Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática

PARTIÇÃO DE MATRÓIDES, CONJUNTOS CO-GERADORES E BRIDGE-IT

Jalila Rios dos Santos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
19 de dezembro de 2003

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Jalila Rios dos Santos

PARTIÇÃO DE MATRÓIDES, CONJUNTOS CO-GERADORES E BRIDGE-IT

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Sóstenes Luiz Soares Lins*

Recife
19 de dezembro de 2003

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: ______________________________

Sóstenes Luis Soares Lins
Orientador

____
Manoel José Machado Soares Lemos

____
Francisco Cribari Neto

PARTIÇÃO DE MATRÓIDES, CONJUNTOS CO-GERADORES E BRIDGE-IT

Por

Jalila Rios dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 3271- 8410 – Fax: (081) 3271-1833
RECIFE – BRASIL

Dezembro - 2003

Aos meus pais, José e Jarilma, e irmãos, Jaamara, Jobson e Jarbas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua infinita misericórdia e graça com as quais tem conduzido minha vida.

Aos meus pais e irmãos cujo amor moldou-me e me faz forte.

Aos professores que me fizeram gostar ainda mais do que faço: Carloman C. Borges, Haroldo G. Benatti e Hildete França da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS); Cláudio Vidal, Hildeberto E. Cabral, Manoel Lemos e Sóstenes Lins desta instituição.

Aos meus amigos com quem compartilhei os anos de mestrado: obrigada pelo carinho, pela compreensão e apoio (inclusive na hora de aprender Java!).

Por fim, não poderia deixar de agradecer ao professor Sóstenes Lins pela excelente orientação e motivação com que conduziu o trabalho.

E a paz de Deus, que excede todo o entendimento, guardará os vossos corações e as vossas mentes em Cristo Jesus.

—PAULO (Filipenses, 4.7)

RESUMO

O trabalho aqui apresentado consiste no estudo e aplicação da teoria relacionada com conjuntos co-geradores de uma matróide, desenvolvida por Alfred Lehman e Jack Edmonds, num jogo chamado Bridge-it. Para tanto, exibimos um algoritmo que encontra, dada uma matróide, um subconjunto maximal de seus elementos, A_0, o qual pode ser particionado em k subconjuntos independentes co-geradores, disjuntos, e geradores de A_0. Este conjunto A_0 está fortemente relacionado com as estratégias dos jogadores.

Palavras-chave: Grafo, Matróide, Partição de matróides, Conjuntos co-geradores, Switching game e Bridge-it.

ABSTRACT

This work consists of the study and application of the theory concerning the cospanning-sets of a matroid, first developed by Alfred Lehman and Jack Edmonds, in a game called Bridge-it. For that, we exhibit an algorithm for finding a maximal subset of the elements of a given matroid, A_0, which can be partitioned into k cospanning disjoint independent subsets which also span A_0. This set, A_0, is strongly related to the opponent players strategies.

Keywords: Graph, Matroid, Matroid Partition, Cospanning-Sets, Switching game and Bridge-it.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um jogo faz ponte entre o sonho e a realidade,
entre o previsível e o imprevisível.
—JALILA RIOS

Bridge-it é um jogo bastante interessante. É jogado por duas pessoas, num tabuleiro quadrado formado por duas redes retangulares, uma verde e outra vermelha, com pontos e linhas ligando-os, como se pode ver na Figura 1.1 abaixo. Os lances se alternam. O primeiro jogador, marca sempre uma linha verde, em qualquer direção, e tem por objetivo construir um caminho ligando um dos pontos verdes da extrema esquerda a outro (verde) da extrema direita. Já o segundo jogador, marca sempre alguma linha vermelha, em qualquer direção, com o objetivo de formar um caminho ligando um ponto vermelho do alto do tabuleiro a outro (vermelho) de baixo. Um detalhe importante, essencial, é: o jogador não pode marcar uma linha se esta cruza outra que já foi marcada pelo seu oponente. No jogo representado na figura ganhou o jogador "vermelho", o segundo jogador.

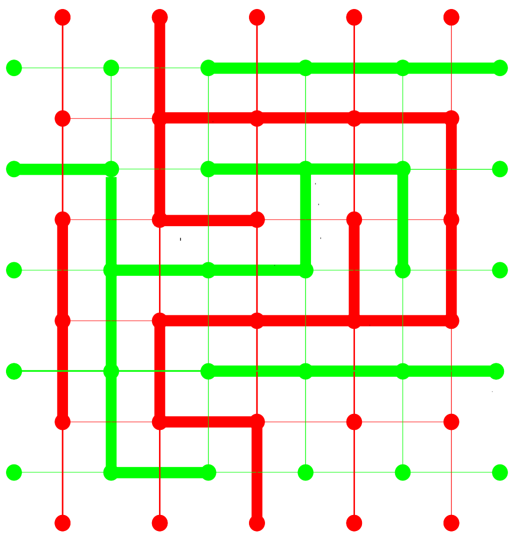


Figura 1.1. Bridge-it atual. Neste exemplo, o tabuleiro tem "tamanho quatro".

Este jogo é o mesmo jogo de David Gale, citado pela primeira vez na coluna "Mathematical Games" de Martin Gardner em outubro de 1958 [Gar58], com a variante de ter as linhas ligando os pontos adjacentes de mesma cor para serem marcadas; pois, no jogo de Gale elas não existiam, e as jogadas eram exatamente riscá-las usando duas cores, correspondentes as cores dos pontos, uma para cada jogador (Figura 1.2). As linhas deveriam ligar dois pontos adjacentes da mesma cor com linhas horizontais ou verticais, não na diagonal, e nenhuma linha poderia cruzar outra. O vencedor era o jogador que primeiro conseguisse formar um caminho ligando os dois opostos lados do tabuleiro de mesma cor.

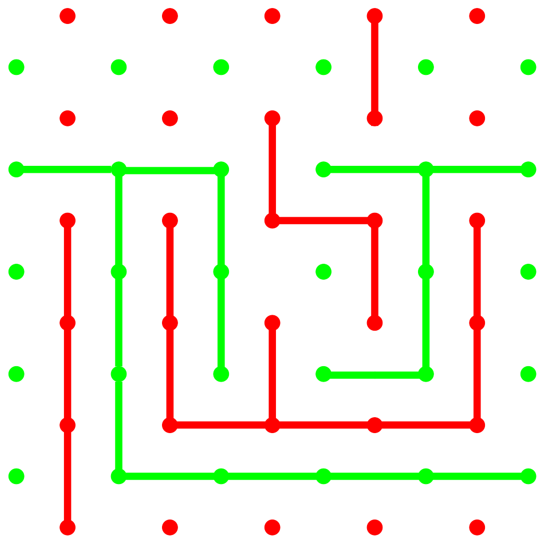


Figura 1.2. Bridge-it originalmente formulado por David Gale (um matemático da Brown University). Neste jogo venceu quem joga com verde, o primeiro jogador.

Quando o jogo de Gale foi lançado comercialmente em 1960 com o nome de Bridge-it era jogado num tabuleiro com pinos elevados coloridos com duas cores e pequenas pontes plásticas, também coloridas, que eram colocadas entre os pinos. Em 1961 já era popular entre as crianças.

Por muitos anos foi conhecida uma prova de que existe uma estratégia vencedora para quem faz o primeiro movimento. Mas neste mesmo ano, em julho de 1961, Martin Gardner publicou em sua coluna uma recente estratégia vencedora para o primeiro jogador [Gar61]. Estratégia esta descoberta por Oliver Gross, um especialista em jogos do departamento de matemática da Rand Corporation. Uma estratégia em pares, isto é, a jogada determinada pela estratégia depende da jogada anterior do oponente. A explicação da estratégia consistia do diagrama reproduzido na Figura 1.3 e das seguintes indicações:

- Primeiro jogue como indicado pela linha cheia, abaixo e à esquerda do tabuleiro.
- Depois, sempre que seu oponente jogar tangenciando o final de uma linha tracejada jogue tangenciando o outro final da mesma linha.

Não é vantajoso para qualquer um dos jogadores ligar pontos que estão no mesmo lado externo do tabuleiro já que basta ligar um ponto deste lado a outro do outro lado

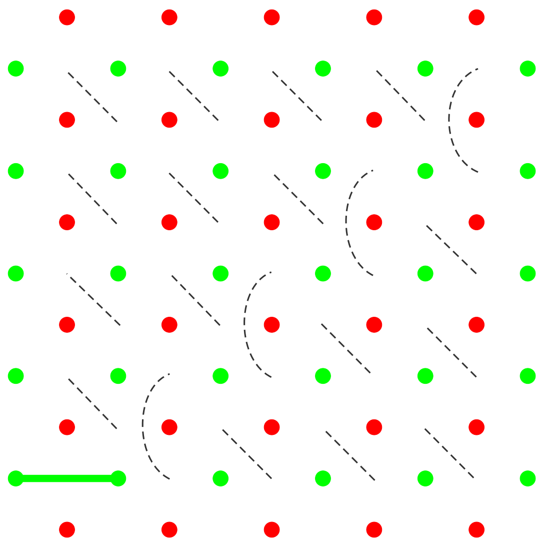


Figura 1.3. A estratégia de Oliver Gross. Observe que, como está posicionado o tabuleiro, o primeiro jogador joga objetivando ligar um ponto da esquerda a um da direita.

por um caminho para vencer. Percebe-se que neste caso as linhas tracejadas não indicam como jogar, mas se o segundo jogador fizer uma jogada deste tipo, o primeiro jogador pode jogar da mesma forma com os pontos de sua cor, ou jogar em qualquer lugar do tabuleiro. No segundo caso, quando o segundo jogador jogar e a estratégia pedir a jogada que já foi feita pelo primeiro jogador, ele poderá jogar ligando pontos nos lados externos.

Com esta estratégia simples o primeiro jogador pode vencer sempre. Como ela é fácil de guardar na memória e pela simetria dada pelo tabuleiro pode ser aplicada a qualquer tamanho de Bridge-it, tornou-se desinteressante o jogo.

Mas se pudéssemos deixar de lado a simetria do tabuleiro, por exemplo, jogar num tabuleiro com algumas jogadas feitas, a mesma quantidade de cada cor, não segundo a estratégia, de forma que o jogo estivesse "equilibrado", haveria uma estratégia tão simples para vencer? Sendo o primeiro ou o segundo jogador?

Alfred Lehman publicou em dezembro 1964 um artigo [Leh64] falando sobre uma solução para um jogo jogado por duas pessoas sobre um grafo, o "switching game" formulado por C. E. Shannon. Sua solução baseava-se em um correspondente jogo, dado por ele, sobre matróides. O jogo Bridge-it pode ser visto como um exemplo do switching game de Shannon.

Na mesma época, conhecendo o trabalho de Lehman, Jack Edmonds publicou dois artigos interligados, um sobre partição de matróides [Edm65b] (veja também [Edm67]) e outro fazendo uma ponte entre a teoria do jogo de Lehman sobre matróides e um teorema de Tutte e Nash-Williams [Edm65a]. No primeiro ele traz um teorema que caracteriza a existência de uma partição dos elementos de uma matróide em k conjuntos independentes, uma partição mínima; e um algoritmo para obtê-la, caso exista, ou, caso não, obter o que chamaremos um *conjunto fracasso*. No segundo, usando a teoria de matróides, ele traz uma caracterização e estratégia vitoriosa para o tipo de jogo "short game" e para o tipo “nonshort game” (neste caso, diferentemente de Lehman que usava principalmente o dual da matróide associada); e um importante teorema sobre a existência de k subconjuntos disjuntos de uma matróide co-geradores e geradores de um subconjunto K da matróide, o chamado “Cospanning-Sets Theorem”. Este teorema, em sua prova, utiliza bastante do teorema sobre partição de matróides. E através dele, de um caso particular, pode-se caracterizar se um jogo de Shannon, ou numa matróide, é favorável ao primeiro ou ao segundo jogador.

Na prova do Cospanning-Sets Theorem, Jack Edmonds deixa nas entrelinhas idéias que resultariam num algoritmo para encontrar um subconjunto maximal, A_0, de uma matróide formado por k subconjuntos independentes co-geradores, disjuntos e geradores de A_0. Este conjunto A_0 está fortemente relacionado com as estratégias dos jogadores.

Nossa maior contribuição neste trabalho é exibir um algoritmo que encontra esse A_0.

Nos propusemos, também, a apresentar uma implementação do jogo Bridge-it de qualquer tamanho, que permite (opcionalmente) ao computador ser um dos jogadores (o segundo pois, como já sabemos, se fosse o primeiro venceria independentemente das jogadas do oponente). A cada lance, sob a teoria de matróides, o jogo é analisado, e se o primeiro jogador, o ser humano, cometer um “erro” (deixar de “ter a vitória”: o jogo passar a ter uma configuração que já não lhe favorece) o computador “joga” de forma a “ter a vitória” e nada que seu oponente faça o pode impedir de vencer. A análise do jogo é também opcionalmente apresentada ao final do jogo.

Sabemos que, usando a estratégia de Oliver Gross, é fácil vencer sendo o primeiro a jogar e começando com um tabuleiro sem qualquer jogada feita (dada a simetria). Então, o jogo passa a ser interessante se for jogado num tabuleiro com algumas jogadas feitas, a mesma quantidade de cada cor, sendo isto feito em desacordo com a estratégia de Gross, de forma “neutra”, isto é, tendo a *possibilidade* de favorecer-se o jogador que começar. Possibilidade pois, como já dissemos, pode cometer “erro”, dado que, ao invés da estratégia de Gross (que não pode ser usada aqui), a estratégia advinda de matróides é não trivial e impossível de se aplicar por cálculos mentais. Nestas condições, ganhar jogando em primeiro contra o computador é possível e significa não ter cometido sequer um erro.

CAPÍTULO 2

PARTIÇÃO DE MATRÓIDES

Existem várias definições para matróide, todas equivalentes entre si. Esta que apresentamos a seguir é a que mais utilizaremos.

Definição 2.1 (Matróide) *Uma matróide, $M = (E, F)$, é um conjunto finito E de elementos e uma família F de subconjuntos de E, chamados* conjuntos independentes, *tal que:*

(I1) $F \neq \emptyset$.

(I2) *Se $I \in F$ e $J \subseteq I$ então $J \in F$.*

(I3) *Para qualquer X subconjunto de E, todos os seus subconjuntos independentes maximais têm a mesma cardinalidade, chamada* posto de X *e denotada por $r(X)$ ou $r_M(X)$.*

Outra estrutura interessante é a de sistemas de independência.

Definição 2.2 (Sistema de Independência) *Chamamos de sistema de independência qualquer coleção finita de elementos e uma família de conjuntos destes elementos, chamados conjuntos independentes, os quais satisfazem os axiomas (I1) e (I2).*

Por exemplo, dado um grafo G, seus vértices definem um sistema de independência, onde os conjuntos independentes são aqueles em que nenhuma aresta de G é incidente a dois vértices dele.

As arestas de um grafo G também definem um sistema de independência ao identificarmos os conjuntos independentes com os chamados "emparelhamentos". Um emparelhamento é um conjunto onde nenhum vértice de G encontra duas arestas neste conjunto.

Dado um sistema de independência, encontrar uma partição de seus elementos em tão poucos conjuntos independentes quanto possível é o chamado *problema de coloração mínima.*

Um problema próximo ao de coloração mínima é o "problema de empacotamento". Isto é, encontrar um conjunto independente de cardinalidade máxima. Mais geral, o "problema de empacotamento com pesos" é, onde cada elemento do sistema carrega um peso numérico real, encontrar um conjunto independente onde a soma dos pesos é máxima.

Para qualquer sistema de independência, qualquer subsistema consistindo de um subconjunto X de elementos e todos os conjuntos independentes contidos em X é um sistema de independência. Então, numa matróide, que é um sistema de independência, o problema de empacotamento é dito ser trivial para o sistema e todos os seus subsistemas.

O principal resultado deste capítulo é a solução do problema de coloração mínima para os conjuntos independentes de uma matróide, solução esta, dada por Jack Edmonds através do Teorema 2.1 e do algoritmo contido em sua prova. Estes, por sua vez, são ferramentas extremamente importantes nos capítulos que seguem.

2.1 TEOREMA SOBRE PARTIÇÃO DE MATRÓIDES

Seja $\{M_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, uma família indexada de matróides, $M_i = (E, F_i)$, todas definidas no mesmo conjunto E de elementos. Denotamos por $r_i(A)$ o posto de $A \subseteq E$ relativo a M_i, e por $|A|$ a cardinalidade de A.

Teorema 2.1 (Jack Edmonds) *O conjunto E pode ser particionado em uma família $\{I_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, de conjuntos $I_i \in F_i$ se e somente se não há qualquer $A \subseteq E$ tal que*

$$|A| > \textstyle\sum_i r_i(A).$$

Em particular, onde os M_i's são a mesma matróide M, nós temos:

Os elementos de uma matróide M podem ser particionados em k conjuntos, cada um independente em M, se e somente se não há qualquer conjunto A de elementos tal que

$$|A| > k \cdot r(A).$$

Prova (*Da necessidade*) Suponha que $\{I_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, é uma partição de E tal que I_i é independente em M_i. Então, para qualquer $A \subseteq E$,

$$|A| = \textstyle\sum_i |A \cap I_i| \leq \sum_i r_i(A),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Antes de apresentarmos a prova da suficiência deste teorema veremos alguns pré-requisitos na seção seguinte.

2.2 TERMINOLOGIA E LEMAS

Vejamos algumas definições:

Definição 2.3 (Conjunto dependente) *Um conjunto $X \subseteq E$ é chamado dependente relativo à matróide $M = (E, F)$ se ele não pertence a F.*

Definição 2.4 (Fecho) *Sejam X e Y subconjuntos de elementos de uma matróide M, com $X \subseteq Y$. O fecho de X em Y relativo à matróide M é o conjunto*

$$\mathcal{F}(X, Y) = \{x \in Y : r(X \cup x) = r(X)\},$$

também denotado por $\mathcal{F}_M(X, Y)$ quando se faz necessário explicitar sobre que matróide estamos trabalhando. Quando Y é o próprio conjunto E, chamamos fecho *de X e denotamos por $\mathcal{F}(X)$ ou $\mathcal{F}_M(X)$.*

Dada esta definição, é fácil ver que $X \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$, em particular, $X \subseteq \mathcal{F}(X)$.

