Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Gleybson Miguel da Silva**

# Solução Fraca para Equações Diferenciais Funcionais com Retardo

Recife
2011

**Gleybson Miguel da Silva**

# Solução Fraca para Equações Diferenciais Funcionais com Retardo

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.*

**Orientador: Prof. Marcos N. Rabelo**

Recife
2011

**Catalogação na fonte**
**Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571**

**Silva, Gleybson Miguel da**
**Solução fraca para equações diferenciais funcionais com retardo / Gleybson Miguel da Silva - Recife: O Autor, 2011.**
**45 folhas**

**Orientador: Marcos Napoleão Rabelo.**
**Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2011.**

**Inclui bibliografia.**

**1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais funcionais. 3. Teoria de distribuição. 4. Semigrupos. I. Rabelo Marcos Napoleão (orientador). II. Título.**

**515 CDD (22. ed.) MEI2011 – 191**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

*Marcos Napoleão Rabelo, UFPE*

**Orientador**

______________________________

*Airton Temístocles Gonçalves de Castro, UFPE*

______________________________

*Marcos Luiz Henrique, UFPE*

**SOLUÇÃO FRACA PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS COM RETARDO**

*POR*

*Gleybson Miguel da Silva*


UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410*
RECIFE – BRASIL


Setembro – 2011

# Dedicatória

*A todos que contribuiram de forma direta ou indireta para o desenvolvimento desse trabalho.*

# Agradecimentos

- Aos professores de graduação e pós-graduação, que acreditando em meu trabalho, incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento, auxiliando-me sempre. Especialmente, aos professores Marcos Napoleão Rabelo, Marcos Henrique e Sergio Santa Cruz, que sempre apoiaram e incentivaram meus estudos.

- Aos colegas de curso, pela troca de experiências e convivência harmoniosa. Em especial a Luiz sergipe, Leandro, Alan, Felipes, Renato chapeuzinho, Badaró, Clessius , Zé oliveira, Gigante, Gabriel Guedes, Jesus, Jane, Anete, Bob, Gilson, Edgar, Gabriel, Katy, Aninha, Elaine.

- A minha família e amigos, pelo incentivo e apoio. Em especial a Dona Ilza, Paulinho, Polinha, oMago, Bruno, Dona Zeza, Seu Biu, Lulala, Marylu, Suzete, Tio Fio, Tia Cida, Aylinha, o pessoal do Skate Olinda, a galera do Recife antigo e adjacentes, Tiger, Renato, Ana, Rafael, Léo, Pepi, André, Kade, Leska, Nessa, Nesse, Bia, Os Janga People... e por ai vai.

- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro que propiciou-me todo um aprendizado sistemático, culminando para este trabalho.

# Resumo

Neste trabalho de dissertação, estudaremos uma modelagem de uma equação diferencial parcial com retardo em um aberto de $\mathbb{R}^n$ com condição de fronteira de Dirichlet, dando origem a uma equação diferencial funcional com retardo abstrata, onde a parte linear gera um $C_0$-semigrupo de contrações em um espaço de Banach e a parte não linear satisfaz uma condição Lipschitz com respeito a uma norma apropriada. Para isto, estudamos teoria de distribuições, semigrupos, espaços de Sobolev, operador Laplaciano em um aberto de $\mathbb{R}^n$. Estudamos também existência e unicidade de solução fraca do problema de valor inicial com condição inicial em um espaço de fase.

Palavras-chave: Distribuições, Espaços de Sobolev, Semigrupos, Solução fraca.

# Abstract

In this dissertation, we study a model of a partial differential equation with delay in an open subset of $\mathbb{R}^n$ with Dirichlet boundary condition, leading to an abstract functional differential equation with delay, where the linear part generates a $C_0$-semigroup of contractions in a Banach space and the non-linear part satisfies a Lipschitz condition with regard to an appropriate norm. For this, we study the theory of distributions, semigroups, Sobolev spaces, Laplacian operator in an open subset of $\mathbb{R}^n$. We also study the existence and uniqueness of weak solution for the initial value problem with initial condition in a phase space.

Keywords: Distributions, Sobolev Spaces, Semigroups, Weak solution.

# Sumário

# Capítulo 1

# Espaços de Sobolev e Operadores Lineares

## 1.1 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. O conjunto supp$\varphi$ definido por

$$supp\ \varphi = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}},$$

é chamado *o suporte* da função $\varphi$.
Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto das funções $C^\infty(\Omega)$ em $\mathbb{R}$ com suporte compacto contido em $\Omega$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Definimos

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Pode-se facilmente ver que $\mathcal{D}(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dotamos este espaço com uma estrutura de convergência como segue.

**Definição 1.1.1** *Dizemos que a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathcal{D}(\Omega)$ para $\varphi$ e escrevemos $\varphi_n \stackrel{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi$, se*

**(i)** *existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $supp\ \varphi_n \subset K$;*

**(ii)** *para cada multi-índice* $\alpha$ *temos* $\lim_{n\to\infty} D^{\alpha}\varphi_n = D^{\alpha}\varphi$ *uniformemente em* $\Omega$*, ou equivalentemente em* $K$

**Definição 1.1.2** *Um funcional linear contínuo* $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *é dito uma distribuição em* $\Omega$*. Denotamos o espaço das distribuições em* $\Omega$ *por* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, e* $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$

**Definição 1.1.3** *Seja* $\alpha \in \mathbb{N}$ *um multi-índice e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função localmente integrável. A derivada de ordem* $\alpha$ *da função* $u$ *no sentido de distribuições sobre* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é a distribuição* $\mathcal{D}^{\alpha}u$ *definida por*

$$\langle \mathcal{D}^{\alpha}u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha}\varphi d\omega \tag{1.1}$$

*para cada* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, onde* $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ *é o comprimento do multi-índice* $\alpha$*.*

Observemos que, se a função $u$ é diferenciável de ordem $\alpha$ q.t.p. em $\Omega$ no sentido clássico e $D^{\alpha}u$ é localmente integrável, então $\mathcal{D}^{\alpha}u$ pode ser indentificado com $D^{\alpha}u$ por meio da igualdade

$$\langle \mathcal{D}^{\alpha}u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (D^{\alpha}u)\varphi d\omega$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, igualdade obtida pela integração $|\alpha|$ vezes (1.1) por partes. Seja $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e definamos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \mathcal{D}^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \ para\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

.

**Teorema 1.1.1** *A aplicação* $\|\cdot\|_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$*, definida por*

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left( \displaystyle\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathcal{D}^{\alpha}u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < +\infty \\ \\ \displaystyle\max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathcal{D}^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, & se\ p = \infty. \end{cases}$$

*para cada* $u \in W^{m,p}(\Omega)$*, é uma noma em relação a qual* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach real.*

O espaço $W^{m,p}$ é chamado *espaço de Sobolev de ordem m e expoente p*. Seja $H^{m,p}(\Omega)$ a completação do espaço $\{u \in C^m(\Omega); \|u\|_{m,p} < +\infty\}$ com respeito a $\|\cdot\|_{m,p}$

**Teorema 1.1.2** *(Meyers, Serrin) Para cada subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cada $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$, temos*

$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega).$$

Vamos definir agora o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}$. Também denotamos este espaço por $H_0^{m,p}(\Omega)$. É fácil ver que

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

ambas imersões sendo contínuas. Além disso, observemos que, para cada $1 \leq p < +\infty$, temos $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, a última igualdade sendo uma simples consequência do fato de que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ se e somente se $p < +\infty$.
Suponha $1 \leq p < \infty$ e $< q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.
Seja $f \in W^{-m,q}(\Omega)$ e $(\varphi_n)$ uma sucessão de funções testes em $\Omega$ tal que $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Resulta que $\varphi_n \to 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, portanto, $\langle f, \varphi_n \rangle \to 0$, o que permite concluir que a restrição de $f$ a $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição. Considere a aplicação linear

$$\sigma : W^{-m,q}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),$$

tal que $\sigma(f) = f \mid_{\mathcal{D}(\Omega)}$ para todo $f$ em $W^{-m,q}(\Omega)$. Por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $W_0^{m,p}(\Omega)$ resulta que $\sigma$ é injetiva. Também se $(f_n)$ é uma sucessão de vetores de $W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $f_n \to 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$ então $\sigma(f_n) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é, $\sigma$ é contínua. A aplicação $\sigma$ permite identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e com esta identificação tem-se:

$$W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Quando se diz que uma distribuição $T$ pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, significa dizer que $T$, definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extenção contínua é representada po $T$. O resultado que segue carateriza as distribuições de $W^{-m,q}(\Omega)$.

**Teorema 1.1.3** *Seja $T$ uma distribuição sobre $\Omega$, então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se e somente se existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tai que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Em tudo que se segue, denotaremos os espaços $W^{m,2}(\Omega) = H^{m,2}(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$, respectivamente. Claremente estes são espaçoes de Hilbert com respeito ao produto interno

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\alpha v d\omega.$$

## 1.2 Os espaços $H^m(\Omega)$ e $H^{-m}(\Omega)$

Se $L = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$, resulta que para $u \in H^m(\Omega)$, $Lu$ é uma distribuição não necessáriamente definida por uma função localmente integrável. Além disso, se $u \in H^m(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, $g_\alpha = D^\alpha u$ pertence a $L^2(\Omega)$ e $Lu = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha$ pertence a $H^{-m}(\Omega)$ pela definição . Portanto, podemos considerar a realização de $L$ como um operador linear de $H^m(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$. A seguir caracteriza-se a imagem de $H_0^m(\Omega)$ por $L$

**Proposição 1.2.1** *O Complemento ortogonal de $H_0^m(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é o núcleo do operador diferencial linear $L$.*

**Demonstração:** Para todo $u \in H^m(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle_m.$$

Se $u$ pertence ao complemento ortogonal de $H_0^m(\Omega)$ então $\langle u, v\rangle_m = 0$ para todo $v \in H_0^m(\Omega)$, em particular, $\langle u, \varphi\rangle_m = 0$ para toda função teste $\varphi \in \Omega$, portanto, $\langle Lu, \varphi\rangle = 0$ para toda função teste, isto é, $Lu = 0$.

