

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

IMPLICITAÇÃO VIA COMPLEXOS DE APROXIMAÇÃO

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
Julho, 2004

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro

IMPLICITAÇÃO VIA COMPLEXOS DE APROXIMAÇÃO

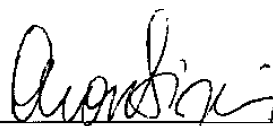
*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da Univer-
sidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Aron Simis*

Recife
Julho, 2004

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:



Aron Simis, DMAT-UFPE

Orientador



Francesco Russo, DMAT-UFPE



Carlos Eduardo Nogueira Bahiano, DM-UFBA

IMPLICITAÇÃO VIA COMPLEXOS DE APROXIMAÇÃO

Por

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Julho - 2004



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Secretaria de Pós-Graduação

50670-901 Cidade Universitária - Recife/PE - Fone (5581) 2126.8415- Fax (5581) 2126.8410
posgrad@dmat.ufpe.br

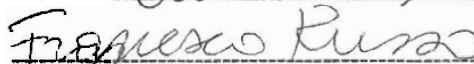
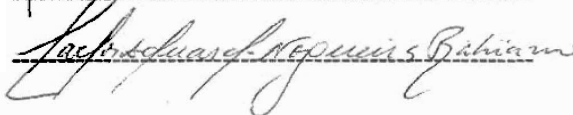
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO REALIZADA NO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Aos vinte e oito dias do mês de julho de dois mil e quatro, às dezesseis horas, no Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em seção pública, teve início a defesa da dissertação, intitulada : *"Implicitação via Complexos de Aproximação"*, da aluna **Isis Gabriella de Arruda Quinteiro**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado da Pós-Graduação em Matemática e aprovada com "Ad-Referendum" pelas Câmaras de Pesquisa e Pós-Graduação da UFPE, foi composta pelos professores Aron Simis e Francesco Russo do Departamento de Matemática da UFPE, Carlos Eduardo Nogueira Bahiano do Departamento de Matemática da UFBA. O professor Aron Simis em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou a aluna a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, a candidata foi argüida pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença da aluna, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido a menção : **APROVADO COM DISTINÇÃO**. E para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Recife, 28 de julho de 2004

Banca Examinadora

- Aron Simis
- Francesco Russo
- Carlos Eduardo Nogueira Bahiano

"Que darei eu ao Senhor por todos os benefícios que me tem feito?"

RESUMO

O objetivo central desta dissertação é versar sobre resultados recentes de Jouanolou–Busé ([2], cf. também [3]) sobre o problema da implícitação (de equações paramétricas) de uma hipersuperfície. Informalmente, o problema consiste em calcular a equação da imagem de uma determinada aplicação racional $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ quando a imagem é de codimensão um. Em trabalhos recentes, o principal método teórico-prático de atacar o problema tem sido o procedimento conhecido como “moving lines” (cf., e.g., [4], [5]). Este método, apesar de muito usado nas aplicações, tem algumas desvantagens. Uma é de que os cálculos resultam crescentemente complicados. Como alternativa, Busé e Jouanolou devisaram um método que consiste em relacionar o problema da implícitação com a aciclicidade de um dos complexos de aproximação introduzidos por Herzog–Simis–Vasconcelos (vide, [8], [9], [12]).

No primeiro capítulo expomos propriedades conhecidas do complexo de Koszul clássico que, por assim dizer, servem de modelo a outros complexos considerados. Para maiores detalhes, remetemos o leitor a [7] e a [1]. No capítulo 2, fornecemos um resumo da teoria básica dos complexos de aproximação, ferramenta principal para o desenvolvimento do método de Busé–Jouanolou. As referências básicas deste capítulo são [8], [9], [10]. Finalmente, no capítulo 3 fornecemos todos os resultados e as respectivas demonstrações, obtidos por Busé e Jouanolou.

Terminologia e resultados básicos de álgebra comutativa, liberalmente usados no texto foram coletados bibliografia já citada.

Palavras-chave: Implícitação, Busé–Jouanolou, complexos de aproximação.

ABSTRACT

The main result of this work is to join the implicitization of curves and surfaces with the acyclic of some complexes. To references we indicate [2] and the others works that are in the bibliografy.

Keywords: Implicitization, Busé-Jouanolou, Aproximation complexes.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Complexos obtidos por simetrização	1
1.1 O Complexo de Koszul clássico e seus invariantes	1
1.2 Complexos de aproximação	3
1.2.1 Simetrização da álgebra exterior	3
1.2.2 O complexo de Herzog–Simis–Vasconcelos	5
Capítulo 2—Implicitação via Complexos de Aproximação	14
2.1 Introdução	14
2.2 Implicitação de uma hipersuperfície sem pontos de base	16
2.2.1 Implicitação de curvas em $\mathbb{P}_k^2$ sem pontos de base	18
2.2.2 Implicitação de superfícies em $\mathbb{P}_k^3$ sem pontos de base	19
2.3 Implicitação de uma hipersuperfície com pontos de base l.c.i.	19
2.3.1 Implicitação de curvas em $\mathbb{P}_k^2$ com pontos de base	21
2.3.2 Implicitação de superfícies em $\mathbb{P}_k^3$ com l.c.i. pontos de base	21
Referências Bibliográficas	23

CAPÍTULO 1

COMPLEXOS OBTIDOS POR SIMETRIZAÇÃO

1.1 O COMPLEXO DE KOSZUL CLÁSSICO E SEUS INVARIANTES

Neste capítulo exporemos, primeiramente, algumas propriedades básicas do complexo de Koszul clássico. Os complexos de aproximação são obtidos, a partir deste, via simetrização.

