para exemplificar, vejamos um pequeno exemplo que tem bastante complexidade. Na verdade trata-se do problema definido pelas seis primeiras turmas e suas subturmas do problema CAp2007. Vamos chamá-lo de CAp0. A Figura 6.4 e a Figura 6.5 mostra uma solução viável $\mathscr{S}$ encontrada na primeira parte de AST. Temos duas turmas de cada ano letivo indicadas pelas letras A e B após o número que indica o ano. Ao todo são 241 encontros letivos, 33 diferentes horários e 29 professores. O nome entre parênteses indica um professor apenas.

Em CAp0 não há alocação estática, ou união de turmas. Contudo temos aulas simultâneas, subturmas, salas especiais e professor substituto.

Cada alocação num horário h de uma turma padrão c da seguinte forma

$$m_1(p_1) \ / \ m_2(p_2) \ / \ \ldots \ / \ m_i(p_i)$$

indica os encontros (com assunto e professor) das subturmas $c_1, c_2, \ldots, c_i$ de c, respectivamente.

As aulas simultâneas podem ser identificadas na figura pelos encontros de uma mesma linha, horário, com uma mesma cor. Observe que os grupos de aulas simultâneas deste problema contém aulas de subturmas de uma mesma turma (aulas de Música e de Artes), e também de subturmas de mais de uma turma (as aulas de Línguas estrangeiras das turmas de um mesmo ano letivo).

O modelo AST poderia, por exemplo, alocar os encontros Mus(Cirineia) para $5A_1$ e Ingl (Vitorino) para $5A_2$, ou Fran(EdsonF) para $5A_1$ e Art(Joalde) para $5A_2$, num mesmo horário h caso não houvessem os grupos de aulas simultâneas: $\{(5A_1, Mus), (5A_2, Art)\}$ e $\{(5A_1, Fran), (5A_2, Ingl), (5B_1, Fran), (5B_2, Ingl)\}$.

Esta possibilidade acima caracteriza uma flexibilidade do modelo.

As salas especiais são três: Sala de Música, Sala de Artes e a Quadra de Esportes. Elas não estão representadas no quadro porque são implícitas às suas respectivas aulas. A disponibilidade de tempo das salas foi dada como total.

E a professora Sandra deve substituir a professora Rita na disciplina Ciências na turma 5A.

Pode-se observar que não há em qualquer horário (linha) um professor alocado mais de uma vez, o professor substituto e algum encontro que deve substituir o professor alocados, nem mais de um encontro que requer a mesma sala especial.

Os horários com a cor cinza para alguma turma indicam que esta não possui este horário letivo em seu quadro. Os horários das turmas são determinados pela entrada dos dados.

A disponibilidade de tempo dos professores não está indicada nas figuras. Ela não é total. Podemos dar uma idéia de quão esparso é nosso problema usando a *medida de esparsividade*. Aqui denotaremos esta medida por

$$\Omega = \frac{|P|\cdot|H| - (|E| + \mu)}{|P|\cdot|H|},$$

onde μ é o a soma dos horários ou indisponíveis ou excedentes ao máximo diário de cada professor. Como neste exemplo $\mu = 263$, temos $\Omega = 0.4830$.

Feitas as devidas observações sobre o exemplo CAp0 vamos construir para alguns pares de horários diferentes h e h' o $GH(h,h',\mathscr{S}) \mid X$ e $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$.

Na Figura 6.6 mostramos como seriam as componentes com encontros de $GH(h,h') \mid X$ para h e h' respectivamente iguais a Seg 15:10 16:00 e Ter 11:00 11:50. Representados pelas cores vermelho e azul. As arestas de proibição estão em preto. Embora tenhamos cinco componentes de encontros em $GH(h,h') \mid X$, $\mathscr{T}(h,h')$ poderia ter no máximo quatro conjuntos de encontros definindo troca devido ao grupo de aulas simultâneas $\{(5A_1, Fran), (5A_2, Ingl), (5B_1, Fran), (5B_2, Ingl)\}$. Apenas o conjunto T com seis encontros indicado pela linha verde define troca. Os demais foram descartados porque para algum encontro não havia disponibilidade para o horário que seria assumido na troca, não havia aresta de permissão. Estas não foram representadas na figura. As professoras Adriana e Cirineia não disponibilizaram qualquer horário na segunda. Lavínia Mário, por sua vez, não disponibilizou o primeiro e o último horário da segunda.

Este movimento definido por $mov(h,h',T)$ não só preserva a quase viabilidade como também a viabilidade. Ele foi o primeiro movimento escolhido pela segunda etapa de AST.

Os elos que determinaram a existência das arestas de proibição neste primeiro exemplo foram caracterizados por professores, turmas e subturmas. No exemplo seguinte temos também elos caracterizados por salas especiais e professor substituto.

Na Figura 6.7 mostramos como seriam as componentes com encontros de $GH(h,h') \mid X$ para $h =$ Qua 10:10 11:00 e $h' =$ Sex 09:00 09:50 dada a mesma solução inicial $\mathscr{S}$ de CAp0. A linha verde tracejada indica os conjuntos candidatos a definir um movimento, restando apenas avaliar as arestas de permissão.

Caso existam as arestas de permissão para troca e estes conjuntos definam movimentos, pertençam a $\mathscr{T}(h,h')$, eles garantirão a quase viabilidade após o movimento, não a viabilidade. O cumprimento dos demais requerimentos de viabilidade deve ser averiguado se desejamos usar apenas movimentos que mantenham a viabilidade.

Lembremos estes requerimentos:

v. o número diário de encontros de uma dada disciplina m numa classe c deve respeitar o máximo diário α_{cm} de encontros desta.

vi. os encontros de m em c num dia devem ser *seqüenciais e em um turno*, aulas geminadas.

vii. o número mínimo semanal δ_{cm} de aulas geminadas de m em c deve ser respeitado.

viii. o número diário de encontros do professor p deve respeitar o máximo permitido α_p.

Definição 6.4 (Defeito quanto a viabilidade)**.** Definimos a medida do *defeito quanto a viabilidade* de uma solução $\mathscr{S}$ quase viável pela função:

$$def(\mathscr{S}) = \sum_{\forall cm} def_{cm}(\mathscr{S}) + \rho \cdot \sum_{p \in P} def_{\alpha_p}(\mathscr{S}),$$

onde $\forall m$ de c

$$def_{cm}(\mathscr{S}) = \sigma \cdot def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}) + \theta_1 \cdot defG^1_{cm}(\mathscr{S}) + \theta_2 \cdot defG^2_{cm}(\mathscr{S}) + \lambda \cdot def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}).$$

O valor de $def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S})$ é dado pela soma do número de encontros alocados em $\mathscr{S}$ para m de c a mais que α_{cm} em cada dia letivo.

Dada $\mathscr{S}$, os valores $defG^1_{cm}(\mathscr{S})$ e $defG^2_{cm}(\mathscr{S})$ são dados, respectivamente, pela soma do número de horários letivos entre os encontros de m em c em cada dia, e pela soma do número de pares de encontros de m em c que se seguem em turnos vizinhos.

Já o valor de $def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$ corresponde ao número de aulas geminadas de m em c que faltam em $\mathscr{S}$ para que seja cumprido o mínimo semanal δ_{cm}.

E o valor de $def_{\alpha_p}(\mathscr{S})$ é dado pela soma do número de encontros alocados em $\mathscr{S}$ para p a mais que α_p em cada dia letivo.

Os parâmetros $\{\sigma, \theta_1, \theta_2, \lambda, \rho\} \subset \Re^+$. Portanto, uma solução quase viável $\mathscr{S}$ que tem $def(\mathscr{S}) = 0$ é uma solução viável.

Em CAp0 para cada disciplina m de cada turma c temos $\alpha_{cm} = 2$, com exceção da disciplina OE cujo máximo diário é igual ao valor da demanda 1 em todas as turmas.

Os horários (11:50 12:40) e (13:30 14:20) de segunda e quarta, por vi, não poderiam alocar aulas geminadas mesmo que as turmas possuíssem os dois horários.

Os professores tem $\alpha_p = 6$, com exceção dos professores Rita e Edvaldo que tem $\alpha_p = 7$.

Para as disciplinas que permitem aulas geminadas temos o mínimo delas igual ao máximo. Isto é, para cada disciplina m de cada turma c com $\alpha_{cm} = 2$, temos $r_{cm} = 2 \cdot \delta_{cm} + b$, com $b \in \{0, 1\}$. Esta característica torna o espaço de busca do problema mais restrito.

Note que no segundo exemplo todos os encontros envolvidos fazem parte de aulas geminadas (verifique na Figura 6.4 e na Figura 6.5). Este movimento causaria o não cumprimento de vii. Note também que os outros encontros dos pares de aulas geminadas se encontram no horário anterior e no posterior também.

6.3 Movimento seqüencial

O movimento como definimos é realmente útil pela sua capacidade de manter a quase viabilidade. Mais que isso, o conjunto de todos os possíveis movimentos nos indica uma vizinhança $Q(\mathscr{S})$ de uma solução $\mathscr{S}$ quase viável com soluções também quase viáveis.

Para o problema CAp0, por exemplo, que possui 1056 combinações de horários dois a dois ($|H| = 33$), com a solução inicial viável $\mathscr{S}$ que mostramos na Figura 6.4 e na Figura 6.5, mais as disponibilidades de tempo, grupos de aulas simultâneas, ..., temos 1009 movimentos e portanto igual número de diferentes soluções quase viáveis, $|Q(\mathscr{S})| = 1009$.

Para cada combinação de horários temos no máximo o número de movimentos igual ao número de turmas que possuem estes horários.

Pelo grande número de aulas geminadas requeridos nos problemas de automação de horários escolares o subconjunto de $Q(\mathscr{S})$ com os movimentos que mantém a viabilidade é bem menor.

Para o mesmo exemplo apenas 62 dos 1009 movimentos levam a soluções ainda viáveis.

Especialmente no caso onde o número mínimo de aulas geminadas é igual ao máximo, qualquer movimento que mantenha a viabilidade envolvendo algum encontro de um par de aulas geminadas vai ocorrer de forma semelhante aos mostrados na Figura 6.8.

Nesta figura cada movimento foi definido em h e h'. Somente os encontros das aulas geminadas estão representados pelos retângulos coloridos, mas cada movimento envolveu pelo menos mais um encontro (o que ocupava o horário da troca) se os horários das turmas são todos ocupados. A reticências na primeira tabela indica que linhas de horários foram omitidas e que h e h' pertencem a dias diferentes. Na segunda tabela os horários citados pertencem a um mesmo turno.

Aulas geminadas envolvem dois horários em seqüência no mesmo turno e qualquer movimento só usa um dos dois encontros. Chamemos o horário deste de h', não importando se trata-se do primeiro ou segundo do par. Então para que este movimento mantenha a viabilidade apesar de desfazer um par de aulas geminadas, onde o mínimo destes é o máximo possível, se faz necessário que este encontro seja destinado a um horário vizinho ao de outro encontro isolado da mesma disciplina m na turma c. Caso a demanda $r_{\underline{cm}}$ seja ímpar há um outro dia com exatamente um encontro de m em c, digamos no horário $\overline{h}$. Assim, o movimento pode ser definido entre h e h' para $h \in \{\overline{h}-1, \overline{h}+1\}$, se h e $\overline{h}$ pertencem ao mesmo turno. Caso contrário, as opções restringem-se a: $h = h'-2$, se h' corresponde ao segundo encontro do par, mas não o segundo do turno; e a $h = h'+2$, se h' corresponde ao primeiro encontro do par, mas não o penúltimo do turno. Em qualquer caso, as arestas de permissão devem ser consultadas.

De fato esta situação, δ_{cm} máximo, torna mais longo, ou mesmo impossível, o caminho entre duas soluções viáveis usando apenas movimentos que mantenham a viabilidade. Seria impossível mudar as aulas geminadas de um turno para outro no mesmo dia, ou mudar de um dia para outro se a demanda r_{cm} de encontros de m em c é par.

Decorre destes dois últimos parágrafos que:

Proposição 6.3. *Qualquer solução viável $\mathscr{S}' = mov(h,h',T)\mathscr{S}$, obtida de $\mathscr{S}$ viável, $T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$, $\forall\{h,h'\} \subset H$, $h \neq h'$, em um problema com aulas geminadas para m de c cujo mínimo número destas é o máximo possível, e a demanda r_{cm} é par, possui as aulas geminadas de m em c nos mesmos dias e turnos que em $\mathscr{S}$. E nem mesmo uma seqüência de movimentos que mantém a viabilidade pode alterar estes dias e turnos.*

O que restringe nosso espaço de busca. Percebe-se que mesmo com aulas geminadas para m de c com mínimo número igual ao máximo possível e demanda r_{cm} ímpar, a alocação de aulas geminadas num dia onde antes não havia qualquer encontro de m em c usando movimentos que mantém a viabilidade necessita de dois movimentos: um levando o único encontro isolado de m em c nesta solução atual para este dia, e outro trazendo um encontro de um par de aulas geminadas.

Daí surgiu uma interrogação: Por que não mover o par (ou pares) de aulas geminadas? E como isto seria feito?

	5A	5B		6B	7A
				Cien(San.)	Mus(Edv.) / Art(Kar.)
h	Fran(Eds.) / Ingl(Vit.)	Fran(Mar.) / Ingl(Ana)		Cien(San.)	Mus(Edv.) / Art(Kar.)
	Fran(Eds.) / Ingl(Vit.)	Fran(Mar.) / Ingl(Ana)			
...					
	Cien(Rita)			Port(Kát.)	Mat(José)
h'	Cien(Rita)	Mus(Cir.) / Arte(Joa.)		Port(Kát.)	Mat(José)
		Mus(Cir.) / Arte(Joa.)			

Tabela 6.1 Aulas geminadas envolvidas num conjunto candidato a movimento, o 1º do 2º exemplo, exibido nas linhas h e h' (restando avaliar arestas de permissão).

Também daí surgiu a idéia do que chamamos *movimento seqüencial*. Trata-se de uma seqüência de movimentos que ocorrem após um primeiro movimento se este envolveu pelo menos um encontro de aulas geminadas, digamos de m em c, e a solução quase viável obtida não respeita o valor mínimo δ_{cm}. Esta seqüência de movimentos visa obter ao final uma solução viável sem desfazer o primeiro movimento. Assim, podemos dizer que o movimento seqüencial, se existe, é para o primeiro um "movimento reparador" da viabilidade.

Como desejamos recuperar a viabilidade, estes movimentos devem pretender levar o encontro que ficou de cada par de aulas geminadas desfeito onde houve desrespeito a δ_{cm} para um horário vizinho ao que foi levado o outro encontro. Ora, se o primeiro movimento foi $mov(h,h',T)$, certamente os encontros que restaram dos pares de aulas geminadas e os horários onde desejamos alocá-los pertencem a $\{h-1,h+1,h'-1,h'+1\}$. Note a Tabela 6.1.

Definição 6.5 (Movimento seqüencial)**.** Seja $mov(h,h',T)$ um movimento definido em um conjunto $T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$, $\forall\{h,h'\} \subset H$, $h \neq h'$, $\mathscr{S}$ viável, que não mantém a viabilidade em $\mathscr{S}^1 = mov(h,h',T)\mathscr{S}$ não respeitando o valor mínimo δ_{cm} de alguma disciplina m de c. O *movimento seqüencial*, se existe, é uma seqüência de n movimentos, $n \geq 1$,

$$mov(h_1,h'_1,T^1), mov(h_2,h'_2,T^2), \ldots, mov(h_n,h'_n,T^n),$$

aplicados da seguinte forma

$$\mathscr{S}^{n+1} = mov(h_n,h'_n,T^n)\ldots mov(h_2,h'_2,T^2)mov(h_1,h'_1,T^1)\mathscr{S}^1,$$

onde $\forall i = 1,\ldots,n$, temos:

$$\mathscr{S}^{i+1} = mov(h_i,h'_i,T^i)\mathscr{S}^i, \text{ cujo conjunto } T^i \in \mathscr{T}(h_i,h'_i,\mathscr{S}^i),$$

$$\{h_i,h'_i\} \in \{\{h-1,h'-1\},\{h-1,h'+1\},\{h+1,h'-1\},\{h+1,h'+1\}\},$$

$$h_i \neq h'_i \text{ e } \{h_i,h'_i\} \neq \{h,h'\},$$

tal que $\mathscr{S}^{n+1}$ é uma solução viável e $\mathscr{S}^1,\ldots,\mathscr{S}^n$ são apenas quase viáveis com:

$$def(\mathscr{S}^n) < \ldots < def(\mathscr{S}^2) < def(\mathscr{S}^1).$$

Denotaremos por $movSeq(h,h',T)$ a este movimento seqüencial.

	5A	5B	6A	6B
$h-1$			Fran(Mar.) / Ingl(Ana)	Franc(Eds.) / Ingl(Car.)
h			Fran(Mar.) / Ingl(Ana)	Franc(Eds.) / Ingl(Car.)
...				
h'			Port(Aéc.)	Port(Kát.)
$h'+1$			OE(Lav.)	Port(Kát.)

Tabela 6.2 Movimentos $mov(h,h',T)$ e $movSeq(h,h',T) = mov(h-1,h'+1,T')$. Para o problema CAp0, com $h =$ Qui 11:50 12:40 e $h' =$ Sex 10:10 11:00. Os conjuntos de encontros T e T' foram representados nas linhas $\{h, h'\}$ e $\{h-1, h'+1\}$.

Assim, ao invés de trabalhar apenas com os movimentos $mov(h,h',T)$ que mantém a viabilidade, podemos agora trabalhar com estes e mais aqueles para os quais existe um movimento seqüencial que restaura a viabilidade (em $\mathscr{S}' = movSeq(h,h',T)mov(h,h',T)\mathscr{S}$). E que na prática move aulas geminadas.

Por exemplo, se em CAp0, para a solução inicial $\mathscr{S}$ viável que apresentamos, existem 1009 movimentos e destes 62 mantém a viabilidade, outros 260 possuem movimento seqüencial que recupera esta condição. Ao todo podemos optar por 322 movimentos que, com ou sem movimento seqüencial, mantém a viabilidade.

Na Tabela 6.2 mostramos o 1º movimento escolhido para CAp0 com movimento seqüencial, foi o 3º da segunda etapa de AST (o 2º nós omitimos). O movimento foi definido em $h =$ Qui 11:50 12:40, $h' =$ Sex 10:10 11:00 e com o conjunto de encontros igual ao exibido nas linhas h e h' da tabela. O movimento seqüencial foi composto de um só movimento definido pelos horários $h-1$, $h'+1$ e com o conjunto de encontros exibido nestas linhas.

A existência do movimento seqüencial depende da existência de todos os movimentos envolvidos na seqüência e com a diminuição do defeito quanto a viabilidade e a obtenção da viabilidade pelo último. Mas nem sempre é possível corrigir o defeito provocado pelo primeiro movimento.

Voltando ao segundo exemplo, ao primeiro conjunto candidato a movimento (representado na Figura 6.7 e na Tabela 6.1). Com $h =$ Qua 10:10 11:00 e $h' =$ Sex 09:00 09:50. Mesmo que houvessem todas as arestas de permissão (não há), o correspondente movimento envolve aulas geminadas e não teria um movimento seqüencial. Já que nenhum movimento que use um par de horários $\{\underline{h},\underline{h'}\} \subset \{\{h-1,h'-1\},\{h-1,h'+1\},\{h+1,h'-1\},\{h+1,h'+1\}\}$ pode corrigir $def_{\alpha_{cm}}$ para $cm = (7A, Mat)$. O horário atual já tem dois encontros de Matemática na turma 7A nos primeiros horários de Quarta (correspondentes a $h-2$ e $h-3$), passaria a ter três.

Isto nos faz perceber que podemos avaliar se após um movimento $mov(h,h',T)$ que não mantém a viabilidade pode existir ou não movimento seqüencial, antes mesmo de procurá-lo.

Como a busca por um movimento seqüencial pode envolver a construção de todos os $\mathscr{T}(\underline{h},\underline{h'},\mathscr{S}^i)$, com $\{\underline{h},\underline{h'}\} \subset \{\{\underline{h}-1,h'-1\},\{h-1,h'+1\},\{h+1,h'-1\},\{h+1,h'+1\}\}$, e avaliação de cada $T \in \mathscr{T}(\underline{h},\underline{h'},\mathscr{S}^i)$, para encontrar cada movimento i da seqüência, evitar este trabalho quando se sabe ser desnecessário é muito importante.

6.4 Propriedades

O Grafo Híbrido de um problema é construído a partir da definição deste problema e independe de qualquer solução. Já o subgrafo $GH(h,h',\mathscr{S})$ depende de uma solução $\mathscr{S}$ dada.

Lembramos que $GH(h,h',\mathscr{S})$ é o subgrafo induzido $GH[\{h,h'\} \cup E(h,h',\mathscr{S})]$, e que o conjunto $E(h,h',\mathscr{S})$ é formado pelos vértices de E que representam encontros alocados em $\mathscr{S}$ nestes dois horários.

Assim, dado um problema de automação de horários escolares, seu GH e uma solução $\mathscr{S}$, temos $GH(h,h',\mathscr{S}) = GH(h',h,\mathscr{S})$, pois $E(h,h',\mathscr{S}) = E(h',h,\mathscr{S})$. E, conseqüentemente, por construção $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}) = \mathscr{T}(h',h,\mathscr{S})$ para $\mathscr{S}$ quase viável.

Vejamos algumas propriedades relacionadas aos conjuntos que definem movimentos.

Proposição 6.4. *Dado um problema de automação de horários escolares, seu GH, uma solução $\mathscr{S}$ quase viável e outra solução $\mathscr{S}' = mov(h,h',T)\mathscr{S}$ para um $T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$. Temos que*

- $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}) = \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}')$, *e*
- $\mathscr{T}(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}) = \mathscr{T}(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}')$, $\forall\{\bar{h},\bar{h'}\} \subset H$, $\{\bar{h},\bar{h'}\} \cap \{h,h'\} = \emptyset$.

Demonstração. Como a construção de $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S})$ depende apenas de $GH(h,h',\mathscr{S})$ e dos grupos de aulas simultâneas (que independem da solução usada), basta provarmos que

$$GH(h,h',\mathscr{S}) = GH(h,h',\mathscr{S}') \text{ e}$$
$$GH(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}) = GH(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}') \text{ se } \{\bar{h},\bar{h'}\} \cap \{h,h'\} = \emptyset.$$

O que equivale a provar que

$$E(h,h',\mathscr{S}) = E(h,h',\mathscr{S}') \text{ e}$$
$$E(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}) = E(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}') \text{ se } \{\bar{h},\bar{h'}\} \cap \{h,h'\} = \emptyset.$$

Ora, o movimento $mov(h,h',T)$ que aplicado a $\mathscr{S}$ definiu $\mathscr{S}'$ apenas inverteu os horários alocados para os encontros em T, de h para h' ou vice-versa. Os encontros em $E-T$ permanecem com os mesmos horários. Daí,

$$E(h,h',\mathscr{S}') = T \cup ((E-T) \cap E(h,h',\mathscr{S})) = E(h,h',\mathscr{S})$$

e para $\{\bar{h},\bar{h'}\} \cap \{h,h'\} = \emptyset$ temos

$$E(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}') = (E-T) \cap E(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}) = E(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S}).$$

□

Além disso, sob as mesmas hipóteses da Proposição 6.4, temos:

Corolário 6.1. *Qualquer movimento $mov(h,h',T)$ é seu inverso.*

$$\mathscr{S} = mov(h,h',T)\mathscr{S}', \textit{ isto é,}$$
$$\mathscr{S} = mov(h,h',T)mov(h,h',T)\mathscr{S}.$$

Demonstração. Precisamos antes de qualquer coisa provar que o movimento $mov(h,h',T)$ está definido em $\mathscr{S}' = mov(h,h',T)\mathscr{S}$ $(T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}))$, provar que $T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}')$. Isto decorre da Proposição 6.4, em seu primeiro item: $\mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}) = \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}')$. Como o movimento $mov(h,h',T)$ apenas inverte os horários alocados para os encontros em T, sua aplicação em seqüência aloca os horários dos encontros em T da mesma forma que em $\mathscr{S}$. □

Estas propriedades trazem ganhos computacionais importantes. Ao invés de guardarmos a melhor solução entre as $|Q(\mathscr{S})|$ soluções enquanto fazemos uma busca na vizinhança de $\mathscr{S}$, podemos guardar apenas o movimento que leva $\mathscr{S}$ a ela. Evitamos também de criar inteiramente a estrutura que guarda uma solução quando avaliamos cada uma das $|Q(\mathscr{S})|$ soluções. Consegue-se isto ao aplicar cada movimento duas vezes, a segunda vez depois de avaliar a solução gerada, retornando a $\mathscr{S}$.

Observe também que a maior parte dos movimentos definidos em $\mathscr{S}$ estão também definidos em $\mathscr{S}' = mov(h,h',T)\mathscr{S}$: todos os $mov(\bar{h},\bar{h'},\bar{T})$, para $\bar{T} \in \mathscr{T}(\bar{h},\bar{h'},\mathscr{S})$ com $\{\bar{h},\bar{h'}\} = \{h,h'\}$ ou $\{\bar{h},\bar{h'}\} \cap \{h,h'\} = \emptyset$. Os demais movimentos definidos em $\mathscr{S}'$ são $mov(h,h',T)$ para $T \in \mathscr{T}(h,h',\mathscr{S}')$ com $|\{h,h'\} \cap \{h,h'\}| = 1$. Isto significa que se guardarmos os movimentos definidos em $\mathscr{S}$ para cada par de horários, na seguinte iteração de busca, na vizinhança de $\mathscr{S}' = mov(h,h',T)\mathscr{S}$, precisaremos apenas descartar os movimentos definidos com exatamente um dos horários $\{h,h'\}$ em $\mathscr{S}$ e calcular os definidos em $\mathscr{S}'$ para cada uma destas $2 \cdot |H-2|$ combinações de horários. Caso contrário, teríamos que calcular os movimentos definidos para cada uma das $|H| \cdot |H-1|$ combinações de horários.