Suponha agora $u \in H^m(\Omega)$ e $Lu = 0$. Então $\langle u, v\rangle_m = \langle Lu, \varphi\rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$, tem-se $\langle u, v\rangle_m = 0$ para todo $v \in H_0^m(\Omega)$, isto é, $u$ é ortogonal a $H_0^m(\Omega)$.

$\square$

**Proposição 1.2.2** *O operador $L$ transforma $H_0^m(\Omega)$ sobre $H^{-m}(\Omega)$, de maneira isométrica.*

**Demonstração:** Seja $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que $Lu = 0$. Pela Proposição 1.2.1 tem-se $u \in H_0^m(\Omega) \cap (H_0^m(\Omega))^{\perp}$, portanto, $u = 0$. se $f \in H^{-m}(\Omega)$, pelo teorema de Riesz existe $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v\rangle = \langle v, u\rangle_m \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^m(\Omega),$$

e $\|f\|_{-m} = \|u\|_m$.segue-se que

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle \varphi, u\rangle_m = \langle Lu, \varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

portanto, tem-se $f = Lu$ com $u \in H_0^m(\Omega)$ e $\|Lu\|_{-m} = \|f\|_{-m} = \|u\|_m$.

**Proposição 1.2.3** *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^{-m}(\Omega)$.*

**Demonstração:** Dado $f \in H^{-m}(\Omega)$, seja $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que $Lu = f$. Se $(\varphi_n)$ é uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$, convergente para $u \in H_0^m(\Omega)$, a sequência $(L\varphi_n)$ converge para $Lu = f \in H^{-m}(\Omega)$, porque $L$ é uma isometria. Isto prova a proposição, visto que $L\varphi_n$ é uma função teste. □

**Corolário 1.2.1** *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$*

Para concluir está seção vamos mostrar a Desigualdade de Poincaré da qual obtém-se significantes propriedades para os espaços $H_0^m(\Omega)$. Vamos iniciar introdizindo a seguinte definição. Dizemos que o aberto $\Omega$ do $\mathbb{R}^n$ é limitado na direção $x_i$ se existe um intervalo aberto limitado (a,b) da reta tal que

$$\pi_i(\Omega) \subset (a, b)$$

onde $\pi_i$ é a projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre o eixo $x_i$.

**Teorema 1.2.1** ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ limitado em alguma direção $x_i$. Então*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \quad \textit{para todo} \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{1.2}$$

*onde $\pi_i(\Omega) \subset (a, b)$.*

**Demonstração:** Vamos mostrar a desigualdade 1.2 para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O resultado geral seguirá por densidade. Consideremos $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Tem-se

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

que acarreta, pela desigualdade de Schwarz, $|\varphi(t)|^2 \leq (b-a)\displaystyle\int_a^b |\varphi'(s)|^2 ds$, o que implica

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \leq (b-a)^2 \int_a^b |\varphi'(t)|^2 dt \tag{1.3}$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $\Omega$ é limitado na direção $x_1$. Consideremos a notação $x = (t, x')$ onde $x' = (x_2, x_3, ..., x_n)$ e seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_a^b |\varphi(t,x')|^2 dt \right) dx'. \tag{1.4}$$

Observemos que $\psi_{x'}(t) = \varphi(t,x')$ pertence a $\mathcal{D}((a,b))$ para cada $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Logo a desigualdade 1.3 com $\psi_{x'}$ implica

$$\int_a^b |\varphi(t,x')|^2 dt \leq (b-a)^2 \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x') \right|^2 dt.$$

Considerando esta desigualdade em 1.4 resulta:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x') \right|^2 dt \right) dx' = (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x) \right|^2 dx,$$

que é precisamente a desigualdade (1.2). A prova está completa.

$\square$

**Observação 1.2.1** *Consideremos em $H_0^1(\Omega)$, $\Omega$ limitado em alguma direção $x_i$ de $\mathbb{R}^n$, a expressão*

$$\|u\| = \left( \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Então a desigualdade de Poincaré diz que $\|u\|$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que em $H_0^1(\Omega)$ as normas $\|u\|$ e $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes. Com base neste resultado, em $H_0^1(\Omega)$, $\Omega$ limitado em alguma direção $x_i$ de $\mathbb{R}^n$, consideremos o produto escalar*

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

**Corolário 1.2.2** *Em* $H_0^m(\Omega)$*,* $\Omega$ *aberto limitado em alguma direção* $x_i$ *de* $\mathbb{R}^n$*, as normas*

$$\|u\| = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*e* $\|u\|_1$ *são equivalentes.*

**Demonstração:** Mostra-se que

$$\|u\|_1^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \leq C\|u\|^2 \tag{1.5}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $u \in H_0^m(\Omega)$. A outra desigualdade é imediata. Seja $u \in H_0^m(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m-1$. Da observação 1.2.1 resulta então

$$\int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u \right|^2 dx.$$

Isto acarreta,

$$\int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \leq C \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |D^\beta u|^2 dx \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq m-1.$$

Esta desigualdade implica (1.5) e a demonstração está concluída.

□

**Corolário 1.2.3** *Em* $W_0^{m,p}(\Omega)$*,* $\Omega$ *aberto limitado em alguma direçãox*$_i$*, de* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$*, as normas*

$$\|u\| = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

*e* $\|u\|_{m,p}$ *são equivalentes.*

**Demonstração:** Aplicando raciocínio análogo ao usado para obter 1.4, resulta

$$\int_a^b |\varphi(t)|^p dt \leq (b-a)\frac{p+q}{q} \int_a^b |\varphi'(t)| dt, \; \left(1 < p < \infty, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

e

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt \leq (b-a)\int_a^b |\varphi'(t)|dt, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}((a,b)).$$

e com argumentos semelhantes aos usados na demontração do Corolário 1.2.2, segue o resultado.

□

**Observação 1.2.2** *Consideremos em $H_0^m(\Omega)$, $\Omega$ aberto limitado em alguma direção $x_i$ de $\mathbb{R}^n$, a nomra introduzida na Observação 1.2.1. Então pelos argumentos usados na demontração do Teorema 1.2.1, obtemos que*

$$L : H_0^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega), \quad L = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

*é uma isometria linear. Em particular*

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

*é uma isometria linear.*

## 1.3 Operadores lineares

Seja $X$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cuja norma é denotada por $\|\cdot\|$.

**Definição 1.3.1** *Um operador linear em $X$ é um par ordenado $(D, A)$ onde $D$ é um subespaço de $X$ e $A : D \to X$ é uma aplicação linear, isto é:*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

*para cada $x, y \in D$ e cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. O operador é chamado limitado se $\sup\{\|Ax\|;\ x \in D,\ \|x\| \leq 1\} < +\infty$. Caso contrário, o operador $(D, A)$ é dito ilimitado.*

**Definição 1.3.2** *Seja $(D, A)$ um operador linear. Os conjuntos $D = D(A)$, $A(D) = R(A)$, $\{(x, y) \in X \times X;\ x \in D,\ y = Ax\} = gr(A)$ e $\{x \in D;\ Ax = 0\} = ker(A)$ são chamados: domínio, imagem, gráfico, e respectivamente núcleo do operador $(D, A)$.*

No que segue, por razões tradicionais, denotaremos um operador $(D, A)$ por $A : D(A) \subseteq X \to X$ e diremos que $D(A)$ é seu domínio, ou que $A$ é definido sobre $D(A)$, $R(A)$ é sua imagem e $\mathrm{gr}(A)$ é seu gráfico, em vez de domínio de $(D, A)$, imagem de $(D, A)$ e respectivamente gráfico de $(D, A)$. também, vamos escrever $A = B$ em vez de $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(B)$. Vamos denotar por $\mathcal{L}(X)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de $X$ em $X$. Sobre este espaço definimos $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)} : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = sup\{\|Tx\|;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$$

para cada $T \in \mathcal{L}(X)$. É fácil ver que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma norma em $\mathcal{L}(X)$, chamada norma do operador, em relação a qual este é um espaço de Banach e que, para $T \in \mathcal{L}(X)$,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = sup\{\|Tx\|;\ x \in X,\ \|x\| = 1\}.$$

A topologia da norma em $\mathcal{L}(X)$ é chamada topologia uniforme.

**Observação 1.3.1** *Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Pode-se facilmente verificar que $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ se e somente se, para cada $f \in X$, a equação $\lambda u - Au = f$ tem uma única solução $u = u(\lambda, f)$ e a aplicação $f \to u(\lambda, f)$ é contínua.*

Seja $X$ um espaço de Banach e $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador linear (limitado ou não) e seja $X(A)$ o subespaço linear fechado gerado por $D(A)$. Obviamente $X(A) = X$ se e somente se $D(A)$ é denso em $X$. Recordamos que o adjunto do operador linear $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o operador $A^* : D(A^*) \subseteq X^* \to X(A)^*$ definido por

$$D(A^*) = \{x^* \in X^*;\ \exists C > 0, \forall y \in D(A), |(x^*, Ay)| \leq C\|y\|\}$$

e, para cada $x^* \in D(A^*)$, $A^*x^*$ é a única extensão contínua para $X(A)$ da aplicação linear contínua $y \mapsto (x^*, Ay)$ de $D(A)$ para $\mathbb{K}$.