Seja, então, F um A -módulo livre de posto $r \geq 1$. Por simplicidade suporemos que $F = A^r$, munido da base canônica $\{e_1, \dots, e_r\}$.

Definição 1.1.1 Dados $x_1, \dots, x_r \in A$, temos um homomorfismo de A -módulos $\varphi : \wedge^1 F = F \longrightarrow \wedge^0 F = A$ tal que $\varphi(e_i) = x_i$. Consideremos a seguinte seqüência de A -módulos:

$$\wedge^n F \xrightarrow{\delta_n} \wedge^{n-1} F \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \wedge^2 F \xrightarrow{\delta_2} \wedge^1 F = F \xrightarrow{\delta_1 = \varphi} \wedge^0 F = A \rightarrow 0$$

com $\delta_n(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}) = \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j}^\wedge \wedge \dots \wedge e_{i_n})$.

Verifica-se, usando as propriedades do produto na álgebra exterior, que a seqüência acima é um complexo, isto é, $\delta_{n-1}\delta_n = 0, \forall n \geq 1$. Este complexo notável chama-se o *Complexo de Koszul* associado a $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \subset A$ e será denotado por $K(\underline{x}; A)$.

Vejamos alguns exemplos, para valores iniciais de r .

Exemplo 1.1.2 (i) $r = 1$: O complexo é trivial, reduzindo-se, essencialmente, ao próprio φ . Nomeadamente, $0 \rightarrow \wedge^1 A = A \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$. Observemos que $0 \rightarrow \wedge^1 A \rightarrow A$ é exato se, e só se, $\varphi(1)$ é não divisor de zero em A .

Exemplo 1.1.3 (ii) $r = 2$: O complexo é

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0,$$

usando a identificação $\wedge^2 A^2 \simeq A$. Verifica-se, sem dificuldade especial, que se $\{x_1, x_2\}$ é seqüência regular em A , então o complexo em questão é exato.

Exemplo 1.1.4 (iii) $r = 3$: Usando as identificações $\wedge^3 A^3 \simeq A$ e $\wedge^2 A^3 \simeq A^3$, tem-se:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 & -x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0.$$

Ainda neste caso é possível verificar que se $\{x_1, \dots, x_n\}$ constitui uma seqüência regular, então o complexo é exato, embora os cálculos sejam mais laboriosos. Esta implicação se mantém no caso geral, tratando-se de uma propriedade básica e característica do complexo $K(\underline{x}; A)$ (cf., por exemplo, [1, Cor. III.31]). Nesta circunstância especial, o complexo constitui uma resolução livre do ideal $I = (x_1, \dots, x_r) \subset A$.

Por conveniência, fixamos a seguinte terminologia e notação :

Definição 1.1.5 Seja $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \subset A$ uma seqüência de elementos. Considerando o complexo de Koszul associado, temos: o A -módulo $Z_n(\underline{x}; A) := \ker(\delta_n)$ (resp. A -módulo $B_n(\underline{x}; A) := \text{Im}(\delta_{n+1})$) é o *módulo dos n -ciclos de Koszul* (resp. o *módulo dos n -bordos de Koszul*) associados à seqüência $\underline{x}$. O módulo quociente $H_n(\underline{x}; A) := \ker(\delta_n)/\text{Im}(\delta_{n+1})$ é o *n -ésimo módulo de Homologia de Koszul* associado à seqüência $\underline{x}$.

Denotaremos ainda $B_*(\underline{x}; A) := \bigoplus_{n \geq 0} B_n(\underline{x}; A)$, $Z_*(\underline{x}; A) := \bigoplus_{n \geq 0} Z_n(\underline{x}; A)$, $K(\underline{x}; A) := \bigoplus_{n \geq 0} K_n(\underline{x}; A)$, $\bigwedge F := \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n F$ e $H_*(\underline{x}; A) := \bigoplus_{n \geq 0} H_n(\underline{x}; A)$.

Recordemos as seguintes propriedades básicas destes módulos (cf. [1, p. 108 e seguintes]).

Lema 1.1.6 (i) $Z_*(\underline{x}; A) \subset K(\underline{x}; A) \simeq \bigwedge F$ é uma A -subálgebra de $\bigwedge F$

(ii) $B_*(\underline{x}; A)$ é um ideal de $Z_*(\underline{x}; A)$.

(iii) $(\underline{x})H_*(\underline{x}; A) = 0$

(iv) $H_0(\underline{x}; A) \simeq A/(\underline{x})$

(v) $H_r(\underline{x}; A) \simeq 0:_{A/(\underline{x})}$.

Finalmente, existe uma versão do complexo com “coeficientes” em um módulo. Se M é um A -módulo, consideramos o complexo $K(\underline{x}; A) \otimes M$, obtido do complexo $K(\underline{x}; A)$ por tensorização com M :

$$\longrightarrow \wedge^2 F \otimes_A M \xrightarrow{\delta_2 \otimes 1} \wedge^1 F \otimes_A M \xrightarrow{\delta_1 \otimes 1} \wedge^0 F \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Neste caso, usamos a seguinte notação : $K(\underline{x}; M) = K(\underline{x}; A) \otimes M$, $Z_n(\underline{x}; M) = \text{Ker}(\delta_n \otimes 1)$, $B_n(\underline{x}; M) = \text{Im}(\delta_{n+1} \otimes 1)$, $H_n(\underline{x}; M) = Z_n(\underline{x}; M)/B_n(\underline{x}; M)$.