Como, pelo axioma (I3) da definição de matróide, dado qualquer independente maximal $I \subseteq X$, $r(X) = |I|$, no caso particular do fecho de um conjunto independente podemos definir assim:

Definição 2.5 (Fecho de um conjunto independente) *Seja X algum subconjunto de elementos de uma matróide M e seja I algum subconjunto independente de X (relativo a M). O conjunto $S \subseteq X$, consistindo de I e todos os elementos $e \in X$ tal que $I \cup e$ é dependente, é dito ser o fecho de I em X (com respeito a M). Se X é o próprio conjunto E, dizemos apenas que S é o* fecho *de I.*

Observe que, dado I subconjunto independente de X e $e \in X - I$, se $I \cup e$ é independente, então, segundo a definição mais geral, e não poderia estar no fecho, pois

$$r(I \cup e) = |I| + 1 > |I| = r(I).$$

Mas, se $I \cup e$ é dependente, então I é independente maximal de $I \cup e$. Temos que $r(I \cup e) = r(I)$. Assim, mostramos que esta definição de fecho para um conjunto independente não se choca com a mais geral apresentada.

Um importante resultado sobre fecho é apresentado no lema abaixo.

Lema 2.1 *Sejam X e Y subconjuntos de elementos da matróide M, onde $X \subseteq Y$. Se $x \in \mathcal{F}(X, Y)$, então $\mathcal{F}(X \cup x, Y) = \mathcal{F}(X, Y)$, que é único.*

Em sua prova, será útil esta proposição:

Proposição 2.1 *Sejam X e Y subconjuntos quaisquer de elementos de M, com $X \subseteq Y$. Se I é um conjunto independente maximal em X, então I é independente maximal no $\mathcal{F}(X, Y)$.*

Prova (Da Proposição 2.1) Sejam X, Y e I como descritos na proposição. Temos que $r(X) = |I|$. Qualquer que seja $x \in \mathcal{F}(X, Y)$, pela definição, $x \in Y$ e $r(X \cup x) = r(X)$. Assim, como $I \subseteq X \cup x$, pelo axioma (I3) de matróide, esta igualdade nos dá que I é um independente maximal de $X \cup x$. Ou melhor, qualquer que seja $x \in \mathcal{F}(X, Y)$, I é independente maximal de $I \cup x$ e, conseqüentemente, I é independente maximal de $\mathcal{F}(X, Y)$. ▮

Equivalentemente, pelo axioma (I3) da definição de matróide, $r(\mathcal{F}(X, Y)) = r(X)$.

Prova (Do Lema 2.1) Sejam X e Y subconjuntos de elementos da matróide M, onde $X \subseteq Y$. Seja também I um subconjunto independente maximal de X.

Se $x \in \mathcal{F}(X, Y)$, pela definição, $x \in Y$ e $r(X \cup x) = r(X)$. Daí, como $I \subseteq X \cup x$, pelo axioma (I3) de matróide, I também é independente maximal de $X \cup x$. Logo, pela Proposição 2.1, I é independente maximal do $\mathcal{F}(X, Y)$ e de $\mathcal{F}(X \cup x, Y)$.

Sabemos que $X \cup x$ está contido tanto em $\mathcal{F}(X \cup x, Y)$ como em $\mathcal{F}(X, Y)$. Resta analisarmos os elementos $e \in Y - (X \cup x)$.

Se $e \cup I$ é independente, como I é um conjunto independente maximal tanto em $\mathcal{F}(X,Y)$ quanto em $\mathcal{F}(X \cup x, Y)$, então $e \notin \mathcal{F}(X,Y)$ e $e \notin \mathcal{F}(X \cup x, Y)$. Por outro lado, se $e \cup I$ é dependente, então I é um subconjunto independente maximal de $e \cup X$ e também de $e \cup (X \cup x)$. Portanto, neste último caso , pelo axioma (I3) da definição de matróide, $r(e \cup X) = |I| = r(X)$ e $r(e \cup (X \cup x)) = |I| = r(X \cup x)$, logo $e \in \mathcal{F}(X,Y)$ e $e \in \mathcal{F}(X \cup x, Y)$. Portanto, se $x \in \mathcal{F}(X,Y)$, o fecho $\mathcal{F}(X,Y)$ é *único* e igual ao fecho de $\mathcal{F}(X \cup x, Y)$, com relação à matróide M. ▮

Estes últimos resultados nos levam a duas proposições:

Seja M uma matróide e sejam X e Y subconjuntos de elementos de M.

Proposição 2.2 *Dado um independente maximal $I \subseteq X$, temos $\mathcal{F}(X,Y) = \mathcal{F}(I,Y)$.*

Prova Dadas a definição do fecho de um conjunto independente e a prova do Lema 2.1, vemos que para os elementos $x \in Y - X$, $x \in \mathcal{F}(I,Y)$ se e somente se $x \in \mathcal{F}(X,Y)$. Resta mostrarmos que os elementos de X satisfazem esta proposição, $X \subseteq \mathcal{F}(I,Y)$. Isto é, para todo $x \in X - I$, $x \in \mathcal{F}(I,Y)$. O que decorre do fato de I ser independente maximal em X: para todo $x \in X - I$, $I \cup x$ é dependente; portanto, por definição, $x \in \mathcal{F}(I,Y)$. ▮

Proposição 2.3 $\mathcal{F}(\mathcal{F}(X,Y),Y) = \mathcal{F}(X,Y)$.

Prova Seja I um independente maximal em X. Pela Proposição 2.1 I é independente maximal no fecho $\mathcal{F}(X,Y)$; pela Proposição 2.2

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(X,Y),Y) = \mathcal{F}(I,Y) = \mathcal{F}(X,Y),$$

como desejávamos mostrar. ▮

Definição 2.6 (Conjunto fechado) *Um conjunto X de elementos de uma matróide M é dito ser um conjunto fechado se $\mathcal{F}(X) = X$.*

Dado I, algum conjunto independente da matróide M, não necessariamente contido em X, nós iremos denotar o fecho de $I \cap X$ em X, relativo à matróide M, por $\mathcal{F}(I,X,M)$. Note que $\mathcal{F}(I,X,M) = \mathcal{F}_M(I \cap X, X)$.

Na definição de matróide, podemos substituir o axioma (I3) por:

(I3′) Se I_1, $I_2 \in F$ e $|I_1| < |I_2|$, então há um elemento $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in F$.

Obtendo uma definição equivalente e próxima a anterior.

Lema 2.2 *O axioma (I3) é equivalente à proposição (I3′).*

Prova Primeiro, supondo (I3′), mostremos (I3).

Sejam I_1 e I_2 independentes maximais em um conjunto qualquer $X \subseteq E$, $M = (E,F)$.

Suponha que $|I_1| \neq |I_2|$, digamos $|I_1| < |I_2|$. Por (I3′), existe $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e$ é independente em M. Uma contradição, dada a maximalidade de I_1 em X, já que $I_1 \cup e \subseteq X$.

Logo $|I_1| = |I_2|$, dados quaisquer I_1 e I_2 independentes maximais em X. Temos (I3).

Agora, supondo (I3) mostremos (I3$'$).

Sejam I_1 e I_2 conjuntos independentes em M, com $|I_1| < |I_2|$.

Temos que $I_2 - I_1 \neq \emptyset$.

Seja B um independente maximal em $X = I_1 \cup I_2$. Por (I3), $|B| \geq |I_2|$, já que I_2 é um independente contido em X. Como $|I_1| < |I_2|$, temos $|I_1| < |B|$ e, novamente por (I3), concluímos que I_1 não é independente maximal em X. Logo, existe $e \in X - I_1$, portanto $e \in I_2 - I_1$, tal que $I_1 \cup e$ é independente em X, relativo a M.

Assim, obtemos (I3$'$) e encerramos a prova do Lema 2.2 . ▮

Também podemos definir matróide através de um tipo especial de seus conjuntos dependentes: os circuitos.

Definição 2.7 (Circuito) *Um conjunto dependente minimal de elementos de uma matróide M é chamado circuito de M.*

Lema 2.3 *Seja E um conjunto finito e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de E satisfazendo:*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) *Se C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$.*

(C3) *Se C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$, então há um $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Seja F a coleção de subconjuntos de E que não contém qualquer elemento de $\mathcal{C}$. Então, (E, F) é uma matróide tendo $\mathcal{C}$ como sua coleção de circuitos.

Não traremos aqui a prova deste Lema 2.3. Em [Oxl92] pode-se encontrar uma prova com base na definição de matróide que usa os axiomas (I1), (I2) e (I3$'$).

Eis um resultado bastante útil:

Lema 2.4 *A união de qualquer conjunto independente I e algum elemento e de uma matróide M contém no máximo um circuito de M.*

Prova Se $I \cup e$ é independente claramente não contém qualquer circuito. Mas se $I \cup e$ é dependente, por definição, existe circuito $C \subseteq I \cup e$. Mais ainda, qualquer circuito contido em $I \cup e$ possui o elemento e.

Suponha que existe um circuito $C' \in \mathcal{C}$ tal que $C' \neq C$ e $C' \subseteq I \cup e$. Como $e \in C \cap C'$, por (C3), existe $C'' \in \mathcal{C}$ tal que

$$C'' \subseteq C \cup C' - e \subseteq I \cup e - e = I.$$

Um absurdo, já que I é independente. Portanto, há no máximo um circuito contido em $I \cup e$. ▮

Se observarmos melhor a prova do Lema 2.1 perceberemos que o fecho $\mathcal{F}(X, Y)$ é formado exatamente por, além dos elementos de X, elementos e em $Y - X$ que com algum conjunto independente maximal I de X formam um conjunto dependente $(I \cup e)$.

Pela definição de circuito, poderíamos redefinir fecho assim:

Definição 2.8 (Fecho, usando circuito) *Sejam X e Y subconjuntos de elementos de uma matróide M, com $X \subseteq Y$. O fecho de X em Y relativo à matróide M é o conjunto formado pelos elementos de X, mais os elementos $e \in Y - X$ para os quais existe um circuito C de M tal que $e \in C$ e $C - e \subseteq X$.*

Proposição 2.4 *Sejam C_1 e C_2 circuitos de uma matróide M. Se $f \in C_1 - C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe circuito C_3 de M tal que $f \in C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Prova Tome $X = C_1 \cup C_2 - \{e, f\}$. Como $e \in C_2$ e $C_2 - e \subseteq X$, $e \in \mathcal{F}(X)$. E como $f \in C_1$ e $C_1 - f \subseteq X \cup e$, temos que $f \in \mathcal{F}(X \cup e)$. Pelo Lema 2.1 sabemos que $\mathcal{F}(X \cup e) = \mathcal{F}(X)$. Logo, $f \in \mathcal{F}(X)$ e, por definição, existe circuito C_3 de M tal que $f \in C_3$ e $C_3 - f \subseteq X$. O que nos dá $f \in C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$, provando a proposição. ∎

Por fim, apresentamos algumas definições usadas nos capítulos seguintes.

Definição 2.9 (Conjunto gerador) *Sejam X e Y conjuntos de elementos da matróide M. O conjunto X é dito ser um conjunto gerador de Y se $Y \subseteq \mathcal{F}(X)$.*

Definição 2.10 (Base) *Um conjunto B de elementos da matróide $M = (E, F)$ é chamado base de M se ele é um independente maximal em M ou, equivalentemente, se ele é um conjunto gerador minimal para E.*

2.3 ALGORITMO PARA PARTIÇÃO DE MATRÓIDES

A prova da suficiência devida ao Teorema 2.1 será feita através do algoritmo que passaremos a apresentar.

Definição 2.11 (Conjunto particionável) *Seja $\{I_i\}$ $(i = 1, ..., k)$ uma família de subconjuntos mutuamente disjuntos de E tal que I_i é independente na matróide $M_i = (E, F_i)$. Denote sua união por $H = \bigcup\{I_i\}$. O conjunto H é dito ser particionável (relativo à família $\{M_i\}$).*

Seja $H \subseteq E$ particionável com relação a $\{M_i\}$. Suponha que existe um $e \in E - H$. O algoritmo mostra como encontrar um $A \subseteq H \cup e$ tal que $|A| > \sum_i r_i(A)$, ou, senão, particionar $H \cup e$, isto é, rearrumar os elementos nos conjuntos I_i para poder acrescentar e num deles, preservando-os ainda mutuamente disjuntos e independentes, respectivamente, nas matróides M_i. Então tomamos, por H, $H \cup e$. Este torna-se o corpo do algoritmo que deve ser executado enquanto ainda houver $e \in E - H$. Assim, prova-se o teorema.

A seguinte operação é usada pelo algoritmo como uma "operação primitiva": para um conjunto I independente numa matróide M_i e algum elemento $e \in E - I$, determine que $I \cup e$ é independente em M_i ou, senão, encontre o $C \subseteq I \cup e$ tal que C é um circuito em M_i. Esta operação poderia ser reduzida a: determine se $I \cup e$ é ou não independente. Usando uma delas, torna-se possível determinar o $r_i(S)$ para qualquer $S \subseteq E$.

O corpo do algoritmo será dividido em duas fases que, como já dissemos, integram uma rotina que é executada enquanto ainda houver $e \in E - H$ (caso contrário, a partição de E é dada pela família corrente $\{I_i\}$).

2.3.1 Fase 1 do algoritmo

Seja $S_0 = E$.

Para cada $j-1$, *começando com* $j-1=0$, *teste se há algum* i, *chame-o de* $i(j)$, *tal que*

$$|I_{i(j)} \cap S_{j-1}| < r_{i(j)}(S_{j-1}).$$

Se encontrou algum, então seja

$$S_j = \mathcal{F}(I_{i(j)}, S_{j-1}, M_{i(j)}),$$

ou seja, o fecho de $I_{i(j)} \cap S_{j-1}$ *em* S_{j-1}, *na matróide* $M_{i(j)}$.

Repita para $j-1$ *acrescido de uma unidade até que não haja qualquer* i *que satisfaça a desigualdade acima.*

Deste modo construímos uma seqüência $(I_{i(1)}, S_1), ..., (I_{i(n)}, S_n)$.

Observe que os $I_{i(j)}$ não são necessariamente distintos. E que S_j é um subconjunto próprio de S_{j-1}, pois pela construção de S_j, pela Proposição 2.1 e pela escolha de $I_{i(j)}$

$$r_{i(j)}(S_j) = |I_{i(j)} \cap S_{j-1}| < r_{i(j)}(S_{j-1}).$$

Assim, $S_0 \supset S_1 \supset ... \supset S_n$. Além disso, dado que a seqüência terminou num S_n, temos que, para todo i, $|I_i \cap S_n| = r_i(S_n)$. Como os I_i's são disjuntos, obtemos

$$|H \cap S_n| = \textstyle\sum_i r_i(S_n).$$

Se existe $e \in S_n - H$, *então faça*

$$A = (H \cap S_n) \cup e.$$

Pare! Este conjunto A *indica que o conjunto* E *não pode ser particionado.*

Ora, $A \subseteq S_n$ e

$$|A| = |H \cap S_n| + 1 > \textstyle\sum_i r_i(S_n) \geq \ \sum_i r_i(A).$$

Portanto, de acordo com a parte "somente se" do Teorema 2.1, desde que $A \subseteq H \cup e$ e $|A| > \sum_i r_i(A)$, o conjunto $H \cup e$ não pode ser particionado. Nem o conjunto E.

Senão, obtivemos $S_n - H = \emptyset$, *como existe* $e \in E - H$, *temos* $e \in E - (H \cup S_n)$. *Execute a Fase* 2.

2.3.2 Fase 2

Seja $e \in E - (H \cup S_n)$. Como $e \in S_0$, $e \notin S_n$ e $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_n$, há um S_h como pede o próximo passo:

Encontre S_h tal que $e \notin S_h$ e $e \in S_j$ para todo $0 \leq j < h$.

Se $e \cup I_{i(h)}$ é independente, em $M_{i(h)}$, então adicione e em $I_{i(h)}$. Isto acaba a Fase 2.

Observe que se $e \cup I_{i(h)}$ é independente, conseguiríamos, acrescentando e em $I_{i(h)}$, já ter particionado $H \cup e$ como desejávamos.

Senão, $e \cup I_{i(h)}$ é dependente, encontre o circuito $C \subseteq e \cup I_{i(h)}$ da matróide $M_{i(h)}$.

Este circuito $C \nsubseteq S_{h-1}$. Pois, se $C \subseteq S_{h-1}$, como $S_h = \mathcal{F}(I_{i(h)}, S_{h-1}, M_{i(h)})$, teríamos $C - e \subseteq I_{i(h)} \cap S_{h-1}$ e, conseqüentemente, $e \in S_h$, uma contradição. Então, como $C \subseteq S_0$ e $C \nsubseteq S_{h-1}$:

Encontre o menor inteiro m, $0 < m < h$, tal que $C \nsubseteq S_m$.

Tome e' , $e' \in C - S_m$.

Faça $I'_{i(h)} = e \cup I_{i(h)} - e'$. Substitua $I_{i(h)}$ por $I'_{i(h)}$, e para todo $i \neq i(h)$, identifique I'_i com I_i.

Pelo Lema 2.4 $I'_{i(h)} = e \cup I_{i(h)} - e'$ é independente na matróide $M_{i(h)}$.

Sabemos que $e' \notin S_m$ e que $e' \in S_j$ para $0 \leq j < m$. Queremos trabalhar com e' da mesma forma que com e. Perguntando, agora, se $e' \cup I'_{i(m)}$ é ou não independente, em $M_{i(m)}$. Mas, para isso, precisamos garantir que a seqüência $(I'_{i(1)}, S_1), \ldots, (I'_{i(m)}, S_m)$ está correta. Isto é, que ela obedece às regras de construção da Fase 1 tal como esta parte $(I_{i(1)}, S_1), \ldots, (I_{i(m)}, S_m)$ da seqüência $(I_{i(1)}, S_1), \ldots, (I_{i(n)}, S_n)$. Ou seja, garantir as mesmas condições, trabalhando com e' e m, que tínhamos com e e h.

