

# CÁLCULO VARIACIONAL E APLICAÇÕES À MECÂNICA CELESTE

Severino Horácio da Silva

Julho/2003

# Sumário

|                                                                                   |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introdução</b>                                                                 | <b>1</b> |
| <b>1 Cálculo Variacional</b>                                                      | <b>3</b> |
| 1.1 Alguns problemas variacionais simples . . . . .                               | 4        |
| 1.2 A variação de um funcional. Uma condição necessária para um extremo . . . . . | 5        |
| 1.2.1 Variação ou diferencial de um funcional . . . . .                           | 9        |
| 1.2.2 Uma condição necessária para um extremo . . . . .                           | 11       |
| 1.3 Equação de Euler-Lagrange para o problema variacional mais simples . . . . .  | 12       |
| 1.4 A derivada variacional . . . . .                                              | 19       |
| 1.5 Invariância das equações de Euler-Lagrange . . . . .                          | 22       |
| 1.6 Problema do ponto final fixo para n-funções desconhecidas . . . . .           | 24       |
| 1.7 Problema variacional na forma paramétrica . . . . .                           | 27       |
| 1.8 O problema variacional com vínculo . . . . .                                  | 30       |
| 1.8.1 O problema isoperimétrico . . . . .                                         | 30       |
| 1.8.2 Condições de vínculos finitas . . . . .                                     | 33       |
| 1.9 A forma canônica das equações de Euler-Lagrange . . . . .                     | 34       |
| 1.10 Integral primeira das equações de Euler-Lagrange . . . . .                   | 36       |

|          |                                                                                               |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2</b> | <b>O problema dos N-Corpos e Problemas Variacionais em Sistemas Mecânicos</b>                 | <b>38</b> |
| 2.1      | Formulação do problema dos N-corpos . . . . .                                                 | 38        |
| 2.2      | Princípio da ação mínima . . . . .                                                            | 40        |
| 2.3      | Lei de conservação . . . . .                                                                  | 43        |
| 2.4      | Equivalência entre as formulações Hamiltonianas e Lagrangianas em um sistema mecânico.        | 43        |
| <b>3</b> | <b>O Método Direto em Cálculo Variacional e Sistemas Envolvendo Força Forte e Força Fraca</b> | <b>48</b> |
| 3.1      | Notações e Preliminares . . . . .                                                             | 48        |
| 3.2      | O Método direto em problemas variacionais . . . . .                                           | 49        |
| 3.2.1    | Coercividade de um funcional . . . . .                                                        | 50        |
| 3.2.2    | Seqüência minimizante . . . . .                                                               | 51        |
| 3.2.3    | O método de Ritz e o método das diferenças finitas . . . . .                                  | 53        |
| 3.2.4    | Minimização básica . . . . .                                                                  | 56        |
| 3.3      | Sistemas envolvendo força forte e força fraca . . . . .                                       | 59        |
| 3.4      | Mais sobre coercividade e potenciais envolvendo força forte . . . . .                         | 63        |
| 3.5      | Ponto crítico de um funcional e propriedades . . . . .                                        | 69        |
| <b>4</b> | <b>Aplicações à Mecânica Celeste</b>                                                          | <b>75</b> |
| 4.1      | Uma propriedade minimizante das órbitas Keplerianas . . . . .                                 | 75        |
| 4.1.1    | Formulação do resultado principal . . . . .                                                   | 75        |
| 4.1.2    | A ação integral para soluções continuadas . . . . .                                           | 76        |
| 4.1.3    | Preliminares para a demonstração do resultado principal . . . . .                             | 81        |
| 4.1.4    | Demonstração do resultado principal . . . . .                                                 | 82        |
| 4.2      | Existência de soluções periódicas sem colisão em problemas planares do tipo N-corpos . .      | 85        |

|                                                                       |                                                                |            |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2.1                                                                 | Preliminares . . . . .                                         | 86         |
| 4.2.2                                                                 | Existência de soluções com restrições topológicas . . . . .    | 92         |
| 4.2.3                                                                 | Existência de soluções com restrições de simetria . . . . .    | 99         |
| 4.3                                                                   | Soluções com simetrias de rotação . . . . .                    | 102        |
| 4.3.1                                                                 | Estimativas . . . . .                                          | 105        |
| 4.3.2                                                                 | Soluções sem colisão para problemas do tipo N-corpos . . . . . | 113        |
| 4.4                                                                   | Uma nova solução para o problema dos três corpos . . . . .     | 120        |
| <b>Apêndice</b>                                                       |                                                                | <b>125</b> |
| <b>A Alguns resultados clássicos da Análise Funcional e Topologia</b> |                                                                | <b>125</b> |
| A.1                                                                   | Alguns resultados da Análise Funcional . . . . .               | 125        |
| A.2                                                                   | Alguns resultados da Topologia e Topologia Algébrica . . . . . | 127        |
| <b>B Topologia fraca</b>                                              |                                                                | <b>130</b> |
| <b>C Espaços de Sobolev</b>                                           |                                                                | <b>133</b> |
| <b>D Noções de distribuições</b>                                      |                                                                | <b>136</b> |
| D.1                                                                   | Operação com distribuição . . . . .                            | 137        |
| D.2                                                                   | Derivada distribucionais e derivadas clássicas . . . . .       | 139        |
| D.2.1                                                                 | Cálculo Variacional em distribuições . . . . .                 | 142        |
| D.3                                                                   | Derivadas e primitivas . . . . .                               | 143        |
| D.4                                                                   | Operadores elípticos . . . . .                                 | 144        |
| D.5                                                                   | Derivada de Fréchet e derivada de Gateaux . . . . .            | 146        |
| <b>E Mais alguns resultados de Cálculo Variacional</b>                |                                                                | <b>148</b> |

|       |                                                                                    |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| E.1   | Notações . . . . .                                                                 | 148 |
| E.2   | Colocação dos resultados . . . . .                                                 | 149 |
| E.3   | Segunda variação de um funcional e condições suficientes para um extremo . . . . . | 154 |
| E.3.1 | Segunda variação de um funcional . . . . .                                         | 154 |
| E.3.2 | Condições suficientes para um extremo . . . . .                                    | 155 |

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| <b>Referências Bibliográficas</b> | <b>157</b> |
|-----------------------------------|------------|

*Era ela quem erguia casas  
Onde antes só havia chão  
Como pássaro sem asas  
Ele subia com as casas  
Que lhe brotavam da mão  
O Operário da construção - V. M.*

*À minha mãe Clotilde Maria C. da Silva,  
Ao meu irmão José Horácio da Silva Filho,  
À minha esposa Michelli Karinne B. da Silva*

Teste submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:

  
Orientador





**CÁLCULO VARIACIONAL E APLICAÇÕES  
À MECÂNICA CELESTE**

*Por*

*Severino Thiracem da Silva*

vi

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cidade Universitária - Tel.: (081) 3271-8410 - Fax: (081) 3271-1835  
RECIFE - BRASIL

Julho - 2003

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a Deus por ter me fortalecido e iluminado minha inteligência durante estes 23 meses de dedicação ao Mestrado.

Agradeço de forma carinhosa a amiga, esposa e companheira Michelli por sua grande compreensão e paciência.

Agradeço também:

À minha família que sempre me motivou, em especial à minha mãe Clotilde, a meus irmãos José Horácio, Maria, Berenice, Severina e Judite.

Ao professor José Claudio Vidal pela orientação amizade e paciência.

Ao professor Hidelberto Cabral pela orientação inicial no Cálculo Variacional.

Ao professor Pedro Ontaneda pela grande ajuda na parte topológica deste trabalho.

Ao professor Ramón pelas sugestões no início do programa de Mestrado.

Aos professores do programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco por suas contribuições à minha formação, em especial a José Claudio Vidal, Eduardo Shirlipe, Francisco Brito, Lettério Gatto, Paulo Santiago e Ramón Mendonça.

Aos professores José Claudio Vidal, Francisco Brito, Alain Albouy e Hildeberto Cabral pela confiança, que muito contribuiu, para meu ingresso no Doutorado.

Aos professores Alain Chenciner (Universite Paris - France), Daniel Offin (Queen's University - Canadá), David Costa (University of Nevada - USA), Marco Degiovanni (Università Cattolica del Sacro Cuore - Italia), Ugo Bessi (Università degli Studi Roma Tre - Italia) e Vittorio Coti Zelati (Università di Napoli - Itália) pelas informações e sugestões sobre este assunto aqui abordado que mesmo de longe foram bastantes lucrativas.

Ao professor Vandik, grande orientador na Graduação, e que mesmo de longe continuou sempre me estimulando.

À Tânia pela competência, eficiência e pelo constante apoio ao longo deste curso.

Aos funcionários do Departamento de Matemática.

Às minhas colegas de Gabinete Carlinda, Luciana e Tereza pela amizade e grande compreensão no ambiente de estudo.

À amiga Patrícia Leal pelo constante apoio, desde a monitoria de Álgebra Vetorial na Graduação aos dias atuais suportando muitas vezes meu péssimo humor.

Aos colegas da Pós-Graduação, em especial a Adriano, Adson, Almir, Angelo, Cristina, Custódio, Fábio, Gledson, Gastão, Jalila, Joseilson, Luís, Mário, Ricardo, Renata e Taíse.

Aos colegas de Graduação da UFPB - Campus II, em especial a Michelli, Lindomberg, Patrícia e Diana.

Aos colegas Patrícia Leal e Lenaldo pela convivência pacífica no último semestre do Mestrado.

Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Campina Grande - Campus I, pela boa formação acadêmica que foi ferramenta essencial para meu desempenho neste mestrado. Em especial aos professores Aparecido, Jaime, Mendes, Rosana e Vandik pela confiança em mim depositada.

À Alaide pelo grande apoio conedido em Campina Grande na época do Vestibular.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho.

À Banca Examinadora pela paciência em analisar este material e pelas sugestões que muito contribuíram para enriquecer este trabalho.

Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

# Resumo

A presente dissertação intitulada “Cálculo Variacional e Aplicações à Mecânica Celeste”, tem como objetivo fazer um estudo dos resultados básicos do Cálculo Variacional para posteriormente aplicá-los ao estudo de propriedades minimizantes das órbitas elípticas no problema de Kepler e na existência de soluções periódicas com restrições topológicas e condições de simetrias em problemas “tipo N-corpos” da Mecânica Celeste.

A dissertação é consequência de leituras de referências básicas como *Calculus of variations* (Gelfand and Fomin, 1963) e de alguns artigos de pesquisa como: *Symmetries and noncollision closed orbits for planar N-body type problems* (Bessi and Coti Zelati, 1991), *Action minimizing periodic orbits in the Newtonian N-body problem* (Chenciner, 1999), *A first encounter with variational methods in differential equations* (Costa, 2002), *Periodic solutions for N-body type problems* (Coti Zelati, 1990), *Dynamical systems with Newtonian type potentials* (Degiovanni, 1987), *Consevative dynamical systems involving strong force* (Gordon, 19975), *A minimizing property of keplerian orbits* (Gordon, 1977).

# Abstract

This dissertation entitled "Variational Calculus and Applications to Celestial Mechanics ", has as objective to study the basic results of variational calculus and applications to the minimizing properties of elliptic orbits of the Kepler problem and the existence of periodic solutions with topological restrictions and symmetric conditions in problem type N-bodies of Celestial Mechanics. The dissertation is a consequence of the lectures of basic references and some papers namely : Symmetries and noncollision closed orbits for planar N-body type problems (Bessi and Coti Zelati, 1991) , Action minimizing periodic orbits in the Newtonian N-body problem (Chenciner, 1999), Dynamical systems with Newtonian type potentials (Degiovanni, 1987), Conservative dynamical systems involving strong force (Gordon, 1975), A minimizing property of Keplerian orbits (Gordon, 1977).

Key Words : Variational calculus, periodic solution, symmetry, N-body problem.

# Introdução

O Cálculo Variacional é estudado a mais de três séculos. Mas apenas em meados do século XIX e início do século XX com o surgimento do método direto, é que foi reconhecida sua grande importância, graças a culminantes pesquisas de alguns matemáticos famosos, entre eles: Hilbert, Lebesgue, Tonelli e Weierstrass. Veja [8].

A Mecânica Celeste se situa no âmbito das duas ciências mais antigas da história da humanidade, a Matemática e a Astronomia. Mas apenas no século XVII com o tratado de Newton sobre Gravitação, é que deu-se início ao estudo desta bela área de conhecimentos que estuda os movimentos dos corpos no espaço.

Nos últimos anos o Cálculo Variacional tem sido muito usado na Mecânica Celeste, para estudar existência de soluções periódicas em problemas planares "tipo N-corpos". Veja por exemplo: [2], [9], [10] e [13]. Mais recentemente Chenciner e Montgomery mostraram a existência de uma solução periódica do problema planar dos três corpos com massas iguais, onde os três corpos movem-se simetricamente sobre uma "figura oito".

O objetivo desta Dissertação consiste em desenvolver as ferramentas básicas do Cálculo Variacional para aplicá-las ao estudo de soluções periódicas em problemas da Mecânica Celeste, como por exemplo, ao problema dos  $N$ -corpos.

As aplicações surgiram como consequência da leitura de vários artigos de pesquisa, entre eles *Symmetries and noncollision closed orbits for planar  $N$ -body type problems* (Bessi and Coti Zelati, 1991), *Action minimizing periodic orbits in the Newtonian  $N$ -body problem* (Chenciner, 1999), *A first encounter with*

*variational methods in differential equations* (Costa, 2002), *Periodic solutions for N-body type problems* (Coti Zelati, 1990), *Consevative dynamical systems involving strong force* (Gordon, 19975), A minimizing property of keplerian orbits (Gordon, 1977) e outros.

A presente dissertação está dividida em quatro capítulos, e está organizada da seguinte forma: No primeiro capítulo apresentaremos os conceitos básicos de Cálculo Variacional, tais como, a diferencial de um funcional, condição necessária para um extremo de um funcional, dedução das equações de Euler-Lagrange e problemas variacionais com vínculo.

No segundo capítulo expomos o problema dos  $N$ -corpos com suas formulações Lagrangianas e Hamiltonianas, e a equivalência entre estas formulações. Também analisamos a relação entre os pontos críticos do funcional associado ao Lagrangeano do problema mecânico e as soluções das equações diferenciais associadas.

O terceiro capítulo é dedicado à extensão do funcional (ou ação integral), associado a um problema mecânico, ao espaço de Sobolev  $H^1$  (espaço das funções absolutamente contínuas cujas derivadas são de quadrado integrável). A seguir introduzimos os conceitos de coercividade e seqüências minimizantes, ou seja, apresentamos o Método Direto em Cálculo Variacional. Em seguida introduzimos os conceitos de força forte e força fraca os quais são importantes no estudo de existência de soluções periódicas sem colisão. Também mostramos certos funcionais sobre  $H^1$ , os quais são coercivos, e fazemos uma análise da condição necessária para ter pontos críticos do funcional associado ao Lagrangeano do problema mecânico sobre o espaço  $H^1$ . Por último analisamos a regularidade de um ponto crítico.

No Capítulo 4, apresentamos algumas aplicações do Cálculo Variacional na Mecânica Celeste. Primeiramente mostramos que a ação integral de Hamilton é constante sobre a família de soluções elípticas (no sentido estendido) para o problema de Kepler (planar), e que estas minimizam a ação de Hamilton. Outras aplicações consistem em estudar a existência de soluções periódicas sem colisão em problemas mecânicos planares e também em problemas do tipo  $N$ -corpos. Por último aplicamos estes resultados para mostrar a existência de uma nova solução periódica (diferente das soluções Eulerianas e Lagrangeanas) no problema Newtoniano dos três corpos.

Finalmente apresentamos no Apêndice alguns resultados básicos que implicitamente estão envolvidos na elaboração desta dissertação.

## Capítulo 1

# Cálculo Variacional

O Cálculo Variacional é a parte da Matemática que estuda extremos de funções cujo domínio de definição é um espaço de dimensão infinita, o espaço das curvas com certas propriedades dependendo do problema em estudo. Tais funções são denominadas funcionais. Como uma forma de motivar o uso do Cálculo Variacional no estudo de problemas da Mecânica, neste capítulo nos preocuparemos apenas em estudar funcionais que são diferenciáveis, definidos sobre um espaço vetorial  $\mathfrak{F}$ , de curvas, as quais assumimos que são pelo menos de classe  $C^2$ . Este estudo utiliza essencialmente a mesma abordagem utilizada em ([1]) e ([12]), os quais não se preocupam com a regularidade do funcional, de fato são sempre diferenciáveis e o espaço das funções  $\mathfrak{F}$  é de fato um espaço vetorial, não necessariamente um espaço de Hilbert, constituído por curvas bastantes regulares, pelo menos  $C^2$ , de tal forma que na análise os extremos do funcional sempre serão assumidos de classe  $C^2$ . No Capítulo 3, estudaremos com bastante rigorosidade a questão da existência de extremais, sua regularidade, e o espaço de curvas que estamos considerando.

## 1.1 Alguns problemas variacionais simples

Apresentaremos alguns exemplos simples que servirão como motivação para o estudo do Cálculo Variacional. Para entender o Cálculo Variacional, é de extrema importância notar que ele está relacionado à problemas de Análise Clássica, isto é, ao estudo de funções de  $n$ -variáveis.

**Exemplo 1.1.1** *Considere o conjunto de todas as curvas retificáveis planas (isto é, todas as curvas planas cujo comprimento pode ser aproximado por uma poligonal). Associamos à cada curva seu comprimento. Isto define um funcional sobre o conjunto de todas as curvas retificáveis.*

**Exemplo 1.1.2** *Encontre a menor curva plana passando por dois pontos  $A$  e  $B$ , isto é, encontre a curva  $y = y(x)$  para a qual o funcional,*

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

*sujeito as condições de contorno  $y(a) = A$  e  $y(b) = B$ , atinge seu mínimo. Sabemos que a curva em questão será um segmento de reta.*

**Exemplo 1.1.3** *(O Problema Isoperimétrico): Entre todas as curvas fechadas de um dado comprimento  $l$ , encontre a curva que circunda a maior área. Este problema foi resolvido por Euler veja ([12], pp. 3), e a curva procurada é um círculo.*

**Observação:** Todos os problemas acima envolvem funcionais que podem ser escritos na forma

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

tais funcionais tem uma propriedade "local" consistindo do fato que se dividirmos a curva  $y = y(x)$  em partes e calculando o valor do funcional em cada parte, a soma dos valores do funcional das partes separadas é igual ao valor do funcional para toda a curva. Abordaremos este fato na Seção 1.4.

## 1.2 A variação de um funcional. Uma condição necessária para um extremo

Consideraremos um espaço linear como sendo um espaço normado cujos elementos são funções.

**Definição 1.2.1** Dizemos que um funcional  $I(y)$  definido sobre um espaço linear normado  $\mathfrak{S}$  é contínuo no ponto  $y^* \in \mathfrak{S}$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$ , t.q.,  $|I(y) - I(y^*)| < \varepsilon$ , sempre que  $\|y - y^*\|_{\mathfrak{S}} < \delta$ .

**Comentário:** Para não sobrecarregar a notação usaremos neste capítulo simplesmente  $\|\cdot\|$ , ao invés de  $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$ .

**Observação:** Mudando a desigualdade  $|I(y) - I(y^*)| < \varepsilon$ , por  $I(y) - I(y^*) > -\varepsilon$ , o funcional é dito ser semi-contínuo inferiormente, e mudando  $|I(y) - I(y^*)| < \varepsilon$ , por  $I(y) - I(y^*) < \varepsilon$ , o funcional é dito ser semi-contínuo superiormente.

**Definição 1.2.2** Seja  $\mathfrak{S}$  um espaço linear normado. Considere a aplicação

$$\varphi : \mathfrak{S} \mapsto \mathbb{R}$$

$$h \mapsto \varphi(h)$$

Dizemos que  $\varphi(h)$  é um funcional linear contínuo se:

- (a)  $\varphi(\alpha h) = \alpha \varphi(h)$ , para todo  $h$  de  $\mathfrak{S}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $\varphi(h_1 + h_2) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$ , para quaisquer  $h_1, h_2$  de  $\mathfrak{S}$ ;
- (c)  $\varphi(h)$  é contínuo para todo  $h$ .

**Exemplo 1.2.3** A aplicação

$$\varphi(h) = \int_a^b h(x) dx$$

define um funcional linear sobre  $C([a, b])$  o espaço das funções contínuas sobre  $[a, b]$ .

**Exemplo 1.2.4** A aplicação

$$\varphi(h) = \int_a^b \left[ h'(x) + h''(x) + \dots + h^{(n)}(x) \right] dx$$

define um funcional linear sobre  $C^n([a, b])$  o espaço das funções diferenciáveis com  $n$ -ésima derivada contínua no intervalo  $[a, b]$ .

**Lema 1.2.5** (Lema de Lagrange) Se  $\alpha(x)$  é contínua em  $[a, b]$ , e se

$$\int_a^b \alpha(x) h(x) dx = 0$$

para toda  $h \in C([a, b])$  tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , então  $\alpha(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Demonstração:** Suponha que  $\alpha(x) > 0$  para algum  $x \in [a, b]$  então por continuidade existem  $x_1, x_2 \in [a, b]$  distintos, tal que  $\alpha(x) > 0$  para todo  $x \in [x_1, x_2] \subseteq [a, b]$ . Defina  $h$  por  $h(x) = (x - x_1)(x_2 - x)$  se  $x \in [x_1, x_2]$  e  $h(x) = 0$  se  $x \in [a, b] - [x_1, x_2]$ . Claramente a função  $h$  satisfaz as condições do Lema 1.2.5, e além disso

$$\int_a^b \alpha(x) h(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) (x - x_1)(x_2 - x) dx > 0,$$

o que é uma contradição, o que conclui a demonstração. ■

**Observação:** O Lema acima é ainda válido se mudarmos  $C([a, b])$  por  $C^n([a, b])$ . Para isto, basta considerar  $h(x) = [(x - x_1)(x_2 - x)]^{n+1}$  se  $x \in [x_1, x_2]$  e  $h(x) = 0$  se  $x \in [a, b] - [x_1, x_2]$ .

**Lema 1.2.6** Se  $\alpha(x)$  é contínua em  $[a, b]$ , e se

$$\int_a^b \alpha(x) h'(x) dx = 0$$

para toda função  $h \in C^1([a, b])$ , tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , então  $\alpha(x) = c$  para todo  $x \in [a, b]$ , onde  $c$  é uma constante.

**Demonstração:** Considere a função  $h$  dada por

$$h(x) = \int_a^x [\alpha(x) - c] dx = 0$$

onde  $c$  é dada pela equação

$$\int_a^b [\alpha(x) - c] dx = 0.$$

Por um lado, temos

$$\int_a^b [\alpha(x) - c] h'(x) dx = \int_a^b [\alpha(x) - c]^2 dx \geq 0.$$

Por outro lado, obtemos

$$\int_a^b [\alpha(x) - c] h'(x) dx = \int_a^b \alpha(x) h'(x) dx - c[h(b) - h(a)] = 0.$$

Das duas últimas equações acima e da continuidade de  $\alpha(x) - c$ , temos que  $\alpha(x) - c = 0$ , donde,  $\alpha \equiv c$ . ■

**Lema 1.2.7** *Se  $\alpha(x)$  é contínua em  $[a, b]$ , e se*

$$\int_a^b \alpha(x) h''(x) dx = 0$$

*para toda  $h \in C^2([a, b])$ , tal que  $h(a) = h(b) = 0$  e  $h'(a) = h'(b) = 0$ , então  $\alpha = c_0 + c_1 x$ , para todo  $x \in [a, b]$ , onde  $c_0$  e  $c_1$  são constantes.*

**Demonstração:** Considere a função

$$h(x) = \int_a^x \int_a^\xi [\alpha(t) - c_0 - c_1 t] dt d\xi$$

onde  $c_0$  e  $c_1$  são definidas pelas condições

$$\int_a^b [\alpha(t) - c_0 - c_1 t] dt = 0,$$

$$\int_a^b \left( \int_a^x [\alpha(\xi) - c_0 - c_1 \xi] d\xi \right) dx.$$

Por um lado, temos

$$\int_a^b [\alpha(x) - c_0 - c_1 x] h''(x) dx = \int_a^b [\alpha(x) - c_0 - c_1 x]^2 dx \geq 0.$$

Por outro lado, usando integração por partes

$$\int_a^b [\alpha(x) - c_0 - c_1 x] h''(x) dx = -c_1 [x h'(x) - h(x)]|_a^b = 0.$$

Assim,  $\alpha(x) - c_0 - c_1 x = 0$ , donde,  $\alpha(x) = c_0 + c_1 x$ . ■

**Lema 1.2.8** Se  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são funções contínuas em  $[a, b]$ , e se

$$\int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx = 0 \quad (1.2.1)$$

para toda  $h \in C^1([a, b])$ , tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , então  $\alpha = \beta'(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Demonstração:** Considere

$$A(x) = \int_a^x \alpha(\xi)d\xi$$

resolvendo por partes a integral

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx$$

podemos reescrever (1.2.1) como

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx &= \int_a^b \alpha(x)h(x)dx + \int_a^b \beta(x)h'(x)dx \\ &= \int_a^b [-A(x) + \beta(x)]h'(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Logo, usando o Lema 1.2.6, temos o resultado. ■

**Lema 1.2.9** (Generalização do Lema 1.2.8) Se  $\alpha_0(x), \dots, \alpha_n(x)$  são funções contínuas em  $[a, b]$ , e se

$$\int_a^b [\alpha_0 h(x) + \alpha_1 h'(x) + \dots + \alpha_n h^{(n)}(x)]dx = 0$$

para toda  $h \in C^n([a, b])$ , tal que  $h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = \dots = h^{(n-1)}(a) = h^{(n-1)}(b) = 0$ , então  $\alpha_j$  tem derivada até a ordem  $j$  para todo  $x \in [a, b]$  e

$$\alpha_0(x) - \alpha_1'(x) + \dots + (-1)^n \alpha_n(x) = 0.$$

**Demonstração:** Basta usar indução e o Lema 1.2.8. ■

### 1.2.1 Variação ou diferencial de um funcional

Seja  $I(y)$  um funcional definido sobre algum espaço linear normado, e seja

$$\Delta I(h) = I(y + h) - I(y)$$

o incremento correspondente ao acréscimo  $h = h(x)$  da "variável independente"  $y = y(x)$ . Se  $y$  é fixado,  $\Delta I(h)$  é um funcional de  $h$ , em geral não linear, pois

$$\Delta I(h_1 + h_2) = I(y + h_1 + h_2) - I(y) = I(y + h_1) - I(y) + I(h_2) = \Delta I(h_1) + I(h_2).$$

Suponha que

$$\Delta I(h) = \varphi(h) + \varepsilon \|h\|$$

onde  $\varphi(h)$  é linear e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , com  $\|h\| \rightarrow 0$ . Então o funcional  $I(y)$  é dito ser diferenciável, e a parte linear do incremento  $\Delta I(h)$ , isto é, o funcional linear  $\varphi(h)$  que difere de  $\Delta I(h)$  por um infinitésimo de ordem superior a um relativo a  $\|h\|$ , é chamado de **primeira variação** ou (**primeira diferencial**) de  $I(h)$  e o denotamos por  $\delta I(y) \cdot h$ , ou  $I'(y) \cdot h$ . Por comodidade daqui por diante, chamaremos apenas de **variação** (ou **diferencial** de  $I(y)$ ).

**Comentário:** Neste caso, conforme Seção D.5 do Apêndice D, dizemos que o funcional  $I$  é **diferenciável segundo Fréchet**. Para um estudo mais detalhado sobre derivada de Fréchet, (veja [19]).

**Exemplo 1.2.10** *Seja*

$$I(y) = \int_a^b y(x) dx$$

*então,  $I(y)$  é diferenciável e  $\delta I(y) \cdot h = \int_a^b h(x) dx$ .*

De fato,

$$I(y + h) - I(y) = \int_a^b h(x) dx + o(\|h\|).$$

**Observação:** Lembremo-nos que se  $F(x_1, \dots, x_n)$  é uma função de  $n$ -variáveis, então  $F(x_1, \dots, x_n)$  tem um extremo relativo no ponto  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  se

$$\Delta F = F(x_1, \dots, x_n) - F(x_1^*, \dots, x_n^*)$$

tem o mesmo sinal em todos os pontos de alguma vizinhança, suficientemente pequena, de  $(x_1, \dots, x_n)$ , onde o extremo  $F(x_1^*, \dots, x_n^*)$  é um mínimo se  $\Delta F > 0$  e um máximo se  $\Delta F < 0$ .

**Definição 1.2.11** *Um funcional  $I(y)$  tem um extremo relativo para  $y = y^*$  se  $I(y) - I(y^*)$  não muda de sinal em alguma vizinhança, suficientemente pequena, da curva  $y = y^*(x)$ .*

As funções em  $C^1([a, b])$  são continuamente diferenciáveis, então elas podem em particular serem consideradas como elementos de  $C([a, b])$ . Correspondendo à estas duas possibilidades podemos definir dois tipos de extremos:

**(A)** Dizemos que um funcional  $I(y)$  tem um **extremo fraco** para  $y = y^*$  se existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $I(y) - I(y^*)$  tem o mesmo sinal para todo  $y$  no domínio de definição do funcional satisfazendo a condição  $\|y - y^*\|_{W^{1,\infty}} < \varepsilon$ , onde

$$\|y - y^*\|_{W^{1,\infty}} = \max_{x \in [a,b]} \{ |y(x) - y^*(x)| + |y'(x) - y^{*'}(x)| \}.$$

**(B)** Dizemos que um funcional  $I(y)$  tem um **extremo forte** para  $y = y^*$  se existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $I(y) - I(y^*)$  tem o mesmo sinal para todo  $y$  no domínio de definição do funcional satisfazendo a condição  $\|y - y^*\|_{L^\infty} < \varepsilon$ , onde

$$\|y - y^*\|_{L^\infty} = \max_{x \in [a,b]} \{ |y(x) - y^*(x)| \}.$$

**Observação:** Todo extremo forte é um extremo fraco. Isto é uma consequência da seguinte inclusão de conjuntos:

$$\{y \in C^1([a, b]) : \|y - y^*\|_{W^{1,\infty}} < \varepsilon\} \subseteq \{y \in C^1([a, b]) : \|y - y^*\|_{L^\infty} < \varepsilon\}.$$

Porém, nem todo extremo fraco é um extremo forte.

**Teorema 1.2.12** *A diferencial (ou variação) de um funcional se existir é única.*

**Demonstração:** Primeiro observe que se  $\varphi(h)$  é um funcional linear e se  $\frac{\varphi(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , quando  $\|h\| \rightarrow 0$ , então  $\varphi(h) = 0$  para todo  $h$ . De fato, suponha que  $\varphi(h_0) \neq 0$  para algum  $h_0 \neq 0$  então, considerando a

seqüência  $h_n = \frac{h_0}{n}$  e fazendo  $\lambda = \frac{\varphi(h_0)}{\|h_0\|}$ , temos que  $\|h_n\| \rightarrow 0$ , mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}\varphi(h_0)}{\frac{1}{n}\|h_0\|} = \frac{\varphi(h_0)}{\|h_0\|} = \lambda \neq 0,$$

o qual contradiz o fato, de que  $\frac{\varphi(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . Suponha, agora, que a diferencial de  $I(y)$  não é única, então

$$I(h) = \varphi_1(h) + \varepsilon_1\|h\|$$

e

$$I(h) = \varphi_2(h) + \varepsilon_2\|h\|$$

onde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ , com  $\|h\| \rightarrow 0$ , isto implica que

$$\varphi_1(h) - \varphi_2(h) = \varepsilon_1\|h\| - \varepsilon_2\|h\| = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\|h\|$$

e logo,  $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$  é um infinitésimo de ordem superior a um relativo a  $\|h\|$ . Mas  $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$  é linear e

$$\frac{\varphi_1(h) - \varphi_2(h)}{\|h\|} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \rightarrow 0,$$

quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . Assim pela primeira parte da prova, temos que  $[\varphi_1(h) - \varphi_2(h)] \equiv 0$ . Portanto  $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$ . ■

**Comentário:** De agora em diante trabalharemos apenas com extremos fracos e, por comodidade, os chamaremos de extremos.

### 1.2.2 Uma condição necessária para um extremo

**Teorema 1.2.13** *Uma condição necessária para um funcional diferenciável  $I(y)$  tenha um extremo em  $y = y^* \in \mathfrak{S}$  é que sua diferencial se anule para  $y = y^*$ , isto é, que*

$$\delta I(y) \cdot h = 0$$

para  $y = y^*$  e todo  $h \in \mathfrak{S}$ .

**Demonstração:** Sem perda de generalidade podemos supor que  $I(h)$  tem um mínimo em  $y = y^*$ . De acordo com a definição de diferencial  $\delta I(y) \cdot h$ , temos

$$\Delta I(h) = \delta I(y) \cdot h + \varepsilon \|h\|, \quad (1.2.2)$$

onde  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . Daí para  $\|h\|$  suficientemente pequeno

$$\text{ sinal}(\Delta I(h)) = \text{ sinal}(\delta I(y) \cdot h).$$

Agora, suponha que  $\delta I(y) \cdot (h_0) \neq 0$  para algum  $h_0$ . Então para cada  $\alpha > 0$ , não necessariamente pequeno, temos

$$\Delta I(-\alpha h_0) = -\delta I(y) \cdot (\alpha h_0), \quad (1.2.3)$$

como  $\|h\| \rightarrow 0$ , então  $\|-\alpha h_0\| = \|\alpha h_0\| \rightarrow 0$ . Por (1.2.3) podemos expressar (1.2.2) de duas formas para  $y = y^*$  que são

$$\Delta I(\alpha h) = \delta I(y) \cdot (\alpha h) + \varepsilon \|h\|$$

e

$$\Delta I(-\alpha h) = \delta I(y) \cdot (-\alpha h) + \varepsilon \|h\|.$$

Daí

$$\text{ sinal}(\Delta I(\alpha h)) = \text{ sinal}(\delta I(y) \cdot (\alpha h)) = -(\text{ sinal}(\delta I(y) \cdot (-\alpha h))).$$

Mas isto é uma contradição, pois,  $I(y)$  tem um mínimo em  $y = y^*$ . Portanto,  $\delta I(y) \cdot h \equiv 0$ . ■

### 1.3 Equação de Euler-Lagrange para o problema variacional mais simples

O problema variacional mais simples pode ser formulado como segue: Seja  $F(x, y, z)$  uma função com primeiras e segundas derivadas parciais contínuas com respeito a todos os argumentos. Então entre todas as funções  $y = y(x)$  que são continuamente diferenciáveis em  $[a, b]$  e satisfazem a condição de fronteira

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (1.3.4)$$

o qual denotamos por  $\mathcal{C}_1 = \{y \in C^1([a, b]) : y(a) = A \text{ e } y(b) = B\}$ , encontre a função para a qual o funcional

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.3.5)$$

tem um extremo fraco sobre  $\mathcal{C}_1$ .

Em outras palavras o problema variacional mais simples consiste em encontrar um extremo fraco para o funcional (1.3.5), onde a classe das curvas admissíveis consiste de todas as curvas suaves passando pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Para aplicar a condição necessária para um extremo de um funcional ao problema formulado, precisamos encontrar a diferencial do funcional dado por (1.3.5).

**Observação:** Suponha que seja dado a  $y(x)$  um acréscimo  $h(x)$ , de tal forma que  $y(x) + h(x)$  continue satisfazendo a condição de fronteira (1.3.4), então

$$y(a) + h(a) = A \text{ e } y(b) + h(b) = B,$$

assim

$$h(a) = h(b) = 0.$$

O incremento correspondente ao funcional em (1.3.5) é dado por

$$\begin{aligned} \Delta I = I(y + h) - I(y) &= \int_a^b F(x, y + h, y' + h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \\ &= \int_a^b \{F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y')\} dx \end{aligned}$$

Mas usando a Fórmula de Taylor para um espaço linear, obtemos

$$\begin{aligned} F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y') &= F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h' + \\ &F_{yy}(x, y, y')\frac{h^2}{2!} + F_{y'y'}(x, y, y')\frac{(h')^2}{2!} + 2F_{yy'}(x, y, y')\frac{hh'}{2!} + \dots \end{aligned}$$

daí,

$$\Delta I = \int_a^b (F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h') dx + \dots$$

onde as reticências denotam a parte não linear em  $h$ . Logo, a variação de  $I(y)$  é

$$\delta I(y) \cdot h = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx.$$

Mas de acordo com o Teorema 1.2.13, uma condição necessária para que  $I(y)$  tenha um extremo em  $y = y(x)$  é que

$$\delta I(y) \cdot h = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx = 0, \quad (1.3.6)$$

para todo acréscimo possível  $h$ . Mas de acordo com o Lema 1.2.8, a fórmula (1.3.6) implica que  $F_{y'}$  é diferenciável e que

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0. \quad (1.3.7)$$

A equação (1.3.7) é conhecida como equação de **Euler-Lagrange**.

Com esta última observação, demonstramos o seguinte

**Teorema 1.3.1** *Seja  $I(y)$  um funcional da forma*

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

*definido sobre o conjunto das funções  $y = y(x)$  que tem primeiras e segundas derivadas parciais contínuas em  $[a, b]$  satisfazendo a condição de fronteira,  $y(a) = A$  e  $y(b) = B$ . Então uma condição necessária para  $I(y)$  ter um extremo em uma dada função  $y(x)$  é que  $y(x)$  satisfaça a equação de Euler-Lagrange (1.3.7).*

**Observação:** A equação de Euler-Lagrange nos dá uma condição necessária para um extremo, mas em geral esta condição não é suficiente. A suficiência será garantida, usando a segunda variação de um funcional, de maneira análoga às funções de várias variáveis. Porém em muitos casos a equação de Euler-Lagrange é auto suficiente para encontrar uma solução completa do problema.

**Comentários:**

(A) Esta condição necessária é para um extremo fraco. Mas todo extremo forte é, também, extremo fraco, então temos também uma condição necessária para extremo forte.

(B) A equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial de segunda ordem e sua solução depende em geral de duas constantes arbitrárias que são determinadas pelas condições de fronteira  $y(a) = A$

e  $y(b) = B$ . As curvas integrais (solução da equação de Euler-Lagrange) são chamadas **extremais** do funcional I.