Suponha que nosso algoritmo de busca procura pela melhor solução em $Q'(\mathscr{S})$. Onde $Q'(\mathscr{S}) = \{\mathscr{R}$ viável: $\mathscr{R} \in Q(\mathscr{S})$ ou $\mathscr{R} = movSeq(h,h',T)mov(h,h',T)\mathscr{S}\}$, $movSeq(h,h',T)$ um movimento seqüencial definido para $mov(h,h',T)$.

Após uma iteração com a escolha de um movimento e um movimento seqüencial (este envolve no máximo quatro diferentes horários em quatro diferentes combinações) o número de pares de horários para os quais teremos de fazer a atualização dos movimentos definidos chega no máximo a $6 \cdot |H-2|$ combinações de horários. As combinações $\{\bar{h},\bar{h'}\}$ com $\bar{h} \in \{h,h',h-1,h+1,h'-1,h'+1\}$ e $\bar{h'}$ diferente daquele com que $\bar{h}$ fez par em $mov(h,h',T)$ ou em qualquer movimento contido em $movSeq(h,h',T)$.

A partir de uma solução viável $\mathscr{S}$ qualquer solução $\mathscr{S}'$, dada por $mov(h,h',T)\mathscr{S}$ ou por $movSeq(h,h',T)mov(h,h',T)\mathscr{S}$ com h e h' pertencentes a um mesmo dia possui

$$\sum_{\forall cm} def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}') = 0 \text{ e } \sum_{p \in P} def_{\alpha_p}(\mathscr{S}') = 0.$$

Esta informação nos permite evitar o cálculo destas medidas defeito nestas circunstâncias.

Já uma solução $\mathscr{S}'$ obtida por $mov(h,h',T)\mathscr{S}$ com h e h' pertencentes a dias diferentes com

$$\sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}') > 0$$

não é viável e não possui $movSeq(h,h',T)$ tal que $movSeq(h,h',T)\mathscr{S}'$ seja viável. Pois os horários usados em $movSeq(h,h',T)$ são os vizinhos a h e h'. Igual conclusão se obtém para $\sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}') = 0$ se: $\exists$ cm com $def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}') > 0$ e $\alpha_{cm} = 2$; ou $\exists p \in P$, $def_{\alpha_p}(\mathscr{S}') > 0$, sendo que o encontro que caracteriza o defeito não ocorre em horário vizinho.

Com as últimas observações obtemos um ganho computacional enorme deixando de procurar por movimentos seqüenciais que a priori sabemos não existir.

Seg	5A Seg	5B Seg	6A Seg
07:20 08:10	Mat(Marcelo_Camara)	Geo(Soenia)	Cien(Sandra)
08:10 09:00	Mat(Marcelo_Camara)	Port(Cristina)	Cien(Sandra)
09:00 09:50	OE(Lavinia_Mario)	Port(Cristina)	PD(Aecio)
10:10 11:00	Port(Cristina)	Hist(Natalia)	PD(Aecio)
11:00 11:50	Port(Cristina)	Hist(Natalia)	Geo(Soenia)
11:50 12:40			
13:30 14:20	EdFis(Roseane)	Mat(Marcelo_Camara)	Port(Katia_Barreto)
14:20 15:10	EdFis(Roseane)	Mat(Marcelo_Camara)	Hist(Natalia)
15:10 16:00	Cien(Rita)	PD(Gustavo)	EdFis(Roseane)
Ter	5A Ter	5B Ter	6A Ter
07:20 08:10	Port(Cristina)	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	Mat(Jose_Carlos)
08:10 09:00	Hist(Natalia)	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	OE(Lavinia_Mario)
09:00 09:50	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	OE(Lavinia_Mario)	Port(Katia_Barreto)
10:10 11:00	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	Cien(Rita)	Port(Katia_Barreto)
11:00 11:50	Fran(Edson_F) / Ingl(Vitorino)	Fran(Marlon) / Ingl(Ana_F)	Mus(Cirineia) / Art(Karina)
11:50 12:40	PD(Gustavo)	Port(Cristina)	Mus(Cirineia) / Art(Karina)
Qua	5A Qua	5B Qua	6A Qua
07:20 08:10	Geo(Soenia)	EdFis(Roseane)	Mus(Cirineia) / Art(Karina)
08:10 09:00	Geo(Soenia)	PD(Gustavo)	Mus(Cirineia) / Art(Karina)
09:00 09:50	Mat(Marcelo_Camara)	PD(Gustavo)	EdFis(Roseane)
10:10 11:00	Fran(Edson_F) / Ingl(Vitorino)	Fran(Marlon) / Ingl(Ana_F)	EdFis(Roseane)
11:00 11:50	Fran(Edson_F) / Ingl(Vitorino)	Fran(Marlon) / Ingl(Ana_F)	Cien(Sandra)
11:50 12:40			
13:30 14:20	PD(Gustavo)	Geo(Soenia)	Mat(Jose_Carlos)
14:20 15:10	PD(Gustavo)	Geo(Soenia)	Mat(Jose_Carlos)
15:10 16:00	EdFis(Roseane)	Mat(Marcelo_Camara)	Fran(Edson_F) / Ingl(Carla)
Qui	5A Qui	5B Qui	6A Qui
07:20 08:10	Hist(Natalia)	Cien(Rita)	Geo(Soenia)
08:10 09:00	Hist(Natalia)	Cien(Rita)	Geo(Soenia)
09:00 09:50	Mat(Marcelo_Camara)	Port(Cristina)	Mat(Jose_Carlos)
10:10 11:00	Mat(Marcelo_Camara)	Port(Cristina)	Mat(Jose_Carlos)
11:00 11:50	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	Mat(Marcelo_Camara)	Fran(Edson_F) / Ingl(Carla)
11:50 12:40	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	Mat(Marcelo_Camara)	Fran(Edson_F) / Ingl(Carla)
Sex	5A Sex	5B Sex	6A Sex
07:20 08:10	Geo(Soenia)	EdFis(Roseane)	PD(Aecio)
08:10 09:00	Cien(Rita)	EdFis(Roseane)	Hist(Natalia)
09:00 09:50	Cien(Rita)	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	Hist(Natalia)
10:10 11:00	Port(Cristina)	Mus(Cirineia) / Art(Joalde)	Port(Katia_Barreto)
11:00 11:50	Port(Cristina)	Hist(Natalia)	Port(Katia_Barreto)

Figura 6.4 Quadro horário de turmas CAp0 (parte 1). Este quadro horário de turmas mostra uma solução viável $\mathscr{S}$ encontrada pela primeira etapa do AST em 8 seg. Os dados de entrada deste problema podem ser encontrados entre os Apêndices.

6B Seg	7A Seg	7B Seg
Port(Katia_Barreto)	Fran(Edson_F) / Ingl(Vitorino)	Fran(Marlon) / Ingl(Carla) / Ingl(Ana_F)
Port(Katia_Barreto)	Fran(Edson_F) / Ingl(Vitorino)	Fran(Marlon) / Ingl(Carla) / Ingl(Ana_F)
Cien(Sandra)	Geo(Erica)	Mat(Rogerio)
Mus(Ledjane) / Art(Karina)	Cien(Marcos)	Geo(Erica)
Mus(Ledjane) / Art(Karina)	Cien(Marcos)	Geo(Erica)
Mat(Jose_Carlos)	PD(Mario_Ricardo)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)
Mat(Jose_Carlos)	PD(Mario_Ricardo)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)
Geo(Erica)	Mat(Jose_Carlos)	PD(Mario_Ricardo)
6B Ter	7A Ter	7B Ter
PD(Aecio)	Hist(Idalina)	Cien(Marcos)
PD(Aecio)	Fran(Edson_F) / Ingl(Vitorino)	Fran(Marlon) / Ingl(Carla) / Ingl(Ana_F)
EdFis(Roseane)	Port(Adriana)	Hist(Idalina)
EdFis(Roseane)	Port(Adriana)	Hist(Idalina)
Mat(Jose_Carlos)	OE(Lavinia_Mario)	Port(Adriana)
Mat(Jose_Carlos)		
6B Qua	7A Qua	7B Qua
Geo(Erica)	Mat(Jose_Carlos)	Port(Adriana)
Geo(Erica)	Mat(Jose_Carlos)	Port(Adriana)
Cien(Sandra)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)	OE(Lavinia_Mario)
Cien(Sandra)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)	Mat(Rogerio)
EdFis(Roseane)	Port(Adriana)	Mat(Rogerio)
Mus(Ledjane) / Art(Karina)	Hist(Idalina)	PD(Mario_Ricardo)
Mus(Ledjane) / Art(Karina)	Hist(Idalina)	PD(Mario_Ricardo)
Fran(Marlon) / Ingl(Ana_F)	PD(Mario_Ricardo)	Hist(Idalina)
6B Qui	7A Qui	7B Qui
Mat(Jose_Carlos)	Geo(Erica)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)
Port(Katia_Barreto)	Geo(Erica)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)
Hist(Natalia)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)	Mat(Rogerio)
Hist(Natalia)	Mus(Edvaldo) / Art(Karina)	Mat(Rogerio)
Fran(Marlon) / Ingl(Ana_F)	EdFis(Lorena)	Cien(Marcos)
Fran(Marlon) / Ingl(Ana_F)	EdFis(Lorena)	Cien(Marcos)
6B Sex	7A Sex	7B Sex
Hist(Natalia)	Cien(Marcos)	Geo(Erica)
Port(Katia_Barreto)	Mat(Jose_Carlos)	Port(Adriana)
Port(Katia_Barreto)	Mat(Jose_Carlos)	Port(Adriana)
PD(Aecio)	Port(Adriana)	EdFis(Lorena)
OE(Lavinia_Mario)	Port(Adriana)	EdFis(Lorena)

Figura 6.5 Quadro horário de turmas CAp0 (parte 2). Em cada horário de uma turma onde estão representados mais de um encontro temos subturmas. As alocações de um mesmo horário, linha, que possuem mesma cor são de encontros pertencentes a um mesmo grupo de aulas simultâneas.

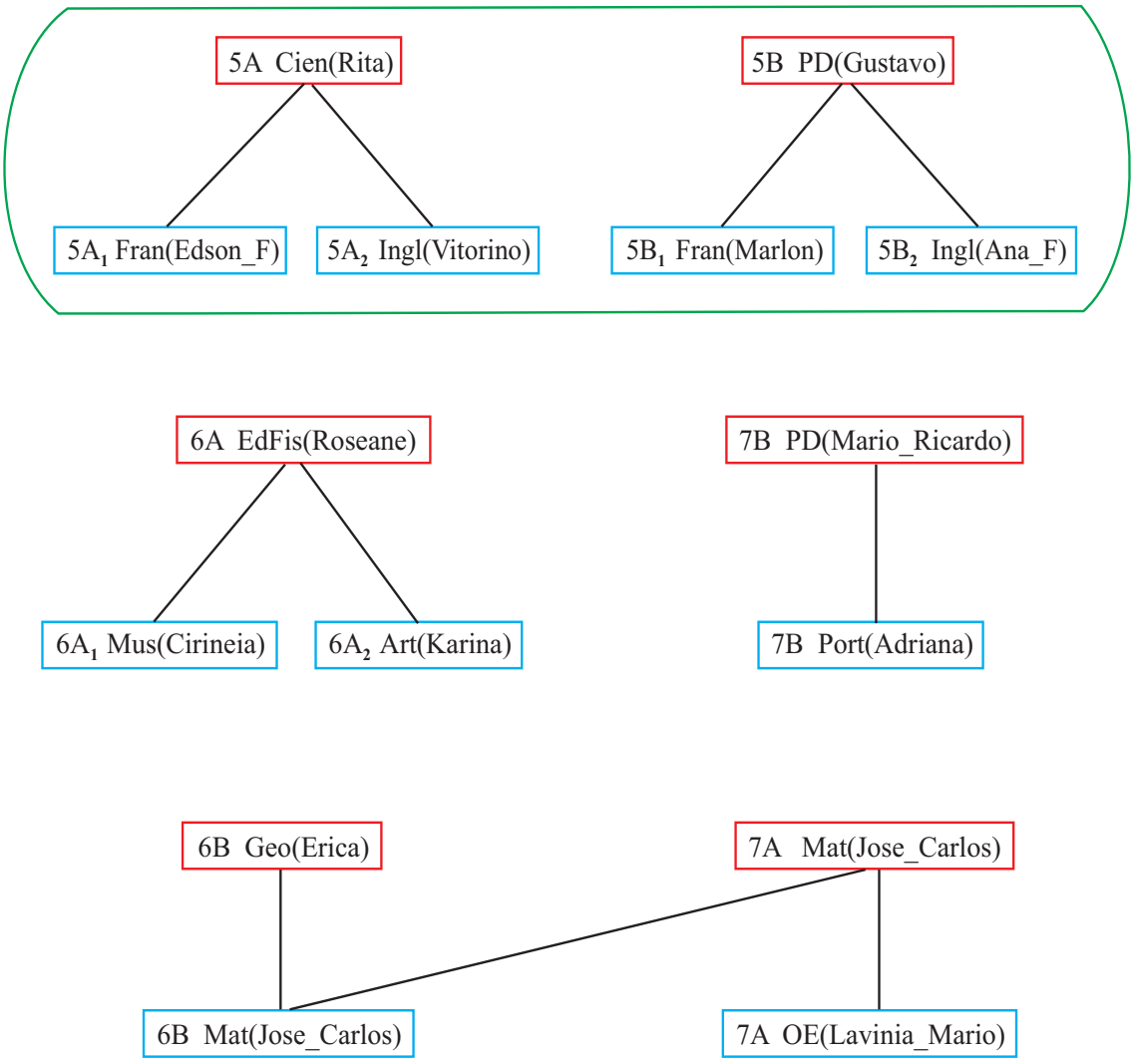


Figura 6.6 Exemplo de $GH(h,h') \mid X$ e $\mathscr{T}(h,h')$. Para $h =$ Seg 15:10 16:00, $h' =$ Ter 11:00 11:50 e $\mathscr{S}$ de CAp0. Os encontros no horário h estão em vermelho e os no h' de azul. $GH(h,h') \mid X$ tem cinco componentes mais hh' não mostrada. O conjunto $\mathscr{T}(h,h')$ tem apenas um conjunto de encontros, indicado por uma linha verde. As demais componentes de $GH(h,h') \mid X$ não definem um movimento porque para algum encontro não havia disponibilidade para o horário que seria assumido na troca.

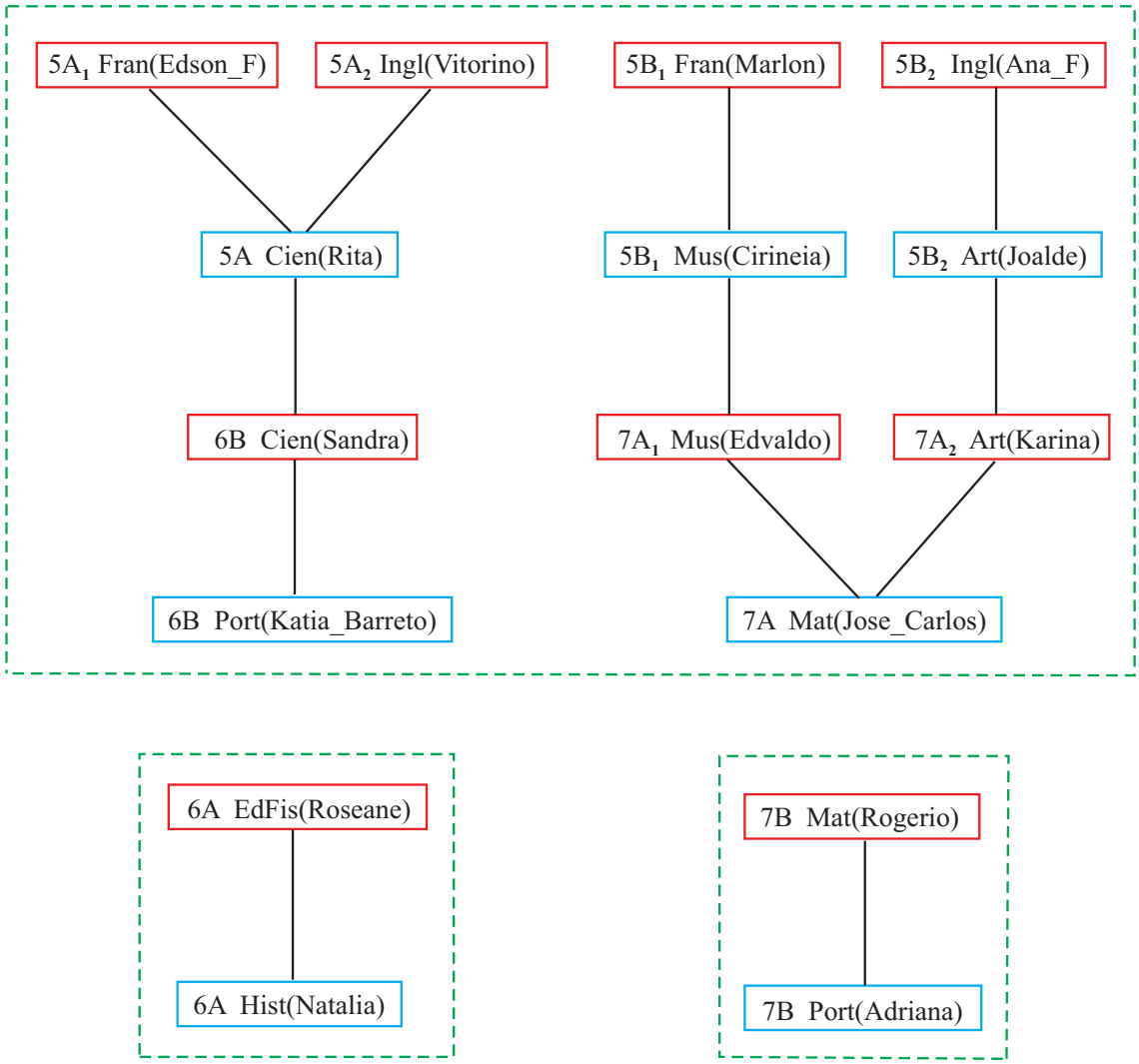


Figura 6.7 Exemplo de $GH(h,h') \mid X$. Para $h =$ Qua 10:10 11:00, $h' =$ Sex 09:00 09:50 e a mesma solução inicial $\mathscr{S}$ de CAp0. Os encontros no horário h estão em vermelho e os no h' de azul. $GH(h,h') \mid X$ tem quatro componentes mais hh' não mostrada. A professora Sandra é substituta de Rita em Ciências na 5A. Há uma Sala de Música e outra de Artes. A linha verde tracejada indica os conjuntos candidatos a definir um movimento, restando ainda avaliar as arestas de permissão.

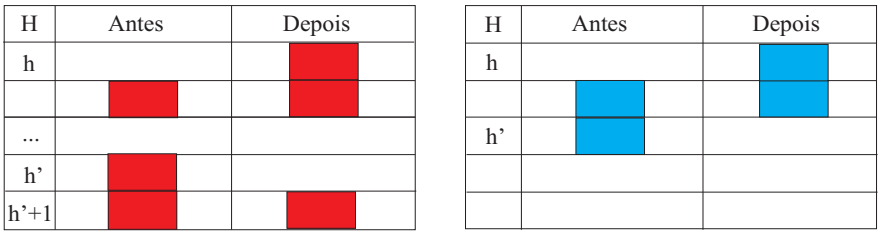


Figura 6.8 Exemplos de movimento envolvendo aulas geminadas (com h e h').

CAPÍTULO 7

Os modelos heurísticos

O modelo AST foi concebido para encontrar uma boa solução viável para o problema automação de horários escolares descrito no Capítulo 3 num tempo razoavelmente pequeno. Classificada como boa com relação ao atendimento das características desejáveis.

E para tanto ele foi desenvolvido em duas etapas. Na primeira etapa é gerada uma solução inicial viável completa (com todos os encontros) ou com o maior número de encontros possível, devido aos dados do problema. Isto através de um modelo de programação inteira descrito no Capítulo 4 sempre que se faz necessário escolher professores (ou professores e salas) ainda não determinados, ou através de uma heurística que encontra uma solução quase viável e em seguida a transforma em viável. Na segunda etapa, a partir desta solução inicial viável, uma meta-heurística Busca Tabu procura por uma solução viável próxima de uma solução ótima.

Uma solução inicial completa ou parcial também pode ser apresentada entre os dados do problema. Neste caso, somente as alocações possíveis podem ser aceitas, isto se não há conflito com as já lidas e aceitas. Se há na solução inicial dada alguma alocação de um encontro de uma disciplina m numa turma c de um grupo de aulas simultâneas, as demais alocações simultâneas são feitas automaticamente, ou se alguma não pode ser aceita nenhuma é. E a primeira etapa tenta completar uma solução viável a partir destes dados. Estas alocações iniciais podem ser alteradas durante o modelo AST, as alocações ditas estáticas não.

Neste capítulo apresentaremos as heurísticas de AST, tanto para a primeira etapa como para a segunda. Antes porém falemos da estrutura com as variáveis de decisão do modelo.

7.1 Estrutura com variáveis de decisão do modelo

As variáveis de decisão são da forma x_{cdh}, para uma turma $c \in C$ (especial ou classe padrão) e um horário $dh \in H$, cujo índice do dia a que pertence é $d \in D$, e tem posição h na lista de horários do dia. Podem assumir os seguintes valores:

$$x_{cdh} = \begin{cases} -2, & \text{se } dh \in H_c \text{ mas } c \text{ está vaga;} \\ -1, & \text{se } dh \in H - H_c; \\ m, & \text{se em } dh \in H_c \text{ há aula da matéria de índice } m \text{ em } c. \end{cases}$$

A estrutura que guarda estas variáveis tem dimensões iguais a $|C|$, $d_f + 1$ e $\max |H_d|$, onde d_f é o índice do último dia letivo. Os índices são inteiros não-negativos, e o índice zero é usado como primeiro. Lembramos que os horários letivos não têm intersecção, que diferentes horários podem compor as seqüências dos dias e em número diferente.

Uma estrutura igual xM (com valores xM_{cdh}) guarda as informações relativas a melhor

solução encontrada até então durante o processo.

Outras estruturas auxiliares existem. Destacamos a importância de:

$$_disp_{cmdh} = \begin{cases} -1, & \text{se } m \text{ não é matéria da turma } c, \text{ ou os} \\ & \text{encontros de } m \text{ em } c \text{ não podem ocorrer em } dh; \\ 0, & \text{os encontros de } m \text{ em } c \text{ podem ocorrer em } dh; \\ 1, & \text{se há uma alocação estática de } m \text{ em } c \text{ em } dh. \end{cases}$$

$$_elos_{cmc'm'} = \begin{cases} falso, & \text{se os encontros de } m \text{ em } c \text{ não têm elo} \\ & \text{de ligação com os encontros de } m' \text{ em } c'; \\ verdadeiro, & \text{se há elo de ligação entre estes.} \end{cases}$$

Se há elo de ligação entre os encontros de m em c e m' em c', há aresta de proibição entre estes encontros no grafo híbrido. Estas variáveis são calculadas apenas uma vez, na inicialização, e consultadas depois.

Optamos por uma linguagem orientada a objetos pela vantagem de trabalhar em "alto nível". Os dados de entrada são todos processados e guardados em objetos criados, por exemplo do tipo: Intervalo, Turma, Turma Especial, Sala Especial, Professor, Aula, Colégio ...

Como opção à lista $_aulasLista$ do Colégio com aulas e grupos de aulas, temos a estrutura $_aulas_{cm}$ que permite consultarmos os objetos Aula a e suas informações, a partir dos índices m e c:

$$_aulas_{cm} = \begin{cases} a, & \text{se } m \text{ é matéria de } c \text{ retorna o objeto Aula } a \text{ que guarda todas as} \\ & \text{informações relativas aos encontros desta diciplina nesta turma;} \\ \emptyset, & \text{se } m \text{ não é matéria da turma } c. \end{cases}$$

Os dados de entrada são lidos de um arquivo texto num formato específico que pode ser observado no Apêndice A. Estas informações são usadas para criar os objetos e são distribuídas onde estes dados podem ser requeridos. Por exemplo, se uma Aula a contém a informação do Professor p (determinado ou escolhido entre os professores possíveis) e talvez também o Professor p_s que o substitui ou a Sala Especial s que requer, cada Professor também tem uma lista de índices (c,m) das aulas que ministra e outra das aulas que substitui o professor, e cada Sala Especial tem uma lista de índices (c,m) das aulas que requerem esta.

A inicialização de $_disp_{cmdh}$ e de x_{cdh} é feita ao mesmo tempo. Inicialmente determina-se valor 0 ou -1 para $_disp_{cmdh}$, conforme a disponibilidade de tempo de *todos* os elementos envolvidos nos encontros de m em c ou não; e valor -2 ou -1 para x_{cdh}, conforme $dh \in H_c$ ou não. Em seguida, é feita uma correção para as aulas pertencentes aos grupos de aulas simultâneas, fazendo $_disp_{cmdh} = -1,\ \forall (c,m) \in G_j$, se para algum $(c',m') \in G_j,\ _disp_{c'm'dh} = -1$. Então são feitas as alocações estáticas $x_{cdh} = m$ se usam horários dh para os quais $_disp_{cmdh} = 0$ e $x_{cdh} = -2$, e se feitas para encontros de algum grupo de aulas simultâneas todos os encontros que devem ser simultâneos são alocados também. Imediatamente fazemos $_disp_{cmdh} = 1$ para estas alocações estáticas aceitas e fazemos:

$$_disp_{cm'dh} = -1,\ \forall m' \neq m;$$

$$_disp_{c'm'dh} = -1,\ \forall (c',m') \text{ de } p_{cm},\ (c',m') \neq (c,m)$$

(p_{cm} o professor de m em c); se requer professor substituto $p_s = f_p(m,c)$,

$$_disp_{c'm'dh} = -1,\ \forall (c',m') \text{ de } p_s,\ (c',m') \neq (c,m);$$

e se requer sala especial s_{cm},

$$_disp_{c'm'dh} = -1,\ \forall (c',m') \text{ de } s_{cm},\ (c',m') \neq (c,m).$$

Estes cuidados nos permitem trabalhar com dados mais próximos da realidade quando avaliamos possíveis horários para um encontro de uma certa Aula, e além disso evitam trabalho computacional com alocações impossíveis na prática.