**Definição 1.3.3** *Seja $H$ um espaço de Hilbert real identificado com seu proprio dual topológico. O operador $A : D(A) \subseteq H \to H$ é chamado:*

**(i)** *auto-adjunto se $A = A^*$;*

**(ii)** *anti-adjunto se $A = -A^*$;*

**(iii)** *simétrico se $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para cada $x, y\ inD(A)$;*

**(iv)** *anti-simétrico se $\langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$ para cada $x, y \in D(A)$.*

**Lema 1.3.1** *Seja $H$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subseteq H \to H$ um operador densamente definido. Temos*

**(i)** *se $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, então $A$ é auto-adjunto se e somente se $A$ é simétrico;*

**(ii)** *se $(I \pm A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, então $A$ é anti-adjunto se e somente se é anti-simétrico.*

**Demonstração:** (i) Vamos assumir que $A$ é simétrico. Pela observação 1.6.2, o gráfico de $A$ está contido no gráfico de $A^*$. Para completar a demonstração é suficiente mostrar que $D(A^*) \subseteq D(A)$. Como $D(A)$ é denso em $H$, segue que, para cada $y \in D(A^*)$, existe $z \in H$ tal que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in D(A)$. Como $I - A$ é sobrejetivo, existe $w \in D(A)$ tal que$y - z = w - Aw$. Por outro lado, para cada $x \in D(A)$, temos

$$\langle Ax - x, y - w\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle Ax, w\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, w\rangle$$

$$= \langle x, z\rangle - \langle Ax, w\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, w\rangle$$

$$= \langle x, y - w + Aw\rangle - \langle Ax, w\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, w\rangle = 0.$$

Mas $I - A$ é sobrejetivo e portanto, a igualdade acima prova que $y = w$, o que implica que $y \in D(A)$ e $Ay = A^*y$. Provando assim (i). Como (ii) segue por argumentos análogos, a prova está completa.

□

Seja $X$ um espaço de Banach e $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador linear fechado. Recordamos que o conjunto resolvente de $A$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais a imagem de $\lambda I - A$ é densa em $X$ e $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$ é contínuo. Denotamos este conjunto por $\rho(A)$ e chamamos os elementos de valores regulares do operador $A$. Para $\lambda \in \rho(A)$, denote por $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Também recordamos que o espectro do operador $A$, denotado por, $\sigma(A)$, é definido por $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$. No próximo teorema assumimos que $X$ é um espaço de Banach complexo.

**Teorema 1.3.1** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador linear fechado. Então, para cada $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda; A) \in \mathcal{L}(X)$*

**Demonstração:** Se $\lambda \in \rho(A)$ então $Im(\lambda I - A) = D((\lambda I - A)^{-1})$ é denso em $X$ e existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq c\|x\|, \tag{1.6}$$

para cada $x \in D(A)$. A fim de mostrar que $R(\lambda I - A) = X$, seja $y \in X$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = y$. De 1.6 segue que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como $A$ é fechado, conluimos que $\lambda I - A$ também é fechado e consequentemente $x \in D(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - A)x = y$. Mas $\overline{R(\lambda I - A)} = X$ e portanto $R(\lambda I - A) = X$. A prova está completa.

□

# Capítulo 2

# Semigrupos de Operadores Lineares

## 2.1 Semigrupos Uniformemente Contínuos

Seja $X$ um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ o conjunto de todos operadores lineares limitados de $X$ para $X$. Dotado com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$, definida por

$$\|U\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ux\|$$

para cada $U \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach.

**Definição 2.1.1** *Uma família $\{S(t);\ t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares sobre $X$, ou simplesmente semigrupo, se:*

**(i)** $S(0) = I$

**(ii)** $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para cada $t,s \geq 0$.*

Se, além disso, ela satisfaz a condição de continuidade para $t = 0$

$$\lim_{t\downarrow 0} S(t) = I,$$

na topologia da norma em $\mathcal{L}(X)$, o semigrupo é chamado uniformemente contínuo.

**Exemplo 2.1.1** *Um primeiro exemplo significante de semigrupo uniformemente contínuo é dado por* $t \mapsto e^{tA}$*, onde* $e^{tA}$ *é o exponencial da matriz* $tA$*. Isto é, seja* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*, e seja* $S(t) = e^{tA}$ *para cada* $t \geq 0$*, onde*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

*Podemos facilmente ver que* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares. Mais que isto, cálculos simples mostram que* $t \to e^{tA}$ *é de classe* $C^1$ *de* $[0, +\infty)$ *para* $X$*, e satisfaz a equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{d}{dt}(S(t)) = AS(t) = S(t)A, \tag{2.1}$$

*para cada* $t \geq 0$*.*

O próximo exemplo mostra que existem semigrupos que não são uniformemente contínuos.

**Exemplo 2.1.2** *Seja* $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$ *o espaço de todas as funções* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *limitadas e uniformemente contínuas, dotado com a norma do supremo* $\|\cdot\|_\infty$*, e seja o semigrupo* $\{S(t);\ t \geq 0\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ *definido por*

$$[S(t)f](s) = f(t+s)$$

*para cada* $f \in X$ *e cada* $t, s \in \mathbb{R}_+$*. Pode-se facilmente verificar que* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *satisfaz (i) e (ii) na Definição 2.1.1, e portanto é um semigrupo de operadores lineares. Como neste caso específico, a continuidade uniforme do semigrupo é equivalente à equicontinuidade da bola unitaria em* $X$*, propriedade que obviamente não é satisfeita, o semigrupo não é uniformemente contínuo.*

**Definição 2.1.2** *O gerador infinitesimal, ou gerador do semigrupo de operadores lineares* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *é o operador* $A : D(A) \subseteq X \to X$*, definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(S(t)x - x) \right\}.$$

*e*

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(S(t)x - x).$$

*Equivalentemente, dizemos que $A$ gera $\{S(t);\ t \geq 0\}$.*

**Observação 2.1.1** *Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador de um semigrupo de operadores lineares então $D(A)$ é um subespaço vetorial de $X$ e $A$ é possivelmente um operador linear ilimitado.*

**Observação 2.1.2** *É facil ver que o gerador do semigrupo de operadores lineares no Exemplo 2.1.1 é $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, definido por $\mathcal{A}x = Ax$. Esta observação esclarece a relação entre semigrupos de operadores lineares e equações diferenciais lineares de 1ª ordem.*

**Exemplo 2.1.3** *O gerador do semigrupo no Exemplo 2.1.2 é dado por*

$$D(A) = \left\{ f \in X;\ \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{(f(t + \cdot) - f)}{t} = f' \ \textit{forte em}\ X \right\},$$

*e*

$$Af = f'.$$

Observemos que, se $f \in D(A)$, então $u(t,s) = [S(t)f](s) = f(t+s)$ satisfaz a equação diferencial parcial de 1ª ordem

$$\begin{cases} u_t = u_s \\ u(0,s) = f(s). \end{cases}$$

Portando, neste caso, temos a seguinte variante pontual de (2.1)

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax$$

para cada $x \in D(A)$ e cada $t \geq 0$.

**Proposição 2.1.1** *Se $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares então, para cada $t \geq 0$, $S(t)$ é invertível.*

**Demonstração:** Visto que

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t) - I = 0,$$

na topologia da norma de $\mathcal{L}(X)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

para cada $t \in (0, \delta]$. Portanto para cada $t \in (0, \delta]$, $S(t)$ é invertível. Seja $t > \delta$. Então existe $n \in \mathbb{N}^*$ e $\eta \in [0, \delta)$ tal que $t = n\delta + \eta$. Portanto $S(t) = S(\delta)^n S(\eta)$, e então $S(t)$ é invertivel. A prova está completa.

$\square$

## 2.2 Geradores de semigrupos uniformemente contínuos

**Teorema 2.2.1** *Um operador linear $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se $D(A) = X$ e $A \in \mathcal{L}(X)$.*

**Demonstração:** $\Rightarrow$. Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ uniformemente contínuo. Como

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t) = I$$

na topologia da norma de $\mathcal{L}(X)$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(t)dt - I \right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Note que a integral aqui é a integral de Riemann da função contínua $S : [0, \rho] \to \mathcal{L}(X)$, que é definida por uma simples analogia com o caso escalar. Consequentemente, o operador $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(t)dt$ é invertível e, portanto, $\int_0^\rho S(t)dt$ tem a mesma propriedade. Seja $h > 0$. Observemos que

$$\frac{1}{h}(S(h)-I)\int_0^\rho S(t)dt = \frac{1}{h}\int_0^\rho S(t+h)dt - \frac{1}{h}\int_0^\rho S(t)dt.$$

A mudança de variável $t+h=s$ na primeira integral do lado direito acarreta

$$\frac{1}{h}(S(h)-I)\int_0^\rho S(t)dt = \frac{1}{h}\int_h^{\rho+h} S(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^\rho S(s)ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} S(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h S(s)ds.$$

Então

$$\frac{1}{h}(S(h)-I) = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} S(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h S(s)ds\right)\left(\int_0^\rho S(t)dt\right)^{-1}.$$

Mas o lado direito da equação converge para $h\to 0$ por valores positivos, e portanto, o lado esquerdo goza da mesma propriedade. Como a convergência na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ implica a convergência pontual, fazendo $h\to 0$ por valores positivos, deduzimos

$$A = (S(\rho)-I)\left(\int_0^\rho S(t)dt\right)^{-1}.$$

Portanto $A\in\mathcal{L}(X)$, qua prova a necessidade.
$\Leftarrow$ . Seja $A\in\mathcal{L}(X)$, $t\geq 0$ e seja

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n,$$

onde $A^n = A\cdot A\cdot ...\cdot A$ $n$ vezes e$A^0 = I$.
Podemos facilmente ver que $\{S(t);\ t\geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares. A fim de provar que este semigrupo é uniformemente contínuo, observemos que

$$\|S(t)-I\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n - I\right\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}.$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\| e^{t\|A\|},$$

concluímos que

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t) = I,$$

na topologia da norma, e portanto $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. Para concluir a demonstração devemos mostrar que $A$ é o gerador deste semigrupo. Para isto, é suficiente verificar que

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{1}{t}(S(t) - I) - A \right\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Mas isto segue da desigualdade obvia

$$\left\| \frac{1}{t}(S(t) - I) - A \right\|_{\mathcal{L}(X)} = t \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{n!} A^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|},$$

completando assim a prova. □
Consideremos agora o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = Au + f \\ u(a) = \xi, (PC) \end{cases}$$

onde $A \in \mathcal{L}(X)$ e $f \in C([0,T];X)$.