**Observação:** Para um funcional da forma

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

a equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial de segunda ordem, mas é possível encontrar a curva para a qual o funcional tenha um extremo, mas que esta curva não seja de classe  $C^2([a, b])$ . Por exemplo considere o funcional

$$I(y) = \int_{-1}^1 y^2 (2x - y')^2 dx,$$

onde,  $y(-1) = 0$ , e  $y(1) = 1$ .

O mínimo de  $I(y)$  é alcançado para a função  $y = y^* = 0$  se  $x \in [-1, 0]$  e  $y = y^* = x^2$  se  $x \in [0, 1]$ , a qual não tem derivada segunda para  $x = 0$ . Todavia,  $y(x)$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange em quase toda parte. De fato, derivando o integrando, obtemos

$$F_y = 2y(2x - y')^2; \quad F_{y'} = -2y^2(2x - y'); \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = -4yy'(2x - y') - 2y^2(2 - y'');$$

logo para  $-1 < x \leq 0$  temos

$$y^* = 0; \quad F_y = 0; \quad F_{y'} = 0; \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 0;$$

para  $0 < x \leq 1$  temos

$$F_y = y^2(2x - 2x)^2 = 0; \quad F_{y'} = -2x^4(2x - 2x) = 0;$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = -8x^3(2x - 2x) - 2x^4(2 - 2) = 0.$$

Logo a equação de Euler-Lagrange é satisfeita em quase toda parte.

Agora enunciaremos um resultado que garante quando as soluções da equação de Euler-Lagrange tem derivada segunda.

**Teorema 1.3.2 (Teorema de Regularidade)** *Suponha que  $y = y(x)$  tem primeira derivada contínua e satisfaz a equação (1.3.7). Então se a função  $F(x, y, y')$  tem primeiras e segundas derivadas parciais*

contínuas com respeito a todos os argumentos,  $y(x)$  tem uma derivada segunda contínua em todos os pontos  $(x, y)$  onde

$$F_{y'y'}[x, y(x), y'(x)] \neq 0.$$

**Demonstração:** Considere a diferença

$$\Delta F_{y'} = F_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_{y'}(x, y, y').$$

Usando o Teorema de Taylor podemos escrever a última expressão na forma

$$\Delta F_{y'} = \Delta x \bar{F}_{y'x} + \Delta y \bar{F}_{y'y} + \Delta y' \bar{F}_{y'y'},$$

onde as barras acima indicam que as correspondentes derivadas são avaliadas ao longo de certas curvas intermediárias. Dividindo ambos os membros da última expressão por  $\Delta x$ , obtemos

$$\frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'}.$$

Como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x}$  existe, já que  $F_{y'}$  tem derivada com relação a  $x$  e pela equação de Euler Lagrange é  $F_y$ , então

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'} \right)$$

existe. Além do mais, por hipótese, temos

(a) A função  $F(x, y, y')$  tem derivada de segunda ordem contínua com respeito a todos os argumentos, então

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{F}_{y'x} = F_{y'x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}.$$

(b) Existe o seguinte limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

e a continuidade da derivada segunda  $F_{y'y}$ , assegura que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} = y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}$$

existe. Logo, de (a) e (b) temos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'}$$

existe. Mas quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , temos que  $\overline{F}_{y'y'}$  converge para  $F_{y'y'} \neq 0$ , e logo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''(x)$$

existe. Finalmente, da equação de Euler-Lagrange podemos encontrar a expressão para  $y''$  que claramente é contínua, já que  $F(x, y, y')$  tem segunda derivada contínua com respeito a todos os argumentos. ■

Apresentaremos alguns casos especiais, onde a equação de Euler-Lagrange (1.3.7) pode ser reduzida a uma equação diferencial de primeira ordem, ou onde sua solução pode ser obtida totalmente em termos de quadratura.

**Caso 1:** Suponha que o integrando independa de  $y$ , isto é, se o funcional é da forma

$$\int_a^b F(x, y') dx$$

onde  $F$  não contém  $y$  explicitamente. Neste caso, a equação (1.3.7) torna-se

$$F_{y'} = c \tag{1.3.8}$$

onde  $c$  é uma constante. Isto é, uma equação diferencial de primeira ordem que não contém o termo  $y$ . Se for possível resolver (1.3.8) em relação a  $y'$ , obtemos

$$y' = f(x, c)$$

**Caso 2:** Se o integrando não depende de  $y'$ , a equação (1.3.7) tem a forma

$$F_y(x, y) = 0$$

e logo não é uma equação diferencial, mas uma equação "finita," (ou seja não aparece derivadas na expressão), cuja solução consiste de uma ou mais curvas  $y = y(x)$ .

**Caso 3:** Se o integrando não depende de  $x$ , isto é, se

$$I(y) = \int_a^b F(y, y') dx$$

então a equação (1.3.7) é dada por

$$F_y - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \tag{1.3.9}$$

multiplicando ambos os membros de (1.3.9) por  $y'$ , obtemos

$$F_y y' - F_{y'y} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = \frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0.$$

Neste caso a equação de Euler-Lagrange tem a seguinte integral primeira

$$F - y' F_{y'} = c,$$

onde  $c$  é uma constante.

**Caso 4:** Em vários problemas encontramos funcionais da forma

$$\int_a^b f(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

representando a integral de uma função  $f$ , continuamente diferenciável, com respeito ao comprimento de arco  $s$  ( $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ ). Neste caso, a equação de Euler-Lagrange terá a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} &= f_y(x, y) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left( f(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \\ &= f_y \sqrt{1 + y'^2} - f_x \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - f \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - f_y \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

assim, a equação de Euler-Lagrange é da forma

$$f_y - f_x y' - f \frac{y''}{1 + y'^2} = 0$$

**Exemplo 1.3.3** Considere o funcional

$$I(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

O integrando não contém o termo em  $y$  (caso 1) e logo a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$F_{y'} = c,$$

onde  $c$  é uma constante. Assim, temos

$$\frac{1}{x} \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \Leftrightarrow \frac{y'}{x \sqrt{1 + y'^2}} = c \quad (1.3.10)$$

donde obtemos que

$$\text{senal}(y') = \text{senal}(c),$$

resolvendo a segunda equação de (1.3.10) por substituição simples, temos

$$y = \frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 x^2} + d \Leftrightarrow (y - d)^2 + x^2 = \frac{1}{c^2}$$

onde  $d$  é uma constante, e a equação obtida é de um círculo.

## 1.4 A derivada variacional

Nesta seção apresentaremos um conceito análogo ao de derivada parcial para funções de  $n$  variáveis.

Consideraremos um funcional do tipo

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (1.4.11)$$

correspondendo ao problema variacional mais simples. Aproximamos o problema variacional por um problema  $n$ -dimensional e passamos o limite quando  $n \rightarrow \infty$ . Para isto, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n + 1$  sub-intervalos iguais introduzindo a partição

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_{n+1} = b$$

e substituímos a função suave  $y(x)$  pela linha poligonal com vértices

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$$

onde  $y_i = y_i(x_i)$ , então (1.4.11) pode ser aproximada pela soma

$$I(y_1, \dots, y_n) \equiv \sum_{i=0}^n F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

que é uma função de  $n$ -variáveis. Lembremo-nos que  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  e,  $y_0 = A$ ,  $y_{n+1} = B$  são fixos. Logo, calculamos a derivada parcial

$$\frac{\partial I(y_1, \dots, y_n)}{\partial y_k}$$

e observemos o que acontece com estas derivadas quando o número de pontos da subdivisão tende para infinito. Observando que cada variável  $y_k$  aparece em dois termos para  $i = k$  e  $i = k - 1$ , encontramos que

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = F_y \left( x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \Delta x + F_{y'} \left( x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \right) - F_{y'} \left( x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right).$$

Quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , isto é o número de subdivisões cresce muito, aplicando o limite na última expressão temos que o lado direito vai para zero, desde que ele seja uma quantidade de ordem  $\Delta x$ . Na forma de obter um limite que em geral é não nulo com  $\Delta x \rightarrow 0$ , dividimos ambos os membros da última expressão por  $\Delta x$ , obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial y_k \Delta x} &= F_y \left( x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left[ F_{y'} \left( x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - F_{y'} \left( x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Note que a expressão  $\partial y_k \Delta x$  que aparece no denominador da última expressão tem um significado geométrico direto, é a área da região compreendida entre as curvas sólidas e tracejadas. Veja figura abaixo.

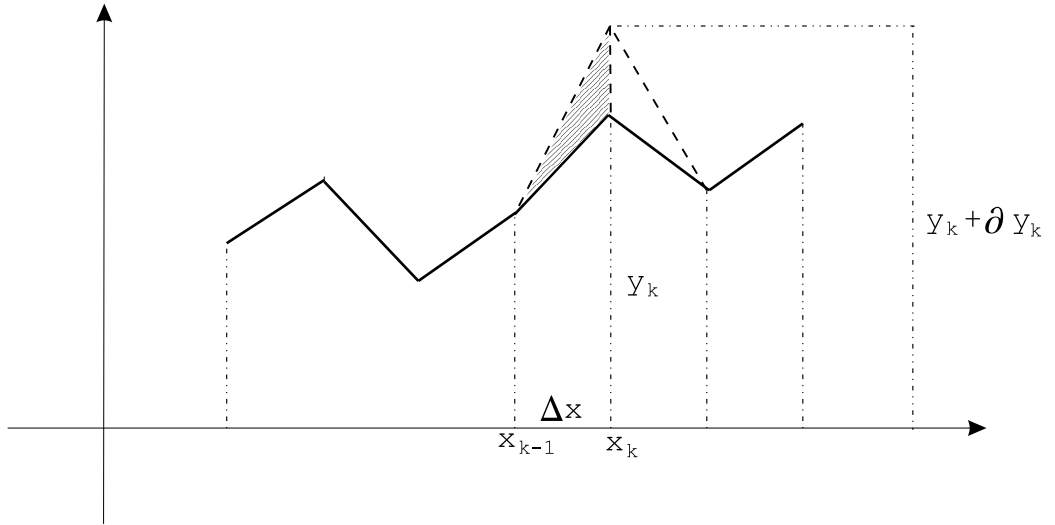


Figura 1.4.1: A área hachurada é dada por  $\partial y_k \Delta x$

Fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$  na última expressão temos a convergência para o limite

$$\frac{\delta I}{\delta y} \equiv F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') \quad (1.4.12)$$

chamado derivada variacional do funcional (1.4.11). Notemos, a semelhança de (1.4.12) com as equações de Euler-Lagrange, e assim, a derivada variacional do funcional sob as considerações assumidas se anula em todo ponto (ao longo de uma extremal), isto é análogo ao que ocorre com funções de  $n$  variáveis.

Em geral a derivada variacional é definida como segue: seja  $I(y)$  o funcional dependendo da função  $y(x)$ , e suponha que seja dado a  $y(x)$  um acréscimo  $h(x)$  que é diferente de zero apenas numa vizinhança do ponto  $x_0$ . Dividindo o correspondente incremento  $I(y+h)$  do funcional pela área  $\Delta\sigma$  compreendida entre a curva  $y = h(x)$  e o eixo  $x$ , obtemos a razão

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{\Delta\sigma}. \quad (1.4.13)$$

se  $\Delta\sigma \rightarrow 0$ , (equivalentemente a  $\max_{x \in [a,b]} \{|h(x)|\}$  e o comprimento do intervalo onde  $h(x)$  é diferente de zero tenderem a zero). Então se a razão (1.4.13) converge para um limite com  $\Delta\sigma \rightarrow 0$ , este limite é chamado a derivada variacional do funcional  $I(y)$  no ponto  $x_0$  (para a curva  $y = y(x)$ ) e é denotado por

$$\frac{\delta I}{\delta y}(y)|_{x=x_0}.$$

#### Comentários:

(A) É de fácil verificação que as regras familiares obedecidas pelas derivadas ordinárias no caso de funções (como soma, produto, etc.) são, também verificadas no caso de derivadas variacionais para funcionais.

(B) É claro da definição de derivada variacional que se  $h(x)$  é diferente de zero em uma vizinhança do ponto  $x_0$ , e se  $\Delta\sigma$  é a área compreendida entre a curva  $y = h(x)$  e o eixo  $x$ , então

$$\Delta I \equiv I(y+h) - I(y) = \left\{ \frac{\delta I}{\delta y}(y)|_{x=x_0} + \varepsilon \right\} \Delta\sigma,$$

onde  $\varepsilon \rightarrow 0$ , com ambos  $\max_{x \in [a,b]} \{|h(x)|\}$  e o comprimento do intervalo onde  $h(x) \neq 0$ , tendendo a zero. Segue-se, então, que em termos de derivada variacional, que a diferencial de um funcional  $I(y)$  no ponto  $x_0$  para a curva  $y = y(x)$  é dada pela fórmula

$$\delta I(y) = \frac{\delta I}{\delta y}(y)|_{x=x_0} \Delta\sigma,$$

ou em termos mais explícitos,

$$\delta I(y) \cdot h = \frac{\delta I}{\delta y}(y) \cdot h|_{x=x_0} \Delta\sigma. \quad (1.4.14)$$

**Observação:** Em particular se a curva acréscimo  $h$  for dada por  $h = \varepsilon v$ , onde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação suave, satisfazendo  $v(a) = v(b) = 0$ , temos válida a seguinte relação:

$$\delta I(y) \cdot (v) = \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}. \quad (1.4.15)$$

De fato, neste caso,  $\Delta\sigma = \varepsilon A$ , onde  $A = \int_a^b v(x)dx$ . Além disso,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , implica  $\Delta\sigma \rightarrow 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(y + \varepsilon v) - I(y)}{\varepsilon} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{I(y + \varepsilon v) - I(y)}{\varepsilon} \\ &= A \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{I(y + \varepsilon v) - I(y)}{A\varepsilon} = A \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{I(y + h) - I(y)}{\Delta\sigma} \\ &= A \frac{\delta I}{\delta y}(y) \cdot (h)|_{x=x_0} = \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon} \frac{\delta I}{\delta y}(y) \cdot (h)|_{x=x_0} = \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon} \frac{\delta I}{\delta y}(\varepsilon v)|_{x=x_0} \\ &= \Delta\sigma \frac{\delta I}{\delta y}(y) \cdot (v)|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Mas, por (1.4.14), temos

$$\Delta\sigma \frac{\delta I}{\delta y}(y) \cdot (v)|_{x=x_0} = \delta I(y) \cdot (v).$$

Logo, segue-se a expressão (1.4.15).

**Observação:** Note que a expressão (1.4.15) é semelhante a “Regra da Cadeia” válida para funções de  $n$  variáveis.

## 1.5 Invariância das equações de Euler-Lagrange

Suponha que em vez de coordenadas retangulares  $x$  e  $y$ , introduzimos novas coordenadas  $u$  e  $v$ , onde

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.5.16)$$

sendo (1.5.16) o Jacobiano da mudança de coordenada. Então a curva dada pela equação  $y = y(x)$  no plano  $xy$  corresponde a uma curva dada por alguma equação  $v = v(u)$  no plano  $uv$ .

Quando fizermos a mudança de variável (1.5.16), o funcional

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

fica sob a forma

$$\begin{aligned} I_1(v) &= \int_{a_1}^{b_1} F\left(x(u, v), y(u, v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right) (x_u + x_v v') du \\ &= \int_a^b F_1(u, v, v') du, \end{aligned}$$

onde

$$F_1(u, v, v') = F\left(x(u, v), y(u, v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right) (x_u + x_v v').$$

**Teorema 1.5.1** *Se  $y = y(x)$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (1.5.17)$$

*correspondente ao funcional original  $I(y)$ , então  $v = v(u)$  satisfaz a equação*

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{d}{du} \frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0 \quad (1.5.18)$$

*correspondendo ao funcional  $I_1(v)$ . Isto significa que se  $(x, y(x), y'(x))$  é um zero de (1.5.17) e se a equação de  $y = y(x)$  no plano  $uv$  é  $v = v(u)$ , então  $(u, v(u), v'(u))$  é um zero de (1.5.18).*

**Demonstração:** Para provar este resultado usaremos o conceito de derivada variacional, introduzido na seção anterior. Se  $\Delta\sigma$  denota a área limitada pelas curvas  $y = y(x)$  e  $y = y(x) + h(x)$ , e  $\Delta\sigma_1$  denota a área limitada pelas curvas correspondentes  $v = v(u)$  e  $v = v(u) + \eta(u)$  no plano  $uv$ . Pela formula padrão de área, temos que quando  $\Delta\sigma, \Delta\sigma_1 \rightarrow 0$ , a razão  $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_1}$  aproxima-se do jacobiano (1.5.16), que por hipótese é diferente de zero. Logo

$$\Delta\sigma \simeq \Delta\sigma_1 J.$$

Daí, se

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{I(y+h) - I(y)}{\Delta\sigma} = 0, \quad (1.5.19)$$

então

$$\lim_{\Delta\sigma_1 \rightarrow 0} \frac{I_1(v+\eta) - I_1(v)}{\Delta\sigma_1} = 0. \quad (1.5.20)$$

Mas pela seção anterior a expressão (1.5.19) é equivalente a

$$\frac{\delta I}{\delta y} = F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y'),$$

analogamente (1.5.20) é equivalente a

$$\frac{\delta I_1}{\delta v} = F_v(u, v, v') - \frac{d}{du} F_{v'}(u, v, v').$$

Portanto, se  $y = y(x)$  satisfaz a equação (1.5.17) correspondente ao funcional  $I(y)$ , então  $v = v(u)$  satisfaz a equação (1.5.18) correspondente ao funcional  $I_1(v)$ . ■

Com este teorema provamos, assim, que a Equação de Euler-Lagrange não depende do sistema de coordenadas.

## 1.6 Problema do ponto final fixo para n-funções desconhecidas

Seja  $F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$  uma função com primeiras e segundas derivadas parciais contínuas com respeito a todos os argumentos. Considere o problema de encontrar condições necessárias para um extremo de um funcional da forma

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (1.6.21)$$

que depende de  $n$  funções continuamente diferenciáveis  $y_1, \dots, y_n$  satisfazendo as condições de contorno

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.6.22)$$

Em outras palavras, estamos considerando um extremo do funcional (1.6.21) definido sobre o conjunto de todas as curvas suaves unindo dois pontos fixos no espaço Euclidiano  $(n+1)$  dimensional.

**Comentário:** O problema de encontrar geodésicas, isto é, curvas minimizantes unindo dois pontos de alguma variedade, é um problema deste tipo. A mesma classe de problemas surge em geometria óptica, em encontrar caminhos no qual o raio de luz propaga-se num meio não homogêneo. De fato, de acordo com o princípio de Fermat a luz vai do ponto  $P_0$  ao ponto  $P_1$  ao longo do caminho que tem tempo de transição mínimo.

Para encontrar condições necessárias para o funcional ter um extremo, primeiro calculamos sua variação. Suponha que podemos mudar cada  $y_i(x)$  por uma função  $y_i(x) + h_i(x)$ . Para variação  $\delta I$

do funcional  $I(y_1, \dots, y_n)$ , pegamos a expressão que é linear em  $h_i$  e  $h'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) que difere do incremento

$$\Delta I = I(y_1 + h_1, \dots, y_n + h_n) - I(y_1, \dots, y_n)$$

por uma quantidade de ordem superior a um, relativo a  $h_i$  e  $h'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Desde que  $y_i(x)$  e  $y_i(x) + h_i(x)$  satisfaçam a condição de fronteira (1.6.22), para cada  $i$ , é claro que

$$h_i(a) = h_i(b) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Agora usando o Teorema de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_a^b [F(x, \dots, y_i + h_i, \dots, y'_i + h'_i, \dots) - F(x, \dots, y_i, \dots, y'_i, \dots)] dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i + F_{y'_i} h'_i) dx + \dots, \end{aligned}$$

onde as reticências denotam termos de ordem superior a um, relativo a  $h_i$  e  $h'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). A última integral do lado direito representa a parte principal linear do incremento  $\Delta I$ , e logo a variação de  $I(y_1, \dots, y_n)$  é

$$\Delta I = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i + F_{y'_i} h'_i) dx,$$

como todos os incrementos  $h_i(x)$  são independentes, podemos escolher arbitrariamente um deles (satisfazendo a condição de fronteira) e todos os outros nulos. Então, a condição necessária  $\delta I = 0$  para um extremo implica

$$\int_a^b (F_{y_i} h_i + F_{y'_i} h'_i) dx = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

usando o Lema 2.2.8, obtemos o seguinte sistema de equações de Euler-Lagrange:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.6.23)$$

O sistema (1.6.23) é um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, sua solução em geral depende de  $2n$  constantes arbitrárias, que são determinadas usando as condições de contorno (1.6.22). Isto demonstra o seguinte

**Teorema 1.6.1** *Uma condição necessária para a curva*

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

ser um extremo do funcional (1.6.21) é que as funções  $y_i(x)$  satisfaçam o sistema de equações de Euler-Lagrange (1.6.23).

**Observação:** Vimos como encontrar um sistema de equações de Euler-Lagrange para todo funcional do tipo (1.6.21), no entanto, dois integrandos diferentes  $F$  podem conduzir ao mesmo sistema de equações de Euler-Lagrange. De fato, seja

$$\phi = \phi(x, y_1, \dots, y_n)$$

alguma função de classe  $C^2$ , e seja

$$\psi(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial y_i} y'_i \quad (1.6.24)$$

é de fácil verificação que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y'_i} \right) \equiv 0.$$

Logo, os funcionais

$$\int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n) dx \quad (1.6.25)$$

e

$$\int_a^b [F(x, y_1, \dots, y_n) + \psi(x, y_1, \dots, y_n)] dx, \quad (1.6.26)$$

possuem o mesmo sistema de equações de Euler-Lagrange.

Dada alguma curva  $y_i = y_i(x)$ , a função (1.6.24) é exatamente a derivada total de  $\phi$  em relação a  $x$ , isto é,

$$\frac{d}{dx} [\phi(x, y_1(x), \dots, y_n(x))].$$

Portanto, a integral

$$\int_a^b \psi(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = \int_a^b \frac{d\phi}{dx} dx$$

tem os mesmos valores ao longo de toda curva que satisfaz a condição de fronteira (1.6.22). Em outras palavras os funcionais (1.6.25) e (1.6.26) definidos sobre a classe das funções que satisfazem (1.6.22) diferem apenas por uma constante.

**Definição 1.6.2** Dizemos que dois funcionais são equivalentes se eles tem as mesmas extremais (ou seja eles tem o mesmo sistema de Equações de Euler-Lagrange).

**Exemplo 1.6.3** Suponha que temos uma superfície  $\sigma$  especificada pela equação vetorial

$$r = r(u, v).$$

A menor curva sobre  $\sigma$  unindo dois pontos de  $\sigma$  é chamada geodésica. Claramente as equações para as geodésicas de  $\sigma$  são equações de Euler-Lagrange de um problema variacional. De fato, uma curva sobre a superfície  $\sigma$  pode ser dada pela equação

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

O comprimento de arco que une os pontos correspondentes aos valores  $t_0$  e  $t_1$  do parâmetro  $t$  é igual

$$I(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt,$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície  $\sigma$ . Escrevendo as equações de Euler-Lagrange para o funcional acima, obtemos

$$\frac{Eu'u'^2 + 2Fu'u'v' + Gu'v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2(Eu' + Fv')}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0,$$

$$\frac{Ev'u'^2 + 2Fv'u'v' + Gv'v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2(Fu' + Gv')}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0.$$

Este exemplo serve de motivação para o que vamos estudar na seção seguinte.

## 1.7 Problema variacional na forma paramétrica

Motivados pelo Exemplo 1.6.3, apresentaremos agora funcionais de curvas que não são dadas por uma equação da forma  $y = y(x)$ .

Suponha que no funcional

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \tag{1.7.27}$$

estamos considerando o argumento  $y$  como uma função que é dada na forma paramétrica, ao invés da forma (1.7.27). Então podemos reescrever (1.7.27), como

$$\int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt, \quad (1.7.28)$$

onde,  $\phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t)$  e  $(\dot{a} = \frac{da}{dt})$ . Neste caso temos que (1.7.28) é um funcional que depende de duas funções desconhecidas  $x(t)$  e  $y(t)$ . A função  $\phi$  que aparece na direita de (1.7.28) não envolve  $t$  explicitamente e é homogênea positiva de grau um em  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$ , isto é,

$$\phi(x, y, \lambda \dot{x}, \lambda \dot{y}) = \lambda \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}),$$

para todo  $\lambda > 0$ .

**Exemplo 1.7.1** *A função comprimento de arco*

$$\phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

é um exemplo de uma função homogênea positiva de grau um.

Por outro lado se

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

é um funcional cujo integrando  $\phi$  não envolve  $t$  explicitamente e é homogênea positiva de grau um em  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ , mostraremos que os valores de tal funcional depende apenas da curva no plano  $xy$  definida pela equação paramétrica  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , e não do parâmetro, isto é, se mudarmos o parâmetro  $t$  por um outro  $\tau$ , fazendo

$$t = t(\tau),$$

onde  $\frac{dt}{d\tau} > 0$  e  $[t_0, t_1]$  vai sobre  $[\tau_0, \tau_1]$ , então

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \phi\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.$$

Com efeito, sendo  $\phi$  homogênea positiva de grau um em  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \phi\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \phi\left(x, y, \dot{x} \frac{dt}{d\tau}, \dot{y} \frac{dt}{d\tau}\right) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \frac{dt}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Mudança de Variáveis, temos

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \phi \left( x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

o que prova a afirmação antes feita. Com isto, provamos o seguinte resultado:

**Teorema 1.7.2** *Uma condição necessária e suficiente para um funcional*

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

*depende apenas da curva no plano-xy definida pelas equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  e não da escolha da parametrização, é que o integrando  $\phi$  não envolva  $t$  explicitamente e seja uma função homogênea positiva de grau um em  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ .*

**Observação:** Suponha que alguma parametrização da curva  $y = y(x)$  reduz o funcional (1.7.27) para a forma

$$\int_{t_0}^{t_1} F \left( x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \dot{x} dt = \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt. \quad (1.7.29)$$

O problema variacional da direita de (1.7.29) conduz ao par de equações de Euler-Lagrange

$$\phi_x - \frac{d}{dt} \phi_{\dot{x}} = 0, \quad \phi_y - \frac{d}{dt} \phi_{\dot{y}} = 0, \quad (1.7.30)$$

que deve ser equivalente a única equação de Euler-Lagrange

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (1.7.31)$$

correspondente ao problema variacional original (1.7.27). Logo as equações (1.7.30) e (1.7.31) não podem ser independentes. E de fato, fazendo alguns cálculos técnicos, mostra-se que elas estão relacionadas pela identidade.

$$\dot{x} \left( \phi_x - \frac{d}{dt} \phi_{\dot{x}} \right) + \dot{y} \left( \phi_y - \frac{d}{dt} \phi_{\dot{y}} \right) = 0$$

**Observação:** Considerando um funcional na forma paramétrica

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

onde  $\phi$  não depende de  $t$  explicitamente e é homogênea positiva de grau um em  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ . O espaço das curvas  $x(t)$ ,  $y(t)$  claramente engloba as curvas que são gráficos de uma função  $y = y(x)$ , e do funcional na forma paramétrica podemos passar para o funcional original, pois

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{x}}{\dot{x}} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x} \phi(x, y, 1, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y, 1, y') dx.\end{aligned}$$

## 1.8 O problema variacional com vínculo

Em muitos problemas variacionais as condições de contorno não são suficientes para a sua resolução, e são impostas outros tipos de condições sobre as curvas admissíveis, conhecidas, como condições de vínculo.

### 1.8.1 O problema isoperimétrico

O problema isoperimétrico pode ser formulado como segue: Encontre a curva  $y = y(x)$  para a qual o funcional

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.8.32)$$

tem um extremo, onde as curvas admissíveis satisfazem a condição de fronteira

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

e são tais que um outro funcional

$$K(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx \quad (1.8.33)$$

tem um valor fixo  $l$ .

Para resolver este problema, assumimos que as funções  $F$  e  $G$  definindo os funcionais (1.8.32) e (1.8.33) tem primeiras e segundas derivadas parciais contínuas em  $[a, b]$  para valores arbitrários de  $y$  e  $y'$ . Então, temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.8.1** Dado o funcional

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

se as curvas admissíveis satisfazem as condições

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad K(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx = l \quad (1.8.34)$$

onde  $K(y)$  é outro funcional, e se  $I(y)$  tem um extremo para  $y = y(x)$ . Então se  $y = y(x)$  não é um extremo para  $K(y)$ , existe uma constante  $\lambda$ , chamada multiplicador de Lagrange, tal que  $y = y(x)$  é um extremo do funcional

$$\int_a^b (F + \lambda G) dx,$$

isto é,  $y = y(x)$  satisfaz as equações diferenciais

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \lambda \left( G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) = 0$$

**Demonstração:** Veja ([12], pp. 43). ■

**Observação:** O Teorema 2.8.1 pode ser generalizado para o caso de funcionais dependendo de  $n$  funções desconhecidas e sujeito a várias condições de vínculos do tipo (1.8.33). De fato, suponha que estamos procurando um extremo do funcional

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

sujeito as condições

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad \int_a^b G_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = l_j \quad (1.8.35)$$

com  $l_j = 1, \dots, k$  e  $k < n$ . Neste caso uma condição necessária para um extremo é que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( F + \sum_j^k \lambda_j G_j \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'_i} \left[ F + \sum_j^k \lambda_j G_j \right] \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

As  $2n$  constantes arbitrárias que aparecem na solução do sistema acima, e os valores dos  $k$  parâmetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , chamados multiplicadores de Lagrange, são determinados pelas condições de fronteira e pelas condições de vínculo.

**Observação:** Para usar o Teorema 2.8.1 na resolução de um problema isoperimétrico, escrevemos a solução de (1.8.35), a qual contém duas constantes arbitrárias além do parâmetro  $\lambda$ . Então determinamos estes três valores usando as condições (1.8.34).

**Exemplo 1.8.2** *Entre todas as curvas de comprimento  $l$  no semi-plano superior passando pelos pontos  $(-a, 0)$  e  $(a, 0)$ , encontre a qual, com o segmento  $[a, b]$ , circunda maior área.*

*Solução:* Estamos procurando por uma função  $y = y(x)$  para qual o funcional

$$I(y) = \int_{-a}^a y dx$$

tem um máximo sujeito as condições

$$y(-a) = y(a) = 0, \quad K(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Assim, estamos lidando com um problema isoperimétrico. Usando o Teorema 2.8.1, formamos o funcional

$$\int_{-a}^a (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx = l.$$

Escrevendo as equações de Euler-Lagrange para este funcional, obtemos

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

integrando em  $x$ , obtemos

$$x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \Leftrightarrow \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = (c_1 - x)$$

mas isto é equivalente a

$$y' = \frac{c_1 - x}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 - x)^2}}$$

integrando mais uma vez em  $x$  e resolvendo a integral do lado direito por substituição, temos

$$(y - c_2)^2 + (x - c_1)^2 = \lambda^2$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes obtidas nas integrações. Temos, então como solução uma família de círculos.

Usando as condições de contorno e de vínculo descobrimos os valores de  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\lambda$ .

### 1.8.2 Condições de vínculos finitas

No problema isoperimétrico as condições de vínculo que devem ser satisfeitas pelas funções  $y_1, \dots, y_n$  são dadas em formas de funcionais. Agora consideraremos um problema de um tipo de funcional diferente que pode ser formulado como segue: Encontre as funções  $y_i(x)$  para as quais o funcional

$$I(y_1 \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1 \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

tem um extremo, onde as funções admissíveis satisfazem as condições de contorno

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

e  $k$  "finitas" condições de vínculo ( $k < n$ )

$$g_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad (j = 1, \dots, k). \quad (1.8.36)$$

Em outras palavras, o funcional  $I(y_1 \dots, y_n)$  não está sendo considerado para todas as curvas satisfazendo as condições de fronteira, mas apenas aqueles que estão na variedade de dimensão  $n - k$  definida por (1.8.36).

Apresentaremos, agora, um Teorema análogo ao Teorema 2.8.1. Por simplicidade enunciaremos para o caso  $n = 2$  e  $k = 1$ .

**Teorema 1.8.3** *Dado o funcional*

$$I(y, z) = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$$

*se as curvas admissíveis estão na superfície*

$$g(x, y, z) = 0 \quad (1.8.37)$$

*e satisfazem as condições*

$$y(a) = A_1, \quad y(b) = B_1, \quad z(a) = A_2, \quad z(b) = B_2$$

*e além disso se  $I(y, z)$  tem um extremo para as curvas*

$$y = y(x), \quad z = z(x). \quad (1.8.38)$$

Então se  $g_y$  e  $g_z$  não são simultaneamente nulas em qualquer ponto da superfície (1.8.37), existe uma função contínua  $\lambda(x)$  tal que (1.8.38) é uma extremal do funcional

$$\int_a^b [F + \lambda(x)g] dx.$$

Isto é, as curvas (1.8.38) satisfaz as equações diferenciais

$$F_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad F_z + \lambda g_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

**Demonstração:** Ver ([12], pp. 46). ■

**Observação:** Conforme [12], o Teorema 2.8.3 permanece válido quando a classe das curvas admissíveis consiste do espaço das curvas suaves satisfazendo a equação  $g(x, y, z, y', z') = 0$ . Mas precisamente, se o funcional  $I$  tem um extremo para uma curva  $\gamma$ , sujeito a condição (1.8.38), e se  $g_{y'}$  e  $g_{z'}$  não são simultaneamente nulas ao longo de  $\gamma$ , então existe uma função  $\lambda(x)$ , tal que  $\gamma$  é uma extremal do sistema

$$\Phi_y - \frac{d}{dx} \Phi_{y'} = 0, \quad \Phi_z - \frac{d}{dx} \Phi_{z'} = 0,$$

onde,  $\Phi = F + \lambda G$ .

## 1.9 A forma canônica das equações de Euler-Lagrange

As equações de Euler-Lagrange para o funcional

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (1.9.39)$$

formam um sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.9.40)$$

Este sistema pode ser reduzido de várias maneiras para um sistema de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. Por exemplo, considerando  $y'_1, \dots, y'_n$  como novas funções independentes de  $y_1, \dots, y_n$ , podemos reescrever (1.9.40) na forma

$$\frac{dy_i}{dx} = y'_i; \quad F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.9.41)$$

Em (1.9.41)  $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n$  são  $2n$  funções desconhecidas, e  $x$  é a variável independente. No entanto uma transformação mais interessante será a que apresentaremos agora. Seja

$$p_i = F_{y'_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.9.42)$$

e suponha que o Jacobiano da mudança de coordenada

$$\det \left[ \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(y'_1, \dots, y'_n)} \right] = \det (F_{y'_i y'_k}) \neq 0,$$

onde,  $(F_{y'_i y'_k})$  denota a matriz cujas entradas são os elementos  $F_{y'_i y'_k}$ . Então podemos escrever na equação (1.9.40),  $y'_1, \dots, y'_n$  como funções das variáveis

$$x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n.$$

Em seguida expressamos a função  $F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$  que aparece em (1.9.39) em termos de uma nova função  $H(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$  relacionadas com  $F$  pela fórmula

$$H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i,$$

onde  $y'_i$  são considerados como funções das variáveis  $(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$ . A função  $H$  é chamada **Hamiltoniana** correspondente ao funcional  $I(y_1, \dots, y_n)$ . Neste caso, podemos fazer uma transformação local das "variáveis"  $x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, F$  que aparecem em (1.9.39) para as novas variáveis  $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$  chamadas **variáveis canônicas**.

Mostraremos, agora, como as equações de Euler-Lagrange se transformam quando introduzimos as variáveis canônicas. Na condição de fazer esta mudança de variáveis temos que expressar as derivadas parciais de  $F$ , isto é, as  $F_{y_i}$  (avaliadas em  $x, y'_1, \dots, y'_n$ ) em termos das derivadas parciais  $H_{y_i}$  (avaliadas em  $x, p_1, \dots, p_n$ ). O cálculo direto destas derivadas são mais leves. Portanto para evitar longos cálculos escrevemos as expressões para diferencial  $H$ . Então, usando o fato de que a primeira diferencial de uma função não depende da escolha das variáveis, obteremos as fórmulas requeridas sem muito esforço.

Pela definição de  $H$ , temos

$$dH = -dF + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (1.9.43)$$

Usualmente, antes de usar (1.9.43) para obter as expressões das derivadas de  $H$ , teremos que expressar as  $dy'_i$  em termos de  $x, y'_i, p_i$ . No entanto por causa das relações

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} = p_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

os termos contendo  $dy'_i$  em (1.9.43) cancelam-se, e obtemos

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (1.9.44)$$

Daí, para obtermos as derivadas parciais de  $H$ , apenas escrevemos os coeficientes apropriados da diferencial na direita de (1.9.44), isto é,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i.$$

Em outras palavras, as funções  $\frac{\partial F}{\partial y_i}$  e  $y'_i$  são conectadas com as derivadas parciais de  $H$  pelas fórmulas

$$y'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}. \quad (1.9.45)$$

Usando (1.9.45), podemos escrever as equações de Euler-Lagrange (1.9.40) na forma

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.9.46)$$

Estas  $2n$  equações diferenciais formam um sistema que é equivalente ao sistema (1.9.40) e é chamado **sistema de equações de Euler-Lagrange canônico** (ou simplesmente **sistema canônico de Euler-Lagrange**) do funcional (1.9.39).

## 1.10 Integral primeira das equações de Euler-Lagrange

Uma integral primeira de um sistema de equações diferenciais é uma função que tem valores constantes ao longo de cada curva integral do sistema. Os sistemas (1.9.40) e (1.9.46) são equivalentes logo, tem mesmas integrais primeiras. Primeiramente, consideremos o caso onde a função  $F$  definindo o funcional (1.9.39) não depende de  $x$  explicitamente, isto é, é da forma  $F(y_1, \dots, y_n)$ . Então a função

$$H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i$$

também não depende de  $x$  explicitamente, e logo

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right). \quad (1.10.47)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange na forma canônica (1.9.46) encontramos que (1.10.47) torna-se

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) = 0,$$

ao longo de cada extremal. Daí, se  $F$  não depende de  $x$  explicitamente, a função

$$H(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$$

é uma integral primeira da equação de Euler-Lagrange.

**Observação:** Se  $H$  depende de  $x$  explicitamente, a forma

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

pode ser deduzida usando o mesmo argumento.