Considere, então, os termos $j = 1, \ldots, m$ na ordem. Se $i(j) = i(h)$, então $I'_{i(j)} = e \cup I_{i(j)} - e'$. Pela escolha de m, $C \subseteq S_{j-1}$, qualquer $j = 0, \ldots, m$. Logo, o conjunto $D = (I'_{i(j)} \cup e') \cap S_{j-1} = (I_{i(j)} \cup e) \cap S_{j-1}$ é dependente em $M_{i(j)}$ e

$$r_{i(j)}(D) = |I'_{i(j)} \cap S_{j-1}| = |I_{i(j)} \cap S_{j-1}|.$$

Isto é,

$$e' \in \mathcal{F}_{M_{i(j)}}(I'_{i(j)} \cap S_{j-1}, S_{j-1}) \text{ e } \ e \in \mathcal{F}_{M_{i(j)}}(I_{i(j)} \cap S_{j-1}, S_{j-1}).$$

Portanto, pela unicidade provada no Lema 2.1 temos que

$$\mathcal{F}(I'_{i(j)}, S_{j-1}, M_{i(j)}) = \mathcal{F}_{M_{i(j)}}(D, S_{j-1}) = \mathcal{F}(I_{i(j)}, S_{j-1}, M_{i(j)}) = S_j.$$

O mesmo,

$$\mathcal{F}(I'_{i(j)}, S_{j-1}, M_{i(j)}) = \mathcal{F}(I_{i(j)}, S_{j-1}, M_{i(j)}) = S_j,$$

acontece se $i(j) \neq i(h)$, pois neste caso $I'_{i(j)} = I_{i(j)}$. E, então, podemos tratar e' da mesma forma que e.

Faça com $(e', I_{i(m)})$ o mesmo que fez com $(e, I_{i(h)})$.

Desde que m é um inteiro positivo estritamente menor que h, conseguiremos terminar esta fase em menos que h interações. Pois se após várias interações da Fase 2 (cada uma com um m cada vez menor), por fim, chegarmos a um elemento e^* e $m = 1$, temos que $e^* \in S_0$ e $e^* \notin S_1$. Isto é,

$$e^* \notin \mathcal{F}(I_{i(1)}, S_0, M_{i(1)}) = S_1.$$

Logo, como $I_{i(1)} \cap S_0 = I_{i(1)}$, $I_{i(1)} \cup e^*$ é independente. Acrescentamos e^* ao $I_{i(1)}$ e, assim, terminamos a Fase 2.

Encerra-se, também, a prova do Teorema 2.1.

2.4 ALGUMAS APLICAÇÕES

Traremos poucas aplicações aqui, porquanto nosso interesse maior é aplicar partição de matróides na busca de conjuntos co-geradores maximais.

Lembramos que, dado um grafo G e um subconjunto de suas arestas X, a restrição de G a X, denotada por $G|X$, é o subgrafo consistindo das arestas de X e todos os vértices de G.

Definição 2.12 (Matróide Gráfica) *Seja G um multigrafo. Tome o conjunto das arestas de G, $E(G)$, como sendo o conjunto de elementos E, e o conjunto $F = \{X \subseteq E : G|X$ é uma floresta$\}$. Então (E, F) é uma matróide denotada por $M(G)$ e dita a matróide gráfica associada G.*

O Teorema 2.1 implica este teorema de Nash-Williams [NW64], olhando para a matróide gráfica associada ao grafo G.

Teorema 2.2 (Nash-Williams) *O conjunto de arestas de um grafo G pode ser particionado em k florestas se e somente se não há qualquer subconjunto U de vértices em G tal que, onde E_U é o conjunto de arestas em G com ambos os vértices em U,*

$$|E_U| > k.(|U| - 1).$$

Este teorema segue do Teorema 2.1 usando a definição da função posto de um grafo dada por Whitney:

Definição 2.13 (Posto numa matróide gráfica) *O posto $r(X)$ de algum subconjunto X de arestas em G, isto é, o posto do subconjunto correspondente a X na matróide, é igual ao número de vértices menos o número de componentes conexas no subgrafo consistindo das arestas de X e os vértices que elas encontram ou, equivalentemente, no subgrafo consistindo das arestas de X e todos os vértices em G.*

Prova (Do Teorema 2.2) Observe que no enunciado do Teorema 2.1 no caso particular onde as matróides M_i's são a mesma matróide M, a partição é possível se e somente se não há qualquer conjunto A de elementos tal que $|A| > k.r(A)$. No caso da matróide gráfica associada a G, poderíamos, dada a definição de posto em G, escrever esta desigualdade assim:

$$|E_U| > k.(|U| - n),$$

onde n é o número de componentes conexas no subgrafo, digamos G_U, formado pelas arestas em E_U e os vértices em U. Mas existe um conjunto E_U como descrito somente se pelo menos uma das componentes conexas de G_U, chamemos o conjunto de suas arestas de E_W e o conjunto de seus vértices de W, possui mais arestas que $k.(|W| - 1)$. E se existe um subgrafo conexo em G, digamos G_W, tal que $|E_W| > k.(|W| - 1)$, onde E_W é o seu conjunto de arestas e W o conjunto de vértices, ele satisfaz a desigualdade para $n = 1$. Provando-se assim o teorema. ∎

Passemos à segunda aplicação.

Relativo a alguma família $\{M_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, de sistemas de independência, $M_i = (E, F_i)$, no mesmo conjunto E, um conjunto $H \subseteq E$ é chamado *particionável* se ele pode ser expresso na forma $H = I_1 \cup \ldots \cup I_j$, onde $I_i \in F_i$. Podemos, sem impor restrições, requerer que estes H's sejam mutuamente disjuntos. Tome F denotando a família de subconjuntos H de E, os quais são particionáveis relativo a $\{M_i\}$. $M = (E, F)$ é um sistema de independência que é denotado como $M = \sum_i M_i$ e chamado a *soma dos sistemas M_i*.

Esta soma é associativa, comutativa e tem um único elemento identidade ($\emptyset$). Então, os sistemas de independência sobre um conjunto E formam um semigrupo abeliano, digamos $\mathcal{G}$, sob esta operação. O teorema seguinte mostra que todas as matróides num conjunto E formam um sub-semigrupo de $\mathcal{G}$.

Teorema 2.3 *Sejam M_i's matróides; então, $\sum_i M_i$ é uma matróide.*

Prova Precisamos provar apenas que esta sistema satisfaz o axioma ($I3$) de matróide.

Seja X um subconjunto qualquer de E e seja $H \subseteq F$, um subconjunto particionável maximal de X.

Tomando este H como sendo o H do algoritmo de partição de matróide, temos um certo conjunto S_n tal que

$$|H \cap S_n| = \sum_i r_i(S_n).$$

Foi mostrado na Fase 1 do algoritmo que, para qualquer $e \in S_n - H$, o conjunto $H \cup e$ não é particionável. Então, H é um subconjunto particionável maximal de $H \cup S_n$. Devemos mostrar o fato mais forte de que H é um subconjunto particionável com máxima cardinalidade de $H \cup S_n$. Isto é, para qualquer subconjunto particionável H' de $H \cup S_n$, $|H'| \leq |H|$.

Como $H' \subseteq H \cup S_n$, temos que

$$|H' - S_n| \leq |H - S_n|.$$

E desde que H' é particionável, usando a parte "somente se" do Teorema 2.1, obtemos

$$|H' \cap S_n| \leq \sum_i r_i(H' \cap S_n) \leq \sum_i(S_n) = |H \cap S_n|.$$

Estas duas inequações juntas garantem que $|H'| \leq |H|$. Assim, H é um subconjunto particionável maximal de $H \cup S_n$ com máxima cardinalidade.

Mas H também é um subconjunto particionável maximal de X. A Fase 2 do algoritmo de partição de matróides mostra que, para qualquer $e \in E - (H \cup S_n)$, o conjunto $H \cup e$ é particionável. Portanto, $X \subseteq H \cup S_n$. Daí, H é subconjunto particionável com máxima cardinalidade de X, tanto quanto de $H \cup S_n$. Logo, o sistema M satisfaz o axioma (I3) de matróide, e o teorema está provado. ▮

CAPÍTULO 3

BRIDGE-IT E CONJUNTOS CO-GERADORES

O switching game de Shannon é jogado num grafo não direcionado com dois vértices distinguidos. Os jogadores são chamados de "cut player" e "short player". Eles apontam arestas alternadamente, diferentes das que já foram apontadas: o cut player apontando arestas para remoção e o short player tornando-as invulneráveis para isto. O short player ganha quando consegue, dentre as arestas que apontou, formar um caminho ligando os vértices distinguidos e o cut player ganha se consegue impedir; isto é, o conjunto de arestas que foram apontadas por ele formam um conjunto separador dos vértices distinguidos.

As jogadas do short player podem ser vistas como uma contração da aresta apontada. Assim, ele ganha quando os vértices distinguidos são identificados. A aresta que os liga torna-se um laço.

O jogo correspondente numa matróide M, formulado por Lehman [Leh64], tem um distinguido elemento e, que não deve ser apontado. O cut player joga primeiro e as jogadas se alternam. O short player ganha se o conjunto de elementos que apontou gera o elemento e e o cut player ganha se o conjunto de elementos que não foram apontados por ele, diferentes de e, não pode gerar o elemento e.

Considerando que o cut player joga primeiro. Se é possível ao short player ganhar indo contra alguma estratégia do cut player, Lehman chama o jogo de "short game". Jack Edmonds chama o jogo de "nonshort game" se o cut player pode vencer indo contra alguma estratégia do short player. É certo que um jogo só pode ser de um ou outro tipo.

Se olharmos agora para a rede vermelha do jogo Bridge-it como um grafo G e identificarmos os vértices de cima num, digamos v', chamado terminal, da mesma forma, os de baixo noutro terminal, v'', teremos um switching game em G (Figura 3.1); ou um jogo na matróide gráfica $M(G \cup e)$ onde o elemento e é definido como uma aresta que liga um vértice terminal ao outro (esta aresta pode já estar contida no grafo, sem que possa ser apontada). Como as arestas verdes cruzam as vermelhas de forma biunívoca, as jogadas do jogador verde correspondem ao apontar de arestas vermelhas no grafo G para serem removidas. Mais tarde, veremos que o Bridge-it é um nonshort game.

Neste capítulo trataremos mais geralmente dos jogos sobre matróides, sabendo que o Bridge-it pode ser analisado como um caso particular.

A idéia de conjuntos co-geradores é uma idéia fundamental na teoria Lehman.

Para um grafo G conexo, as arestas de um subgrafo conexo que contém todos os vértices de G corresponde a um conjunto gerador de uma matróide $M(G)$, e vice-versa.

Um teorema dado independentemente por Tutte [Tut61] e Nash-Williams [NW61] caracteriza para qualquer grafo G o máximo número de subgrafos disjuntos (quanto às arestas), cada um conexo e conectando todos os vértices de G, até os quais o conjunto de arestas de G pode ser particionado. Ou seja, o máximo número de subconjuntos

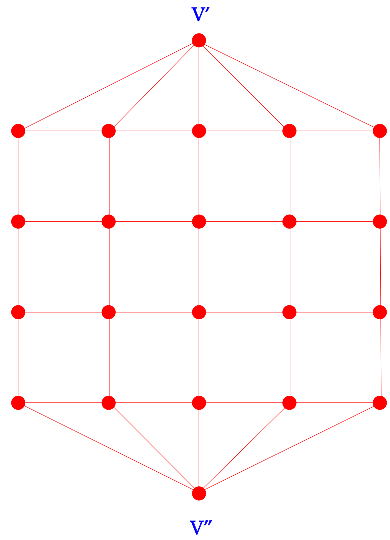


Figura 3.1. Grafo associado a um jogo Bridge-it. Os vértices distinguidos no grafo para o jogo de Shannon são v' e v''.

disjuntos, co-geradores, e geradores de G, nos quais o conjunto de arestas de G pode ser particionado.

Fazendo uma ponte entre este teorema e a teoria de Lehman sobre o jogo em matróides, Jack Edmonds acrescentou à teoria de matróides o chamado "Cospanning-sets theorem". Para um grafo G com um prescrito número de vértices chamados terminais, olhando para a matróide gráfica associada a G mais um conjunto conexo de novas arestas interligando estes vértices, ele dá uma "boa" caracterização para a não existência de k subgrafos conexos disjuntos (por exemplo árvores) todos com precisamente o mesmo conjunto de vértices os quais incluem os terminais.

3.1 MENORES E LEMAS

Definição 3.1 (Restrição de M a X) *Sejam $M = (E, F)$ uma matróide e $X \subseteq E$. Seja $F \mid X = \{I \subseteq X : I \in F\}$. O par $(E, F \mid X)$ é uma matróide chamada de restrição de M a X ou a remoção de $E - X$ de M, denotada por $M \mid X$ ou $M \backslash (E - X)$.*

Quando $E - X = \{e\}$, dizemos que foi feita a operação *remoção de e em M*, obtendo a matróide $M \backslash e$. A matróide $M \backslash X$ equivale a aplicar a operação remoção para cada $e \in X$, numa ordem qualquer.

Seja X qualquer conjunto de elementos numa matróide M, defina os circuitos de $M \times X$ como as intersecções não vazias minimais de X com os circuitos de M. Estes circuitos são usados por Tutte para um importante conceito: *a contração de M para X.*

Proposição 3.1 (Contração de M para X) *O conjunto de elementos de X e os circuitos de $M \times X$ definem uma matróide, denotada por $M \times X$, chamada a contração de M para X.*

Prova Os axiomas (C1) e (C2) são satisfeitos pelos circuitos de $M \times X$ pois são intersecções *não vazias e minimais* de X com os circuitos de M. Resta provar (C3).

Sejam C_1 e C_2 diferentes circuitos de $M \times X$, com $e \in C_1 \cap C_2$. Por definição, existem circuitos C'_1 e C'_2 de M tais que $C_i = C'_i \cap X$, $i \in \{1, 2\}$, é minimal no conjunto das intersecções de circuitos de M com X. Como existe $f \in M \times X$ tal que $f \in C_1 - C_2$, $f \in C'_1 - C'_2$. Adicionalmente, como $e \in C'_1 \cap C'_2$ também, pela Proposição 2.4, existe circuito C' de M tal que $f \in C' \subseteq C'_1 \cup C'_2 - e$. Mas, então $f \in C' \cap X$, a intersecção é não vazia. Dado que $C_i = C'_i \cap X$, $i \in \{1, 2\}$, é minimal no conjunto das intersecções de circuitos de M com X, a intersecção $C = C' \cap X$ é também minimal. Logo, C é um circuito de $M \times X$ e $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$. Provando (C3). ∎

Esta matróide também pode ser dita a *contração de $E - X$ em M*, e denotada por $M/(E-X)$. Quando $E-X = \{e\}$ dizemos que foi feita a operação *contração de e em M*, obtendo a matróide M/e. A matróide M/X, *contração de X em M*, equivale a aplicar a operação contração para cada $e \in X$, numa ordem qualquer.

Observe que, sendo e um elemento de uma matróide M tal que $r(e) \neq 0$, os elementos de $M \backslash e$ e M/e são os mesmos, $E - \{e\}$; mas os independentes de $M \backslash e$ são os independentes I de M tal que $e \notin I$, e os de M/e são os conjuntos $I - e$, tais que $e \in I$ e I é independente de M.

Na segunda matróide, $M/e = M \times (E - e)$, se justifica por: sendo I um independente de M, no caso de $e \in I$, para que existisse um circuito C de M/e tal que $C \subseteq I - e$, deveria existir um circuito C' de M tal que a intersecção $C = C' \cap (E-e)$ é minimal e está contida em $I - e$, o que equivale a $C' \subseteq I$ já que $e \in I$, um absurdo pois I é independente em M, logo $I - e$ é independente em M/e; agora se $e \notin I$, ou $I \cup e$ é independente em M e portanto foi contemplado no caso anterior, ou $I \cup e$ é dependente em M (contém um circuito C') e a intersecção $I \cap (E - e) = I$ contém um circuito $C \subseteq C' \cap (E - e)$ de M/e, não é independente em M/e.

No caso em que $r(e) = 0$ em M, $M \backslash e = M/e$, possuem os mesmos elementos $E - e$ e os independentes são os mesmos de M.

Corolário 3.1 *Onde X e X^c são subconjuntos complementares de uma matróide M, X^c é fechado em M se e somente se a matróide $M \times X$ não contém* laços, *que são elementos de posto zero.*

Prova Um laço, por definição, é um elemento dependente minimal, um circuito. Portanto, há um laço e na matróide $M \times X$ se e somente se há um circuito C de M tal que sua intersecção com X é minimal e igual a e. Como $C \cap X = \{e\}$ significa que $e \in C$ e $C - e \subseteq X^c$, equivale a $e \in \mathcal{F}(X^c)$ e $e \notin X^c$. Isto é, $\mathcal{F}(X^c) \neq X^c$, X^c não é fechado. ∎

Sobre os conjuntos geradores de $M \times X$, temos:

Proposição 3.2 *Sejam K e X subconjuntos de uma matróide M. Um subconjunto T' de X gera $K \cap X$ em $M \times X$ se e somente se há um subconjunto T de M tal que $T' = T \cap X$ e tal que T gera K em M.*

Corolário 3.2 *Os conjuntos geradores da matróide $M \times X$ são precisamente as intersecções de X com os conjuntos geradores de M.*

Prova (Da Proposição 3.2) Provemos a suficiência. Seja T um subconjunto de M tal que T gera K em M. Considere $T' = T \cap X$. Como T gera K, para qualquer elemento e em $K \cap X$, ou $e \in T$ ou há um circuito C de M tal que $e \in C$ e $C - e \subseteq T$. Se $e \in T$, então $e \in T'$ e portanto T' gera e. Se há um circuito C como dito, então, por definição de $M \times X$, há um circuito C' de $M \times X$ tal que $e \in C' \subseteq C \cap X$. Daí segue que $C' - e \subseteq T'$ e portanto T' gera e em $M \times X$. Assim, está provada a suficiência.