Observemos que as propriedades (iv) e (v) acima do complexo $K(\underline{x}; A)$ permanecem válidas para $K(\underline{x}; M)$: $H_0(\underline{x}; M) = M/(\underline{x})M$ e $H_r(\underline{x}; M) = 0$ para $r > 0$. Em geral, $H_n(\underline{x}; M) \not\simeq H_n(\underline{x}; A) \otimes_A M$, para $0 \leq n \leq r$.

Uma outra propriedade elementar é expressa através do produto tensorial (cf. [1, Lema III.29]) de complexos de Koszul elementares.

Proposição 1.1.7 $K(\underline{x}; M) \simeq K(x_1; A) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_n; A) \otimes_A M$ como complexos.

Demonstração. É suficiente mostrar que $K(\underline{x}, A) \simeq K(x_1, A) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_n, A)$. A prova será feita por indução sobre n . Se $n = 1$, o resultado é trivial. Suponha $n > 1$. Sabemos que existe um isomorfismo $\wedge^r A^n \simeq \wedge^r A^{n-1} \oplus \wedge^{r-1} A^{n-1}$. Pela hipótese de indução, temos então um isomorfismo

$$\begin{aligned} & (K(x_1; A) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_{n-1}; A)) \otimes_A K(x_n; A) \\ &= \sum_{i=0}^r (K(x_1; A) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_{n-1}; A))_{r-i} \otimes_A K(x_n; A)_i \\ &\simeq \sum_{i=0}^r (\wedge^{r-i} A^{n-1} \otimes_A K(x_n; A)_i) \\ &\simeq (\wedge^r A^{n-1} \otimes_A A) \oplus (\wedge^{r-1} A^{n-1} \otimes_A A) \\ &\simeq \wedge^r A^{n-1} \oplus \wedge^{r-1} A^{n-1} \simeq \wedge^r A^n \end{aligned}$$

Para concluir, verifica-se que estes homomorfismos comutam com as diferenciais dos complexos em questão. $\square$

1.2 COMPLEXOS DE APROXIMAÇÃO

Existem vários complexos obtidos por simetrização do complexo de Koszul ordinário ou de outros complexos de natureza semelhante. Nesta seção enfocaremos um caso especial do complexo duplo associado a dois homomorfismos, conforme estudado em [8], [9], [10].

1.2.1 Simetrização da álgebra exterior

Sejam F_0, F_1 A -módulos livres de postos n e m , respectivamente, e seja $\varphi : F_1 \rightarrow F_0$, um homomorfismo de módulos. Ponhamos $E = \text{coker}(\varphi)$ e $B = S_A(F_0) = A[X_1, \dots, X_n]$.

Queremos ver $\bigwedge F_1 \otimes_A S(F_0)$ como um complexo de Koszul associado naturalmente a φ . Inicialmente, veremos a construção como complexo duplo, cujas componentes são

$\wedge^r F_1 \otimes_R S_t(F_0)$ e cujas diferenciais são

$$\begin{aligned}\wedge^r F_1 \otimes_A S_t(F_0) &\rightarrow \wedge^{r-1} F_1 \otimes_A S_{t+1}(F_0) \\ g_1 \wedge \dots \wedge g_r \otimes \mathbf{f} &\mapsto \sum (-1)^i g_1 \wedge \dots \wedge \hat{g}_i \wedge \dots \wedge g_r \otimes \varphi(g_i) \cdot \mathbf{f}.\end{aligned}$$

Proposição 1.2.1 *Com a notação acima, tem-se:*

- (i) $\bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0)$ tem uma estrutura natural de complexo graduado sobre $B = S_A(F_0)$ e, como tal, é soma direta de A -complexos

$$\mathbf{K}_t : 0 \rightarrow \wedge^q F_1 \otimes S_{t-q}(F_0) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^1 F_1 \otimes S_{t-1}(F_0) \rightarrow S_t(F_0),$$

com $q = \min \{t, m\}$ e $H_0(\mathbf{K}_t) \simeq S_t(E)$.

- (ii) Como complexo graduado definido sobre $S(F_0) = \sum_t S_t(F_0)$, $\bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0)$ é isomorfo ao complexo de Koszul (ordinário) associado a um conjunto gerador do ideal de apresentação $J(\varphi) \subset S_A(F_0)$ de $S_A(E)$ induzido pela apresentação φ . Como tal, sua homologia em grau zero é $H_0(\bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0)) \simeq S(E)$.

Demonstração. (i) Como complexo graduado definido sobre o anel $B = S_A(F_0)$ o complexo é soma direta dos complexos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & \rightarrow & S_0(F_0) \rightarrow 0 \\ & & & & 0 & \rightarrow & F_1 \otimes S_0(F_0) \rightarrow S_1(F_0) \rightarrow 0 \\ & & 0 & \rightarrow & \wedge^2 F_1 \otimes S_0(F_0) & \rightarrow & F_1 \otimes S_1(F_0) \rightarrow S_2(F_0) \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & \wedge^3 F_1 \otimes S_0(F_0) & \rightarrow & \wedge^2 F_1 \otimes S_1(F_0) & \rightarrow & F_1 \otimes S_2(F_0) \rightarrow S_3(F_0) \rightarrow 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Consequentemente, $\bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0)$ é da forma

$$0 \rightarrow \wedge^m F_1 \otimes S(F_0)(-m) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 F_1 \otimes S(F_0)(-2) \rightarrow F_1 \otimes S(F_0)(-1) \rightarrow S(F_0) \rightarrow 0.$$

É fácil ver que $H_0(\mathbf{K}_t) \simeq S_t(E)$. Segue disso que $H_0(\bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0)) \simeq \sum_{t \geq 0} S_t(E) = S_A(E)$.