As alocações feitas a partir de uma solução inicial são igualmente avaliadas antes de aceitas (inclusive se alguma pertence a um grupo de aulas simultâneas, respeitando a obrigatoriedade de alocar os encontros das demais Aulas simultaneamente), contudo se aceitas, fazendo $x_{cdh} = m$, os valores de $_disp$ permanecem inalterados.

A partir de então, a estrutura $_disp$ é apenas consultada.

Seja GH o Grafo Híbrido associado ao problema, e seja $\mathscr{S}$ uma solução quase viável. Durante o modelo AST procedimentos de busca local nas duas heurísticas usam movimentos definidos em subgrafos $GH(dh,d'h',\mathscr{S})$ de GH para os encontros representados pelos vértices num conjunto $T \in \mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$. Como sabemos, mediante as propriedades apresentadas na Seção 6.4, que após um movimento apenas parte pequena dos subgrafos associados à nova solução é diferente dos associados a $\mathscr{S}$ para um mesmo par de horários, uma estrutura foi criada para guardar as informações dos conjuntos $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$.

A estrutura $_grafoH$ tem dimensões d_f+1, $\max|H_d|$, d_f+1 e $\max|H_d|$, e para cada par dh e $d'h'$ de horários pertencentes ao quadro da instituição $_grafoH_{dhd'h'}$ guarda $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$. Como $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S}) = \mathscr{T}(d'h',dh,\mathscr{S})$ apenas um destes é guardado e atualizado. Representamos $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$ aqui por uma lista de listas. Cada lista T em $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$ trás as informações dos índices (c,m,d,h) que indicam os encontros e seus horários atualmente alocados. Após a aplicação de um movimento apenas as posições em $_grafoH$ envolvendo algum dos horários usados no movimento precisa ser atualizada conforme a construção de $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$ dada no algoritmo 6.5. Como a estrutura guarda para cada encontro também o horário alocado atualmente, a atualização de $_grafoH$ também inclui as posições com os exatos pares de horários usados no movimento, pares no plural por causa do movimento seqüencial.

7.2 Heurística para encontrar uma solução viável

A heurística que tenta encontrar uma solução viável tem duas fases: a que tenta encontrar uma solução *quase viável* completa, e a que busca transformar esta numa *solução viável*.

Nesta segunda fase o número de encontros alocados não é acrescido, o procedimento é, mediante movimentos, arrumar o horário de forma que ele atenda aos demais critérios para viabilidade não considerados numa solução quase viável.

Se na primeira fase encontramos uma solução quase viável parcial, a segunda fase pode ser executada também. Contudo a solução ao final desta pode não ser considerada viável devido ao não atendimento do número mínimo de aulas geminadas semanais de alguma disciplina numa turma. Disciplina esta que não teve todos seus encontros alocados na solução quase viável.

7.2.1 Encontrando uma solução quase viável

Esta fase alia procedimentos construtivos a procedimentos de busca local.

Em cada iteração objetiva-se alocar todos os encontros (ainda não alocados pela solução inicial se esta existe) de uma Aula a ou de um grupo de aulas simultâneas G_j. Se ao final da iteração não temos todos os encontros alocados o objeto Aula a (ou grupo G_j) é guardado numa lista com os já testados e ainda sem a demanda atendida, *_jaTestados*. Até que todos os objetos Aulas e grupos com demanda incompleta sejam alvo de alguma iteração, este objeto não pode ser alvo novamente.

Note que as Aulas de um grupo de aulas simultâneas têm a mesma demanda.

Cada iteração começa com a ordenação dos objetos Aulas e grupos de aulas simultâneas restando alocar encontros. Para isso são identificados os horários *dh atualmente possíveis* para a alocação dos encontros destes (Aulas ou grupos), e ao mesmo tempo é guardado para cada (c,d,h) o número de matérias m que *disputam* este horário (dh é possível para m de c). Ressaltamos que os dh atualmente possíveis para os encontros de uma Aula a, de m em c, são os horários para os quais:

- a turma c (especial ou classe padrão) está vaga ($x_{cdh} = -2$) e $dh \in H_{cm}$ ($_disp_{cmdh} = 0$);
- as turmas c' (especiais ou não) que não podem ter encontros ao mesmo tempo que c estão vagas ($x_{c'dh} = -2$);
- o professor de m em c, p_{cm}, não está trabalhando, nem como substituto:

$$x_{c'm'dh} = -2,\ \forall (c',m') \text{ de } p_{cm},\ (c',m') \neq (c,m);$$

- o professor substituto $p_s = f_p(m,c)$, se requerido, também não está trabalhando, nem como substituto:

$$x_{c'm'dh} = -2,\ \forall (c',m') \text{ de } p_s,\ (c',m') \neq (c,m);$$

- e a sala especial, se requerida, não está ocupada:

$$x_{c'm'dh} = -2,\ \forall (c',m') \text{ de } s_{cm},\ (c',m') \neq (c,m).$$

E para os encontros de um grupo de aulas simultâneas $G_j = \{(c,m)_{j1}, \ldots, (c,m)_{j|G_j|}\}$ os dh atualmente possíveis são aqueles possíveis para cada Aula indicada por $(c,m)_{jn} \in G_j, n = 1, \ldots, |G_j|$, ao mesmo tempo.

Quanto às turmas c' que não podem ter encontros ao mesmo tempo que c, se c é uma classe padrão são: suas subturmas c_i em ST_c; as uniões de turmas que envolvem c, UT_c; e as uniões de turmas que envolvem alguma subturma c_i de c, UT_{c_i}. Se c é uma turma especial do tipo subturma, são: a classe padrão $\overline{c}$ que a originou e as uniões de turmas que a envolvem (UT_c) ou envolvem a classe padrão que a originou ($UT_{\overline{c}}$). E se c é uma turma especial do tipo união de turmas, são as aulas das turmas (especiais ou não) que não podem acontecer ao mesmo tempo que qualquer subturma ou classe padrão que compõe. Chamamos estas turmas que não podem ter encontros ao mesmo tempo que uma turma c de *relacionadas* a c.

Os objetos Aulas ou grupos de aulas simultâneas são ordenados de forma que a diferença entre o número de horários possíveis e o número de encontros faltando alocar seja não-decrescente. Isto é, tentaremos alocar primeiro os encontros da Aula ou do grupo que tem menos possibilidades. Se há objetos com uma mesma diferença, sua ordem relativa é randômica.

O primeiro objeto Aula ou grupo, não em *_jaTestados*, tem seus horários atualmente possíveis ordenados de forma não-decrescente quanto ao número de matérias que o disputam na turma, ou o menor número de matérias que o disputam entre as turmas do grupo. Isto porque os menos disputados são também os menos atualmente possíveis para encontros. Se há horários com um mesmo número de disputas, sua ordem relativa é randômica. São feitas as alocações para os horários nesta ordem até que seja satisfeita a demanda (total ou restante, devido solução inicial ou alocação estática) ou acabem os horários *dh* atualmente possíveis.

Caso acabem os horários *dh* atualmente possíveis sem que seja completada a demanda, percorre-se os horários na disponibilidade para os encontros da Aula ou grupo ($_disp_{cmdh} = 0$ para m de c, ou para cada $(c,m)_{jn} \in G_j, n = 1,\ldots,|G_j|$) numa ordem aleatória, averiguando a possibilidade de promover trocas capazes de liberar o horário para um encontro. Verificando ser possível para um dado horário, as trocas são feitas e é alocado um novo encontro neste. Continua-se a percorrer os horários até que seja completa a demanda ou seja verificado o último horário. Se é verificado o último horário sem que seja completa a demanda o objeto é guardado na lista *_jaTestados*.

Encerra-se esta iteração. E tudo se repete na próxima: ordenação dos objetos faltando completar demanda, ordenação dos *dh* atualmente possíveis para o primeiro objeto não em *_jaTestados*, alocação para os encontros do objeto Aula ou grupo na ordem destes horários atualmente possíveis e, caso necessário, trocas para liberar horários para alocação.

A nova ordenação é feita para refletir as alterações causadas pelas alocações promovidas para a Aula ou grupo da última iteração, e pelas alterações promovidas pelas trocas caso tenham sido usadas.

Como são feitas as trocas? As trocas são feitas mediante movimentos baseados no Grafo Híbrido e na solução parcial atual quase viável, como definido no Capítulo 6, mas não com movimentos seqüenciais. A verificação de um *dh* candidato se faz da seguinte forma. Primeiro tratemos o caso de uma Aula. Ora este *dh* pertence a disponibilidade dos encontros da Aula a, de m em c, e não está ocorrendo encontro de a neste, $x_{cdh} \neq m$, mas não pode ser considerado atualmente possível, logo:

- há um outro encontro m' ocorrendo nesta turma c; ou
- há um encontro ocorrendo numa turma c' relacionada a c; ou
- o professor da Aula, p_{cm}, já está ministrando algum encontro, seja de uma disciplina sua numa turma ou como substituto; ou
- o professor substituto da Aula, $p_s = f_p(m,c)$, está ministrando algum encontro, seja de uma disciplina sua numa turma ou como substituto; ou ainda
- a sala especial s_{cm} requerida está ocupada por algum encontro.

Os únicos ítens que não ocorrem ao mesmo tempo são o primeiro e o segundo.

Em se tratando de um grupo G_j, o dh candidato pertence a disponibilidade dos encontros de todas as Aulas do grupo e não está ocorrendo neste horário encontros deste grupo. Assim temos semelhantes empecilhos:

- há um outro encontro m' ocorrendo em alguma turma c, para alguma Aula do grupo, $(c,m) \in G_j$; ou
- há um encontro ocorrendo numa turma c' relacionada a alguma turma c, para algum $(c,m) \in G_j$; ou
- algum professor p_{cm} de alguma Aula do grupo, $(c,m) \in G_j$, está ministrando algum encontro, seja de uma disciplina sua numa turma ou como substituto; ou
- algum professor substituto $p_s = f_p(m,c)$ de alguma Aula do grupo está ministrando algum encontro, seja de uma disciplina sua numa turma ou como substituto; ou ainda
- alguma sala especial s_{cm}, requerida por alguma Aula do grupo, está ocupada por algum encontro.

Os movimentos são escolhidos para desfazer estes empecilhos que impedem que dh seja atualmente possível. A busca por estes movimentos é feita na ordem dos ítens, e cada novo movimento escolhido deve manter a liberação promovida pelos movimentos anteriores além das características já atendidas sem necessidade de intervenção. Se para algum ítem não existe um tal movimento que desfaça o empecilho correspondente sem promover novos empecilhos relacionados a ítens anteriores, então a busca para este dh para, e os movimentos já realizados são desfeitos, aplicados novamente na ordem inversa.

Seja GH o Grafo Híbrido associado ao problema, e seja $\mathscr{S}$ a solução parcial atual quase viável. Os movimentos $mov(dh,d'h',T)$ definidos no subgrafo $GH(dh,d'h',\mathscr{S})$ com $T \in \mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$ mantém a quase viabilidade. Isto é, as oito primeiras restrições para viabilidade e mais a restrição quanto a grupos de aulas simultâneas.

Para corrigir o primeiro ítem num horário dh, por exemplo no caso de uma Aula, m de c, procura-se por um movimento $mov(dh,d'h',T)$, com $d'h'$ tal que $x_{cd'h'} = -2$ e o encontro de m' atualmente alocado em dh para a turma c pertença a T, $e_{cm'} \in T$. Assim garantimos que teremos, após a aplicação do movimento, $x_{cdh} = -2$. Consequentemente, $x_{cd'h'} = m'$. Semelhantes buscas são feitas para corrigir o segundo ítem, quanto às turmas relacionadas.

Para garantir que um professor envolvido não esteja trabalhando em dh, é preciso encontrar um movimento $mov(dh,d'h',T)$, com $d'h'$ tal que o encontro de p atualmente alocado em dh pertença a T, digamos $e_{c'm'} \in T$, e nenhum outro encontro seu pertença a T, $\forall(c'',m'')$ de p, $(c'',m'') \neq (c',m')$, $x_{c''d'h'} \neq m''$.

E para garantir que a sala especial s requerida seja desocupada, buscamos por um movimento $mov(dh,d'h',T)$, com $d'h'$ tal que o encontro que atualmente ocupa s em dh pertença a T, digamos $e_{c'm'} \in T$, e nenhum outro encontro que a requer pertença a T, $\forall(c'',m'')$ de s, $(c'',m'') \neq (c',m')$, $x_{c''d'h'} \neq m''$.

Lembramos que um movimento encontrado para corrigir algum ítem só será aceito se manter a não satisfação dos ítens anteriores e das partes do ítem atual já verificadas.

Se são encontrados movimentos que aplicados, um após o outro, tornam *dh* atualmente possível, então estes movimentos não são desfeitos, a alocação em *dh* é feita, a contagem de encontros faltando para a demanda completa é atualizada e novos horários são avaliados a fim de liberação para os encontros restantes desta Aula ou grupo, se existem.

Uma vez que foi executada uma iteração para cada Aula ou grupo que tinha demanda incompleta no início do processo e algumas Aulas ou grupos permanecem desta forma, em *_jaTestados*, todo o processo pode repetir-se após *_jaTestados* ser esvaziado e a solução parcial atual quase viável seja levada noutra também quase viável por um certo número de movimentos escolhidos randomicamente. Desta maneira esperamos que horários *dh* sejam considerados atualmente possíveis ou que novos movimentos agora definidos permitam a liberação de horários na disponibilidade dos encontros.

O Algoritmo 7.6 apresenta uma descrição superficial do processo.

7.2.2 Encontrando uma solução viável a partir de uma quase viável

Nesta fase, usamos a solução quase viável encontrada na fase anterior para realizar uma busca no espaço das soluções quase viáveis por uma solução viável.

Trata-se uma meta-heurística Busca Tabu. A função objetivo é dada pela medida do defeito quanto a viabilidade (encontrada na Definição 6.4):

$$def(\mathscr{S}) = \sum_{\forall cm} def_{cm}(\mathscr{S}) + \rho \cdot \sum_{p \in P} def_{\alpha_p}(\mathscr{S}),$$

onde $\forall m$ de c

$$def_{cm}(\mathscr{S}) = \sigma \cdot def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}) + \theta_1 \cdot defG^1_{cm}(\mathscr{S}) + \theta_2 \cdot defG^2_{cm}(\mathscr{S}) + \lambda \cdot def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}).$$

Os valores $\{\sigma, \theta_1, \theta_2, \lambda, \rho\} \subset \Re^+$ são parâmetros do modelo. Assim também o tamanho da lista tabu, $tamLT$, e o número máximo de iterações, $maxItr$.

Se temos apenas um turno na instância a parte relativa a $defG^2_{cm}$ pode ser desprezada, $\sum_{\forall cm} defG^2_{cm}(\mathscr{S}) = 0$.

Os movimentos usados são $mov(dh, d'h', T)$ e $movSeqQV(dh, d'h', T)$. O segundo é uma variação de $movSeq(dh, d'h', T)$ para esta situação em que aceitamos durante a busca soluções quase viáveis. Sua definição é dada abaixo, e por simplicidade denotaremos apenas na definição um horário por *h* ao invés de *dh*.

Definição 7.1 (Movimento seqüencial quase viável)**.** Seja $mov(h, h', T)$ um movimento definido em um conjunto $T \in \mathscr{T}(h, h', \mathscr{S})$, $\forall\{h, h'\} \subset H$, $h \neq h'$, $\mathscr{S}$ quase viável, tal que $\mathscr{S}^1 = mov(h, h', T)\mathscr{S}$ tem

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^1) > \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}).$$

O *movimento seqüencial*, se existe, é uma seqüência de *n* movimentos, $n \geq 1$,

$$mov(h_1, h'_1, T^1), mov(h_2, h'_2, T^2), \ldots, mov(h_n, h'_n, T^n),$$

aplicados da seguinte forma

$$\mathscr{S}^{n+1} = mov(h_n, h'_n, T^n) \ldots mov(h_2, h'_2, T^2) mov(h_1, h'_1, T^1)\mathscr{S}^1,$$

Algoritmo *Construção de uma solução quase viável*
Entrada
_aulasLista: Aulas ou grupos de Aulas simultâneas.
_disp: com as disponibilidades $_disp_{cmdh}$ inicializadas a partir dos dados de entrada.
x: com as variáveis x_{cdh} de decisão inicializadas a partir dos dados de entrada.
_grafoH: cada $_grafoH_{dhd'h'}$ guarda $\mathscr{T}(dh, d'h', \mathscr{S})$.
numCiclos: número máximo de repetições.
numMov: número máximo de movimentos.
Saída x

{*Procedimento completeSolução:*}
1 $_jaTestados = \emptyset$
2 Identifique $_aulasIncompletas \subseteq _aulasLista$
{*Aulas ou grupos com demanda incompleta.*}
3 **enquanto** $_aulasIncompletas - _jaTestados \neq \emptyset$ **faça**
4 **para cada** a **em** $_aulasIncompletas$ **faça**
5 Compute $_dhPossiveis_a$ e
compute para cada (c,d,h) o número de matérias m disputando.
6 Ordene $_aulasIncompletas$.
7 Seja a_0 o primeiro $a \in _aulasIncompletas$.
8 Ordene $_dhPossiveis_{a_0}$. {*Usando número de m disputando dh com* a_0.}
9 Use os primeiros $dh \in _dhPossiveis_{a_0}$ para completar a demanda de a_0 em x.
10 **se** Demanda de a_0 ainda está incompleta **então**
11 **para cada** dh **em** $_disp$ de a_0 não alocado para a **faça**
{*Os dh numa ordem randômica.*}
12 **se** Demanda de a_0 ainda está incompleta **então**
13 Tente encontrar movimentos que liberem dh.
14 **se** dh foi liberado **então**
15 Em x aloque um encontro de a_0 em dh. {*Encontros se* a_0 *é um grupo.*}
16 **se** Demanda de a_0 ainda está incompleta **então**
17 $_jaTestados = _jaTestados \cup \{a_0\}$
18 **senão**
19 $_aulasIncompletas = _aulasIncompletas - \{a_0\}$
{*Procedimento completeSolução termina aqui.*}
20 $cont = 0$
21 **enquanto** $_jaTestados \neq \emptyset$ e $cont < numCiclos$ **faça**
22 Aplique até *numMov* movimentos escolhidos randomicamente.
23 Aplique completeSolução.
24 $cont = cont + 1$
25 **devolva** x

Algoritmo 7.6 Construção de uma solução quase viável. Alia procedimentos construtivos a procedimentos de busca local.

onde $\forall i = 1, \ldots, n$, temos:

$$\mathscr{S}^{i+1} = mov(h_i, h_i', T^i)\mathscr{S}^i, \text{ cujo conjunto } T^i \in \mathscr{T}(h_i, h_i', \mathscr{S}^i),$$

$$\{h_i, h_i'\} \in \{\{h-1, h'-1\}, \{h-1, h'+1\}, \{h+1, h'-1\}, \{h+1, h'+1\}\},$$

$$h_i \neq h_i' \text{ e } \{h_i, h_i'\} \neq \{h, h'\},$$

tal que $\mathscr{S}^{n+1}$ é uma solução quase viável com

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^{n+1}) \leq \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}),$$

$\mathscr{S}^1, \ldots, \mathscr{S}^n$ são quase viáveis com

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^i) > \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$$

e:

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^n) < \ldots < \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^2) < \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^1).$$

Denotaremos por $movSeqQV(h, h', T)$ a este movimento seqüencial.

Observe que $movSeq(dh, d'h', T)$ foi definido para encontrar uma solução viável após a aplicação de $mov(dh, d'h', T)$ numa solução viável que resultou numa solução apenas quase viável, mas para recuperar a viabilidade perdida devido a separação de aulas geminadas que causou $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(mov(dh, d'h', T)\mathscr{S}) > 0$. Já $movSeqQV(dh, d'h', T)$ foi definido para encontrar uma solução quase viável $\mathscr{S}^*$ com

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^*) \leq \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$$

após avaliarmos

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(mov(dh, d'h', T)\mathscr{S}) > \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}).$$

Isto é, para corrigir a piora no defeito relativo ao número mínimo de aulas geminadas semanais requeridas devido a separação de aulas geminadas.

A vizinhança da solução atual pesquisada se $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}) > 0$ é

$$Q'(\mathscr{S}) = \{\mathscr{R} : \mathscr{R} = mov(dh, d'h', T)\mathscr{S}\},$$

senão é

$$Q''(\mathscr{S}) = \{\mathscr{R} : \mathscr{R} = mov(dh, d'h', T)\mathscr{S} \text{ ou } \mathscr{R} = movSeqQV(dh, d'h', T)mov(dh, d'h', T)\mathscr{S} \text{ para}$$

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(mov(dh, d'h', T)\mathscr{S}) > \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})\}.$$

O movimento seqüencial quase viável é avaliado e pode ser aplicado quando a solução atual tem $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}) = 0$ ou quando é aplicada uma estratégia de diversificação que descreveremos mais à frente.

O critério de parada é alcançar o número máximo de iterações ou encontrar $def(\mathscr{S}) = 0$.

A lista tabu tem tamanho fixo $tamLT$. Cada tabu é representado por uma lista

$$((d,h),(d',h'),(c,m)_1,\ldots,(c,m)_{|T|}),$$

com os horários e a identificação dos encontros em um $T \in \mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$ no qual foi definido um movimento $mov(dh,d'h',T)$ já aplicado. Se numa iteração foi escolhido o movimento $mov(dh,d'h',T)$ para ser aplicado, o tabu correspondente entra no final da lista tabu, e o primeiro tabu da lista é retirado desta. Se é escolhido um movimento $mov(dh,d'h',T)$ seguido de um movimento seqüencial $movSeqQV(dh,d'h',T)$, então $mov(dh,d'h',T)$ determina um tabu que entra pra lista (e o primeiro sai) e cada $mov(d_ih_i,d'_ih'_i,T^i)$, $i = 1,\ldots,n$, na seqüência que compõe $movSeqQV(dh,d'h',T)$ também. Perceba que apesar da lista tabu ter tamanho fixo, o número de iterações em que um movimento permanece tabu é variável (e no máximo igual ao tamanho da lista), pois numa iteração podem entrar pra lista vários tabus e igual quantidade deixa a lista, uma quantidade igual a $1+k$, sendo k o número de movimentos que compõem um dado movimento seqüencial quase viável.

O tabu impede que o movimento correspondente inverso (ou o próprio) seja realizado novamente enquanto o tabu permanece na lista. E este movimento impedido pelo status tabu não pode ser aplicado mesmo como parte de um movimento seqüencial quase viável.

O critério de aspiração para uma solução $\mathscr{S}$ impedida pela lista tabu é que esta tenha valor da função objetivo $def(\mathscr{S})$ menor que o da melhor solução guardada (em xM) e o único movimento tabu usado para encontrá-la seja o primeiro, isto é, se em seguida a este é aplicado um movimento seqüencial quase viável nenhum tabu o compõe.

A cada $maxRep$ iterações sem melhora no valor $f_{obj}(\mathscr{S})$ da solução corrente é aplicado um método que vamos chamar aqui de *Mudando de Direção para Viabilidade*. Ele avalia os movimentos não tabu definidos sobre $\mathscr{S}$ para os pares de horários numa ordem randômica, e aceita as primeiras soluções $\mathscr{S}' \in Q''(\mathscr{S})$ quase viáveis que satisfazem:

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}') \leq \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$$

até que o número de movimentos usados (inclusive compondo movimentos seqüenciais quase viáveis) até a última solução aceita seja maior ou igual a $numMov$. Todos os movimentos usados vão para a lista tabu. Aqui permitimos apenas um movimento seqüencial quase viável por par de horários diferentes.

No Algoritmo 7.7 há uma apresentação desta fase.

Quanto ao procedimento de busca por um movimento seqüencial $movSeqQV(dh,d'h',T)$, ele é espelhado na definição deste movimento. Trata-se de um ciclo onde a cada iteração i encontra-se o melhor movimento (que produz o menor $def(.)$) *não tabu* usando um par de horários $\{dh_i,d'h'_i\} \in \{\{d(h-1),d'(h'-1)\},\{d(h-1),d'(h'+1)\},\{d(h+1),d'(h'-1)\},\{d(h+1),d'(h'+1)\}\}$, com $dh_i \neq d'h'_i$ e $\{dh_i,d'h'_i\} \neq \{dh,d'h'\}$, que faz

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^{i+1}) < \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^i),\ i = 1,\ldots,n,$$

Algoritmo *Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável*
Entrada
$\mathscr{S}_0$: solução quase viável inicial.
x: com as variáveis x_{cdh} de decisão representando a solução atual.
$_grafoH$: cada $_grafoH_{dhd'h'}$ guarda $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$.
$tamLT$: tamanho da lista tabu.
$maxItr$: número máximo de iterações.
$numMov$: parâmetro para Mudando de Direção para Viabilidade.
Saída xM

1 $xM = x$ {*Guarda a melhor solução* $\mathscr{S}^*$.}
2 $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0$ {*Solução atual.*}
3 $\mathscr{S}'' = null$ {*Melhor solução candidata.*}
4 $def(\mathscr{S}'') = \infty$
5 $LT = \emptyset$ {*Lista tabu inicialmente vazia, com tamanho* $tamLT$.}
6 $cont = 0$
7 $ainda = 0$
8 **enquanto** $cont < maxItr$ ou $def(\mathscr{S}) \neq 0$ **faça**
9 **para cada** dh e $d'h' \in H$, $dh \neq d'h'$ **faça**{*Os dh numa ordem randômica.*}
10 **para cada** $T \in _grafoH_{dhd'h'}$ **faça**
11 Avalie $\mathscr{S}' = mov(dh,d'h',T)\mathscr{S}$
12 **se** $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}') > \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$ e $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}) = 0$ **então**
13 **se** $\exists\ movSeqQV(dh,d'h',T)$ **então**{*Busca movimento seqüencial sem tabu.*}
14 $\mathscr{S}' = movSeqQV(dh,d'h',T)mov(dh,d'h',T)\mathscr{S}$
15 **se** $def(\mathscr{S}') \leq def(\mathscr{S}'')$ **então**
16 **se** $def(\mathscr{S}') < def(\mathscr{S}^*)$ ou $\mathscr{S}'$ não é impedida por LT **então**
17 $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}'$
18 **se** $f_{obj}(\mathscr{S}'') \geq f_{obj}(\mathscr{S})$ **então**
19 $ainda = ainda + 1$
20 **senão**
21 $ainda = 0$
22 $\mathscr{S} = \mathscr{S}''$
23 Atualize x, LT e $_grafoH$.
24 $cont = cont + 1$
25 **se** $def(\mathscr{S}) < def(\mathscr{S}^*)$ **então**
26 $\mathscr{S}^* = \mathscr{S}$
27 $xM = x$
28 **se** $ainda = maxREP$ **então**
29 Aplique Mudando de Direção para Viabilidade com $numMov$.
30 $ainda = 0$
31 **devolva** xM

Algoritmo 7.7 Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável. Trata-se de um algoritmo Busca Tabu.

até que

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}^{n+1}) \leq \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}).$$

Assim a seqüência de movimentos escolhidos nesta busca compõem o $movSeqQV(dh, d'h', T)$.