Agora, consideremos uma função arbitrária da forma

$$\phi = \phi(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$$

e examinemos as condições sob a qual  $\phi$  é uma integral primeira do sistema (1.9.46). Esquecendo a suposição de que  $F$  não depende explicitamente de  $x$ , e em vez disto consideremos o caso geral. Ao longo de cada curva integral do sistema (1.9.46), obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) = [\phi, H],$$

que é chamado o **colchete de Poisson** das funções  $\phi$  e  $H$ . Assim, provamos que

$$\frac{d\phi}{dx} = [\phi, H]. \quad (1.10.48)$$

Segue-se de (1.10.48) que uma condição necessária e suficiente para uma função

$$\phi = \phi(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$$

ser uma integral primeira do sistema de equações de Euler-Lagrange (1.9.46) é que o colchete de Poisson  $[\phi, H]$  seja identicamente nulo.

## Capítulo 2

# O problema dos N-Corpos e Problemas Variacionais em Sistemas Mecânicos

O problema dos  $N$ -corpos estuda a dinâmica de  $N$  partículas materiais no espaço, com vetores posição  $q_1, \dots, q_N$  e massas  $m_1, \dots, m_N$ ,  $m_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, N$ , sujeitas unicamente a ação mútuas de suas atrações gravitacionais.

Em sistemas dinâmicos os funcionais que consideraremos serão da forma

$$\int_a^b L dt$$

onde  $L$  é a Lagrangiana do sistema.

### 2.1 Formulação do problema dos N-corpos

Considere  $N$  massas pontuais movendo-se num sistema referencial Newtoniano  $\mathbb{R}^3$ , (ou  $\mathbb{R}^2$ ) sujeitas apenas a ações mútuas de suas atrações gravitacionais. Se a  $i$ -ésima partícula tem vetor posição  $q_i$  e massa  $m_i > 0$ ; então aplicando a Segunda Lei de Newton e a Lei de Gravitação Universal, temos as

seguintes equações diferenciais de movimento

$$-m_i q_i'' = \sum_{i \neq j}^N \frac{m_i m_j (q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^3} = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (2.1.1)$$

onde

$$V = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}. \quad (2.1.2)$$

onde  $V$  é menos a energia potencial.

Seja

$$q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} \text{ (ou } \mathbb{R}^{2N})$$

e  $M = \text{diag}(m_1 m_1 m_1, \dots, m_N m_N m_N)$  (ou  $M = \text{diag}(m_1 m_1, \dots, m_N m_N)$ ) como a equação (2.1.1) é da forma

$$M q'' - \frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

defina como acima  $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  (ou  $\mathbb{R}^{2N}$ ) por

$$p = M q'$$

deste modo  $p_i = m_i q_i'$  é o momento da  $i$ -ésima partícula. Assim, as equações do movimento (2.1.1) são equivalentes a

$$q_i' = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i' = - \sum_{i \neq j}^N \frac{m_i m_j (q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^3} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.1.3)$$

ou seja, temos um sistema Hamiltoniano cuja função Hamiltoniana é dada por

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} + V. \quad (2.1.4)$$

Nos referimos a (2.1.4) como a formulação Hamiltoniana para o sistema (2.1.1) e  $H$  representa a energia do sistema. Note que a energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{m_i}.$$

Introduzindo a função Lagrangiana  $L$ , associada a este problema a qual é dada por

$$L = T - V \quad (2.1.5)$$

dizemos que (2.1.5) é a Lagrangiana do sistema (2.1.1). Voltaremos a falar sobre este assunto mais adiante na próxima seção e na Seção 3.4.

Se as  $N$  partículas estiverem num mesmo plano, temos o problema planar dos  $N$ -Corpos.

**Observação:** Como as partículas em estudo estão em  $\mathbb{R}^3$  podemos considerar cada componente  $q_j$  de  $q$  dada por

$$q_j = (x_j, y_j, z_j),$$

se  $q_j \in \mathbb{R}^2$ , então temos  $z_j = 0$ .

**Observação:** É de fácil verificação que a função Hamiltoniana  $H$  é uma integral primeira do sistema (2.1.3), ou seja,  $H$  é constante ao longo das trajetórias (curvas integrais) deste sistema.

**Observação:** O problema de  $N$ -corpos é um sistema de  $6N$  equações diferenciais de primeira ordem, uma solução completa exigirá  $6N - 1$  integrais primeiras independentes do tempo e uma que depende do tempo. Se  $N > 2$  não há muitas integrais globais. No entanto, existem 10 integrais primeiras de fácil verificação para o problema dos  $N$ -corpos, a saber, o centro de massa, o momento linear, o momento angular e a energia. Mais detalhes, veja [21].

## 2.2 Princípio da ação mínima

Agora aplicaremos os resultados obtidos no capítulo anterior em alguns problemas mecânicos.

Suponha que seja dado um sistema de  $N$  partículas (massas pontuais), onde não há influência de forças além de suas atrações mútuas. Se a  $i$ -ésima partícula tem massa  $m_i$  e coordenadas  $q_i = (x_i, y_i, z_i)$ , ( $i = 1, \dots, N$ ). Então a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (2.2.6)$$

Assumiremos que o sistema tem energia potencial  $V$ , isto é, existe uma função

$$V = V(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad (2.2.7)$$

tal que a força atuando sobre a  $i$ -ésima partícula tem componentes

$$F_1^i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_2^i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_3^i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Em seguida introduzimos a expressão

$$L = T - V \quad (2.2.8)$$

chamada função Lagrangiana do sistema de partículas. Obviamente  $L$  é uma função do tempo, das posições  $(x_i, y_i, z_i)$  e das velocidades  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  do sistema de  $N$  partículas.

Suponha que no tempo  $t_0$  o sistema está em alguma posição fixa. Então a evolução subsequente do sistema no tempo é descrita por uma curva

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t), \quad (i = 1, \dots, N)$$

no espaço  $3N$  dimensional (ou  $2N$  dimensional se for planar). Pode-se mostrar que entre todas as curvas passando por um ponto correspondente a posição inicial do sistema, a curva que de fato descreve o movimento do sistema dado, sob a influencia de forças agindo sobre ele, satisfaz a seguinte condição conhecida como Princípio da Mínima Ação de Hamilton:

**Teorema 2.2.1 (Princípio da mínima ação de Hamilton)** *O movimento de um sistema de  $N$  partículas durante um intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  é descrito pelas funções*

$$x_i(t), y_i(t), z_i(t)$$

com  $1 \leq i \leq N$ , para o qual o funcional

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x(t), x'(t)) dt \quad (2.2.9)$$

tem um mínimo. A expressão (2.2.9) é chamada mínima ação de Hamilton.

**Demonstração:** Para provarmos este resultado, mostraremos que o princípio da mínima ação implica as usuais equações de movimentos de um sistema de  $N$  partículas. Se o funcional (2.2.9) tem um mínimo, então as equações de Euler-Lagrange são

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial z'_i} = 0, \quad (2.2.10)$$

deve ser satisfeita para  $i = 1, \dots, N$ . Lembrando que a energia potencial  $V$  depende apenas de  $x_i, y_i, z_i$ , e não depende de  $x'_i, y'_i, z'_i$ , enquanto que a energia cinética  $T$  é uma soma de quadrados das componentes de velocidades  $x'_i, y'_i, z'_i$  (com coeficientes  $\frac{1}{2}m_i$ ), podemos escrever as equações (2.2.10) na forma

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}m_i x'_i = 0; \quad -\frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}m_i y'_i = 0; \quad -\frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}m_i z'_i = 0. \quad (2.2.11)$$

Mas como as derivadas

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad -\frac{\partial V}{\partial y_i}; \quad -\frac{\partial V}{\partial z_i};$$

são as componentes de força atuando na  $i$ -ésima partícula, o sistema (2.2.11) reduz-se para

$$m_i x''_i = F_1^i; \quad m_i y''_i = F_2^i; \quad m_i z''_i = F_3^i,$$

que são exatamente as equações Newtonianas do movimento para um sistema de  $N$  partículas sem estarem sujeitas a vínculo (forças externas), provando assim o Teorema. ■

**Observação:** Do Teorema 3.2.1 e da relação

$$H = -F + \sum_{i=1}^N y'_i p_i$$

onde  $p_i = F_{y_i}$ , temos que as formulações Hamiltonianas e Lagrangianas para o problema de N-corpos são equivalentes. Veremos esta equivalência de maneira mais explícita na Seção 3.4.

**Observação:** O princípio da ação mínima permanece válido no caso onde o sistema de partículas está sujeita a vínculos (forças externas atuando no sistema), restringindo então as curvas em que o funcional (2.2.9) é considerado para que satisfaçam o vínculo. Em outras palavras, neste caso, a aplicação do princípio da ação mínima será um problema variacional com vínculo, pois de acordo com a Seção 2.8.2, trata-se de minimizar o funcional (2.2.9) restringindo seu domínio às funções que satisfazem o vínculo (força externa).

**Observação:** O princípio da mínima ação pode ser usado não apenas em Mecânica, mas também em outros ramos da Física, como por exemplo na Eletrodinâmica, desde que consideremos intervalos suficientemente pequenos  $[t_0, t_1]$ , e façamos uma adaptação para um sistema Mecânico. Veja ([12], pp. 159).

## 2.3 Lei de conservação

Vimos que as equações de movimento de um sistema mecânico consistindo de  $N$  partículas, com energia cinética (2.2.6), energia potencial (2.2.7) e Lagrangiana (2.2.8), pode ser obtido do princípio da ação mínima, isto é, minimizando a integral

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt. \quad (2.3.12)$$

As variáveis canônicas correspondente ao funcional (2.3.12) são dadas por

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial x'_i} = m_i x'_i, \quad p_{iy} = \frac{\partial L}{\partial y'_i} = m_i y'_i, \quad p_{iz} = \frac{\partial L}{\partial z'_i} = m_i z'_i$$

que são exatamente as componentes do momento da  $i$ -ésima partícula. Em termos de

$$p_{ix}, \quad p_{iy}, \quad p_{iz},$$

obtemos

$$H = \sum_{i=1}^n (x'_i p_{ix} + y'_i p_{iy} + z'_i p_{iz}) - L = 2T - (T - V) = T + V,$$

assim,  $H$  é a energia total do sistema.

Usando a forma do integrando em (2.3.12), podemos encontrar várias funções, (como, a energia, o momento linear e o momento angular), que assumem valores constantes ao longo das trajetórias do sistema, obtendo assim as chamadas Leis de Conservação.

## 2.4 Equivalência entre as formulações Hamiltonianas e Lagrangianas em um sistema mecânico.

Seja

$$L(x, x')$$

a Lagrangiana de um sistema Mecânico. Suponha  $L$  regular, isto é,  $L_{x'x'}$  é uma matriz invertível. Façamos a seguinte mudança de variáveis

$$x = x, \quad y = L_{x'}(x, x')$$

que é um difeomorfismo, já que sua jacobiana

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & L_{x'x'} \end{pmatrix}$$

é inversível com inversa

$$x = x, \quad x' = \varphi(x, y),$$

para alguma aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e assim,  $D_x \varphi(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Para passarmos da formulação Lagrangiana para a formulação Hamiltoniana, defina a aplicação  $H$ , por

$$H(x, y) = \langle x', y \rangle - L(x, x') \quad (2.4.13)$$

onde,  $x' = \varphi(x, y)$  e  $\langle, \rangle$  denota o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ . A expressão (2.4.13) é chamada **Transformada de Legendre** da função  $L$ .

**Proposição 2.4.1** *Se*

$$H(x, y) = \langle x', y \rangle - L(x, x'), \quad x' = \varphi(x, y),$$

*Então*

$$H_x = -L_x; \quad H_y = x'$$

**Demonstração:** Derivando  $H$  em relação a  $x$ , temos

$$D_x H(x, y)\xi = \langle D_x \varphi(x, y)\xi, y \rangle - [(D_x L(x, x')\xi + D_{x'} L(x, x')D_x \varphi(x, y)\xi)].$$

Escrevendo esta última equação em termos de gradiente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle H_x, \xi \rangle &= \langle D_x \varphi(x, y)\xi, y \rangle - \langle D_x L(x, x'), \xi \rangle - \langle D_{x'} L(x, x'), D_x \varphi(x, y)\xi \rangle \\ &= -\langle D_x L(x, x'), \xi \rangle = -\langle L_x, \xi \rangle, \end{aligned}$$

como isto é válido para todo  $\xi$ , temos que  $H_x = -L_x$ .

De maneira análoga, derivando  $H$  em relação a  $y$ , obtemos

$$D_y H(x, y)\eta = \langle D_y \varphi(x, y)\eta, y \rangle + \langle x', \eta \rangle - D_{x'} L(x, x')D_y \varphi(x, y)\eta.$$

Em termos de gradiente, obtemos

$$\begin{aligned}\langle H_y, \eta \rangle &= \langle D_y \varphi(x, y) \eta, y \rangle + \langle x', \eta \rangle - \langle D_{x'} L(x, x'), D_y \varphi(x, y) \eta \rangle \\ &= \langle x', \eta \rangle,\end{aligned}$$

como isto é válido para todo  $\eta$ , resulta que  $H_y = x'$ . ■

**Corolário 2.4.2** *Se  $(x(t), x'(t))$  é solução de*

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0,$$

*então  $(x(t), y(t))$  é solução de*

$$x' = H_y, \quad y' = -H_x.$$

**Demonstração:** De fato, sendo  $H_y = x'$  e  $H_x = -L_x$ , usando transformada de Legendre, temos  $y' = -H_x$ . ■

Em outras palavras, se as variáveis posição e velocidade,  $(x(t), x'(t))$ , é solução do sistema Lagrangeano, então usando a transformada de Legendre temos que as novas variáveis posição e momento,  $(x(t), y(t))$ , é solução do sistema Hamiltoniano.

Agora dado  $H(x, y)$  a função Hamiltoniana de um sistema Hamiltoniano. Suponha  $H$  regular, isto é,  $H_{yy}$  uma matriz invertível. Considere a seguinte mudança de variáveis

$$x = x, \quad x' = H_y(x, y)$$

que é um difeomorfismo, já que a matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & H_{yy} \end{pmatrix}$$

é invertível com inversa

$$x = x, \quad y = \psi(x, x'),$$

para alguma  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Para passarmos da formulação Hamiltoniana para a formulação Lagrangiana, defina a aplicação  $L$ , dada por

$$L(x, x') = \langle x', y \rangle - H(x, y). \quad (2.4.14)$$

A expressão (2.4.14) é a **Transformada de Legendre** da função  $H$ .

**Proposição 2.4.3** *Seja*

$$L(x, x') = \langle x', y \rangle - H(x, y)$$

onde,  $y = \psi(x, x')$ . Então

$$L_x = -H_x, \quad L_{x'} = y.$$

**Demonstração:** Derivando  $L$  em relação a  $x$ , temos

$$D_x L(x, x')\xi = \langle x', D_x \psi(x, x')\xi \rangle - D_x H(x, y)\xi - D_y H(x, y)D_x \psi(x, x')\xi.$$

Em termos de gradiente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle L_x, \xi \rangle &= \langle x', D_x \psi(x, x')\xi \rangle - \langle D_x H(x, y), \xi \rangle - \langle D_y H(x, y), D_x \psi(x, x')\xi \rangle \\ &= -\langle D_x H(x, y), \xi \rangle = -\langle H_x, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Como isto é válido para todo  $\xi$ , segue-se que  $L_x = -H_x$ .

Da mesma forma, derivando  $L$  em relação a  $x'$ , temos

$$D_{x'} L(x, x')\eta = \langle \eta, y \rangle + \langle x', D_{x'} \psi(x, x')\eta \rangle - D_y H(x, y)D_{x'} \psi(x, x')\eta.$$

Em termos de gradiente

$$\begin{aligned} \langle L_{x'}, \eta \rangle &= \langle \eta, y \rangle + \langle x', D_{x'} \psi(x, x')\eta \rangle - \langle D_y H(x, y), D_{x'} \psi(x, x')\eta \rangle \\ &= \langle \eta, y \rangle, \end{aligned}$$

como isto vale para todo  $\eta$ , resulta que  $L_{x'} = y$ . ■

**Corolário 2.4.4** *Se  $(x(t), y(t))$  é solução do sistema*

$$x' = H_y; \quad y' = -H_x$$

então  $(x(t), x'(t))$  é solução de

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{x'} = 0.$$

**Demonstração:** De fato,

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{x'} = -H_x - \frac{d}{dt}y = -H_x - y' = 0.$$

■

Em outras palavras, se as variáveis posição e momento,  $(x(t), y(t))$ , é solução do sistema Hamiltoniano, então usando a transformada de Legendre temos que as novas variáveis posição e velocidade,  $(x(t), x'(t))$ , é solução do sistema Lagrangeano.

## Capítulo 3

# O Método Direto em Cálculo Variacional e Sistemas Envolvendo Força Forte e Força Fraca

Nosso objetivo neste Capítulo é introduzir os resultados básicos importantes, para em seguida no Capítulo 4 fazer as aplicações em problemas da Mecânica Celeste. Para este propósito, começamos introduzindo o espaço de Sobolev  $H^1$  e os conceitos de coercividade e seqüência minimizante, ou seja, trabalharemos o método direto em Cálculo Variacional. Posteriormente introduzimos os conceitos de força forte e força fraca que serão muito úteis no próximo Capítulo para mostrar a existência de soluções sem singularidades. Por último trabalharemos com a noção de ponto crítico de um funcional sobre  $H^1$ , assim como a de gradiente deste funcional, e analisamos a regularidade destes pontos críticos.

### 3.1 Notações e Preliminares

Para aplicações  $T$ -periódica,  $t \rightarrow x(t)$ ,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ , temos os seguintes produtos internos

$$\langle x, y \rangle_0 = \int_0^T \langle x(t), y(t) \rangle dt,$$

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle_0 + \langle x', y' \rangle_0 = \int_0^T \langle x(t), y(t) \rangle dt + \int_0^T \langle x'(t), y'(t) \rangle dt,$$

onde  $\langle, \rangle$  é o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^2$  e  $x'$  denota a derivada de  $x$  com respeito ao parâmetro  $t$ . Lembrando, ainda, que  $C^2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  é o espaço das funções definidas sobre  $[0, T]$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  que tem segundas derivadas contínuas.

Sejam  $\|x\|_0$  e  $\|x\|_1$  as respectivas normas com respeito aos produtos internos acima, isto é,

$$\|x\|_0 = \left( \int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_1 = \left( \int_0^T |x(t)|^2 dt + \int_0^T |x'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|x\|_0^2 + \|x'\|_0^2}.$$

Lembramos que  $S^1 \equiv [0, T]/\{0, T\}$ . Denotamos por

$$H^0(S^1; \mathbb{R}^{2k}) \text{ e } H^1(S^1; \mathbb{R}^{2k}) \text{ (ou } H^1([0, T]; \mathbb{R}^{2k})$$

o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de  $(C^2([0, T]; \mathbb{R}^{2k}))$  com as normas  $\|\cdot\|_0$  e  $\|\cdot\|_{H^1} = \|\cdot\|_1$ , respectivamente. Lembremo-nos que para todo espaço  $W$  com produto interno existe um espaço de Hilbert  $H$ , (seu completamento), e um isomorfismo  $A$  de  $W$  sobre um subespaço  $\widetilde{W}$  de  $H$ , denso em  $H$ . O espaço  $H$  é único a menos de isomorfismo. (Veja [17], pp. 139).

**Observação:** O espaço  $H^0(S^1; \mathbb{R}^{2k})$  é simplesmente o espaço de aplicações  $L^2([0, T])$  e  $H^1(S^1; \mathbb{R}^{2k})$  é o espaço de Sobolev das aplicações absolutamente contínuas cujas derivadas são de quadrado integrável, (veja [14]). Além disso, o completamento das funções de classe  $C^2([0, T])$  coincide com o completamento das funções de classe  $C^\infty([0, T])$ , e temos ainda mais, para qualquer  $1 \leq k \leq \infty$ , verifica-se que  $C^k([0, T]; \mathbb{R}^N)$  é denso em  $H^1([0, T]; \mathbb{R}^N)$  com a norma  $\|\cdot\|_{H^1}$ . (Veja [3]).

## 3.2 O Método direto em problemas variacionais

Nesta seção veremos importantes métodos que são usados para resolver alguns problema variacionais sem ter que resolver um sistema de EDO's.

### 3.2.1 Coercividade de um funcional

Consideraremos nesta seção  $\mathfrak{S}$  como um espaço linear normado. Em particular, podemos considerar  $\mathfrak{S}$  como sendo um subespaço de  $H^1 = H^1(S^1; \mathbb{R}^{2k})$ .

**Definição 3.2.1** *Considere um funcional  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $I$  é coercivo sobre  $\mathfrak{S}$ , se  $I(y) \rightarrow +\infty$  quando  $\|y\| \rightarrow +\infty$ .*

De maneira análoga para funções de  $N$  variáveis, temos a seguinte definição

**Definição 3.2.2** *Seja  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de  $N$  variáveis reais. Dizemos que  $F$  é coerciva sobre  $\mathbb{R}^N$ , se  $F(y) \rightarrow +\infty$  para todo  $y \in \mathbb{R}^N$  com  $\|y\| \rightarrow +\infty$ .*

**Exemplo 3.2.3** *Seja  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por*

$$\int_0^T (|y(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt$$

*Então claramente  $I$  é coercivo, pois se*

$$\|y\|_{H^1} = \left( \int_0^T [|y(t)|^2 + |y'(t)|^2] dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow +\infty,$$

*então*

$$I(y) = \|y\|_{H^1}^2 \rightarrow +\infty.$$

**Proposição 3.2.4** *No caso do espaço de funções  $\mathfrak{S}$  ser de dimensão finita temos que uma função coerciva  $F : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$  e contínua, admite um mínimo global, isto é, existe  $x_0 \in \mathfrak{S}$ , tal que  $F(x) \geq F(x_0)$  para todo  $x \in \mathfrak{S}$ .*

**Demonstração:** Da coercividade de  $F(x)$ , é suficiente procurar tal  $x_0$  num conjunto compacto (fechado e limitado) conveniente, digamos uma bola fechada de centro  $x = 0$  e raio  $R$ ,  $\overline{B}_R(0)$ , para algum  $R > 0$ . (A coercividade de  $F(x)$  permite escolher  $R > 0$  tal que  $F(x) > F(0)$  para todo  $x$  com  $\|x\| > R$  e isso assegura que o ponto de mínimo deverá existir e necessariamente estará na bola  $\overline{B}_R(0)$ ). Mas do fato de  $\mathfrak{S} \equiv \mathbb{R}^n$  temos que:

- (a) A bola fechada  $\overline{B}_R(0)$  é um conjunto compacto, logo toda seqüência de pontos possuem uma subseqüência convergindo para um ponto da bola;
- (b) Uma função contínua  $F : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida num conjunto compacto tem um mínimo, isto é existe  $x_0 \in K$ , tal que  $F(x) \geq F(x_0)$  para todo  $x \in K$ . Finalmente, usando (a) e (b) podemos prontamente concluir o teorema. Os fatos cruciais da prova acima foram: (a) e o fato de  $F|_{\overline{B}_R(0)}$  ser contínua. (A coercividade de  $F(x)$  no espaço  $\mathfrak{S}$  foi usado para reduzir o problema de  $\mathfrak{S}$  para  $\overline{B}_R(0) \subset \mathfrak{S}$ ). ■

### 3.2.2 Seqüência minimizante

Há várias técnicas diferentes relacionadas com o método direto principal, que servem para aproximar um espaço de funções de dimensão infinita por espaços de dimensão finita. No entanto nesta subseção consideraremos apenas os métodos baseados nas idéias seguintes: Considere o problema de encontrar o mínimo de um funcional  $I(y)$  definido sobre um espaço linear  $\mathfrak{S}$ . **Para o problema fazer sentido é necessário assumirmos que há funções em  $\mathfrak{S}$  para quais  $I(y) < \infty$ , e além do mais que**

$$\inf_{y \in \mathfrak{S}} I(y) = \mu > -\infty. \quad (3.2.1)$$

Então pela definição de  $\mu$ , existe uma seqüência de funções  $\{y_n\}$ , chamada **seqüência minimizante**, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = \mu.$$

Se a seqüência  $\{y_n\}$  tem uma função limite  $y^*$ , e se ele é legítimo no sentido de podermos escrever

$$I(y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n), \quad (3.2.2)$$

isto é,

$$I(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n),$$

então

$$I(y^*) = \mu,$$

e  $y^*$  por ser uma função na qual o funcional  $I$  assume um extremo (mínimo), é a solução de um problema variacional. Além disso, as funções da seqüência minimizante  $y_n$  podem ser consideradas como soluções aproximadas do nosso problema variacional, pois a medida que  $y_n \rightarrow y^*$ , temos que  $I(y_n) \rightarrow I(y^*) = \mu$ .

Daí, para resolver um dado problema variacional pelo método direto, precisamos:

- (1) Construir uma seqüência minimizante  $y_n$ ;
- (2) Provar que  $y_n$  tem uma função limite  $y^*$ ;
- (3) Provar a legitimidade do limite dada pela expressão (3.2.2).

**Comentários:**

(A) Dois métodos diretos, o de Ritz e o das Diferenças Finitas, cada um envolvendo a construção de uma seqüência minimizante serão discutidos nesta Subseção. Complementamos que uma seqüência minimizante pode sempre ser construída se (3.2.1) vale.

(B) Mesmo se uma seqüência minimizante  $\{y_n\}$  exista para um dado problema variacional, ela pode não ter uma função limite  $y^*$ . Por exemplo, considere o funcional definido sobre  $C^1([-1, 1])$  por

$$I(y) = \int_{-1}^1 t^2 y'^2 dt,$$

com

$$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1. \quad (3.2.3)$$

Obviamente,  $I(y)$  assume apenas valores não negativos e

$$\inf_y I(y) = 0.$$

Podemos escolher como seqüência minimizante

$$y_n(t) = \frac{\tan^{-1}(nt)}{\tan^{-1}(n)}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.2.4)$$

como

$$\int_{-1}^1 \frac{n^2 t^2 dt}{[\tan^{-1}(n)]^2 [1 + n^2 t^2]^2} < \frac{1}{[\tan^{-1}(n)]^2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + n^2 t^2} = \frac{2}{n \tan^{-1}(n)}.$$

Logo,  $I(y_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas quando  $n \rightarrow \infty$  a seqüência (3.2.4) não tem limite na classe das funções contínuas satisfazendo as condições de fronteira (3.2.3). De fato,

$$y_n(t) \rightarrow 0 \text{ se } t = 0, \quad y_n(t) \rightarrow 1 \text{ se } t > 0, \quad y_n(t) \rightarrow -1 \text{ se } t < 0.$$

Mesmo se a seqüência minimizante  $\{y_n\}$  tem um limite  $y^*$  no sentido da norma de  $C([a, b])$  (isto é  $y_n \rightarrow y^*$  sem qualquer exigência sobre a convergência das derivadas de  $y_n$ ) temos que (3.2.2) é ainda

válido, porém é não trivial a justificativa, pois em geral, as funções consideradas no cálculo das variações não são contínuas na norma dada em  $C([a, b])$ . No entanto, (3.2.2) ainda vale se a continuidade de  $I(y)$  for substituída pela condição de continuidade fraca, que será definida adiante, (veja [12], pp. 194).

**Teorema 3.2.5** *Se  $\{y_n\}$  é uma seqüência, em  $\mathfrak{S}$ , minimizante para o funcional  $I(y)$ , com função limite  $y^*$ , e se  $I(y)$  é semi-contínuo inferiormente em  $y^*$ , então*

$$I(y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n).$$

**Demonstração:** Por um lado,

$$I(y^*) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = \inf_{y \in \mathfrak{S}} I(y), \quad (3.2.5)$$

enquanto por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$I(y_n) - I(y^*) > -\varepsilon, \quad (3.2.6)$$

se  $n$  é suficientemente grande. Fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (3.2.5), obtemos

$$I(y^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) + \varepsilon$$

e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos

$$I(y^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n). \quad (3.2.7)$$

De (3.2.5) e (3.2.7) segue-se o resultado. ■

Este Teorema simplesmente assegura que semi-continuidade do funcional  $I(y)$  em  $y^*$ , implica legitimidade do limite de  $\{y_n\}$ .

### 3.2.3 O método de Ritz e o método das diferenças finitas

Primeiro descreveremos o método de Ritz que é um dos mais usados em problemas variacionais diretos. Suponha que estamos olhando para o mínimo de um funcional  $I(y)$  definido sobre algum espaço de funções  $\mathfrak{S}$ , que por simplicidade, suponhamos um espaço linear normado. Se  $\{\varphi_n\}$  é uma seqüência de funções em  $\mathfrak{S}$ , e se  $\mathfrak{S}_n$  é o subespaço  $n$ -dimensional de  $\mathfrak{S}$  gerado pelas  $n$  primeiras funções de  $\{\varphi_n\}$ , isto é, o conjunto de todas as combinações lineares da forma

$$\alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_n \varphi_n, \quad (3.2.8)$$

onde,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Então, sobre cada subespaço  $\mathfrak{S}_n$  o funcional  $I(y)$  conduz à uma função

$$I(\alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n) \quad (3.2.9)$$

de  $n$  variáveis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Em seguida, escolhemos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , de tal modo que minimize (3.2.9). Denotemos o mínimo por  $\mu_n$  e o elemento de  $\mathfrak{S}_n$  onde o mínimo é atingido por  $y_n$ . (Em princípio, este é um problema mais simples do que o de encontrar o mínimo do funcional original  $I(y)$ , pois estamos, agora, lidando com um subespaço de dimensão finita). Claramente,  $\mu_n$  não pode aumentar com  $n$ , isto é, devemos ter

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$$

pois se  $A \subset B$ , então  $\inf_{y \in A} I \geq \inf_{y \in B} I$ . Como toda combinação linear de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  é automaticamente uma combinação linear de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ , cada subespaço da seqüência  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$  está contido no próximo.

**Definição 3.2.6** *A seqüência  $\{\varphi_n\}$  é dita ser completa (em  $\mathfrak{S}$ ) se dada qualquer  $y \in \mathfrak{S}$  e qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe uma combinação linear  $\eta_n$  da forma (3.2.8) tal que*

$$\|\eta_n - y\| < \varepsilon$$

onde  $n$  depende de  $\varepsilon$ .

Agora, no próximo Teorema, daremos condições que garantem quando a seqüência  $\{y_n\}$  é uma seqüência minimizante.

**Teorema 3.2.7** *Se o funcional  $I(y)$  é contínuo em  $\mathfrak{S}$ , e se a seqüência  $\{\varphi_n\}$  é completa, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$$

onde  $\mu = \inf_{y \in \mathfrak{S}} I(y)$ .

**Demonstração:** Dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , seja  $y^*$  tal que

$$I(y^*) < \mu + \varepsilon,$$

(um tal  $y^*$  existe para todo  $\varepsilon > 0$ , pela definição de  $\mu$ ). Sendo  $I(y)$  contínuo,

$$|I(y) - I(y^*)| < \varepsilon \quad (3.2.10)$$

contanto que  $\|y - y^*\| < \delta = \delta(\varepsilon)$ . Seja  $\eta_n$  uma combinação linear do tipo (3.2.8) tal que  $\|\eta_n - y^*\| < \delta$ . (Uma tal seqüência  $\eta_n$  sempre existe para  $n$  grande pois  $\{\varphi_n\}$  é completa). Além disso, seja  $y_n$  uma combinação linear da forma (3.2.8) para qual (3.2.9) assume seu mínimo. Então usando (3.2.10), encontramos que

$$\mu \leq I(y_n) \leq I(\eta_n) < \mu + 2\varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$$

provando, assim, o Teorema. ■

### **Comentários:**

(A) A idéia geométrica da prova é a seguinte: Se  $\varphi_n$  é completa, então todo elemento no espaço de dimensão infinita  $\mathfrak{S}$ , pode ser aproximado arbitrariamente de perto (isto é, a aproximação não é grosseira), por um elemento do espaço de dimensão finita  $\mathfrak{S}_n$  (para  $n$  bastante grande). Se  $y^*$  é um elemento de  $\mathfrak{S}$  para o qual  $I(y^*) = \mu$  e seja  $y_n^* \in \mathfrak{S}_n$  uma seqüência de funções convergindo para  $y^*$ . Então  $y_n^*$  é uma seqüência minimizante, pois  $I(y)$  é contínuo. Embora esta seqüência minimizante não seja extruturada sem os conhecimentos anteriores de  $y^*$ , pode-se mostrar que a nossa construção explícita da seqüência  $y_n$ , é tal que, podemos pegar valores de  $I(y_n)$  arbitrariamente próximos de  $I(y_n^*)$ , e assim, esta seqüência é minimizante. (Veja [12], pp. 196).

(B) A velocidade da convergência do método de Ritz para um dado problema variacional obviamente depende do problema e da escolha da seqüência  $\varphi_n$ . No entanto, veja ([12], pp. 197), que em muitos casos, combinações lineares envolvendo apenas um número pequeno de funções  $\varphi_n$  é suficiente para dar totalmente uma aproximação satisfatória para a solução exata.

Agora descreveremos outro método envolvendo uma seqüência de aproximações de  $\mathfrak{S}$ , por aproximações de espaços de dimensão finita. Este é o método das Diferenças Finitas que já foi estudado na Seção 2.4, onde fizemos uma conexão com as equações de Euler-Lagrange.

O problema de encontrar um extremo para o funcional

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (3.2.11)$$

pode ser aproximado pelo problema de encontrar o extremo de uma função de  $n$  variáveis, obtido como segue: Dividamos o intervalo  $[a, b]$  em  $n + 1$  sub-intervalos iguais introduzindo a partição

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_{n+1} = b$$

e substituímos a função suave  $y(x)$  pela linha poligonal com vértices

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

onde  $y_i = y_i(x_i)$ , então (3.2.11) pode ser aproximada pela soma

$$I(y_1, \dots, y_n) \equiv \sum_{i=0}^n F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x, \quad (3.2.12)$$

que é uma função de  $n$ -variáveis. (Lembrando que  $y_0 = A$  e  $y_{n+1} = B$  são fixos.) Se para cada  $n$  encontrarmos a linha poligonal minimizante de (3.2.12), obtemos uma seqüência de soluções aproximadas para o problema variacional original.

### 3.2.4 Minimização básica

Apresentaremos nesta Subseção um resultado que resume o método direto usado em problemas variacionais. De acordo com [8], este método surgiu por volta da segunda metade do século XIX e os primeiros matemáticos à estudá-lo foram: Hilbert, Lebesgue, Tonelli e Weierstrass.

Consideraremos  $\mathfrak{S}$  como um espaço de Hilbert.

**Definição 3.2.8** *Uma seqüência  $y_n$  em  $\mathfrak{S}$  converge fracamente para uma função  $y \in \mathfrak{S}$  se  $\langle y_n, h \rangle \rightarrow \langle y, h \rangle$ , para toda  $h \in \mathfrak{S}$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota um produto interno em  $\mathfrak{S}$ .*

**Definição 3.2.9** (a) *Um funcional  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser **fracamente contínuo** se*

$$I(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n),$$

sempre que  $y_n \rightarrow y$ , fracamente, quando  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Um funcional  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser **fracamente semi-contínuo inferiormente** se

$$I(y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(y_n),$$

sempre que  $y_n \rightarrow y$ , fracamente, quando  $n \rightarrow \infty$ .

(c) Um funcional  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser **fracamente semi-contínuo superiormente** se

$$I(y) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} I(y_n),$$

sempre que  $y_n \rightarrow y$ , fracamente, quando  $n \rightarrow \infty$ .

Com estas definições como em [8], temos os seguintes Lemas:

**Lema 3.2.10** A bola fechada  $\overline{B}_R(0) \subset \mathfrak{S}$  é fracamente compacta, isto é, dada uma seqüência  $y_n$  com  $\|y_n\| \leq R$ , existem uma subseqüência  $y_{n_k}$  e  $y^*$  com  $\|y^*\| \leq R$ , tal que  $y_{n_k} \rightarrow y^*$  fracamente.

**Demonstração:** Veja ([3], pp. 43). ■

**Lema 3.2.11** A norma  $N(y) = \|y\|_1 = \left[ \int_0^T |y(t)|^2 dt + \int_0^T |\dot{y}(t)| dt \right]^{\frac{1}{2}}$ ;  $y \in H^1$ , é um funcional fracamente semi-contínuo inferiormente.

**Demonstração:** Basta combinar o Teorema de Sobolev com o Lema de Fatou e, usar o fato que, toda seqüência  $\{y_n\}$  de  $H^1$ , é contínua e está definida num compacto. ■

**Lema 3.2.12** Dada uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e seja  $I : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$I(y) = \int_0^T f(y(t)) dt,$$

Então,  $I$  é um funcional fracamente contínuo.

**Demonstração:** Seja  $y_n$  uma seqüência em  $\mathfrak{S}$  convergindo fracamente para  $y$ . Então, sendo  $y_n$  definida num compacto e  $f$  contínua, temos que  $f \circ y_n$  converge fracamente uniformemente para  $f \circ y$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f(y_n(t)) dt = \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n(t)) dt = \int_0^T f(y(t)) dt = I(y).$$

■

**Teorema 3.2.13** (*Minimização Básica*) *Seja  $\mathfrak{S}$  um espaço de Hilbert e assumamos que um dado funcional  $I : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é*

(a) *Coercivo;*

(b) *Fracamente semi-contínuo inferiormente.*

*Então,  $I(y)$  tem um mínimo, isto é, existe  $y_0 \in \mathfrak{S}$ , tal que  $I(y) \geq I(y_0)$  para todo  $y \in \mathfrak{S}$ .*

**Demonstração:** Usando a coercividade do funcional  $I(y)$ , escolhamos  $R > 0$ , tal que  $I(y) > I(0)$  para todo  $y$  com  $\|y\| > R$ . Então podemos restringir nossa atenção para as bolas fechadas  $\overline{B}_R(0) \subset \mathfrak{S}$ . Começamos afirmando que o ínfimo

$$\mu = \inf_{y \in \mathfrak{S}} I(y)$$

é finito. De fato, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(z_n) = -\infty$  para alguma seqüência  $z_n$  em  $\overline{B}_R(0)$  então pelo Lema 4.2.10, existe  $z^* \in \overline{B}_R(0)$  e uma subseqüência  $z_{n_k}$ , tal que

$$z_{n_k} \rightarrow z^*$$

fracamente. Pela semi-continuidade fraca de  $I(y)$ , chegamos na conclusão absurda que

$$I(z^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(z_{n_k}) = -\infty.$$

Logo,

$$I(y) \geq \mu > -\infty, \quad \forall y \in \mathfrak{S}. \quad (3.2.13)$$

Agora, seja  $y_n$  uma seqüência minimizante para  $I$  em  $\overline{B}_R(0)$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = \mu.$$

Novamente, usando a compacidade fraca da bola dada pelo Lema 4.2.10, existe  $y_0 \in \overline{B}_R(0)$  e uma subsequência  $y_{n_k}$  de  $y_n$ , tal que  $y_{n_k} \rightarrow y_0$  fracamente. E pela semi-continuidade inferior de  $I(y)$ , concluímos que

$$I(y_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(y_{n_k}) = \mu,$$

logo,  $I(y_0) = \mu$  e

$$I(y) \geq I(y_0), \quad \forall y \in \mathfrak{S}.$$

Em vista de (3.2.13), o Teorema está demonstrado. ■

### 3.3 Sistemas envolvendo força forte e força fraca

Considere o seguinte funcional

$$I(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |x'(t)|^2 - V(x(t)) \right] dt, \quad (3.3.14)$$

onde  $V = V(x)$  é um "potencial" correspondente à um sistema dinâmico conservativo

$$mx'' = -\nabla V(x), \quad (3.3.15)$$

com  $x \in \mathbb{R}^N - S$ ,  $V : \mathbb{R}^N - S \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ , onde  $S$  é o conjunto das singularidades de  $V$ .