- (ii) Seja $\{g_1, \dots, g_m\}$ uma base de F_1 . Então $F_1 \otimes_A S_A(F_0)$ é um módulo livre sobre $S_A(F_0)$ nos geradores $\{g_1 \otimes 1, \dots, g_m \otimes 1\}$. Por outro lado, $J(\varphi) \subset S_A(F_0)$ é, por definição, gerado pelos polinômios

$$(X_1, \dots, X_n) \cdot \varphi(g_1), \dots, (X_1, \dots, X_n) \cdot \varphi(g_m),$$

onde $\varphi(g_j)$ é visto como o vetor coluna correspondente na base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de F_0 , e $\cdot$ denota produto matricial. Segue um homomorfismo de $S_A(F_0)$ -módulos

$$F_1 \otimes_R S_A(F_0) \xrightarrow{\eta} S_A(F_0), \quad g_j \otimes 1 \mapsto (X_1, \dots, X_n) \cdot \varphi(g_j), 1 \leq j \leq m.$$

Se agora considerarmos o complexo de Koszul (ordinário) $K(\eta, S(F))$ associado a η , obtemos um isomorfismo de complexos sobre $S_A(F_0)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0) : & 0 & \rightarrow & (\wedge^m F_1) \otimes S_A(F_0)(-m) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & F_1 \otimes S_A(F_0)(-1) & \rightarrow & S_A(F_0) & \rightarrow & 0 \\ & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\ K(\eta, S(F)) : & 0 & \rightarrow & \wedge^m (F_1 \otimes S_A(F_0))(-m) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (F_1 \otimes S_A(F_0))(-1) & \rightarrow & S_A(F_0) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

O resultado segue então deste isomorfismo. $\square$

Corolário 1.2.2 *Se φ identifica $\varphi(F_1)$ com um somando direto de F_0 - por exemplo, se φ é um isomorfismo - o complexo graduado*

$$\bigwedge F_1 \otimes_A S_A(F_0) : 0 \rightarrow (\wedge^m F_1) \otimes S_A(F_0)(-m) \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \otimes S_A(F_0)(-1) \rightarrow S_A(F_0)$$

é exato.

Demonstração. De fato, em tal circunstância, os polinômios

$$(X_1, \dots, X_n) \cdot \varphi(g_1), \dots, (X_1, \dots, X_n) \cdot \varphi(g_m),$$

constituem uma sequência regular em $S_A(F_0)$. $\square$

1.2.2 O complexo de Herzog–Simis–Vasconcelos

Consideremos o seguinte diagrama de A -módulos e homomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ \downarrow \Phi & & \\ A & & \end{array}$$

Para formarmos um complexo duplo associado aos dois homomorfismos Φ e ψ , consideraremos dois complexos. Um deles é o complexo associado a ψ , definido por simetrização :

$$\begin{aligned} \wedge^r M \otimes S^t N & \xrightarrow{\delta = \delta_\psi} \wedge^{r-1} M \otimes S^{t+1}(N) \\ \delta(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \otimes f) & \mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j (e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_j} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \otimes \psi(e_{i_j}) \end{aligned}$$

O outro complexo é o complexo de Koszul associado a Φ com coeficientes em $S(N)$:

$$\begin{aligned} \wedge^r M \otimes S^t N & \xrightarrow{k=k_\Phi} \wedge^{r-1} M \otimes S^t(N) \\ k(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \otimes f) & \mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j (e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_j} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \otimes \Phi(e_{i_j})f \end{aligned}$$

Proposição 1.2.3 *Tem-se $k \cdot \delta = -\delta \cdot k$, isto é, o diagrama abaixo é anti-comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \wedge^r M \otimes S^t N & \xrightarrow{\delta} & \wedge^{r-1} M \otimes S^{t+1} N \\ \downarrow k & & \downarrow k \\ \wedge^{r-1} M \otimes S^t N & \xrightarrow{\delta} & \wedge^{r-2} M \otimes S^{t+1} N \end{array}$$

Demonstração. Por um lado temos

$$\delta(e_1 \wedge \dots \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = -e_2 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_1)f + e_1 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_2)f + \dots$$

e

$$\begin{aligned} k(\delta(e_1 \wedge \dots \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes f)) &= (\sum (-1)^{j+1} e_2 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \varphi(e_1)\psi(e_j)f) \\ &+ (-e_3 \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_1)\varphi(e_2)f) \\ &+ \sum_{j \neq 1} (-1)^{j-1} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_j)\varphi(e_2)f + \dots \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$k(e_1 \wedge \dots \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = -e_2 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_r \otimes \varphi(e_1)f + e_1 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_r \otimes \varphi(e_2)f + \dots$$

e

$$\begin{aligned} \delta(k(e_1 \wedge \dots \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes f)) &= (\sum (-1)^j e_2 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \varphi(e_1)\psi(e_j)f) \\ &+ (e_3 \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_1)\varphi(e_2)f) \\ &+ \sum_{j \neq 1} (-1)^j e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_j)\varphi(e_2)f + \dots \end{aligned}$$

Portanto, $\delta k = -k \delta$. □

O complexo duplo associado a $\{\Phi, \Psi\}$ assim definido será denotado por $\mathcal{L}(\Phi, \Psi)$. Por

comodidade, exibimos uma faixa típica deste complexo:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
& \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
& \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \wedge^2 M \otimes S^0 N & \longrightarrow & \wedge^1 M \otimes S^1 N & \longrightarrow & \wedge^0 M \otimes S^2 N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \wedge^1 M \otimes S^0 N & \xrightarrow{\delta} & \wedge^0 M \otimes S^1 N & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow k & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \wedge^0 M \otimes S^0 N & \longrightarrow & 0 & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & 0 & & & &
\end{array}$$

Proposição 1.2.4 Se $M = N (\simeq A^n)$ e $\Psi = 1_M$, então os subcomplexos horizontais do complexo duplo $\mathcal{L}(\Phi, \Psi)$ são exatos.