**Teorema 2.2.2** *Para qualquer $(a, \xi, f) \in [0,T) \times X \times C([0,I];X)$, temos uma única solução $u \in C^1([a,T];X)$ dada pela chamada fórmula da variação de constantes, ou fórmula de Duhamel*

$$u(t,a,\xi,f) = S(t-a)\xi + \int_a^t S(t-s)f(s)ds$$

*para cada* $t \in [a,T]$, *onde* $\{S(t);\ t \geq 0\}$, *é o semigrupo uniformemente contínuo gerado por* $A$.

**Demonstração:** Ver Corduneanu [39],(4,36),p.65.

## 2.3 $C_0$-Semigrupos. Propriedades Gerais

Nesta sessão vamos introduzir uma classe de semigrupos de operadores lineares, estritamente maior que os semigrupos uniformemente contínuos, classe que se mostra muito útil no estudo de várias equações diferenciais parciais parabólicas e hiperbólicas.

**Definição 2.3.1** *Um semigrupo de operadores lineares* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *é chamado um semigrupo de classe* $C_0$, *ou* $C_0$*-semigrupo, se para cada* $x \in X$ *temos*

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x.$$

**Observação 2.3.1** *Cada semigrupo uniformemente contínuo é de classe* $C_0$ *mas não o contrário, como veremos no exemplo abaixo.*

**Exemplo 2.3.1** *Seja* $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$ *o espaço de todas as funções que são unifomemente contínuas e limitadas de* $\mathbb{R}_+$ *para* $\mathbb{R}_+$, *dotado com a norma do supremo* $\|\cdot\|_\infty$, *e seja* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *definido por*

$$[S(t)f](s) = f(t+s)$$

*para cada* $f \in X$ *e cada* $t, s \in \mathbb{R}_+$. *Sabemos do Exemplo 2.1.2 que* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *é um semigrupo. Além disso, é de classe* $C_0$. *Por outro lado, como mencionamos no Exemplo 2.1.2, ele não é uniformemente contínuo porque a bola unitária em* $X$ *não é equicontínua.*

**Teorema 2.3.1** *Se* $\{S(t);\ t \geq 0\}$ *é um* $C_0$*-semigrupo, então existe* $M \geq 1$, *e* $\omega \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{t\omega} \tag{2.2}$$

*para cada* $t \geq 0$.

**Demonstração:** Primeiro, iremos mostrar que existe $\eta > 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}}(X) \leq M \tag{2.3}$$

para cada $t \in [0, \eta]$. Para isto, vamos supor por contradição que este não é o caso. Então existe pelo menos um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ com a propriedade que, para cada $\eta > 0$ e cada $M \geq 1$, exista $t_{\eta,M} \in [0, \eta]$, tal que

$$\|S(t_{\eta,M})\|_{\mathcal{L}(X)} > M.$$

Tomando $\eta = 1/n$, $M = n$ e denotando $t_{\eta,M} = t_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$, deduzimos

$$\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} > n, \tag{2.4}$$

onde $t_n \in [0, 1/n]$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Recordando que, para cada $x \in X$, $\lim_{t \downarrow 0} S(t_n)x = x$, segue que a família $\{S(t_n);\ n \in \mathbb{N}^*\}$ de operadores lineares limitados é pontualmente limitada, isto é, para cada $x \in X$, o conjunto $\{S(t_n)x;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ é limitado. Pelo "princípio da limitação uniforme"(veja Dunford and Schwartz [49], corolário 21, p.66), segue que esta família é limitada na norma dos operadores uniformes $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ que contradiz (2.4). Esta contradição pode ser eliminada somente se (2.3) acontecer.
Agora, seja $t > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}^*$ e $\delta \in [0, \eta]$, tal que $t = n\eta + \delta$. Temos

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S^n(\eta)S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(\eta)\|^n_{\mathcal{L}(X)}\|S(\delta)\| \leq MM^n.$$

Mas $n = \frac{t-\delta}{\eta} \leq \frac{t}{\eta}$ e portanto $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{t\omega}$, onde $\omega = \frac{1}{\eta} \ln M$. A prova está completa.

$\square$

**Observação 2.3.2** *Se $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo cujo gerador é $A$, então (2.2) vale com $M = 1$ e $w = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.*

**Definição 2.3.2** *Um $C_0$-semigrupo, $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito do tipo $(M, \omega)$ com $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$, se para cada $t \geq 0$, temos*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

*Um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é chamado um $C_0$-semigrupo de contração, se é do tipo $(1,0)$, isto é, se para cada $t \geq 0$ temos*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

**Corolário 2.3.1** *Se $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um $C_0$-semigrupo, então a aplicação $(t,x) \mapsto S(t)x$ é contínua de $[0,+\infty) \times X$ para $X$.*

**Demonstração:** Sejam $x, y \in X$, $t \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}^*$ com $t+h \geq 0$. Vamos separar em dois casos: $h > 0$, ou $h < 0$. Se $h > 0$, temos

$$\|S(t+h)y - S(t)x\|$$

$$\leq \|S(t+h)y - S(t+h)x\| + \|S(t+h)x - S(t)x\|$$

$$\leq \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|y - x\| + \|S(t+h)x - S(t)x\|$$

$$\leq Me^{(t+h)w}\|x - y\| + \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(h)x - x\|,$$

que mostra que

$$\lim_{(\tau,y)\to(t,x)} S(\tau)y = S(t)x.$$

Se $h < 0$, pelo Teorema 2.3.1, deduzimos

$$\|S(t+h)y - S(t)x\| = \|S(t+h)y - S(t+h)S(-h)x\|$$

$$\leq \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|y - S(-h)x\|$$

$$\leq Me^{(t+h)w}(\|y - x\| + \|S(-h)x - x\|),$$

o que implica que

$$\lim_{(\tau,y)\to(t,x)} S(\tau)y = S(t)x.$$

A prova está completa.

$\square$

Algumas propriedades básicas dos $C_0$-semigrupos estão listadas abaixo.

**Teorema 2.3.2** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ o gerador do $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$. Então*

**(i)** *para cada $x \in X$ e cada $t \geq 0$, temos*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x;$$

**(ii)** *para cada $x \in X$ e cada $t \geq 0$, temos*

$$\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A) \text{ e } A\left(\int_0^t S(\tau)x d\tau\right) = S(t)x - x;$$

**(iii)** *para cada $x \in D(A)$ e cada $t \geq 0$, temos $S(t)x \in D(A)$. Além disso, a aplicação $t \mapsto S(t)x$ é de classe $C^1$ em $[0, +\infty)$, e satisfaz*

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax;$$

**(iv)** *para cada $X \in D(A)$ e cada $0 \leq s \leq t < +\infty$, temos*

$$\int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = S(t)x - S(s)x.$$

**Demonstração:** A fim de provar (i), observemos que

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau - S(t)x\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|S(\tau)x - S(t)x\| d\tau.$$

A conclusão segue do Corolário 2.3.1.
Seja $x \in X$, $t > 0$ e $h > 0$. Observamos que

$$\frac{1}{h}(S(h) - I)\int_0^t S(\tau)x d\tau = \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau + h) - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)x d\tau.$$

A mudança de variável $\tau + h = s$ na primeira integral do lado direito acarreta

$$\frac{1}{h}(S(h) - I)\int_0^t S(\tau)x d\tau = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(s)x ds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)x ds$$

$$= -\frac{1}{h}\int_0^h S(s)x ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x ds.$$

Desta igualdade e de (i), deduzimos que existe

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(S(h) - I)\int_0^t S(\tau)x d\tau = S(t)x - x,$$

o que prova (ii).
A seguir, seja $x \in D(A)$, $t \geq 0$ e $h \geq 0$. Temos

$$\left\| \frac{1}{h}(S(t+h)x - S(t)x) - S(t)Ax \right\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{1}{h}(S(h)x - x) - Ax \right\|,$$

desigualdade que prova que $S(t)x \in D(A)$, $t \mapsto S(t)x$ é diferenciável pela direita, e que

$$\frac{d^+}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.5}$$

Por outro lado, para cada $t > 0$ e $h < 0$ com $t + h \geq 0$, temos

$$\left\| \frac{1}{h}(S(t+h)x - S(t)x) - S(t)Ax \right\|$$

$$\leq \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{1}{h}(x - S(-h)x) - S(-h)Ax \right\|$$

$$\leq \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \left( \left\| -\frac{1}{h}(S(-h)x - x) - Ax \right\| + \|S(-h)Ax - Ax\| \right).$$

Esta desigualdade mostra que $t \mapsto S(t)x$ é diferenciável pela esquerda também. De (2.5) e da continuidade da função $t \mapsto S(t)Ax$ sobre $[0, +\infty)$, deduzimos que $t \mapsto S(t)x$ é de classe $C^1$ sobre $[0, +\infty)$, o que completa a prova de (iii).
Como (iv) segue de (iii) integrando de $s$ a $t$ dos dois lados em (2.5), a prova esta completa.