7.3 Heurística para aproximação de uma solução viável ótima

A segunda etapa usa uma solução viável encontrada pelo método de Programação Inteira ou pela heurística que descrevemos na Seção 7.2 como ponto de partida para se aproximar de uma solução viável ótima. A busca é realizada através de uma meta-heurística Busca Tabu no espaço das soluções viáveis.

A função objetivo é dada por

$$f_{obj}(\mathscr{S}) = c_t \cdot nT(\mathscr{S}) + c_{w1} \cdot nW1(\mathscr{S}) + c_w \cdot nW(\mathscr{S}) + c_f \cdot nF(\mathscr{S}) + c_e \cdot nE(\mathscr{S}) + c_{gi} \cdot nGI(\mathscr{S}) +$$

$$c_j \cdot nJ(\mathscr{S}) + c_{js} \cdot nJs(\mathscr{S}) + c_{jS} \cdot nJS(\mathscr{S}) + c_{jM} \cdot nJM(\mathscr{S}).$$

E reflete as sete características desejáveis de nosso problema (de 0 a 6).

- $nT(\mathscr{S}) = \sum_p nT_p(\mathscr{S})$: número de turnos trabalhados em $\mathscr{S}$ por todos os professores.
- $nW1(\mathscr{S}) = \sum_p nW1_p(\mathscr{S})$: número de dias de trabalho com *um encontro apenas* em $\mathscr{S}$ para todos os professores.
- $nW(\mathscr{S}) = \sum_p nW_p(\mathscr{S})$: número de dias trabalhados em $\mathscr{S}$ por todos os professores.
- $nF(\mathscr{S}) = \sum_p nF_p(\mathscr{S})$: número de professores que trabalham todos os dias letivos em $\mathscr{S}$; p sem dia de folga implica $nF_p(\mathscr{S}) = 1$, e caso contrário $nF_p(\mathscr{S}) = 0$.
- $nE(\mathscr{S}) = \sum_{cm} nE_{cm}(\mathscr{S})$: número de espalhamentos ruins em $\mathscr{S}$ para todas as disciplinas das turmas.
- $nGI(\mathscr{S}) = \sum_{cm} nGI_{cm}(\mathscr{S})$: número de aulas geminadas separadas por intervalo em $\mathscr{S}$.
- $nJ(\mathscr{S}) = \sum_p nJ_p(\mathscr{S})$: número de janelas em $\mathscr{S}$ no quadro de horários dos professores que não trabalham como substitutos.
- $nJs(\mathscr{S}) = \sum_p nJs_p(\mathscr{S})$: número de janelas em $\mathscr{S}$ no quadro de horários dos professores que trabalham como substitutos levando em conta apenas suas próprias aulas.
- $nJS(\mathscr{S}) = \sum_p nJS_p(\mathscr{S})$: número de janelas em $\mathscr{S}$ no quadro de horários dos professores que trabalham como substitutos levando em conta suas próprias aulas e mais as que substitui.
- $nJM(\mathscr{S}) = \sum_p nJM_p(\mathscr{S})$: número de janelas em $\mathscr{S}$ no quadro de horários dos professores (com suas aulas) por dia que excedem o máximo desejável ς (dado da instância).

A característica 1 está sendo avaliada por $nT(\mathscr{S})$ e $nW(\mathscr{S})$. A insatisfação das características desejáveis $0,2,4,5$ e 6 são representadas por $nJM(\mathscr{S})$, $nE(\mathscr{S})$, $nGI(\mathscr{S})$, $nF(\mathscr{S})$ e $nW1(\mathscr{S})$, respectivamente. A característica 3 (que junto a 0 e 1, informa o desejo de compacticidade dos quadros de horários dos professores) está relacionada em $nJ(\mathscr{S})$ para os professores que não tem alterações previstas em seus quadros de horários por não serem substitutos, em $nJs(\mathscr{S})$ e $nJS(\mathscr{S})$ para os demais, avaliando o período em que trabalham apenas com as próprias disciplinas e o período em também substituem.

Se há apenas um turno no problema a função objetivo usada é:

$$f_{obj}(\mathscr{S}) = c_{w1} \cdot nW1(\mathscr{S}) + c_w \cdot nW(\mathscr{S}) + c_f \cdot nF(\mathscr{S}) + c_e \cdot nE(\mathscr{S}) + c_{gi} \cdot nGI(\mathscr{S}) +$$

$$c_j \cdot nJ(\mathscr{S}) + c_{js} \cdot nJs(\mathscr{S}) + c_{jS} \cdot nJS(\mathscr{S}) + c_{jM} \cdot nJM(\mathscr{S}).$$

Os valores $c_t, c_{w1}, c_w, c_f, c_e, c_{gi}, c_j, c_{js}, c_{jS}, c_{jM}$ são parâmetros do modelo. Assim também o tamanho da lista tabu, $tamLT$, o número $numItr$ de iterações, o número máximo de iterações $maxRep$ sem melhora no valor $f_{obj}(\mathscr{S})$ da solução corrente e o número $numMov$ (explicado mais adiante).

Os movimentos usados são $mov(dh, d'h', T)$ e $movSeq(dh, d'h', T)$ (Definição 6.3 e 6.5). Sendo que $movSeq(dh, d'h', T)$ foi definido para encontrar uma solução viável após a aplicação de $mov(dh, d'h', T)$ numa solução viável que resultou numa solução apenas quase viável, num contexto bem específico: para recuperar a viabilidade perdida devido a separação de aulas geminadas que provocou o não atendimento do mínimo número de aulas geminadas semanais de alguma disciplina numa turma, $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(mov(dh, d'h', T)\mathscr{S}) > 0$.

A vizinhança da solução atual $\mathscr{S}$ pesquisada é dada por

$$Q'(\mathscr{S}) = \{\mathscr{R} \text{ viável} : \mathscr{R} = mov(dh, d'h', T)\mathscr{S} \text{ ou}$$

$$\mathscr{R} = movSeq(dh, d'h', T)mov(dh, d'h', T)\mathscr{S} \text{ para } \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(mov(dh, d'h', T)\mathscr{S}) > 0\}.$$

O critério de parada é alcançar o número de iterações $numItr$.

A lista tabu tem tamanho fixo $tamLT$. Como na primeira heurística, cada tabu é representado por uma lista

$$((d,h),(d',h'),(c,m)_1,\ldots,(c,m)_{|T|}),$$

com os horários e a identificação dos encontros em um $T \in \mathscr{T}(dh, d'h', \mathscr{S})$ no qual foi definido um movimento $mov(dh, d'h', T)$ já aplicado. Para cada movimento escolhido e aplicado numa iteração, $mov(dh, d'h', T)$ ou $mov(d_ih_i, d'_ih'_i, T^i)$ $(i = 1,\ldots,n)$ que compõe $movSeq(dh, d'h', T)$, o tabu correspondente entra no final da lista tabu (na ordem em que foi aplicado) e o primeiro tabu da lista é retirado desta. Assim, o número de iterações em que um movimento permanece tabu é variável (e no máximo igual ao tamanho da lista), pois numa iteração podem entrar pra lista vários tabus e igual quantidade deixa a lista, uma quantidade igual a $1+k$, sendo k o número de movimentos que compõem um dado movimento seqüencial.

O tabu impede que o movimento correspondente inverso (ou o próprio) seja realizado novamente enquanto o tabu permanece na lista. E este movimento impedido pelo status tabu não pode ser aplicado mesmo como parte de um movimento seqüencial.

O critério de aspiração para uma solução $\mathscr{S}$ impedida pela lista tabu é que esta tenha valor da função objetivo $f_{obj}(\mathscr{S})$ menor que o da melhor solução guardada (em xM) e o único movimento tabu usado para encontrá-la seja o primeiro, isto é, se em seguida a este é aplicado um movimento seqüencial nenhum tabu o compõe.

Também faz parte do algoritmo uma estratégia de diversificação. Aqui também são usados os movimentos seqüenciais. A cada *maxRep* iterações sem melhora no valor $f_{obj}(\mathscr{S})$ da solução corrente é aplicado um método que vamos chamar aqui de *Mudando de Direção*. Ele avalia os movimentos não tabu definidos sobre $\mathscr{S}$ para os pares de horários numa ordem randômica, e aceita as primeiras soluções $\mathscr{S}'$ viáveis que satisfazem:

$$nW1(\mathscr{S}') < nW1(\mathscr{S}) \text{ ou } nF(\mathscr{S}') < nF(\mathscr{S}) \text{ ou}$$

$$(c_{w1} \cdot nW1(\mathscr{S}') + c_e \cdot nE(\mathscr{S}') + c_{gi} \cdot nGI(\mathscr{S}') \leq c_{w1} \cdot nW1(\mathscr{S}) + c_e \cdot nE(\mathscr{S}) + c_{gi} \cdot nGI(\mathscr{S}) \text{ e}$$
$$nJM(\mathscr{S}') \leq nJM(\mathscr{S}) \text{ e } nF(\mathscr{S}') \leq nF(\mathscr{S}))$$

até que o número de movimentos usados (inclusive compondo movimentos seqüenciais) até a última solução aceita seja maior ou igual a *numMov*. Todos os movimentos usados vão para a lista tabu. E permitimos aqui apenas um movimento seqüencial por par de horários diferentes.

Outras expressões lógicas poderiam ser usadas em Mudando de Direção. Contudo nossa escolha se baseia na importância dada às características desejáveis citadas na expressão e uma relativa negociação entre piora e melhora de algumas características. Desta forma esperamos nos distanciar de ótimos locais, mas com uma direção de melhora para pelo menos algumas características desejáveis.

No Algoritmo 7.8 há uma apresentação desta etapa de AST.

Quanto ao procedimento de busca por um movimento seqüencial $movSeq(dh, d'h', T)$, ele é espelhado na definição deste movimento. Trata-se de um ciclo onde a cada iteração i encontra-se o melhor movimento (que produz o menor $def(.)$) *não tabu* usando um par de horários $\{dh_i, d'h'_i\} \in \{\{d(h-1), d'(h'-1)\}, \{d(h-1), d'(h'+1)\}, \{d(h+1), d'(h'-1)\}, \{d(h+1), d'(h'+1)\}\}$, com $dh_i \neq d'h'_i$ e $\{dh_i, d'h'_i\} \neq \{dh, d'h'\}$, que faz

$$\sum_{\forall cm} def(\mathscr{S}^{i+1}) < \sum_{\forall cm} def(\mathscr{S}^i),\ i = 1, \ldots, n,$$

até que

$$\sum_{\forall cm} def(\mathscr{S}^{n+1}) = 0.$$

Assim a seqüência de movimentos escolhidos nesta busca compõem o $movSeq(dh, d'h', T)$.

Saiba que na busca por um $movSeq(dh, d'h', T)$ não consultamos $_grafoH$, pois este só será atualizado depois de escolhermos o melhor $\mathscr{S}'$ em $Q'(\mathscr{S})$. Para avaliar os possíveis movimentos nós construímos os conjuntos $\mathscr{T}(dh_i, d'h'_i, mov(dh, d'h', T)\mathscr{S})$.

A busca por um $movSeq(dh, d'h', T)$ se dá apenas na situação em que há chance de corrigir o defeito provocado por $mov(dh, d'h', T)$. Conforme foi explanado no final da Seção 6.4. Na Figura 7.1 apresentamos o que seria um procedimento de "Branch and Bound" para encontrar $Q'(\mathscr{S})$ no espaço das soluções viáveis.

Algoritmo *Aproximação de uma solução ótima.*
Entrada
$\mathscr{S}_0$: solução viável inicial.
x: com as variáveis x_{cdh} de decisão representando a solução atual.
$_grafoH$: cada $_grafoH_{dhd'h'}$ guarda $\mathscr{T}(dh,d'h',\mathscr{S})$.
$maxRep$: número máximo sem melhora no valor f_{obj} corrente.
$tamLT$: tamanho da lista tabu.
$numItr$: número de iterações.
$numMov$: parâmetro para Mudando de Direção.
Saída xM

1 $xM = x$ {*Guarda a melhor solução* $\mathscr{S}^*$.}
2 $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0$ {*Solução atual.*}
3 $\mathscr{S}'' = null$ {*Melhor solução candidata.*}
4 $def(\mathscr{S}'') = \infty$
5 $LT = \emptyset$ {*Lista tabu inicialmente vazia, com tamanho* $tamLT$.}
6 $cont = 0$
7 $ainda = 0$
8 **enquanto** $cont < numItr$ **faça**
9 **para cada** dh e $d'h' \in H$, $dh \neq d'h'$ **faça**{*Os dh numa ordem randômica.*}
10 **para cada** $T \in _grafoH_{dhd'h'}$ **faça**
11 Avalie $\mathscr{S}' = mov(dh,d'h',T)\mathscr{S}$
12 **se** $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}') > \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$ **então**
13 **se** $\exists\ movSeq(dh,d'h',T)$ **então**{*Busca movimento seqüencial sem tabu.*}
14 $\mathscr{S}' = movSeq(dh,d'h',T)mov(dh,d'h',T)\mathscr{S}$
15 **se** $def(\mathscr{S}') = 0$ e $f_{obj}(\mathscr{S}') \leq f_{obj}(\mathscr{S}'')$ **então**
16 **se** $f_{obj}(\mathscr{S}') < f_{obj}(\mathscr{S}^*)$ ou $\mathscr{S}'$ não é impedida por LT **então**
17 $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}'$
18 **se** $f_{obj}(\mathscr{S}'') \geq f_{obj}(\mathscr{S})$ **então**
19 $ainda = ainda + 1$
20 **senão**
21 $ainda = 0$
22 $\mathscr{S} = \mathscr{S}''$
23 Atualize x, LT e $_grafoH$.
24 $cont = cont + 1$
25 **se** $f_{obj}(\mathscr{S}) < f_{obj}(\mathscr{S}^*)$ **então**
26 $\mathscr{S}^* = \mathscr{S}$
27 $xM = x$
28 **se** $ainda = maxREP$ **então**
29 Aplique Mudando de Direção com $numMov$.
30 $ainda = 0$
31 **devolva** xM

Algoritmo 7.8 Aproximação de uma solução ótima. Trata-se de um algoritmo Busca Tabu.

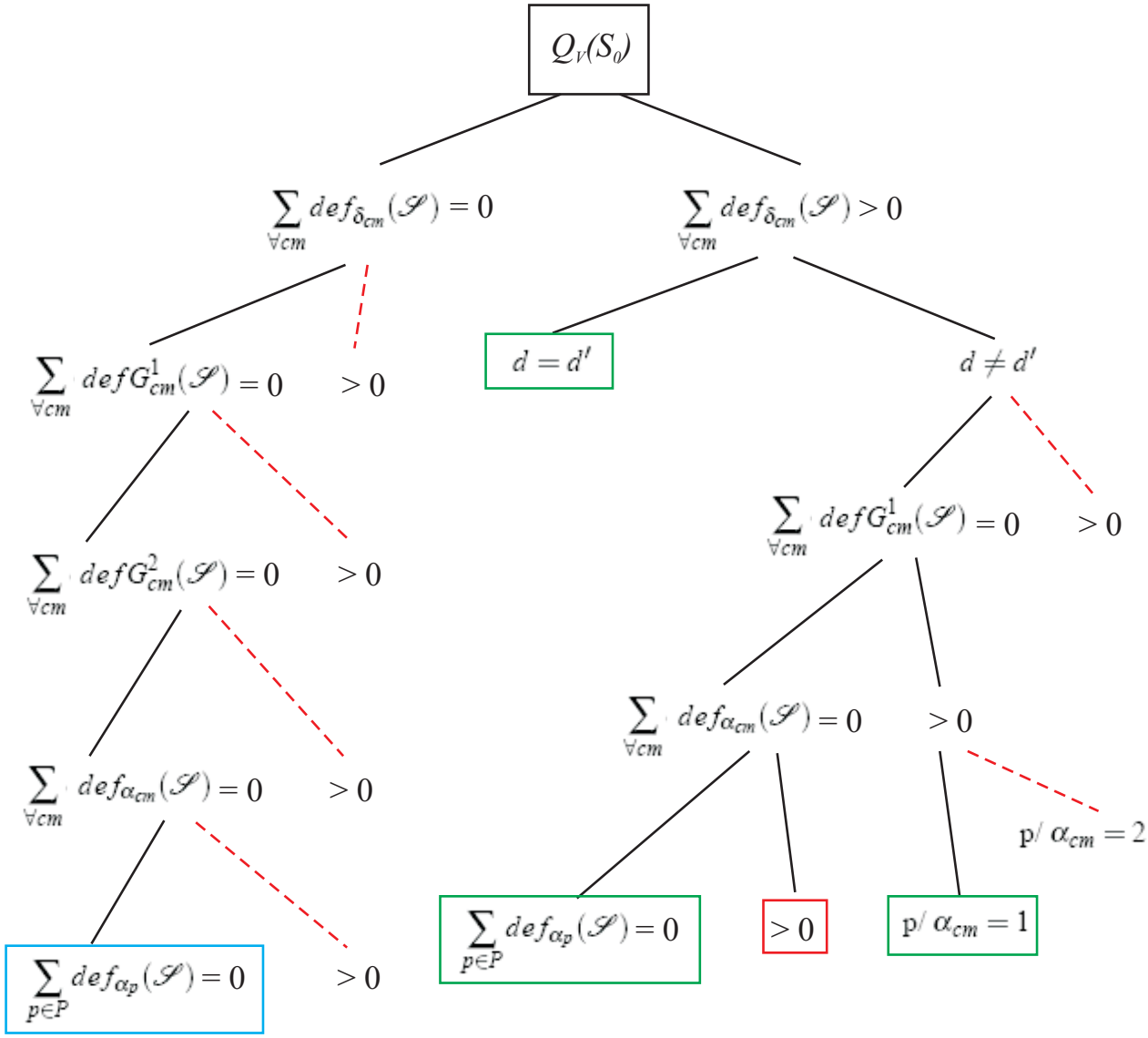


Figura 7.1 "Branch and Bound" para encontrar $Q'(\mathscr{S}_0)$ no espaço das soluções viáveis. Aqui $Q_V(\mathscr{S}_0)$ é o espaço da soluções quase viáveis $\mathscr{S}$ encontradas a partir de $\mathscr{S}_0$ com um $mov(dh, d'h', T)$. Se $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}) = 0$, não há aplicação de *movSeq*, logo apenas as soluções $\mathscr{S}$ viáveis servem (quadrado azul). Senão, $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}) > 0$, *movSeq* pode existir para $\mathscr{S}$ (quadrados verdes), mas quando $d \neq d'$ isto é impossível em alguns casos: quando $\sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}) > 0$; e se $\sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}) = 0$ quando $\exists cm$ com $def\alpha_{cm}(\mathscr{S}) > 0$ e $\alpha_{cm} = 2$, ou quando $\exists p$ com $def\alpha_p(\mathscr{S}) > 0$ e p no dia em que excede α_p não ensina em horário vizinho ao usado no movimento. O que deve se verificar não ocorrer antes de tentar encontrar um *movSeq* (quadrado vermelho).

CAPÍTULO 8

Resultados experimentais

O modelo AST atualmente recebe os dados das instâncias através de arquivos texto num formato especial conforme é indicado no Apêndice A. Nos Apêndices seguintes disponibilizamos o arquivo texto de algumas instâncias com o intuito de permitir que outros modelos sejam testados com as mesmas.

As saídas com os quadros de horários para turmas, para professores e para salas são dadas em arquivos ".xls" e em arquivos texto com as alocações. Os últimos para que possamos usar as alocações como uma solução inicial para executar AST, por exemplo, por mais um número de iterações com outros parâmetros. Usamos "saídas" no plural porque temos a geração destes arquivos (pelo modelo, de dentro do ambiente de programação em Java) ao final das duas fases: busca de uma solução viável e aproximação de uma solução ótima; um arquivo de cada tipo em cada fase.

O processo é acompanhado por uma série de informações impressas na área de trabalho que são em seguida salvas num arquivo como relatório da execução.

Também é possível, uma vez lidos os dados das instâncias e criadas as estruturas que os contém internas ao modelo, gerar um arquivo texto com formato semelhante ao do arquivo de entrada. Servindo no momento apenas para possível comparação. Mas como é nossa intenção desenvolver uma interface gráfica para AST, servirá para documentação dos dados usados, tendo sido lidos da interface e não de um arquivo texto.

Os dados reais que usamos têm origem em duas escolas públicas bem diferentes: o Colégio de Aplicação (CAp) da Universidade Federal de Pernambuco, em Recife; e o Centro Integrado de Educação Assis Chateaubriand (CIEAC), um colégio estadual em Feira de Santana, Bahia. Também foram feitos testes com modificações destes dados.

O CIEAC é um colégio bem maior que o CAp, mas tem instâncias bem mais simples com relação aos requerimentos.

8.1 Características do CAp

As quatorze classes do Cap, duas de cada ano letivo do Ensino Fundamental e Médio, tem seus encontros em dois turnos. Cada classe assiste aulas em todas as manhãs e mais duas tardes. No dia em que têm aulas à tarde não possuem o último horário da manhã. As classes são 5A, 5B, 6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B, 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B.

O quadro de horários da instituição possui cinco dias, cada um com seis horários pela manhã e três à tarde, com exceção da sexta-feira, com aula apenas pela manhã. Totalizando 42 horários letivos. Há intervalo entre o 3º e o 4º horário.

As turmas tem em geral 33 encontros com exceção dos 7º anos com 32 e 3º anos com 30. Horários estes determinados na entrada dos dados.

Algumas matérias não podem ser lecionadas à tarde: Português, Matemática, Química e Física. Consegue-se este resultado no modelo restringindo a disponibilidade de tempo dos professores que dão estas matérias às manhãs, não havendo prejuízo por darem aulas apenas destas matérias, ou, caso contrário, criando um professor artificial que é substituto deste na matéria e só tem disponibilidade de tempo para às manhãs. Este último caso ocorre para um professor que leciona Português e Parte Diversificada (PD) nos dados de 2007.

As diferentes aulas de PD são distinguidas nos dados de 2008, são de Informática, Pesquisa, Desenho, Percussão, Cinema, Meio Ambiente Orientação quanto a sexualidade. Daí um número maior de disciplinas diferentes neste ano.

Alguns professores envolvidos em atividades de coordenação e direção da instituição não precisam ter seus horários de forma compacta, para estes não são avaliados o número de turnos, de dias com uma aula, de dias trabalhados, se há dia de folga, janelas... Isto é, os ítens que dizem respeito à arrumação de seu quadro de horários. O requerimento para viabilidade quanto ao máximo número de encontros diários do professor continua sendo respeitado. Junta-se a estes os professores que dão aula de uma só matéria para uma só turma, ou cuja disponibilidade de tempo frente o número de encontros já determina a forma de seu horário. A estes professores que não podem ou não precisam ter seus horários arrumados vamos chamar de "*integrais*".

Um professor que apenas substitui outro em todas as suas matérias, também é considerado entre os professores integrais, para que as características relativas a compacticidade deste horário não sejam contadas duas vezes. Nos dados do CAp existem professores assim, e professores que são substituídos no todo ou apenas em parte de suas disciplinas por um ou mais professores, inclusive com estes tendo outras disciplinas próprias para lecionar.

No CAp ocorrem professores dando matérias diferentes para uma mesma turma, algumas salas especiais (e grupo de duas salas possíveis para algumas aulas), grupos de aulas simultâneas (envolvendo de duas a cinco aulas, de subturmas de uma mesma turma ou de turmas diferentes), alocações estáticas (dados de 2008) e encontros dados a turmas especiais, sendo subturmas e união de turmas (estas compostas por subturmas de turmas diferentes). Algumas classe padrão chegam a ter cinco subturmas.

As aulas dadas a subturmas de uma mesma classe padrão nem sempre estão envolvidas em grupos de aulas simultâneas nos dados de 2008, o que permite diferentes combinações. Estas envolvem 16 encontros.

Entre as salas especiais dos dados de 2008 há uma sala artificial, para garantir que dois professores envolvidos na coordenação da instituição não estejam ocupados com aulas ao mesmo tempo.

Além de tudo isso, todas as matérias que tem demanda maior que um encontro têm máximo diário $\alpha = 2$ e mínimo número de aulas geminadas semanais igual ao máximo. Poucas matérias têm apenas um encontro, por exemplo, Orientação Educacional (OE) ou Filosofia.

As prioridades do CAp são evitar professores sem dia de folga, dias com um encontro apenas, exceder o máximo número de janelas diário desejável $\varsigma = 2$, e espalhamentos ruins. Na confecção do horário de 2008 eles buscaram ter zero espalhamentos ruins. O número geral de janelas tem mais baixa prioridade.

Outra prioridade do CAp, esta não tratada em nosso modelo, é garantir que cada matéria de cada turma que possui aulas geminadas tenha pelo menos uma vez na semana aula geminada não separada por intervalo. Nosso modelo apenas tenta minimizar o número geral de aulas geminadas com intervalo.

Muitas outras questões são levadas em conta na confecção dos horários letivos do CAp, o que nos faz considerá-lo um problema realmente complexo e difícil.

Ter acesso a este problema e dados é realmente algo excelente para verificar nosso modelo.

Na Tabela 8.1 há uma apresentação das características das instâncias de 2007 e 2008.

Nesta tabela há a medida de esparsividade Ω, definida na página 85, destas instâncias. Como as aulas que são substituídas interferem no número de horários livres possíveis às atividades dos professores após a formação de um horário, então acrescentamos seu número ao de $|E|$ na fórmula de Ω.