Demonstração. Neste caso, pela Proposição 1.2.1, $(\wedge G \otimes_A S_A(M), \delta)$ pode ser visto como o complexo de Koszul associado às 1-formas definidas por $\Psi = 1_M$, isto é, $X_1, \dots, X_n$, onde $S_A(M) \simeq A[X_1, \dots, X_n]$. Pelo Corolário 1.2.2, sabemos que o complexo $(\wedge G \otimes_A S_A(M), \delta)$ é exato. Equivalentemente, suas partes graduadas (linhas horizontais) são complexos exatos de A -módulos. $\square$

Doravante, suporemos que $M = N = A^n$ e que $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ geram o ideal $I = \Phi(A^n) \subset A$.

Definição 1.2.5 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, 1_M)$ é o *complexo de Koszul duplo* associado à sequência $\underline{x}$.

Observemos uma “fatia” de tal complexo L para melhor visualização:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \wedge^{r+2}(A^n) \otimes S^{t-1} A^n & \longrightarrow & \wedge^{r+1}(A^n) \otimes S^t A^n & \longrightarrow & \wedge^r(A^n) \otimes S^{t+1}(A^n) & \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \wedge^{r+1}(A^n) \otimes S^{t-1} A^n & \longrightarrow & \wedge^r(A^n) \otimes S^t A^n & \longrightarrow & \wedge^{r-1}(A^n) \otimes S^{t+1}(A^n) & \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \wedge^r(A^n) \otimes S^{t-1} A^n & \longrightarrow & \wedge^{r-1}(A^n) \otimes S^t A^n & \longrightarrow & \wedge^{r-2}(A^n) \otimes S^{t+1}(A^n) & \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Observemos que, para cada t , o complexo (linha) vertical é simplesmente o complexo de Koszul associado a $\underline{x}$ com coeficientes em $S_t(A^n)$, ao passo que, para cada par r, t ,

o complexo (linhas) horizontal é o subcomplexo de grau $r + t$ do complexo de Koszul associado à sequência $T = \{T_1, \dots, T_n\}$. Vimos anteriormente que todos os complexos horizontais são exatos.

Usando a notação do capítulo anterior, $Z = Z(\underline{x}; A)$ denota o submódulo dos ciclos de $K(\underline{x}; A)$, $B = B(\underline{x}; A)$ o módulo dos bordos e $H = H(\underline{x}; A)$, o módulo de homologia.

Proposição 1.2.6 *As diferenciais k e δ induzem novos complexos*

$$\mathcal{Z} = \{Z \otimes S, \delta\}, \quad \mathcal{B} = \{B \otimes S, \delta\}, \quad \mathcal{M} = \{H \otimes S, \delta\}$$

onde $S = S_A(A^n)$.

Demonstração. Temos

$$\begin{array}{ccc} \wedge^s(A) \otimes S^{r-s} & \xrightarrow{\delta} & \wedge^{s-1}(A) \otimes S^{r-s+1} \\ \downarrow k_s & & \downarrow k_{s-1} \\ \wedge^{s-1}(A) \otimes S^{r-s} & \xrightarrow{\delta} & \wedge^{s-2}(A) \otimes S^{r-s+1} \end{array}$$

Seja $c \otimes f \in Z_s(\underline{x}, A) \otimes S_{r-s}(F)$. Por hipótese, $\delta(k(c \otimes f)) = \delta(k(c) \otimes f) = 0$ (pois $k(c) = 0$).

Como $\delta.k = -k.\delta$, temos $k(\delta(c \otimes f)) = 0 \implies \delta(c \otimes f) \in \text{Ker}(k_{s-1}) \implies \delta(c \otimes f) \in Z_{s-1}(\underline{x}, A) \otimes S_{r-s+1}$, onde a última implicação resulta de que S_{r-s+1} é livre. $\square$

Definição 1.2.7 $\mathcal{Z}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{M}$ são os **complexos de aproximação** associados a $\underline{x}$.

Iremos nos concentrar, a partir de agora, nos complexos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{Z}$. O $\mathcal{M}$ -complexo, como o $\mathcal{Z}$ -complexo, é um complexo graduado sobre o anel de polinômios $S(A^n) \simeq A[T_1, \dots, T_n]$. A t -ésima parte homogênea $\mathcal{M}_t$ de $\mathcal{M}$ é um complexo de A -módulos da forma

$$\mathcal{M}_t : 0 \longrightarrow H_n \otimes S_{t-n} \xrightarrow{\delta} \dots \longrightarrow H_1 \otimes S_{t-1} \xrightarrow{\delta} H_0 \otimes S_t \longrightarrow 0.$$

De maneira análoga, vemos que $\mathcal{Z}_t$ é um complexo de A -módulos da forma

$$\mathcal{Z}_t : 0 \longrightarrow Z_n \otimes S_{t-n} \xrightarrow{\delta} \dots \longrightarrow Z_1 \otimes S_{t-1} \xrightarrow{\delta} Z_0 \otimes S_t \longrightarrow 0.$$