$\square$

## 2.4 O Gerador Infinitesimal

Nesta sessão vamos provar duas propriedades básicas do gerador de um $C_0$-semigrupo: a densidade do domínio e o fechamento do gráfico.
Primeiro, vamos recordar o seguinte:

**Definição 2.4.1** *Um operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ é dito fechado, se seu gráfico é fechado em $X \times X$.*

**Teorema 2.4.1** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ o gerador de um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$. Então $D(A)$ é denso em $X$, e $A$ é um operador fechado.*

**Demonstração:** Seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então, por virtude de (ii) e (i) no Teorema 2.3.2, temos

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_o^\varepsilon S(\tau)x d\tau \in D(A)$$

e

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_o^\varepsilon S(\tau)x d\tau = x.$$

Consequentemente $D(A)$ é denso em $X$.
Agora, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em $D(A)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

De (iv) no Teorema 2.3.2, segue que

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(\tau)Ax_n d\tau$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e cada $h > 0$. Passando para o limite nesta equação, obtemos

$$S(h)x - x = \int_0^h S(\tau)y d\tau.$$

Por virtude de (i) no Teorema 2.3.2, segue que existe

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_o^h S(\tau)y d\tau = y.$$

Desta relação, e do procedimento anterior, deduzimos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. A prova está completa. $\square$

Continuamos com a unicidade.

**Teorema 2.4.2** *Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador de dois $C_0$-semigrupos $\{S(t);\ t \geq 0\}$, e $\{T(t);\ t \geq 0\}$, então $S(t) = T(t)$ para cada $t \geq 0$.*

**Demonstração:** Seja $x \in D(A)$, $t > 0$ e seja $f : [0, t] \to X$ dada por

$$f(s) = S(t - s)T(s)x$$

para cada $s \in [0, t]$. Por (iii) no Teorema 2.3.2, segue que $f$ é diferenciável sobre $[0, t]$, e que

$$f'(s) = -AS(t - s)T(s)x + S(t - s)AT(s)x$$

$$= -AS(t - s)T(s)x + AS(t - s)T(s)x = 0$$

para cada $s \in [o, t]$. Portanto $f$ é constante. Então temos $f(0) = f(t)$, ou equivalentemente $S(t)x = T(t)x$ para cada $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em $X$, e $S(t)$, $T(t)$ são operadores lineares limitados, podemos facilmente concluir que $S(t)x = T(t)x$ para cada $x \in X$, o que completa a prova. $\square$

**Observação 2.4.1** *O Teorema 2.3.2 (iii), e o Teorema 2.4.2, asseguram que, para cada $\xi \in D(A)$, a função $u : [0, +\infty) \to X$, definida por $u(t) = S(t)\xi$ para cada $t \geq 0$, é a única solução clássica do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = \xi \end{cases} \tag{2.6}$$

O exemplo abaixo mostra que, se $\xi \in X$, mas $\xi \notin D(A)$, a função $u$, definida acima, não é necessáriamente diferenciável em $[0, +\infty)$.

**Exemplo 2.4.1** *Seja $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$ o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ limitadas e uniformemente contínuas, dotado com a norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$, e definamos o operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ por $D(A) = \{u \in X;\ u' \in X\}$, e $Au = u'$ para cada $u \in D(A)$. tomando qualquer função não diferenciável $\xi \in C_{ub}(\mathbb{R}_+)$, podemos facilmente observar que (2.6) não tem solução clássica. De fato, neste caso (PC) pode ser reescrito como*

$$\begin{cases} u_t = u_s \\ u(0, s) = \xi(s) \end{cases}$$

*Cuja única solução clássica (se existir alguma) é dada por $u(t, s) = \xi(t + s)$ para cada $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$*

Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador linear e $n \in \mathbb{N}$. Definamos a $n$-ésima potência de $A$ por:

$$\begin{cases} D(A^0) = X \\ A^0 = I \end{cases}, \begin{cases} D(A^1) = D(A) \\ A^1 = A \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1});\ A^{n-1}x \in D(A)\} \\ A^n = AA^{n-1} \end{cases}$$

para $n \geq 2$.

**Teorema 2.4.3** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ o gerador de um $C_0$-semigrupo. Então $\cap_{n\geq 0} D(A^n)$ é denso em $X$.*

**Demonstração:** Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D(A^n)$ é um subespaço vetorial em $X$. Portanto, $\cap_{n\geq 0}(D^n)$ também é um subespaço vetorial em $X$. Seja $x \in X$, e seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função $C^\infty$ para o qual existe um intervalo $[a,b] \subset (0,+\infty)$ tal que $\varphi(t) = 0$ para cada $t \notin [a,b]$. Definimos

$$x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)S(t)xdt,$$

e observamos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{h}(S(h) - I)x(\varphi)$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \varphi(t)S(t+h)xdt - \int_0^\infty \varphi(t)S(t)xdt\right)$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \varphi(t-h)S(t)xdt - \int_0^\infty \varphi(t)S(t)xdt\right)$$

Para $s \in (-\infty, a)$, temos $\varphi(s) = 0$, e consequentemente

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{h}(S(h) - I)x(\varphi)$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \varphi(t-h)S(t)xdt - \int_0^\infty \varphi(t)S(t)xdt\right)$$

$$= \int_0^\infty \lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h} S(t)xdt = -x(\varphi').$$

Portanto, $X(\varphi) \in D(A)$ e $Ax(\varphi) = -x(\varphi')$. Repetindo o argumento acima, pode-se provar por indução que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x(\varphi) \in D(A^n)$ e, além disso, $A^n x(\varphi) = (-1)^n x(\varphi^{(n)})$. Consequentemente, $x(\varphi) \in \cap_{n\geq 0} D(A^n)$. Agora, seja $\varphi$ uma função como acima, tal que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

Seja $\varepsilon \geq 0$, e definamos $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ por

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Obviamente, $\varphi_\varepsilon$ é de classe $C^\infty$, $\varphi_\varepsilon(t) = 0$ para $t \notin [\varepsilon a, \varepsilon b]$, e

$$\int_0^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Observemos que

$$\|x(\varphi_\varepsilon) - x\| = \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)(S(t)x - x)dt \right\|$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \|S(t)x - x\| dt \leq \sup_{t \in [\varepsilon a, \varepsilon b]} \|S(t)x - x\|.$$

Esta desigualdade mostra que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x(\varphi_\varepsilon) = x$$

e consequentemente temos $x \in \overline{\cap_{n\geq 0} D(A^n)}$. A prova esta completa.

$\square$

**Corolário 2.4.1** *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então, para cada $\xi \in D(A^n)$ e cada $t \geq 0$, temos $S(t)\xi \in D(A^n)$, a função $u : [0, +\infty) \to X$, $u(t) = S(t)\xi$ é de classe $C^n$ e é uma solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = A^n u(t) & , t \geq 0 \\ u^{(k)}(0) = A^k \xi & , k = 0, 1, ..., n-1. \end{cases}$$

**Demonstração:** Observemos que para $n = 1$ a conclusão segue de (iii) no Teorema 2.3.2. Assumindo que a propriedade é verdadeira para $n \in \mathbb{N}^*$ e seja $\xi \in D(A^{n+1})$. Como $D(A^{n+1}) \subseteq D(A^n)$, a hipótese indutiva acarreta $u^{(n)}(t) = A^n u(t)$ para cada $t \geq 0$. Seja $t \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$ com $t + h \geq 0$. Temos

$$\frac{1}{h}\left(u^{(n)}(t+h) - u^{(n)}(t)\right) = \frac{1}{h}(A^n S(t+h)\xi - A^n S(t)\xi)$$

$$= \frac{1}{h}(S(t+h)A^n\xi - S(t)A^n\xi)$$

pois $\xi \in D(A^n)$, enquanto, para cada $\tau \geq 0$, $A^n$ e $S(\tau)$ comutam em $D(A^n)$. Mas $A^n\xi \in D(A)$, e consequentemente existe

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{h}(S(t+h)A^n\xi - S(t)A^n\xi) = AS(t)A^n\xi.$$

Passando para o limite quando $h \to 0$ na equação anterior, e tendo em conta que $A^n\xi \in D(A)$, deduzimos

$$u^{(n+1)}(t) = AS(t)A^n\xi = A^{(n+1)}S(t)\xi.$$

Claramente $u^k(0) = A^k\xi$ para $k = 0, 1, 2, ...n$ e isto completa a prova.

$\square$

## 2.5 Teorema de Hille-Yosida.

O objetivo desta seção é provar um dos resultados mais importantes na teoria de $C_0$-semigrupos: o Teorema de Hille-Yosida. Mais precisamente, vamos apresenter uma condição necessária e suficiente para que um operador linear $A$ gere um $C_0$-semigrupo de contrações.