Apesar de turmas iguais nos dois anos, as instâncias são bem diferentes na formulação relativa às aulas. Isto por causa de poucas modificações com relação à algumas matérias oferecidas e em geral porque na instância de 2007 os dados disponibilizados eram um tanto artificialmente elaborados para garantir depois nova subdivisão das turmas. Nos dados de 2008, já compreendendo melhor a capacidade de AST, os dados nos entregue são bem mais reais, não precisando qualquer alteração posterior quanto a subturmas.

Saiba que nestes dados uma turma pode estar subdividida em até cinco para encontros de Línguas Estrangeiras (de línguas e níveis diferentes) que devem acontecer ao mesmo tempo, e em duas para, por exemplo, encontros de Música, Arte, Física e Química (porque estas devem ser dadas a poucos alunos por vez) não necessariamente já combinadas num grupo de duas aulas simultâneas pois todos os alunos desta turma assistem a estas. Não há qualquer conflito provocado em chamar as primeiras de subturmas de 1 a 5 e as últimas de 1 e 2 apesar de serem partições diferentes da mesma turma, pelo fato das primeiras estarem envolvidas num grupo de aulas simultâneas. Nos dados de 2008, podem inclusive ocorrer aulas de Música e Química ou de Arte e Física, ao invés da combinação mais usual, sem problema algum para as subturmas dos 8º anos.

Quanto às aulas de cada classe, demanda, máximo diário e mínimo semanal de aulas geminadas, as informações podem ser encontradas facilmente nos Apêndice B e Apêndice C.

O CAp tem usado nestes dois anos um software comercial para elaborar seus horários, nós tivemos acesso a estes horários usados e pudemos comparar nosso desempenho com o deste relativamente ao que AST se propõe a tratar.

8.2 Características do CIEAC

Obtivemos do CIEAC os quadros de horários letivos de 2006 dos professores. Horário este feito através de um software comercial.

Trata-se de um grande colégio com quase quarenta classes por turno, divididas em dois pavilhões. Nossos testes usam os dados do turno da manhã e da tarde, os maiores.

O quadro de horários da instituição e das turmas têm exatamente 25 horários num turno, 5 dias com 5 horários cada. As classes assistem aula num turno apenas. E o intervalo ocorre entre o 3º e o 4º horários.

Características	CAp 2007	CAp 2008
nº de encontros	572	560
nº de horários das turmas	de 30 a 33	de 30 a 33
nº de turmas	14	14
nº de subturmas	33	50
nº de união de turmas	0	29
nº de matérias	16	22
nº de matérias das turmas	de 11 a 13	de 11 a 15
nº de professores	50	57
nº de prof. artificiais	1	0
nº de prof. integrais	3	16
nº de prof. que são substituidos	3	4
nº de prof. que substituem	4	5
nº de prof. com mais de uma mat. por turma	2	0
nº máximo de enc. diários do prof.	6	6
exceção: nº máx. diário de Jane	4	5
exceções: nº de profs. com máx. diário 7	3	0
nº de salas especiais	3	6
nº de Aulas para escolher sala especial	0	12
nº de encontros com turmas especiais	218	206
nº de encontros cujos profs. são substituídos	28	31
nº de encontros com salas especiais	97	129
nº de grupos de aulas simultâneas	20	23
nº de Aulas num grupo	de 2 a 5	de 2 a 5
nº de alocações estáticas	0	2
nº mínimo de aulas geminadas é o	máximo	máximo
nº de encontros em aulas geminadas	432	424
nº máx. diário desejável de janelas ς	2	2
medida de esparsividade Ω	0.3528	0.3913

Tabela 8.1 Características das instâncias do CAp de 2007 e 2008.

Os professores têm reuniões semanais em grupos (de professores de matérias exatas ou humanas) durante 4 horários seguidos, ou excepcionalmente em 3 para alguns professores. Estas reuniões ocorrem em diferentes dias e são chamadas de AC.

Alguns professores ensinam turmas dos dois pavilhões num turno, 6 pela manhã e 9 pela tarde. O que a princípio nos leva a fazer o horário destes juntos, de um turno.

Há também professores dando diferentes matérias numa mesma classe.

As exigências das instâncias do CIEAC são mínimas. Não há salas especiais, professores substitutos, grupos de aulas simultâneas, alocações estáticas ou turmas especiais. O número máximo diário dos professores é não restritivo. E o número mínimo de aulas geminadas é zero. De fato no horário disponibilizado, por exemplo, uma matéria que tem quatro encontros ocorre para uma turma em quatro dias, e dias seguidos; e um professor pode ensinar todos os dez horários dos dois turnos de um dia.

As aulas de Educação Física usam uma das duas quadras ou ocorrem em sala de aula, aulas teóricas. Não fazendo parte do problema estas salas.

A prioridade está relacionada à compacticidade dos horários. Percebe-se isso na disponibilidade apresentada nestes quadros de horários, praticamente quase todos os professores disponibilizam número de horários igual à sua demanda. Os que não o fazem, disponibilizam um ou dois horários a mais.

O número máximo de janelas diário desejável é $\varsigma = 1$.

É possível e provável que a disponibilidade de tempo inicial dos professores foi sendo tolhida durante o processo de confecção do horário. Ouso dizer isso por ter sido professora do Estado neste colégio por dois anos antes de me dedicar à pós-graduação, quando o horário era feito manualmente e os professores eram inquiridos quanto à preferência por dia de folga, e por uma segunda opção caso esta não pudesse ser atendida. A carga horária contratada é de 20 ou 40 horas.

Seria mesmo temerária uma disponibilidade de horários inicial com 986 horários possíveis para os 72 professores quando sua demanda total é de 975 encontros com 39 turmas. Uma folga de apenas 11 horários, 0.0112%. Estes são dados do turno da manhã. No turno da tarde a folga é de apenas 18 horários.

Portanto a dificuldade destas instâncias reside não na complexidade dos requerimentos, mas no grande número de encontros para alocar frente ao "restrito" espaço de busca (vide a medida de esparsividade).

Veja a Tabela 8.2 e a Tabela 8.3 para observar as características dos turnos matutino e vespertino, respectivamente. Para ter informação das turmas veja a Tabela 8.4.

8.3 As instâncias usadas nos testes

Os testes foram feitos com instâncias representando fielmente os dados recebidos e com outras instâncias criadas a partir destes dados com determinadas modificações.

As instâncias recebidas são: CAp 2007, CAp 2008, CIEAC Mat e CIEAC Vesp. Cujas características foram declaradas nas últimas duas seções e suas tabelas.

Instâncias foram criadas a partir de CIEAC Mat e CIEAC Vesp com alterações na disponibilidade de tempo dos professores e ou com mínimo número de aulas geminadas diferente de

Características	CIEAC Mat	Pav I	Pav II
nº de encontros	975	450	525
nº de horários das turmas	25	25	25
nº de turmas	39	18	21
nº de matérias	20	11	18
nº de matérias das turmas	de 10 a 11	de 10 a 11	de 10 a 11
nº de professores	72	35	43
nº de prof. integrais	62	30	38
nº de prof. com mais de uma mat. por turma	5	2	3
nº mínimo de aulas geminadas	0	0	0
nº máx. diário desejável de janelas ς	1	1	1
medida de esparsividade Ω	0.0061	0.0365	0.0344

Tabela 8.2 Características do turno matutino do CIEAC.

Características	CIEAC Vesp	Pav I	Pav II
nº de encontros	950	425	525
nº de horários das turmas	25	25	25
nº de turmas	38	17	21
nº de matérias	17	11	12
nº de matérias das turmas	de 10 a 11	10	11
nº de professores	75	39	45
nº de prof. integrais	58	29	34
nº de prof. com mais de uma mat. por turma	1	0	1
nº mínimo de aulas geminadas	0	0	0
nº máx. diário desejável de janelas ς	1	1	1
medida de esparsividade Ω	0.0096	0.0102	0.0124

Tabela 8.3 Características do turno vespertino do CIEAC.

CIEAC Mat	Classes
Pav I	da 5ª01 à 5ª08 e da 6ª01 à 6ª10
Pav II	da 7ª01 à 7ª04, do 1º01 ao 1º14 e do 2º01 ao 2º03
CIEAC Vesp	Classes
Pav I	da 7ª05 à 7ª09 e da 8ª01 à 8ª12
Pav II	do 2º04 ao 2º15 e do 3º01 ao 3º09

Tabela 8.4 Classes do CIEAC (diurnas).

zero. São elas:

- CIEAC Mat I: trata-se de CIEAC Mat restrito ao pavilhão I, exigindo para as aulas de Português (matéria com maior demanda, $r = 5$, e máximo diário $\alpha = 2$) número mínimo de aulas geminadas semanais $\delta = 2$ (o máximo).

- CIEAC Mat II: trata-se CIEAC Mat restrito ao pavilhão II, exigindo para as aulas de Português $\delta = 2$ e para as aulas de Literatura $\delta = 1$ ($r = 4$, e $\alpha = 2$).

- CIEAC Mat 0: Tem as mesmas informações de CIEAC Mat com exceção da disponibilidade de tempo dos 6 professores que dão aula nos dois pavilhões. A disponibilidade destes é substituída por todos os horários menos os que deve estar em reunião de AC. E dentre estes 6 professores os 5 que são integrais em CIEAC Mat (por ter disponibilidade igual a demanda) deixam de o ser aqui. Tem medida de esparsividade $\Omega = 0.0505$.

- CIEAC Mat Ideal: é feito com a disponibilidade de tempo igual a todos os horários menos os de AC para cada professor e exigindo mínimo número de aulas geminadas diferente de zero para algumas matérias. Nenhum professor é considerado integral. Na Tabela 8.5 pode-se ver a distribuição de aulas, demanda e máximo diário, além do mínimo número de aulas geminadas (de pares) requerido pela instância Ideal. Tem medida de esparsividade $\Omega = 0.33$.

- CIEAC Mat Ideal I: trata-se de CIEAC Mat Ideal restrito ao pavilhão I. Com medida de esparsividade $\Omega = 0.3647$.

- CIEAC Mat Ideal II: trata-se de CIEAC Mat Ideal restrito ao pavilhão II. Com medida de esparsividade $\Omega = 0.3562$.

- CIEAC Vesp 0: como no caso de CIEAC Mat 0, as alterações se referem aos professores que dão aula nos dois pavilhões, que neste turno são 9, mais uma professora "chave". Tem medida de esparsividade $\Omega = 0.0522$.

As medidas de esparsividade de CIEAC Mat I e CIEAC Mat II são as mesmas expressas na Tabela 8.2, $\Omega = 0.0365$ e 0.0344, respectivamente. As disponibilidades de tempo dos professores não mudaram. São medidas maiores que CIEAC Mat, também porque os seis professores que que trabalham nos dois turnos tem seus encontros divididos entre estes e apresentam maior folga, horários possíveis vagos, observando um pavilhão apenas. Se há um pequeno ganho com isso, por outro lado estas instâncias exigem para poucas disciplinas um mínimo número de aulas geminadas.

CIEAC Mat 0 e CIEAC Vesp 0 também tem medidas de esparsividade maior que CIEAC Mat e CIEAC Vesp, pois neste caso as disponibilidades de tempo foram aumentadas para 6 e 10 professores, respectivamente. Um pequeno ganho em termo de possibilidades num espaço restrito e uma responsabilidade, a de compactar os horários destes professores.

Quanto às instâncias do tipo "Ideal", elas foram criadas para avaliar a capacidade de nosso modelo de atender a uma quantidade maior de requerimentos e ao mesmo tempo compactar os horários dos professores. Um meio termo entre as instâncias reais do CAp e do CIEAC.

Disciplinas	5ª, 6ª e 8ª	7ª	1º	2º	3º
Artes	-	-	-	-	2 2 0
Bio	-	-	2 2 0	2 2 0	3 2 1
Cien	3 2 1	3 2 1	-	-	-
Desen	2 2 0	-	-	-	-
EdArt	2 2 0	2 2 0	-	-	-
EdFis	2 2 0	2 2 0	2 2 0	2 2 0	2 2 0
Espan	-	-	2 2 0	-	-
Filo	-	-	1 1 0	-	-
Fis	-	-	2 2 0	2 2 0	3 2 1
Geo	2 2 0	2 2 0	2 2 0	2 2 0	2 2 0
Hist	2 2 0	2 2 0	2 2 0	2 2 0	2 2 0
Ingl	2 2 0	2 2 0	-	2 2 0	2 2 0
Liter	-	-	4 2 2	4 2 2	4 2 2
Mat	4 2 1	4 2 1	3 2 1	3 2 1	3 2 1
PEI	-	-	3 2 1	3 2 1	-
Port	5 2 2	5 2 2	-	-	-
Qui	-	-	2 2 0	2 2 0	2 2 0
Red	-	2 2 1	-	-	-
Rel	1 1 0	1 1 0	-	-	-
SOC	-	-	-	1 1 0	-
Soma de δ	4	5	4	4	5

Tabela 8.5 Sobre as aulas do CIEAC e seus α nas instâncias "Ideal". Para cada tipo de ano letivo temos suas matérias com r, α e δ.

Note que o número mínimo de aulas geminadas para as disciplinas das turmas (Tabela 8.5) não é o máximo nestas instâncias. E que os professores não tem disponibilidade total devido às reuniões de AC (algo já suficiente para que seja NP-completo).

8.4 Escolha dos parâmetros

As instâncias podem ser divididas em dois grupos. Aquelas em que há maior número de restrições relacionadas às questões pedagógicas, questões para as quais é dado peso relativo maior, chamemos de Grupo A. E aquelas em que a compacticidade tem maior importância, Grupo B.

Por isso foram feitos vários testes para estes grupos separadamente. E os parâmetros foram definidos como na Tabela 8.6, Tabela 8.7 e Tabela 8.8.

O numCiclos, para Construção de uma solução quase viável, é um número máximo de repetições do Procedimento completeSolução seguido de uma estratégia de diversificação. O numMov refere-se ao máximo número de movimentos usados nesta estratégia para ir da solução quase viável parcial corrente a uma outra em sua vizinhança. Conforme no capítulo anterior.

Parâmetros	Grupo A	Grupo B
numCiclos	2000	2000
numMov	1000	1000

Tabela 8.6 Parâmetros relativos à *Construção de uma solução quase viável*. Veja o Algoritmo 7.6.

Parâmetros	Grupo A	Grupo B
σ	1000	1000
θ_1	1000	1000
θ_2	1000	1000
λ	2000	2000
ρ	1000	1000
tamLT	100	2000
maxRep	10	1000
numMov	30	100
numItr	50000	50000

Tabela 8.7 Parâmetros relativos à *Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável*. O numMov refere-se ao máximo número de movimentos usados para ir da solução quase viável corrente a uma outra pela estratégia Mudando de Direção para Viabilidade. Conforme capítulo anterior. Veja o Algoritmo 7.7.

Parâmetros	Grupo A	Grupo B
c_t	5	0
c_{w1}	10	30
c_w	5	20
c_f	40	100
c_e	20	2
c_{gi}	10	1
c_j	1	20
c_{js}	0.6	12
c_{jS}	0.4	8
c_{jM}	19	30
tamLT	100	100
maxRep	10	10
numMov	30	30
numItr	1000	10000

Tabela 8.8 Parâmetros relativos à *Aproximação de uma solução viável ótima*. O numMov refere-se ao máximo número de movimentos usados para ir da solução viável corrente a uma outra pela estratégia Mudando de Direção. Veja o Algoritmo 7.8.

Classificamos como instâncias do Grupo A: CAp 2007, CAp 2008, CIEAC Mat Ideal, CIEAC Mat Ideal I e CIEAC Mat Ideal II.

São do Grupo B: CIEAC Mat, CIEAC Vesp, CIEAC Mat 0 e CIEAC Vesp 0.

As instâncias CIEAC Mat I e CIEAC Mat II poderiam pertencer ao Grupo B. Mas como a disponibilidade de tempo da maioria de seus professores é apertada, exceto seis professores, e há $\delta \neq 0$ para algumas disciplinas, fizemos os testes com os parâmetros do Grupo A. E usamos $tamLT = 500$, $maxRep = 200$ e $numMov = 20$ na Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável.

A expressão lógica

$$\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}') \leq \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$$

usada por Mudando de Direção para Viabilidade na Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável não tem sentido para o Grupo B, com $\delta = 0$ para toda disciplina de toda turma. Então usamos para o Grupo B a expressão

$$\sum_{\forall cm} def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}') \leq \sum_{\forall cm} def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}) \text{ ou } \sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}') \leq \sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}).$$

E no caso de CIEAC Mat I e CIEAC Mat II usamos

$$\sum_{\forall cm} def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}') \leq \sum_{\forall cm} def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S}).$$

Os testes que foram feitos para determinar a escolha dos parâmetros dos grupos não serão reportados, mas algumas justificativas cabem aqui.

No Grupo A há aulas geminadas e a presença dos movimentos seqüenciais produz iterações envolvendo um maior número de encontros cada, têm uma maior amplitude. Embora, o processo todo se torne bem mais lento. Estas questões influenciaram os parâmetros da Tabela 8.7.

Com relação aos parâmetros contidos na Tabela 8.8 é necessário dizer que alguns valores tem ligação direta. Por exemplo, se um movimento permite diminuir um dia trabalhado, este mesmo está diminuindo ao mesmo tempo um turno trabalhado. Isto é, ao diminuir um dia o valor da função decresce não apenas do valor c_w, mas também de c_t. E se este dia de trabalho que acabamos de evitar tinha um único encontro, então retiramos da função objetivo $c_t + c_{w1} + c_w$. Se este dia de trabalho evitado garante ao professor um dia de folga antes não garantido, retiramos o valor $c_t + c_w + c_f$ ou $c_t + c_{w1} + c_w + c_f$. Outro exemplo, se evitamos uma janela que excedia o número máximo diário desejável ς, estamos evitando também a janela em si, $c_{jM} + c_j$ ou $c_{jM} + c_{js}$ ou $c_{jM} + c_{js} + c_{jS}$ ou $c_{jM} + c_{jS}$. Uma janela que faz parte do quadro de horários de um professor substituto no período em que não está substituindo e no período em que está contribui com $c_{js} + c_{jS}$ para o valor da função objetivo.

Embora estas ligações, devemos observar que se ao retirarmos encontros de um dia numa interação o deixarmos com um encontro, o valor da função objetivo é acrescido de c_{w1} apenas.

Ademais, além da importância (prioridade) dada a cada característica desejável frente às outras é necessário ter em mente que há uma maior dificuldade em alcançar alguns objetivos relativamente a outros. Evitar um dia é mais difícil que evitar uma aula geminada separada por intervalo. Evitar janelas é bem mais fácil que melhorar espalhamento.

É comum aos grupos as prioridades: garantir dia de folga aos professores, evitar dias com uma aula (quer para evitar falta do professor, quer para compactar o quadro), e evitar exceder o número máximo diário desejável de janelas. Daí a expressão lógica usada em Mudando de Direção na Aproximação de uma solução viável ótima é satisfatória para ambos os grupos.

Aproveitamos para fazer uma defesa do método Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável, com relação a usar durante as iterações normais *movSeqQV* apenas na situação em que $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S}) = 0$, para $\mathscr{S}$ solução corrente. É que os *movSeqQV* são definidos para recuperar o valor de $\sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$ após um movimento que obteve pior valor neste requerimento. Como há muitos movimentos destes que são laterais, mantê-los em todas as iterações, evitaria percorrer regiões do espaço de busca com melhora para δ e piora para os demais requerimentos. Sua presença é justificável na situação em que o mínimo semanal de aulas geminadas tenha sido alcançado ou em Mudando de Direção para Viabilidade, para diversificação.

8.5 Diagnóstico dos horários em uso

Nesta seção apresentamos uma avaliação das soluções em uso relativamente às entradas reais e às artificiais. E também apresentamos o resultado de uma simples execução de AST a partir destas como solução inicial junto às entradas reais, para mostrar que é possível melhorá-las.

Para facilitar a leitura dos valores da Tabela 8.9, denotemos:

- $mD = \sum_{\forall cm} def_{\alpha_{cm}}(\mathscr{S})$,
- $G = \sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S})$,
- $pL = \sum_{\forall cm} defG^2_{cm}(\mathscr{S})$,
- $mG = \sum_{\forall cm} def_{\delta_{cm}}(\mathscr{S})$,
- $pmD = \sum_{p \in P} def_{\alpha_p}(\mathscr{S})$.

Estas soluções foram encontradas com dois softwares comerciais diferentes, ACS para o CAp e o Urânia para o CIEAC. No caso do CAp, as soluções sofreram vários ajustes manuais. Por exemplo, o ACS levou mais ou menos 2 h e meia para encontrar uma solução que atendesse aos critérios determinados pelos operadores em 2007. Nele não busca-se minimizar valores relativos à características desejáveis. E vários ajustes são então necessários.

Retirando da entrada de 2008 neste software, as restrições ainda não tratadas por AST, foi feito um teste e uma solução foi dada (CAp08 teste) depois de 59 minutos, usando um computador do CAp ligado a uma rede. Usando o computador onde foram feitos nossos testes essa operação, no ACS, se realizou em 1 h e 25 minutos. O resultado corresponde, seguindo a ordem na Tabela 8.9, a: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 167, 0, 147, 3, 3, 29, 78, 0, 5, 0 e 2120.

A solução melhorada M* de CAp 2008 obtida da solução em uso foi encontrada em apenas 500 iterações, que duraram 17:13 min.

Observe que a solução em uso no CIEAC Vesp é uma solução inviável devido ao fato $\sum_{\forall cm} defG^1_{cm}(\mathscr{S}) = 4$, número de horários entre encontros de uma mesma aula numa classe

Quant.	CAp 2007	M	CAp 2008	M*	CIEAC Mat	M	CIEAC Vesp
mD	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	4
pL	0	0	0	0	-	-	-
mG	0	0	0	0	0	0	0
pmD	0	0	0	0	0	0	0
nT	189	185	163	161	-	-	-
*nW*1	1	1	1	1	0	0	2
nW	159	156	143	142	33	33	57
nF	0	0	3	2	0	0	0
nE	24	13	1	1	201	137	173
nGI	27	21	26	21	37	19	20
nJ	90	83	69	53	11	11	18
nJs	4	10	3	3	-	-	-
nJS	3	6	7	7	-	-	-
nJM	1	2	0	0	0	0	0
$f_{obj}(\mathscr{S})$	2612.6	2314.4	2013.6	1892.6	1319	1173	5926
% melhor		11.4%		6%		11%	

Tabela 8.9 Diagnóstico dos horários em uso, e após a aplicação de AST uma vez a partir destes, na coluna M ao lado. A solução melhorada de CAp 2008, M*, foi encontrada com apenas 500 iterações. Observe que a solução em uso no CIEAC Vesp é uma solução inviável. O valor da função objetivo foi calculado usando os parâmetros indicados na seção anterior.

Quant.	CIEAC Mat I	CIEAC Mat II	CIEAC Mat 0	CIEAC Vesp 0
mD	0	0	0	0
G	0	0	0	4
mG	0	0	0	0
pmD	0	0	0	0
*nW*1	0	1	0	4
nW	15	20	43	72
nF	0	0	0	0
nE	81	120	201	173
nGI	19	18	37	20
nJ	4	6	11	18
nJM	0	0	0	0
$f_{obj}(\mathscr{S})$	1889	2696	1519	6286

Tabela 8.10 Diagnóstico dos horários em uso relativos a instâncias artificiais. O valor da função objetivo foi calculado usando os parâmetros indicados na seção anterior (CIEAC Mat I e II na página 122).

Quant.	CIEAC Mat Ideal	CIEAC Mat Ideal I	CIEAC Mat Ideal II
mD	0	0	0
G	0	0	0
mG	29	3	26
pmD	0	0	0
$nW1$	12	6	10
nW	222	105	125
nF	1	0	1
nE	201	81	120
nGI	37	19	18
nJ	11	4	6
nJM	0	0	0
$f_{obj}(\mathscr{S})$	63671	8399	55351

Tabela 8.11 Diagnóstico dos horários em uso relativamente a CIEAC Mat Ideal. O valor da função objetivo foi calculado usando os parâmetros indicados na seção anterior para o Grupo A.

num dia. Isto aconteceu duas vezes, com 3 e com 1 horários separando as aulas que deveriam estar vizinhas. Por esta razão não apresentamos nesta tabela a solução melhorada. Voltaremos a falar sobre isso.

Os horários em uso no CIEAC apresentados relativamente aos dados de entrada CIEAC Mat 0 e CIEAC Vesp 0 tem a mesma contagem para praticamente todos os itens em CIEAC Mat e em CIEAC Vesp (respectivamente), exceto pelo fato de que os poucos professores que passaram a não ser integrais terão seus dias de trabalho contados e demais características relativas à compacticidade. Como estes professores que passaram a não ser integrais em CIEAC Mat 0 e CIEAC Vesp 0 eram integrais exatamente por disponibilizarem tempo igual a demanda, não possibilitando janelas, a diferença se dá apenas na contagem de dias e de dias com uma aula.

8.6 Equipamento

Nossos experimentos foram realizados num microcomputador Pentium-IV, CPU 3.00 GHz, 1.00 G de memória RAM, com sistema operacional Microsoft Windows XP (versão 2002).

Alguns experimentos foram realizados com 512 MB de memória RAM. Depois de um problema técnico, foi feita a troca do pente de memória. Assim, sempre que não dissermos nada a respeito da memória RAM usada, deve ser considerada a de 1 G.

Na Tabela 8.9 apresentamos três soluções melhoradas a partir das soluções em uso. Tiveram tempo de execução igual a 33:33, 17:13 e 3:21 minutos e segundos, respectivamente. Sendo que apenas a segunda (com suas 500 iterações) foi executada com 512 MB de memória RAM. As demais, 1000 e 10000 iterações (conforme parâmetros) usando 1.00 G de memória RAM.

Instância	nº enc/dem	melhor limite	tempo
CAp 2007	572/572	572	0:01:57
CAp 2008	560/560	560	0:03:03
CIEAC Mat	842/975	975	2:00:39
CIEAC Vesp	820/950	949	2:00:50
CIEAC Mat I	450/450	450	0:06:41
CIEAC Mat II	525/525	525	0:14:30
CIEAC Mat 0	846/975	975	2:01:27
CIEAC Vesp 0	816/950	950	2:01:23
CIEAC Mat Ideal	975/975	975	0:51:15
CIEAC Mat Ideal I	450/450	450	0:02:46
CIEAC Mat Ideal II	525/525	525	0:04:16

Tabela 8.12 Solução inicial com IP. O tempo é apresentado com h : min : seg.