Agora, seja T' um subconjunto de X gerando $K \cap X$ em $M \times X$. Tome $T = T' \cup X^c$ onde X^c é o complementar de X em M. Então $T' = T \cap X$. Seja e um elemento de K. Se $e \in T$, então T gera e em M. De outro modo, se $e \notin T$, então $e \in K \cap X$ e $e \notin T'$. Desde que T' gera e em $M \times X$, há um circuito C' de $M \times X$ tal que $e \in C'$ e $C' - e \subseteq T'$. Por definição de $M \times X$, há um circuito C de M tal que $C' = C \cap X$. Como $e \in C$ e $C - e \subseteq T$, T gera e em M. E está provada a necessidade. ▮

Proposição 3.3 *As operações de remoção de certos elementos junto com as operações de contração de certos outros elementos em uma matróide são associativas e comutativas.*

As provas da Proposição 3.3 e da Proposição 3.4 serão dadas mais tarde, no próximo capítulo. Por enquanto, assumamos a veracidade delas.

Proposição 3.4 *Se X e X^c são conjuntos complementares de elementos em M, então os elementos de uma base de $M \times X$ junto com os elementos de uma base de $M \mid X^c$ formam uma base de M.*

O seguinte corolário decorre da Proposição 3.4 e da definição de posto.

Corolário 3.3 *Se X e X^c são conjuntos complementares de elementos em $M = (E, F)$, então $r_{M|X}(X) + r_{M \times X^c}(E - X) = r_M(E)$.*

Uma matróide obtida de outra pelas operações de remoção e contração de elementos tem uma nomenclatura especial:

Definição 3.2 (Menor) *Seja $M = (E, F)$ uma matróide e sejam X e Y subconjuntos disjuntos de E. Diremos que $M \backslash X / Y$ é um menor de M, onde $M \backslash X / Y$ é obtido da matróide M pela remoção dos elementos em X e contração dos elementos em Y.*

3.2 SHORT GAMES

Jack Edmonds generalizou o jogo no caso de um grafo G assim: algum subconjunto de vértices de G é distinguido como terminais e a vitória do short player é apontar um conjunto de arestas em G, o qual contém as arestas de um subgrafo conexo contendo todos os terminais; a vitória do cut player é impedir isso. Para analisar o jogo correspondente em termos de matróide, adiciona-se a G um conjunto de novas arestas as quais formam um grafo conexo K contendo precisamente os vértices terminais de G como vértices. Então, dada a matróide gráfica associada a $G \cup K$, $M(G \cup K)$, a vitória do short player é apontar um conjunto de elementos correspondentes às arestas em G os quais geram em $M(G \cup K)$ o conjunto de elementos correspondentes as arestas de K.

Para qualquer matróide M e não vazios subconjuntos de elementos N e K, considere o jogo $\mathcal{J}(M, N, K)$ onde, como antes, o cut player e o short player apontam alternadamente elementos diferentes no conjunto N, o cut player jogando primeiro. O short player vence se aponta um conjunto de elementos os quais geram K. Impedindo isto, vence o cut player. $\mathcal{J}(M, N, K)$ é chamado um *short game* se o short player pode vencer indo contra qualquer estratégia do cut player.

O principal teorema de Lehman é, para o caso onde K é um elemento simples, este que passamos a apresentar:

Teorema 3.1 *$\mathcal{J}(M, N, K)$ é um short game se e somente se N contém dois conjuntos de elementos, A e B, disjuntos, os quais geram cada um o outro e os quais geram K.*

Lehman chama dois ou mais conjuntos os quais geram cada um ao outro de co-geradores.

Prova (*Da suficiência*) Suponhamos que existam dois conjuntos co-geradores disjuntos, A e B, os quais geram K. Provaremos que estes providenciam uma estratégia vencedora para o short player.

Consideremos o fecho $M_0 = \mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ em M. Nós podemos tomar A e B bases da submatróide formada pelos elementos de M_0, $\mathcal{M}_0 = M \mid M_0$, assuma que eles são. Suponha que o cut player aponta um elemento de $A \cup B$. Ele poderia apontar um elemento não neste conjunto, mas pretender que ele aponte um elemento em $A \cup B$ não dá qualquer vantagem ao short player. Assim, digamos que o cut player apontou um elemento a_0 em A.

Pelo axioma (I3) da definição de matróide há um elemento b_0 de B tal que $(A - a_0) \cup b_0$ é uma base de $\mathcal{M}_0$. O short player irá, então, apontar um elemento b_0. Segue da Proposição 3.2 que os conjuntos $A_1 = A - a_0$ e $B_1 = B - b_0$, disjuntos, são conjuntos geradores da matróide contração de $\mathcal{M}_0$ para $M_1 = M_0 - b_0$, a chamemos de $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 / b_0$.

Como é novamente vez do cut player jogar, a situação de A_1 e B_1 relativa à matróide $\mathcal{M}_1$ é a mesma que foi para A e B com relação a $\mathcal{M}_0$, exceto que $\mathcal{M}_1$ é menor. Assumindo que há uma estratégia para os turnos seguintes através da qual o short player pode apontar um conjunto de elementos o qual contém uma base T da reduzida matróide $\mathcal{M}_1$, pela Proposição 3.4 o conjunto $T \cup b_0$ de elementos, os quais o short player terá apontado, é uma base da matróide $\mathcal{M}_0$ e portanto gera o conjunto K na matróide M.

Quando B contém apenas um elemento b_0, ele próprio gera M_0 e K. Daí, por indução no número de elementos que é finito, nós temos uma estratégia vencedora para o short player. ▮

A prova da *necessidade* segue do Teorema 3.2 e do Teorema 3.3.

Observe que quando o jogo é num grafo com dois vértices terminais, o short player deseja dar um caminho ligando os vértices terminais. A estrutura que caracteriza quando isso é possível é formada por duas árvores disjuntas (quanto as arestas) contendo os vértices terminais e cada uma contendo precisamente os mesmos vértices que a outra.

3.3 NONSHORT GAMES

Um jogo $\mathcal{J}(M, N, K)$, como definido na seção anterior, é dito ser um nonshort game, nomenclatura de J. Edmonds, se o cut player pode vencer contra qualquer estratégia do short player.

Jack Edmonds deu uma caracterização para um jogo ser um nonshort game através do Teorema 3.2. Diferentemente de Lehman que usava principalmente dualidade, ele utilizou mais a noção de contração.

Denotaremos o conjunto de elementos da matróide contração M' de M por E', donde $M' = M \times E'$.

Teorema 3.2 *$\mathcal{J}(M, N, K)$ é um nonshort game se e somente se há uma matróide contração M' da matróide M onde o conjunto $N' = N \cap E'$ pode ser particionado em dois conjuntos I_1 e I_2 tal que I_1 e I_2 são ambos independentes em M' e tal que I_2 não gera o conjunto $K' = K \cap E'$ em M'.*

Para o short player vencer ele precisa apontar um conjunto, digamos T, o qual gera K na matróide M. Pela Proposição 3.2, para um tal conjunto T e qualquer conjunto $E^{(n)}$ em M, $T \cap E^{(n)}$ precisa gerar $K^{(n)} = K \cap E^{(n)}$ na matróide contração $M^{(n)} = M \times E^{(n)}$. A prova de que $\mathcal{J}(M, N, K)$ é um nonshort game nas hipóteses acima será feita mostrando que, dada qualquer estratégia do short player, há uma maneira pela qual o cut player consegue jogando em E' obter um conjunto $E^{(h)}$ onde o short player não pode apontar qualquer conjunto de elementos que gerem $K^{(h)}$ em $M^{(h)}$.

Prova (*Da suficiência*) Sejam M', I_1 e I_2 como descritos acima. Verificaremos que eles conduzem a uma estratégia vencedora para o cut player no jogo $\mathcal{J}(M, N, K)$.

Se I_1 não gera K' em M', então o cut player pode apontar qualquer elemento no primeiro lance. Do contrário, ele deve apontar algum elemento e_1 em I_1 tal que $I_1 - e_1$ não gera K' em M'.

Como I_2 não gera K', há algum elemento $e \in K'$ tal que $r(e) \neq 0$, e não é um laço. Se $e \in I_1$, então e é um elemento e_1. De outro modo, como I_1 gera e, pelo Lema 2.4 há um *único* circuito $C \subseteq I \cup e$ e então qualquer elemento de $C - e$ é um elemento e_1 ($C - e \neq \emptyset$ pois $r(e) \neq 0$). Neste ponto, nem os elementos não apontados $I_1' = I_1 - e_1$ de I_1 nem os elementos não apontados $I_2' = I_2$ geram K' na matróide contração M'.

O short player pode apontar um elemento não em E', mas se ele aponta um elemento em E' o cut player não obtém qualquer vantagem adicional. Portanto, assumamos que o short player apontou algum elemento em E', digamos $e_2 \in I_2'$. Considere a matróide contração de M para $E' - e_2$, $M'' = M'/e_2$ (pela Proposição 3.3, a matróide contração de M' para o conjunto $E'' = E' - e_2$ é a mesma matróide contração de M para o conjunto E''). Pela definição de circuito da matróide contração, ou melhor, pela observação feita sobre os conjuntos independentes da matróide contração, o conjunto $I_2'' = I_2' - e_2$ será independente em M'' e não irá gerar o conjunto $K'' = K' \cap E''$ em M'', já que o elemento $e \in K''$ e continua não sendo gerado.

Ainda pela definição de matróide contração, se e_2 não está no fecho de I_1' em M', então I_1' é independente em M''. Neste caso, o cut player irá apontar algum elemento e_1'

tal que $I_1'' = I_1' - e_1'$ não gera K'' em M''.

Agora, se $e_2 \in \mathcal{F}_{M'}(I_1')$, pela definição de matróide contração e pela Proposição 2.4, então o conjunto I_1' contém apenas um circuito da matróide contração M'' e não gera K'' em M''. E neste caso, o cut player irá apontar algum elemento e_1' no circuito de I_1' em M'', obtendo assim que $I_1'' = I_1' - e_1'$ é independente em M''.

Em ambos os casos, depois do cut player fazer sua segunda jogada, os não apontados elementos de M'' particionam-se em I_1'' e I_2'' onde, na matróide M'', ambos são independentes e nenhum gera K''. E não há qualquer elemento apontado pelo short player em M''. A situação é idêntica à que tínhamos com M', I_1' e I_2', logo após a primeira jogada do cut player, exceto pelo fato de M'' ter menos elementos não apontados.

Portanto, por indução no número de elementos não apontados na matróide contração, se o cut player aponta como descrito, em algum momento ele encontrará uma matróide contração $M^{(h)}$ na qual todos os elementos apontáveis (os que estão em $N^{(h)}$) foram apontados por ele e para qual há um elemento $e \in K^{(h)} = K \cap E^{(h)}$ tal que $r(e) \neq 0$ em $M^{(h)}$ (pois $K^{(h)}$ não é gerado pelo conjunto vazio $I_1^{(h)}$ nem pelo vazio $I_2^{(h)}$ em $M^{(h)}$). O cut player venceu o jogo, porque para o short player vencer precisa apontar um conjunto, digamos T, o qual gera K na matróide M. E pela Proposição 3.2 para um tal conjunto T e qualquer conjunto $E^{(h)}$ em M, $T \cap E^{(h)}$ precisa gerar $K^{(h)}$ na matróide $M^{(h)}$, o que é impossível. Isto prova a suficiência. ∎

A prova da *necessidade* será dada através do Teorema 3.1 e do Teorema 3.3.

3.4 SOBRE O COSPANNING-SETS THEOREM

Novamente denotaremos o conjunto de elementos da matróide contração M' de M por E', onde $M' = M \times E'$. E quando nos referirmos à *partição* de um conjunto $X \subset E$, dada uma matróide $M = (E, F)$, estamos fazendo referência à partição dos elementos de $M \mid X$.

Teorema 3.3 (Jack Edmonds) *Para qualquer matróide M e quaisquer subconjuntos N e K de elementos em M, existem k subconjuntos disjuntos de N, os quais geram cada um o outro, os quais geram K, se e somente se não há uma matróide contração M' de M onde $N \cap E'$ particiona-se em k conjuntos tais que cada um é independente em M' e tal que pelo menos um deles não gera $K \cap E'$.*

Considere que este teorema diz "$P \Leftrightarrow \sim Q$". A prova da *necessidade* nos teoremas Teorema 3.1 e Teorema 3.2 segue imediatamente deste teorema (para o caso onde $k = 2$), pois já provamos que "$P \Rightarrow$ ($\mathcal{J}$ é um short game)" e que "$Q \Rightarrow$ ($\mathcal{J}$ não é um short game)". Provando "$P \Leftrightarrow \sim Q$", obtemos que "($\mathcal{J}$ é um short game) $\Rightarrow P$" e que "($\mathcal{J}$ não é um short game)$\Rightarrow Q$.

Prova Provemos primeiro a *necessidade*. Suponha que existam k subconjuntos disjuntos de N os quais são co-geradores e geram K, digamos os conjuntos T_i $(i = 1, ..., k)$. Digamos também que $\mathcal{F}_M(T_i) = S$. Seja M' alguma matróide contração de M, $M' = M \times E'$. A Proposição 3.2 nos diz que cada $T_i' = T_i \cap E'$ $(i = 1, ..., k)$ é um conjunto gerador de $S' = S \cap E'$ em M'. Então, $|T_i'| \geq r_{M'}(S')$, pois cada T_i' deve conter pelo menos uma base

B_i de $M' \mid S'$, a submatróide de M' formada pelos elementos de S'. Desde que todos os conjuntos T_i' são mutuamente disjuntos, temos que

$$|N \cap S'| = |N \cap E' \cap S'| \geq |(\bigcup_i T_i') \cap S'| = \bigcup_i |T_i' \cap S'| \geq \bigcup_i |B_i| = k.r_{M'}(S'),$$

isto é,

$$|N \cap S'| \geq k.r_{M'}(S').$$

Então, não pode haver uma partição de $N \cap E'$ em k conjuntos independentes I_i de M', onde pelo menos um deles, digamos I_k, não gera $K \cap E'$, e portanto não gera S'. Isto porque, neste caso, como cada $I_i' = I_i \cap S'$ seria independente, $|I_i'| \leq r_{M'}(S')$. Como I_k' não geraria S' em M', $|I_k'| < r_{M'}(S')$. Daí teríamos:

$$|N \cap S'| = |N \cap E' \cap S'| = \bigcup_i |I_i \cap S'| = \bigcup_i |I_i'| < k.r_{M'}(S'),$$

uma contradição.

Agora provemos a *suficiência*. Sejam M uma matróide, N e K subconjuntos quaisquer de elementos de M, e k algum inteiro positivo.

Suponha que A_0 é um subconjunto maximal de N tal que

$$|A_0| = k.r(A_0) \text{ e } |A| \leq k.r(A) \text{ para todo } A \subseteq A_0.$$

Pelo Teorema 2.1, A_0 particiona-se em k conjuntos independentes, I_i $(i = 1, \ldots, k)$. Como $|A_0| = k.r(A_0)$, cada I_i é necessariamente uma base da submatróide $M \mid A_0$ e conseqüentemente de $M \mid \mathcal{F}_M(A_0)$. Do contrário, se um independente destes, digamos I_j, tivesse menos do que $r(A_0)$ elementos, não sendo assim um conjunto independente maximal (uma base), por $|A_0| = k.r(A_0)$, algum I_l deveria ter mais do que $r(A_0)$ elementos, um absurdo já que I_l é independente em $M \mid A_0$.

Seja M' a matróide contração de M dada por $M' = M/\mathcal{F}(A_0)$. Suponha que existe um subconjunto não vazio $A_1 \subseteq N' = N \cap E'$ tal que $|A_1| = k.r_{M'}(A_1)$ e $|A| \leq k.r_{M'}(A)$ para todo $A \subseteq A_1$. Como A_0 de M, A_1 se particiona em k bases I_i' da submatróide $M' \mid A_1$. Pela Proposição 3.3, a submatróide $M' \mid A_1$ é a mesma matróide contração $(M \mid (A_1 \cup \mathcal{F}(A_0))) \times A_1$. Denotaremos este menor $(M \mid (A_1 \cup \mathcal{F}(A_0))) \times A_1$ por $\mathcal{A}_1$. Pela Proposição 3.4, uma base do $\mathcal{A}_1$ junto com uma base da submatróide $M \mid \mathcal{F}(A_0)$ é uma base da submatróide $M \mid (A_1 \cup \mathcal{F}(A_0))$.

Em particular, os conjuntos $I_i'' = I_i' \cup I_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ são k bases para a submatróide $M \mid (A_1 \cup \mathcal{F}(A_0))$. Temos que $\bigcup_i I_i'' = A_0 \cup A_1 \subseteq N$, os conjuntos I_i'' geram cada um o outro em M, $|A_0 \cup A_1| = k.r(A_0 \cup A_1)$ e, pela parte "somente se" do Teorema 2.1, dado que $A_0 \cup A_1$ é particionável, $|A| \leq k.r(A)$ para todo $A \subseteq A_0 \cup A_1$. Mas como A_0 foi tomado maximal para estas propriedades, A_1 é vazio. E a matróide M' não contém qualquer conjunto não vazio A_1 como definido.

Desde que $\mathcal{F}(A_0)$ é fechado em M, a matróide $M' = M/\mathcal{F}(A_0)$ não contém laços, isto é, elementos de posto zero (Corolário 3.1). Suponha que existe $A_2 \subseteq N'$ tal que $|A_2| \geq k.r_{M'}(A_2)$. Tome A_2 minimal com estas propriedades. Pela não existência em M' de um conjunto não vazio A_1 como descrito acima, temos que $|A_2| > k.r_{M'}(A_2)$. E como não há elementos de posto zero, A_2 contém pelo menos dois elementos. Removendo um elemento de A_2, em M', obtemos o não vazio A_3 para o qual $|A_3| \geq k.r_{M'}(A_2) \geq k.r_{M'}(A_3)$, contradizendo a minimalidade de A_2. Portanto, para todo não vazio subconjunto A de N', $|A| < k.r_{M'}(A)$.

Suponha que algum elemento $g \in K$ está contido em E'. Desde que g não tem posto zero, há uma matróide M_h, a qual contém os elementos de M' mais um elemento dito "*paralelo*" h, tal que h e g formam um circuito em M_h e tal que $M_h \backslash h = M'$. Observe que os circuitos de M_h são os circuitos de M', o circuito formado por h e g, mais os conjuntos $(C-g) \cup h$, onde $g \in C$ e C é um circuito de M'. Seja $N_h = N' \cup h$. Segue da relação $|A| < k.r_{M'}(A)$ para todo $A \subseteq N'$ não vazio, que $|A_h| \leq k.r_{M_h}(A_h)$ para todo $A_h \subseteq N_h$.