A seguir apresentaremos dois novos conceitos, o de força forte e o de força fraca, que foram introduzidos por Gordon em [13].

**Definição 3.3.1** Dizemos que o potencial  $V$ , que tem  $S$  como conjunto das singularidades, satisfaz a **condição de força forte** se, e somente se, existe uma função  $U$  e uma vizinhança  $N$  de  $S$ , tal que

$$(i) U(x) \rightarrow -\infty; \quad (ii) V(x) \leq -|\nabla U(x)|^2. \quad (F.F.)$$

para todo  $x \in N - S$ , com  $x \rightarrow S$ .

**Definição 3.3.2** Se o potencial  $V$  de (3.3.15) satisfaz a condição (F.F.), dizemos que (3.3.15) é um **sistema envolvendo força forte**. Caso  $V$  não satisfaça a condição (F.F.) dizemos que (3.3.15) é um **sistema envolvendo força fraca**.

**Exemplo 3.3.3** *O potencial  $V : \mathbb{R}^N - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $V(x) = -\frac{1}{|x|^2}$ , com  $S = \{0\}$ , satisfaz a condição (F.F.).*

De fato, basta considerar a função  $U$  dada por  $U(x) = \log|x|$ . Logo, quando  $|x| \rightarrow 0$ , temos que

$$U(x) = \log|x| \rightarrow -\infty,$$

e

$$-V(x) = \frac{1}{|x|^2} = |\nabla U(x)|^2.$$

**Exemplo 3.3.4** *O potencial  $V : \mathbb{R}^N - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ , com  $S = \{0\}$ , não satisfaz a condição (F.F.), (ou seja o sistema (3.3.15) correspondente é um sistema de força fraca).*

De fato, já no caso unidimensional,  $x \in \mathbb{R}$ , não existe função  $U$  satisfazendo as duas condições de (F.F.). Com efeito, considere  $U$  satisfazendo a segunda condição de (F.F.), então

$$|\nabla U(x)|^2 = |U'(x)|^2 \leq \frac{1}{|x|},$$

supondo  $x > 0$  e integrando ambos os membros da última desigualdade, obtemos

$$-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \leq U(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, quando  $x \rightarrow 0$ , temos que  $U(x) \rightarrow 0$ , contradizendo a primeira condição de (F.F.). Para  $x < 0$ , chega-se a mesma contradição.

**Observação:** Os Exemplos 4.3.3 e 4.3.4, são casos particulares do resultado geral que afirma que o potencial gravitacional

$$V(x) = -\frac{1}{|x|^\alpha}$$

satisfaz a condição de (F.F.) se, e somente se,  $\alpha \geq 2$ , (veja, [10] e [13]).

Assumamos que o potencial  $V$  tem a forma

$$V(x) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} f(r_{ij}),$$

com  $r_{ij} = |x_i - x_j|$ , e onde a função potencial de dois corpos  $f(r)$ , sendo  $r = r_{ij}$ , é uma função diferenciável não positiva de  $r > 0$ , à qual explode quando  $r_{ij}$  tende à 0. O potencial é dito Newtoniano quando  $f = \frac{c}{r}$ , para alguma constante positiva  $c$ . Assim,

$$V : \mathbb{R}^{2N} - S \rightarrow \mathbb{R}^-$$

e  $S = \Omega$  (conjunto das singularidades de  $V$ ), ou seja,  $\Omega = \bigcup_{i,j} \Omega_{ij}$ , sendo

$$\Omega_{ij} = \{r \in \mathbb{R}^{2N} : r_i = r_j\}.$$

Se colocarmos a hipótese adicional de que existem constantes positivas  $c$  e  $\delta$  tais que

$$f(r) \geq \frac{c}{r},$$

sempre que  $r < \delta$ . Temos que  $V$  satisfaz a condição de força forte e o sistema (3.3.15) é um sistema envolvendo força forte.

Assumindo as condições acima temos o seguinte resultado

**Proposição 3.3.5** *Se  $V$  é um potencial como acima, então qualquer caminho com colisão, de (3.3.15), tem ação integral infinita (ou seja o funcional dado por (3.3.14) explode).*

**Demonstração:** Suponha que o caminho sofre uma colisão com as massas  $m_i$  e  $m_j$  colidindo num tempo  $t_c \in \mathbb{R}$ . Escreva  $r$  por  $r_{ij} = r_i - r_j$ , e chame  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ . Afirmamos que a energia cinética

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |x'_i|^2$$

da ação integral satisfaz

$$T \geq \frac{m_i m_j}{4M} (|r_i - r_j|')^2 = \frac{m_i m_j}{4M} (r')^2 = k(r')^2,$$

onde  $k = \frac{m_i m_j}{4M}$ .

De fato,

$$|r_i - r_j|^2 = \langle r_i - r_j, r_i - r_j \rangle,$$

derivando ambos os membros da última expressão e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$|r_i - r_j|' \leq |r'_i - r'_j|$$

então

$$\begin{aligned} m_i m_j (|r_i - r_j|')^2 &\leq m_i m_j |r'_i - r'_j|^2 \\ &= m_i m_j [|r'_i|^2 + |r'_j|^2 - 2\langle r'_i - r'_j \rangle] \\ &\leq m_i m_j [|r'_i|^2 + |r'_j|^2 - 2|r'_i||r'_j|] \\ &\leq m_i m_j |r'_i|^2 + m_i m_j |r'_j|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^N m_i m_j |r'_i|^2 + \sum_{i,j=1}^N m_i m_j |r'_j|^2 \\ &= 2M \sum_{i=1}^N m_i |r'_i|^2 \\ &= 4MT. \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Desde que  $x$  é contínua, temos que  $r(t) < \delta$  para algum intervalo  $|t - t_c| \leq \varepsilon$ . Da condição de força forte, temos que  $-V \geq \frac{c}{r^2}$  sobre este intervalo. Assim a Lagrangiana satisfaz

$$L = T - V \geq k(r')^2 + \frac{c}{r^2}.$$

Usando o fato que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , temos que

$$L \geq 2\sqrt{kc} \frac{r'}{r}$$

para  $t \in (t_c - \varepsilon, t_c + \varepsilon)$ . Mas,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{r'}{r} dt \right| = |\ln r(t_2) - \ln r(t_1)|,$$

e  $r(t_c) = 0$ . Disto concluímos que a ação parcial

$$\int_t^{t_c+\varepsilon} L dt$$

diverge logaritmicamente quando  $t \rightarrow t_c$ , e assim a ação da órbita de colisão é infinita. ■

**Observação:** Como vimos no Exemplo 4.3.4, a condição (F.F.) exclui o caso gravitacional

$$V(x) = -\frac{1}{|x|}.$$

Assim como neste caso, para sistemas gravitacionais envolvendo força fraca não se pode esperar uma família minimizante  $x_n$  que se acumule longe da singularidade  $S$ . Logo, passando o limite com  $n \rightarrow \infty$ , podemos obter uma solução  $\bar{x}$  que possivelmente intercepta  $S$ . Chamaremos tais soluções de **soluções continuadas**, para distinguir das soluções regulares que estão no domínio no qual  $V$  é regular. (Esta terminologia não tem haver com regularização de variáveis).

### 3.4 Mais sobre coercividade e potenciais envolvendo força forte

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$-m_i x_i''(t) = \nabla_{x_i} V(x_0(t), \dots, x_N(t)), \quad (3.4.16)$$

onde assumimos que  $V : \mathbb{R}^{2N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^2(\mathbb{R}^{2N} - \{0\}; \mathbb{R})$ ,  $V(x) < 0$  para todo  $x$  em  $\mathbb{R}^{2N} - \{0\}$  e  $V(x) \rightarrow -\infty$ , quando  $|x| \rightarrow 0$ .

Introduzindo a Lagrangiana

$$L(y, y') = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i |y_i'|^2 - V(y_0, \dots, y_N). \quad (3.4.17)$$

Façamos a seguinte mudança de coordenadas

$$x_i = y_i - y_0, \quad (i = 1, \dots, N)$$

e defina a nova Lagrangiana  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{L}(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |x_i'|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{M} \langle x_i', x_j' \rangle - \tilde{V}(x_1, \dots, x_N), \quad (3.4.18)$$

onde  $\tilde{V}$  denota o potencial  $V$  na nova coordenada.

**Comentário:** A mudança de coordenada feita acima bem como a mudança de Lagrangeanas serão justificadas na Seção 4.2.1 do Capítulo 4.

Definamos, agora, o seguinte conjunto:

$$\Lambda_k = \{\alpha \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\}) : \text{grau}(\alpha) = k\},$$

onde para  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\} \approx S^1$ , o  $\text{grau}(\alpha) = k \in \mathbb{N}$  significa que  $\alpha$  é uma curva fechada que fecha após dar  $k$  voltas em torno da origem.

Seja, agora,

$$\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)} = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Lambda_{k_1} \times \dots \times \Lambda_{k_N} : x_j(t) \neq x_i(t) \ \forall t \in S^1, \ \forall i \neq j\}.$$

Definamos o funcional  $f : \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x_1, \dots, x_N) = \int_0^T \mathcal{L}(x_1(t), \dots, x_N(t)) dt \quad (3.4.19)$$

Então temos o seguinte Lema

**Lema 3.4.1** *Seja  $f$  como em (3.4.19) e  $\mathcal{L}$  dada por (3.4.18). Então  $f$  é coercivo sobre  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ .*

**Demonstração:** De fato, usando a relação

$$\langle x'_i, x'_j \rangle = \frac{1}{2} \{|x'_i|^2 + |x'_j|^2 - |x'_i - x'_j|^2\},$$

temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle &= \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} \frac{1}{2} (-|x'_i - x'_j|^2 + |x'_i|^2 + |x'_j|^2) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} |x'_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} |x'_j|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j |x'_i - x'_j|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle &\geq \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} |x'_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} |x'_j|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} |x'_i|^2 (M - m_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} |x'_j|^2 (M - m_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} |x'_i|^2 (m_0 - M) \\
&= \sum_{i=1}^N \left( \frac{M + m_0 - M}{M} \right) m_i |x'_i|^2,
\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle \geq \frac{m_0}{M} \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2.$$

Usando esta desigualdade e o fato de  $V < 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_N) &= \int_0^T \mathcal{L}(x(t), x'(t)) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle - V(x_1, \dots, x_N) \right] dt \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle \right] dt \\
&\geq \frac{m_0}{2M} \sum_{i=1}^N m_i \int_0^T |x'_i|^2 dt \\
&\geq \frac{m_0}{2M} m^* \sum_{i=1}^N \int_0^T |x'_i|^2,
\end{aligned}$$

onde  $m^* = \min_{1 \leq i \leq N} \{m_i\}$ . Segue-se, então que

$$f(x_1, \dots, x_N) \geq \frac{m^*}{2M} \|x'\|_{L^2}^2. \quad (3.4.20)$$

Mas, para todo  $x \in \Lambda_k$  com  $k \neq 0$  temos que

$$\|x\|_{L^\infty} \leq \sup_{t,s \in [0,T]} |x(t) - x(s)| \leq \sqrt{T} \|x'\|_{L^2} \quad (3.4.21)$$

De fato, quanto a primeira desigualdade, note que sendo  $x$  um elemento de  $\Lambda_k$ , temos que para todo  $t \in [0, T]$  existe um  $\tau \in [0, t]$ , tal que a reta em  $\mathbb{R}^2$  determinada por  $x(t)$  e  $x(\tau)$  passa pela origem e deixa  $x(t)$  e  $x(\tau)$  em "lados opostos" com relação a origem. Assim,

$$\|x\|_{L^\infty} = \sup_{t \in [0,T]} |x(t)| = |x(t_0)| \leq |x(t_0) - x(\tau_0)| \leq \sup_{t,s \in [0,T]} |x(t) - x(s)|, \quad (3.4.22)$$

quanto a segunda desigualdade, temos que  $\sup_{t,s \in [0,T]} |x(t) - x(s)| = |x(t_0) - x(s_0)|$ , sem perda de generalidade podemos supor  $s_0 < t_0$ , assim,

$$\sup_{t,s \in [0,T]} |x(t) - x(s)| = |x(t_0) - x(s_0)| = \left| \int_{s_0}^{t_0} x'(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_0^T 1 \cdot x'(\tau) d\tau \right|$$

usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\sup_{t,s \in [0,T]} |x(t) - x(s)| \leq \sqrt{T} \|x'\|_{L^2}.$$

Além disso,

$$\|x\|_{L^2} \leq \sqrt{T} \|x\|_{L^\infty}.$$

Com efeito,

$$\|x\|_{L^2} = \left( \int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^T \|x\|_{L^\infty}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = (T \|x\|_{L^\infty}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{T} \|x\|_{L^\infty}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|x\|_{H^1}^2 &= \|x'\|_{L^2}^2 + \|x\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|x'\|_{L^2}^2 + T \|x\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq (1 + T) \|x'\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Esta última desigualdade combinada com (3.4.20), implica que  $f$  é coercivo sobre  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  desde que  $k_i \neq 0$  para todo  $i$ .

De fato,

$$\|x\|_{H^1} \rightarrow \infty \Rightarrow \|x'\|_{L^2} \rightarrow \infty.$$

Portanto, (3.4.20) implica a coercividade de  $f$ . ■

**Observação:** É possível provar que o Lema acima continua válido, quando substituímos  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  pelo subespaço linear de  $H^1$ ,  $\Lambda_0$ , onde

$$\Lambda_0 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) : x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2), \text{ e } x_i \left( t + \frac{T}{2} \right) = -x_i(t) \right\},$$

pois, basta observar que se  $x \in \Lambda_0$ , temos

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= \frac{1}{2} \left| x(t) - x\left(t + \frac{T}{2}\right) \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \int_t^{t+\frac{T}{2}} x'(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{2}} \left\{ \int_t^{t+\frac{T}{2}} |x'(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{T}}{4} \left\{ \int_0^T |x'(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

então

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{T}{16} \|x'\|_{L^2},$$

que é uma estimativa semelhante a (3.4.21).

**Lema 3.4.2** *Considere o conjunto*

$$\Lambda = \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\}) : x_i(t) \neq x_j(t) \forall t, \forall i \neq j\}.$$

*cuja fronteira é dada por*

$$\partial\Lambda = \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\}) : x_i(\bar{t}) = x_j(\bar{t}) \text{ para algum } \bar{t} \in S^1, e i \neq j\}.$$

*Então se (F.F.) vale, tem-se que  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por*

$$f(x_1(t), \dots, x_N(t)) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - V(x_1(t), \dots, x_N(t)) \right] dt$$

*satisfaz*

$$f(x_1, \dots, x_N) \rightarrow \infty, \text{ quando } (x_1, \dots, x_N) \rightarrow \partial\Lambda.$$

**Demonstração:** Como há (F.F.) existe uma função  $U$  tal que, quando  $x \rightarrow \partial\Lambda$

$$-V(x(t)) \geq |\nabla U(x(t))|^2 \text{ e } U(x) \rightarrow -\infty.$$

Defina  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$g(t) = U(x(t)),$$

então

$$g'(t) = \langle \nabla U(x(t)), x'(t) \rangle.$$

O funcional  $f$  é dado por

$$f(x_1(t), \dots, x_N(t)) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - V(x_1(t), \dots, x_N(t)) \right] dt.$$

Para facilitar os cálculos vamos supor  $m_i = 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} f(x_1(t), \dots, x_N(t)) &= \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \|x'(t)\|^2 - V(x(t)) \right] dt \\ &\geq \int_0^{\bar{t}} \left[ \frac{1}{2} \|x'(t)\|^2 - V(x(t)) \right] dt, \end{aligned}$$

onde  $\bar{t}$  é algum valor de  $t$  no qual ocorre colisão. Usando a hipótese de força forte, temos

$$f(x_1(t), \dots, x_N(t)) \geq \int_0^{\bar{t}} \left[ \frac{1}{2} \|x'(t)\|^2 + |\nabla U(x(t))|^2 \right] dt,$$

como  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , temos

$$f(x_1(t), \dots, x_N(t)) \geq \sqrt{2} \int_0^{\bar{t}} \|x'(t)\| |\nabla U(x(t))| dt,$$

usando a desigualdade de Cauchy - Schwartz, temos

$$\begin{aligned} f(x_1(t), \dots, x_N(t)) &\geq \sqrt{2} \int_0^{\bar{t}} |\langle x'(t), \nabla U(x(t)) \rangle| dt \\ &\geq \sqrt{2} \left| \int_0^{\bar{t}} \langle x'(t), \nabla U(x(t)) \rangle dt \right|. \end{aligned}$$

Como  $\langle x'(t), \nabla U(x(t)) \rangle = g'(t)$ , temos

$$\begin{aligned} f(x_1(t), \dots, x_N(t)) &\geq \sqrt{2} \left| \int_0^{\bar{t}} g'(t) dt \right| \\ &= \sqrt{2} \left| \lim_{t \rightarrow \bar{t}} g(t) \right| \\ &= \sqrt{2} \left| \lim_{t \rightarrow \bar{t}} U(x(t)) \right| \end{aligned}$$

como

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} U(x(t)) \rightarrow -\infty,$$

temos que

$$f(x_1(t), \dots, x_N(t)) \rightarrow +\infty.$$

■

### 3.5 Ponto crítico de um funcional e propriedades

Considere o sistema mecânico de equações diferenciais

$$-m_i x_i''(t) = \nabla_{x_i} V(x_1(t), \dots, x_N(t)) = \nabla_{x_i} V(x(t)), \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.5.23)$$

onde,  $V : \mathbb{R}^{2N} - S \rightarrow \mathbb{R}$ , é de classe  $C^1$ , sendo  $S$  o conjunto das singularidades de  $V$ .

Seja

$$L(x(t), x'(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |x_i'(t)|^2 - V(x_1(t), \dots, x_N(t)).$$

Consideramos  $H^1 = H^1([0, T]; \mathbb{R}^{2N})$ , o completamento de  $C^k([0, T]; \mathbb{R}^{2N})$ . Defina o funcional  $I : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$I(x) = \int_0^T L(x(t), x'(t)) dt. \quad (3.5.24)$$

A diferencial de  $I$  em  $x$ ,  $\delta I(x) : T_x H^1 \equiv H^1 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada no sentido clássico por

$$\begin{aligned} \delta I(x) \cdot h &= \int_0^T \langle L_x(t), h(t) \rangle dt + \int_0^T \langle L_{x'}(t), h'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle (m_1 x_1'(t), \dots, m_N x_N'(t)), (h_1'(t), \dots, h_N'(t)) \rangle dt - \int_0^T \langle \nabla V(x(t)), h(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

onde  $h \in H^1$ ,  $T_x H^1$  denota o espaço tangente de  $H^1$  no "ponto"  $x$  e entende-se  $h$  como um campo vetorial tangente ao longo da curva  $x(t)$ , com  $t \in [0, T]$ .

Usando integração por partes na segunda integral da última expressão, obtemos

$$\delta I(x) \cdot h = \int_0^T \sum_{i=1}^N m_i x_i'(t) h_i'(t) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^t \nabla_{x_i} V(x_1(s), \dots, x_N(s)) ds \right] h_i'(t) dt + C,$$

ou equivalentemente

$$\delta I(x) \cdot h = \int_0^T \sum_{i=1}^N \left[ m_i x_i'(t) + \int_0^t \nabla_{x_i} V(x_1(s), \dots, x_N(s)) ds \right] h_i'(t) dt + C, \quad (3.5.25)$$

onde  $C$  é a constante obtida na integração.

**Comentário:** O espaço  $H^1$  pode ser visto como uma variedade de dimensão infinita e como  $H^1$  é um espaço vetorial, tem-se a seguinte identificação

$$T_x H^1 \equiv H^1,$$

para todo  $x \in H^1$ . Esta identificação também ocorre em todo  $x \in \Lambda$ , desde que  $\Lambda$  seja um aberto de  $H^1$ . Para mais detalhes sobre variedades de dimensão infinita (veja, [18], pp. 26).

**Definição 3.5.1** Dizemos que  $x \in H^1$  é um ponto crítico de  $I$  em  $H^1$ , se

$$\delta I(x) \cdot h = 0, \text{ para todo } h \in T_x H^1 \equiv H^1.$$

Seja  $x$  um ponto crítico de  $I$  em  $H^1$ . Escolhendo, de forma conveniente, as funções  $(h_i)'$ s em (3.5.25), obtemos que

$$m_i x'_i(t) + \int_0^t \nabla_{x_i} V(x_1(s), \dots, x_N(s)) ds + C = 0. \quad (3.5.26)$$

**Teorema 3.5.2 (Regularidade do ponto crítico:)** *Seja  $I : \Lambda \subset H^1$  como em (3.5.24). Suponha que o suporte de  $I$  está no conjunto onde  $V$  é de classe  $C^1$ . Então os pontos críticos de  $I|_\Lambda$  são de classe  $C^2$  e, logo, satisfazem a equação (3.5.23).*

**Demonstração:** De (3.5.26), temos

$$m_i x'_i(t) = \int_0^t -\nabla_{x_i} V(x_1(s), \dots, x_N(s)) ds - C.$$

O integrando acima tem sentido, já que  $x$  está em  $H^1$ , logo contínua, e  $V$  é  $C^1$ . Assim, deduzimos que  $x'_i(t)$  tem como derivada  $-\frac{1}{m_i} \nabla_{x_i} V(x(t))$  que é contínua, pois  $V$  é de classe  $C^1$ . Portanto  $x$  é de classe  $C^2$ , e conseqüentemente satisfaz (3.5.23). ■

**Comentário:** Entende-se por suporte de um funcional  $I : \Lambda \subset H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , o conjunto

$$\overline{\{x \in \Lambda : I(x) \neq 0\}}.$$

**Observação:** Do Teorema de acima e de (3.5.26) segue-se que, todo ponto crítico de  $I$  em  $H^1$  deve satisfazer as equações de Euler-Lagrange, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial x'_i}(x(t), x'(t)) = \int_{t_0}^t \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), x'(t)) dt + C$$

onde  $C$  é uma constante.

**Comentário:** Este Teorema poderá sempre ser aplicado a funcionais definidos por (3.5.24), que quando restritos a subconjuntos  $\Lambda \subset H^1$ , tenham suportes fora do conjunto das singularidades (colisão) do potencial. Um exemplo típico onde isto ocorre é quando  $I$  está definido sobre o conjunto  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ , que será trabalhado no próximo capítulo. Para subespaços lineares de  $H^1$ , como  $\Delta_l^N$ , veja [5].

**Definição 3.5.3** Definimos o gradiente do funcional  $I$ ,  $\nabla^0 I$ , da seguinte forma

$$\langle \nabla I(x), h \rangle_0 = \delta I(x) \cdot h, \text{ para todo } h \in H^1.$$

**Observação:** Se  $I : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , é dado por

$$I(x) = \int_0^T \left( \frac{1}{2} |x'(t)|^2 - V(x(t)) \right) dt,$$

temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla I(x), h \rangle_0 &= \int_0^T \langle x'(t), h'(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \nabla V(x(t)), h(t) \rangle dt \\ &= \langle x', h' \rangle_0 - \langle \nabla V(x), h \rangle_0. \end{aligned}$$

**Comentário:** Por simplicidade denotaremos o gradiente de  $I$ , apenas por  $\nabla I$ .

**Proposição 3.5.4** Seja  $\Lambda \subset H^1$  um aberto. Então os pontos críticos de  $I|_\Lambda$  são os mesmos pontos críticos de  $I$  sobre  $H^1$ .

**Demonstração:** Seja  $x$  um ponto crítico de  $I|_\Lambda$ . Então

$$\delta I(x) : T_x \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaz

$$\delta I(x) \cdot h = 0, \forall h \in T_x \Lambda.$$

Mas,  $T_x \Lambda \equiv H^1$ , já que  $\Lambda$  é um aberto de  $H^1$ . Logo, os pontos críticos de  $I|_\Lambda$  coincidem com os pontos críticos de  $I$  sobre  $H^1$ . ■

**Proposição 3.5.5** *Seja  $\Lambda \subset H^1$  um subespaço linear de  $H^1$ , então  $x$ , ponto crítico de  $I|_{\Lambda}$ , é ponto crítico de  $I$  em  $H^1$  se*

$$\delta I(x) \cdot v = 0, \quad \forall v \in \Lambda^{\perp}$$

**Demonstração:** O espaço tangente de  $\Lambda$  em  $x$  se identifica com  $\Lambda$ . Assim,

$$\delta I(x) : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por outro lado

$$H = \Lambda \oplus \Lambda^{\perp}.$$

Sendo  $x$  ponto crítico de  $I|_{\Lambda}$ , então para todo  $h \in \Lambda$ , temos

$$\delta I(x) \cdot h = \langle \nabla I(x), h \rangle_0 = 0.$$

Assim, para  $x$  ser, também, ponto crítico de  $I$  em  $H^1$  é necessário apenas que

$$\delta I(x) \cdot v = 0, \quad \forall v \in \Lambda^{\perp}.$$

■

**Corolário 3.5.6** *Seja*

$$\Lambda_0 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) : x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2) : x_i\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x_i(t) \right\}.$$

*Coloquemos a seguinte hipótese adicional sobre  $V$*

$$V(-x) = V(x), \tag{3.5.27}$$

*então se  $x$  é ponto crítico de  $I|_{\Lambda_0}$ , ( $x \in \Lambda_0$ ), temos que  $x$  será ponto crítico de  $I$  sobre  $H^1$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, notemos que de (3.5.27), temos que

$$\nabla V(-x) = -\nabla V(x).$$

Seja  $x$  um ponto crítico de  $I$  sobre  $\Lambda_0$ , como  $x \in \Lambda_0$ , temos

$$x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t).$$

Temos ainda,  $\delta(x) : T_x\Lambda_0 \equiv \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , e

$$\begin{aligned}\delta I(x) \cdot h &= \int_0^T \langle (m_1 x'_1(t), \dots, m_N x'_N(t)), (h'_1(t), \dots, h'_N(t)) \rangle dt - \int_0^T \langle \nabla V(x(t)), h(t) \rangle dt \\ &= \langle \nabla I(x), h \rangle_0.\end{aligned}$$

Tome  $y(t) = x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t)$ , isto é,  $y \in \Lambda_0$ . Então,

$$\langle \nabla I(-x), h \rangle_0 = \delta I(y) \cdot h,$$

mas, por outro lado para toda  $h \in \Lambda_0$ , temos

$$\begin{aligned}\delta I(y) \cdot h &= \int_0^T \langle (m_1 y'_1(t), \dots, m_N y'_N(t)), (h'_1(t), \dots, h'_N(t)) \rangle dt - \int_0^T \langle \nabla V(y(t)), h(t) \rangle dt \\ &= - \int_0^T \langle (m_1 x'_1(t), \dots, m_N x'_N(t)), (h'_1(t), \dots, h'_N(t)) \rangle dt + \int_0^T \langle \nabla V(x(t)), h(t) \rangle dt \\ &= - \left\{ \int_0^T \langle (m_1 x'_1(t), \dots, m_N x'_N(t)), (h'_1(t), \dots, h'_N(t)) \rangle dt - \int_0^T \langle \nabla V(x(t)), h(t) \rangle dt \right\} \\ &= - \langle \nabla I(x), h \rangle_0.\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\langle \nabla I(-x), h \rangle = - \langle \nabla I(x), h \rangle, \quad \forall h \in \Lambda_0,$$

o que implica

$$\nabla I(-x) = - \nabla I(x), \quad \text{em } \Lambda_0.$$

Assim, se  $\gamma(t) = \nabla I(x(t))$ , então

$$\gamma\left(t + \frac{T}{2}\right) = \nabla I\left(x\left(t + \frac{T}{2}\right)\right) = \nabla I(-x(t)) = - \nabla I(x(t)) = - \gamma(t),$$

ou seja,  $\nabla I(x) \in \Lambda_0$ . Por outro lado,

$$H^1 = \Lambda_0 \oplus \Lambda_0^\perp.$$

Logo, se  $h \in H^1$ ,  $h = h_0 + h^\perp$ , com  $h_0 \in \Lambda_0$  e  $h^\perp \in \Lambda_0^\perp$ . Daí

$$\langle \nabla I(x), h \rangle_0 = \langle \nabla I(x), h_0 \rangle_0 + \langle \nabla I(x), h^\perp \rangle_0 = 0$$

Portanto  $x$  é ponto crítico de  $I$  sobre  $H^1$ . ■

**Observação:** O Corolário acima pode ser estendido para funcionais  $I|_{\Delta_l^N}$ , onde

$$\begin{aligned}\Delta_l^N = \{(x_1, \dots, x_N) : & \quad x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2), x_i(t) \neq x_j(t), \forall t \in S^1, \forall i \neq j, \\ & x_i\left(t + \frac{T}{l}\right) = R_{\frac{2\pi}{l}} x_i(t), \forall t, i = 1, \dots, N\}\end{aligned}$$

onde  $R_\theta \in SO(2)$ . Para isto são extremamente importantes os seguintes fatos: O conjunto  $\Delta_l^N$  é aberto em  $\Delta_{\frac{2\pi}{l}}$  e por sua vez  $\Delta_{\frac{2\pi}{l}}$  é um subespaço linear de  $H^1$ , onde

$$\Delta_{\frac{2\pi}{l}} = \{(x_1, \dots, x_N) : x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2), x_i\left(t + \frac{T}{l}\right) = R_{\frac{2\pi}{l}} x_i(t), \forall t, i = 1, \dots, N\}.$$

Veja [5].

## Capítulo 4

# Aplicações à Mecânica Celeste

Neste capítulo aplicaremos os conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores para mostrar que as soluções periódicas elípticas do problema de Kepler minimizam a ação integral de Hamilton e para encontrar soluções periódicas sem colisão em problemas planares do tipo  $N$ -corpos. Seguiremos os artigos (*Symmetries and noncollision closed orbits for planar  $N$ -body-type problems*, de (Bessi and Coti Zelati, 1991), *Periodic solutions for  $N$ -body type problems* de (Coti Zelati, 1990), *A minimizing property of Keplerian orbits* de (Gordon, 1975).

### 4.1 Uma propriedade minimizante das órbitas Keplerianas

Nesta Seção, mostraremos que as soluções periódicas elípticas de período  $T$  do problema de Kepler na verdade minimizam a ação integral de Hamilton. Seguiremos o artigo *A minimizing property of Keplerian orbits* de (Gordon, 1977).

#### 4.1.1 Formulação do resultado principal

Denotemos por  $\Sigma(T)$  o conjunto de todos os "ciclos"  $x = x(t)$  no plano  $\mathbb{R}^2$  que são absolutamente contínuos, tem derivadas  $L^2$  definidas quase sempre, e que circundam a origem mas não a interceptam. Então, temos o seguinte Teorema, formulado por Gordon, (em [14]).

**Teorema 4.1.1** *Seja  $T$  um número real positivo fixo mas arbitrário, e seja  $I : H^1(S^1; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ , a ação integral (o funcional), definida(o) por*

$$I(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |x'(t)|^2 + \frac{1}{|x(t)|} \right] dt \quad (4.1.1)$$

*correspondendo ao potencial  $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ . Então a restrição de  $I$  à  $\Sigma(T)$  tem seu valor mínimo numa solução elíptica  $T$ -periódica da equação Kepleriana de movimento*

$$x'' = -\nabla \left( -\frac{1}{|x|} \right) = -\frac{x}{|x|^3}, \quad (4.1.2)$$

*para a qual  $T$  é o período mínimo.*

Antes de fazer a demonstração deste resultado faremos alguns fatos preliminares muito importantes.

#### 4.1.2 A ação integral para soluções continuadas

É bem conhecido que uma solução de classe  $C^2$  para (4.1.2) é periódica se, e somente se, ela tem energia total negativa ( $H = \frac{1}{2}|x'|^2 - \frac{1}{|x|}$ ), e que a energia total  $H$ , o período  $T$  e a ação integral  $I$  (o funcional dado em (4.1.1)), estão relacionados. De fato, para soluções com período mínimo  $T$ , temos o seguinte Lema

**Lema 4.1.2** *Para as soluções  $T$ -periódicas circulares de (4.1.2) temos*

$$T = \left( 2^{-\frac{1}{2}} \pi \right) (H)^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.1.3)$$

$$I = (3\pi) (2\pi)^{-\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}. \quad (4.1.4)$$

**Demonstração:** Seja  $\gamma$  uma solução  $T$ -periódica circular de (4.1.2), da forma

$$\gamma(t) = ae^{i\omega t},$$

onde  $a$  é o raio e  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Derivando duas vezes a expressão de  $\gamma$ , obtemos as expressões

$$\gamma'(t) = i a \omega e^{i\omega t} \text{ e } \gamma''(t) = -a \omega^2 e^{i\omega t},$$

usando o fato de  $\gamma$  ser solução de (4.1.2), temos

$$-a \omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{1}{a^2} e^{i\omega t}$$

donde,

$$a^3 \omega^2 = 1. \quad (4.1.5)$$

A energia é dada por

$$H = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 - \frac{1}{a},$$

então

$$\frac{1}{a^3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2H}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.1.6)$$

assim, substituindo (4.1.5) na expressão da energia, temos

$$H = -\frac{1}{2a}.$$

Daí usando (4.1.5) e (4.1.6), obtemos

$$\begin{aligned} I = I(\gamma(t)) &= \int_0^T \left[ \frac{1}{2} a^2 \omega^2 + \frac{1}{a} \right] dt = \frac{1}{a} \left( \frac{3}{2} \right) T = \frac{3}{2} (-H) T = \frac{3 (T)^{-\frac{2}{3}} (\pi)^{\frac{2}{3}} (\pi)^{\frac{1}{3}}}{(2)^{\frac{1}{3}} (\pi)^{\frac{1}{3}}} T \\ &= \frac{3\pi (T)^{\frac{1}{3}}}{(2)^{\frac{1}{3}} (\pi)^{\frac{1}{3}}}, \end{aligned}$$

que resulta na expressão (4.1.4). Além disso, substituindo  $\omega = \left(\frac{2\pi}{T}\right)$  em (4.1.5), obtemos

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{1}{a^3}$$

e, usando (4.1.6), temos

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{H}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ou equivalentemente

$$\frac{2\pi}{T} = (-H)^{\frac{3}{2}} (2)^{\frac{3}{2}}$$

Logo,

$$-H = (T)^{-\frac{2}{3}} \frac{(\pi)^{\frac{2}{3}}}{(2)^{\frac{1}{3}}}$$

o que conclui a demonstração do Lema.

Um resultado análogo ao Lema anterior obtém-se quando analisamos soluções periódicas retilíneas do problema de Kepler, as quais devem-se ser estendidas da seguinte forma: a solução sai da origem (colisão) e move-se ao longo de um seguimento (determinado pela velocidade inicial) e logo retorna à origem num tempo  $T$  que corresponde ao período. É claro que tais soluções só podem ser obtidas regularizando o problema de Kepler.