**Teorema 2.5.1** *(Hille-Yosida) Um operador linear $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador de um $C_0$-semigrupo de contrações se e somente se:*

**(i)** *$A$ é densamente definido e fechado e*

**(ii)** $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ *e para cada* $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**Observação 2.5.1** *Como $(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1}$ sempre que um dos lados da igualdade é bem definido, segue que (ii) é equivalente a:*
*(ii') para cada $\lambda > 0$ temos $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e*

$$\|(I - \lambda^{-1}A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

*Além disso, observemos que se $A$ é densamente definido e satisfaz*
*(jj) para cada $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ é invertível com inversa contínua e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda},$$

*então satisfaz (i) e (ii). De fato, por (jj), deduzimos facilmente que $(I - A)^{-1}$ é fechado. Então $I - A$ é fechado e portanto $A$ tem a mesma propriedade, que prova (i). Como (jj) claramente implica (ii) a prova está completa.*

Vamos agora à prova do Teorema.
**Demonstração:** Começando com a necessidade.
Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ o gerador de um $C_0$-semigrupo de contrações $\{S(t); t \leq 0\}$. Pelo Teorema 2.4.1, $A$ é densamente definido e fechado. Assim (i) vale. A fim de provar (ii), seja $\lambda > 0$, $x \in X$, e definamos

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt.$$

Note que a integral do lado direito da igualdade acima é convergente. De fato, para cada $a, b \geq 0$, $a \leq b$, temos

$$\left\| \int_a^b e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| dt$$

$$\leq \int_a^b e^{-\lambda t}\|x\|dt = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda}\|x\|.$$

Portanto, estamos nas hipóteses do teste de Cauchy, e assim a integral é convergente. Claramente $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ e

$$\|R(\lambda)x\| \leq \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt \right\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Por isso

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Provaremos a seguir que $R(\lambda)$ coincide com$R(\lambda; A)$. Para isso, mostraremos que $R(\lambda)$ é o inverso do operador $\lambda I - A$. Seja $x \in X,\ \lambda > 0$ e $h > 0$. Temos

$$\frac{1}{h}(S(h) - I)R(\lambda)x$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt$$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t} S(t)xdt$$

Como o lado direito da igualdade acima converge para $\lambda R(\lambda)x - x$, segue que $R(\lambda)x \in D(A)$, e

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I,$$

o que prova que

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I.$$

Então, $R(\lambda)$ é a inversa a direita de $\lambda I - A$. Agora, seja $x \in D(A)$. Observemos que

$$R(\lambda)Ax = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Axdt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}(S(t)x)dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}S(t)x - x + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Esta igualdade pode ser reescrita como

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I,$$

o que mostra que $R(\lambda)$ é a inversa a esquerda de $\lambda I - A$, e isto completa a demonstração da necessidade.

**Observação 2.5.2** *Usando argumentos análogos pode-se provar que, se $A$ gera um $C_0$-semigrupo de contrações, então $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re\lambda > 0$, temos*

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Para provar a suficiência, precisaremas de alguns lemas preliminares. Primeiro, observemos que, por (i) e Teorema 1.3.1, segue que, para cada $\lambda > 0$, $R(\lambda; A) \in \mathcal{L}(X)$.

**Definição 2.5.1** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador linear que satisfazendo (i) e (ii) no Teorema 2.5.1, e seja $\lambda > 0$. O operador $A_\lambda : X \to X$, definido por $A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)$, é chamado aproximação de Yosida de $A$.*

**Lema 2.5.1** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador linear que satisfaz (i) e (ii) no Teorema 2.5.1. Então:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \tag{2.7}$$

*para cada $x \in X$,*

$$A_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda x \tag{2.8}$$

*para cada $x \in X$, e*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \tag{2.9}$$

*para cada $x \in D(A)$.*

**Demonstração:** Seja $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$. Temos

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|AR(\lambda; A)x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|,$$

e consequentemente

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$$

para cada $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em $X$ e $\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, pela desigualdade, deduzimos (2.7). Para verificar (2.8), observemos que

$$\lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda(\lambda I - A)R(\lambda; A) = \lambda AR(\lambda; A) = A_\lambda.$$

Finalmente, se $x \in D(A)$, por (2.7), temos

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda; A)x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)Ax = Ax,$$

o que conclui a demonstração.

□

**Lema 2.5.2** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ um operador que satisfaz (i) e (ii) no Teorema 2.5.1. Então, para cada $\lambda > 0$, $A_\lambda$ é o gerador de um semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$ satisfazendo*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \tag{2.10}$$

*para cada $t \geq 0$. Além disso, para cada $x \in X$ e cada $\lambda, \mu > 0$, temos*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \tag{2.11}$$

**Demonstração:** Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, pelo Teorema 2.2.1, segue que $A$ gera um semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$. A fim de verificar 2.10, observemos que, por virtude de 2.8 e (ii), temos

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A) - t\lambda I}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$\leq e^{t\lambda^2 \|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X)}} e^{-t\lambda} \leq e^{t\lambda} e^{-t\lambda} = 1.$$

Como $A_\lambda$, $A_\mu$ e $e^{tA_\mu}$ comutam, temos

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x \right) ds \right\|$$

$$\leq \int_0^1 t \left\| e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) \right\| ds \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|,$$

o que completa a prova.

□

Vamos agora à prova da suficiência do Teorema 2.5.1.
De (2.9) e (2.11), segue que, para cada $t \geq 0$, existe um operador linear $S(t) : D(A) \subseteq X \to X$ tal que, para cada $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x = S(t)x$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. Por (2.10) deduzimos que

$$\|S(t)x\| \leq \|x\|$$

para cada $t \geq 0$ e $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em $X$, segue que $S(t)$ pode ser extendido por continuidade para todo o espaço X. É fácil ver que a família de operadores lineares limitados assim obtida é um semigrupo, denotado por simplicidade $\{S(t);\ t \geq 0\}$. Claramente ele satisfaz

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Além disso, para cada $t > 0$ e $x, y \in X$, temos

$$\|S(t)x - x\|$$

$$\leq \|S(t)x - S(t)y\| + \|S(t)y - e^{tA_\lambda}y\| + \|e^{tA_\lambda}y - y\| + \|y - x\|$$
$$\leq \|S(t)y - e^{tA_\lambda}y\| + \|e^{tA_\lambda}y - y\| + 2\|y - x\|.$$

Seja $T > 0$ e $\varepsilon > 0$. Fixe $y = x_\varepsilon \in D(A)$, com $\|x - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, e um $\lambda$ suficientemente grande, tal que

$$\|S(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

para cada $t \in [0, T]$. Por esta desigualdade deduzimos que

$$\|S(t)x - x\| \leq 3\varepsilon + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\|. \tag{2.12}$$

Já que $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$ é um semigrupo unifomemente contínuo, para o mesmo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \varepsilon$ para cada $t \in (0, \delta(\varepsilon))$. Consequentemente

$$\|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\| \leq \|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}(X)}\|x_\varepsilon\| \leq \varepsilon\|x_\varepsilon\|$$

para cada $t \in (0, \delta(\varepsilon))$. Como $\{x_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ é limitado, esta desigualdade, juntamente com (2.12), mostra que $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um semigrupo de classe $C_0$. Para concluir a demonstração, temos que mostrar que o gerador, $B : D(B) \subseteq X \to X$, deste semigrupo coincide com $A : D(A) \subseteq X \to X$. Para isto, seja $x \in D(A)$ e $h > 0$. Temos

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}A_\lambda x = S(t)Ax$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. De fato,

$$\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - S(t)Ax\| \leq \|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - e^{tA_\lambda}Ax\| + \|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\|$$

$$\leq \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\|.$$

Mas esta relação, juntamente com (2.9) e com a conclusão parcial acima, mostram que

$$S(h)x - x = \lim_{\lambda \to \infty} \left(e^{hA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^h e^{tA_\lambda}A_\lambda x dt = \int_0^h S(t)Axdt.$$

Dividindo os dois lados da equação por $h$ e fazendo $h \to 0$ por valores positivos, deduzimos que $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Finalmente, mostraremos que $D(A) = D(B)$. Como $B$ é o gerador de um $C_0$-semigrupo de contrações, segue que $1 \in \rho(B)$. Portanto $I - B$ é invertível e $(I - B)^{-1}X = D(B)$. Como $(I - B)D(A) = (I - A)D(A)$ e, por (ii), $(I - A)D(A) = X$, segue que $(I - B)D(A) = X$, ou equivalentemente $(I - B)^{-1}X = D(A)$. Consequentemente $D(A) = D(B)$, o que completa a prova do Teorema 2.5.1.

$\square$

# Capítulo 3

# Existencia e Unicidade de Solução Branda para Equações Diferencias Funcionais com Retardo Finito

## 3.1 O Operador de Laplace com Condição de Dirichlet na Fronteira

Consideremos a equação do calor em um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta$ é o Laplaciano. Esta equação diferencial parcial pode ser reescrita como uma equação diferencial ordinária da forma

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

em um espaço de Banach de dimensão infinita $X$ convenientemente escolhido, a fim de que o operador linear ilimitado $A : D(A) \subseteq X \to X$ gere um $C_0$-semigrupo de contrações. Apresentamos a seguir algumas possíveis escolhas clássicas do espaço $X$.