Portanto, pelo Teorema 2.1, N_h pode ser particionado em k conjuntos independentes I_i^h de M_h, incluindo entre estes o conjunto dito I_1^h, o qual contém h (e, portanto, não contém g pois é independente). Na matróide M' o conjunto $I_1^h - h$ é independente e não gera g. Se $I_1^h - h$ gerasse g, desde que $g \notin I_1^h$, existiria um circuito C de M' tal que $g \in C$ e $C - g \in I_1^h$, uma contradição com o fato de I_1^h ser independente em M' dado que $(C-g) \cup h$ é circuito de M^h e está contido em I^h. Todos os outros conjuntos são independentes em M'. Estes conjuntos I_i^h $(i = 2, \ldots, k)$ e $I_1^h - h$ são uma partição de N'.

Daí, se não há uma tal partição de $N' = N \cap E'$ para a matróide contração M', então nenhum elemento de K está em M'. Logo, $K \subseteq \mathcal{F}(A_0)$. Neste caso, as k bases I_i da submatróide $M \mid \mathcal{F}(A_0)$ geram cada uma a outra e geram K em M. Isto prova a suficiência e conclui a prova do Teorema 3.3. ▮

Observe a Figura 3.2 e note que as arestas do grafo G associado ao tabuleiro de um jogo Bridge-it de tamanho quatro estão particionadas em dois conjuntos independentes (marcados na figura por linhas tracejadas e linhas cheias) onde um deles não liga os vértices terminais por um caminho. Conjuntos correspondentes a estes podem ser encontrados em todos os grafos associados a tabuleiros de Bridge-it de tamanho qualquer. Na matróide $M(G \cup e)$, os conjuntos de elementos correspondentes a estes conjuntos de arestas são uma partição de seus elementos, e um deles não gera e em $M(G \cup e)$. Considerando o jogo Bridge-it como $\mathcal{J}(M, N, K)$, onde $M = M(G \cup e)$, $N = E$ e $K = \{e\}$, pelo Teorema 3.3, com $k = 2$, analisando $M' = M/\emptyset$, temos que o Bridge-it é um nonshort game.

3.5 UM CONJUNTO ESTRATÉGICO

Pelo que vimos na seção anterior, dada uma matróide M, N e K subconjuntos de seus elementos, e k um inteiro positivo, encontrar o subconjunto $A_0 \subseteq N$ *maximal* com as seguintes propriedades

$$|A_0| = k.r(A_0) \text{ e } |A| \leq k.r(A) \text{ para todo } A \subseteq A_0$$

é essencial para determinar se um jogo $\mathcal{J}(M, N, K)$ é um short game ou um nonshort game (usando $k = 2$), assim como para determinar a estratégia do jogador favorecido (antepenúltima e penúltima seções).

Se o conjunto $\mathcal{F}(A_0) \supseteq K$, então temos "$P$", e no caso de $k = 2$, $\mathcal{J}(M, N, K)$ é um short game. Senão, existe $g \in K$ tal que $g \notin \mathcal{F}(A_0)$, portanto g não é um laço e $g \in M' = M/\mathcal{F}(A_0)$. Neste caso, o conjunto $N_h = N' \cup h$, onde h é um elemento

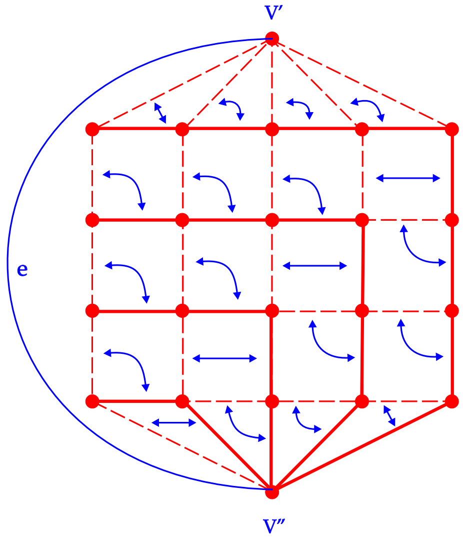


Figura 3.2. Partição de elementos na matróide associada ao Bridge-it e a estratégia de Gross. Observe que os elementos da árvore em traço cheio não geram o elemento e.

paralelo a g, pode ser particionado em k conjuntos I_i^h independentes em M_h (a matróide M' acrescida do elemento h), com $h \in I_1^h$. Conseqüentemente N' se particiona em $I_1^h - h$ e os I_i^h $(i \neq 1)$, satisfazendo "Q", e para $k = 2$ o jogo $\mathcal{J}(M, N, K)$ é um nonshort game.

Mas como encontrar este conjunto A_0 dada uma matróide M?

Jack Edmonds deixou nas entrelinhas da prova de seu Teorema 3.3 idéias que resultariam num algoritmo para encontrá-lo.

Antes de exibirmos o algoritmo, veremos um teorema que deve estabelecer em sua prova importantes diretrizes para o algoritmo.

Seja M uma matróide e e um elemento de M. Denotaremos por $M_{\hat{e}}$ a matróide cujos elementos são os elementos de M mais um elemento $\hat{e}$ dito paralelo a e, tal que e e $\hat{e}$ formam um circuito em $M_{\hat{e}}$ e $M_{\hat{e}} \backslash \hat{e} = M$.

Teorema 3.4 *Seja M uma matróide, N um subconjunto de elementos de M e k algum inteiro positivo. Denotamos por A_0 o subconjunto de N maximal com as seguintes propriedades: $|A_0| = k.r(A_0)$ e $|A| \leq k.r(A)$ para todo $A \subseteq A_0$; e por $\mathcal{N}$ o conjunto de todos os elementos e de N tal que $r(e) \neq 0$. Se $|\mathcal{N}| \geq k$,*

$$A_0 = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{N} \cup \hat{e} \text{ é particionável para qualquer } e \in \mathcal{N},$$

onde $\hat{e}$ é um elemento paralelo a e.

Prova Sabemos que qualquer que seja $e \in A_0$, $r(e) = 1$. Pois, se existisse e' em A_0 com $r(e') = 0$, teríamos que $A = \{e'\} \subseteq A_0$ e $|A| = 1 > 0 = k.r(A)$, contradizendo a definição de A_0. Logo, $A_0 \subseteq \mathcal{N}$.

Pelas propriedades de A_0 e pelo Teorema 2.1, temos que A_0 é particionável e que, por $|A_0| = k.r(A_0)$, esta partição é dada em bases de $M \mid A_0$. Daí, se $|\mathcal{N}| < k$, $A_0 = \emptyset$. Vem disto a hipótese de que $|\mathcal{N}| \geq k$.

Mostremos a *suficiência*: Se $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ é particionável para qualquer $e \in \mathcal{N}$, então $A_0 = \emptyset$.

Suponhamos que $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ é particionável para qualquer $e \in \mathcal{N}$ e $A_0 \neq \emptyset$. Seja $e \in A_0$. Daí, temos que

$$|A_0 \cup \hat{e}| = |A_0| + 1 > k.r(A_0) = k.r(A_0 \cup \hat{e}),$$

ou seja,

$$|A_0 \cup \hat{e}| > k.r(A_0 \cup \hat{e}),$$

um absurdo, pelo Teorema 2.1, já que $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ é particionável e $(A_0 \cup \hat{e}) \subseteq (\mathcal{N} \cup \hat{e})$. Portanto devemos ter $A_0 = \emptyset$.

Agora verifiquemos a *necessidade*: Se $A_0 = \emptyset$, então $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ é particionável para qualquer $e \in \mathcal{N}$.

Suponhamos que $A_0 = \emptyset$ e $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ não é particionável para algum $e \in \mathcal{N}$. Então, pelo Teorema 2.1, existe um conjunto fracasso $A \subseteq \mathcal{N} \cup \hat{e}$ tal que $|A| > k.r(A)$.

Como $\mathcal{N}$ não contém laços, $r(A) > 0$. Há pelo menos um independente $I \subseteq A$ tal que $r(I) = r(A)$. Seja $A' \subseteq A$, tal que $A' \subseteq N$ e $|A'| = k.r(A') = k.r(A)$. Este conjunto A' pode ser obtido de A retirando $|A| - k.r(A)$ elementos de A, preservando I. Como vamos retirar pelo menos um elemento, o primeiro deve ser sempre $\hat{e}$, se $\hat{e} \in A$.

Se aplicarmos novamente o algoritmo partição de matróides para A', particionaremos A' em k conjuntos independentes ou obteremos um conjunto de fracasso $A'' \subseteq A'$ tal que $|A''| > k.r(A'')$, com $r(A'') \neq 0$. No segundo caso, encontramos um $A''' \subseteq A''$ tal que $|A'''| = k.r(A''') = k.r(A'')$, da mesma forma que fizemos com A para encontrar A', e tentamos particioná-lo. Repetimos este processo até conseguir particionar um $A^{(h)}$. Como $|A^{(i-1)}| < |A^{(i)}|$, por indução no número de elementos de A que é finito, este processo acaba num último conjunto não vazio $A^{(n)}$ tal que $|A^{(n)}| = k.r(A^{(n)})$ e $A^{(n)}$ é particionável.

Como conseguimos particionar $A^{(n)}$, o Teorema 2.1 garante que para todo $X \subseteq A^{(n)}$ temos $|X| \leq k.r(X)$. E então, $A^{(n)}$ satisfaz as mesmas condições que A_0, exceto possivelmente a maximalidade. Daí, $A_0 \neq \emptyset$ necessariamente. Estabelece-se uma contradição. Portanto, se $A_0 = \emptyset$, temos necessariamente que $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ é particionável para qualquer $e \in \mathcal{N}$. ▮

3.5.1 Algoritmo para encontrar A_0

Seja $n = 0$.

Sejam M *uma matróide,* N *um subconjunto de elementos de* M*, e* k *um inteiro positivo. Seja* $\mathcal{N} \subseteq N$*, formado pelos elementos de* N *que não são laços.*

Se $|\mathcal{N}| > k$ *execute os passos seguintes. Senão, pare! Vá para o último passo.*

Para cada $e \in \mathcal{N}$*, aplique o algoritmo para partição de matróides para particionar os elementos de* $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ *em* k *subconjuntos independentes em* M*, até que para algum* $e \in \mathcal{N}$ *o algoritmo responda que não é possível fazê-lo, ou o tenha feito para todos os elementos de* $\mathcal{N}$.

Se conseguimos particionar $\mathcal{N} \cup \hat{e}$ para todos os elementos de $\mathcal{N}$.

Pare! Vá para o último passo.

Senão, seja A o conjunto fracasso obtido pelo algoritmo de partição. E seja $n = n+1$.

Seja $r = r(A)$ (um inteiro positivo).

Se $\hat{e} \in A$, retire $\hat{e}$ de A.

Retiremos ao todo $|A| - k.r$ elementos de A, mantendo um independente maximal, e obtendo assim B, tal que $|B| = k.r(B) = k.r$.

Aplique o algoritmo de partição de matróides para B.

Se não é possível particioná-lo, dado um conjunto fracasso B', faça $A = B'$, e repita o corpo deste passo.

Senão, seja $\{I_{nj}\}$ $(j = 1, ..., k)$ a família de bases de $M \mid B$ na qual B foi particionado, e seja $A_n = B$.

Obtenha o menor $M' = M/\mathcal{F}(B)$. E seja $N' = N \cup E'$, onde E' é o conjunto de elementos de M'. Observe que $\mathcal{N}' = N'$.

Faça a M' o mesmo que foi feito a M. Ou seja, a partir do segundo passo.

Retorno. O conjunto $A_0 = \emptyset$ se paramos no segundo ou no quarto passo da primeira iteração. Senão, tome o número de iterações n, seja $\mathcal{I}_j = \bigcup_{i=1}^{n} I_{ij}$ $(j = 1, \ldots, k)$ é uma base para $M \mid A_0$, e o conjunto $A_0 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{I}_j$. Além disso, a família $\{\mathcal{I}_j\}$ é uma partição de A_0 em bases de $M \mid A_0$.

Observe que se paramos no quarto passo da primeira iteração, o Teorema 3.4 garante que $A_0 = \emptyset$, mas se paramos neste passo numa outra iteração isto significa que um menor M' de M tem $A_0 = \emptyset$. Esta mesma conclusão é obtida ao parar no segundo passo em alguma iteração que não a primeira. Durante a prova do Teorema 3.3 vimos que se temos um conjunto A_1 com as propriedades de A_0 em M, exceto a maximalidade, e um outro conjunto, digamos A_2, de um menor $M' = M/\mathcal{F}(A_1)$ também com as mesmas propriedades de A_0 só que em M', a união deles, $A_1 \cup A_2$, preserva estas propriedades. Além disso, a Proposição 3.4 garante que a família $\{\mathcal{I}_j\}$ é uma família de bases de $M \mid A_0$, onde $A_0 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

CAPÍTULO 4

PROJETO BRIDGE-IT

Dado o algoritmo para encontrar A_0, estamos em condições de analisar um switching game, em particular o Bridge-it.

Mais ainda, com este algoritmo podemos implementar um projeto chamado Bridge-it onde, utilizando a teoria citada neste trabalho, o jogo pode ser jogado por duas pessoas, ou por uma pessoa e um computador (como segundo, pois como primeiro seria matematicamente invencível, dado que o jogo é um nonshort game).

Durante o jogo, o grafo associado ao tabuleiro e a seqüencia das jogadas são analisados e esta análise opcionalmente exibida ao final. Como esta análise é feita a medida que o jogo acontece, é possível, após algum tempo de jogo, mudar o tipo de jogadores como, por exemplo, o computador assumir o lugar de uma pessoa que estava jogando (e vice-versa).

Se ocorre a vitória do segundo jogador sabemos, pelas discussões anteriores, que o primeiro jogador certamente cometeu um "erro", dando a possibilidade ao oponente de jogando fazer com que o jogo lhe fosse favorável. Na análise do jogo, este momento é indicado.

As estratégias exibidas no capítulo anterior são utilizadas, contudo, para saber imediatamente ao lance se o primeiro jogador cometeu um erro, independente do segundo aproveitar ou não, nos utilizamos da análise do jogo na matróide dual.

Estas idéias ficarão mais claras à medida que forem tratadas no presente capítulo.

4.1 O TABULEIRO: UM GRAFO AUTO-DUAL

O grafo associado ao tabuleiro do jogo Bridge-it (Figura 3.1) acrescido da aresta e que liga os vértices terminais é um grafo auto-dual. E o seu dual é exatamente o grafo formado pela rede verde acrescida de uma aresta e'; veja a Figura 4.1 .

O tamanho do tabuleiro varia com os números inteiros positivos e corresponde a um grafo auto-dual numa lista crescente, quanto ao tamanho destes, de forma biunívoca. Assim, o tabuleiro de tamanho n corresponde a um grafo auto-dual $G(n)$.

Dado $n \geq 1$ inteiro, podemos construir o grafo genérico auto-dual $G(n)$, o qual possui número de vértices e número de arestas, respectivamente iguais a

$$|V| = 2 + n(n+1) \quad \text{e} \quad |E| = 1 + n^2 + (n+1)^2.$$

Estes podem ser descritos assim: dois vértices terminais, uma aresta distinguida e_0 que os liga; $n+1$ vértices por nível, em n níveis, n arestas horizontais em cada nível e $n-1$ arestas verticais por coluna, ligando estes; $n+1$ arestas em cada estrela, uma de cada vértice terminal, excetuando a já citada aresta e_0 (veja Figura 4.2).

Em nosso projeto, avaliamos a matróide gráfica $M(G(n))$ associada ao jogo; os elementos são correspondentes às arestas. Como as jogadas do short player são consideradas

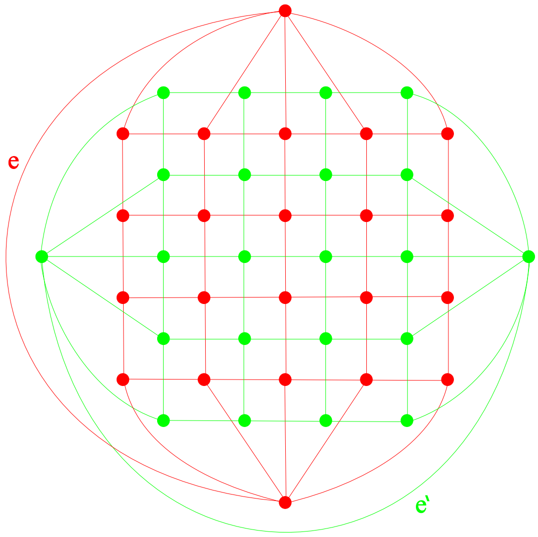


Figura 4.1. Grafo associado ao jogo Bridge-it(n = 4) mais a aresta e, e seu dual.

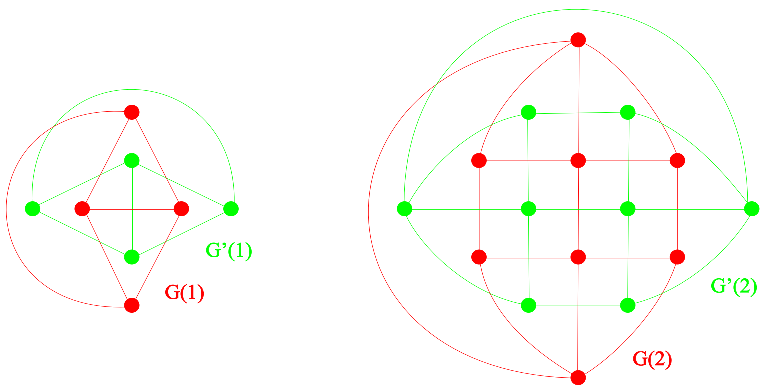


Figura 4.2. Grafos $G(1)$ e $G(2)$, e seus duais.

aqui contrações no grafo $G(n)$, e correspondem a operações de contração do elemento na matróide, usamos um rótulo e_j para cada aresta. Enumeramos os vértices, i, e as arestas e_j, a partir de zero, da esquerda para direita e de cima para baixo. As arestas de seu grafo dual $G'(n)$ são rotuladas de acordo com as arestas de $G(n)$, isto é, têm o mesmo rótulo da aresta que "atravessa".