**Lema 4.1.3** *Para soluções  $T$ -periódicas no caso retilíneo as expressões (4.1.3) e (4.1.4) são válidas.*

**Demonstração:** Considere o sistema de equações diferenciais

$$x'' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1.7)$$

onde  $a' = \frac{da}{dt}$ . Note que (4.1.7) é o caso unidimensional de (4.1.2). Fazendo a mudança de coordenada (que permite a regularização da colisão)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{x}{k}, \quad k = (-2H)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.8)$$

e usando o fato que em (4.1.7) a energia é conservada, podemos transformar (4.1.7) no sistema

$$\ddot{x} + x = \frac{1}{k^2}, \quad (4.1.9)$$

no qual assumimos as seguintes condições iniciais

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (4.1.10)$$

onde  $\dot{b} = \frac{db}{d\tau}$ . A equação homogênea correspondente à (4.1.9) é

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (4.1.11)$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$x(\tau) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau),$$

considerando

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \theta_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \theta_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

podemos reescrever  $x(\tau)$  na forma

$$x(\tau) = \rho \cos(\theta_0) \cos(\tau) + \rho \sin(\theta_0) \sin(\tau).$$

Além disso, é de fácil verificação que

$$x(\tau) = \cos(\tau) + c$$

é uma solução particular de (4.1.9), desde que  $c = \frac{1}{k^2}$ . Logo, a solução geral para (4.1.9) é dada por

$$x(\tau) = \rho \cos(\tau - \theta_0) + \cos(\tau) + \frac{1}{k^2}.$$

Usando as condições iniciais (4.1.10), obtemos

$$\rho = 1 + \frac{1}{k^2}, \text{ e } \theta_0 = \pi,$$

Portanto, a solução de (4.1.9) é dada por

$$x(\tau) = \frac{1}{k^2} [1 - \cos(\tau)].$$

Façamos  $E = E(\tau(t)) = \tau(t)$ ,  $E$  assim definida, é a anomalia excêntrica. Escrevendo  $x$  na nova variável  $E$ , temos

$$x(E) = \frac{1}{k^2} [1 - \cos(E)]. \quad (4.1.12)$$

De (4.1.8), resulta

$$\int_0^t dt = \int_0^t \frac{x(E(\tau))}{k} d\tau,$$

donde

$$t = \frac{1}{k^3} (E - \sin(E)) = \frac{1}{k^3} (E(\tau) - \sin(E(\tau)))$$

derivando implicitamente em relação a  $t$ , obtemos

$$E' = \frac{k^3}{1 - \cos(E)}.$$

Note que a solução  $x$  tal que

$$(x')^2 = \frac{2}{x} + 2H$$

satisfaz (4.1.7). Mas,

$$x'(t) = \frac{1}{k^2} \sin(E) E' = k \frac{\sin(E)}{1 - \cos(E)}$$

então,

$$(x')^2 = k^2 \frac{\sin^2(E)}{(1 - \cos(E))^2} = -2H \frac{\sin^2(E)}{(1 - \cos(E))^2}.$$

De (4.1.12), temos que  $x$  é uma solução  $2\pi$ -periódica na variável  $E$ . Mas, quando  $E = \pi$ , sendo  $\pi$  metade do período em  $E$ , temos que

$$t = \frac{\pi}{k^3} = \frac{T}{2},$$

onde  $\frac{T}{2}$  é a metade do período na variável  $t$ . Logo, sendo  $k = -2H > 0$ , temos

$$T = \frac{2\pi}{k^3} = \frac{2\pi}{(-2H)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}(-H)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (-H)^{-\frac{3}{2}}.$$

**Comentário:** As deduções de (4.1.3) e (4.1.4) no caso de soluções elípticas no caso geral são mais complicadas, mas podem ser feitas usando o conceito de **anomalia excêntrica**, veja [4]. ■

**Observação:** Seja  $x$  uma órbita periódica com período mínimo  $T$  e seja  $y$  uma órbita periódica cujo período é  $\frac{T}{n}$  ( $n$  um número natural). Então a órbita  $T$ -periódica obtida por repetir  $y$   $n$ -vezes ( $z(t) = ny\left(\frac{t}{n}\right)$ ) tem sua ação integral  $nI(y)$  e como consequência de (4.1.4) ela tem a forma

$$nI(y) = n^{\frac{2}{3}}I(x).$$

De fato,

$$\begin{aligned} nI(y) &= n(3\pi)(2\pi)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{T}{n}\right)^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{2}{3}}(3\pi)(2\pi)^{-\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}} \\ &= n^{\frac{2}{3}}I(x). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a ação integral é minimizante em apenas tais soluções  $T$ -periódicas para a qual  $T$  é o período mínimo.

Desejamos, agora, descrever as soluções continuadas de (4.1.2) e calcular suas ações integrais. A mais simples solução continuada é um segmento de reta. A partícula inicialmente em repouso no ponto  $Q \neq 0$  desloca-se em direção à origem, alcançando-a em tempo  $t = \frac{T}{2}$ . A partícula então, inverte o percurso do movimento, sobre a reta que contém  $OQ$  até alcançar o ponto  $Q$ , onde terá velocidade zero. Chamaremos tais soluções de um **suporte** de período  $T$ . Note que a energia total neste caso é dada por  $H = -|OQ|^{-1}$ .

Uma solução continuada consistindo de dois suporte de períodos  $T_1$  e  $T_2$  cujo período total da trajetória inteira é dado por  $T = T_1 + T_2$ , pode ser descrita como segue: começando em repouso, num ponto  $Q_1$ , a partícula desloca-se para a origem, onde emerge a um ângulo arbitrário movendo-se para um ponto  $Q_2$ , onde tem velocidade zero. Em  $Q_2$  o percurso é invertido e a trajetória termina em  $Q_1$ .

Mais, geralmente, uma solução continuada  $T$ -periódica pode consistir de um número finito, ou enumerável, de suportes de períodos  $T_i$ , exigindo apenas que

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i < \infty.$$

**Observação:** Note que podem existir soluções  $x$  e  $y$ , sendo  $x$  uma solução que tenha um só suporte cujo período seja  $T$  e  $y$  seja uma solução de vários suportes de período  $T_i$ , tal que o período total de sua

trajetória seja  $\sum_i T_i = T$ .

**Lema 4.1.4** *Considere o funcional  $I$  definido em (4.1.1). Entre todas as soluções continuadas de período  $T$ , o funcional  $I$  tem sua mínima ação numa solução que consiste de um só suporte.*

**Demonstração:** Numa trajetória  $T$ -periódica de suportes com períodos  $T_i$ , cada suporte de período  $T_i$  tem, pelo Lema 4.1.3, uma ação integral igual a  $c(T_i)^{\frac{1}{3}}$ , onde  $c$  é a mesma constante dada em (4.1.4). Denotemos por  $I_v$  a ação definida numa solução de vários suportes, e por  $I_1$  a ação definida numa solução de um só suporte. Logo, sendo  $T = \sum_i T_i$ , temos

$$I_v = c \sum_i (T_i)^{\frac{1}{3}} = c(T)^{\frac{1}{3}} \sum_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^{\frac{1}{3}} \geq c(T)^{\frac{1}{3}} \sum_i \left(\frac{T_i}{T}\right) = c(T)^{\frac{1}{3}} = I_1.$$

o que conclui a demonstração do Lema. ■

**Observação:** Como a ação  $I$  e o período  $T$  são relacionados do mesmo modo para órbitas regulares e para órbitas continuadas consistindo de um só suporte, o Lema 4.1.4, tem a seguinte consequência:

**Lema 4.1.5** *Para provar o Teorema 4.1.1 é suficiente mostrar que existe uma solução  $x_0$   $T$ -periódica possivelmente continuada satisfazendo*

$$I(x_0) \leq I(x)$$

para todo  $x$  em  $\Sigma(T)$ .

**Demonstração:** É consequência direta do fato que a expressão (4.1.4) se verifica tanto para órbitas regulares como para órbitas continuadas. ■

### 4.1.3 Preliminares para a demonstração do resultado principal

Para todo funcional  $I$  sobre  $H^1$  e para todo número real  $c$ , seja

$$I^c = \{x \in H^1 : I(x) \leq c\}.$$

Lembramos que  $I$  é semi-contínuo inferiormente em uma topologia se  $I^c$  é fechado nesta topologia para todo  $c$  (veja [20], pp. 37). Neste caso  $I$  é limitado inferiormente e atinge seu ínfimo sobre qualquer subconjunto que é compacto com respeito a esta topologia. Isto é consequência do Teorema 3.2.5, e do fato que toda sequência definida num compacto possui uma subsequência uniformemente convergente.

**Lema 4.1.6** *Seja  $I$  um funcional que é definido sobre um subespaço  $W$  de  $H^1$ , e suponha que para todo número real  $c$ , o conjunto  $I^c \cap W$  é compacto em  $H^1$ . Então,  $I$  é limitado inferiormente e assume seu ínfimo sobre  $W$ .*

**Demonstração:** Como a topologia fraca de  $H^1$  é Hausdorff, conforme Proposição B.0.12, e como todo compacto num espaço de Hausdorff é fechado, conforme Teorema A.2.1, temos que  $I^c \cap W$  é fechado na topologia fraca de  $H^1$ . Logo,  $I^c \cap W$  é fechado na topologia fraca (relativa) de  $W$ , assim,  $I$  restrito à  $W$  é semi-contínuo inferiormente sobre  $W$ . Fixe um número real  $c$  tal que  $I^c \cap W \neq \emptyset$ . Então  $I$  assume seu ínfimo sobre  $I^c \cap W$ , já que  $I^c \cap W$  é fechado na topologia fraca relativa de  $W$ . Em consequência da topologia relativa de  $W$ , o ínfimo de  $I$  sobre  $I^c \cap W$  é o ínfimo de  $I$  sobre  $W$ . ■

**Comentário:** O Lema acima nos diz que para encontrar o ínfimo de  $I$  sobre  $H^1$  é bastante estudar  $I$  sobre  $W$ .

#### 4.1.4 Demonstração do resultado principal

Seja  $\Sigma^* = \Sigma^*(T)$  o espaço de todos os ciclos  $T$ -periódicos  $x = x(t)$  de  $H^1$  que circundam ou interceptam a origem, e para o qual  $I(x)$  existe como integral de Lebesgue. Mostraremos que  $I|_{\Sigma^*}$  assume seu ínfimo. De acordo com o Lema 4.1.6, é suficiente mostrar que  $I^c \cap \Sigma^*$  é um subconjunto fracamente compacto de  $H^1$  para todo número real  $c$ , isto é, temos que mostrar que para todo número real  $c$ ,

- (i) O conjunto  $I^c \cap \Sigma^*$  é limitado na norma  $H^1$ ,
- (ii) O conjunto  $I^c \cap \Sigma^*$  é fechado na topologia fraca de  $H^1$ .

**Demonstração:**

(i) Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$l(x) = \int_0^T |x'(t)| dt \leq \left[ T \int_0^T |x'(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde  $l(x)$  denota o comprimento de arco da curva  $x$  entre  $t = 0$  e  $t = T$ . Logo, referindo-se a (4.1.1), temos que os elementos de  $I^c$  são uniformemente limitados no comprimento de arco.

De fato, para  $x \in I^c = \{x \in H^1 : I(x) \leq c\}$ , temos

$$I(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |x'(t)|^2 + \frac{1}{|x(t)|} \right] dt \leq c,$$

então,

$$\int_0^T |x'(t)|^2 dt \leq 2c.$$

Assim,

$$l(x) = \int_0^T |x'(t)| dt \leq \left[ T \int_0^T |x'(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq [T2c]^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, de (3.4.21) temos que

$$\|x\|_{L^2} \leq \text{const} \|x'\|_{L^2},$$

e como

$$\|x\|_{H^1}^2 = \|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2$$

segue-se que  $I^c \cap \Sigma^*$  é limitado na norma  $H^1$ .

(ii) Seja  $\{x_n\}$  uma seqüência em  $I^c \cap \Sigma^*$  que converge fracamente para algum  $x$  em  $H^1$ . Então,  $x = x(t)$  circunda ou intercepta a origem, pois convergência fraca em  $H^1$  implica convergência em  $C^0$ , (veja [13]). Mostraremos, agora, que  $I(x)$  existe e que  $I(x) \leq c$ , ou seja, que  $x \in I^c$ .

Para cada  $n$  seja  $f_n(t) = \frac{1}{|x_n(t)|}$  e seja  $f(t) = \frac{1}{|x(t)|}$ , cada  $f_n$  pertence a  $L^1$ , pois  $I(x_n) < \infty$ . Isto implica que o conjunto dos  $t$  para o qual  $x_n(t) = 0$  tem medida zero. Logo,  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  quase sempre. Também,

$$\int_0^T f_n dt = \int_0^T \frac{1}{|x_n(t)|} dt \leq I(x_n) \leq c,$$

já que  $x_n$  está em  $I^c$ . Logo, pelo Lema de Fatou, segue-se que  $f$  pertence a  $L^1$  e que

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \left[ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right] dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) dt. \quad (4.1.13)$$

Agora, a convergência fraca de  $x_n$  para  $x$  no espaço de Hilbert  $H^1$  implica que

$$\|x\|_{H^1} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{H^1},$$

conforme Proposição B.0.13. Logo,

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x_n\|_{L^2}^2 + \|x'_n\|_{L^2}^2 \} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x_n\|_{L^2}^2 \} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x'_n\|_{L^2}^2 \}. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema de Sobolev  $x_n$  converge em  $C^0$ , ou seja

$$\|x\|_{L^2}^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x_n\|_{L^2}^2 \}.$$

Conseqüentemente,

$$\|x'\|_{L^2}^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x'_n\|_{L^2}^2 \}. \quad (4.1.14)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^T |x'(t)|^2 dt + \int_0^T \frac{1}{|x(t)|} dt \\ &= \|x'\|_{L^2}^2 + \int_0^T f(t) dt, \end{aligned}$$

por (4.1.13), temos

$$I(x) \leq \|x'\|_{L^2}^2 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T f_n(t) dt \right\}.$$

Assim, usando (4.1.14), obtemos

$$\begin{aligned} I(x) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x'\|_{L^2}^2 \} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T f_n(t) dt \right\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \|x'\|_{L^2}^2 \} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T f_n(t) dt \right\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|x'\|_{L^2}^2 + \int_0^T f_n(t) dt \right\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} I(x_n) \leq c. \end{aligned}$$

Logo,  $I$  assume seu ínfimo sobre  $I^c \cap \Sigma^*$ , o que completa a prova de (ii).

Seja  $x^*$  um elemento de  $\Sigma^*$  no qual  $I|_{\Sigma^*}$  assume seu ínfimo. Suponha que  $x^*$  pertence a  $\Sigma = \Sigma(T)$ . Então,  $x^* = x^*(t)$  não intercepta a origem, assim, o mesmo argumento simples, dado na Seção 3.5, mostra que  $x^*$  é uma solução de (4.1.2), e que satisfaz as equações de Euler-Lagrange para o funcional  $I$ .

Suponha, agora, que  $x^* = x^*(t)$  intercepta a origem em certo tempo  $t$ . De acordo com o Lema 4.1.5, para completar a prova, neste caso, é suficiente mostrar que  $x^* = x^*(t)$  é uma solução continuada de (4.1.2).

O conjunto dos  $t$  para os quais  $x^*(t) \neq 0$  é aberto. Seja  $[a, b]$  algum intervalo fechado neste conjunto aberto, [este intervalo fechado pode ser escolhido tal que  $x^*(a) \neq 0$  e  $x^*(b) \neq 0$ ]. Seja  $t \rightarrow v(t)$  uma aplicação suave definida sobre  $[a, b]$  e tomando valores em  $\mathbb{R}^2$  com  $v(a) = v(b) = 0$ . Agora, da propriedade minimizante de  $x^*$  segue-se que o arco

$$\gamma := \{x^* = x^*(t), a \leq t \leq b\}$$

obriga minimizar a ação de  $I$  sobre o espaço dos caminhos  $y = y(t)$  de  $H^1$  que unem  $x^*(a)$  à  $x^*(b)$  com tempo de transição  $T = b - a$ , e que podem ser deformado continuamente sobre o arco  $\gamma$  sem interceptar a origem. Logo em consequência de (1.4.15) da Seção 1.4, temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(x^* + \varepsilon v)|_{t=t_0} = 0$$

para todo  $t_0$  em  $(a, b)$ , e logo,  $x^* = x^*(t)$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange sobre o intervalo aberto  $(a, b)$ . Como isto é válido para todo intervalo  $(a, b)$ , nas condições descritas acima, segue-se que  $x^*$  é uma solução continuada de (4.1.2), o que conclui a prova do Teorema 4.2.1. ■

**Observação:** Geralmente por operar na categoria dos espaços  $H^1$  não introduzimos certas complicações sobre este argumento clássico. Normalmente, deve-se mostrar que o caminho minimizante é suficientemente regular antes de poder estabelecer que ela satisfaz as equações de Euler-Lagrange. (Veja [12] e [13]).

## 4.2 Existência de soluções periódicas sem colisão em problemas planares do tipo N-corpos

Nesta seção, usaremos métodos variacionais para encontrar soluções periódicas sem colisão em problemas planares do tipo N-corpos (isto é, em problemas cuja função potencial satisfaz as condições (V1)-(V4) abaixo). Seguiremos os artigos *Symmetries and noncollision closed orbits for planar N-body type problems*, de (Bessi and Coti Zelati, 1991) e *Periodic solutions for N-body type problems* de (Coti Zelati, 1990).

### 4.2.1 Preliminares

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$-m_i y_i''(t) = \nabla_{y_i} V(y_0(t), \dots, y_N(t)). \quad (4.2.15)$$

Onde assumimos as seguintes hipóteses sobre  $V : \mathbb{R}^{2(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(V1) \quad V(y_0, \dots, y_N) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} V_{ij}(y_i - y_j),$$

$$(V2) \quad V_{ij} \in C^2(\mathbb{R}^2 - \{0\}; \mathbb{R}), \text{ para todo } i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j,$$

$$(V3) \quad V_{ij}(\xi) \rightarrow -\infty, \text{ quando } |\xi| \rightarrow 0, \text{ para todo } i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j, \xi \in \mathbb{R}^2 - \{0\},$$

$$(V4) \quad V(y_0, \dots, y_N) \leq 0, \text{ para todo } (y_0, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{2(N+1)}.$$

Assumiremos, também que  $m_i > 0$ , para todo  $i$ , e faremos  $M = \sum_{i=0}^N m_i$ .

**Observação:** A função potencial do problema dos  $(N+1)$ -corpos é dada por

$$V = - \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|}$$

e claramente satisfaz as propriedades (V1)-(V4). De fato,

$$(V'1) \quad \text{Como } \frac{m_i m_j}{|y_j - y_i|} = \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|}, \text{ temos } - \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|} = -\frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|},$$

$$(V'2) \quad V_{ij}(\xi) = -\frac{m_i m_j}{|\xi|} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\}; \mathbb{R}), \text{ para todo } 0 \leq i \neq j \leq N,$$

$$(V'3) \quad V_{ij}(\xi) = -\frac{m_i m_j}{|\xi|} \rightarrow -\infty, \text{ quando } |\xi| \rightarrow 0.$$

$$(V'4) \quad V(y_0, \dots, y_N) = - \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|} < 0, \text{ para todo } (y_0, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{2(N+1)}, \text{ pois } m_l > 0 \text{ para todo } l = 0, \dots, N.$$

**Definição 4.2.1** Dizemos que uma função

$$y(t) = (y_0(t), \dots, y_N(t))$$

é uma **solução sem colisão** de (4.2.15) se  $y(t)$  é solução de (4.2.15) e se  $y_i(t) \neq y_j(t)$  sempre que  $i \neq j$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

**Definição 4.2.2** Dizemos que

$$y(t) = (y_0(t), \dots, y_N(t)) \in H^1 \left( S^1; \mathbb{R}^{2(N+1)} \right)$$

é uma **solução generalizada** de (4.2.15) se,  $y(t)$  é solução de (4.2.15) e se, denotando por  $\mathcal{C}$  o conjunto

$$\mathcal{C} = \{t \in [0, T] : y_i(t) = y_j(t) \text{ para algum } i \neq j\}$$

tivermos satisfeitas as três condições seguintes:

(a)  $\text{med}(\mathcal{C}) = 0$ ; onde,  $\text{med}$  indica a medida de Lebesgue;

(b)  $y(t) = (y_0(t), \dots, y_N(t)) \in C^2([0, T] - \mathcal{C}; (\mathbb{R}^2)^{(N+1)})$ ;

(c)  $H = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |y'_i|^2 + V(y_0(t), \dots, y_N(t))$  é constante sobre  $[0, T] - \mathcal{C}$ .

**Observação:** Como

$$\nabla V_{y_k} = - \sum_{0 \leq j \neq k \leq N} \nabla V_{j \ k}(y_j - y_k) + \sum_{0 \leq j \neq k \leq N} \nabla V_{k \ j}(y_k - y_j).$$

Segue-se de (4.2.15) que

$$\sum_{k=0}^N m_k y''_k = - \sum_{k=0}^N \nabla_{y_k} V = \sum_{k=0}^N \left[ \sum_{0 \leq j \neq k \leq N} \nabla V_{j \ k}(y_j - y_k) + \sum_{0 \leq j \neq k \leq N} \nabla V_{k \ j}(y_k - y_j) \right] = 0,$$

onde por integração direta

$$\sum_{k=0}^N m_k y'_k(t) = A$$

e logo

$$\sum_{k=0}^N m_k y_k(t) = At + B,$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes dependendo das condições iniciais. Assim, temos que o momento linear é conservado e o centro de massa está sobre a reta

$$r(t) = At + B.$$

Além disso, se existir algum número real  $P > 0$  tal que,  $y_k(t + P) = y_k(t)$  para todo  $t$  e para todo  $k \in \{0, \dots, N\}$ , temos

$$\sum_{k=0}^N m_k y_k(t) = At + B$$

e

$$\sum_{k=0}^N m_k y_k(t + P) = A(t + P) + B = At + B + PA.$$

Mas,

$$\sum_{k=0}^N m_k y_k(t) = \sum_{k=0}^N m_k y_k(t + P),$$

então

$$At + B = At + B + PA,$$

assim  $PA = 0$ , o que implica  $A = 0$ . Logo concluímos que em tal situação o momento linear deve ser nulo.

Usando a conservação do momento linear o sistema (4.2.15) pode ser transformado em um outro equivalente. Introduzindo a Lagrangiana

$$L(y, y') = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i |y'_i|^2 - V(y_0, \dots, y_N), \quad (4.2.16)$$

o sistema (4.2.15) corresponde as equações de Euler-Lagrange correspondente ao funcional cujo integrando é a Lagrangiana  $L$ .

De fato, as equações de Euler-Lagrange para tal funcional são dadas por

$$L_{y_i} - \frac{d}{dt} L_{y'_i} = 0, \quad (i = 0, \dots, N),$$

mas,

$$L_{y_i} = -\nabla_{y_i} V, \quad L_{y'_i} = m_i y''_i.$$

Logo,

$$L_{y_i} - \frac{d}{dt} L_{y'_i} = 0 \Leftrightarrow -\nabla_{y_i} V - m_i y''_i = 0$$

que resulta na equação (4.2.15).

Façamos, agora, a seguinte mudança de coordenadas

$$x_i = y_i - y_0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.2.17)$$

e defina a nova Lagrangiana  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{L}(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |x'_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle - \tilde{V}(x_1, \dots, x_N) \quad (4.2.18)$$

onde  $\tilde{V}$  denota o potencial  $V$  na nova coordenada  $x$ , ou seja,

$$\tilde{V} = \tilde{V}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [V_{i0}(x_i) + V_{0i}(-x_i)] + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j).$$

Com efeito,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(V_{i0}(x_i)) + V_{0i}(-x_i)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_{i0}(y_i - y_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_{0i}(y_0 - y_i),$$

e

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j, i=1}^N [V_{ij}((y_i - y_0) - (y_j - y_0))] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j, i=1}^N V_{ij}(y_i - y_j),$$

somando as duas últimas equações, obtemos  $V(y_0, \dots, y_N)$ . Provando que  $\tilde{V}$  é dado por  $V$  nas novas coordenadas.

Se (4.2.15) representa as equações de movimento de um problema de  $(N + 1)$ -corpos no plano com centro de massa na origem, isto é,

$$\sum_{i=0}^N m_i y_i = 0,$$

ao efetivar a mudança de coordenadas (4.2.17), reduzimos à um problema de  $N$ -corpos com centro de massa em  $-My_0$ , ou seja

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = -My_0.$$

Ainda temos o seguinte Lema.

**Lema 4.2.3** *Se  $(y_0, \dots, y_N)$  é uma solução de (4.2.15) tal que*

$$R(t) = \sum_{i=0}^N m_i y_i(t) \equiv 0, \quad (4.2.19)$$

então  $(x_1(t), \dots, x_N(t))$  é uma solução de

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x'} \mathcal{L}(x(t), x'(t)) = 0. \quad (4.2.20)$$

Reciprocamente, se  $(x_1, \dots, x_N(t))$  é uma solução de (4.2.20), então  $y(t)$  dado por

$$y_0(t) = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t), \quad y_i(t) = x_i(t) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) \quad (4.2.21)$$

é uma solução de (4.2.15) satisfazendo  $R(t) = 0$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $(y_0(t), \dots, y_N(t))$  é uma solução de (4.2.15), tal que  $R(t) = \sum_{i=0}^N m_i y_i(t) = 0$ . Então, para todo  $i = 0, \dots, N$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial y_i} L(y, y') - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y'_i} L(y, y') \equiv 0,$$

e como  $m_0 y_0 + \dots + m_N y_N = 0$  implica  $y_0 = -\frac{1}{m_0} (m_1 y_1 + \dots + m_N y_N)$ , donde  $\frac{\partial y_0}{\partial y_i} = -\frac{m_i}{m_0}$ . Por outro lado,

$$y'_0 = -\frac{1}{m_0} (m_1 y'_1 + \dots + m_N y'_N), \quad \text{donde} \quad \frac{\partial y'_0}{\partial y'_i} = -\frac{m_i}{m_0}.$$

usando estas hipóteses, temos

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + \frac{\partial L}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial y_i} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{m_i}{m_0} \frac{\partial L}{\partial y_0},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'_i} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial y'_i} + \frac{\partial L}{\partial y'_0} \frac{\partial y'_0}{\partial y'_i} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} - \frac{m_i}{m_0} \frac{\partial L}{\partial y'_0},$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} - \frac{m_i}{m_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_0}.$$

Daí

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} + \frac{m_i}{m_0} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_0} - \frac{\partial L}{\partial y_0} \right]$$

como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_0} - \frac{\partial L}{\partial y_0} = 0,$$

já que  $y$  é solução de (4.2.15), resulta que  $(x_1, \dots, x_N)$  é solução de (4.2.20).

Reciprocamente, suponha que  $(x_1, \dots, x_N)$  é uma solução de (4.2.20), o que implica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, N.$$

Mas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \left[1 - \frac{m_i}{M}\right] \frac{\partial L}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial y'_j} \frac{\partial y'_j}{\partial x'_i} = \left[1 - \frac{m_i}{M}\right] \frac{\partial L}{\partial y'_i}$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} - \frac{m_i}{M} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i}.$$

Assim, usando estas três últimas equações, temos

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{m_i}{M} \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} + \frac{m_i}{M} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i}$$

ou seja,

$$0 = \left[ \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right] - \frac{m_i}{M} \left[ \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right] = \left[1 - \frac{m_i}{M}\right] \left[ \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right],$$

como  $\frac{m_i}{M} \neq 1$ , pois cada  $m_i > 0$  e  $\frac{m_i}{M} = 1$  se, e somente se,  $m_j = 0$  para todo  $j \neq i$ . Então, temos que  $(y_0, \dots, y_N)$  é uma solução de

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i}.$$

Logo é uma solução de (4.2.15). Além disso, como  $y_0$  e  $y_i$  são dados por (4.2.21)

$$\begin{aligned} m_0 y_0(t) + \sum_{i=1}^N m_i y_i(t) &= -\frac{m_0}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) + \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) - \left[ \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \right] \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) \\ &= - \left[ \frac{m_0 + \sum_{i=1}^N m_i}{M} \right] \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) + \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) \\ &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) + \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $R(t) = \sum_{i=1}^N m_i y_i(t) = 0$ . ■

**Lema 4.2.4** *Nas condições do Lema anterior, se  $x(t)$  é uma solução  $T$ -periódica de (4.2.20), então  $y(t)$  será, também, uma solução  $T$ -periódica de (4.2.15).*

**Demonstração:** Suponha  $x(t)$  periódica de período  $T$ , isto é,  $x(t+T) = x(t)$ , então  $x_i(t+T) = x_i(t)$  para,  $i = 1, \dots, N$ . Logo,

$$y_0(t+T) = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t+T) = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) = y_0(t),$$

$$y_i(t+T) = x_i(t+T) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t+T) = x_i(t) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) = y_i(t).$$

Portanto,  $y(t) = (y_0(t), \dots, y_N(t))$  é também periódica. ■

## 4.2.2 Existência de soluções com restrições topológicas

Definamos os seguintes conjuntos:

$$\Lambda = \{x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \dots \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) : x_i(t) \neq x_j(t) \forall t \in S^1, \forall i \neq j\}.$$

$$\Lambda_k = \{x \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\}) : \text{grau}(x) = k\},$$

onde  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\} \approx S^1$  (onde  $\approx$  denota um difeomorfismo), e  $\text{grau}(\alpha) = k$  significa que  $\alpha$  é uma curva periódica que fecha após dar  $k$  voltas em torno da origem (note que sendo  $\alpha$  uma curva plana o  $\text{grau}(\alpha)$  coincide com o índice de  $\alpha$ ). Daí,  $\alpha$  é uma curva periódica de período  $\frac{T}{k}$ . Note que pela continuidade da função grau, o conjunto  $\Lambda_k$  é um aberto em  $H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\})$ .

Seja, agora,

$$\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)} = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Lambda_{k_1} \times \dots \times \Lambda_{k_N} : x_j(t) \neq x_i(t) \forall t \in S^1, \forall i \neq j\}.$$

Note que se  $x \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ , então  $x$  é uma curva periódica de período  $T$ . Em particular se  $x \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  e  $x(t)$  é uma solução de (4.2.20), teremos que ela é periódica de período  $T$ .

Para conseguir soluções periódicas de (4.2.20), e logo de (4.2.15), usando Cálculo Variacional, definamos o funcional  $f : \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x_1, \dots, x_N) = \int_0^T \mathcal{L}(x_1(t), \dots, x_N, x'_1(t), \dots, x'_N(t)) dt. \quad (4.2.22)$$

Primeiramente, observemos que  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  é aberto em  $H^1 = H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\})$ , logo conforme Seção 3.5, os pontos críticos de  $f|_{\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}}$  são também pontos críticos de  $f$  sobre  $H^1$ . (Note que da segunda Observação da Seção 1.3, do Capítulo 1, tais pontos críticos correspondem a pontos de mínimo desde que  $\mathcal{L} > 0$ ).

Claramente os pontos críticos de  $f$  em  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  são soluções sem colisão de (4.2.20), pois  $x_i(t) \neq x_j(t)$  se  $i \neq j$  e as equações de Euler-Lagrange do funcional  $f$  são dadas por (4.2.20).

Suponha, agora, que as condições (V1)-(V4) valem. Então pelo Lema 3.4.1, temos que  $f$  é coercivo sobre  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ , conforme foi definido na Seção 3.2.1.

**Teorema 4.2.5** *Suponha (V1)-(V4) válidas e que (F.F) vale. Então (4.2.15) tem uma solução  $T$ -periódica sem colisão.*

**Demonstração:** Precisamos mostrar que existe  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ , tal que

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) = \min_{\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}} f$$

e que  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$  é uma solução sem colisão de (4.2.20). Para isto, considere

$$\mu = \inf\{f(x) : x \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}\},$$

e seja  $\{x^n\}$  uma seqüência minimizante de  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ , (conforme a Seção 3.2.2), assim

$$f(x^{(n)}) \rightarrow \mu.$$

Então dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande,

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |x_i^{(n)'}(t)|^2 dt - \int_0^T V(x_1^{(n)}(t), \dots, x_N^{(n)}(t)) dt \leq \mu + \varepsilon.$$

Como  $V(x_1^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}) \leq 0$ , temos que para todo  $i$

$$\int_0^T |x_i^{(n)}(t)|^2 dt \leq \frac{2(\mu + \varepsilon)}{m_i}.$$

Mas, de (3.4.21)

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \sqrt{T} \|x'\|_{L^2}$$

temos que para a seqüência minimizante  $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_N^{(n)})$

$$\|x_i^{(n)}\|_{H^1} \leq \text{const.}$$

para  $i \in \{1, \dots, N\}$  e para todo  $n$  suficientemente grande, pois

$$\|x_i^{(n)}\|_{H^1}^2 \leq (1 + T^2) \|x_i^{(n)}\|_{L^2}^2 \leq (1 + T^2) \frac{2(\mu + \varepsilon)}{m_i}.$$

Pela compacidade fraca da bola fechada centrada na origem e raio  $R$ , conforme Lema 3.2.10, temos que para  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$x_i^{(n)} \rightharpoonup \bar{x}_i$$

fracamente em  $H^1(S^1; \mathbb{R}^2)$ , e logo, pelo Teorema de Sobolev, converge em  $C^0([0, T])$ . (Veja [13]). Mas  $\{x_n\}$  está definida num compacto, então temos convergência uniforme em  $C^0([0, T])$ . Assim, usando o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\liminf_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{m_i}{2} |x_i^{(n)'}(t)|^2 dt - \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} V(x_1^{(n)}(t), \dots, x_N^{(n)}(t)) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_0^T \frac{m_i}{2} |x_i^{(n)'}(t)|^2 dt - \int_0^T V(x_1^{(n)}(t), \dots, x_N^{(n)}(t)) dt \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é fracamente semi-contínuo inferiormente.

Como há (F.F.) pelo Lema 3.4.2, segue-se que  $f(x^{(n)}) \rightarrow +\infty$ , para toda seqüência  $\{x^{(n)}\}$  tal que  $x^{(n)} \rightarrow \bar{x}$  fracamente em  $H^1$ , com  $\bar{x} \in \partial\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ . Logo  $\bar{x}$  está no interior de  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ . Como  $f$  é fracamente semi-contínuo inferiormente e  $\{x_n\}$  é uma seqüência minimizante segue-se, do Teorema da Minimização Básica, que  $\bar{x} \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  é um mínimo para  $f$  em  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ . Tal mínimo é uma solução sem colisão de (4.2.20), já que  $x_i(t) \neq x_j(t)$  se  $i \neq j$  e as equações de Euler-Lagrange do funcional  $f$  são dadas por (4.2.20). Logo, o  $\bar{y}$  correspondente obtido por (4.2.17) é uma solução sem colisão de (4.2.15).

■

**Teorema 4.2.6** *Suponha que as mesmas hipóteses do Teorema 4.2.5 são válidas mas (F.F.) não necessariamente é válida. Então podemos concluir, ainda que, (4.2.15) tem ao menos uma solução  $T$ -periódica generalizada.*

**Demonstração:** Neste caso onde (F.F.) não vale, a coisa é mais delicada, e dividiremos a demonstração em três etapas:

**Etapa 1 (Perturbação no Potencial  $V$ ):** Podemos modificar  $V_{ij}$  em  $\overline{B}_\delta(0)$  de tal modo que o potencial modificado, denotado por,  $V_{ij}^\delta$  satisfaz (F.F.) e tende para  $V_{ij}$  em quase toda parte.

Isto pode ser feito, por exemplo considerando

$$V_{ij}^\delta(x) = V_{ij}(x) - \frac{\varphi_\delta(|x|)}{|x|^2},$$

onde,  $\varphi_\delta \in C^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ ,  $\varphi_\delta(x) = 0$ ,  $\forall x \geq \frac{\delta}{2}$ ,  $\varphi_\delta(x) = 1$ ,  $\forall x < \frac{\delta}{2}$ . Então

$$V_{ij}^\delta(x) \leq -\frac{1}{|x|^2} = -|\nabla \log |x||^2, \quad \forall |x| < \frac{\delta}{2},$$

assim, (F.F.) vale com  $U_{ij}(x) = -\log |x|$ .

Note que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V_{ij}^\delta(x) = V_{ij}(x) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi_\delta(|x|)}{|x|^2} = V_{ij}(x).$$

**Etapa 2 (Existência de Mínimo):** Fazendo

$$V_\delta(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} V_{ij}^\delta(x_i - x_j),$$

o funcional  $f_\delta$  para a Lagrangiana modificada

$$\mathcal{L}_\delta(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{M} \langle x'_i, x'_j \rangle - \tilde{V}_\delta(x_1, \dots, x_N)$$

tem um mínimo no interior de  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ .

De fato, seja

$$\mu_\delta = \inf \{f_\delta(x) : x \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}\}.$$

Considere uma seqüência minimizante  $\{x^{(n)}\} \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ , conforme Seção 3.2.2, assim

$$f_\delta(x^{(n)}) \rightarrow \mu_\delta.$$

Então para  $n$  suficientemente grande,

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |x_i^{(n)'}(t)|^2 dt - \int_0^T V_\delta(x_1^{(n)}(t), \dots, x_N^{(n)}(t)) dt \leq \mu_\delta + \varepsilon.$$

Como  $V(x_1^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}) \leq 0$ , temos que para todo  $i$

$$\int_0^T |x_i^{(n)}(t)|^2 dt \leq \frac{2(\mu_\delta + \varepsilon)}{m_i}$$

como de (3.4.21)

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \sqrt{T} \|x'\|_{L^2}$$

temos que para a seqüência minimizante  $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_N^{(n)})$

$$\|x_i^{(n)}\|_{H^1} \leq \text{const.}$$

para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$  e para todo  $n$  suficientemente grande, pois

$$\|x_i^{(n)}\|_{H^1}^2 \leq (1 + T^2) \|x_i^{(n)}\|_{L^2}^2 \leq (1 + T^2) \frac{2(\mu_\delta)}{m_i}.$$

Pela compacidade fraca da bola centrada na origem e raio  $R$ , conforme Lema 3.2.10, temos que para  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$x_i^{(n)} \rightharpoonup \bar{x}_i^\delta$$

fracamente em  $H^1(S^1; \mathbb{R}^2)$ , e logo, pelo Teorema de Sobolev, uniformemente em  $C^0([0, T])$ . Assim, usando o Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned} f_\delta(\bar{x}^\delta) &= f(\liminf_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{m_i}{2} |x_i^{(n)'}(t)|^2 dt - \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} V_\delta(x_1^{(n)}(t), \dots, x_N^{(n)}(t)) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_0^T \frac{m_i}{2} |x_i^{(n)'}(t)|^2 dt - \int_0^T V_\delta(x_1^{(n)}(t), \dots, x_N^{(n)}(t)) dt \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_\delta(x^{(n)}). \end{aligned}$$

Logo,  $f_\delta$  é fracamente semi-contínuo inferiormente.

Como há (F.F.) segue-se do Lema 3.4.2, que  $f(x^{(n)}) \rightarrow +\infty$ , para toda seqüência  $\{x^{(n)}\}$  tal que  $x^{(n)} \rightarrow \bar{x}^\delta$  fracamente em  $H^1$  com  $\bar{x}^\delta \in \partial\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ . Logo  $\bar{x}^\delta$  está no interior de  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ . Como  $f$  é fracamente semi-contínuo inferiormente segue-se, do Teorema da Minimização Básica e do fato de  $\{x_n\}$  ser minimizante, que  $\bar{x}^\delta \in \Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$  é um mínimo para  $f_\delta$  em  $\Lambda_{(k_1, \dots, k_N)}$ .

**Etapa 3 (Convergência no conjunto dos mínimos):** O conjunto dos mínimos  $(\bar{x}_1^\delta, \dots, \bar{x}_N^\delta)$  de  $f_\delta$  é fracamente compacto em  $H^1$  e quando  $\delta \rightarrow 0$ , o mínimo converge fracamente para uma solução generalizada de (4.2.20).