8.7 Solução viável inicial: por IP ou por heurística

O Capítulo 4 trás nosso modelo com IP para encontrar uma solução inicial. Usamos Xpress-MP como solver, chamando de dentro do projeto em Java as bibliotecas necessárias. O solver devolve a primeira solução ótima ou a melhor solução encontrada até o momento caso queiramos limitar o tempo de execução. A solução ótima devolvida é a mesma sempre, a não ser que seja usado algum artifício externo. Por esta razão nos interessa se o modelo com IP foi capaz de encontrar uma solução viável para as instâncias e em quanto tempo.

Veja na Tabela 8.12 o desempenho do modelo com IP.

O modelo com heurística, descrito no capítulo anterior, possui certo grau de aleatoriedade. Por exemplo, na ordem em que são avaliadas as aulas ou horários com mesmo nível de prioridade corrente. Ou avaliando os horários de forma randômica para liberação e alocação de outro encontro ou para aplicar alguma estratégia de diversificação. Assim, cada vez que aplicamos este modelo heurístico para encontrar uma solução viável obtemos uma solução diferente.

Na Tabela 8.13 pode-se observar informações sobre os testes quanto a etapa do procedimento heurístico: Construção de uma solução quase viável.

Já na Tabela 8.14 temos informações sobre os testes na Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável.

Para algumas instâncias o modelo com IP não foi capaz de encontrar uma solução ótima dentro do período de tempo estipulado. Em geral, nestas situações foi usado tempo limite de 2 horas. Observe que isso aconteceu para as maiores instâncias com as menores medidas de esparsividade CIEAC Mat, CIEAC Vesp, CIEAC Mat 0 e CIEAC Vesp 0. A instância CIEAC Mat Ideal, apesar de tamanho igual ao de CIEAC Mat, tem medida de esparsividade bem maior que estas, o que garante um maior espaço de busca.

O modelo com heurística também não encontrou uma solução viável para CIEAC Mat dentro do número de iterações estipulado, 50000, embora tenha encontrado uma solução quase viável completa. Ao final destas iterações o melhor resultado encontrado contava pelo menos e

Instância	nº testes	μ de ciclos	% com backt.	μ de mseg
CAp 2007	25	1	92%	569
CAp 2008	25	1	100%	678
CIEAC Mat I	20	23,95	10%	463
CIEAC Mat II	20	114,45	4%	732
CIEAC Mat 0	20	50,25	11,84%	1785
CIEAC Vesp 0	20	77,5	7%	1852
CIEAC Mat Ideal	20	1	75%	1673
CIEAC Mat Ideal I	20	1	5%	526
CIEAC Mat Ideal II	20	1	40%	550

Tabela 8.13 Solução quase viável com heurística. O símbolo μ expressa número médio. A terceira coluna de valores informa a porcentagem de ciclos com backtracking. Os testes para CAp 2008 foram executados com 512 MB de memória RAM.

Instância	nº testes	μ de iterações	μ de tempo (min : seg)
CAp 2007	25	2670,28	03:29
CAp 2008	25	3496,44	03:24
CIEAC Mat I	20	2258,4	00:33
CIEAC Mat II	20	9748,4	02:35
CIEAC Mat 0	20	22579,9	06:17
CIEAC Vesp 0	20	20690	05:43
CIEAC Mat Ideal	20	676,4	01:04
CIEAC Mat Ideal I	20	79,25	00:04
CIEAC Mat Ideal II	20	463,25	00:11

Tabela 8.14 Solução viável com heurística. Etapa: Construção de uma solução viável a partir de uma quase viável. O símbolo μ expressa número médio. Os testes para CAp 2008 foram executados com 512 MB de memória RAM.

em geral uma unidade de defeito quanto a algum critério para viabilidade. Contudo ao separar em pavilhões os dados da instância tanto o modelo com IP como o com heurística encontraram solução viável, mesmo acrescentando o requerimento de um número mínimo de aulas geminadas para algumas poucas disciplinas de turmas. Estas são as instâncias CIEAC Mat I e CIEAC Mat II. Ou seja, há uma relação entre a dificuldade em encontrar uma solução viável para o tão pouco esparso CIEAC Mat e a disponibilidade de tempo dos professores que ministram nos dois pavilhões frente a suas aulas. Disponibilidade esta não mudada nas instâncias CIEAC Mat I e CIEAC Mat II, mas que ganha maior folga considerando as aulas para apenas um pavilhão por vez.

Daí houve nosso interesse em verificar o que ocorria mantendo os dados dos dois pavilhões juntos no turno (de CIEAC Mat) e aumentando a disponibilidade de tempo dos 6 professores que ministram nos dois pavilhões. Criamos CIEAC Mat 0. E nossa suspeita se confirmou, agora era possível encontrar uma solução viável usando o modelo com heurística com no máximo o número de iterações estipulado. Muito embora o modelo com IP não consiga fazê-lo dentro das 2 h.

O CIEAC Vesp tem solução em uso não viável ($def(\mathscr{S}) = 4$) e o modelo com IP apresentou como melhor limite um número menor que a demanda total (vide Tabela 8.12), indicando que os dados de entrada desta instância não comportam uma solução viável completa. Aplicando nossa heurística em CIEAC Vesp encontramos uma solução quase viável completa com $def(\mathscr{S}) = 1$. Esta foi a razão que nos levou a criar a instância CIEAC Vesp 0 que tem maior disponibilidade de tempo para os 9 professores envolvidos nos dois turnos e para mais uma professora, considerada chave por conter em seu quadro de horários uma unidade de defeito quanto a uma restrição para viabilidade da solução em uso, ocorrendo este com aula da turma envolvida no único defeito da solução heurística citada. Novamente nosso modelo heurístico se mostrou capaz de encontrar uma solução viável dentro do número máximo de iterações estipulado, e IP não dentro das 2 horas.

As mudanças ocorridas nas disponibilidades de tempo que geraram CIEAC Mat 0 e CIEAC Vesp 0 não foram tão grandes relativamente ao tamanho das instâncias originais, vide as medidas de esparsividade que continuam muito pequenas. O que justifica um índice de aproximadamente 30% de tentativas sem sucesso para CIEAC Mat 0 e de 20% para CIEAC Vesp 0 em encontrar uma solução viável dentro de 50000 iterações, cuja duração é suficientemente pequena para permitir vários testes. Algo semelhante acontece com CIEAC Mat I e CIEAC Mat II que têm medida de esparsividade ainda menor que CIEAC Mat 0.

É importante lembrar que a instância real CAp 2008 possui aulas que requerem na entrada dos dados uma sala especial entre duas possíveis, são 12 aulas de um encontro cada, envolvendo 3 professores. Alternativamente ao modelo com IP, no modelo heurístico aplicamos uma escolha aleatória de uma das salas possíveis para cada aula antes de buscar uma solução viável. Mesmo que seja escolhida apenas uma sala para todos os encontros há horários suficientes, as salas disponibilizam todos os horários, e o que isto pode acarretar é uma maior dificuldade para a instância.

O procedimento heurístico em comparação com o modelo IP apresentou muito melhor tempo de execução (médio) para quase todas as instâncias, exceto CAp 2007 e 2008. Contudo, trata-se de uma quantidade pequena de tempo e mesmo próxima no caso de CAp 2008.

Instância	nº test.	μ de $f_{obj}(\mathscr{S})$	μ de % de melhora	μ min : seg
CAp 2007	25	2823,39	51,80%	31:18
CAp 2008	25	2327,46	54,56%	37:02
CIEAC Mat I	20	1549,5	35,29%	00:50
CIEAC Mat II	20	1984,5	26,66%	00:56
CIEAC Mat 0	20	1659,95	36,15%	04:10
CIEAC Vesp 0	20	2605,05	38,54%	04:13
CIEAC Mat Ideal	10	1900,1	-	42:07
CIEAC Mat Ideal I	10	961,4	75,26%	16:53
CIEAC Mat Ideal II	10	984,5	78,67%	27:34

Tabela 8.15 Aproximação de uma solução ótima. O símbolo μ expressa número médio. A terceira coluna de valores trás média das porcentagens de melhora dos tetes, em relação a solução viável inicial encontrada pela primeira fase da heurística. Os testes para CAp 2008 foram executados com 512 MB de memória RAM.

8.8 Aproximação de uma solução ótima

Optamos por não executar testes heurísticos completos com a instância artificial CIEAC Mat Ideal diretamente. Pois na realidade deseja-se que um professor não tenha que ir de um pavilhão ao outro inúmeras vezes, e ganhamos com relação ao tempo de processamento. Então foram feitos 10 testes para cada pavilhão, CIEAC Mat Ideal I e CIEAC Mat Ideal II, e uma vez escolhidos os 5 melhores de cada um, novos testes foram feitos para o pavilhão oposto com a disponibilidade de tempo dos professores que ministram nos dois sem os horários já alocados para este pavilhão. Sendo que entre outras características desejáveis buscaram compactar os horários. Daí avaliamos com relação a CIEAC Mat Ideal as 10 soluções encontradas resolvendo os dois pavilhões em seqüência (alternada), e considerando o tempo do processo igual a soma do tempo levado com cada pavilhão. Note que os dez experimentos feitos na segunda etapa têm menor medida de esparsividade.

Nas Tabela 8.15 e Tabela 8.16 há informações sobre a fase de Aproximação de uma solução ótima.

Fizemos questão de colocar as quantidades verificadas na solução viável inicial e na solução final da melhor solução entre todos os testes, além do valor objetivo que devido aos parâmetros mascara grandes mudanças.

Observando estas tabelas, notamos que quanto maior a medida de esparsividade maior o índice médio de melhora em relação a solução inicial viável.

O tempo de execução é bem menor do que o consumido pelos softwares em uso por estas instituições. Em torno de um terço para o CIEAC, o horário de um pavilhão completo pode levar cerca de 2 h.

Um fato decorrente de ter um modelo com tempo de execução relativamente rápida é a possibilidade de gerar vários horários para posterior escolha.

De cada conjunto de 25 testes do Cap, 2007 e 2008, foram pré-selecionados os doze melhores e encaminhados ao CAp para que fossem escolhidos os cinco melhores e fosse feita

Instância	μ itr^*	$f_{obj}(\mathscr{S}^*)$	nT	$nW1$	nW	nF	nE	nGI	nJ	nJs	nJS	nJM
CAp 2007	847,44	2498.8	225	20	187	15	70	46	134	4	8	31
			201	5	164	0	10	28	83	3	5	3
CAp 2008	871,44	1950,2	203	20	175	19	59	55	128	6	7	43
			161	3	142	1	2	22	60	6	9	2
CIEAC:												
Mat I	601,4	1318	-	0	15	0	99	14	7	-	-	1
			-	0	15	0	58	8	3	-	-	0
Mat II	657,85	1769	-	0	19	0	108	26	3	-	-	0
			-	0	19	0	77	13	4	-	-	0
Mat 0	7471,65	1534	-	6	53	1	242	33	22	-	-	5
			-	0	49	0	141	22	11	-	-	1
Vesp 0	8642,4	2337	-	9	85	8	228	35	41	-	-	11
			-	3	76	0	136	25	20	-	-	1
Mat Ideal	-	1820										
			-	1	259	0	22	1	65	-	-	0
M. Ideal I	899,7	893	-	25	141	14	92	18	49	-	-	9
			-	0	117	0	14	0	28	-	-	0
M. Ideal II	884,6	891	-	42	187	22	104	18	73	-	-	16
			-	2	150	0	4	0	41	-	-	0

Tabela 8.16 Aproximação de uma solução ótima (continuação). Onde itr^* é o número da melhor iteração de um teste, e $\mathscr{S}^*$ é a solução com melhor valor objetivo entre todos os testes. As quantidades nas últimas colunas são da solução viável inicial e na linha abaixo da melhor solução encontrada a partir desta. Valores estes relativos à $\mathscr{S}^*$.

Inst./Sol.	nº itr	*nT*	*nW*1	*nW*	*nF*	*nE*	*nGI*	*nJ*	*nJs*	*nJS*	*nJM*
S_0:		161	3	142	1	2	22	60	6	9	2
S_1:		162	2	143	1	2	22	59	6	9	2
Param.	200	5	20	5	40	20	10	1	0.6	0.4	24
S_2:		162	1	143	1	5	22	64	4	8	3
Param.	50	5	190	5	40	20	10	1	0.6	0.4	24
S_3:		163	0	143	1	7	22	66	4	8	5
Param.	50	5	140	5	140	30	10	1	0.6	0.4	29
S_4:		163	0	144	1	6	22	60	4	8	3
Param.	100	5	140	5	140	20	10	1	0.6	0.4	69

Tabela 8.17 Ajustes automáticos de uma solução. Ao final de um ajuste, certo nº de iterações aplicadas, a solução encontrada é usada para o novo ajuste. Os parâmetros usados no ajuste estão na linha abaixo da solução encontrada com eles, o primeiro é o número de iterações, os demais relacionam-se às quantidades citadas na 1º linha.

uma apreciação dos resultados. Os horários escolhidos foram declarados satisfatórios (vide Apêndice D), alguns muito bons. Contudo não tratamos uma das exigências do CAp, garantir que para cada disciplina de cada turma com aulas geminadas tenha pelo menos um dia sem que estas aulas sejam separadas por intervalo. O que faz com que nossos horários não possam ser aplicados ainda. Nós apenas buscamos minimizar o número geral destes acontecimentos.

Algo interessante nesta avaliação é que a ordem dos cinco melhores horários não segue exatamente o valor objetivo, mas uma ordem de prioridades quanto às características desejáveis e mesmo assim não de forma rígida. O que nos lembra que assim como muitos critérios novos foram acrescidos para 2008 e muitas questões relacionadas aos horários não são tão objetivas ou facilmente modeláveis, dificilmente um modelo devolva um horário perfeito em todos os aspectos, acontecendo depois ajustes. Aproveitamos então para fazer uma experiência: usar AST para fazer os ajustes de forma "automática".

8.9 Ajustes automáticos

AST pode receber uma solução inicial, completa ou parcial, junto aos dados de entrada de uma instância. Assim podemos, além de processar vários diferentes horários, processar um horário já encontrado, considerado bom sob algum aspecto, com novos parâmetros, tantas vezes quanto desejarmos modificá-lo.

Propomos então ao CAp fazer *ajustes automáticos* com a melhor solução encontrada para a instância de 2008.

O resultado foi um horário melhor, que mantinha conquistas anteriores e alcançava novas. Veja na Tabela 8.17.

Outros parâmetros usados: $tamLT = 500$, $maxRep = 100$ e $numMov = 20$.

O principal objetivo aqui foi diminuir ou zerar o número de dias que um professor dá uma única aula, *nW*1, sem piorar o número de professores sem dia de folga *nF* (que já é apenas um).

Objetivo alcançado. No Apêndice D o representante do CAp comenta sobre isso.

A vantagem de ajustes automáticos é certamente evitar o imenso trabalho de fazê-los sem os movimentos como definimos sobre o Grafo Híbrido. Mudanças manuais, em geral, acarretam numa sucessão de trocas para corrigir conflitos provocados e mesmo a desalocação temporária de encontros.

CAPÍTULO 9

Conclusões

A automação de horários escolares é um problema NP-completo mesmo na sua versão mais básica STP. Cuja base comunga com outros diversos problemas de automação de horários.

Nosso trabalho se propôs a desenvolver um modelo para tal problema. E nessa tarefa descobrimos algo que trouxe grandes vantagens: o Grafo Híbrido.

Cuja estrutura e movimentos definidos sobre ele permitem realizar trocas de horários alocados sem a necessidade de posterior correção quanto a indisponibilidades, conflitos para qualquer elemento envolvido, alocações estáticas e aulas simultâneas.

Com esta ferramenta podemos "enxergar" mais longe no espaço de soluções. A simples troca dos encontros de dois horários de um elemento que certamente seria descartada por causar algum conflito, pode agora ser aceita junto a outras trocas. Trocas que, realizadas entre encontros destes horários, garantem que nenhum conflito vai existir em decorrência destas mudanças. Como um efeito dominó previsto e controlado.

O grande número de requerimentos e características desejáveis tornam a elaboração de um horário manualmente penosa e custosa.

Este enorme leque de objetivos, muitos divergentes ou concorrentes, indicam o uso de procedimentos heurísticos.

Usamos Programação Inteira, heurística construtiva e meta-heurísticas essencialmente Busca Tabu. Escolhemos trabalhar com estas últimas junto ao Grafo Híbrido pois nos parece que poderiam tirar maior vantagem dele e dos movimentos sobre ele definidos.

Contudo outras possibilidades se vislumbram: como associar de alguma forma Busca Tabu e a relação de dominância, vide conceito ótimo de Pareto.

Assim como percebemos a dificuldade em movimentar encontros envolvidos em aulas geminadas e desenvolvemos o movimento seqüencial, procedimentos podem ser desenvolvidos para movimentar dias de forma mais mais eficaz, ou que permitam tratar instâncias com várias sedes e suas restrições.

Outra questão que merecerá nossa atenção e trabalho é quanto a particularização de definições, requerimentos e características. Por exemplo: professores com carga horária menor que outros podem exigir dois dias de folga ao invés de um; os professores e salas podem ser associados aos encontros e não às disciplinas das turmas, diferindo encontros teóricos de práticos; e definir critérios desejáveis particularmente para os elementos em questão e não para todos do mesmo tipo, como poder definir espalhamento ruim para cada disciplina de forma diferente. Isto é, permitir maior flexibilidade e adequação.

Como um modelo inicial AST trata um grande número de exigências para instituições numa sede. Com uma velocidade suficientemente pequena para permitir vários testes resultando em várias possibilidades de escolha.

Como sabemos, sempre haverá objetivos cuja motivação nenhum modelo previu, e ajustes se fazem necessários. Daí acreditarmos que outra vantagem do AST é a de permitir que um horário já existente seja ponto de partida para alterações direcionadas por parâmetros.

Acreditamos ter desenvolvido um modelo para automação de horários promisor. Se ainda lhe faltam algumas competências, lhe sobram perspectivas.

Uma estrutura como a do Grafo Híbrido pode ser aplicada a vários problemas de automação de horários e outros problemas onde há restrições de conflito.

APÊNDICE A

Dados das instâncias: arquivo texto

Os dados das instâncias foram lidos por AST de arquivos texto num formato pré-definido, usando um software chamado “javacc”.

Este software permiti-nos determinar um formato esperado, com símbolos e palavras chave. E caso o texto lido não se encaixe nesta expectativa, mensagens de erro indicam o local de divergência no texto e sua razão. Assim, como o número de dados é imenso, evitamos falhas de entrada mais facilmente. Além disso, nos permite trabalhar com estruturas de dados como árvore de maneira relativamente simples.

O formato que fizemos é bastante amplo. Poderia, por exemplo, receber informações de várias sedes e relativas aos deslocamentos entre estas e as disponibilidades dos professores para tanto.

Aqui vamos falar apenas o essencial para o problema que tratamos e para a leitura dos dados das instâncias.

As palavras ou expressões chave não são envoltas em colchetes, como são as palavras dados. Primeiro temos o nome da instituição, e a estrutura que indica os períodos letivos do quadro de horários da instituição. Em seguida, as informações da sede: as turmas, as salas e, para estas, suas disponibilidades de tempo (com as expressões chave “+ turma” ou “+ sala” e “+ intervalo”). Uma estrutura é dada para cada professor. Na primeira linha contém o nome, mínimo e máximo número de aulas semanais, possivelmente o número máximo diário (sua falta indica que é o máximo permitido por lei: 8), e o símbolo @ somente se o professor não pode ou não precisa ter seu horário arrumado, compacto. Dentro temos sua disponibilidade de tempo. Se o professor não é professor possível para qualquer aula sem professor determinado, então seus mínimo e máximo semanal não serão usados e podem assumir qualquer valor no texto, mas como devem estar presentes em nosso formato usamos zeros. Depois temos uma estrutura para as aulas.

As aulas são expressas com: o nome da matéria, a demanda (número de encontros), o máximo número de encontros diários, possivelmente o mínimo número de encontros geminados semanais (não aparecendo é considerado 0); o nome do professor possivelmente seguido do símbolo $ e do nome de seu substituto, ou um conjunto de professores possíveis (para que AST escolha o professor da disciplina); o nome da turma (especial ou não); um conjunto vazio ou a sala ou o conjunto de salas possíveis (para que AST escolha a sala que será usada pelos encontros) e o símbolo “ , ” ou “ / ” para identificar no segundo caso que esta aula pertence ao mesmo grupo de aulas simultâneas que a seguinte.

O nome da turma na aula aparece da seguinte forma:

- se uma classe padrão, o nome da turma seguido de zero;

- se uma subturma, o nome da turma seguido de um inteiro positivo que identifica esta subturma;

- se uma união de turmas, uma seqüencia com a representação das classes padrão e subturmas que a compõem.

Podem aparecer alocações estáticas ou iniciais dentro das estruturas "alocacoes{...}" ou "solucaoInicial{...}", respectivamente. Estas alocações têm o nome da disciplina, o nome do professor, o nome da turma (especial ou não), o nome da sala ou um conjunto vazio, e um conjunto de horários para as alocações.

Abaixo damos um exemplo deste formato que falamos.

Observe que os horários da instituição não precisam ser iguais entre os dias, nem entre as turmas ou salas.

O professor "[Prof1]" não precisa de horário compacto (@), e o professor "[Prof2]" tem máximo número de encontros diários igual a 8 já que não foi expresso.

```
colegio [Nome]

periodosLetivos {
    dias {Seg Ter Qua Sex}{
        07:20 08:10
        08:10 09:00
        09:00 09:50
        10:10 11:00
        11:00 11:50
    }
    dias {Qui}{
        07:20 08:00
        08:00 08:40
        08:40 09:20
        09:40 10:20
        10:20 11:00
    }
}

address [NomeSede] {

    turmas {[Tur1] [Tur2] ...}

    salas {[Sala1] [Sala2] ...}

    + turma {[Tur1] [Tur2] ...}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:50
```

```
            Ter 07:20 11:50
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 11:50
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
    + sala {[Sala1] [Sala2] ...}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:50
            Ter 07:20 11:50
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
    + sala {[Sala1]}{
        + intervalo {
            Qua 07:20 11:50
        }{}
    }
}

professor [Prof1] 0 0 4 @ {
    + address {[NomeSede]}{
        + intervalo {
            Seg 08:10 11:50
            Ter 07:20 11:50
            Qua 07:20 10:10
            Qui 07:20 11:50
            Sex 07:20 11:00
        }{}
    }
}

professor [Prof2] 14 16 {
    + address {[NomeSede]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 11:50
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 11:50
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
}
```

```
aulas {
    [Mat1] 3 1  {[Prof1]} {[Tur1] 0} {[Sala1] [Sala2]},
    [Mat2] 4 2 1 {[Prof1]} $ [Prof2] {[Tur2] 0} {} ,
    [Mat3] 4 2 1 {[Prof2]} {[Tur1] 1 [Tur2] 0} {} /
    [Mat3] 4 2 2 {[Prof2] [Prof1]} {[Tur1] 2} {[Sala2]} ,
}

alocacoes{
    [Mat2] [Prof1] {[Tur2] 0} {} {Ter 08:10 09:00 Qui 08:40 09:20}
}

solucaoInicial{
    [Mat1] [Prof1] {[Tur1] 0} {[Sala1]} {Qua 09:00 09:50}
    [Mat3] [Prof1] {[Tur1] 2} {} {Seg 07:20 08:10 Seg 08:10 09:00}
}
```

A primeira aula tem número mínimo de aulas geminadas semanais igual a zero (não expresso) e duas salas possíveis são indicadas. A segunda aula tem professor substituto "[Prof2]" e não requer sala especial. As terceira e quarta aulas são dadas para turmas especiais, uma união de turmas "[Tur1] 1 [Tur2] 0" (composta por uma subturma e uma classe padrão) e uma subturma "[Tur1] 2", respectivamente. Os encontros da quarta aula devem acontecer na sala "[Sala2]".

Note que como o professor "[Prof1]" é um dos professores possíveis indicados para a quarta aula seus mínimo e máximo número de encontros semanais serão usados pelo modelo AST e daí não deveriam ser iguais a zero como no exemplo. Neste exemplo, isto causa uma impossibilidade, pois a barra " / " indica que a terceira e quarta aula devem ter seus encontros ao mesmo tempo, pertencem ao mesmo grupo de aulas simultâneas. E portanto como "[Prof2]" ensina a terceira aula, AST só poderia escolher o professor "[Prof1]" para a quarta aula.

Aulas de um mesmo grupo de aulas simultâneas devem ter mesma demanda, e caso alguma tenha mínimo número semanal de aulas geminadas diferente de zero, então o máximo número diário de aulas deve ser 2 pra todas elas.

Um grupo de n aulas simultâneas terá a representação de suas aulas uma após a outra. As $n-1$ primeiras com " / " ao final, e a última com " , ".

As alocações estáticas ou iniciais sempre trazem a informação do professor (determinado ou escolhido), não do substituto (se existe) ou de candidatos. Veja as alocações estáticas indicadas para a matéria "[Mat2]" da turma "[Tur2] 0" (informação suficiente para identificar uma aula). E alocações da solução inicial para a matéria "[Mat3]" da subturma "[Tur1] 2".

Em "[Mat3]" de "[Tur1] 2" temos "{}" antes dos horários letivos. A sala requerida "[Sala2]" não aparece, mas como é determinada não há problema algum. Se, porém, na alocação da solução inicial para a matéria "[Mat1]" da turma "[Tur1] 0" tivéssemos "{}" significaria que a sala não foi escolhida quando da alocação, sendo ainda tarefa de AST. No exemplo foi usada "[Sala1]" indicando a sala escolhida.

A partir deste momento acreditamos que o leitor está apto a ler e entender os dados das instâncias que disponibilizamos aqui. E, se desejar, a usá-los em testes de seus modelos.