Note que, pela dualidade em grafos, se o segundo jogador (o short player) aponta uma determinada aresta vermelha ele está contraindo esta aresta em $G(n)$, o que equivale a remover a aresta verde que cruza (com mesmo rótulo) no grafo dual $G'(n)$. E se uma determinada aresta verde é apontada pelo primeiro jogador (o cut player), a aresta vermelha que esta cruza (com mesmo rótulo) é removida em $G(n)$, e a verde que foi apontada é contraída em $G'(n)$.

Em matróides há uma noção de dualidade que estende a conhecida para grafos.

4.2 DUALIDADE EM MATRÓIDES

Vejamos algumas definições.

Definição 4.1 (Hiperplano) *Seja $M = (E, F)$ uma matróide. Um subconjunto H de seus elementos é dito ser um hiperplano de M quando H é* fechado *e $r(H) = r(E) - 1$.*

Definição 4.2 (Cocircuito) *Seja $M = (E, F)$ uma matróide. Diremos que C^* é um cocircuito de M quando $C^* = E - H$, para algum hiperplano H de M.*

Dadas estas definições, podemos definir matróide dual.

Teorema 4.1 *Seja $M = (E, F)$ uma matróide. O conjunto $\mathcal{C}^* = \{C^* \subseteq E : C^*$ é um cocircuito de $M\}$ é a família de circuitos de uma matróide denotada por M^* e dita uma matróide dual de M.*

Antes de provarmos isto, veremos uma proposição que será útil.

Proposição 4.1 *Seja X um subconjunto de elementos de M e I um independente qualquer em X. Temos que $\mathcal{F}(X) \supseteq \mathcal{F}(I)$.*

Prova (Da Proposição 4.1) A prova desta proposição decorre da Proposição 2.2, desde que I está contido em algum independente maximal J de X e, pela definição de fecho de um conjunto independente, $\mathcal{F}(J) \supseteq \mathcal{F}(I)$. Logo, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(J) \supseteq \mathcal{F}(I)$. ▮

Prova (Do Teorema 4.1) Mostremos que $\mathcal{C}^*$ satisfaz (C1), (C2) e (C3).

Seja $C^* \subseteq \mathcal{C}^*$ um cocircuito qualquer de M. Por definição, existe hiperplano H de M tal que $C^* = E - H$. Para qualquer independente maximal I de H, temos que $r(H) = |I| = r(E) - 1$. Como existe uma base B de M tal que $I \subseteq B$, temos que $|I| < |B| = r(E)$ e existe um elemento da matróide $e \notin I$ tal que $B = I \cup e$.

Dado que $r(H) = r(E) - 1$ nenhuma base de M pode estar contida nele. Logo, $e \notin H$, daí $e \in C^* = E - H$. Provando que qualquer cocircuito de M é não vazio, isto é, temos (C1).

Agora tomemos $C_1^*, C_2^* \subseteq \mathcal{C}^*$ tais que $C_1^* \subseteq C_2^*$. Existem hiperplanos H_1 e H_2 de M tais que $C_1^* = E - H_1$ e $C_2^* = E - H_2$. Portanto, $H_1 \supseteq H_2$. Contudo, $r(H_2) = r(H_1) = r(E) - 1$ e, por definição, $\mathcal{F}(H_2) \supseteq H_1$. Como H_2 é hiperplano e, conseqüentemente, fechado, $\mathcal{F}(H_2) = H_2$, $H_2 \supseteq H_1$. Logo, $H_1 = H_2$, e $C_1^* = C_2^*$. Está provado que nenhum cocircuito de M contém propriamente outro; temos (C2).

Por fim, sejam $C_1^*, C_2^* \subseteq \mathcal{C}^*$ tais que $C_1^* \neq C_2^*$ e $e \in C_1^* \cap C_2^*$. Por definição, existem hiperplanos H_1 e H_2 de M tais que $C_1^* = E - H_1$ e $C_2^* = E - H_2$.

Para existir um cocircuito $C_3^* \subseteq C_1^* \cup C_2^* - e$, deve existir um hiperplano H_3 de M tal que $H_3 \supseteq (H_1 \cap H_2) \cup e$, e daí $C_3^* = E - H_3$. Então, devemos mostrar que $r(H_1 \cap H_2) \leq r(E) - 2$, pois, desta forma, $r((H_1 \cap H_2) \cup e) \leq r(E) - 1$ e $(H_1 \cap H_2) \cup e$ estaria contido em um hiperplano de M. Dado que, para um independente qualquer I em $(H_1 \cap H_2) \cup e$, existe uma base B de M tal que $I \subseteq B$, teríamos que $|I| \leq r(E) - 1 < r(E) = |B|$. Para I, um independente maximal em $(H_1 \cap H_2) \cup e$, e $d \in B - I$, pela Proposição 4.1, o hiperplano $H = \mathcal{F}(B - d)$ conteria $(H_1 \cap H_2) \cup e$, desde que $I \subseteq (B - d)$ e $\mathcal{F}(I) \supseteq (H_1 \cap H_2) \cup e$.

Mostremos que $r(H_1 \cap H_2) \leq r(E) - 2$. Suponha, ao contrário, que $r(H_1 \cap H_2) \geq r(E) - 1$. Temos que:

$$r(E) - 1 \leq r(H_1 \cap H_2) \leq r(H_1) = r(E) - 1$$

e daí

$$r(H_1 \cap H_2) = r(H_1) = r(H_2) = r(E) - 1.$$

Então, existe um independente maximal de H_1, assim como um de H_2, que é independente maximal em $H_1 \cap H_2$. Logo, novamente pela Proposição 2.2 e por $\mathcal{F}(X) \supseteq X$,

$$\mathcal{F}(H_1 \cap H_2) \supseteq H_1 \text{ e } \mathcal{F}(H_1 \cap H_2) \supseteq H_2.$$

Isto é, $H_1 \cup H_2 \subseteq \mathcal{F}(H_1 \cap H_2)$. Conseqüentemente, $r(H_1 \cup H_2) \leq r(H_1 \cap H_2)$, daí $r(H_1 \cup H_2) = r(H_1 \cap H_2) = r(E) - 1$.

Como $C_1^* \neq C_2^*$, $H_1 \neq H_2$. Escolha um elemento na diferença, digamos um $f \in H_1 - H_2$. Note que $r(H_2 \cup f) > r(H_2)$, pois $f \notin \mathcal{F}(H_2) = H_2$. Logo,

$$r(E) - 1 = r(H_2) < r(H_2 \cup f) \leq r(H_1 \cup H_2) = r(E) - 1.$$

Chegamos a uma contradição, e (C3) vale em $\mathcal{C}^*$. Os cocircuitos de M são os circuitos da matróide M^* sobre E. ∎

Um cocircuito de $M(G)$ corresponde a um corte mínimo em G.

Vejamos algumas propriedades.

Proposição 4.2 *As seguintes afirmacões são equivalentes para B, um subconjunto de elementos de uma matróide $M = (E, F)$:*

i) B é uma base de M; e

ii) $E - B$ é uma base de M^*.

Prova Primeiro provemos que i) $\Rightarrow$ ii). Seja B uma base de M. Para todo hiperplano H de M temos que $B - H \neq \emptyset$, dado que $r(B) = r(E) > r(E) - 1 = r(H)$. Isto é, $B \cap C^* \neq \emptyset$ para todo cocircuito C^* de M. Logo, $E - B = B^*$ não contém cocircuito de M e daí B^* é independente em M^*.

Se B^* não é base de M^*, então existe $e \in B$ tal que $B^* \cup e$ é independente em M^*. Considere o hiperplano $H = \mathcal{F}(B-e)$. Observe que $B-e \subseteq H$ e que $B^* \cup e = E-(B-e) \supseteq E - H = C^*$, onde C^* é um circuito de M^*, um absurdo. Conseqüentemente, B^* é uma base de M^*.

Provemos que ii) $\Rightarrow$ i). Seja B um conjunto qualquer de M. Note que seguintes afirmacões são equivalentes:

a) $E - B$ é independente em M^*.

b) $E - B$ não contém cocircuito de M.

c) B intercepta todo cocircuito de M.

d) B não está contido em qualquer hiperplano de M.

Mostraremos que d) é equivalente a:

e) $r(B) = r(E)$.

(d) $\Rightarrow$ e)) Seja B um conjunto qualquer de M, tal que B não está contido em qualquer hiperplano de M. Suponha que $r(B) < r(E)$. Seja I um independente maximal de B. Sabemos, pela Proposição 2.2, que $\mathcal{F}(I) \supseteq B$. Seja J uma base de M tal que $I \subseteq J$. Como $|I| = r(B) < r(E)$, temos que $J - I \neq \emptyset$. Escolha $e \in J - I$. Considere $H = \mathcal{F}(J - e)$; ele é um hiperplano de M. Mas $I \subseteq J - e$ e, então, pela Proposição 4.1, $\mathcal{F}(I) \subseteq \mathcal{F}(J - e)$. Conseqüentemente, $B \subseteq H$, um absurdo. Temos que, se B não está contido em qualquer hiperplano de M, $r(B) = r(E)$.

(e) $\Rightarrow$ d)) Seja B um conjunto qualquer de M tal que $r(B) = r(E)$. Seja H um hiperplano qualquer de M. Se tivéssemos $B \subseteq H$, teríamos também que $r(E) = r(B) \leq r(H) = r(E) - 1$, uma contradição. Logo $B \nsubseteq H$, para todo hiperplano H de M.

Seja B um conjunto qualquer de M tal que $E - B$ é uma base de M^*. Pelo que acabamos de provar, $r(B) = r(E)$, pois $E - B$ é um independente em M^*. Então, B gera E em M e, portanto, contém uma base de M.

Seja B' uma base de M tal que $B' \subseteq B$. Por i) $\Rightarrow$ ii), sabemos que $E - B'$ é uma base de M^*. Mas $E - B' \supseteq E - B$, que por hipótese também é uma base de M^*, daí $E - B' = E - B$, $B' = B$, mostrando que B é uma base de M.

Logo, B é uma base de M se e somente se $E - B$ é uma base de M^*. ∎

Corolário 4.1 *Seja $M = (E, F)$ uma matróide. Temos que $r_M(E) + r_{M^*}(E) = |E|$.*

Prova Se B é uma base de M, então $E - B$ é uma base de M^*. Logo, $r_M(E) + r_{M^*}(E) = |B| + |E - B| = |E|$. ∎

Corolário 4.2 *Seja M uma matróide. Temos que $M^{**} = M$.*

Prova Caso $\mathcal{B}(N)$ denote o conjunto das bases de uma matróide N, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(M^*) &= \{E - B : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
\mathcal{B}(M^{**}) &= \{E - B^* : B^* \in \mathcal{B}(M^*)\} \\
&= \{E - (E - B) : B \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= \{B : B \in \mathcal{B}(M)\} = \mathcal{B}(M).
\end{aligned}$$

Provando que $M^{**} = M$. ∎

Corolário 4.3 *Seja X um subconjunto de elementos de M. Temos que*

$$r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E - X) - r_M(E).$$

Prova Tome $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$ denotando as coleções de bases de M e de M^*, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} r_{M^*}(X) &= \max\{|X \cap B^*| : B^* \in \mathcal{B}^*\} \\ &= \max\{|X - B| : B \in \mathcal{B}\} \\ &= |X| - \min\{|B \cap X| : B \in \mathcal{B}\} \\ &= |X| - r_M(E) + \max\{|B - X| : B \in \mathcal{B}\} \\ &= |X| - r_M(E) + r_M(E - X), \end{aligned}$$

como desejávamos mostrar. ▮

Esta elegante prova do Corolário 4.3 se encontra no volume dois do livro Combinatorial Optimization de Schrijver, publicado em 2002 [Sch02].

Proposição 4.3 *Um circuito e um cocircuito de uma matróide não têm como intersecção um único elemento.*

Prova Seja $M = (E, F)$ uma matróide, e sejam C e C^* um circuito e um cocircuito de M, respectivamente. Existe um hiperplano H de M tal que $C^* = E - H$. Se $C \cap C^* = \{e\}$, temos que $C - e \subseteq H$, mas $e \notin H$, uma contradição, desde que H é fechado. ▮

Se um elemento e é cocircuito de M, então o chamamos de *colaço*. Ele é um laço na matróide M^*. Numa matróide gráfica $M(G)$, um colaço corresponde a uma "ponte" do grafo G.

Relembramos, do capítulo anterior, que $M\backslash e$ denota a operação de remoção de e em M, e que M/e denota a operação de contração de e em M.

Proposição 4.4 *Seja $M = (E, F)$ uma matróide e e um elemento de M. Temos que:*

i) $(M\backslash e)^* = M^*/e$;

ii) $(M/e)^* = M^*\backslash e$.

Prova Para mostrar i) vamos considerar dois casos:

Caso 1 : O elemento e é um colaço de M. Neste caso, $e \in B$, para qualquer $B \in \mathcal{B}(M)$, onde $\mathcal{B}(M)$ é o conjunto de bases de M. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(M\backslash e) &= \{B - e : B \in \mathcal{B}(M)\}, \\ \mathcal{B}((M\backslash e)^*) &= \{(E - e) - (B - e) : B \in \mathcal{B}(M)\} \\ &= \{E - B : B \in \mathcal{B}(M)\} = \mathcal{B}(M^*). \end{aligned}$$

Denotemos por $F(N)$ o conjunto dos independentes de uma matróide N.

Como e é um laço em M^*, e $F(M^*/e) = F(M^*)$ temos que $\mathcal{B}(M^*/e) = \mathcal{B}(M^*)$. Isto é, $B((M\backslash e)^*) = \mathcal{B}(M^*/e)$.

Caso 2 : O elemento e não é um colaço.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M\backslash e) &= \{B \in \mathcal{B}(M) : e \notin B\},\\ \mathcal{B}((M\backslash e)^*) &= \{(E-e)-B : B \in \mathcal{B}(M) \ \wedge \ e \notin B\}\\ &= \{B^* - e : B^* \in \mathcal{B}(M^*) \ \wedge \ e \notin B\} = \mathcal{B}(M^*/e).\end{aligned}$$

Provando i)$(M\backslash e)^* = M^*/e$.

Mostremos ii). Aplicando i) em M^*, obtemos $(M^*\backslash e)^* = M^{**}/e$. Pelo Corolário 4.2 temos que $(M^*\backslash e)^* = M/e$. Aplicando o dual na equação, e usando novamente o Corolário 4.2, obtemos o desejado: $(M^*\backslash e) = (M/e)^*$. ∎

Proposição 4.5 *Seja $M = (E, F)$ uma matróide, e sejam e e f elementos de M. Temos que:*

i) $(M\backslash e)\backslash f = (M\backslash f)\backslash e$;

ii) $(M\backslash e)/f = (M/f)\backslash e$;

iii) $(M/e)/f = (M/f)/e$.

Prova A prova de i) segue do seguinte fato: $F((M\backslash e)\backslash f) = \{I \in F : I \cap \{e, f\} = \emptyset\} = F((M\backslash f)\backslash e)$.

Para provar iii) nós usamos i), a Proposição 4.4 e o Corolário 4.2:

$$\begin{aligned}[(M/e)/f]^* &= (M/e)^*\backslash f = (M^*\backslash e)\backslash f = (M^*\backslash f)\backslash e\\ &= (M/f)^*\backslash e = [(M/f)/e]^*\\ (M/e)/f &= (M/f)/e.\end{aligned}$$

Dividimos a prova de ii) em dois casos.

Caso 1 : O elemento f é um laço. Logo, f é um laço em $M\backslash e$ também. Neste caso, $\mathcal{B}(M/f) = \mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M\backslash f)$. Isto é, $M/f = M\backslash f$. Portanto,

$$(M/f)\backslash e = (M\backslash f)\backslash e = (M\backslash e)\backslash f = (M\backslash e)/f.$$

Caso 2 : O elemento f não é um laço. Por definição, temos que $F(M/f) = \{I - f : I \in F \ \wedge \ f \in I\}$ e $F(M\backslash e) = \{I : I \in F \ \wedge \ e \notin I\}$. Então,

$$\begin{aligned}&F((M/f)\backslash e) = \{I - f : I \in F \ \wedge \ f \in I \ \wedge \ e \notin I\} \text{ e}\\ &F((M\backslash e)/f) = \{I - f : I \in F \ \wedge \ e \notin I \ \wedge \ f \in I\} \ .\end{aligned}$$

Logo, $(M/f)\backslash e = (M\backslash e)/f$. ∎

Desta proposição segue a prova da comutatividade e associatividade das operações de remoção de certos elementos e contração de certos outros, isto é, a Proposição 3.3, por indução.

Também por indução prova-se que $F(M/X) = \{I : I \in F \ \wedge \ I \cap X = \emptyset\}$.

Resta darmos a seguinte prova:

Prova (Da Proposição 3.4) Sejam X e X^c conjuntos complementares de elementos em $M = (E, F)$. Seja I uma base de $B \times X$, e seja J uma base de $M \mid X^c$. Sabemos que uma base é um independente maximal, um conjunto gerador minimal. Ou melhor, um conjunto independente e gerador dos elementos da matróide. Temos que I e J também são independentes em M. Suponha que $I \cup J$ é dependente em M. Neste caso existe um circuito C' de M tal que $C' \subseteq I \cup J$, e como I e J são independentes, $C' \cap I \neq \emptyset$ e $C' \cap J \neq \emptyset$. Mas então $C = C' \cap I = C' \cap X$ é dependente em $M \times X$ pois contém um circuito por definição, um absurdo já que $C \subseteq I$ base de $M \times X$. Logo $I \cup J$ é independente em M.

Suponha que existe e em $E - (I \cup J)$ tal que $(I \cup J) \cup e$ é independente em M. Se $e \in X^c$, temos que $(J \cup e) \subseteq X^c$ e é independente de M, portanto é independente em $M \mid X^c$. Um absurdo, pela maximalidade de J em $M \mid X^c$. Daí, se houver um conjunto independente Y em M tal que $Y \supset I \cup J$, então $Y - (I \cup J) \subseteq X$.