**Exemplo 3.1.1** *O conjunto $H^{-1}(\Omega)$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $X = H^{-1}(\Omega)$, e defi-*

*namos $A : D(A) \subseteq X \to X$ por*

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega) \\ Au = \Delta u \end{cases}$$

*para cada $u \in D(A)$. No que segue $H_0^1(\Omega)$ é dotado com a norma usual de $H^1(\Omega)$, definida por*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Teorema 3.1.1** *O operador $A$, definido acima, é o gerador de um $C_0$-semigrupo de contrações. Além disso, $A$ é auto-adjunto e $\|\cdot\|_{D(A)}$ é equivalente com a norma do espaço $H^1(\Omega)$, onde $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$*

**Demonstração:** Por virtude da Proposição 1.2.2, sabemos que $I - \Delta$ é o isomorfismo canônico entre $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$. Denotemos $F = (I - \Delta)^{-1}$ que é uma isometria entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Consequentemente

$$\langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} = \langle Fu, Fv\rangle_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.1}$$

para cada $u, v \in H^{-1}(\Omega)$. Seja $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} \langle u, Fv\rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla u \nabla(Fv) d\omega + \int_\Omega uFv d\omega \\ &= \int_\Omega u(-\Delta(Fv)) d\omega + \int_\Omega uFv d\omega \\ &= \int_\Omega u(I - \Delta)F(v) d\omega = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

De (3.1), tendo em conta que $F(I - A) = I$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} &= \langle u - \Delta u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} - \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} \\ = \langle F(u - \Delta u), Fv\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} &= \langle u, Fv\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

De (3.2), temos

$$\langle -\Delta u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)}$$

Portanto $A$ é simétrico. Mas $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega))$, e portanto, do Lema 1.3.1, segue que $A$ é auto-adjunto. Tomando $u = v$ na igualdade acima, obtemos

$$\langle -Au, u\rangle_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \geq 0. \tag{3.3}$$

A observação 1.2.2 mostra que, para $\lambda > 0$, temos $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega))$, enquanto (3.3) implica que, para $\lambda > 0$, $\langle \lambda u - Au, u\rangle_{H^{-1}(\Omega)} \geq \lambda \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$. Consequentemente $\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda}$. Como $H_0^1(\Omega)$ é denso em $H^{-1}(\Omega)$, estamos nas hipóteses do Teorema 2.5.1, de onde segue que $A$ gera um $C_0$-semigurpo de contrações sobre $H^{-1}(\Omega)$. Finalmente, por (iv) no Corolário 3.5.1 (tenho q ver este corolário) e (3.3), segue que $\|\cdot\|_{D(A)}$ é equivalente com a norma do espaço $H^1(\Omega)$. A prova está completa.

$\square$

**Exemplo 3.1.2** *O conjunto $L^2(\Omega)$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $X = L^2(\Omega)$, e consideremos o operador $A$ sobre $X$, definido por:*

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\} \\ Au = \Delta u \end{cases}$$

*para cada $u \in D(A)$.*

**Teorema 3.1.2** *O operador linear $A$, definido acima, é o gerador de um $C_0$-semigrupo de contrações. Além disso, $A$ é auto-adjunto, e $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ é continuamente contido em $H_0^1(\Omega)$. Se $\Omega$ é limitado com fronteira $C^1$, então $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ compactamente imerso em $L^2(\Omega)$.*

**Demonstração:** Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, e $C_0^\infty(\Omega) \subseteq D(A)$, segue que $A$ é densamente definido. Seja $\lambda > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$ é continuamente imerso em $H^{-1}(\Omega)$, e $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é a aplicação dual com respeito a norma do gradiente em $H_0^1(\Omega)$, temos:

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle v, \Delta u\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Pelo Teorema 3.1.1, sabemos que, para todo $\lambda > 0$ e todo $f \in L^2(\Omega)$ (note que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$) a equação

$$\lambda u - \Delta u = f$$

tem uma única solução $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Então, $\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda - f$ em $L^2(\Omega)$, o que mostra que $u_\lambda \in D(A)$, e $\lambda u_\lambda - Au_\lambda = f$. Tomando o produto interno de $L^2(\Omega)$ em ambos os lados da igualdade acima po $u_\lambda$, e tendo em conta que, por (3.4), temos $\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0$ para cada $u \in D(A)$, deduzimos que

$$\lambda \|u_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle f, u_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)},$$

desigualdade que mostra que $\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$. Finalmente, de (3.4) e Lema 1.3.1, segue que $A$ é auto-adjunto. Visto que ambas inclusões $D(A) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ são contínuas, e a última é compacta sempre que $\Omega$ é limitado (ver teorema **??**), isto conclui a demonstração.

$\square$

## 3.2 O Problema de Cauchy Não Homogêneo

Nesta seção vamos considerar o problema não homogêneo

$$\begin{cases} u' = Au + f \\ u(a) = \xi \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $A$ é como antes, $\xi \in X$, e $f \in L^1((a,b); X)$.

**Definição 3.2.1** *A função $u : [a,b] \to X$ é dita solução clássica, ou solução $C^1$, do problema (3.5), se $u$ é contínua em $[a,b]$, continuamente diferenciável em $(a,b]$, $u(t) \in D(A)$ para cada $t \in (a,b]$ e satisfaz $u' = Au + f$ para cada $t \in (a,b]$ e $u(a) = \xi$.*

**Definição 3.2.2** *A função $u : [a,b] \to X$ é dita solução forte, ou solução absolutamente contínua, do problema (3.5), se $u$ é absolutamente contínua em $[a,b]$, $u' \in \mathcal{L}^1(a,b; X)$, $u(t) \in D(A)$ q.t.p. para $t \in (a,b)$, e satisfaz $u' = Au + f$ q.t.p. para $t \in (a,b)$ e $u(a) = \xi$.*

**Observação 3.2.1** *Cada solução clássica de (3.5) é uma solução forte do mesmo problema, mas a recíproca não é verdadeira.*

**Observação 3.2.2** *Como já vimos, se $A$ gera um semigrupo uniformemente contínuo e $f$ é contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}^n$, então uma função $u : [a,b] \to X$ é uma solução clássica do problema não homogêneo (3.5) se e somente se é dada pela chamada fómula da variação de constantes*

$$u(t) = S(t-a)\xi + \int_a^t S(t-s)f(s)ds \tag{3.6}$$

*para cada $t \in [a,b]$. Exemplos simples mostram que, no caso em que $X$ é de dimensão infinita e $A$ é ilimitado, isto é, gera apenas um $C_0$-semigrupo, o problema (3.5) pode não ter solução clássica, e isto independentemente do quão regular é a $f$ dada.*

**Teorema 3.2.1** *(Duhamel Principle) Cada solução forte de* (3.5)*é dada por* (3.6)*. Em particular, cada solução clássica do problema* (3.5) *e dada por* (3.6)*.*

**Demonstração:** Seja $u$ uma solução forte de (3.5), $t \in (a, b]$ e definamos $g : [a, t] \to X$ por $g(s)S(t-s)u(s)$ para cada $s \in [a, t]$. Então $g$ é diferenciável q.t.p. em $(a, t)$, sua derivada pertence a $L^1((a, t); X)$, e

$$g'(s) = -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) =$$

$$-AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s) + S(t-s)f(s) = S(t-s)f(s)$$

q.t.p. para $s \in (a, t)$. Como $f \in L^1(a, b; X)$, $s \mapsto S(t-s)f(s)$ é integrável sobre $[a, t]$. Integrando a equação acima de $a$ até $t$, obtemos (3.6).

□

Do Teorema 3.2.1 deduzimos o seguinte resultado de unicidade.

**Corolário 3.2.1** *Para cada $\xi \in X$ e cada $f \in L^1(a, b; X)$, o problema* (3.5) *pode ter no máximo uma solução clássica (forte).*

As considerações anteriores justificam o porquê, no caso de espaços $X$ de dimensão infinita, a fórmula da variação de constantes é "promovida"à definição. Mais precisamente, introduzimos:

**Definição 3.2.3** *A função $u : [a, b] \to X$, definida por* (3.6) *é dita solução branda, ou solução $C^0$, do problema* (3.5)*.*

A partir de agora, focamos nossa atenção em algumas condições suficientes a fim de que uma solução $C^0$ de (3.5) seja uma solução $C^1$, ou solução forte do mesmo problema. Começamos com um exemplo que mostra que a continuidade de $f$ por si só nãe é suficiente para que a solução $C^0$, dada por (3.6), seja uma solução forte e, menos ainda, uma solução $C^1$.