De fato, sabemos que os  $\mu_\delta$  são finitos, então  $\mu_\delta \leq c$ , para todo  $\delta > 0$ . Isto implica que

$$\|\bar{x}_i^\delta\|_{H^1}^2 \leq C \int_0^T |\bar{x}_i^\delta|^2 dt \leq C', \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad \forall \delta > 0.$$

Então, pelo mesmo argumento usado na etapa anterior  $\bar{x}_i^\delta \rightarrow \bar{x}_i$  fracamente em  $H^1$ . Basta, então mostrar que  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$  é uma solução generalizada de (4.2.20). Para isto, considere,  $\forall i \neq j$

$$\mathcal{C}_{ij} = \{t \in [0, T] \mid \bar{x}_i(t) = \bar{x}_j(t) \quad \forall \delta > 0\}.$$

Então, como  $(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$  é contínua, cada  $\mathcal{C}_{ij}$  é um conjunto fechado e, quando  $\delta \rightarrow 0$

$$(\bar{x}_i^\delta - \bar{x}_j^\delta) \rightarrow 0$$

uniformemente em  $\mathcal{C}_{ij}$ . Então, se  $\text{med}(\mathcal{C}_{ij}) > 0$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\mu_\delta = f_\delta(\bar{x}^\delta) \geq - \int_0^T V_{ij}^\delta(\bar{x}_i^\delta(t) - \bar{x}_j^\delta(t)) dt \rightarrow +\infty,$$

pois  $V_\delta$  admite (F.F.). Mas isto é uma contradição. Logo  $\text{med}(\mathcal{C}_{ij}) = 0 \quad \forall i \neq j$ .

Seja  $\mathcal{C} = \bigcup_{1 \leq i \neq j \leq N} \mathcal{C}_{ij}$ , então  $\text{med}(\mathcal{C}) = 0$ . Considere para todo  $n \geq 1$

$$K_n \subset [0, T] - \mathcal{C},$$

onde os  $K_n$  são compactos,  $\bigcup_{n \geq 1} K_n = [0, T] - \mathcal{C}$ ,  $K_n \subset K_{n+1}$ . Seja

$$\tilde{K}_n = \{\bar{x}(t) : t \in K_n\}.$$

Então para todo  $n \geq 1$ ,  $\tilde{K}_n$  é um conjunto compacto pois  $\bar{x}$  é contínua.

Escolha uma vizinhança  $U_n$  de  $\tilde{K}_n$  tal que o fecho de  $U_n$  é compacto em  $\Lambda$  (podemos sempre escolher tal vizinhança  $U_n$ , pois, a distância de  $\tilde{K}_n$  à  $\Lambda^c$  é positiva). Então, para todo  $\delta$  suficientemente pequeno temos que  $V_\delta \rightarrow V$  em  $C^1(\bar{U}_n; \mathbb{R})$ . Com efeito, na Etapa 1 vimos que  $V_\delta \rightarrow V$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ . Além disso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{ij}^\delta(x(t)) &= \frac{\partial V_{ij}^\delta}{\partial x}(x(t)) x'(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( V_{ij}(x) - \frac{\varphi_\delta(|x|)}{|x|^2} \right) x'(t) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} V_{ij}(x) + \frac{\varphi_\delta(|x|) 2x'}{|x|^4} \right) x'(t). \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} V_{ij}^\delta(x(t)) &= \frac{\partial V_{ij}}{\partial x}(x(t)) x'(t) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi_\delta(|x|) 2x'}{|x|^4} x'(t) \right] \\
&= \frac{\partial V_{ij}}{\partial x}(x(t)) x'(t) \\
&= \frac{d}{dt} V_{ij}(x(t)),
\end{aligned}$$

Logo,  $V_\delta \rightarrow V$  em  $C^1(\overline{U}_n; \mathbb{R})$  quando  $\delta$  é suficientemente pequeno.

Conseqüentemente,

$$\nabla_{x_i} V_\delta(\overline{x}_1^\delta(t), \dots, \overline{x}_N^\delta(t)) \rightarrow \nabla_{x_i} V(\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_N(t))$$

uniformemente em  $K_n$ . Como

$$-m_i(\overline{x}_i^\delta)''(t) = \nabla_{x_i} V_\delta(\overline{x}_1^\delta(t), \dots, \overline{x}_N^\delta(t))$$

temos que quando  $\delta \rightarrow 0$

$$\overline{x}_i^\delta \rightarrow \overline{x}_i$$

em  $C^2[0, T]$  sobre  $K_n$  e logo,  $\overline{x}(t) = (\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_N(t))$  é solução de

$$-m_i \overline{x}_i''(t) = \nabla_{x_i} V(\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_N(t)),$$

para todo  $t \in K_n$ .

Como  $\bigcup_{n \geq 1} K_n = [0, T] - \mathcal{C}$ , temos que  $\overline{x}$  satisfaz as condições (a) e (b) da definição de solução generalizada. A condição (c) segue-se, notando que

$$H_\delta(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\overline{x}_i^{\delta'}(t)|^2 + V^\delta(\overline{x}_1^\delta(t), \dots, \overline{x}_N^\delta(t))$$

é uma constante do movimento. Além disso, de

$$H_\delta = \frac{1}{T} f_\delta(\overline{x}_1^\delta, \dots, \overline{x}_N^\delta)$$

sendo

$$f_\delta(\overline{x}^\delta) = \mu_\delta$$

e

$$\int_0^T |(\bar{x}_i^\delta)'|^2 dt \leq \text{const.}$$

temos que  $H_\delta$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Podemos então assumir que  $H_\delta \rightarrow H$  quando  $\delta \rightarrow 0$ . Então segue-se que para todo  $t_1, t_2 \in [0, T] - \mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} H_0(t_1) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\bar{x}_i'|^2 + V(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_N(t)) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta(t_1) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta(t_2) \\ &= H_0(t_2) \end{aligned}$$

e isto prova que  $\bar{x}$  é uma solução generalizada de

$$-m_i x_i''(t) = \nabla_{x_i} V(x_1(t), \dots, x_N(t)).$$

Logo  $\bar{y}$  dado através de (4.2.17) é uma solução generalizada de (4.2.15). Completando, assim a demonstração do Teorema 4.2.6. ■

**Observação:** Como no problema dos N-corpos não há (F.F.), não podemos aplicar o Teorema 4.2.5., para estudar a existência de soluções periódicas sem colisão.

### 4.2.3 Existência de soluções com restrições de simetria

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$-m_i x_i''(t) = \nabla_{x_i} V(x_1(t), \dots, x_N(t)) \quad (4.2.23)$$

com a seguinte condição inicial

$$x_i(0) = x_i(T).$$

Assumimos que  $V$  satisfaz as mesmas hipóteses (V1)-(V4), da Seção anterior. Assumimos, ainda que  $m_i > 0$  para todo  $i$ ,  $\bar{M} = \sum_{i=1}^N m_i$  e

$$V_{ij}(x) = V_{ji}(x), \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq N. \quad (4.2.24)$$

Definamos os seguintes conjuntos

$$\Lambda = \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2)\},$$

$$\Lambda_0 = \left\{x \in \Lambda : x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t)\right\}$$

e defina o funcional  $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |x'_i(t)|^2 dt - \int_0^T V(x_1(t), \dots, x_N(t)) dt.$$

Como vimos na Seção 3.5, do capítulo 3, os pontos críticos de  $f|_{\Lambda_0}$  são também pontos críticos de  $f$  sobre  $H^1$ .

Aplicando o mesmo procedimento da Seção anterior é fácil mostrar que os pontos críticos de  $f$  sobre  $\Lambda_0$  são soluções sem colisão de (4.2.23) e que  $f$  é coercivo sobre  $\Lambda_0$ , conforme Seção 3.4. Além disso, como  $V_{ij}(x) = V_{ji}(x)$ , temos

$$\begin{aligned} V(-x_1(t), \dots, -x_N(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} V_{ij}(-x_i(t) + x_j(t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} V_{ji}(x_j(t) - x_i(t)) \\ &= V(x_1(t), \dots, x_N(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(-x_1(t), \dots, -x_N(t)) = f(x_1(t), \dots, x_N(t)),$$

então,  $-\bar{x}$  é também ponto crítico de  $f$ , logo solução de (4.2.23).

Ainda temos o seguinte Teorema

**Teorema 4.2.7** *Suponha  $V$  satisfazendo (V1)-(V4) e (4.2.24). Então para todo  $T > 0$ , temos infinitas soluções generalizadas  $T$ -periódicas para (4.2.23).*

**Demonstração:** Provaremos primeiro a existência de pelo menos uma solução generalizada. Se cada  $V_{ij}$  satisfaz a condição (F.F.) a demonstração é inteiramente análoga a do Teorema 4.2.5, onde há existência de pelo menos uma solução  $T$ -periódica sem colisão (e logo generalizada), para (4.2.23). Caso o potencial  $V$  não satisfaça a condição de (F.F.), a demonstração de que existe pelo menos uma solução  $T$ -periódica

generalizada é semelhante a do Teorema 4.2.6, onde dividimos a demonstração em três etapas. Nas Etapas 1 e 3 repetimos os mesmos procedimentos. Quanto a Etapa 2, pelo fato das curvas não, necessariamente, circundarem a origem, não podemos usar a estimativa

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \sqrt{T} \|x'\|_{L^2}.$$

Mas usando a hipótese de simetria, podemos obter uma estimativa semelhante, pois sendo  $x_i(t + \frac{T}{2}) = -x_i(t)$ , temos

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \frac{1}{2} \left| x(t) - x\left(t + \frac{T}{2}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_t^{t+\frac{T}{2}} x'(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{2}} \left\{ \int_t^{t+\frac{T}{2}} |x'(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{T}}{4} \left\{ \int_0^T |x'(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

logo

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{T}{16} \|x'\|_{L^2}.$$

Conseqüentemente, podemos adaptar a Etapa 2 com esta nova estimativa e concluir que (4.2.23) tem pelo menos uma solução generalizada.

Mostraremos, agora, que na verdade existem uma infinidade de soluções generalizadas  $T$ -periódicas para (4.2.23). De fato, Seja  $x_T$  a solução encontrada pelo processo descrito acima (isto é conforme adaptação do Teorema 4.2.6). Para provar a existência de infinitas soluções  $T$ -periódicas, comecemos observando que  $x_T$  não pode ser constante, pois se isto ocorresse

$$x_T(t + \frac{T}{2}) = -x_T(t) \Rightarrow x_T \equiv 0,$$

contradizendo o fato de  $x_T$  ser generalizada. Seja  $\frac{T}{K}$ ,  $K \geq 1$  o período mínimo de  $x_T$ . Aplicando a prova de existência, como acima, com  $T$  substituído por  $\frac{T}{K+1}$  encontramos uma solução  $x_{\frac{T}{K+1}}$  que é uma solução  $\left(\frac{T}{K+1}\right)$ -periódica de (4.2.23). Sendo o problema autônomo, tal solução é também uma solução  $T$ -periódica. Procedendo com esta construção conseguiremos uma infinidade de soluções  $T$ -periódicas. ■

### 4.3 Soluções com simetrias de rotação

Motivados pelo problema dos  $N$ -Corpos em  $\mathbb{R}^k$ , para o qual

$$V(y_0, \dots, y_N) = V(Ry_0, \dots, Ry_N), \forall R \in O(k) \quad (4.3.25)$$

(onde  $O(k)$  denota o grupo das rotações em  $\mathbb{R}^k$ ). Faremos algumas suposições de simetrias sobre nosso potencial  $V$ . Começamos introduzindo

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.3.26)$$

onde  $R_\theta \in SO(2)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  onde  $SO(2)$  denota o grupo das rotações em  $\mathbb{R}^2$  preservando orientação.

**Observação:** Pelo Teoria clássica das Equações Diferenciais Ordinárias, segue-se que, se  $y(t)$  é solução da EDO

$$y'' = \nabla V(y(t))$$

e se

$$V(R_\theta y(t)) = V(y(t)).$$

Então,  $R_\theta y(t)$  é também solução da mesma EDO.

Assumiremos que existe  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l \geq 2$ , tal que

$$V(y_0, \dots, y_N) = V\left(R_{\frac{2\pi}{l}} y_0, \dots, R_{\frac{2\pi}{l}} y_N\right). \quad (V5)_l$$

**Observação:** Note que, sendo  $\theta = \frac{2\pi}{l}$  então  $R_\theta^l = I$ . Além disso, se  $y\left(t + \frac{T}{l}\right) = R_{\frac{2\pi}{l}} y(t)$ , temos

$$\begin{aligned} y(t+T) &= y\left(t + l\frac{T}{l}\right) = y\left(t + \overbrace{\frac{T}{l} + \dots + \frac{T}{l}}^{l\text{-vezes}}\right) \\ &= R_{\left(\frac{2\pi}{l} \dots \frac{2\pi}{l}\right)} y(t) = R_{\frac{2\pi}{l}}^l y(t) \\ &= y(t). \end{aligned}$$

Logo,  $y(t)$  é uma solução  $T$ -periódica.

Então introduzimos o conjunto  $\Delta_l^N$ , dado por

$$\begin{aligned}\Delta_l^N = \{(y_0, \dots, y_N) : & y_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2), y_i(t) \neq y_j(t), \forall t \in S^1, \forall i \neq j, \\ & y_i\left(t + \frac{T}{l}\right) = R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t), \forall t, \forall i\}.\end{aligned}$$

Cuja fronteira é dada por

$$\begin{aligned}\partial\Delta_l^N = \{(y_0, \dots, y_N) : & y_i(t) \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2), \exists t \in S^1, : y_i(t) = y_j(t), \text{ para algum } i \neq j, \\ & y_i\left(t + \frac{T}{l}\right) = R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t), \forall t, i\}.\end{aligned}$$

Note que se  $(y_0, \dots, y_N) \in \Delta_l^N$ , então

$$\begin{aligned}V\left(y\left(t + \frac{T}{l}\right)\right) &= V\left(y_0\left(t + \frac{T}{l}\right), \dots, y_N\left(t + \frac{T}{l}\right)\right) \\ &= V\left(R_{\frac{2\pi}{l}} y_0(t), \dots, R_{\frac{2\pi}{l}} y_N(t)\right) \\ &= V(y_0(t), \dots, y_N(t)) = V(y(t)).\end{aligned}$$

Introduzimos, também, o funcional  $I : \Delta_l^N \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(y_0, \dots, y_N) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y'_i(t)|^2 dt - \int_0^T V(y_0, \dots, y_N) dt \quad (4.3.27)$$

e o conjunto "colisão"

$$\Gamma_l^N = \{(y_0, \dots, y_N) \in \overline{\Delta}_l^N : \exists \bar{t} \in S^1 \text{ com } y_i(\bar{t}) = y_j(\bar{t}) \forall i, j\}.$$

**Observação:** Note que  $\Delta_l^N$  é um conjunto aberto no subespaço linear de  $H^1$ ,

$$\Lambda = \{(y_0, \dots, y_N) : y_i(t) \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2) : y_i\left(t + \frac{T}{l}\right) = R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t), \forall t, \forall i\}.$$

Logo, conforme Corolário 3.5.6, da Seção 3.5, segue-se que os pontos críticos de  $I|_\Lambda$  são também pontos críticos de  $I$  em  $H^1$  e pela Proposição 3.5.4, os pontos críticos de  $I|_{\Delta_l^N}$  são também pontos críticos de  $I|_\Lambda$  e por transitividade os pontos críticos de  $I|_{\Delta_l^N}$  são pontos críticos de  $I$  sobre  $H^1$ .

Como consequência desta última Observação formulamos o seguinte Lema

**Lema 4.3.1** *Suponha (V1)-(V4) e (V5)<sub>l</sub> válidas. Então os pontos críticos de  $I$  em  $\Delta_l^N$  são soluções de (4.2.15).*

**Lema 4.3.2** *Suponha (V1)-(V4) e (V5)<sub>l</sub> válidas com  $l \geq 2$ . Então  $I$  é coercivo em  $\Delta_l^N$ , no sentido que para toda seqüência  $(x_n) \subset \Delta_l^N$ ,  $\|x_n\| \rightarrow +\infty$  implica que  $I(x_n) \rightarrow +\infty$ .*

**Demonstração:** Observemos que de (V4) segue-se que

$$I(y_0, \dots, y_N) \geq \sum_{i=0}^N m_i \int_0^T |y_i'|^2 dt$$

pois  $V(y_0, \dots, y_N) < 0$ . Assim,

$$I(y_0, \dots, y_N) \geq \sum_{i=0}^N m^* \int_0^T |y_i'|^2 dt = m^* \|y'\|_{L^2}^2$$

onde  $m^* = \min_{0 \leq i \leq N} \{m_i\}$ .

Por outro lado,

$$\left| y_i \left( t + \frac{T}{l} \right) - y_i(t) \right|^2 = \left| R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t) - y_i(t) \right|^2 = \left| 2 \sin \left( \frac{\pi}{l} \right) \right|^2 |y_i|^2.$$

Com efeito, seja  $z_i = R_\theta y_i$ , claramente

$$|z_i|^2 = |y_i|^2,$$

assim,

$$|z_i - y_i|^2 = 2[(1 - \cos \theta)|y_i(t)|^2]$$

para  $\theta = \frac{2\pi}{l} = \frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{l}$ ,

$$\begin{aligned} |z_i - y_i|^2 &= 2 \left[ 1 - \left( \cos^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) \right) |y_i|^2 \right] \\ &= 2 \left[ 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) \right] |y_i|^2 \\ &= 2 \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) \right] |y_i|^2 \\ &= \left| 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} \right) \right|^2 |y_i|^2. \end{aligned}$$

Dai, fazendo

$$y(t) = (y_0, \dots, y_N)$$

com  $y_i \left( t + \frac{T}{l} \right) = R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t)$  temos

$$\left| y \left( t + \frac{T}{l} \right) - y(t) \right|^2 = \left| 2 \sin \left( \frac{\pi}{l} \right) \right|^2 |y(t)|^2,$$

ou equivalentemente

$$|y(t)| = \frac{1}{2|\sin(\frac{\pi}{l})|} \left| y\left(t + \frac{T}{l}\right) - y(t) \right|,$$

e disto segue-se

$$\|y\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2|\sin(\frac{\pi}{l})|} \frac{\sqrt{T}}{l} \|y'\|_{L^2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|y\|_{H^1}^2 &= \|y'\|_{L^2}^2 + \|y\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|y'\|_{L^2}^2 + T\|y\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{T^2}{l^2}\right) \|y'\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Então

$$\|y\|_{H^1} \rightarrow +\infty \Rightarrow \|y'\|_{L^2} \rightarrow +\infty \Rightarrow I(y) \rightarrow +\infty.$$

O que prova a coercividade do funcional  $I$ . ■

### 4.3.1 Estimativas

Na próxima Subseção provaremos a existência de soluções sem colisão para (4.2.15). Para isto, faremos algumas estimativas para o ínfimo do funcional  $I$  sobre  $\Delta_l^N$  e sobre  $\partial\Delta_l^N$ .

**Lema 4.3.3** *Seja,  $0 < \alpha \leq 2$ . Considere  $V = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha}$ . Então,*

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \geq \frac{1}{2^{\frac{(\alpha+1)}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{(2+\alpha)}{2}}}{\overline{M}^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (4.3.28)$$

onde  $\overline{M} = \sum_{i=1}^N m_i$ .

**Demonstração:** Observemos primeiramente que pela desigualdade de Hölder

$$\sum_{i \neq j} m_i m_j = \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{|x_i - x_j|^{\frac{\alpha}{2}}}{|x_i - x_j|^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\leq \left( \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j |x_i - x_j|^\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

usando o fato, que a função  $\varphi(\theta) = \theta^{\frac{\alpha}{2}}$  é convexa com  $0 < \alpha \leq 2$ , e mais uma vez a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} m_i m_j &\leq \sqrt{2} \sqrt{-V(x_1, \dots, x_N)} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{(2-\alpha)}{4}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j |x_i - x_j|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{-V(x_1, \dots, x_N)} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{(2-\alpha)}{4}} \left( 2M \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 - \left| \sum_{i=1}^N m_i x_i \right|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}} \\ &\leq 2^{\frac{(2+\alpha)}{4}} \overline{M}^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{-V(x_1, \dots, x_N)} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{(2-\alpha)}{4}} \left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}} \\ &= 2^{\frac{2+\alpha}{4}} \overline{M}^{\frac{\alpha}{4}} \left[ \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2-\alpha}{4}} \left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i \neq j} m_i m_j \leq 2^{\frac{2+\alpha}{4}} \overline{M}^{\frac{\alpha}{4}} \left[ \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2-\alpha}{4}} \left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}}.$$

Desta última desigualdade segue-se que

$$\frac{1}{2^{\frac{2+\alpha}{4}}} \frac{1}{\overline{M}^{\frac{\alpha}{4}}} \frac{1}{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2-\alpha}{4}}} \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right) \leq \left[ \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{2^{\frac{2+\alpha}{4}}} \frac{1}{\overline{M}^{\frac{\alpha}{4}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{-(2-\alpha)}{4}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)}{\left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}}} \leq \left[ \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}$$

como  $\frac{-(2-\alpha)}{4} + 1 = \frac{2+\alpha}{4}$ , temos

$$\left[ \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2^{\frac{2+\alpha}{4}}} \frac{1}{\overline{M}^{\frac{\alpha}{4}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{4}}}{\left( \sum_{i=1}^N m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{4}}}$$

elevando ambos os membros ao quadrado temos o resultado. ■

**Lema 4.3.4** *Considere o funcional  $f : \Delta_l^N \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por*

$$f(y_0, \dots, y_N) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y'_i|^2 dt + \frac{b}{2} \sum_{i \neq j} \int_0^T \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha} dt, \quad b > 0,$$

onde  $1 \leq \alpha \leq 2$  e  $b$  é uma constante real positiva. Então, fazendo  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , temos que

$$\inf_{\Gamma_l^N} f \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) b^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} l^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \frac{\sum_{i \neq j} m_i m_j}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} T$$

**Demonstração:** Do Lema 4.3.3, temos

$$f(y_0, \dots, y_N) \geq \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y'_i|^2 dt + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^T \frac{dt}{\left( \sum_{i=0}^N m_i |y_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}}. \quad (4.3.29)$$

Se  $(y_0, \dots, y_N) \in \Gamma_l^N$  temos que existe um  $\bar{t}$  tal que  $y_i(\bar{t}) = y_j(\bar{t})$  para todo  $i, j$ . Da condição de simetria podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\bar{t} = 0$  e que  $y_i(0) = 0$ .

Se, agora, definirmos o momento de inércia  $R(t) \in \mathbb{R}$  por

$$MR(t)^2 = \sum_{i=0}^N m_i |y_i(t)|^2$$

temos que

$$R \in H_0^1((0, T); \mathbb{R}^+),$$

onde  $H_0^1((0, T))$  denota o espaço de Sobolev das aplicações absolutamente contínuas sobre  $[0, T]$  que se anulam nos extremos e cujas derivadas são de quadrado integrável. Mais detalhes veja ([3]).

Nestas condições é de fácil verificação que

$$MR'(t)^2 \leq \sum_{i=0}^N m_i |y'_i|^2$$

pois

$$MR(t)R'(t) = \sum_{i=0}^N \langle y_i, y'_i \rangle$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$MR(t)|R'(t)|^2 \leq MR(t)^2 \sum_{i=0}^N m_i |y_i'|^2$$

Além do mais, como

$$y_i \left( t + \frac{T}{l} \right) = R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t),$$

temos que

$$R \left( t + \frac{T}{l} \right) = R(t).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} MR \left( t + \frac{T}{l} \right)^2 &= \sum_{i=0}^N m_i \left| y_i \left( t + \frac{T}{l} \right) \right|^2 = \sum_{i=0}^N m_i \left| R_{\frac{2\pi}{l}} y_i(t) \right|^2 \\ &= \sum_{i=0}^N m_i |y_i(t)|^2 = MR(t). \end{aligned}$$

Assim,  $R$  é  $\frac{T}{l}$  periódica, e  $R \in H_0^1 \left( (0, \frac{T}{l}); \mathbb{R}^+ \right)$ .

Disto deduzimos que

$$\inf_{\Gamma_i^N} f(y_0, \dots, y_N) \geq \inf_{H^1((0, \frac{T}{l}); \mathbb{R}^+)} J(R)$$

onde,  $J : H^1((0, \frac{T}{l}); \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$J(R) = l \left\{ \frac{M}{2} \int_0^{\frac{T}{l}} |R'|^2 + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^{\frac{T}{l}} \frac{dt}{R^\alpha} \right\}.$$

De fato, pela observação anterior, temos

$$f(y_0, \dots, y_N) \geq \frac{M}{2} \int_0^T |R'(t)|^2 + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^T \frac{dt}{\left( \sum_{i=0}^N m_i |y_i|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

sendo  $R$  periódica de período  $\frac{T}{l}$  resulta que

$$f(y_0, \dots, y_N) \geq l \left\{ \frac{M}{2} \int_0^{\frac{T}{l}} |R'(t)|^2 + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} \int_0^{\frac{T}{l}} \frac{dt}{(R(t))^\alpha} \right\}.$$

Assim, o resultado deste Lema segue-se do Lema abaixo. ■

**Lema 4.3.5** *Nas hipóteses do Lema anterior, temos*

$$\begin{aligned} \inf_{H_0^1((0,T);\mathbb{R}^+)} J(R) &= T \min_{R>0} \left\{ \frac{1}{2} M l^2 \omega^2 R^2 + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} \frac{1}{R^\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) b^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\sum_{i \neq j} m_i m_j}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} T. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Veja [10]. ■

**Proposição 4.3.6 Proposição (Desigualdade de Jensen):** *Se  $h$  é uma função real mensurável, e  $\varphi$  é convexa sobre  $(a, b)$ , (se  $\varphi$  é duas vezes diferenciável  $\varphi''(\theta) \geq 0$  para todo  $\theta \in (a, b)$ ), então se  $a < h(x) < b$  para todo  $x \in \Omega$  e  $\text{med}(\Omega) = 1$ , temos*

$$\int_{\Omega} (\varphi \circ h) d\mu \geq \varphi \left( \int_{\Omega} h d\mu \right).$$

**Demonstração:** Veja ([20], pp. 62). ■

Usando esta proposição daremos mais uma estimativa para nosso funcional  $f$  no seguinte Lema.

**Lema 4.3.7** *Suponha  $b$  uma constante positiva e  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Considere*

$$f(y_0, \dots, y_N) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y_i'(t)|^2 dt + b \sum_{i \neq j} \int_0^T \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha} dt.$$

*Então, para  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , temos*

$$\inf_{\Delta_i^N} f(y_0, \dots, y_N) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) b^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\sum_{i \neq j} m_i m_j}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} T$$

**Demonstração:** Defina  $y(t) \in \mathbb{R}^{2N}$  por

$$\sqrt{M}y(t) = (\sqrt{m_0}y_0(t), \dots, \sqrt{m_N}y_N(t)).$$

Daí,

$$\sum_{i=0}^N m_i |y_i(t)|^2 = M |y(t)|^2.$$

Se denotarmos por  $\Sigma_l^N$  o conjunto

$$\Sigma_l^N = \left\{ y(t) = \left( \sqrt{\frac{m_0}{M}} y_0, \dots, \sqrt{\frac{m_N}{M}} y_N \right) : (y_0, \dots, y_N) \in \Delta_l^N \right\},$$

aplicando a desigualdade de Jensen na segunda integral de (4.3.29), temos

$$f(y) \geq \frac{M}{2} \int_0^T |y'|^2 dt + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} T \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{|y(t)|} \right)^\alpha.$$

De fato, notemos que da segunda integral de (4.3.29) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dt}{\left( \sum_{i=0}^N m_i |y_i(t)|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}} &\geq \int_0^T \frac{dt}{(M |y(t)|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{M^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^T \frac{dt}{|y(t)|^\alpha} \\ &= \frac{1}{M^{\frac{\alpha}{2}}} T \left( \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{|y(t)|} \right)^\alpha dt \right) \end{aligned}$$

além disso,  $\frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$ ; chamando  $\varphi(\theta) = \theta^\alpha$  e  $h(t) = \frac{1}{|y(t)|}$ , temos que  $h$  é contínua, pois  $y \in \mathbb{R}^{2N} - \{0\}$ , e  $\varphi$  é convexa, já que  $\alpha \geq 1$ . Então, pela desigualdade de Jensen

$$\left( \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{|y(t)|} \right)^\alpha dt \right) \geq \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{|y(t)|} \right)^\alpha.$$

Logo

$$\int_0^T \frac{dt}{\left( \sum_{i=0}^N m_i |y_i(t)|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}} \geq \frac{1}{M^{\frac{\alpha}{2}}} T \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{|y(t)|} \right)^\alpha.$$

Assim, de (4.3.29), obtemos

$$\begin{aligned} f(y_0, \dots, y_N) &\geq \int_0^T \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} |y'_i|^2 dt + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} T \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{|y|} \right)^\alpha \\ &= \frac{M}{2} \int_0^T |y'|^2 dt + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} T \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{|y(t)|} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

A seguir mostraremos que o funcional

$$g(y) = \frac{M}{2} \int_0^T |y'|^2 dt + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} T \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{|y(t)|} \right)^\alpha$$

satisfaz as seguintes condições:

- (i) o funcional  $g$  é coercivo sobre  $\Sigma_l^N$  e toda sequência minimizante de  $g$  converge para uma função  $\bar{y}$  no interior de  $H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1} - \{0\})$  a qual é uma solução (circular) do problema dos 2-corpos em  $\mathbb{R}^{2N+1}$ ,
- (ii)  $g(\bar{y}) \geq g(\tilde{y})$ , onde  $\tilde{y}$  é alguma solução circular do problema dos 2-corpos em  $\mathbb{R}^{2N+1}$  com período mínimo  $T$ ,

(iii)

$$\inf_{\Sigma_l^N} g(y) = \min_{R>0} \left\{ \frac{M}{2} T R^2 \omega^2 + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{\alpha+2}{2}}}{M^\alpha} \frac{T}{R^\alpha} \right\}.$$

Logo, usando o Lema 4.3.5, concluímos a demonstração do Lema 4.3.7. ■

**Comentário:** Usamos o fato de  $1 \leq \alpha \leq 2$  para podermos aplicar o Lema 4.3.3 e para garantir a convexidade da função  $\varphi(\theta) = (\theta)^\alpha$  e assim, poder aplicar a Desigualdade de Jensen.

Encerraremos esta Subseção voltando as três condições citadas acima:

A coercividade de  $g(y)$  é direta já que

$$\|y\|_{H^1} \leq \text{const.} \|y'\|_{L^2}$$

e que quando  $\|y\| \rightarrow +\infty$ ,  $g(y)$  resume-se a

$$g(y) = \frac{M}{2} \int_0^T |y'(t)|^2 dt = \frac{M}{2} \|y'\|_{L^2}^2 \rightarrow +\infty.$$

Suponha, agora, que  $y_n$  é uma sequência minimizante para  $g$  sobre  $\Sigma_l^N$ . Então,  $y_n$  é limitada em  $H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1})$ , pois  $g$  é coercivo. Daí

$$\|y_n\| \leq \text{const.}$$

Logo,  $y_n$  sempre converge fracamente uniforme para uma função de  $H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1})$ .

Seja  $\bar{y}$  o limite fraco uniforme de  $y_n$ . Então,

$$g(\bar{y}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(y_n).$$

Ainda temos o seguinte Lema

**Lema 4.3.8** *Nas condições acima se existir um  $\bar{t}$  tal que*

$$\bar{y}\left(\bar{t} + \frac{T}{l}\right) = \bar{y}(\bar{t}) = 0,$$

*então, o funcional  $g$  satisfaz*

$$g(\bar{y}) > g(\tilde{y})$$

*onde  $\tilde{y}$  é alguma solução circular do problema dos 2-corpos em  $\mathbb{R}^{2N+1}$  com período mínimo  $T$ .*

**Demonstração:** Veja [10]. ■

Suponha que exista  $\bar{t}$  tal que  $\bar{y}(\bar{t}) = 0$ . Da continuidade de  $\bar{y}$ , já que  $H^1([0, T]) \subset C^0([0, T])$ , temos que

$$\bar{y}\left(\bar{t} + \frac{T}{l}\right) = \bar{y}(\bar{t}) = 0.$$

Logo, pelo Lema acima

$$g(\bar{y}) > g(\tilde{y}),$$

onde  $\tilde{y}$  é alguma solução circular do problema dos 2-corpos em  $\mathbb{R}^{2N+1}$  com período mínimo  $T$ . Se um tal  $\tilde{y} \in \Sigma_l^N$ , temos uma contradição (por ser  $y_n$  uma seqüência minimizante e  $\bar{y}$  ser seu limite fraco uniforme), esta contradição prova que  $\bar{y}$  está no interior de  $H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1})$ .

Além disso,  $\bar{y}$  é um ponto crítico de  $g$  sobre  $H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1} - \{0\})$ .

De fato, desde que  $\Delta_l^N$  é aberto em  $\Lambda$ , como  $\Sigma_l^N$  é um subconjunto aberto do subespaço linear  $\Delta_l^N$ , temos que  $\Sigma_l^N$  também é aberto em  $\Lambda$ . Logo, todo ponto crítico de  $g|_{\Sigma_l^N}$  será ponto crítico de  $g$  em  $H^1$ .

Como  $\bar{y} \in H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1} - \{0\})$ , veja [10], que é possível deduzir que  $\bar{y}$  é uma solução do problema dos 2-corpos em  $\mathbb{R}^{2N+1}$  e que

$$\inf_{\Sigma_i^N} g(y) = \min_{R>0} \left\{ \frac{M}{2} T R^2 \omega^2 + \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha} \frac{T}{R^\alpha} \right\}$$

se verifica.

**Comentário:** Em [10], encontram-se alguns resultados mais gerais envolvendo certas funções convexas, nos quais, Esta última expressão, assim como os Lemas 4.3.5 e 4.3.8 podem, com um pouco de cálculos, serem adaptados. Apresentaremos alguns destes resultados mais gerais no Apêndice E.

### 4.3.2 Soluções sem colisão para problemas do tipo N-corpos

Começemos introduzindo a seguinte notação

$$\rho(\alpha, m_0, \dots, m_N) = \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{\left| \sin \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right) \right|^\alpha}$$

e

$$\sigma(m_0, \dots, m_N) = \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} m_i m_j \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right).$$

Então provaremos o seguinte Lema

**Lema 4.3.9** *Considere  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Se*

$$V(y_0, \dots, y_N) \geq -\frac{a}{2} \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha},$$

*e se  $\bar{y}$  é um mínimo para o funcional  $I$  dado por (4.3.27), então*

$$I(\bar{y}) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) a^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} T. \quad (4.3.30)$$

**Demonstração:** Temos

$$\rho(\alpha, m_0, \dots, m_N) = \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{\left| \sin \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right) \right|^\alpha},$$

e

$$\sigma(m_0, \dots, m_N) = \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} m_i m_j \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right).$$

Seja

$$R_2^{\alpha+2} = \frac{\alpha a M \rho}{2^{\alpha+2} \omega^2 \sigma}.$$

Considere  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{2N+1}$ , tal que  $|\xi|^2 = |\eta|^2 = 1$ , e  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ , e defina

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i(t) &= R \left\{ \xi \left[ \cos \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - \frac{1}{M} \sum_{l=0}^N m_l \cos \left( \omega t + \frac{2\pi l}{N+1} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \eta \left[ \sin \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - \frac{1}{M} \sum_{l=0}^N m_l \sin \left( \omega t + \frac{2\pi l}{N+1} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde  $R$  é um número real à ser determinado.

Então, após alguns cálculos e manipulações trigonométricas, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |\tilde{y}'|^2 dt &= \frac{1}{2} \left( M - \frac{1}{M} \sum_{i,j} m_i m_j \cos^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right) \right) R^2 \omega^2 T \\ &= \frac{R^2 \omega^2 T}{M} \sum_{i,j} m_i m_j \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$|\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t)| = 4R^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t)) &= \xi \left[ \cos \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - \cos \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \right] \\ &\quad + \eta \left[ \sin \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - \sin \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \right], \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} |\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t)|^2 &= \left[ \cos \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - \cos \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sin \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - \sin \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \right]^2 \\ &= \cos^2 \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) - 2 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) \cos \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \\ &\quad + \cos^2 \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) + \sin^2 \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \sin \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) \sin \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) + \sin^2 \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \\
& = 2 - 2 \left[ \cos \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) \cos \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \right. \\
& + \left. \sin \left( \omega t + \frac{2\pi i}{N+1} \right) \sin \left( \omega t + \frac{2\pi j}{N+1} \right) \right] \\
& = 2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi(i-j)}{N+1} \right) \right] \\
& = 2 \left[ 2 \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right) \right] \\
& = 2^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right)
\end{aligned}$$

e, de

$$|\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t)|^2 = R^2 2^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right),$$

temos

$$|\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t)| = \left( R^2 2^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

logo,

$$|\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t)|^\alpha = R^\alpha 2^\alpha \sin^\alpha \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right).$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
-V(\tilde{y}_0(t), \dots, \tilde{y}_N(t)) & \leq \frac{a}{2} \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{|\tilde{y}_i - \tilde{y}_j|^\alpha} \\
& = \frac{a}{2^{1+\alpha} R^\alpha} \sum_{0 \leq i \neq j \leq N} \frac{m_i m_j}{\left| \sin \left( \frac{\pi(i-j)}{N+1} \right) \right|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, deduzimos que para todo  $R > 0$

$$f(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N) \leq \frac{R^2 \omega^2}{M} T \sigma + \frac{aT}{2^{1+\alpha} R^\alpha} \rho.$$

Por outro lado, facilmente verifica-se que um mínimo para a função

$$\phi(R) = \frac{R^2 \omega^2}{M} T \sigma + \frac{aT}{2^{1+\alpha} R^\alpha} \rho$$

é dado por

$$R = R_2 = \left( \frac{\alpha a M \rho}{2^{\alpha+2} \omega^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}}.$$

Assim, teremos

$$f(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N) \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \frac{R_2^2 \omega^2}{M} T \sigma.$$

Para concluirmos a demonstração deste Lema precisamos, apenas, mostrar que

$$\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) R_2^2 \omega^2 T \sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) a^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}.$$

Para isto lembremo-nos que  $\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right)$ , e que

$$R_2^2 = \frac{1}{2^2} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} a^{\frac{2}{\alpha+2}} \frac{1}{\omega^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}},$$

então,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) R_2^2 \omega^2 T \sigma &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) R_2^2 \omega^2 T \sigma \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{4} \frac{\alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} a^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) a^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_N) \leq f(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) a^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}},$$

concluindo, assim, a demonstração do Lema. ■

**Teorema 4.3.10** *Suponha  $(V1)$ - $(V4)$ ,  $(V5)_l$ ,  $(l \geq 2)$  válidas. Suponha, além disso,*

$$-\frac{a}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha} \leq V(y_0, \dots, y_N) \leq -\frac{b}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha}, \quad (V6)$$

$$0 < m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_N,$$

e

$$a^{\frac{2}{\alpha+2}} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} < b^{\frac{2}{\alpha+2}} \left[ \frac{2l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} + \frac{\sum_{2 \leq i \neq j \leq N} m_i m_j}{\left(\sum_{i=2}^N m_i\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} \right], \quad (4.3.31)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas e  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Então (4.2.15) tem pelo menos uma solução  $T$ -periódica sem colisão.