Temos que $I \cup J$ é gerador de X^c pois J é gerador de X^c em $M \mid X^c$ e, conseqüentemente, em M. Temos que I é gerador de X em $M \times X$, pela Proposição 3.2 existe I' conjunto gerador de X em M tal que $I = I' \cap X$. Então, $B = I' \cup J$ é gerador de E em M, $B \supseteq I \cup J$ e $B - (I \cup J) \subseteq X^c$. Por definição, há uma base de M contida em B, basta retirarmos elementos de B até que se torne um conjunto independente, se ele já não for. Mas, pelo que foi visto no parágrafo anterior, qualquer conjunto independente em M que contenha $I \cup J$ deve possuir além dos elementos de $I \cup J$ apenas elementos em X. Portanto, desde que $B - (I \cup J) \subseteq X^c$, $I \cup J$ é independente em M e $B = I' \cup J$. Retirando os elementos $I' - I$ de B obtemos uma base de M, o próprio conjunto $I \cup J$. Logo, os elementos de uma base de $M \times X$ junto com os elementos de uma base de $M \mid X^c$ formam uma base de M. ∎

4.3 A IMPLEMENTAÇÃO

Optamos por trabalhar com a linguagem de programação orientada a objetos Java. Assim o código se encontra distribuído em algumas classes.

Usamos na fase inicial do trabalho algumas classes de um projeto sobre grafos desenvolvido por Barak Naveh (o JGraphT, uma biblioteca da teoria de grafos distribuída gratuitamente pela internet em `http://jgrapht.sourceforge.net/`). Tivemos, ainda assim, de implementar vários métodos sobre grafos não constantes nestas, por exemplo, contração, os quais se encontram na classe "Grafo". Isto porque, apesar de implementarmos a classe "Matroide" de forma bastante abstrata, para qualquer tipo de matróide basta estendê-la implementando o método "posto" e alguns poucos, desejamos sobrescrever alguns métodos em matróide gráfica, objetivando uma maior rapidez. A classe "Grafo" também possui um construtor para um grafo auto-dual $G(n)$, dado um inteiro positivo n.

O método para partição de matróides em conjuntos independentes consta da classe abstrata "Matroide". Já o método que encontra o conjunto A_0 foi colocado na classe que a estende e representa uma matróide gráfica. Um equivalente foi colocado na classe que representa uma matróide cográfica, que também estende a classe matróide, mas está ligada à matróide gráfica primal da qual é a matróide dual através do construtor. De forma que quando um elemento é contraido na primal, simultaneamente ele é removido na dual, e vice-versa. A classe "MatroideGrafica" possui um grafo como atributo, e a "MatroideCografica" o mesmo grafo, ao invés do grafo dual (no caso de um grafo planar como é o nosso). Por este motivo, todos os métodos que agem sobre esta matróide usam os conceitos de dualidade apresentados como, por exemplo, o posto dado no Corolário 4.3, e especialmente os que afetam o atributo grafo.

O código relativo ao jogo se encontra na classe "Jogo". Dentre seus atributos podemos destacar uma matróide gráfica (associada ao grafo $G(n)$) e uma cográfica, sua dual.

O tempo de execução ainda não é instantâneo, mas é muito bom nos jogos de tamanho menor, e diminui com o decorrer do jogo. Isto se deve principalmente ao fato de que o algoritmo de partição de matróides é chamado muitas vezes no algoritmo que encontra A_0, e mais vezes quanto mais elementos houver.

Acreditamos poder melhorar este tempo. E objetivamos fazê-lo.

4.3.1 O jogo

Para entender como foi feita a implementação do jogo é necessário atentar para o que consideramos um "erro".

Relembramos que um jogador "tem a vitória" se a matróide gráfica associada ao grafo dado pelo estado atual do tabuleiro mais uma aresta e tem determinada propriedade. No caso do short player, um conjunto A_0 que gera o elemento e. E no caso do cut player um menor particionável em dois conjuntos independentes, onde pelo menos um deles não gera e. Pelo Teorema 3.3 sabemos que estas condições são excludentes.

Uma jogada é considerada um "erro" quando um jogador está ganhando, "tem a vitória", e joga não obtendo a mesma condição de vitória que agora é ameaçada pela última jogada do oponente.

Sabemos pelas estratégias dadas nos Teorema 3.1 e Teorema 3.2 como manter a vitória dada uma ameaça. Mas tanto o conjunto A_0 como o menor podem ser particionados de várias formas. Então, se o short player aponta uma aresta que, dada a partição em bases de $M \mid A_0$ que observamos, não está na lista de opções gerada pela estratégia nestas bases, ele pode não ter errado. A certeza de um acerto ou de um erro, neste caso, depende de calcular o conjunto A_0 após a jogada e verificar se o elemento e ainda é gerado ou não por ele. Sabe-se imediatamente ao lance.

Mas no caso do cut player, se ele tem a vitória, para saber imediatamente se ele fez um acerto ou um erro, analisamos a matróide dual. Se consideramos o último lance, jogado pelo short player, como um "primeiro lance". Por cada jogada do short player representar uma remoção nesta matróide e cada jogada do cut player uma contração, e por o cut player ter a vitória, sabemos que há um conjunto A_0 desta matróide que gera e segundo esta matróide e que torna possível a vitória do cut player assim como a análise imediata. Note que este gerar e na matróide dual significa ser um conjunto separador de seus vértices, um corte, na matróide primal.

Portanto, a análise do jogo depende da análise de A_0 quer na matróide primal quer na dual.

Durante o jogo, a cada jogada, esta análise é feita junto com uma seleção prévia de possíveis jogadas para o próximo lance deste jogador. Estas são usadas para o que chamamos de seleção e que dá boas opções para a jogada atual, para manter a vitória, ou para atrasar a vitória do oponente, de forma a que haja uma maior possibilidade de erro da parte dele. Estas opções são exibidas na análise ao final do jogo, especialmente na situação de erro de um jogador. Mas seu papel mais importante é fornecer base para que o computador possa ser um jogador. O computador "joga" segundo a sua seleção.

Apresentaremos um ciclo que comporta boa parte das possíveis situações, excetuando as situações de erros seguidos (dos dois oponentes), e supondo que quando acertaram os jogadores jogaram conforme sua seleção:

Suponha que J_1 e J_2 são, respectivamente, o primeiro e o segundo jogador, e que o primeiro jogador tem a vitória. Considere que o par (a, b) significa que é a vez do jogador a jogar e quem pode passar a ter a vitória (ou quem continua tendo, pois não cometeu erro) é b.

(J_1, J_1) No primeiro lance J_1 joga tendo como opções boas todas as do tabuleiro. E sua seleção prévia é vazia. Além disso, o A_0 do dual gera e.

(J_2, J_1) Então a seleção de J_2, como está perdendo, é formada pelos elementos de uma das bases de A_0 do dual que estão contidos no circuito que esta base forma com e. A base escolhida é a que forma o menor circuito. Sua seleção prévia é formada pelos elementos que J_1 poderia apontar na outra base para que obtivesse novamente um A_0 gerando e (segundo o Teorema 3.1 na matróide dual), caso ele jogue na seleção (caso contrário, sua seleção prévia seria formada pelos elementos dos circuitos tanto de uma base como da outra quando unidas a e, mas suponha que ele jogou conforme a seleção).

(J_1, J_2) Suponha agora que o jogador J_1 cometeu um erro, com certeza não jogou em sua seleção que indicava a seleção prévia de seu oponente. Sua seleção prévia será a que foi de seu oponente na esperança que ele não aproveite a chance de "virar a mesa", e tenha a oportunidade de recuperar um A_0 no dual gerando e.

(J_2, J_2) Como houve um erro, a seleção do jogador J_2 é parte de sua seleção prévia anterior que condiz com o Teorema 3.2. Isto é, como o A_0 do dual não gera e, há uma partição do menor $M/\mathcal{F}(A_0)$ em dois independentes onde um não gera e. E sua seleção é formada por elementos que estão no circuito que o outro independente forma com e, se o gera, ou (se não gera) todos os elementos destes independentes. Já sua seleção prévia é vazia. Além disso, o A_0 do primal gera e.

(J_1, J_2) O jogador J_1 agora está perdendo e joga contra o J_2 no A_0 do primal; sua seleção é formada pelos elementos da base que forma o menor circuito com e e que estão neste circuito. Em sua seleção prévia os elementos da outra base que quando apontados pelo oponente farão com que haja novamente um A_0 gerando e na primal.

(J_2, J_1) A seleção do jogador J_2 é a seleção anterior de seu oponente. Suponha que ele erre, sua seleção prévia é ainda esta seleção.

(J_1, J_1) Como o jogador J_2 errou, o jogador J_1 tem por seleção a parte de sua seleção anterior que satisfaz o Teorema 3.2 na primal. Sua seleção prévia é vazia. E o A_0 do dual gera e.

Resumindo, a seleção diz que:

Se o short player estiver ganhando ele deve jogar na matróide primal em A_0 como indicado no Teorema 3.1; mas, senão, ele joga contra o cut player na sua matróide dual. E o cut player ataca como indicado na estratégia se estiver perdendo; mas se estiver ganhando ele joga na matróide dual como o short player faria. Se o short player comete um erro, tendo a vitória, o cut player usa uma das opções que deveriam ter sido jogadas pelo short player, de acordo com a estratégia do Teorema 3.2 na matróide primal. Em situação contrária, o cut player errando, o short player faz o mesmo na dual.

O jogo termina quando a aresta distinguida e_0 torna-se um laço no grafo que é atributo das matróides gráfica e cográfica (sendo o short player o vencedor), ou quando o número de componentes conexas do grafo for menor do que o número de componentes que teríamos se retirássemos a aresta e_0 do grafo (neste caso, sendo o cut player o vencedor).

Concluímos com um exemplo de jogo (Figura 4.3) jogado num tabuleiro de tamanho dois, onde o short player venceu, graças a um erro cometido pelo cut player em sua segunda jogada (a terceira do jogo).

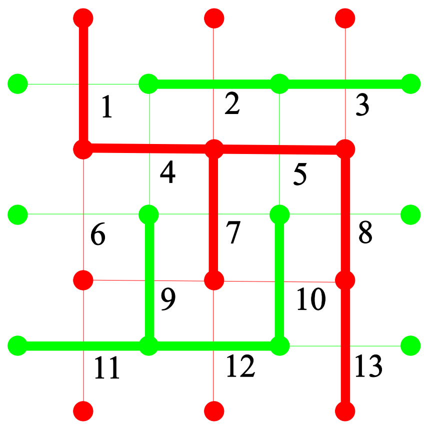


Figura 4.3. Jogo num tabuleiro de tamanho dois onde o primeiro jogador cometeu erro em sua segunda jogada e perdeu.

A seqüencia do jogo foi: e_{11}, e_1, e_9, e_7, e_{12}, e_{13}, e_2, e_4, e_{10}, e_8, e_3 e e_5. A seguir apresentamos uma representação do grafo associado ao jogo (com a aresta e_0) e seu dual, após cada jogada. Nela chamamos a atenção para o conjunto correspondente ao A_0 da matróide gráfica, ou ao A_0 da matróide cográfica, desde que gere e_0 (o elemento distinguido). O A_0 está particionado em duas árvores, uma com linha cheia e outra com linha tracejada (Figura 4.4).

A Figura 1.2 apresentada na introdução traz um jogo de tamanho quatro onde ganhou o primeiro jogador que, como jogava contra o computador, certamente não cometeu nenhum erro.

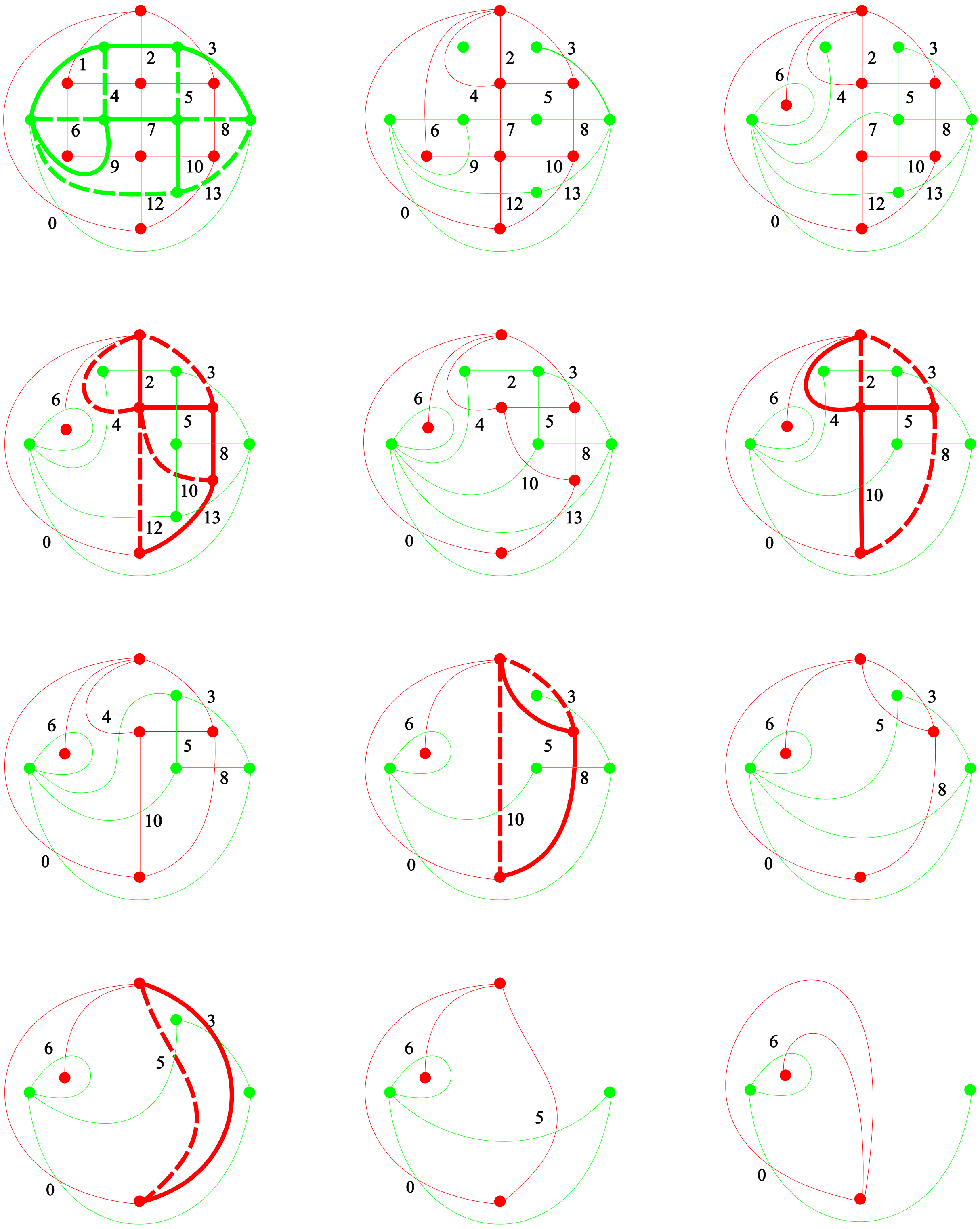


Figura 4.4. Representação do grafo associado ao jogo após cada jogada. As linhas cheias e as tracejadas representam uma partição do conjunto A_0 em duas árvores e são exibidas no caso em que o conjunto A_0, da matróide gráfica ou da cográfica, gera e_0.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Carpe diem.

—AUTOR DESCONHECIDO

A aplicação trazida neste trabalho, no jogo Bridge-it, da teoria relacionada com partição de matróides e conjuntos co-geradores é provavelmente uma entre muitas.

Parte do código feito também está sendo aplicado a uma “lista de matróides”, bastante próxima do que é chamado de *Matróide Soma*, com sucesso. Num projeto onde as matróides pertencentes à lista foram chamadas de “matróide executor” dado que referiam-se a um conjunto de tarefas e uma função posto específica para cada matróide (em decorrência de atributos destas tarefas e disponibilidades e/ou preferências do executor). O projeto executa o algoritmo de partição de matróides obtendo a partição total das tarefas entre os executores (conjuntos independentes em cada matróide) ou uma partição máxima, exibindo ainda as tarefas não particionadas, não distribuídas, e a prova de sua impossibilidade.

Acreditamos que é possível descobrir novos desdobramentos desta teoria e novas aplicações que, como acabamos de ver, podem não aparentar superficialmente qualquer relação.

A aplicação no jogo Bridge-it (e em qualquer jogo de Shannon ou de Lehman) é uma aplicação de um caso particular do Cospanning-Sets Theorem e do teorema sobre partição de matróides, onde k é igual a dois.

APÊNDICE A

A INTERFACE DO JOGO

Trazemos neste apêndice algumas imagens da interface que desenvolvemos para o projeto Bridge-it. Elas retratam um jogo de tamanho dois onde o primeiro jogador venceu (Figura A.1 e Figura A.2). Como o jogo foi jogado entre pessoas, não significa que o primeiro jogador não tenha cometido erro. Pelo contrário, como podemos ver pela análise, tanto o primeiro jogador cometeu erro (Figura A.3) como o segundo (Figura A.4).