Como complexo sobre o anel de polinômios $S(A^n) = S$ o $\mathcal{Z}$ -complexo pode ser escrito

$$\mathcal{Z} : 0 \longrightarrow Z_n \otimes S(-n) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} Z_1 \otimes S(-1) \xrightarrow{\delta} Z_0 \otimes S \longrightarrow 0,$$

onde $S(k)$ denota o S -módulo graduado cuja componente de grau m é S_{k+m} . É natural perguntar os complexos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{M}$ dependem do conjunto gerador $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ do ideal I , uma vez que são modelados sobre o complexo de Koszul ordinário que, em geral, depende dos geradores. Surpreendentemente, temos o seguinte resultado

Proposição 1.2.8 *Seja $\varphi : A^n = F' \oplus Ae \longrightarrow A$, onde F' é livre, tal que $\varphi(e) = 0$. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ respectivamente os complexos de aproximação das seqüências definidas por φ e por sua restrição $\varphi' : F' \rightarrow A$. Então, $H_*(\mathcal{M}_t) = H_*(\mathcal{M}'_t)$.*

Demonstração. Denotemos por K, K' respectivamente os complexos de Koszul definidos por φ e por φ' . De acordo com a definição de $\mathcal{M}_t$, sua componente $\mathcal{M}_{r,s}$ é dada por

$$H_r(K) \otimes S^s(M) = (H_r(K') \oplus H_{r-1}(K') \otimes Ae) \otimes \left(\sum_{j=0}^s S_j(M') e^{s-j} \right)$$

que pode ser visto como a soma de três sub-complexos

$$H_r(K') \otimes S^s(M') \oplus (H_r(K') \otimes \left(\sum_{j=0}^{s-1} S_j(M') e^{s-j} \right) \oplus H_{r-1}(K') \otimes Ae \otimes \left(\sum_{j=0}^s S_j(M') e^{s-j} \right).$$

A primeira componente é $\mathcal{M}'_{r,s}$. Denotaremos as outras componentes por $\mathcal{A}_{r,s}$ e $\mathcal{B}_{r,s}$, respectivamente. Observe que $\mathcal{A}_{r,s} \simeq \mathcal{B}_{r+1,s-1}$, onde o isomorfismo é induzido pela multiplicação por e . Portanto, o complexo $\mathcal{C}_{r,s} = \mathcal{A}_{r,s} \oplus \mathcal{B}_{r,s}$ é acíclico já que $\mathcal{A}_{r-1,s+1} \simeq \mathcal{B}_{r,s}$. $\square$

Corolário 1.2.9 *Seja $\varphi : A^n \rightarrow A$ um homomorfismo, $I = \varphi(A^n)$ e $\underline{x}$, um conjunto gerador de I . A homologia do complexo $\mathcal{M}(\underline{x})$ depende apenas de I .*

Demonstração. Seja $\underline{y}$ um outro conjunto gerador de I . Consideremos o $\mathcal{M}$ -complexo $\mathcal{M}'$ associado à seqüência $\{\underline{x}, \underline{y}\}$. Consideremos o homomorfismo $\theta = \sigma + \beta : A^{n+m} \longrightarrow A$, onde $\sigma : A^n \longrightarrow A$ e $\beta : A^m \longrightarrow A$ são dados por $\sigma(e_i) = x_i$ e $\beta(e_j) = y_j$. Pela proposição anterior, temos $H_*(\mathcal{M}) = H_*(\mathcal{M}')$. Denotando por $\mathcal{M}''$ o complexo $\mathcal{M}(\underline{y})$, outra aplicação da proposição anterior fornece $H_*(\mathcal{M}') = H_*(\mathcal{M}'')$. $\square$

Observação 1.2.10 Da mesma forma podemos concluir que os módulos de homologia dos complexos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{B}$ não dependem do conjunto gerador do ideal considerado. Assim, podemos nos referir aos complexos de aproximação associados a um ideal I finitamente gerado de A e não simplesmente a uma seqüências finitas de elementos de A .

Observação 1.2.11 Vemos que se I é um ideal de A e $\mathcal{M}$ é o $\mathcal{M}$ -complexo associado a I , então $H_i(\mathcal{M}) = 0, \forall i > \mu(I) - \text{prof}_I(A)$.

A razão da terminologia reside, originalmente, no seguinte resultado.

Proposição 1.2.12 *Dado um ideal $I \subset A$ finitamente gerado, tem-se:*

$$(i) \ H_0(\mathcal{Z}(I; A)) = S_A(I).$$

(ii) $H_0(\mathcal{M}(\underline{x})) = S_A(I/I^2)$.

Demonstração. (i) Seja $0 \longrightarrow Z = \ker \varphi \longrightarrow A^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$ uma apresentação de I . Tomando a r -ésima potência simétrica desta apresentação, obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} Z \otimes S_{r-1}(A^n) & \xrightarrow{\iota \otimes 1} & S_r(A^n) & \longrightarrow & S_r(I) \longrightarrow 0 \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & ZS_r(A^n) & & & \end{array}$$

Além disso, sabemos que o $\mathcal{Z}$ -complexo termina com:

$$\begin{array}{ccccc} Z_1(\underline{x}; A) \otimes S_{r-1}(F) & \xrightarrow{\delta_1} & Z_0(\underline{x}; A) \otimes S_r(F) & \longrightarrow & 0 \\ \wr & & \wr & & \\ Z \otimes_A S_{r-1}(F) & & S_r(F) & & \end{array},$$

onde $I = (\underline{x})$. Pela propriedade universal da álgebra simétrica, $\iota \otimes 1$ se identifica com δ_1 . Assim, temos: $H_0(\mathcal{Z}(I; A)) = Z_0(\underline{x}; A) \otimes S_r(F)/\text{Im}(\delta_1) = S_r(F)/\text{Im}(\iota \otimes 1) \simeq S_r(I)$. Resulta, então, que $H_0(\mathcal{Z}(I; A)) = S_A(I)$.