APÊNDICE B

CAp 2007

```
colegio [Cap]

periodosLetivos {
    dias { Seg Ter Qua Qui }{
        07:20 08:10
        08:10 09:00
        09:00 09:50
        10:10 11:00
        11:00 11:50
        11:50 12:40
        13:30 14:20
        14:20 15:10
        15:10 16:00
    }
    dias { Sex }{
        07:20 08:10
        08:10 09:00
        09:00 09:50
        10:10 11:00
        11:00 11:50
        11:50 12:40
    }
}

address [Cap] {

    turmas { [5A] [5B] [6A] [6B] [7A] [7B] [8A] [8B]
             [1A] [1B] [2A] [2B] [3A] [3B] }

    salas {[Sala_de_Musica] [Quadra] [Sala_de_Art]}

    + turma { [5A] [5B] [6A] [6B]  }{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:50
            Seg 13:30 16:00
```

```
        Ter 07:20 12:40
        Qua 07:20 11:50
        Qua 13:30 16:00
        Qui 07:20 12:40
        Sex 07:20 11:50
    }{}
}

+ turma { [7A] [7B] }{
    + intervalo {
        Seg 07:20 11:50
        Seg 13:30 16:00
        Ter 07:20 11:50
        Qua 07:20 11:50
        Qua 13:30 16:00
        Qui 07:20 12:40
        Sex 07:20 11:50
    }{}
}

+ turma {[8A] [8B] [1A] [1B] [2A] [2B]}{
    + intervalo {
        Seg 07:20 12:40
        Ter 07:20 11:50
        Ter 13:30 16:00
        Qua 07:20 12:40
        Qui 07:20 11:50
        Qui 13:30 16:00
        Sex 07:20 11:50
    }{}
}

+ turma {[3A] [3B]}{
    + intervalo {
        Seg 07:20 12:40
        Ter 07:20 12:40
        Qua 07:20 12:40
        Qui 07:20 12:40
        Sex 07:20 12:40
    }{}
}

+ sala {[Sala_de_Musica] [Sala_de_Art] [Quadra]}{
```

```
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Lavinia_Mario] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 08:10 15:10
            Ter 08:10 15:10
            Qua 08:10 12:40
            Qui 08:10 15:10
            Sex 08:10 12:40
        }{}
    }
}

professor [Aecio] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Erica] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
```

```
    }
}

professor [Edna] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Francisco] 0 0 7 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Soenia] 0 0 6{
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edson] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
```

```
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
        }{}
    }
}

professor [Idalina] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
        }{}
    }
}

professor [Natalia] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:50
            Seg 13:30 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Tarcísio] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ana_Maria] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
```

```
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 09:50 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Katia_Aquino] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Alfredo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 09:00
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Sandra] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}
```

```
professor [Marcos] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Rita] 0 0 7 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 13:30 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 09:00 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Gilberto] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marta] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
```

```
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ricardo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Jose_Carlos] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Lucia_Durao] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marcelo_Camara] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
```

```
            Seg 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Paulo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Rogerio] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 08:10
        }{}
    }
}

professor [Mario_Ricardo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 13:30 16:00
            Ter 13:30 16:00
            Qua 13:30 16:00
            Qui 13:30 16:00
        }{}
    }
}

professor [Suzano] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
```

```
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Gustavo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Cirineia] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edvaldo] 0 0 7 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
}
```

```
professor [Ledjane] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
}

professor [Jane] 0 0 4 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Joalde] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Karina] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
```

```
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marcelo_Barreto] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 09:50
            Seg 11:00 16:00
            Ter 07:20 09:50
            Ter 11:00 16:00
            Qua 07:20 09:50
            Qua 11:00 16:00
            Qui 07:20 09:50
            Qui 11:00 16:00
            Sex 07:20 09:50
            Sex 11:00 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marcelo_Tavares] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Sex 07:20 09:50
            Sex 11:00 12:40
        }{}
    }
}

professor [Roseane] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}
```

```
professor [Lorena] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Adriana] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Cristina] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Jonatan] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
```

```
        }{}
    }
}

professor [Katia_Barreto] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Peron] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 16:00
        }{}
    }
}

professor [Garantia] 0 0 6 @{
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Fatima_Barros] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
```

```
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Carla] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ana_Francinete] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Fernanda] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}
```

```
professor [Marlon] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edson_Falcao] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Vitorino] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

aulas {
    [Port]       5 2 2 {[Cristina]} {[5A] 0} {} ,
    [Mat]        5 2 2 {[Marcelo_Camara]} {[5A] 0} {} ,
    [Hist]       3 2 1 {[Natalia]} {[5A] 0} {} ,
    [Geo]        3 2 1 {[Soenia]} {[5A] 0} {} ,
    [Cien]       3 2 1 {[Rita]} $ [Sandra] {[5A] 0} {} ,
```

```
[PD]          3 2 1 {[Gustavo]} {[5A] 0} {} ,
[EdFis]       3 2 1 {[Roseane]} {[5A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]          1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[5A] 0} {} ,

[Mus]         4 2 2 {[Cirineia]} {[5A] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]         4 2 2 {[Joalde]} {[5A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Fran]        3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[5A] 1} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Vitorino]} {[5A] 2} {} /
[Fran]        3 2 1 {[Marlon]} {[5B] 1} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Ana_Francinete]} {[5B] 2} {} ,

[Port]        5 2 2 {[Cristina]} {[5B] 0} {} ,
[Mat]         5 2 2 {[Marcelo_Camara]} {[5B] 0} {} ,
[Hist]        3 2 1 {[Natalia]} {[5B] 0} {} ,
[Geo]         3 2 1 {[Soenia]} {[5B] 0} {} ,
[Cien]        3 2 1 {[Rita]} {[5B] 0} {} ,
[PD]          3 2 1 {[Gustavo]} {[5B] 0} {} ,
[EdFis]       3 2 1 {[Roseane]} {[5B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]          1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[5B] 0} {} ,

[Mus]         4 2 2 {[Cirineia]} {[5B] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]         4 2 2 {[Joalde]} {[5B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]        5 2 2 {[Katia_Barreto]} {[6A] 0} {} ,
[Mat]         5 2 2 {[Jose_Carlos]} {[6A] 0} {} ,
[Hist]        3 2 1 {[Natalia]} {[6A] 0} {} ,
[Geo]         3 2 1 {[Soenia]} {[6A] 0} {} ,
[Cien]        3 2 1 {[Sandra]} {[6A] 0} {} ,
[PD]          3 2 1 {[Aecio]} {[6A] 0} {} ,
[EdFis]       3 2 1 {[Roseane]} {[6A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]          1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[6A] 0} {} ,

[Mus]         4 2 2 {[Cirineia]} {[6A] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]         4 2 2 {[Karina]} {[6A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Fran]        3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[6A] 1} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Carla]} {[6A] 2} {} /
[Fran]        3 2 1 {[Marlon]} {[6B] 1} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Ana_Francinete]} {[6B] 2} {} ,

[Port]        5 2 2 {[Katia_Barreto]} {[6B] 0} {} ,
[Mat]         5 2 2 {[Jose_Carlos]} {[6B] 0} {} ,
```

```
[Hist]       3 2 1 {[Natalia]} {[6B] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[6B] 0} {} ,
[Cien]       3 2 1 {[Sandra]} {[6B] 0} {} ,
[PD]         3 2 1 {[Aecio]} {[6B] 0} {} ,
[EdFis]      3 2 1 {[Roseane]} {[6B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[6B] 0} {} ,

[Mus]        4 2 2 {[Ledjane]} {[6B] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        4 2 2 {[Karina]} {[6B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]       5 2 2 {[Adriana]} {[7A] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Jose_Carlos]} {[7A] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Idalina]} {[7A] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[7A] 0} {} ,
[Cien]       3 2 1 {[Marcos]} {[7A] 0} {} ,
[PD]         3 2 1 {[Mario_Ricardo]} {[7A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Lorena]} {[7A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[7A] 0} {} ,

[Mus]        4 2 2 {[Edvaldo]} {[7A] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        4 2 2 {[Karina]} {[7A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]       5 2 2 {[Adriana]} {[7B] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Rogerio]} {[7B] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Idalina]} {[7B] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[7B] 0} {} ,
[Cien]       3 2 1 {[Marcos]} {[7B] 0} {} ,
[PD]         3 2 1 {[Mario_Ricardo]} {[7B] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Lorena]} {[7B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[7B] 0} {} ,

[Mus]        4 2 2 {[Edvaldo]} {[7B] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        4 2 2 {[Karina]} {[7B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Fran]       3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[7A] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Vitorino]} {[7A] 2} {} /
[Fran]       3 2 1 {[Marlon]} {[7B] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Carla]} {[7B] 2} {}/
[Ingl]       3 2 1 {[Ana_Francinete]} {[7B] 3} {} ,

[Port]       5 2 2 {[Jonatan]} {[8A] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Lucia_Durao]} {[8A] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Edson]} {[8A] 0} {} ,
```

```
[Geo]        3 2 1 {[Francisco]} {[8A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Lorena]} {[8A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[8A] 0} {} ,

[Fis]        4 2 2 {[Gilberto]} {[8A] 1} {} /
[Qui]        4 2 2 {[Ana_Maria]} {[8A] 2} {} ,

[Mus]        4 2 2 {[Ledjane]} {[8A] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        4 2 2 {[Jane]} {[8A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[PD]         3 2 1 {[Aecio]} {[8A] 1} {} /
[PD]         3 2 1 {[Natalia]} {[8A] 2} {} /
[PD]         3 2 1 {[Gustavo]} {[8B] 1} {} /
[PD]         3 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[8B] 2} {}/
[PD]         3 2 1 {[Sandra]} {[8B] 3} {} ,

[Fran]       3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[8A] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Vitorino]} {[8A] 2} {} /
[Fran]       3 2 1 {[Marlon]} {[8B] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[8B] 2} {}/
[Ingl]       3 2 1 {[Ana_Francinete]} {[8B] 3} {} ,

[Port]       5 2 2 {[Katia_Barreto]} {[8B] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Lucia_Durao]} {[8B] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Idalina]} {[8B] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Francisco]} {[8B] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[8B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[8B] 0} {} ,

[Fis]        4 2 2 {[Gilberto]} {[8B] 1} {} /
[Qui]        4 2 2 {[Ana_Maria]} {[8B] 2} {} ,

[Mus]        4 2 2 {[Ledjane]} {[8B] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        4 2 2 {[Jane]} {[8B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]       4 2 2 {[Peron]} $ [Garantia] {[1A] 0} {} ,
[Mat]        3 2 1 {[Paulo]} {[1A] 0} {}
[Hist]       3 2 1 {[Edson]} {[1A] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[1A] 0} {} ,
[Fis]        3 2 1 {[Ricardo]} {[1A] 0} {} ,
[Qui]        3 2 1 {[Ana_Maria]} {[1A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[1A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[1A] 0} {} ,
```

```
[Fil]        2 2 1 {[Suzano]} {[1A] 0} {} ,
[Bio]        3 2 1 {[Rita]} {[1A] 0} {} ,

[PD]         3 2 1 {[Mario_Ricardo]} {[1A] 1} {} /
[PD]         3 2 1 {[Jane]} {[1A] 2} {} /
[PD]         3 2 1 {[Edvaldo]} {[1B] 1} {} /
[PD]         3 2 1 {[Cirineia]} {[1B] 2} {},

[Fran]       3 2 1 {[Fernanda]} {[1A] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Vitorino]} {[1A] 2} {} /
[Fran]       3 2 1 {[Marlon]} {[1B] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[1B] 2} {}/
[Ingl]       3 2 1 {[Carla]} {[1B] 3} {} ,

[Port]       4 2 2 {[Peron]} $ [Garantia] {[1B] 0} {} ,
[Mat]        3 2 1 {[Paulo]} {[1B] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Edson]} {[1B] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Francisco]} {[1B] 0} {} ,
[Fis]        3 2 1 {[Marta]} {[1B] 0} {} ,
[Qui]        3 2 1 {[Ana_Maria]} {[1B] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[1B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[1B] 0} {} ,
[Fil]        2 2 1 {[Suzano]} {[1B] 0} {} ,
[Bio]        3 2 1 {[Rita]} {[1B] 0} {} ,

[Port]       4 2 2 {[Peron]} $ [Garantia] {[2A] 0} {} ,
[Mat]        3 2 1 {[Paulo]} {[2A] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Tarcísio]} {[2A] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Edna]} {[2A] 0} {} ,
[Fis]        3 2 1 {[Marta]} {[2A] 0} {} ,
[Qui]        3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[2A] 0} {} ,
[Bio]        3 2 1 {[Rita]} $ [Alfredo] {[2A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[2A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[2A] 0} {} ,
[Fil]        2 2 1 {[Suzano]} {[2A] 0} {} ,

[PD]         3 2 1 {[Francisco]} {[2A] 1} {} /
[PD]         3 2 1 {[Peron]} {[2A] 2} {} /
[PD]         3 2 1 {[Edvaldo]} {[2B] 1} {} /
[PD]         3 2 1 {[Soenia]} {[2B] 2} {},

[Fran]       3 2 1 {[Fernanda]} {[2A] 1} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Vitorino]} {[2A] 2} {} /
```

```
    [Fran]      3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[2B] 1} {} /
    [Ingl]      3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[2B] 2} {}/
    [Ingl]      3 2 1 {[Carla]} {[2B] 3} {} ,

    [Port]      4 2 2 {[Peron]} $ [Garantia] {[2B] 0} {} ,
    [Mat]       3 2 1 {[Paulo]} {[2B] 0} {} ,
    [Geo]       3 2 1 {[Soenia]} {[2B] 0} {} ,
    [Fis]       3 2 1 {[Marta]} {[2B] 0} {} ,
    [Qui]       3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[2B] 0} {} ,
    [Bio]       3 2 1 {[Rita]} $ [Alfredo] {[2B] 0} {} ,
    [EdFis]     2 2 1 {[Lorena]} {[2B] 0} {[Quadra]} ,
    [OE]        1 1 0 {[Lavinia_Mario]} {[2B] 0} {} ,
    [Fil]       2 2 1 {[Suzano]} {[2B] 0} {} ,
    [Hist]      3 2 1 {[Edson]} $ [Tarcísio] {[2B] 0} {} ,

    [Port]      4 2 2 {[Jonatan]} {[3A] 0} {} ,
    [Mat]       4 2 2 {[Rogerio]} {[3A] 0} {} ,
    [Hist]      3 2 1 {[Tarcísio]} {[3A] 0} {} ,
    [Geo]       3 2 1 {[Edna]} {[3A] 0} {} ,
    [Fis]       4 2 2 {[Ricardo]} {[3A] 0} {} ,
    [Qui]       3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[3A] 0} {} ,
    [Bio]       3 2 1 {[Alfredo]} {[3A] 0} {} ,
    [EdFis]     2 2 1 {[Marcelo_Tavares]} {[3A] 0} {[Quadra]} ,
    [Fil]       1 1 0 {[Suzano]} {[3A] 0} {} ,

    [Fran]      3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[3A] 1} {} /
    [Ingl]      3 2 1 {[Vitorino]} {[3A] 2} {} /
    [Fran]      3 2 1 {[Marlon]} {[3B] 1} {} /
    [Ingl]      3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[3B] 2} {}/
    [Ingl]      3 2 1 {[Carla]} {[3B] 3} {} ,

    [Port]      4 2 2 {[Jonatan]} {[3B] 0} {} ,
    [Mat]       4 2 2 {[Rogerio]} {[3B] 0} {} ,
    [Hist]      3 2 1 {[Tarcísio]} {[3B] 0} {} ,
    [Geo]       3 2 1 {[Edna]} {[3B] 0} {} ,
    [Fis]       4 2 2 {[Ricardo]} {[3B] 0} {} ,
    [Qui]       3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[3B] 0} {} ,
    [Bio]       3 2 1 {[Alfredo]} {[3B] 0} {} ,
    [EdFis]     2 2 1 {[Marcelo_Tavares]} {[3B] 0} {[Quadra]} ,
    [Fil]       1 1 0 {[Suzano]} {[3B] 0} {} ,
}
```