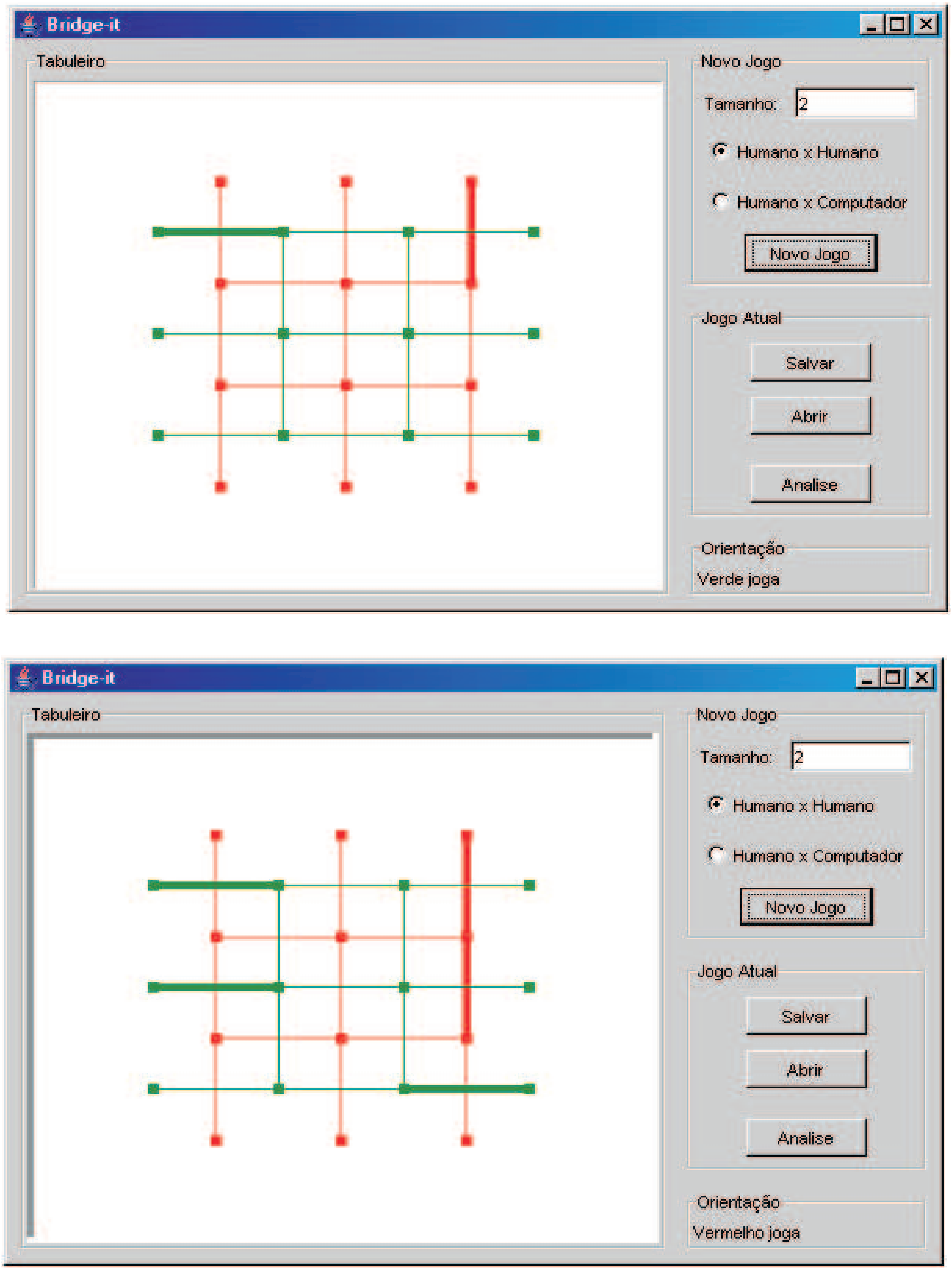
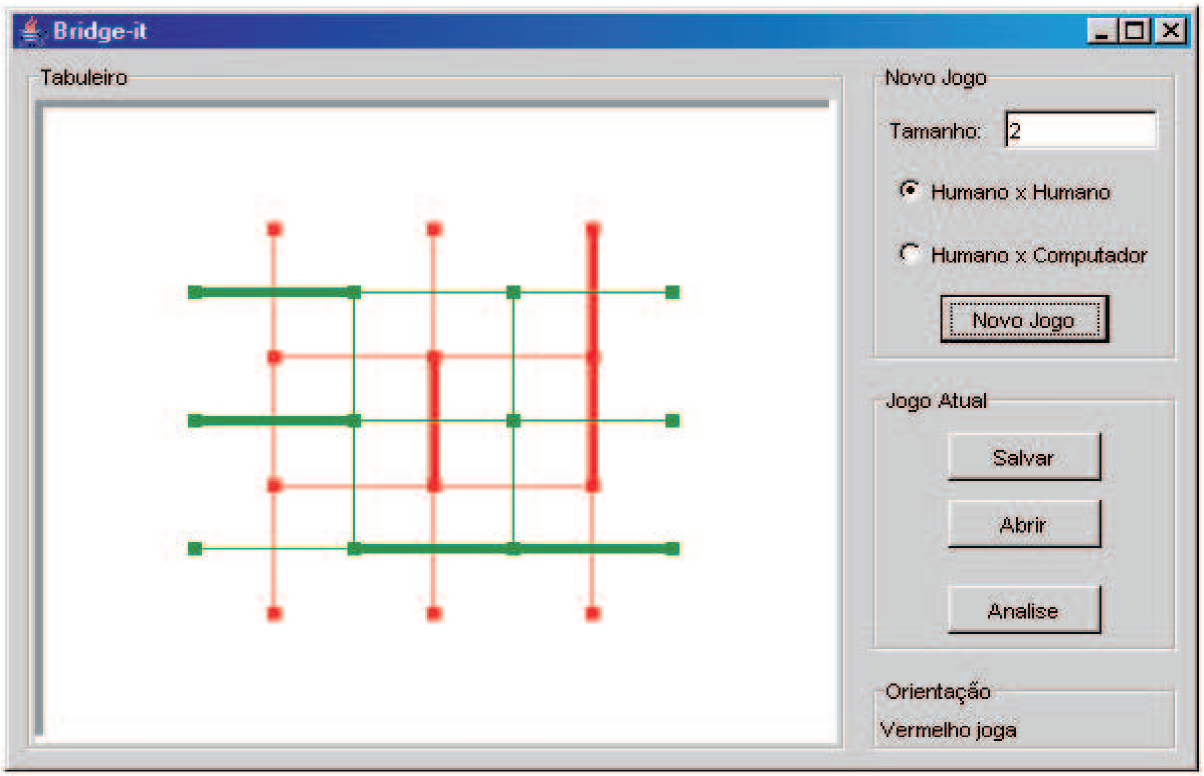


Figura A.1. Interface do jogo. Neste exemplo, o tabuleiro tem “tamanho dois”.



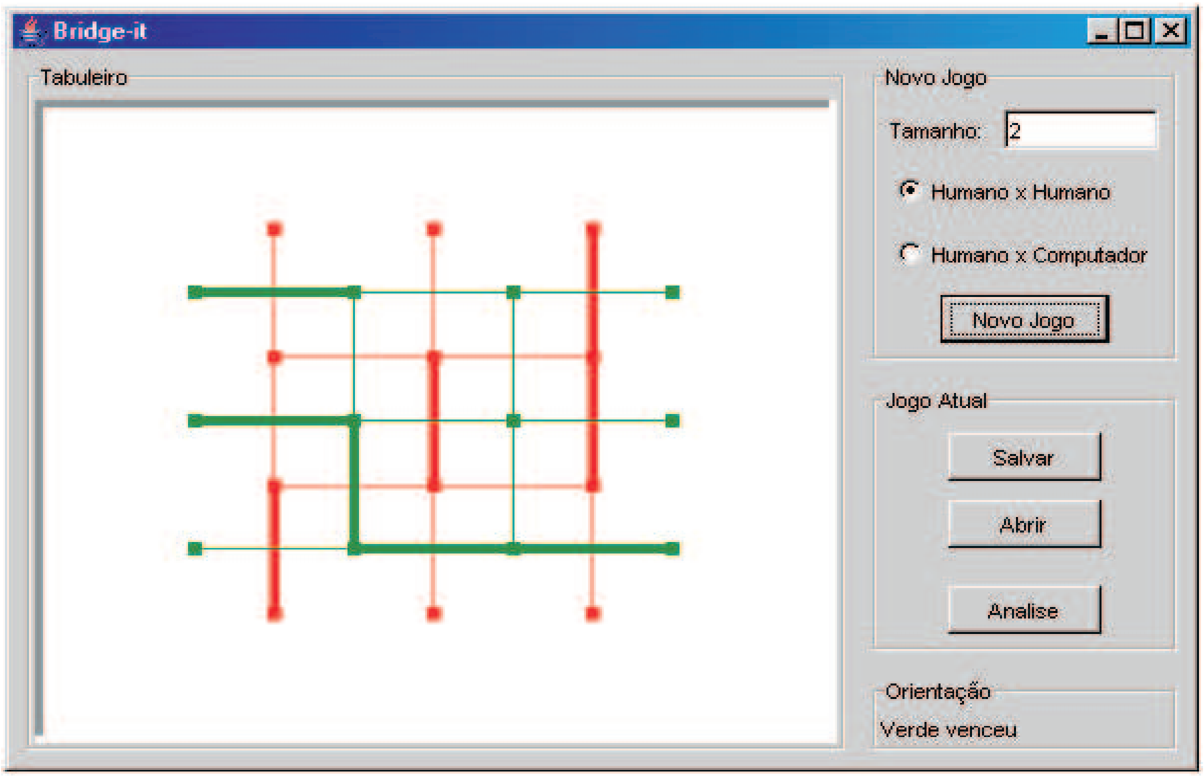


Figura A.2. Imagens de um jogo . . . o mesmo da última figura.

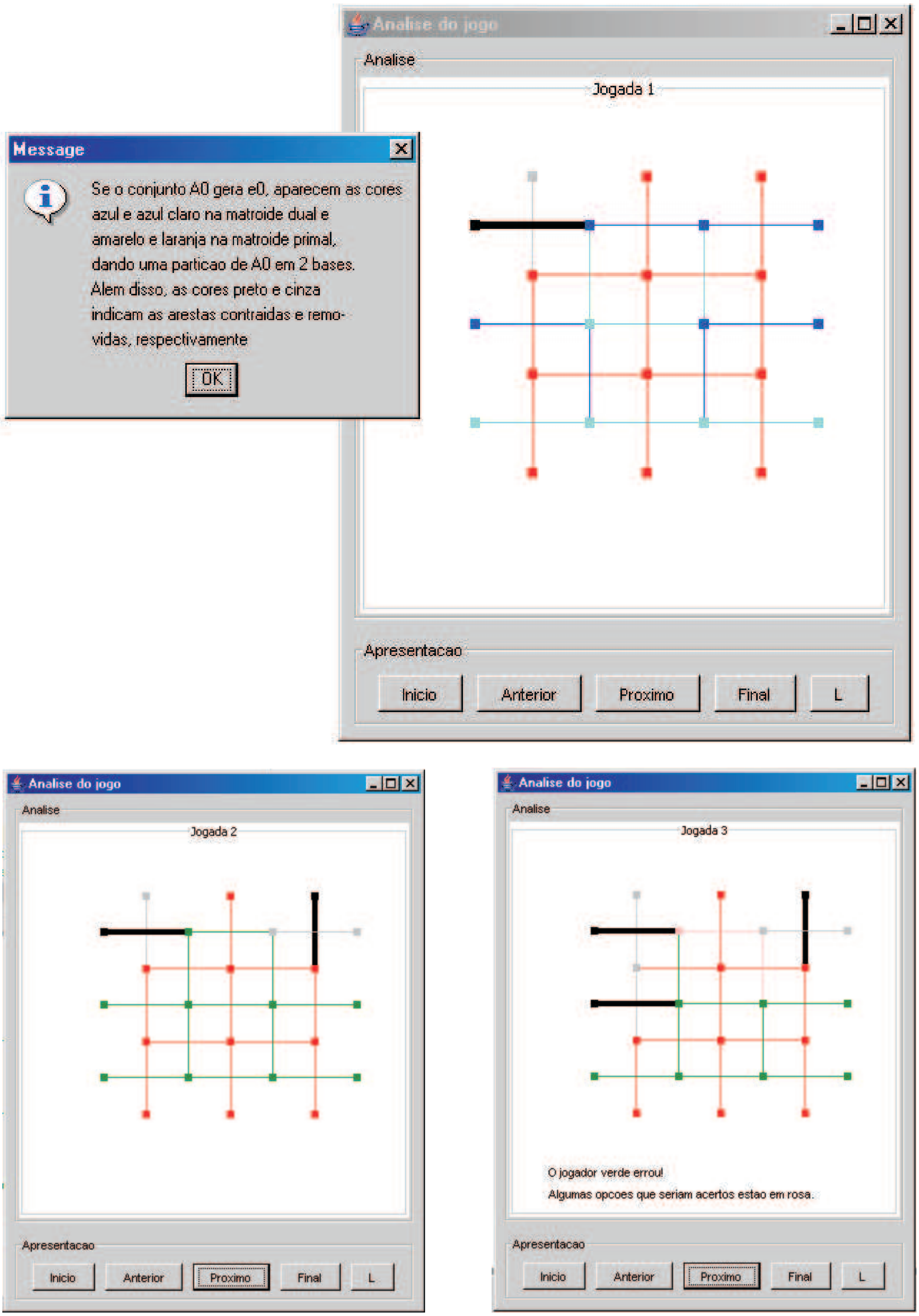


Figura A.3. A janela de análise. O primeiro jogador errou no seu segundo lance.

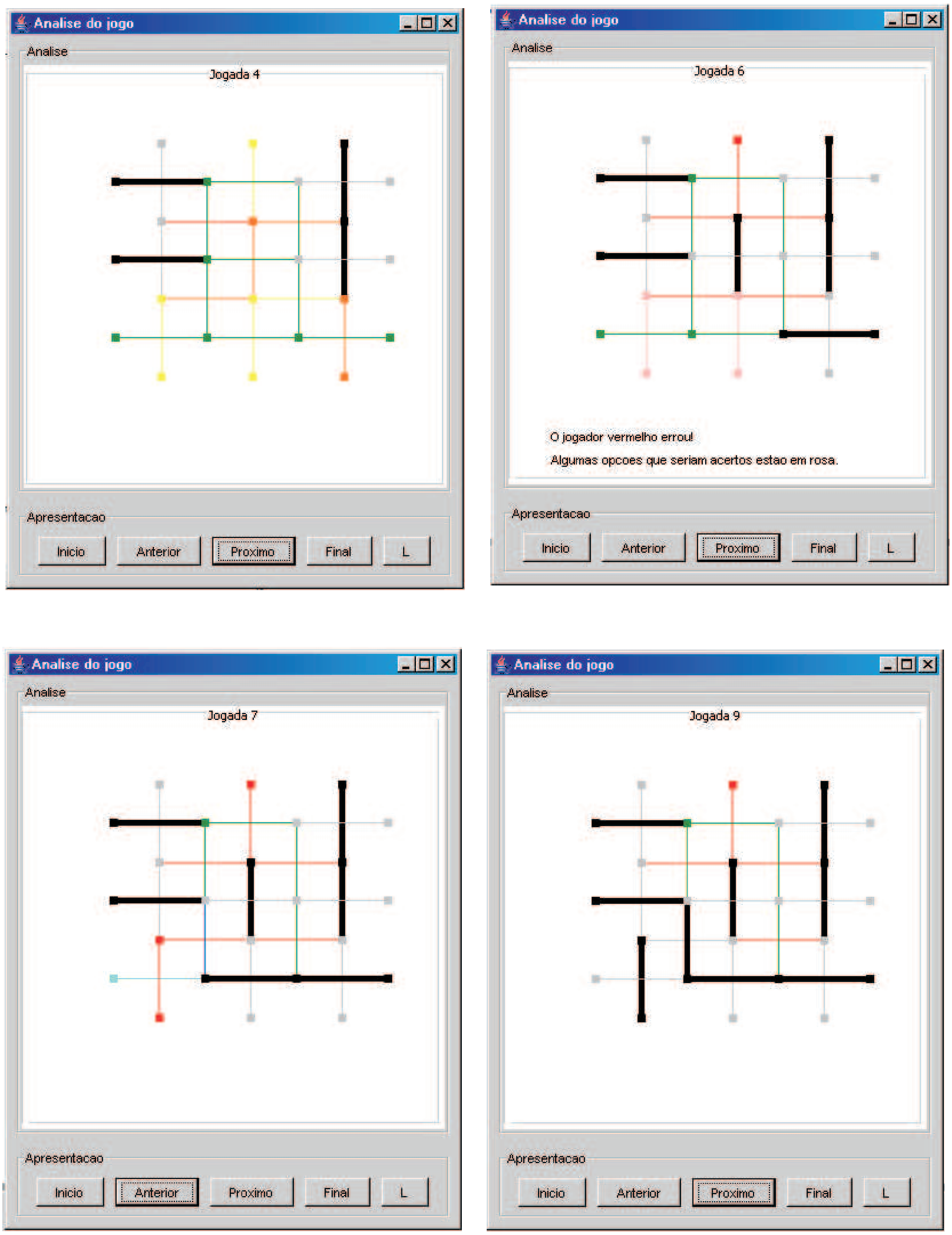


Figura A.4. Outras imagens da janela de análise. Aqui percebe-se que o segundo jogador também errou.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Edm65a] Jack Edmonds. Lehman's switching game and a theorem of Tutte and Nash-Williams. *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B. Mathematics and Mathematical Physics*, B. 69(1 and 2):73–77, January 1965. December 1, 1964.

[Edm65b] Jack Edmonds. Minimum partition of a matroid into independent subsets. *Journal of Research of the National Bureau of Standards- B. Mathematical and Mathematical Physics*, B. 69(1 and 2):67–72, January 1965. December 1, 1964.

[Edm67] Jack Edmonds. Matroid partition. In G. B. Dantzing and A. F. Veinott Jr., editors, *Mathematics of the Decision Sciences Part 1*, Proceedings of the Fifth Summer Seminar on the Mathematics of the Decision Sciences, pages 335–345, Stanford, California, 1967.

[Gar58] M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 199:124 and 129, October 1958.

[Gar61] M. Gardner. Mathematical games. *Scientifc American*, 205:150 and 152, July 1961.

[Leh64] A. Lehman. A solution of the Shannon switching game. *Soc. Indust. Appl. Math.*, 12(4):687–723, December 1964. Received by the editors October 2, 1962, and in revised form November 7, 1963.

[NW61] C. St. J. A. Nash-Williams. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.*, (36):445–450, 1961.

[NW64] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs into forests. *J. London Math. Soc.*, (39):12, 1964.

[Oxl92] James G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.

[Sch02] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization, Polyedra and Efficiency (3 vols)*, volume 24 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-verlag, 2002.

[Tut61] W. T. Tutte. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J. London Math Soc.*, (36):221–230, 1961.

[Tut65] W. T. Tutte. Lectures on matroids. *Journal of Research of National Bureau of Standards-B. Mathematics and Mathematical Physics*, B. 69(1), January 1965.