(ii) Retomemos a apresentação $0 \longrightarrow Z \longrightarrow F = A^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$ de I acima. Tensorizando por A/I sobre A , temos:

$$0 \longrightarrow Z \cap IF/IZ \longrightarrow Z/IZ \longrightarrow F/IF \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow 0.$$

Ou ainda,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z/Z \cap IF & \longrightarrow & F/IF & \longrightarrow & I/I^2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & \frac{Z_1(\underline{x}; A)}{Z_1(\underline{x}; A) \cap IK_1(\underline{x}; A)} & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \frac{Z_1(\underline{x}; A)}{B_1(\underline{x}; A)} = H_1(\underline{x}; A) & & & & \end{array}$$

Portanto, temos que $H_1(\underline{x}; A) \longrightarrow F/IF \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow 0$ é exata. Tomando a r -ésima potência simétrica desta apresentação de I/I^2 , temos: $H_1(\underline{x}; A) \otimes S_{r-1}(F/IF) \xrightarrow{\iota \otimes 1} S_r(F/IF) \longrightarrow S_r(I/I^2) \longrightarrow 0$. Além disso, sabemos que o “fim” do M-complexo é:

$$\begin{array}{ccccc} H_1(\underline{x}; A) \otimes S_{r-1}(F) & \xrightarrow{\overline{\delta_1}} & H_0(\underline{x}; A) \otimes S_r(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \\ & & \frac{A}{(\underline{x})} \otimes S_r(F) & & \\ & & \wr & & \\ & & S_r(F)/IS_r(F) & & \\ & & \wr & & \\ & & S_r(F/IF) & & \end{array}$$

Como no caso anterior, temos que $\iota \otimes 1$ identifica-se com $\overline{\delta_1}$. Assim, $H_0(\mathcal{M}(\underline{x}; A)) = \frac{S_r(F/IF)}{\text{Im}(\iota \otimes 1)} \simeq S_r(I/I^2)$. $\square$

A relação entre os complexos $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(I; M)$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}(I; M)$ é dada pela seguinte

Proposição 1.2.13 *Para cada inteiro positivo r , existe uma seqüência exata de A -módulos*

$$\dots \longrightarrow H_t(\mathcal{Z}_{r+1}) \longrightarrow H_t(\mathcal{Z}_r) \longrightarrow H_t(\mathcal{M}_r) \longrightarrow H_{t-1}(\mathcal{Z}_{r+1}) \longrightarrow \dots$$

Demonstração. Denotando $\wedge^s F \otimes S^{r-s}(F)$ por $\wedge^s \otimes S^{r-s}$, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}_r : & \wedge^s \otimes S^{r-s} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow & \wedge^1 \otimes S^{r-1} & \longrightarrow & S^r \\ \mathcal{L}_{r-1} : & \wedge^{s-1} \otimes S^{r-s} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \wedge^0 \otimes S^{r-1} & \\ & & & & & \parallel & \\ & & & & & S^{r-1} & \end{array}$$

Considerando as seqüências

$$0 \longrightarrow B_s \otimes S_{r-s} \longrightarrow Z_s \otimes S_{r-s} \longrightarrow H_{r-s} \otimes S_{r-s} \longrightarrow 0,$$

e

$$0 \longrightarrow Z_s \otimes S_{r-s} \longrightarrow \wedge^s \otimes S_{r-s} \longrightarrow \wedge^{s-1} \otimes S_{r-s},$$

obtemos duas seqüências exatas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_r \longrightarrow \mathcal{L}_r \longrightarrow \mathcal{B}_{r-1}(-1) \longrightarrow 0,$$

e

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_r \longrightarrow \mathcal{Z}_r \longrightarrow \mathcal{M}_r \longrightarrow 0.$$

Resultam duas seqüências longas em homologia:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_2(\mathcal{L}_r) & \longrightarrow & H_2(\mathcal{B}_{r-1}(-1)) & \longrightarrow & H_1(\mathcal{Z}_r) \longrightarrow H_1(\mathcal{L}_r) \longrightarrow H_1(\mathcal{B}_{r-1}(-1)) \\ & & \longrightarrow & H_0(\mathcal{Z}_r) & \longrightarrow & H_0(\mathcal{L}_r) & \longrightarrow H_0(\mathcal{B}_{r-1}(-1)) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.1)$$

e

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_2(\mathcal{M}_r) & \longrightarrow & H_1(\mathcal{B}_r) & \longrightarrow & H_1(\mathcal{Z}_r) \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_r) \longrightarrow H_0(\mathcal{B}_r) \\ & & \longrightarrow & H_0(\mathcal{Z}_r) & \longrightarrow & H_0(\mathcal{M}_r) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Além disso, vimos que $H_t(\mathcal{L}_r) = A$, se $r = t = 0$ e $H_t(\mathcal{L}_r) = 0$, caso contrário. Observemos ainda que $(B_{r-1}(-1))_1 = (B_{r-1})_0$ e que $(B_{r-1}(-1))_2 = (B_{r-1})_1$. Segue então que $H_1(B_{r-1}(-1)) = H_0(B_{r-1})$ e $H_2(B_{r-1}(-1)) = H_1(B_{r-1})$. Indutivamente, pode-se verificar que $H_i(B_{r-1}(-1)) = H_{i-1}(B_{r-1}), \forall i \geq 0$. Além disso, segue de (1.1) que $H_{i+1}(B_{r-1}(-1)) = H_i(\mathcal{Z}_r), \forall i \geq 0$. Temos portanto, a seqüência exata

$$\dots \longrightarrow H_t(\mathcal{Z}_{r+1}) \longrightarrow H_t(\mathcal{Z}_r) \longrightarrow H_t(\mathcal{M}_r) \longrightarrow H_{t-1}(\mathcal{Z}_{r+1}) \longrightarrow \dots \quad \square$$