**Demonstração:** Considere o funcional  $I : \Delta_l^N \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$I(y_0, \dots, y_N) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y_i'(t)|^2 dt - \int_0^T V(y_0, \dots, y_N) dt.$$

A hipótese (V6) implica que

$$I(y_0, \dots, y_N) \geq \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y_i'(t)|^2 dt + b \sum_{0 < i < j \leq N} \int_0^T \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha} dt.$$

Pois,

$$-V(y_0, \dots, y_N) \geq \frac{b}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha} \geq b \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha}.$$

Do Lema 4.3.2, segue-se que  $I$  é coercivo sobre  $\Delta_l^N$ . Seja  $y_n = (y_{0_n}, \dots, y_{N_n})$  uma sequência minimizante para o funcional  $I$ , em  $\Delta_l^N$ . Queremos mostrar que  $y_n$  converge para uma função do interior de  $\Delta_l^N$ , a qual é solução sem colisão de (4.2.15).

Primeiro do que tudo observe que

$$y_n \rightarrow \bar{y} \in H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1})$$

com

$$I(\bar{y}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(y_n).$$

Pois sendo  $I$  coercivo, podemos supor que a sequência minimizante  $y_n \in \overline{B}_R(0)$  que é um conjunto fracamente compacto. Então,

$$y_n \rightarrow \bar{y} \in \overline{B}_R(0) \subset H^1(S^1; \mathbb{R}^{2N+1})$$

e usando o Teorema de Sobolev e o Lema de Fatou, obtemos

$$I(\bar{y}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(y_n).$$

Logo, o funcional  $I$  é, também, fracamente semi-contínuo inferiormente.

Além disso,

$$y_n \in \Delta_l^N \subset \overline{\Delta_l^N}.$$

Como  $y_n$  converge para  $\bar{y}$ , e sendo  $\overline{\Delta_l^N}$  um conjunto fechado, obrigatoriamente  $\bar{y} \in \overline{\Delta_l^N}$ .

Assim, pelo Teorema da Minimização Básica temos que  $\bar{y}$  é o mínimo de  $I$  em  $\overline{\Delta_l^N}$ . Consequentemente  $\bar{y}$  é uma solução de (4.2.15). Para mostrarmos que  $\bar{y}$  é uma solução sem colisão é suficiente verificarmos que

$$\bar{y} \notin \partial \Delta_l^N.$$

Do Lema 4.3.9, segue-se que vale a expressão (4.3.30), dada por

$$f(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_N) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) a^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} T.$$

Suponha, por contradição, que  $\bar{y} \in \partial \Delta_l^N$ . Podemos supor que existe  $i \neq j$  e  $\bar{t} \in S^1$  tal que

$$\bar{y}_i(\bar{t}) = \bar{y}_j(\bar{t}).$$

Se assumirmos que  $i = 0$ , e  $j = 1$ . Então por hipótese

$$\begin{aligned} I(\bar{y}) &\geq \frac{m_0}{2} \int_0^T |y'_0(t)|^2 dt + \frac{m_1}{2} \int_0^T |y'_1(t)|^2 dt + b \int_0^T \frac{m_0 m_1}{|y_0(t) - y_1(t)|^\alpha} dt \\ &+ \sum_{i=2}^N \frac{m_i}{2} \int_0^T |y'_i(t)|^2 dt + b \sum_{2 \leq i \neq j \leq N} \int_0^T \frac{m_i m_j}{|y_i(t) - y_j(t)|^\alpha} dt \end{aligned}$$

e usando os Lemas 4.3.4 e 4.3.7, que estimam o ínfimo de  $I$  em  $\Gamma_l^N$  e  $\Delta_l^N$ , respectivamente, encontramos

$$I(\bar{y}) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) b^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \left[ \frac{2l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} + \frac{\sum_{2 \leq i \neq j \leq N} m_i m_j}{\left( \sum_{i=2}^N m_i \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} \right] T \quad (4.3.32)$$

As equações (4.3.30) e (4.3.32) contradiz (4.3.31). Esta contradição implica que  $\bar{y}$  está no interior de  $\Delta_l^N$ . Concluindo a demonstração do Teorema.

**Comentário:** Usamos o fato de  $1 \leq \alpha \leq 2$  para podermos usar os Lemas 4.3.4 e 4.3.7.

**Lema 4.3.11** *Para obter (4.3.32) acima, assumimos que  $y_0(\bar{t}) = y_1(\bar{t})$ , mas na verdade (4.3.32) é sempre válido em geral, desde que  $m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_N$ .*

**Demonstração:** Isto é consequência da seguinte desigualdade

$$\left[ \frac{2l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} m_p m_q}{(m_p + m_q)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} + \frac{\sum_{i \neq j, i, j \neq p, q} m_i m_j}{\left( \sum_{i \neq p, q}^N m_i \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} \right] \geq \left[ \frac{2l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} + \frac{\sum_{2 \leq i \neq j \leq N} m_i m_j}{\left( \sum_{i=2}^N m_i \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} \right] T$$

desigualdade esta que segue-se de

$$\frac{m_p m_q}{m_p + m_q} \geq \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}.$$

Que é sempre verdade desde que

$$(m_0 + m_1)(m_p m_q) \geq (m_0 m_1)(m_p + m_q)$$

que é equivalente a

$$(m_0 + m_1) \geq (m_p + m_q) \frac{m_0 m_1}{m_p m_q}.$$

Mas isto sempre ocorre, pois sendo  $m_0 \leq \dots \leq m_N \Rightarrow \frac{m_0 m_1}{m_p m_q} \leq 1$ . ■

**Observação:** Notemos que (4.3.31) vale para quaisquer  $a > b$  e  $m_0, \dots, m_N > 0$ , desde que  $l$  seja suficientemente grande. Por exemplo, se  $N = 2$  (o problema dos 3-corpos) e  $m_i = 1$  para todo  $i$ , temos que (4.3.31) torna-se

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} < \frac{3^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} \frac{2l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}}}{2^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \frac{2}{\rho^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} l^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}},$$

o que implica

$$\frac{a}{b} < 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{l^\alpha}{\rho \sigma^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Mas, no problema dos três corpos  $\alpha = 1$ , então  $\sigma = \frac{7}{2}$  e  $\rho = \frac{8+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ . Assim,

$$\frac{a}{b} < \frac{3\sqrt{6}}{(8+4\sqrt{3})\sqrt{7}} l,$$

como

$$\frac{3\sqrt{6}}{(8+4\sqrt{3})\sqrt{7}} \leq \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

obtemos que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{l}{3\sqrt{2}}$$

desde que  $a \geq b$ , deduzimos que  $l \geq 5$ .

**Observação:** Não podemos provar (e não esperávamos) que a soluções encontrada, via Teorema 4.3.10, é diferente da solução encontrada para o caso do potencial Newtoniano dos 3-corpos, onde

$$V \equiv - \sum \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|}.$$

## 4.4 Uma nova solução para o problema dos três corpos

Nesta seção vamos estudar o caso correspondente ao problema planar dos três corpos. Assim, a equação (4.2.15) resume-se a

$$-m_i y_i''(t) = \nabla_{y_i} V(y_0, y_1, y_2); \quad (i = 0, 1, 2).$$

Onde

$$V(y_0, y_1, y_2) = -b \sum_{0 \leq i \neq j \leq 2} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha}; \quad b > 0, \quad 1 \leq \alpha \leq 2.$$

Logo, o funcional considerado é da forma

$$I(y_0, y_1, y_2) = \sum_{i=0}^2 \frac{m_i}{2} \int_0^T |y_i'(t)|^2 dt + b \sum_{0 \leq i \neq j \leq 2} \frac{m_i m_j}{|y_i - y_j|^\alpha}.$$

Mostraremos que o problema dos três corpos ( $\alpha = 1$ ) tem uma nova solução  $(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$  que:

- (a) Não é uma solução com colisão simultânea, ou colisão total (a ser definida abaixo);
- (b) Não se reduz a nenhuma solução de equilíbrio relativo já conhecida.

**Definição 4.4.1** *Uma solução com colisão simultânea, ou colisão total para a equação (4.2.15) é uma solução generalizada  $(y_0, y_1, y_2)$  de (4.2.15) tal que existe  $t^* \in [0, T]$  com  $y_0(t^*) = y_1(t^*) = y_2(t^*)$ , isto é, as três partículas colidem no instante  $t^*$ .*

**Observação:** Segue-se do Lema 4.3.4 que com  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$\inf_{\Gamma_2^2} f \geq \frac{2^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) b^{\frac{2}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} \omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)}{M^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} T \equiv \sigma_1. \quad (4.4.33)$$

Para obtermos a estimativa (4.4.33) basta substituir o valor  $l = 2$  na tese do Lema 4.3.4.

Consideremos também,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= T(\omega^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \left( \frac{1}{2} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} + \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+2}} \right) \left[ \left( m_1 - \frac{m_1^2}{M} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} (m_0 m_1)^{\frac{2}{\alpha+2}} \right. \\ &\quad \left. + (k^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \left( m_2 - \frac{m_2^2}{M} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} (m_0 m_2)^{\frac{2}{\alpha+2}} \right] \end{aligned}$$

$$+ T(\omega^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+2}} \frac{m_1 m_2}{\left| \left( \frac{m_0 M}{m_0 + m_2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left( \frac{m_0 M}{k^2(m_0 + m_1)} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \right|^\alpha}$$

e

$$\mu(\alpha, k, m_0, m_1, m_2) = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{\frac{\alpha+2}{2}}.$$

O objetivo desta Seção seguirá como corolário do seguinte Teorema

**Teorema 4.4.2** *Suponha  $V$  satisfazendo (V1)-(V4), (V5)<sub>l</sub>, (V6) e que*

$$1 \leq \frac{a}{b} < \mu(\alpha, k, m_0, m_1, m_2) \quad (4.4.34)$$

*com  $k$  ímpar e  $b \leq 1$  e  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Então (4.2.15) tem pelo menos uma solução generalizada  $\bar{y}$  que não é uma solução de (4.2.15) com colisão simultânea e que*

$$y\left(t + \frac{T}{l}\right) = -y(t).$$

*Além disso, se  $y = (y_0, y_1, y_2)$  é uma solução sem colisão, então*

$$\text{grau}(y_1 - y_0) = 1; \quad \text{grau}(y_2 - y_0) = k$$

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 = \Big\{ (y_0, y_1, y_2) : \quad y_i &\in H^1(S^1; \mathbb{R}^2); y_i(t) \neq y_j(t), \forall t \in S^1, \\ &\forall \quad i \neq j, y_i\left(t + \frac{T}{2}\right) = -y_i(t) \text{ para } i = 0, 1, 2 \Big\}. \end{aligned}$$

Se  $y \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2 - \{0\})$  é tal que  $y\left(t + \frac{T}{2}\right) = -y(t)$ , segue-se da Topologia Algébrica que  $\text{grau}(y)$  é ímpar, (isto é uma consequência do Teorema de Borsuk-Ulam, (veja [15], pp. 174)), a título de exemplo, seja  $\gamma\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\gamma(t)$ , com  $\gamma(t) = e^{kit}$  sendo  $t \in [0, T]$  e  $T = 2\pi$ , então  $\text{grau}(\gamma) = k$ . Mas

$$\gamma\left(t + \frac{T}{2}\right) = \gamma(t + \pi) = e^{ik(t+\pi)} = (-1)^k \gamma(t).$$

Assim,  $\gamma\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\gamma(t)$  se, e somente se,  $k$  é ímpar.

Considere

$$\tilde{\Lambda}_{(1,k)} = \{(y_0, y_1, y_2) \in \Delta_2^2 : \text{grau}(y_1 - y_0) = 1, \text{grau}(y_2 - y_0) = k\}.$$

onde  $k > 1$  é um inteiro ímpar.

Observe que  $\Delta_2^2$  é aberto no subespaço linear  $\Lambda_0$ , de  $H^1$ , onde

$$\Lambda_0 = \left\{ \begin{array}{l} (y_0, y_1, y_2) \quad : \quad y_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2); \\ y_i(t + \frac{T}{2}) = -y_i(t), \text{ para } i = 0, 1, 2 \end{array} \right\},$$

já que as funções  $y_l$  são contínuas com  $l = 0, 1, 2$ .

Note que,  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$  é não vazio. De fato, considere

$$y_0 = \varepsilon e^{it}, \quad y_1 = e^{it}, \quad y_2 = 2e^{ikt}$$

onde,  $k > 1$  é ímpar e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno. Então, como  $y_1 - y_0$  está próxima de  $y_1$  e  $y_2 - y_0$  está próxima de  $y_2$ , temos que

$$\text{grau}(y_1 - y_0) = \text{grau}(y_1) = 1 \text{ e } \text{grau}(y_2 - y_0) = \text{grau}(y_2) = k.$$

Logo,  $(y_0, y_1, y_2) \in \tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ .

**Observação:** Pela Proposição A.2.7 do Apêndice A, temos que  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$  é aberto em  $\Lambda_0$ . Daí, os pontos críticos de  $I|_{\tilde{\Lambda}_{(1,k)}}$  são pontos críticos de  $I$  sobre o subespaço linear  $\Lambda_0$ . Mas, como vimos na Seção 3.5, os pontos críticos de  $I|_{\Lambda_0}$  são pontos críticos de  $I$  sobre  $H^1$ . Logo, por transitividade, temos que os pontos críticos de  $I|_{\tilde{\Lambda}_{(1,k)}}$  são pontos críticos de  $I$  sobre  $H^1$ .

Denotaremos, também, por  $I$  a restrição de  $I$  à  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ . Portanto, pela Observação, anterior os pontos críticos de  $I$  sobre  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$  são soluções de (4.2.15).

Estamos, agora, em condições de estudar o ínfimo de  $I$  sobre  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ . Para este propósito consideremos as funções

$$x_1(t) = R_1[\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t];$$

$$x_2(t) = R_2[\xi \cos k\omega t + \eta \sin k\omega t];$$

onde  $k > 1$  é ímpar e  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ , são tais que  $|\xi|^2 = |\eta|^2 = 1$ ,  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  e  $R_1$  e  $R_2$  são constantes positivas. Note que  $\cos(\omega t), \sin(\omega t) \in \Lambda_1$  e  $\cos(k\omega t), \sin(k\omega t) \in \Lambda_k$ .

Façamos agora

$$R_1^{\alpha+2} = \frac{\alpha m_0 a}{\omega^2(1 - \frac{m_1}{M})},$$

$$R_2^{\alpha+2} = \frac{\alpha m_0 a}{\omega^2 k^2(1 - \frac{m_2}{M})}.$$

Logo, considerando

$$y_0(t) = -\frac{1}{M} (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t));$$

$$y_1(t) = x_1(1) - \frac{1}{M} (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)) = x_1(t) + y_0(t);$$

e

$$y_2(t) = x_2(1) - \frac{1}{M} (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)) = x_2(t) + y_0(t).$$

Com estas escolhas para  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , após alguns cálculos algébricos, encontramos

$$\begin{aligned} I(y_0, y_1, y_2) &\leq \frac{\omega^2 T}{2} \left( \left( m_1 - \frac{m_1^2}{M} \right) R_1^2 + k^2 \left( \left( m_2 - \frac{m_2^2}{M} \right) R_2^2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{a m_0 m_1}{R_1^\alpha} T + \frac{a m_0 m_2}{R_2^\alpha} T + a \int_0^T \frac{m_1 m_2}{|x_1(t) - x_2(t)|^\alpha} dt \\ &\leq \frac{\omega^2 T}{2} \left( \left( m_1 - \frac{m_1^2}{M} \right) R_1^2 + k^2 \left( m_2 - \frac{m_2^2}{M} \right) R_2^2 \right) + \frac{a m_0 m_1}{R_1^\alpha} T \\ &\quad + \frac{a m_0 m_2}{R_2^\alpha} T + \frac{a m_1 m_2}{|R_1 - R_2|^\alpha} T \\ &\leq T a^{\frac{2}{\alpha+2}} (\omega^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \left( \frac{1}{2} \alpha^{\frac{2}{\alpha+2}} + \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+2}} \right) \left[ \left( m_1 - \frac{m_1^2}{M} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} (m_0 m_1)^{\frac{-\alpha}{\alpha+2}} \right. \\ &\quad + \left. (k^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \left( m_2 - \frac{m_2^2}{M} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} (m_0 m_2)^{\frac{-\alpha}{\alpha+2}} \right] \\ &\quad + T (\omega^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+2}} \frac{a^{\frac{2}{\alpha+2}} m_1 m_2}{\left| \left( \frac{m_0 M}{m_0 + m_2} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} - \left( \frac{m_0 M}{k^2(m_0 + m_1)} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \right|^\alpha} \\ &= \sigma_2 a^{\frac{2}{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de comparar o ínfimo  $\lambda_c$  de  $I$  sobre o conjunto das colisões simultâneas e o ínfimo  $\lambda$  de  $I$  sobre  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ , vendo o funcional  $I$  como sendo a extensão de  $I$  sobre  $\overline{\Delta}_2^2$ , ou como sua restrição sobre  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ .

Afirmamos que

$$\lambda < \lambda_c,$$

sempre que

$$\frac{b^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma_1}{a^{\frac{2}{\alpha+2}} \sigma_2} > 1$$

ou equivalentemente,

$$1 \leq \frac{a}{b} < \mu(\alpha, k, m_0, m_1, m_2),$$

onde  $b < 1$ .

De fato, sejam

$$\lambda_c = \inf_{\Gamma_2^2} I; \quad \lambda = \inf_{\tilde{\Lambda}_{(1,k)}} I.$$

Então

$$\lambda \leq I(y_0, y_1, y_2) \leq \sigma_2 a^{\frac{2}{\alpha+2}} < \sigma_1 b^{\frac{2}{\alpha+2}} \leq b^{\frac{2}{\alpha+2}} \inf_{\Gamma_2^2} I = b^{\frac{2}{\alpha+2}} \lambda_c,$$

sendo  $b \leq 1$ , temos que  $\lambda < \lambda_c$ .

Logo, o mínimo de  $I$  sobre  $\overline{\Delta_2^2}$  é atingido em algum  $\bar{y} \in \tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ . E é naturalmente uma solução de (4.2.15). ■

**Observação:** Esta solução  $\bar{y}$  não coincide com nenhuma das soluções triangulares de Lagrange (soluções de equilíbrio relativo do problema dos três corpos, onde em cada instante as partículas formam um triângulo equilátero) e colineares de Euler (soluções de equilíbrio relativo do problema dos três corpos, onde em cada instante as partículas estão sobre uma reta), já que estas são soluções circulares (onde  $\text{grau}(x_j) = 1$ , para  $j = 0, 1, 2$ ). Em cada caso podemos tomar, sem perda de generalidade,  $x_0$  e  $x_2$  tais que  $\text{grau}(x_2 - x_0) = 1$ . E na nova solução encontrada  $\bar{y} \in \tilde{\Lambda}_{(1,k)} \subset \Delta_2^2$  (onde não ocorre colisão),  $\text{grau}(y_1 - y_0) = 1$  e  $\text{grau}(y_2 - y_0) = k$ , com  $K > 1$ .

**Corolário 4.4.3** *Para caso do problema dos três corpos*

$$b = \alpha = 1.$$

*Portanto, temos que existe uma nova solução  $\bar{y} \in \tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ , e que esta não coincide com nenhuma solução de equilíbrio relativo padrão (as de Euler e de Lagrange).*

## Apêndice A

# Alguns resultados clássicos da Análise Funcional e Topologia

### A.1 Alguns resultados da Análise Funcional

**Definição A.1.1** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Um **hiperplano (afim)** sobre  $E$  é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

*onde  $f$  é um funcional linear (não necessariamente contínuo) sobre  $E$ , não identicamente nulo e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se diz que  $H$  é o hiperplano de equação  $(f = \alpha)$ .*

**Definição A.1.2** *Sejam  $A \subset E$  e  $B \subset E$ . Dizemos que o hiperplano  $H$  de equação  $(f = \alpha)$  **separa  $A$  e  $B$  em sentido amplo** se verifica*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

*Dizemos que  $H$  **separa  $A$  e  $B$  em sentido restrito** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

**Observação:** *Geometricamente a separação significa que  $A$  e  $B$  se situa em lados opostos do hiperplano  $H$ .*

**Proposição A.1.3** *O hiperplano de equação  $(f = \alpha)$  é fechado se, e somente se  $f$  é contínua*

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 4). ■

**Definição A.1.4** *Um conjunto  $A$  contido em um espaço de Banach  $E$  é dito **convexo** se*

$$(tx + (1 - t)y) \in E$$

*para todo  $x, y$  em  $E$  e para todo  $t$  em  $[0, 1]$ .*

**Teorema A.1.5 (Teorema de Hahn-Banach-primeira forma geométrica)** *Sejam  $A \subset E$  e  $B \subset E$  dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponhamos que  $A$  é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  em sentido amplo.*

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 6). ■

**Teorema A.1.6 (Teorema de Hahn-Banach-segunda forma geométrica)** *Sejam  $A \subset E$  e  $B \subset E$  dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponhamos que  $A$  é fechado e que  $B$  é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  em sentido restrito.*

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 7). ■

**Teorema A.1.7 (Teorema de Banach-Steinhaus)** *Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach. Seja  $(T_i)_{i \in \lambda}$  uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de  $E$  em  $F$ . Suponhamos que*

$$\sup_{i \in \lambda} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E.$$

*Então, denotando o espaço dos operadores lineares e contínuos por  $\mathcal{L}(E, F)$ , temos*

$$\sup_{i \in \lambda} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty,$$

De outra forma, existe uma constante  $c$  tal que

$$\|T_i x\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in \lambda.$$

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 17). ■

**Lema A.1.8 (Lema de Fatou)** Se  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  é mensurável para cada inteiro positivo  $n$ , então

$$\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Demonstração:** (Veja [20], pp. 23). ■

## A.2 Alguns resultados da Topologia e Topologia Algébrica

Iniciemos esta Seção demonstrando um importante resultado da Topologia, e que foi usado na Seção 4.2.

**Teorema A.2.1** Em um espaço de Hausdorff, todo conjunto compacto é fechado.

**Demonstração:** Se  $F$  é um conjunto compacto em um espaço de Hausdorff, e  $x \notin F$ , então  $\{x\}$  e  $F$  são conjuntos compactos distintos e portanto separados, digamos por vizinhanças  $U_x$  e  $\tilde{U}_x$ . Então o conjunto

$$\bigcup \{U_x : x \notin F\}$$

é aberto, pois é a união de uma coleção de conjuntos abertos. Mas

$$F = \left[ \bigcup_{x \notin F} U_x \right]^c.$$

Logo,  $F$  é fechado. ■

**Teorema A.2.2 (Teorema de Borsuk-Ulam)** Uma aplicação ímpar  $f : S^n \rightarrow S^n$ , satisfazendo  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  deve ter grau ímpar.

**Demonstração:** (Veja [15], pp. 174). ■

**Definição A.2.3** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços e  $I = [0, 1]$ . Duas aplicações  $f, g : X \rightarrow Y$  são chamadas homotópicas (e denotamos  $f \simeq g$ ) se existir uma aplicação contínua  $\Phi : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $\Phi(x, 0) = f(x)$  e  $\Phi(x, 1) = g(x)$  para cada  $x \in X$ .*

**Teorema A.2.4** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos*

(1) *Se  $f \simeq g$ , então  $f$  e  $g$  estão na mesma componente conexa*

(2) *Se  $f$  e  $g$  estão numa mesma componente conexa, então  $f \simeq g$ , contanto que  $Y$  seja um espaço vetorial.*

**Demonstração:** (Veja [11], pp. 320). ■

**Teorema A.2.5 (H. Hopf)** *Seja  $n \geq 1$ . Duas aplicações de  $S^n$  sobre  $S^n$  são homotópicas se e somente se elas tem o mesmo grau.*

**Demonstração:** (Veja [11], pp. 352). ■

**Observação:** Um conseqüência deste último Teorema é que se  $f, g : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Então  $f \simeq g$  se e somente se  $f$  e  $g$  tem o mesmo grau.

**Proposição A.2.6** *Sejam  $f, g : X \rightarrow \Omega$ , duas aplicações contínuas, onde  $X$  é um compacto e  $\Omega$  é um aberto de um espaço linear normado  $W$ . Se existe*

$$\varepsilon > 0, \quad d(f(x), g(x)) < \varepsilon,$$

(onde,  $d$  indica a distância de  $f$  à  $g$ , que pode sempre ser definida num espaço linear). Então temos que  $f \simeq g$ .

**Demonstração:** Tome  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(f(x), \Omega^c)$ , e defina  $H : X \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ , por

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x),$$

note que

$$(tf(x) + (1-t)g(x)) \in \Omega, \quad H(x, 0) = g(x) \text{ e } H(x, 1) = f(x).$$

Portanto,  $H$  é uma homotopia. ■

Considere os seguintes conjuntos em  $H^1$

$$\Lambda_0 = \left\{ \begin{array}{ll} (y_0, y_1, y_2) & : y_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2); \\ y_i(t + \frac{T}{2}) & = -y_i(t) \text{ para } i = 0, 1, 2 \end{array} \right\}.$$

$$\Delta^2 = \left\{ \begin{array}{ll} (y_0, y_1, y_2) & : y_i \in H^1(S^1; \mathbb{R}^2); y_i(t) \neq y_j(t) \quad \forall i \neq j \\ y_i(t + \frac{T}{2}) & = -y_i(t) \text{ para } i = 0, 1, 2 \end{array} \right\}.$$

$$\tilde{\Lambda}_{(1,k)} = \{(y_0, y_1, y_2) \in \Delta^2 : \text{grau}(y_1 - y_0) = 1, \text{ grau}(y_2 - y_0) = k\}.$$

onde  $k > 1$  é um inteiro ímpar. Então temos o seguinte resultado

**Proposição A.2.7** *O conjunto  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$  é aberto em  $\Lambda_0$ .*

**Demonstração:** Mostraremos que  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}^c$ , o complementar de  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}$ , é fechado. Para isto, seja  $y_n = (y_0^n, y_1^n, y_2^n)$  uma sequência em  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}^c$ . Então

$$\text{grau}(y_1^n - y_0^n) \neq 1 \text{ ou } \text{grau}(y_2^n - y_0^n) \neq k.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\text{grau}(y_1^n - y_0^n) \neq 1$ . Suponha, agora que

$$y_n \rightarrow y = (y_0, y_1, y_2) \in \Lambda.$$

Assim,  $y_1^n - y_0^n$  está próximo de  $y_1 - y_0$  e  $y_2^n - y_0^n$  está próximo de  $y_2 - y_0$ . Então para  $n$  suficientemente grande, temos que existe um  $\varepsilon > 0$ , tal que

$$d(y_1^n - y_0^n, y_1 - y_0) < \varepsilon.$$

Logo, pela proposição anterior temos,  $\text{grau}(y_1 - y_0) = \text{grau}(y_1^n - y_0^n) \neq 1$ . Portanto,  $\tilde{\Lambda}_{(1,k)}^c$  é fechado. ■

## Apêndice B

# Topologia fraca

Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $E'$  seu dual e  $f \in E'$ . Se designarmos por

$$\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

a aplicação dada por

$$\varphi_f(x) = f(x).$$

Quando  $f$  percorre  $E'$  obtemos uma família  $(\varphi_f)_{f \in E'}$  de aplicações de  $E$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição B.0.8** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $E'$  seu dual. A **topologia fraca** sobre  $E$ , designada por  $\sigma(E, E')$ , é a topologia menos fina (no sentido de ter menos abertos), de tal forma que todas as aplicações  $(\varphi_f)_{f \in E'}$  sejam contínuas.*

**Notação:** *Dada uma seqüência  $\{x_n\}$  em  $E$ , se designa por  $x_n \rightharpoonup x$  convergência de  $x_n$  na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ . Se  $x_n \rightarrow x$ , diz-se as vezes que a convergência é forte quando  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .*

**Lema B.0.9 (Lema da Convergência Fraca)** *Seja  $x_n$  uma seqüência que converge fracamente para  $x$ . Então*

(i) *O limite fraco  $x$  de  $x_n$  é único.*

(ii) *Toda subsequência de  $x_n$  converge fracamente para  $x$ .*

(iii) A sequência  $\{x_n\}$  é limitada.

**Demonstração:** (Veja [17], pp. 258). ■

**Definição B.0.10** Seja  $F$  um subconjunto de  $H^1$ . Dizemos que  $F$  é fracamente fechado se para toda sequência  $x_n$  em  $F$  existir uma subsequência  $x_{n_k}$  e um  $x$  em  $F$ , tal que  $x_n$  converge fracamente para  $x$ .

**Definição B.0.11** Seja  $K$  um subconjunto de  $H^1$ . Dizemos que  $K$  é fracamente compacto se ele for fracamente fechado e limitado na norma  $\|\cdot\|_{H^1}$ .

**Observação:** Quando  $E$  é de dimensão finita a topologia fraca coincide com a topologia forte. (Veja [3], pp. 41).

**Proposição B.0.12** A topologia fraca  $\sigma(E, E')$  é separável (Hausdorff)

**Demonstração:** Sejam  $x_1$  e  $x_2$  elementos de  $E$  com  $x_1 \neq x_2$ . Queremos construir abertos  $A$  e  $B$  da topologia fraca  $\sigma(E, E')$  tais que  $x_1 \in A$ ,  $x_2 \in B$  com  $A \cap B = \emptyset$ . Pelo Teorema de Hahn-Banach (segunda forma geométrica) existe um hiperplano fechado que separa  $\{x_1\}$  e  $\{x_2\}$  no sentido restrito. Assim, existem  $f \in E'$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(x_1) < \alpha < f(x_2).$$

Façamos

$$A = \{x \in E : f(x) < \alpha\} = \varphi_f^{-1}((-\infty, \alpha)),$$

e

$$B = \{x \in E : f(x) > \alpha\} = \varphi_f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Então,  $A$  e  $B$  são dois conjuntos abertos de  $\sigma(E, E')$  e se verifica  $x_1 \in A$ ,  $x_2 \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Portanto,  $\sigma(E, E')$  é separável. ■

**Proposição B.0.13** *Seja  $\{x_n\}$  uma seqüência em  $E$ . Então se verifica as seguintes condições:*

(a)  $x_n \rightharpoonup x$  (i.e.  $x_n$  converge para  $x$  em  $\sigma(E, E')$ ) se, e somente se  $f(x_n)$  converge para  $f(x)$ , para todo  $f$  em  $E'$ .

(b) Se  $x_n \rightarrow x$ , fortemente, então  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente.

(c) Se  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente em  $\sigma(E, E')$ , então  $\|x_n\| \leq \text{const.}$  e

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

(d) Se  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente em  $\sigma(E, E')$  e se  $f_n \rightarrow f$  fortemente em  $E'$  (i.e.,  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ ), então  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 36). ■

Seja  $\Sigma^\infty$  o espaço de todas as aplicações  $\lambda$ -periódicas, de classe  $C^\infty$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^N$ . Os espaços de Sobolev  $\Sigma^i = \Sigma^i(\lambda; \mathbb{R}^N)$ ,  $i = 0, 1$ , são definidos como o completamento de  $\Sigma^\infty$  com respeito a norma  $\|\cdot\|_i$ . Então, conforme [13], temos os seguintes resultados bem conhecidos:

**Teorema B.0.14 (Teorema de Rellich)**  $\Sigma^1 \subset \Sigma^0$ , e a injeção  $\Sigma^1 \rightarrow \Sigma^0$ , é compacta.

**Teorema B.0.15 (Teorema de Sobolev)** Convergência fraca em  $\Sigma^1$  implica convergência uniforme em  $C^0(\mathbb{R})$ .

## Apêndice C

# Espaços de Sobolev

Seja  $I = (a, b)$  um intervalo limitado ou não e seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Considere  $C_c^k(I)$  como o conjunto das funções definidas com derivadas de ordem  $k$  contínuas e com suporte compacto em  $I$ .

**Definição C.0.16** *O espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  se define por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p \text{ tal que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Se representa

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Para cada  $u \in W^{1,p}(I)$  se denota  $u' = g$ .

**Observação:** Na definição de  $W^{1,p}(I)$  se diz que  $\varphi$  é uma função de teste. Se pode utilizar indistintamente  $C_c^1(I)$  ou  $C_c^\infty(I)$  como conjunto de funções de teste, (veja [3], pp. 120).

**Observação:** É claro que se  $u \in C^1 \cap L^p(I)$  e se  $u' \in L^p(I)$  (aqui  $u'$  denota a derivada de  $u$  no sentido usual), então  $u \in W^{1,p}(I)$ . Além disso a derivada usual de  $u$  coincide com a derivada de  $u$  no sentido de  $W^{1,p}(I)$ .

**Notações:** O espaço  $W^{1,p}$  está dotado da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \{\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço  $H^1$  está dotado do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2};$$

cujas norma associada é

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

que é equivalente a norma  $W^{1,2}$ .

**Proposição C.0.17** *O espaço  $W^{1,p}$  é um espaço de Banach para  $1 \leq p \leq \infty$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{u_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $W^{1,p}$ , então  $\{u_n\}$  e  $\{u'_n\}$  são seqüências de Cauchy em  $L^p$ . Por conseguinte  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p$  e  $u'_n \rightarrow g$  em  $L^p$ . Assim, tem-se

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u'_n \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

aplicando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Portanto  $u \in W^{1,p}$ ,  $u' = g$  e  $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$ . ■

**Proposição C.0.18** *O espaço  $W^{1,p}$  é reflexivo para  $1 \leq p \leq \infty$ . E o espaço  $H^1$  é um espaço de Hilbert separável.*

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 121). ■

**Observação:** A propriedade de reflexibilidade é uma vantagem do espaço  $W^{1,p}$ . Em problemas de Cálculo Variacional se utiliza preferencialmente  $W^{1,p}$  em lugar de  $C^1$ , que não é reflexivo.

As funções de  $W^{1,p}$  são a grosso modo primitivas de funções de  $L^p$ , isto será formulado no seguinte Teorema

**Teorema C.0.19** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ ; então existe uma função  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  tal que*

$$u = \tilde{u}, \text{ q.t.p. em } I$$

$e$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt \quad \forall x, y \in I.$$

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 123). ■

**Comentário:** O Teorema acima afirma que toda função  $u$  de  $W^{1,p}$  admite um representante contínuo (e só um), isto é, existe uma função contínua pertencente a classe de equivalência de  $u$  pela relação  $u \sim v$  se  $u = v$  q.t.p.

**Comentário:** Para definir  $W^{1,p}$  se pode utilizar a teoria de distribuições (apresentamos uma introdução no Apêndice D). Toda função  $u \in L^p(I)$  admite derivada no sentido de distribuição, que é um elemento de  $\mathbb{D}'$ . Se diz que  $u \in W^{1,p}$  se sua derivada no sentido de distribuição coincide no espaço  $\mathbb{D}'$  com uma função de  $L^p$ . (Veja [22]).

**Teorema C.0.20 (Densidade)** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então existe uma seqüência  $\{u_n\}$  em  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$ .*

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 127). ■

**Teorema C.0.21** *Existe uma constante  $C$  (dependendo apenas da medida de  $I$  que é  $\leq \infty$ ) tal que  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ ,  $\forall u \in W^{1,p}(I)$ ,  $\forall 1 \leq p \leq \infty$ . De outra forma  $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$  com injeção contínua para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Além disso, quando  $I$  é limitado se verifica:*

(a) *A injeção  $W^{1,p}(I) \subset C^0(I)$  é compacta para  $1 \leq p \leq \infty$ .*

(b) *A injeção  $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$  é compacta para  $1 \leq q < \infty$ .*

**Demonstração:** (Veja [3], pp. 127). ■

## Apêndice D

# Noções de distribuições

**Definição D.0.22** *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto e  $C_c^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções de classe  $C^\infty$  com suporte compacto sobre  $\Omega$ . Um funcional linear contínuo  $u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  é dito uma distribuição em  $\Omega$ . O espaço das distribuições em  $\Omega$  se denota por  $\mathbb{D}'(\Omega)$ .*

A definição significa que se  $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $(\phi_j)$  é uma seqüência em  $C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2) \quad (\text{linearidade})$$

$$\phi_j \rightarrow 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\phi_j) \rightarrow 0 = u(0). \quad (\text{continuidade})$$

As vezes, é conveniente escrever  $\langle u, \phi \rangle$  em vez de  $u(\phi)$ .

**Exemplo D.0.23** *Considere  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , e defina  $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ ,  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . O funcional  $\delta$  é claramente linear e contínuo. Esta distribuição é chamada "delta de Dirac".*

**Exemplo D.0.24** *Definamos  $\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t| \phi'(t) dt$ ,  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , a linearidade é clara, e se o suporte de  $\phi$ ,  $S(\phi)$ , está contido em  $[-a, a]$  e  $\phi'_j(t) \rightarrow 0$  uniformemente, segue-se que*

$$|\langle T, \phi_j \rangle| \leq 2a^2 \sup_t |\phi'_j(t)| \rightarrow 0.$$

**Exemplo D.0.25** *Seja  $L^1_{loc}(\Omega)$  o espaço das funções localmente integráveis sobre  $\Omega$ . Considere  $f \in$*

$L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , e defina

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A linearidade é clara, e a continuidade decorre da estimativa

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \sup_t |\phi(t)| \int_{S(\phi)} |f| dx.$$

**Observação:** É interessante notar que se  $\langle T_f, \phi \rangle = \langle T_g, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$  e  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ , então  $f = g$ , *q.t.p.*

Abandonaremos agora a notação provisória  $T_f$  e escrevemos simplesmente

$$\langle f, \phi \rangle = \int f \phi dx.$$

Isto equivale a identificar qualquer função localmente integrável  $f$ , com o funcional  $T_f$  definido no Exemplo D.0.23. Esta identificação permite considerar muitos espaços de funções, como  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , e  $C^k(\Omega)$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , como subespaços de  $\mathbb{D}'(\Omega)$ . É neste sentido que as distribuições são consideradas como "funções generalizadas". De agora em diante a identificação  $f \rightarrow T_f$  será feita sem maiores comentários.