APÊNDICE C

CAp 2008

```
colegio [Cap]

periodosLetivos {
    dias { Seg Ter Qua Qui }{
        07:20 08:10
        08:10 09:00
        09:00 09:50
        10:10 11:00
        11:00 11:50
        11:50 12:40
        13:30 14:20
        14:20 15:10
        15:10 16:00
    }
    dias { Sex }{
        07:20 08:10
        08:10 09:00
        09:00 09:50
        10:10 11:00
        11:00 11:50
        11:50 12:40
    }
}

address [Cap] {

    turmas { [5A] [5B] [6A] [6B] [7A] [7B] [8A] [8B]
             [1A] [1B] [2A] [2B] [3A] [3B] }

    salas { [Sala_de_Musica] [Quadra] [Sala_de_Art]
            [SOE1] [SOE2] [Coord]}

    + turma { [5A] [5B] [6A] [6B]  }{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:50
```

```
        Seg 13:30 16:00
        Ter 07:20 12:40
        Qua 07:20 11:50
        Qua 13:30 16:00
        Qui 07:20 12:40
        Sex 07:20 11:50
    }{}
}

+ turma { [7A] [7B] }{
    + intervalo {
        Seg 07:20 11:50
        Seg 13:30 16:00
        Ter 07:20 11:50
        Qua 07:20 11:50
        Qua 13:30 16:00
        Qui 07:20 12:40
        Sex 07:20 11:50
    }{}
}

+ turma {[8A] [8B] [1A] [1B] [2A] [2B]}{
    + intervalo {
        Seg 07:20 12:40
        Ter 07:20 11:50
        Ter 13:30 16:00
        Qua 07:20 12:40
        Qui 07:20 11:50
        Qui 13:30 16:00
        Sex 07:20 11:50
    }{}
}

+ turma {[3A] [3B]}{
    + intervalo {
        Seg 07:20 12:40
        Ter 07:20 12:40
        Qua 07:20 12:40
        Qui 07:20 12:40
        Sex 07:20 12:40
    }{}
}
```

```
    + sala {[Sala_de_Musica] [Sala_de_Art] [Quadra]
            [SOE1] [SOE2] [Coord]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Lavinia] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Abraao] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:00
            Ter 07:20 11:00
            Qua 07:20 11:00
            Qui 07:20 11:00
        }{}
    }
}

professor [Aercio] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
```

```
        }{}
    }
}

professor [Erica] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edna] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
        }{}
    }
}

professor [Francisco] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Soenia] 0 0 6{
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
```

```
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edson_Falcao] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edson_Silva] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Idalina] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
        }{}
    }
}

professor [Natalia] 0 0 6 {
```

```
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 13:30 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Tarcisio] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ana_Maria] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 09:50 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 08:10 12:40
        }{}
    }
}

professor [Katia_Aquino] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 09:00 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
```

```
}

professor [Alfredo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 09:50
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Sandra] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marcos] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:00
            Ter 07:20 11:00
            Qua 07:20 11:00
            Qui 07:20 11:00
            Sex 07:20 11:00
        }{}
    }
}

professor [Maria] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
```

```
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Gilberto] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marta] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ricardo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 09:00
            Qua 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Jose_Carlos] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
```

```
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Lucia_Durao] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Ter 07:20 11:50
            Qui 07:20 11:50
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
}

professor [Marcelo_Camara] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:00
            Ter 07:20 11:00
            Qua 07:20 11:00
            Qui 07:20 09:50
            Sex 07:20 09:00
        }{}
    }
}

professor [Paulo] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}
```

```
professor [Rogerio] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 09:00
        }{}
    }
}

professor [Mario_Ricardo] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 13:30 16:00
            Ter 13:30 16:00
            Qua 13:30 16:00
            Qui 13:30 16:00
        }{}
    }
}

professor [Mario_Henrique] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edite] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
```

```
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Suzano] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
        }{}
    }
}

professor [Gustavo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Cirineia] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Edvaldo] 0 0 6 @{
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
```

```
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 10:10 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ledjane] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Rodrigo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Jane] 0 0 5 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 11:00
            Ter 13:30 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 11:00
            Qui 13:30 16:00
            Sex 07:20 11:00
```

```
        }{}
    }
}

professor [Joalde] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Angelo] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Gracivane] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 10:10 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marcelo_Barreto] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}
        + intervalo {
```

```
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Marcelo_Tavares] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Roseane] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Lorena] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}
```

```
professor [Adriana] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Cristina] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [E_Savio] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 09:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Jonatan] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
```

```
        }{}
    }
}

professor [Katia_Barreto] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Peron] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Fatima_Barros] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 11:50
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Carla] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
```

```
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Lucia] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Ana_Lucia] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 13:30 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Renato] 0 0 6 @ {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:00
            Seg 14:20 16:00
            Ter 07:20 11:00
            Ter 14:20 16:00
            Qua 07:20 11:00
            Qua 14:20 16:00
            Qui 07:20 11:00
```

```
            Qui 14:20 16:00
            Sex 07:20 11:00
        }{}
    }
}

professor [Fernanda] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 11:50
            Seg 13:30 16:00
            Ter 07:20 11:50
            Ter 13:30 16:00
            Qua 07:20 11:50
            Qua 13:30 16:00
            Qui 07:20 11:50
            Qui 13:30 16:00
            Sex 07:20 11:50
        }{}
    }
}

professor [Marlon] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 16:00
            Ter 07:20 16:00
            Qua 07:20 16:00
            Qui 07:20 16:00
            Sex 07:20 12:40
        }{}
    }
}

professor [Maici] 0 0 6 {
    + address {[Cap]}{
        + intervalo {
            Seg 07:20 12:40
            Ter 07:20 12:40
            Qua 07:20 12:40
            Qui 07:20 12:40
            Sex 07:20 12:40
        }{}
```

```
    }
}

aulas {
    [Port]       5 2 2 {[Cristina]} $ [E_Savio] {[5A] 0} {} ,
    [Mat]        5 2 2 {[Lucia_Durao]} {[5A] 0} {} ,
    [Hist]       3 2 1 {[Edson_Silva]} {[5A] 0} {} ,
    [Geo]        3 2 1 {[Soenia]} {[5A] 0} {} ,
    [Cien]       3 2 1 {[Maria]} {[5A] 0} {} ,
    [PD_Inf]     3 2 1 {[Gustavo]} {[5A] 0} {} ,
    [EdFis]      3 2 1 {[Marcelo_Tavares]} {[5A] 0} {[Quadra]} ,
    [OE]         1 1 0 {[Mario_Henrique]} {[5A] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

    [Mus]        2 2 1 {[Ledjane]} $ [Cirineia] {[5A] 1}
                                        {[Sala_de_Musica]} /
    [Art]        2 2 1 {[Joalde]} {[5A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

    [Mus]        2 2 1 {[Ledjane]} $ [Cirineia] {[5A] 2}
                                        {[Sala_de_Musica]} /
    [Art]        2 2 1 {[Joalde]} {[5A] 1} {[Sala_de_Art]} ,

    [Ingl]       3 2 1 {[Lucia]} {[5B] 1} {} /
    [Ingl]       3 2 1 {[Carla]} {[5B] 2} {} ,

    [Fran]       3 2 1 {[Marlon]} {[5A] 1} {} /
    [Fran]       3 2 1 {[Fernanda]} {[5A] 2} {} ,

    [Port]       5 2 2 {[E_Savio]} {[5B] 0} {} ,
    [Mat]        5 2 2 {[Marcelo_Camara]} {[5B] 0} {} ,
    [Hist]       3 2 1 {[Edson_Silva]} {[5B] 0} {} ,
    [Geo]        3 2 1 {[Soenia]} {[5B] 0} {} ,
    [Cien]       3 2 1 {[Maria]} {[5B] 0} {} ,
    [PD_Inf]     3 2 1 {[Gustavo]} {[5B] 0} {} ,
    [EdFis]      3 2 1 {[Marcelo_Tavares]} {[5B] 0} {[Quadra]} ,
    [OE]         1 1 0 {[Mario_Henrique]} {[5B] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

    [Mus]        2 2 1 {[Ledjane]} $ [Cirineia] {[5B] 1}
                                        {[Sala_de_Musica]} /
    [Art]        2 2 1 {[Joalde]} {[5B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

    [Mus]        2 2 1 {[Ledjane]} $ [Cirineia] {[5B] 2}
                                        {[Sala_de_Musica]} /
    [Art]        2 2 1 {[Joalde]} {[5B] 1} {[Sala_de_Art]} ,
```

```
[Port]      5 2 2 {[E_Savio]} {[6A] 0} {} ,
[Mat]       5 2 2 {[Maici]} {[6A] 0} {} ,
[Hist]      3 2 1 {[Natalia]} {[6A] 0} {} ,
[Geo]       3 2 1 {[Soenia]} {[6A] 0} {} ,
[Cien]      3 2 1 {[Sandra]} {[6A] 0} {} ,
[PD_Pq]     3 2 1 {[Aercio]} {[6A] 0} {} ,
[EdFis]     3 2 1 {[Roseane]} $ [Lorena] {[6A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]        1 1 0 {[Mario_Henrique]} {[6A] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

[Mus]       2 2 1 {[Ledjane]} $ [Cirineia] {[6A] 1}
                                           {[Sala_de_Musica]} /
[Art]       2 2 1 {[Angelo]} {[6A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Mus]       2 2 1 {[Ledjane]} $ [Cirineia] {[6A] 2}
                                           {[Sala_de_Musica]} /
[Art]       2 2 1 {[Angelo]} {[6A] 1} {[Sala_de_Art]} ,

[Fran]      3 2 1 {[Fernanda]} {[6A] 1 [6B] 1} {} /
[Fran]      3 2 1 {[Marlon]} {[6A] 2 [6B] 2} {} /
[Ingl]      3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[6A] 3 [6B] 3} {} /
[Ingl]      3 2 1 {[Lucia]} {[6A] 4 [6B] 4} {} ,

[Port]      5 2 2 {[E_Savio]} {[6B] 0} {} ,
[Mat]       5 2 2 {[Maici]} {[6B] 0} {} ,
[Hist]      3 2 1 {[Natalia]} {[6B] 0} {} ,
[Geo]       3 2 1 {[Soenia]} {[6B] 0} {} ,
[Cien]      3 2 1 {[Sandra]} {[6B] 0} {} ,
[PD_Pq]     3 2 1 {[Ana_Lucia]} {[6B] 0} {} ,
[EdFis]     3 2 1 {[Roseane]} $ [Lorena] {[6B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]        1 1 0 {[Mario_Henrique]} {[6B] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

[Mus]       2 2 1 {[Rodrigo]} {[6B] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]       2 2 1 {[Angelo]} {[6B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Mus]       2 2 1 {[Rodrigo]} {[6B] 2} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]       2 2 1 {[Angelo]} {[6B] 1} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]      5 2 2 {[Adriana]} {[7A] 0} {} ,
[Mat]       5 2 2 {[Jose_Carlos]} {[7A] 0} {[Coord]} ,
[Hist]      3 2 1 {[Idalina]} {[7A] 0} {} ,
[Geo]       3 2 1 {[Erica]} {[7A] 0} {} ,
[Cien]      3 2 1 {[Sandra]} {[7A] 0} {} ,
```

```
[PD_Des]     3 2 1 {[Mario_Ricardo]} {[7A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Lorena]} {[7A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Mario_Henrique]} {[7A] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

[Mus]        2 2 1 {[Rodrigo]} {[7A] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        2 2 1 {[Angelo]} {[7A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Mus]        2 2 1 {[Rodrigo]} {[7A] 2} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        2 2 1 {[Angelo]} {[7A] 1} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]       5 2 2 {[Adriana]} {[7B] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Maici]} {[7B] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Idalina]} {[7B] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[7B] 0} {} ,
[Cien]       3 2 1 {[Sandra]} {[7B] 0} {} ,
[PD_Des]     3 2 1 {[Mario_Ricardo]} {[7B] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Lorena]} {[7B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Mario_Henrique]} {[7B] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

[Mus]        2 2 1 {[Rodrigo]} {[7B] 1} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        2 2 1 {[Angelo]} {[7B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Mus]        2 2 1 {[Rodrigo]} {[7B] 2} {[Sala_de_Musica]} /
[Art]        2 2 1 {[Angelo]} {[7B] 1} {[Sala_de_Art]} ,

[Fran]       3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[7A] 1 [7B] 1} {} /
[Fran]       3 2 1 {[Marlon]} {[7A] 2 [7B] 2} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[7A] 3 [7B] 3} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Carla]} {[7A] 4 [7B] 4} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Lucia]} {[7A] 5 [7B] 5} {} ,

[Port]       5 2 2 {[Adriana]} {[8A] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Gracivane]} {[8A] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Idalina]} {[8A] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[8A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Lorena]} {[8A] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Edite]} {[8A] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

[Fis]        2 2 1 {[Marta]} {[8A] 1} {} ,
[Fis]        2 2 1 {[Marta]} {[8A] 2} {} ,

[Qui]        2 2 1 {[Ana_Maria]} {[8A] 1} {} ,
[Qui]        2 2 1 {[Ana_Maria]} {[8A] 2} {} ,
```

```
[Mus]        2 2 1 {[Edvaldo]} {[8A] 1} {[Sala_de_Musica]} ,
[Mus]        2 2 1 {[Edvaldo]} {[8A] 2} {[Sala_de_Musica]} ,

[Art]        2 2 1 {[Jane]} {[8A] 1} {[Sala_de_Art]} ,
[Art]        2 2 1 {[Jane]} {[8A] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[PD_Inf]     3 2 1 {[Gustavo]} {[8A] 1 [8B] 1} {} /
[PD_Pq]      3 2 1 {[Renato]} {[8A] 2 [8B] 2} {} /
[PD_MA]      3 2 1 {[Maria]} {[8A] 3 [8B] 3} {} ,

[Fran]       3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[8A] 1 [8B] 1} {} /
[Fran]       3 2 1 {[Marlon]} {[8A] 2 [8B] 2} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Carla]} {[8A] 3 [8B] 3} {} /
[Ingl]       3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[8A] 4 [8B] 4} {}/
[Ingl]       3 2 1 {[Lucia]} {[8A] 5 [8B] 5} {} ,

[Port]       5 2 2 {[Jonatan]} {[8B] 0} {} ,
[Mat]        5 2 2 {[Gracivane]} {[8B] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Natalia]} {[8B] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Erica]} {[8B] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[8B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]         1 1 0 {[Edite]} {[8B] 0} {[SOE1][SOE2]} ,

[Fis]        2 2 1 {[Marta]} {[8B] 1} {} ,
[Fis]        2 2 1 {[Marta]} {[8B] 2} {} ,

[Qui]        2 2 1 {[Ana_Maria]} {[8B] 1} {} ,
[Qui]        2 2 1 {[Ana_Maria]} {[8B] 2} {} ,

[Mus]        2 2 1 {[Edvaldo]} {[8B] 1} {[Sala_de_Musica]} ,
[Mus]        2 2 1 {[Edvaldo]} {[8B] 2} {[Sala_de_Musica]} ,

[Art]        2 2 1 {[Jane]} {[8B] 1} {[Sala_de_Art]} ,
[Art]        2 2 1 {[Jane]} {[8B] 2} {[Sala_de_Art]} ,

[Port]       4 2 2 {[Jonatan]} {[1A] 0} {} ,
[Mat]        3 2 1 {[Abraao]} {[1A] 0} {} ,
[Hist]       3 2 1 {[Edson_Silva]} {[1A] 0} {} ,
[Geo]        3 2 1 {[Francisco]} {[1A] 0} {} ,
[Fis]        3 2 1 {[Ricardo]} {[1A] 0} {} ,
[Qui]        3 2 1 {[Ana_Maria]} {[1A] 0} {} ,
[EdFis]      2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[1A] 0} {[Quadra]} ,
```

```
[OE]          1 1 0 {[Lavinia]} {[1A] 0} {[SOE1][SOE2]} ,
[Fil]         2 2 1 {[Suzano]} {[1A] 0} {} ,
[Bio]         3 2 1 {[Alfredo]} {[1A] 0} {} ,

[PD_Des]      3 2 1 {[Mario_Ricardo]} {[1A] 1 [1B] 1} {} /
[PD_Cin]      3 2 1 {[Jane]} {[1A] 2 [1B] 2} {[Sala_de_Art]} /
[PD_Per]      3 2 1 {[Edvaldo]} {[1A] 3 [1B] 3}
                                      {[Sala_de_Musica]} ,

[Fran]        3 2 1 {[Fernanda]} {[1A] 1 [1B] 1} {} /
[Fran]        3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[1A] 2 [1B] 2} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Carla]} {[1A] 3 [1B] 3} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Lucia]} {[1A] 4 [1B] 4} {} /
[Ingl]        3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[1A] 5 [1B] 5} {} ,

[Port]        4 2 2 {[Jonatan]} {[1B] 0} {} ,
[Mat]         3 2 1 {[Abraao]} {[1B] 0} {} ,
[Hist]        3 2 1 {[Edson_Silva]} {[1B] 0} {} ,
[Geo]         3 2 1 {[Francisco]} {[1B] 0} {} ,
[Fis]         3 2 1 {[Ricardo]} {[1B] 0} {} ,
[Qui]         3 2 1 {[Ana_Maria]} {[1B] 0} {} ,
[EdFis]       2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[1B] 0} {[Quadra]} ,
[OE]          1 1 0 {[Lavinia]} {[1B] 0} {[SOE1][SOE2]} ,
[Fil]         2 2 1 {[Suzano]} {[1B] 0} {} ,
[Bio]         3 2 1 {[Alfredo]} {[1B] 0} {} ,

[Port]        4 2 2 {[Katia_Barreto]} {[2A] 0} {[Coord]} ,
[Mat]         3 2 1 {[Gracivane]} {[2A] 0} {} ,
[Hist]        3 2 1 {[Tarcisio]} {[2A] 0} {} ,
[Geo]         3 2 1 {[Francisco]} {[2A] 0} {} ,
[Fis]         3 2 1 {[Ricardo]} {[2A] 0} {} ,
[Qui]         3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[2A] 0} {} ,
[Bio]         3 2 1 {[Marcos]} {[2A] 0} {} ,
[EdFis]       2 2 1 {[Roseane]} $ [Marcelo_Barreto] {[2A] 0}
                                              {[Quadra]} ,
[OE]          1 1 0 {[Lavinia]} {[2A] 0} {[SOE1][SOE2]} ,
[Fil]         2 2 1 {[Suzano]} {[2A] 0} {} ,

[PD_Per]      3 2 1 {[Edvaldo]} {[2A] 1 [2B] 1}
                                        {[Sala_de_Musica]} /
[PD_Cin]      3 2 1 {[Jane]} {[2A] 2 [2B] 2} {[Sala_de_Art]} /
[PD_OS]       3 2 1 {[Ana_Lucia]} {[2A] 3 [2B] 3} {},
```

```
[Fran]      3 2 1 {[Marlon]} {[2A] 1 [2B] 1} {} /
[Fran]      3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[2A] 2 [2B] 2} {} /
[Fran]      3 2 1 {[Fernanda]} {[2A] 3 [2B] 3} {} /
[Ingl]      3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[2A] 4 [2B] 4} {}/
[Ingl]      3 2 1 {[Carla]} {[2A] 5 [2B] 5} {} ,

[Port]      4 2 2 {[Peron]} {[2B] 0} {} ,
[Mat]       3 2 1 {[Rogerio]} {[2B] 0} {} ,
[Geo]       3 2 1 {[Edna]} {[2B] 0} {} ,
[Fis]       3 2 1 {[Marta]} {[2B] 0} {} ,
[Qui]       3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[2B] 0} {} ,
[Bio]       3 2 1 {[Marcos]} {[2B] 0} {} ,
[EdFis]     2 2 1 {[Roseane]} $ [Marcelo_Barreto] {[2B] 0}
                                              {[Quadra]} ,
[OE]        1 1 0 {[Lavinia]} {[2B] 0} {[SOE1][SOE2]} ,
[Fil]       2 2 1 {[Suzano]} {[2B] 0} {} ,
[Hist]      3 2 1 {[Tarcisio]} {[2B] 0} {} ,

[Port]      4 2 2 {[Peron]} {[3A] 0} {} ,
[Mat]       4 2 2 {[Gracivane]} $ [Paulo] {[3A] 0} {} ,
[Hist]      3 2 1 {[Tarcisio]} {[3A] 0} {} ,
[Geo]       3 2 1 {[Edna]} {[3A] 0} {} ,
[Fis]       4 2 2 {[Gilberto]} {[3A] 0} {} ,
[Qui]       3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[3A] 0} {} ,
[Bio]       3 2 1 {[Alfredo]} {[3A] 0} {} ,
[EdFis]     2 2 1 {[Marcelo_Tavares]} {[3A] 0} {[Quadra]} ,
[Fil]       1 1 0 {[Suzano]} {[3A] 0} {} ,

[Fran]      3 2 1 {[Fernanda]} {[3A] 1 [3B] 1} {} /
[Fran]      3 2 1 {[Edson_Falcao]} {[3A] 2 [3B] 2} {} /
[Ingl]      3 2 1 {[Lucia]} {[3A] 3 [3B] 3} {} /
[Ingl]      3 2 1 {[Fatima_Barros]} {[3A] 4 [3B] 4} {}/
[Ingl]      3 2 1 {[Carla]} {[3A] 5 [3B] 5} {} ,

[Port]      4 2 2 {[Peron]} {[3B] 0} {} ,
[Mat]       4 2 2 {[Rogerio]} {[3B] 0} {} ,
[Hist]      3 2 1 {[Tarcisio]} {[3B] 0} {} ,
[Geo]       3 2 1 {[Edna]} {[3B] 0} {} ,
[Fis]       4 2 2 {[Gilberto]} {[3B] 0} {} ,
[Qui]       3 2 1 {[Katia_Aquino]} {[3B] 0} {} ,
[Bio]       3 2 1 {[Alfredo]} {[3B] 0} {} ,
[EdFis]     2 2 1 {[Marcelo_Barreto]} {[3B] 0} {[Quadra]} ,
[Fil]       1 1 0 {[Suzano]} {[3B] 0} {} ,
```

```
}


alocacoes{
    [Port] [Cristina] {[5A] 0} {} {Qui 07:20 08:10 Qui 08:10 09:00 }
}
```

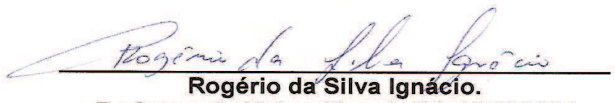
APÊNDICE D

Depoimento

Depoimento:

O ASC Timetables tem um nível de flexibilidade que nos permitiu encontrar soluções para todas as exigências iniciais que possuíamos.
Diante da facilidade apresentada pela automação, passamos a incrementar exigências ao horário.
Por enquanto dois fatores não são atendidos pelo software:
1) Gostaríamos de uma resposta mais rápida.
No entanto, sabemos que as condições de elaboração de horário faz com que nem sempre seja possível que ele seja criado e nem sempre seja possível que o software determine essa impossibilidade.
2) Gostaríamos que o software pudesse escolher o professor para as turmas se baseando em um conjunto de possibilidades de turmas que apresentemos ou apenas a carga horária.
Escrevemos para o desenvolvedor e aguardamos resposta.

Quanto ao seu modelo, AST.
Entendo a grade de horário escolar como um instrumento para facilitar a organização das atividades da escola.
Todos os fatores implementados em seu software são de grande relevância para a boa organização do cotidiano escolar. Manualmente algumas coisas são difíceis e outras são inviáveis. Manualmente é difícil conseguir dia de folga, evitar choques em salas-ambiente. Considero inviável tratar manualmente das janelas e da distribuição das aulas. Seu programa resolve isso de forma bastante satisfatória. Gostaria de poder fazer escolhas ao nível de disciplinas ou mesmo de aulas e assim poder controlar as quebras dos critérios tornando algumas disciplinas (ou aulas) mais prioritárias que outras.
Quanto aos cinco melhores resultados apresentados eu diria que todos apresentam um resultado satisfatório.
Embora um deles tenha se aproximado muito dos resultados que desejamos ainda não poderia ser indicado por ter três situações em que o professor tem apenas uma aula por dia. Eu teria que melhorar isso. Após a melhora obtida a partir desse horário foi gerado algo aceitável (apenas uma situação).
Para que ele fosse implementado na escola faltaria apenas garantir que todo professor que tenha carga horária superior a uma aula semanal por turma tenha garantido ao menos um encontro de aulas duplas sem interrupção pelo recreio.
Quanto ao tempo de resposta para o horário pronto (cerca de 30 min) é perfeitamente aceitável possibilitando a criação de múltiplos horários para escolha sem muito tempo de espera.
Conversando com colegas observamos que se no ano passado os horários fossem tão bons quanto os desse ano não teríamos procurado outro software, que como já disse, se adequa perfeitamente às nossas necessidades. Posso afirmar com garantia que para o ano letivo de 2007 teríamos aceito o 14.xls.
Uma grande vantagem de seu software está no fato de que ainda que ele não encontre um horário com as restrições pedidas ele sempre reporta uma solução otimizada. A opção de usar um resultado e melhorá-lo otimizando a solução faz com que se tenha em mãos algo que possa ser trabalhado e com o mínimo de exigências não atendidas.



Rogério da Silva Ignácio.
Professor de Matemática do CAp/CE/UFPE
Membro da comissão de elaboração de horários 2008 do CAp/CE/UFPE.

Referências Bibliográficas

[AdW02] A. S. Asratian and D. de Werra. A generalized class-teacher model for some timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 143:531–542, 2002.

[AKD99] D. Abramson, M. Krishnamoorthy, and H. Dang. Simulated annealing cooling schedules for the school timetabling problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 16:1–22, 1999.

[CAF04] Kenneth K. Chin-A-Fat. *School Timetabling using Satisfiability Solvers – A method to construct timetables for Dutch secondary education*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, September 2004.

[CDJD05] H. Cambazard, F. Demazeau, N. Jussien, and P. David. Interactively solving school timetabling problems using extensions of constraint programming. In Edmund Burke and Michael Trick, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling V (5th International Conference, PATAT 2004, Pittsburgh, PA, USA, August 2004, Revised Selected Papers)*, volume 3616 of *LNCS*, pages 190–207, Pittsburgh, USA, 2005. Springer.

[CDM98] A. Colorni, M. Dorigo, and V. Maniezzo. Metaheuristics for high school timetabling. *Computational Optimization and Applications*, 9:275–298, 1998.

[CG64] J. Csima and C. C. Gotlieb. Tests on a computer method for constructing school timetables. *Communications of the ACM*, 7(3):160–163, March 1964. Presented at the 18th Annual Conference of the Association for Computing Machinery, August 1963.

[COS01] R. Cole, K. Ost, and S. Schirra. Edge-coloring bipartite multigraphs in o(e logd) time. *Combinatorica*, 21(1):5–12, 2001.

[CP01] M. P. Carrasco and M. V. Pato. A multiobjective genetic algorithms for the class/teacher timetabling problem. In E. Burke and W. Erben, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling III (Third International Conference, PATAT 2000, Konstanz, Germany, August 2000, Selected Papers)*, volume 2079 of *LNCS*, pages 3–17. Springer, 2001. ISBN 3540424210.

[CR98] J. P. Caldeira and A. C. Rosa. School timetabling using genetic search. In E. Burke and M. Carter, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling*

II (2st International Conference, PATAT 1997, Toronto, Canada, August, Selected papers), volume 1408 of *LNCS*, pages 115– 122, Berlin Heidelberg New York, 1998. Springer-Verlag.

[dHLPR06] P. de Haan, R. Landman, G. Post, and H. Ruizenaar. A four-phase approach to a timetabling problem in secondary schools. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 423–425, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. Extended abstract.

[Dia07] Moustapha Diaby. A reply to hofman on: "why lp cannot solve large instances of np-complete problems in polynomial time". Available: http://arxiv.org/abs/cs.CC/0701014, January 2007.

[dS06] Vânia Nobre de Sousa. Programação da grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, April 2006.

[dW97] D. de Werra. The combinatorics of timetabling. *European Journal of Operational Research*, 96:504–513, 1997.

[dW02] D. de Werra. Cats and rats. In E. Burke and P. De Causmaecker, editors, *PATAT 2002 Proceedings of the 4th international conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling*, pages 14–33, 2002. ISBN 90-806096-1-7. Availabel: http://ingenieur.kahosl.be/vakgroep/IT/Patat2002/Plenary/dewerra.pdf.

[dWAD02] D. de Werra, A. S. Asratian, and S. Durand. Complexity of some special types of timetabling problems. *Journal of Scheduling*, 5:171–183, 2002.

[EIS76] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computers*, 5(4):691–703, December 1976.

[FCMR99] C. Fernandes, J. P. Caldeira, F. Melicio, and A. Rosa. High school weekly timetabling by evolutionary algorithms. In *SAC '99: Proceedings of the 1999 ACM symposium on Applied computing*, pages 344–350, San Antonio, Texas, USA, 1999. ACM, New York, NY, USA. ISBN 1-58113-086-4.

[FL01] G. Ribeiro Filho and Luiz A. N. Lorena. A constructive evolutionary approach to school timetabling. In *Proceedings of the EvoWorkshops on Applications of Evolutionary Computing*, London, UK, 2001. Springer-Verlag. ISBN 3-540-41920-9.

[GCS06] L. Di Gaspero, M. Chiarandini, and A. Schaerf. A study on the short-term prohibition mechanisms in tabu search for examination timetabling. In E. K. Burke and

H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 406–411, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. Extended abstract.

[GS06] Luca Di Gaspero and Andrea Schaerf. Neighborhood portfolio approach for local search applied to timetabling problems. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 5(1):65–89, April 2006.

[Hal35] P. Hall. On representations of subsets. *J. london Math Soc.*, 10:26–30, 1935.

[HK73] J. E. Hopcroft and R. M. Karp. An $n^{\frac{5}{2}}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM Journal of Computers*, 2:225–231, 1973.

[Hof06] Radoslaw Hofman. Why lp cannot solve large instances of np-complete problems in polynomial time. Available: http://arxiv.org/abs/cs.CC/0611008, 2006.

[JBG06] F. Jacobsen, A. Bortfeldt, and H. Gehring. Timetabling at german secondary schools: Tabu search versus constraint programming. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 439–442, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. Extended abstract.

[KÏ6] D. König. Uber graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77(453–465), 1916.

[key] http://www.dashoptimization.com. XPRESS-MP 2006.

[Kin05] Jeffrey H. Kingston. A tiling algorithm for high school timetabling. In Edmund Burke and Michael Trick, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling V (5th International Conference, PATAT 2004, Pittsburgh, PA, USA, August 2004, Revised Selected Papers)*, volume 3616 of *LNCS*, pages 208–225, Pittsburgh, USA, 2005. Springer.

[Kin06] Jeffrey H. Kingston. The kts high school timetabling system. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 181–195, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1.

[KOP06] Y. Kochetov, P. Obuhovskaya, and M. Paschenko. Local search heuristics for the teacher/class timetabling problem. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 454–457, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. Extended abstract.

[Mar00] Michael Marte. Towards constraint-based grammar school timetabling. In E. K. Burke and W. Erben, editors, *PATAT III, Proceedings of the 3rd International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling*, pages 222–224, 2000. Extended abstract. Available: http://citeseer.ist.psu.edu/327395.html.

[Mar01] Michael Marte. A global constraint for parallelizing the execution of task sets in non-preemptive scheduling. In *Electronic Proceedings of the CP-2001 Doctoral Programme*, 2001. Available: http://www.math.unipd.it/ frossi/doctoral.html.

[MCR05] F. Melício, J. P. Caldeira, and A. Rosa. Two neighbourhood approaches to the timetabling problem. In Edmund Burke and Michael Trick, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling V (5th International Conference, PATAT 2004, Pittsburgh, PA, USA, August 2004, Revised Selected Papers)*, volume 3616 of *LNCS*, pages 267–282, Pittsburgh, USA, 2005. Springer.

[MCR06] F. Melício, J. P. Caldeira, and A. Rosa. Thor: A tool for school timetabling. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 532–535, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. System Demonstrations.

[Mur87] Charles J. V. Murphy. Timelog – an intelligent spreadsheet for school timetabling. *SIGART Newsletter*, (101):21–23, July 1987.

[NT74] G. A. Neufeld and J. Tartar. Graph coloring conditions for the existence of solutions to the timetable problem. *Communications of ACM*, 17(8):450–453, August 1974.

[RS06a] Malek Rahoual and Rachid Saad. Solving timetabling problems by hybridizing genetic algorithms and tabu search. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 467–472, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. Extended abstract.

[RS06b] F. Rinaldi and P. Serafini. Scheduling school meetings. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on The Practice and Theory of Automated Timetabling)*, pages 484–486, Brno, The Czech Republic, 2006. Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1. Extended abstract.

[Sch99a] Andrea Schaerf. Local search techniques for large high-school timetabling problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 29(4):368–377, July 1999. An abridged version of this work appeared in the proceedings of the 13th National Conference of the American Association for Artificial Intelligence (AAAI-96).

[Sch99b] Andrea Schaerf. A survey of automated timetabling. *Artificial Intelligence Review*, 13(2):87–127, 1999.

[SdCG02] M. J. F. Souza, F. P. da Costa, and I. F. G. Guimarães. Um algoritmo evolutivo híbrido para o problema de programação de horários em escolas. In *XXII Encontro Nacional de Engenharia de Produção - ENEGEP*, Anais do XXII ENEGEP, page 8, Curitiba, Brasil, October 2002. ABEPRO, CD-ROM.

[SMO00] M. J. F. Souza, N. Maculan, and L. S. Ochi. Melhorando quadros de horário de escolas através de caminhos mínimos. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 1(2):515–524, 2000. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

[SMO01] M. J. F. Souza, N. Maculan, and L. S. Ochi. Uma heurística para o problema de programação de horários em escolas. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 2:213–222, 2001. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

[SOa05] H. G. Santos, L. S. Ochi, and M. J. F. Souza and. A tabu search heuristic with efficient diversification strategies for the class/teacher timetabling problem. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 10(2.9):1–16, 2005.

[SOM03] M. J. F. Souza, L. S. Ochi, and N. Maculan. A grasp-tabu search algorithm to solve a school timetabling problem. In M.G.C. Resende and J.P. Sousa, editors, *Metaheuristics: Computer Decision-Making*, pages 659–672. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[SOS04] H. G. Santos, L. S. Ochi, and M. J. F. Souza. A tabu search heuristic with efficient diversification strategies for the class/teacher timetabling problem. In http://www.asap.cs.nott.ac.uk/patat/patat04/patat04-full-papers.shtml, 2004. PATAT '04 Proceedings of the 5th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling.

[Sou00] Marcone Jamilson Freitas Souza. *Programação de horários em escolas: uma aproximação por metaheurísticas.* PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, December 2000.

[SS74] Graham Smith and Ian M. Sefton. On lions' counter example for gotlieb's method for the construction of school timetables. *Communications of the ACM*, 17(4):196–197, April 1974.

[SS79] G. Schmidt and T. Ströhlein. Timetable construction - an annotated bibliography. *The Computer Journal*, 23(4):307–316, 1979.

[vdBHW06] J. van den Broek, Cor Hurkens, and G. Woeginger. Timetabling problems at the tu eindhoven. In E. K. Burke and H. Rudová, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling VI (Proceedings of The 6th International Conference on*

The Practice and Theory of Automated Timetabling), pages 141–156, Brno, The Czech Republic, 2006. Published by Masaryk University. ISBN 80-210-3726-1.

[Š05] Petr Šlechta. Decomposition and parallelization of multi-resource timetabling problems. In Edmund Burke and Michael Trick, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling V (5th International Conference, PATAT 2004, Pittsburgh, PA, USA, August 2004, Revised Selected Papers)*, volume 3616 of *LNCS*, pages 177–189, Pittsburgh, USA, 2005. Springer.

[WGO02] P. Wilke, M. Gröbner, and N. Oster. A hybrid genetic algorithm for school timetabling. In *AI 2002: Advances in Artificial Intelligence*, volume 2557 of *LNCS*, pages 455–464, Berlin / Heidelberg, 2002. Springer. ISBN 978-3-540-00197-3.

[Wil02] Robertus Johannes Willemen. *School timetable construction : algorithms and complexity*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, April 2002.

[Wol98] Laurence A. Wolsey. *Integer Programming*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley-Interscience publication, 1998.

[Wri01] Mike Wright. Subcost-guided search–experiments with timetabling problems. *Journal of Heuristics*, 7:251–260, 2001.