**Exemplo 3.2.1** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ o gerador de um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, para o qual existe $\eta \in X$ tal que $S(t)\eta \notin D(A)$ para cada $t \geq 0$. Definamos $f(s) = S(s)\eta$ para cada $s \in [0, T]$ e observemos que $f$ é contínua. Por outro lado, o problema* (3.5) *com $\xi = 0$ não tem solução forte, e então não tem solução clássica. De fato, se $u$ é uma solução forte do problema (3.5), por virtude da Observação 3.2.2, $u$ é dado por*

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)S(s)\eta ds = tS(t)\eta$$

*para cada $\in [0,T]$, Função que claramente não é diferenciável q.t.p. em $[0,T]$.*

**Teorema 3.2.2** *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ o gerador de um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, Seja $f \in L^1((a,b);X)$ contínua em $(a,b)$, e seja*

$$v(t) = \int_a^t S(t-s)f(s)ds$$

*para $t \in [a,b]$. Se pelo menos uma das condições abaixo é satisfeita*

**(i)** *$v$ é continuamente diferenciável em $(a,b)$;*

**(ii)** *$v(t) \in D(A)$ para cada $t \in (a,b)$, e $t \to Av(t)$ é contínua em $(a,b)$*

*então, para cada $\xi \in D(A)$, (3.5) tem uma única soluções clássica. Se existe $\xi \in D(A)$ tal que, (3.5) tem uma solução clássica, então $v$ satisfaz (i) e (ii).*

**Demonstração:** Observemos que, para cada $t \in (a,b)$ e $h > 0$, temos

$$\frac{1}{h}(S(h) - I)v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \tag{3.7}$$

Vamos supor que (i) vale. Como $f$ é contínua, e $v$ é continuamente diferenciável em $(a,b)$, segue que o lado direito da igualdade converge para h tendendo a 0. Portanto, o lado esquerdo converge também, e consequentemente $v(t) \in D(A)$, e

$$v'(t) = Av(t) + f(t) \tag{3.8}$$

para cada $t \in (a,b)$. Se (ii) vale, então $v$ é diferenciável a direita em $(a,b)$, e sua derivada direita é contínua em $(a,b)$. Como $v$ claramente é contínua, segue que $v$ é continuamente diferenciável em $(a,b)$, e satisfaz (3.8). Como $v(a) = 0$, segue que, para cada $\xi \in D(A)$, $t \mapsto u(t) = S(t-s)\xi + v(t)$ para $t \in [a,b]$ é uma solução clássica de (3.5). Suponhamos agora que existe $\xi \in D(A)$ tal que (3.5) tem uma solução clássica $u$ que, por virtude da Observação 3.2.2, e dada por (3.6). Então, a função $t \mapsto v(t) = u(t) - S(t-a)A\xi$ é diferenciável em $(a,b)$. Assim, $v$ satisfaz (i). Se $\xi \in D(A)$, temos $S(t-a) \in D(A)$ para cada $t \in [a, b\ ]$, e portanto segue que $v(t) = u(t) - S(t-a)\xi \in D(A)$ para cada $t \in (a,b)$, e $t \mapsto Av(t) = Au(t) - AS(t-a)\xi = u'(t) - f(t) - S(t-a)A\xi$ é contínua em $(a,b)$. Então, $v$ satisfaz (ii), e isto conclui a demonstração.

$\square$

**Corolário 3.2.2** *Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador de um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, e $f$ é de classe $C^1$ em $[a, b]$, então, para cada $\xi \in D(A)$, o problema (3.5) tem uma única solução clássica.*

**Demonstração:** Observemos que

$$t \mapsto v(t) = \int_a^t S(t-s)(s)ds = \int_0^{t-a} S(s)f(t-s)ds$$

é continuamente diferenciável em $(a, b)$. De fato,

$$v'(t) = S(t-s)f(a) + \int_0^{t-a} S(s)f(t-s)ds$$
$$S(t-a)f(a) + \int_a^t S(t-s)f'(s)ds$$

para cada $t \in (a, b)$. A conclusão segue de (i) no Teorema 3.2.2. $\square$

**Corolário 3.2.3** *Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador de um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, $f \in L^1(a, b; X)$ é contínua em $(a, b)$, $f(s) \in D(A)$ para cada $s \in (a, b)$, e $Af(\cdot) \in L^1(a, b; X)$, então, para cada $\xi \in D(A)$, o problema (3.5) tem uma única solução clássica.*

**Demonstração:** Para cada $t \in (a, b)$ e $s \in (a, t]$, temos $S(t-s)f(s) \in D(A)$. Além disso, a função $t \mapsto AS(t-s)f(s) = S(t-s)Af(s)$ é integrável, e assim $v$, definido como no Teorema 3.2.2, satisfaz $v(t) \in D(A)$ para cada $t \in (a, b)$. Além disso, a função

$$t \mapsto Av(t) = A\int_a^t S(t-s)f(s)ds = \int_a^t S(t-s)Af(s)ds$$

é contínua em $[a, b]$. Concluinos a demonstração com a ajuda de (ii) no Teorema 3.2.2.

## 3.3 O Problema de Cauchy com Retardo

Nesta seção estudaremos o seguinte problema de Cauhy com retardo:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u_t) \\ u_0 = \varphi \quad , \varphi \in \mathcal{B} \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $A$ gera um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, em um espaço de Banach $X$ e $f : [0,T]\times\mathcal{B} \to X$ é contínua em $t$ e satisfaz uma condição Lipschitz em $u$. O problema de Cauchy (3.9) não necessariamente tem uma solução de qualquer tipo. No entanto, se tem uma solução clássica ou forte, então o argumento dado no inicio da seção anterior mostra que esta solução satisfaz a equação integral

$$\begin{cases} u(t) = S(t)\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s,u_s)ds & 0 \leq t \leq T \\ u_0(\theta) = \varphi(\theta) & -r \leq \theta < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

O espaço de fase $\mathcal{B}$ para equações com retardo finito é um espaço vetorial, com uma seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, consistindo de funções de $[-r,0]$ em $X$. Os axiomas fundamentais assumidos em $\mathcal{B}$ são os seguintes:

**(A)** Se $u$ é uma função de $[-r,T)$ em $X$, $T > 0$, tal que $u \in \mathcal{B}$ e $u$ é contínua em $[0,T)$, as seguintes condições valem:

(i) $u_t \in \mathcal{B}$.

(ii) $\|u(t)\|_X \leq H\|u_t\|_{\mathcal{B}}$ .

(iii) $\|u_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t)\sup\{\|u(s)\|_X\ :\ 0 \leq s \leq t\}+M(t)\|u_o\|_{\mathcal{B}}$, onde $H$ é uma constante, $K,\ M\ :\ [0,\infty) \to [0,\infty)$, $K$ é contínua, $M$ é localmente limitada, e ambas independem de $u$.

**(A1)** Para cada função $u \in (A)$, $x_t$ é uma

**Definição 3.3.1** *Uma solução contínua da equação integral* (3.10) *será chamada solução branda do problema de Cauchy* (3.9).

**Teorema 3.3.1** *Seja $f; [0,T]\times\mathcal{B} \to X$ contínua em $t \in [0,T)$ e uniformemente Lipschitz (com constante $L$) em $X$. Se $A$ é o gerador de um $C_0$-semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ em $X$, então para cada $\varphi(0) \in X$ o problema de Cauchy* (3.9) *tem uma única solução branda $u \in C([-r,T];X)$.*

**Demonstração:** Para uma dada $\varphi \in \mathcal{B}$ definimos a aplicação

$$F : C([-r,T];X) \to C([-r,T];X)$$

por

$$\begin{cases} (Fu)(t) = S(t)\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s,u_s)ds, \quad 0 \le t \le T \\ (Fu)_0 = \varphi \end{cases} \tag{3.11}$$

Denotando por $\|u\|_\infty$ a norma de $u$ como elemento de $C([-r,T];X)$ segue da definição de $F$ que

$$\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| \le MLt\|u-v\|_\infty \tag{3.12}$$

onde $M$ é uma cota superior de $\|S(t)\|$ em $[0,T]$. Vemos também que

$$\|(Fu)_s - (Fv)_s\| \le MLs\|u-v\|_\infty. \tag{3.13}$$

Com efeito,

$$\|(Fu)_s - (Fv)_s\| = \sup_{\sigma\in[-r.0]} \|(Fu)(s+\sigma) - (Fv)(s+\sigma)\|$$

$$\le \sup_{\sigma\in[-r.0]} ML(s+\sigma\|u-v\|_\infty d\tau \le MLs\|u-v\|_\infty d\tau$$

Usando 3.11, 3.13 e indução em $n$ segue facilmente que

$$\|(F^n u)(t) - (F^n v)(t)\| \le \frac{(MLt)^n}{n!}\|u-v\|_\infty$$

daí

$$\|F^n u - F^n v\| \le \frac{(MLT)^n}{n!}\|u-v\|_\infty. \tag{3.14}$$

Para $n$ suficientemente grande $(MLT)^n/n! < 1$ e por uma extensão bem conhecida do princípio de contração $F$ tem um único ponto fixo $u \in C([-r,T];X)$. Este ponto fixo é a solução desejada da equação integral 3.10.

### 3.3.1 Aplicação

Consideremos a equação abaixo em um dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) + f(t,u(t+\theta,x)) & (t,x)\in[0,T]\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\Gamma \\ u(t,x) = \varphi(t,x), & -r \le t \le 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $\Delta$ é o operador de Laplace.

**Teorema 3.3.2** *Seja $X = H^{-1}(\Omega)$, $f : [0,T] \times \mathcal{B} \to X$ contínua na primeira variável e uniformemente Lipschitz na segunda. Então (3.15) possui uma única solução branda em $X$.*

**Demonstração:** Defina $A : D(A) \subseteq X \to X$ por

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega) \\ Au = \Delta u \end{cases}$$

o problema (3.15) pode ser reescrito na forma abstrata

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u_t), & 0 < t \leq T \\ u_0(\theta) = \varphi(\theta), & -r \leq \theta \leq 0 \end{cases}.$$

Pelo Teorema 3.1.1 $A$ gera um $C_0$-semigrupo de contrações e pelo Teorema 3.3.1 existe uma única solução branda em $X$.

# Referências Bibliográficas


[1] PAZI, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Israel J. Math., 20(1975).

[2] VRABIE, I. I. C0-semigroups and applications. In:____. Amsterdam: Elsevier, 2003.

[3] MEDEIROS, L.A.; MIRANDA, M.M. Espaços de Sobolev. In:____. *Espaços de Sobolev.* 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

[4] HINO, Y.; MURAKAMI, S.; NAITO, T. - Functional-differential equations with infinite delay, Springer-Verlag.