## D.1 Operação com distribuição

A soma e o produto por escalar de distribuições define-se de maneira óbvia. Se  $u_1, u_2 \in \mathbb{D}'(\Omega)$ ,  $\phi \in C_c^\infty$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, \phi \rangle &= \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle \\ \langle \lambda u_1, \phi \rangle &= \lambda \langle u_1, \phi \rangle. \end{aligned}$$

A filosofia geral para definir operações nas distribuições é a seguinte. Suponhamos que existam dois operadores lineares contínuos  $L$  e  $L'$  de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $C_c^\infty$  tais que

$$\int_{\Omega} (L\phi)\psi dx = \int_{\Omega} \phi(L'\psi) dx, \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (\text{D.1.1})$$

Quando isto acontece diz-se que  $L$  é o transposto formal de  $L'$  e vice versa. A continuidade de  $L$  (ou  $L'$ ) significa simplesmente que  $L\phi_j \rightarrow 0$  (ou  $L'\phi_j \rightarrow 0$ ), sempre que  $\phi_j \rightarrow 0$  em  $C_c^\infty$ . Note que por hipótese

$$\phi, L\phi, \psi, L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathbb{D}'(\Omega)$$

e portanto (D.1.1) pode ser escrito na forma

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle.$$

Neste caso, é possível estender o operador  $L$  a um operador  $\tilde{L} : \mathbb{D}'(\Omega) \rightarrow \mathbb{D}'(\Omega)$ .

De fato, definamos

$$\langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle, \quad u \in \mathbb{D}'(\Omega), \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (\text{D.1.2})$$

É claro que  $\tilde{L}u$  é um funcional linear em  $C_c^\infty(\Omega)$ . Além disso, se  $\psi_j \rightarrow 0$  em  $C_c^\infty(\Omega)$ ,  $L'\psi_j \rightarrow 0$  em  $C_c^\infty(\Omega)$ , e portanto  $\langle u, L'\psi_j \rangle \rightarrow 0$ , o que significa  $\tilde{L}u \in \mathbb{D}'(\Omega)$ . Finalmente, se  $u \in C_c^\infty$ , resulta de (D.1.1) que

$$\int (Lu)\psi dx = \langle \tilde{L}u, \psi \rangle,$$

isto é,  $\tilde{L}u \in L_{loc}^1$  e  $Lu = \tilde{L}u$ . Em outras palavras  $\tilde{L}$  é uma extensão de  $L$ . Normalmente se usa a mesma notação  $L$ , tanto para o operador original quanto para sua extensão  $\tilde{L}$ .

**Comentário:** Nos exemplos abaixo  $\Omega$  representará um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo D.1.1 (Produto por uma função  $C^\infty$ )** Seja  $f \in C_c^\infty(\Omega)$  e definamos o operador contínuo  $L : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega)$  por  $(L\phi)(x) = f(x)\phi(x)$ . Naturalmente  $L = L'$  satisfaz (D.1.1) e a operação "multiplicação por  $f$ " fica definida para qualquer distribuição por meio da expressão

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle. \quad (\text{D.1.3})$$

**Exemplo D.1.2 (Derivação)** Sejam  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas cartesianas em  $\Omega$  e definamos  $L = \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Integrando por partes em relação a variável  $x_j$ , obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \psi dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx.$$

O termo não integrado é nulo porque as funções  $\phi, \psi$  são nulas fora de um compacto. Então  $-\frac{\partial}{\partial x_j}$  é o transposto formal de  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ , e podemos definir

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (\text{D.1.4})$$

**Exemplo D.1.3 (Operadores diferenciais)** Um operador diferencial linear com coeficientes  $C^\infty$  é uma combinação linear de derivações e multiplicações por funções  $C^\infty$ . Se  $L$  é um tal operador, é possível

achar  $L'$  aplicando sucessivamente (D.1.3) e (D.1.4). Por exemplo, se  $L = \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$  duas aplicações de (D.1.4) resulta em

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \langle u, \Delta \phi \rangle, \quad u \in \mathbb{D}'(\Omega), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (\text{D.1.5})$$

**Exemplo D.1.4 (Mudança de variáveis)** Seja  $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$  um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  e definamos  $L\phi = \phi \circ \Phi$ ,  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Note que  $S(\phi \circ \Phi) = \Phi^{-1}(S(\phi))$  e portanto  $L\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Para encontrar  $L'$  aplicamos o Teorema da mudança de variáveis na seguinte integral

$$\int_{\Omega} \phi(\Phi(y))\psi(y)dy = \int_{\Omega} \phi(x)\psi(\Phi^{-1}(x))|J(\Phi^{-1})(x)|dx. \quad (\text{D.1.6})$$

onde  $J(\Phi^{-1})$  é o jacobiano de  $\Phi^{-1}$ . Isto nos leva a definir  $L'\psi = |J(\Phi^{-1})|\psi \circ \Phi^{-1}$ . Lembremo-nos que  $|J(\Phi^{-1})| \neq 0 \forall x \in \Omega$ . Assim, quando  $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$ , definimos então,

$$\langle u \circ \Phi, \phi \rangle = \langle u, (\phi \circ \Phi^{-1})|J(\Phi^{-1})| \rangle. \quad (\text{D.1.7})$$

**Exemplo D.1.5** Seja  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $\Phi(x) = x - a$ . Definamos a translação de  $\phi(x) \in C_c^\infty$  como a função

$$\phi_a(x) = \phi(x - a).$$

Se  $u \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ , a translação de  $u$  se define usando (D.1.7), ou seja

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi(x + a) \rangle. \quad (\text{D.1.8})$$

**Exemplo D.1.6** Seja  $\Omega$  um aberto simétrico em relação a origem e consideremos  $\Phi(x) = -x$ . Definamos a translação de

$$\phi_R(x) = \phi(-x)$$

para  $\phi \in C_c^\infty$  e assim se  $u \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ , a rotação de  $u$  se define por

$$\langle u_R, \phi \rangle = \langle u, \phi_R \rangle, \quad u \in \mathbb{D}'(\Omega), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (\text{D.1.9})$$

## D.2 Derivada distribucionais e derivadas clássicas

Se  $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , a fórmula de integração por partes prova que a derivada de  $f$  no sentido de distribuições dada pela fórmula (D.1.4) coincide com a distribuição definida pela função contínua  $\frac{df}{dx}$ . Portanto, para funções suficientemente regulares as derivadas no sentido usual e no sentido das distribuições

coincidem. Vejamos o que acontece com funções de uma variável que apresentam uma descontinuidade de primeira espécie na origem. Mais precisamente, suponhamos que  $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$  e que os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0^-) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0^+)$$

existem e são finitos. Denotaremos por  $\{f'\}$  a função definida como  $\frac{df}{dx}$  para  $x \neq 0$  e não definida para  $x = 0$ , e suponhamos ainda que  $\{f'\} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Para calcular  $f'$  (a derivada de  $f$  no sentido das distribuições) basta observar que se  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $S(\phi) \subseteq [-N, N]$

$$\begin{aligned} \langle f', \phi \rangle &= -\langle f, \phi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-N}^{-\varepsilon} f \phi' dx \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^N f \phi' dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-N}^{-\varepsilon} f' \phi dx \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^N f' \phi dx \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x)\phi(x)|_{-\varepsilon}^{-N} + f(x)\phi(x)|_{\varepsilon}^N] \\ &= [f(0^+) - f(0^-)]\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\} \phi dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle f', \phi \rangle = [f(0^+) - f(0^-)]\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\} \phi dx. \quad (\text{D.2.10})$$

Um caso particular importante se obtém quando  $f(x) = H(x)$  = função de Heaviside, que vale 1 se  $x > 0$  e vale 0 se  $x < 0$  (como função de  $L^1_{loc}$  não precisa estar definida na origem). Claramente

$$H(0^+) = 1, \quad H(0^-) = 0 \text{ e } \{H'\} = 0.$$

Assim

$$\langle H', \phi \rangle = [H(0^+) - H(0^-)]\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{H'\} \phi dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle. \quad (\text{D.2.11})$$

Obtemos assim a distribuição do Exemplo D. 0.21, como a derivada de  $H(x)$ . Por conseguinte, a fórmula (D.2.10) pode ser escrita como

$$f' = \{f\} + [f(0^+) - f(0^-)]\delta. \quad (\text{D.2.12})$$

Por conseguinte é possível fazer com que uma função não localmente integrável defina uma distribuição. Um tal exemplo ocorre com  $f(x) = \frac{1}{x}$  em  $\mathbb{R}$ . A integral de  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  em qualquer vizinhança da origem é infinita e  $f \notin L^1_{loc}$ . Entretanto, para  $x \neq 0$ ,  $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}$  e  $g(x) = \log|x|$  é localmente integrável, já que

$$\left| \int_{-1}^1 \log|x| dx \right| = 2$$

e  $\log|x|$  é contínua para  $x \neq 0$ . Podemos então "chutar" como distribuição

$$\langle g', \phi \rangle = -\langle g, \phi \rangle.$$

Se  $S(\phi) \subseteq [-N, N]$  e  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , temos

$$\begin{aligned} -\int \log|x| \phi'(x) dx &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-N}^{-\varepsilon} \log|x| \phi'(x) dx \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^N \log|x| \phi'(x) dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi'(x)}{x} dx + (\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) \log \varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Onde, a última igualdade foi obtida usando integração por partes em ambos intervalos de integração. A desigualdade do valor médio permite concluir que

$$|\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)| \leq \sup_t |\phi'(t)| 2\varepsilon.$$

Como  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \varepsilon = 0$ , obtemos

$$-\langle \log|x|, \phi' \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (\text{D.2.13})$$

A distribuição dada pelo membro direito de (D.2.13) se conhece com o nome de valor principal de  $\frac{1}{x}$  e se denota por  $v.p. \frac{1}{x}$ .

**Observação:** Se  $f \in C^\infty$ ,  $\phi \in C_c^\infty$ , temos

$$\langle f\delta, \phi \rangle = \langle \delta, f\phi \rangle = f(0)\phi(0) = \langle f(0)\delta, \phi \rangle$$

o que significa que  $f\delta = f(0)\delta$ , e só o valor de  $f$  em  $x = 0$  é relevante no produto  $f\delta$ . Analogamente

$$\langle f\delta', \phi \rangle = \langle \delta', f\phi \rangle = -\langle \delta, f'\phi + f\phi' \rangle = \langle f(0)\delta' - f'(0)\delta, \phi \rangle,$$

ou seja,  $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$ .

**Observação:** É de fácil verificação que a regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções, se mantém quando um dos fatores é uma distribuição. De fato, se  $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$ ,  $f \in C^\infty$  e  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(uf)}{\partial x_j}, \phi \right\rangle &= -\left\langle uf, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle u, f \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial(f\phi)}{\partial x_j} - \phi \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle f \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} f, \phi \right\rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial(uf)}{\partial x_j} = f \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} u. \quad (\text{D.2.14})$$

Vejamos agora que o comentário feito no início desta Seção pode se estender a funções contínuas se a derivada distribucional também for contínua.

**Teorema D.2.1** *Se  $u$  e  $f$  são contínuas em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$ , então  $u$  é diferenciável em relação a  $x_j$  e  $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$ , no sentido clássico.*

**Demonstração:** (Veja [16], pp. 23). ■

## D.2.1 Cálculo Variacional em distribuições

No Cálculo Variacional clássico se considera uma função de três variáveis  $F(\alpha, \beta, \gamma)$  suficientemente diferenciável e se procura minimizar o funcional dado pela integral

$$I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$$

na classe das funções  $u(t)$ , continuamente diferenciáveis em  $[a, b]$ . Se  $u$  é uma solução do problema e  $\phi \in C_c^\infty(a, b)$ , a função

$$g(t) = I(u + t\phi), \quad t \in \mathbb{R}$$

tem um mínimo para  $t = 0$ , e conseqüentemente  $g'(0) = 0$ . Derivando sob o sinal de integração, obtemos

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} I(u + t\phi)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( \int_a^b F[x, u(x) + t\phi, u'(x) + t\phi'(x)] dx \right) |_{t=0} \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F[x, u(x) + t\phi, u'(x) + t\phi'(x)]) |_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$g'(0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \phi + \frac{\partial F}{\partial u'} \phi' \right] dx = 0, \quad \phi \in C_c^\infty((a, b)). \quad (\text{D.2.15})$$

As funções de  $x$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x), u'(x)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial u'}(x, u(x), u'(x))$$

são contínuas e a equação (D.2.15) implica que a primeira é a derivada no sentido de distribuição da segunda, pois

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \phi \right] dx = - \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u'} \phi' \right] dx.$$

Mas, o Teorema anterior afirma que, de fato, esta é uma derivada no sentido clássico. Então, a função minimal  $u(t)$  se existir, deve satisfazer as conhecidas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{\partial F}{\partial u}. \quad (\text{D.2.16})$$

Este resultado foi obtido por Du Bois-Reymond no século XIX.

**Exemplo D.2.2** *Se quisermos achar uma curva plana  $u(x)$ , de comprimento mínimo, que liga a origem ao ponto  $(1, b)$ , devemos considerar a integral*

$$\int_0^1 \sqrt{1 + u'^2} dx.$$

A equação (D.2.16) se reduz neste caso a

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} \right) = 0.$$

Segue-se que  $u'$  deve ser constante e o traço de  $u(x)$  será uma reta.

## D.3 Derivadas e primitivas

Se  $f$  é diferenciável no intervalo  $(a, b)$  e  $f' = 0$  neste intervalo, o Teorema do Valor Médio implica que  $f$  é constante em  $(a, b)$ . É significativo que o mesmo resultado seja satisfeito para derivadas no sentido de distribuições. Isto será formulado no seguinte Teorema

**Teorema D.3.1** *Se  $u \in \mathbb{D}'(a, b)$  e  $u' = 0$  em  $(a, b)$ . Então  $u$  é constante em  $(a, b)$ .*

**Demonstração:** (Veja [16], pp. 25). ■

**Corolário D.3.2** *Se  $u \in \mathbb{D}'((a, b))$  e  $u^{(k)} = 0$ , então  $u$  é um polinômio de grau  $\leq k - 1$ .*

**Demonstração:** O Teorema anterior prova o caso em que  $k = 1$ . Suponha como hipótese de indução que o resultado seja válido para  $k - 1$ . Daí se  $u^{(k)} = 0$ , então escrevendo  $v = u^{(k-1)}$  e aplicando o Teorema anterior à  $V$ , concluímos que existe uma constante  $c$  tal que  $v = c$ . Então,

$$\left(u - c \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right)^{k-1} = u^{(k-1)} - c = v - c = 0$$

e pela hipótese de indução, temos

$$u - c \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{k-2} a_j x^j$$

com  $a_j \in \mathbb{R}$  e  $j = 1, \dots, k-2$ . ■

**Corolário D.3.3** *Toda distribuição  $u \in \mathbb{D}'(a, b)$  tem uma primitiva.*

**Demonstração:** (Veja [16], pp. 27). ■

**Observação:** Note a semelhança do Corolário D.3.3 com O Teorema C.0.17.

## D.4 Operadores elípticos

**Definição D.4.1** *Se  $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$  definimos o suporte de  $u$ ,  $S(u)$ , como a interseção de todos os fechados de  $\Omega$  fora dos quais  $u$  é nulo.*

**Observação:** É possível mostrar que esta definição coincide com a definição de suporte de  $u$ , vendo  $u$  como função, isto é, (o fecho  $\{x : u(x) \neq 0\}$ ). (Veja [16], pp. 36).

De maneira análoga temos a seguinte definição

**Definição D.4.2** *Se  $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$  definimos o suporte singular de  $u$ ,  $SS(u)$ , como a interseção de todos os fechados de  $\Omega$  fora dos quais  $u$  é  $C^\infty$ .*

Dizer que  $u$  é  $C^\infty$  num aberto  $U$  é dizer que existe uma função  $f \in C^\infty(U)$  tal que

$$\langle u, \phi \rangle = \int f \phi dx = \langle f, \phi \rangle \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty.$$

**Definição D.4.3** Dizemos que operador diferencial

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

com coeficientes em  $C^\infty$  é localmente resolúvel em  $\Omega$  se todo ponto de  $\Omega$  tem uma vizinhança  $U$  tal que para todo  $f \in C_c^\infty(U)$  existe  $u \in \mathbb{D}'$  tal que

$$Pu = f.$$

**Definição D.4.4** Um operador diferencial

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

definido em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  se diz **elíptico** no ponto  $x_0 \in \Omega$  se

$$P_m(x_0, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) \xi^\alpha \neq 0 \text{ para todo } \xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Observação:** Se  $P(x, D)$  é elíptico em todos os pontos de  $\Omega$ , dizemos que  $P(x, D)$  é elíptico em  $\Omega$ .

**Exemplo D.4.5** O operador

$$\Delta = -D_x^2 - D_y^2$$

é elíptico, já que

$$\Delta_m(\xi) = -\xi_1^2 - \xi_2^2.$$

**Definição D.4.6** Um operador  $P(x, D)$  definido em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é dito *hipoelíptico* se  $SS(Pu) = SS(u)$  para todo  $u \in \mathbb{D}'$ .

**Exemplo D.4.7** O operador

$$\frac{d}{dx} \text{ é hipoelíptico em } \mathbb{R}.$$

De fato, se  $f \in C^\infty(a, b)$ ,  $u \in \mathbb{D}'(a, b)$  e  $u' = f$ , então escrevendo

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

com  $a < b < c$ , temos que  $(u - g)' = 0$ . Logo, do Teorema D.3.1, resulta que  $u = g + \text{constante}$ . Portanto  $u \in C^\infty(a, b)$ .

**Definição D.4.8** *Seja*

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

*um operador com coeficientes constantes em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  é uma solução fundamental de  $P$  se*

$$P(D)(E) = \delta.$$

**Teorema D.4.9** *Se o operador com coeficientes constantes  $P(D)$  admite uma solução fundamental  $E$  que é de classe  $C^\infty$  fora da origem, então  $P(D)$  é hipoeĺıptico. Reciprocamente, se  $P(D)$  é hipoeĺıptico e  $E$  é uma solução fundamental de  $P(D)$ , então  $E$  é  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .*

**Demonstração:** (Veja [16], pp. 129). ■

## D.5 Derivada de Fréchet e derivada de Gateaux

Nesta secção consideraremos  $L$  e  $M$  como espaços lineares normados.

Seja  $f$  uma função definida sobre um conjunto aberto  $U \subseteq L$ , assumindo valores sobre  $M$ .

**Definição D.5.1** *Dizemos que  $f$  é diferenciável segundo Fréchet, se existir uma transformação linear  $T : L \rightarrow M$  tal que, para todo  $h$  em  $L$  suficientemente pequeno,*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + \|h\|\varepsilon(x_0, h),$$

*onde  $\varepsilon(x_0, h) \in M$  tende para zero quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . A transformação linear  $T$  é chamada **derivada de Fréchet de  $f$  em  $x_0$**  e é denotada por  $f'(x_0)$ .*

**Definição D.5.2** *Dizemos que  $f$  é diferenciável segundo Gateaux em  $x_0$  se a derivada direcional  $f'(x_0; v)$  existir para cada  $v \in L$ , isto é, se*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = f'(x_0; v),$$

*existir para cada  $v \in L$ .*

**Teorema D.5.3** *Seja  $f$  uma função convexa definida sobre um conjunto aberto convexo  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , e seja  $E$  o subconjunto de  $U$  onde  $f$  é diferenciável segundo Fréchet. Então  $f'$  é contínua sobre  $E$ .*

**Demonstração:** (Veja [19], pp. 117).

**Comentário:** Um estudo mais detalhado envolvendo estes dois conceitos de derivadas é feito por exemplo em [19].

## Apêndice E

# Mais alguns resultados de Cálculo Variacional

Nesta Seção apresentaremos alguns resultados variacionais, citados em [10], os quais deixam os Lemas 4.3.5 e 4.3.8 como caso particulares e definiremos a segunda diferencial de um funcional conforme [12].

### E.1 Notações

consideraremos nesta seção

$$V : \Omega \rightarrow (-\infty, 0)$$

uma função de classe  $C^1$  sobre um subconjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ), e  $T > 0$ . Geralmente (como fizemos no Capítulo 4) estuda-se a existência de curvas  $T$ -periódicas  $q : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  de classe  $C^2$  tal que:

$$q''(t) + \nabla V(q(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.1.1})$$

Como conhecemos bem, este problema tem uma estrutura variacional. Primeiro de tudo, pela mudança de variável  $\tilde{q}(t) = q(Tt)$ , podemos reduzir nosso estudo para curvas 1-periódicas  $q : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  de classe  $C^2$  tal que:

$$q''(t) + T^2 \nabla V(q(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.1.2})$$

Sejam

$$H = \{q \in H^1([0, 1]; \mathbb{R}^N) : q(0) = q(1)\}$$

$$\Lambda = \{q \in H : q(t) \in \Omega, \forall t \in [0, 1]\}$$

e considere o funcional  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(q) = \frac{1}{2} \int_0^1 |q'(t)|^2 dt - T^2 \int_0^1 V(q(t)) dt.$$

Então  $\Lambda$  é um subconjunto aberto do espaço de Hilbert  $H$ , o funcional  $f$  é de classe  $C^1$  sobre  $\Lambda$  e, conforme vimos no Capítulo 1, temos que  $\delta f(q) = 0$  se e somente  $q$  é a restrição à  $[0, 1]$  de uma solução de (E.1.2).

Como nosso principal interesse é soluções sem colisão ( $\Omega = \mathbb{R}^N - \{0\}$ ), consideraremos também

$$X_0 = \{q \in H : \exists t \in [0, 1] \text{ com } q(t) = 0\}.$$

Isto será útil para podermos fazer algumas considerações envolvendo potenciais radiais e em particular, o caso  $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ .

## E.2 Colocação dos resultados

**Lema E.2.1** *Seja  $T > 0$  e seja  $\gamma : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$  a única solução de classe  $C^2$  da EDO*

$$\gamma'' + T^2 \frac{1}{\gamma^2} = 0$$

*com as seguintes condições iniciais*

$$\gamma' \left( \frac{1}{2} \right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = 0.$$

*Então temos*

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma')^2 dt = \frac{1}{2} (2\pi T^2)^{\frac{2}{3}},$$

$$T^2 \int_0^1 \frac{1}{\gamma} dt = (2\pi T^2)^{\frac{2}{3}},$$

$$\|\gamma\|_{L^\infty(0,1)} = \left( \frac{2T^2}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

**Demonstração:** É consequência direta das expressões (4.1.3) e (4.1.4) do Capítulo 4 levando-se em consideração a mudança de variável feita na seção anterior. ■

**Proposição E.2.2** *Seja  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  uma função convexa e crescente. Então temos*

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma')^2 dt + \psi \left( \int_0^1 \frac{dt}{\gamma} \right) : \gamma \in H_0^1(0, 1), \gamma \geq 0 \right\} \\ = \min \left\{ 2\pi^2 R^2 + \psi \left( \frac{1}{R} \right) : R > 0 \right\}. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Seja  $R$  um número minimizante para a expressão do lado direito (este  $R$  sempre existe já que  $\psi$  é convexa e  $2\pi R^2$  é estritamente convexa).

Note que a expressão do lado esquerdo é finita para algum  $\gamma$  por exemplo para

$$\gamma(t) = [t(1-t)]^{\frac{2}{3}}$$

já que

$$\int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} dt = \frac{2}{3} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} (\sqrt{3}) 2^{\frac{1}{3}}}{\gamma(\frac{2}{3}) \gamma(\frac{5}{6})} \quad \text{e} \quad \int_0^1 (\gamma'(t))^2 dt = \frac{2}{5} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} (\sqrt{3}) 2^{\frac{1}{3}}}{\gamma(\frac{2}{3}) \gamma(\frac{5}{6})}.$$

Considere o funcional

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma')^2 dt + \psi \left( \int_0^1 \frac{1}{\gamma} dt \right).$$

Como  $\psi$  é crescente e positiva, usando o Teorema de Sobolev e o Lema de Fatou, de forma análoga aos procedimentos usados no Capítulo 4, mostra-se que o funcional  $f$  é coercivo e fracamente semi-contínuo inferiormente sobre  $H_0^1((0, 1))$ . Logo, vai existir um  $\gamma$  minimizante.

Usando a conhecida desigualdade  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (\eta')^2 dt$$

é estritamente convexa sobre  $H_0^1((0, 1))$ . Além disso

$$\psi \left( \int_0^1 \frac{1}{\eta} dt \right)$$

é convexa sobre  $\{\eta \in H_0^1((0, 1)) : \eta \geq 0\}$ . Então, tal  $\gamma$  é único.

Afirmamos que este  $\gamma$ , satisfaz  $\gamma(t) > 0$  para todo  $t$  em  $(0, 1)$ . De fato, suponha, por contradição, que  $\gamma(t) = 0$  para algum  $t \in (0, 1)$ . Sejam  $a \in (0, t)$  e  $b \in (t, 1)$ , tal que  $\gamma(a) = \gamma(b) > 0$ . então, a função  $\eta(t)$  definida por  $\eta(t) = \max\{\gamma(t), \gamma(a)\}$  em  $[a, b]$  e  $\eta(t) = \gamma(t)$  em  $[0, 1] - [a, b]$  é outro mínimo diferente de  $\gamma$ , o que é uma contradição.

Agora se supormos  $\psi$  de classe  $C^1$ , ao minimizar a função

$$\phi(R) = 2\pi^2 R^2 + \psi\left(\frac{1}{R}\right)$$

obtemos

$$4\pi^2 R^3 = \psi'\left(\frac{1}{R}\right).$$

De maneira análoga ao Teorema de Regularidade do ponto crítico, mostra-se que  $\gamma \in C^2(0, 1)$ . Além disso,  $\gamma$  satisfaz a EDO.

$$\gamma'' + \frac{\psi'(x)}{\gamma^2} = 0$$

em  $(0, 1)$ , quando  $x = \int_0^1 \frac{1}{\gamma} dt$ .

De fato, considerando o funcional

$$J(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma'^2 dt + \psi\left(\int_0^1 \frac{dt}{\gamma}\right).$$

Calcularemos a primeira variação de  $J$ . Para isto seja

$$\varphi(t) = J(\gamma + th), \quad h \in C_c^\infty(0, 1)$$

daí

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (2\gamma'h' + 2th'^2) dt - \psi'\left(\int_0^1 \frac{dt}{\gamma + th}\right) \left(\int_0^1 \frac{dt}{(\gamma + th)^2} h\right),$$

então

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \gamma'h' dt - \psi'\left(\int_0^1 \frac{dt}{\gamma}\right) \left(\int_0^1 \frac{dt}{\gamma^2} h\right),$$

usando integração por partes na primeira integral da última expressão, temos

$$\varphi'(0) = - \left[ \int_0^T \left( \gamma'' + \frac{\psi'(x)}{\gamma^2} h \right) \right],$$

sendo  $\gamma$  um ponto crítico de  $J$ , temos que  $\varphi'(0) = 0$ , ou equivalentemente

$$\int_0^T \left( \gamma'' + \frac{\psi'(x)}{\gamma^2} h \right) = 0, \quad \forall h \in C_c^\infty(0, 1).$$

Portanto

$$\gamma'' + \frac{\psi'(x)}{\gamma^2} = 0.$$

Além disso, por unicidade de  $\gamma$ , temos que  $\gamma'(\frac{1}{2}) = 0$ . Logo, pelo Lema E.2.1, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |\gamma'|^2 dt = \frac{1}{2} (2\pi\psi'(x))^{\frac{2}{3}},$$

$$\psi'(x) \int_0^1 \frac{dt}{\gamma} = (2\pi\psi'(x))^{\frac{2}{3}}.$$

Assim,  $\psi'(x) = \frac{4\pi^2}{x^3}$  e  $x = \frac{1}{R}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma')^2 dt + \psi \left( \int_0^1 \frac{dt}{\gamma} \right) &= \frac{1}{2} (2\pi\psi'(x))^{\frac{2}{3}} + \psi(x) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2\pi \frac{4\pi^2}{x^3} \right)^{\frac{2}{3}} + \psi(x) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi^2}{x^2} \right) + \psi(x) \\ &= 2\pi^2 \frac{1}{x^2} + \psi \left( \frac{1}{R} \right) \\ &= 2\pi^2 R^2 + \psi \left( \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

■

**Proposição E.2.3** *Seja  $T > 0$  e  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  como na Proposição anterior. Então temos*

$$\begin{aligned} &\inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma')^2 dt + T^2 \int_0^1 \psi \left( \frac{1}{\gamma} \right) dt : \gamma \in H_0^1(0, 1), \gamma \geq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 |q'|^2 dt + T^2 \int_0^1 \psi \left( \frac{1}{|q|} \right) dt : q \in X_0, \right\} \end{aligned}$$

*ambos podendo assumir o valor  $+\infty$ .*

**Demonstração:** Como  $H_0^1((0, 1)) \subset X_0$  temos que a desigualdade " $\geq$ " é óbvia. Por outro lado, como  $\psi$  não depende explicitamente de  $t$  não faz diferença minimizar o lado direito para  $q \in X_0$  ou  $q \in H_0^1((0, 1))$ . No segundo caso temos, também, que  $|q| \in H_0^1((0, 1))$  e  $|q| \geq 0$ . Além disso, de

$$|q|^2 = \langle q, q \rangle$$

temos

$$|q||q'| = \langle q, q' \rangle$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|q'| \leq |q|$$

donde  $|q'| \leq |q|$ . Logo,

$$\int_0^1 |q'|^2 dt \geq \int_0^1 (|q'|)^2 dt.$$

Provando a desigualdade oposta. ■

Se  $T > 0$  e  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  é crescente e convexa, façamos

$$v_0(\psi, T) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma')^2 dt + T^2 \int_0^1 \psi \left( \frac{1}{\gamma} \right) dt : \gamma \in H_0^1(0, 1), \gamma \geq 0 \right\}$$

$$v_1(\psi, T) = \min \left\{ 2\pi^2 R^2 + T^2 \psi \left( \frac{1}{R} \right) : R > 0 \right\},$$

com a convenção  $\psi(+\infty) = +\infty$ .

Se o funcional  $f$  é associado com o potencial

$$V(x) = -\psi \left( \frac{1}{|x|} \right),$$

então

$$2\pi^2 R^2 + T^2 \psi \left( \frac{1}{R} \right)$$

é exatamente o máximo de  $f$  entre todas as trajetórias circulares de período mínimo 1 e velocidade de módulo constante, que estão na esfera de raio  $R$  centrada na origem. O número  $v_1(\psi, T)$  é determinado escolhendo o raio  $R$  conveniente. Por outro lado, como vimos na Proposição E.2.3,  $v_0(\psi, T)$  é a maior das cotas inferiores de  $f$  sobre as trajetórias circulares que encontram a origem.

**Observação:** Note que a função convexa  $\psi$  que usamos no Capítulo 4 é nada mais que  $\psi(s) = \lambda s^\alpha$ , com  $\alpha \in [1, 2]$  e  $\lambda$  é uma constante positiva. Por exemplo no Lema 4.3.5,  $\lambda$  é dada por

$$\lambda = \frac{b}{2^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{\left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}}{M^\alpha}.$$

E combinações das Proposições E.2.2 2 e E.2.3, com  $\psi(s) = \lambda s^\alpha$ , provam os Lemas 4.3.5 e 4.3.8.

## E.3 Segunda variação de um funcional e condições suficientes para um extremo

Nesta Seção apresentaremos a definição da segunda diferencial de um funcional. Esta definição é bastante útil para termos condições suficientes para um extremo.

### E.3.1 Segunda variação de um funcional

Lembremo-nos que se  $y$  é uma função de  $n$ - variáveis, uma condição necessária para  $y$  ter um mínimo (resp, máximo) é que  $y' = 0$  e  $y'' > 0$  (resp,  $y'' < 0$ ).

#### Functionais quadráticos

Um funcional  $B(x, y)$  dependendo de dois elementos  $x$  e  $y$  pertencentes a algum espaço linear normado é dito ser bilinear se

$$B(\alpha x + y, z) = \alpha B(x, z) + B(y, z),$$

para quaisquer  $x, y$  no espaço linear e qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Fazendo  $y = x$  num funcional bilinear, obtemos uma expressão chamada de funcional quadrático.

**Definição E.3.1** *Um funcional quadrático  $A(x) = B(x, x)$  é dito ser positivo definido se  $A(x) > 0$ ,  $\forall x \neq 0$ .*

Um funcional bilinear definido sobre um espaço de dimensão finita é chamado uma forma bilinear. Toda forma bilinear  $B(x, y)$  pode ser representada como

$$B(x, y) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \xi_i \eta_k$$

onde  $\xi_1, \dots, \xi_n$  são as coordenadas dos elementos  $x$  e  $y$ , relativo a alguma base.

**Exemplo E.3.2** *Seja  $\alpha(t) > 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Então o funcional*

$$A(x) = \int_a^b \alpha(t) x^2(t) dt$$

é definido positivo.

Agora introduziremos o conceito da segunda diferencial de um funcional. Se  $I(y)$  é um funcional definido sobre algum espaço linear normado, dizemos que o funcional  $I(y)$  é duplamente diferenciável se seu incremento pode ser escrito na forma

$$\Delta I(h) = \varphi_1(h) + \varphi_2(h) + \varepsilon \|h\|^2,$$

ou de forma mais rigorosa

$$\Delta I(y)(h) = \varphi_1(y)(h) + \varphi_2(y)(h) + \varepsilon \|h\|^2,$$

onde  $\varphi_1(h)$  é um funcional linear (de fato a primeira diferencial),  $\varphi_2(h)$  é um funcional quadrático, e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . A função quadrática  $\varphi_2(h)$  é chamada **segunda diferencial ou segunda variação** do funcional  $I(y)$ , e denotamos por  $\delta^2(y)(h)$ .

**Teorema E.3.3** *A segunda variação de um funcional se existir é única.*

**Demonstração:** Basta aplicar o mesmo procedimento da demonstração do Teorema 1.2.12. ■

### E.3.2 Condições suficientes para um extremo

Visando obter condições suficientes para um extremo de um funcional, daremos a seguinte definição

**Definição E.3.4** *Dizemos que um funcional quadrático  $\varphi_2(h)$  definido sobre algum espaço linear normado é fortemente positivo se existir uma constante  $k > 0$  tal que*

$$\varphi_2(h) \geq k \|h\|^2$$

*para todo  $h$  no espaço linear.*

**Teorema E.3.5** *Uma condição suficiente para um funcional ter um mínimo para  $y = y^*$ , dado que a primeira diferencial se anule em  $y = y^*$ , é que sua segunda variação,  $\delta^2 I(y^*)(h)$  seja fortemente positiva.*

**Demonstração:** Para  $y = y^*$ , temos que  $\delta I(y^*)(h) = 0$  para todo  $h$ , e logo

$$\Delta I(h) = \delta^2 I(y^*)(h) + \varepsilon \|h\|^2, \quad (\text{E.3.3})$$

com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . Além disso, para  $y = y^*$

$$\delta^2 I(y^*)(h) \geq k \|h\|^2 \quad (\text{E.3.4})$$

para alguma constante positiva  $k$ . Então de (E.3.3) e (E.3.4), temos

$$\begin{aligned} \Delta I(h) &= \delta^2 I(y^*)(h) + \varepsilon \|h\|^2 \\ &= (K + \varepsilon) \|h\|^2. \end{aligned}$$

Logo, o incremento  $\Delta(h) = I(y^* + h) - I(y^*)$  não muda de sinal e é positivo. Portanto  $y^*$  é um mínimo para  $I(y)$ . ■

**Comentário:** Para um estudo mais aprofundado sobre a segunda diferencial de um funcional é recomendado ([12], Capítulo 4).

# Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, V. I.: *Mathematical methods of classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] Bessi, U. and Coti Zelati, V.: *Symmetries and noncollision closed orbits for planar  $N$ -body-type problems*. Nonlinear. Analysis. Theory. Methods and Applications, Vol.16. N°6, pp.587-598, 1991.
- [3] Brezis, H.: *Análisis funcional teoria y aplicaciones*. Alianza, Madrid, 1984.
- [4] Cabral, H.E. e Vidal, J.C.D.: *Introdução à mecânica celeste*. Dmat-UFPE, Recife, 1999.
- [5] Chenciner, A.: *Action minimizing periodic orbits in the Newtonian  $n$ -body problem*. Chicago Conference dedicated to Don Saari, pp.15-19, 1999.
- [6] —, Gerver J. et al: *Simple choreographic motions of  $N$  body a preliminary study*. Geometry, mechanics and dynamics, Springer, New York, pp.287-308, 2002.
- [7] —, Montgomery, R.: *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*. Annals of Mathematics, Vol. 152, pp. 881-901, 2000.
- [8] Costa, D.G.: *A first encounter with variational methods in differential equations*. Cubo, Vol.4. N°1, pp.251-281, 2002.
- [9] Coti Zelati, V.: *Periodic solutions for  $N$ -body-type problems*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.7. N°5, pp.477-492, 1990.
- [10] Degiovanni, M. and Giannoni, F.: *Dynamical systems with newtonian type potentials*. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa. Cl. Sc, (4), pp. 466-494, 1987.
- [11] Dugundji, J.: *Topology*. Allyn and Bacon, INC, Boston, 1966.

- [12] Gelfand, I. M. and Fomin, S.V.: *Calculus of variations*. Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
- [13] Gordon, W.B.: *Conservative dynamical systems involving strong force*. American Mathematical Society, Vol.204. pp. 113-135, 1975.
- [14] ———, : *A minimizing property of keplerian orbits*. American Journal of Mathematics, Vol.99. N° 5, pp. 961-971, 1977.
- [15] Hatcher, Allen.: *Algebraic topology*. University Press, Cambridge, 2002.
- [16] Hounie, Jorge.: *Teoria elementar das distribuições*. IMPA, Rio de Janeiro, 1995.
- [17] Kreyszig, Erwin.: *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley - Sons, Berlin, 1966.
- [18] Lang, Serge.: *Differential manifolds*. Addison - Wesley, New York, 1972.
- [19] Roberts, A. W. and Varberg, D.E.: *Convex functions*. Academic Press, New York, 1973.
- [20] Rudin, W.: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book, Singapore, 1987.
- [21] Siegel, C. and Moser, J.: *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [22] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Springer, Hermann, 1973.