O “fim” da seqüência anterior é:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(\mathcal{M}_t) & \xrightarrow{\sigma} & H_0(\mathcal{Z}_{r+1}) & \xrightarrow{\lambda_{r+1}} & H_0(\mathcal{Z}_r) & \longrightarrow & H_0(\mathcal{M}_r) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ & & S^{r+1}(I) & & S^r(I) & & S^r(I/I^2) \end{array}$$

onde $\lambda = \lambda_{r+1} : S^{r+1}(I) \rightarrow S^r(I)$ é tal que $a_1 \bullet \cdots \bullet a_{r+1} \mapsto a_1 a_2 \bullet \cdots \bullet a_{r+1}$. Este homomorfismo é chamado *homomorfismo de “downgrading”*.

Corolário 1.2.14 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{M}$ é acíclico.
- (ii) $\mathcal{Z}$ é acíclico e λ é injetivo.

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$ É consequência imediata da proposição anterior.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Observemos que $H_r(\mathcal{M}_0) = 0, \forall r > 0$. Como $H_r(\mathcal{M}_t) = 0, \forall r, t$, o resultado segue por indução e pela proposição anterior. $\square$

O teorema a seguir esclarece definitivamente a terminologia “complexos de aproximação”.

Teorema 1.2.15 *Seja $I \subset A$ um ideal. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{Z}$ os complexos associados a um ideal $I \subset A$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) σ é o homomorfismo nulo.
- (ii) λ é injetivo.
- (iii) α é um isomorfismo.

Demonstração. Consideremos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(\mathcal{M}_t) & \xrightarrow{\sigma} & H_0(\mathcal{Z}_{t+1}) & \xrightarrow{\lambda} & H_0(\mathcal{Z}_t) & \longrightarrow & H_0(\mathcal{M}_t) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_{t+1} & & \downarrow \alpha_t & & \downarrow \beta_t & & \\ 0 & \longrightarrow & I^{t+1} & \longrightarrow & I^t & \longrightarrow & \frac{I^t}{I^{t+1}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Consequência imediata da exatidão das linhas do diagrama acima.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Para $t = 0$ é válido, pois α e β são isomorfismos em grau zero. Desta forma, (iii) segue por indução sobre t e pela exatidão das linhas do diagrama.

Finalmente, (iii) $\Rightarrow$ (ii) é imediato. $\square$

Corolário 1.2.16 *Seja $I \subset A$ um ideal e $\mathcal{M}$ o complexo associado. Se $\mathcal{M}$ é acíclico, então I é de tipo linear, isto é, $S_A(I) \simeq R_A(I)$.*

Finalmente, temos a curiosa

Proposição 1.2.17 *Com a notação anterior, tem-se que α é isomorfismo se e só se β é isomorfismo.*

Demonstração. Suponhamos que α seja um isomorfismo. Seja $\lambda_t : H_0(\mathcal{Z}_{t+1}) \rightarrow H_0(\mathcal{Z}_t)$ o homomorfismo natural de A -módulos e $\mathcal{A} = \text{Ker}(\alpha)$. Como $\lambda_t(\mathcal{A}_{t+1}) \subset \mathcal{A}_t$, temos o seguinte diagrama comutativo exato

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{A}_{t+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}_t & \longrightarrow & \frac{\mathcal{A}_t}{\lambda_t \mathcal{A}_{t+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_0(\mathcal{Z}_{t+1}) & \xrightarrow{\lambda_t} & H_0(\mathcal{Z}_t) & \xrightarrow{\varphi} & H_0(\mathcal{M}_t) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \alpha_{t+1} & & \downarrow \alpha_t & & \downarrow \beta_t & & \\
I^{t+1} & \xhookrightarrow{\iota} & I^t & \xrightarrow{\pi} & \frac{I^t}{I^{t+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Temos, assim, a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{A}_t}{\lambda_t \mathcal{A}_{t+1}} \longrightarrow H_0(\mathcal{M}_t) \xrightarrow{\beta_t} \frac{I^t}{I^{t+1}} \longrightarrow 0$$

Temos, por hipótese, $\mathcal{A}_t = \lambda_t(\mathcal{A}_{t+1})$, $\forall t$. Além disso, como $\mathcal{A}$ é um ideal finitamente gerado de $H_0(\mathcal{Z}(I; A))$, existe um inteiro s suficientemente grande tal que $\mathcal{A}_{t+1} = H_0(\mathcal{Z}_1(I; A))\mathcal{A}_t$, $t \geq s$.

Aplicando $\lambda = \lambda_t$ a esta igualdade, temos $\mathcal{A}_t = \lambda(\mathcal{A}_{t+1}) = H_0(\mathcal{Z}_1(I; M))\mathcal{A}_t$. Segue, então, do lema de Nakayama que $\mathcal{A}_t = 0$, $t \geq s$. Por indução, concluímos que $\mathcal{A}_t = 0$, $\forall t$. Por localização, temos $\mathcal{A} = 0$. $\square$

CAPÍTULO 2

IMPLICITAÇÃO VIA COMPLEXOS DE APROXIMAÇÃO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uso de algumas definições para as quais referimos a [15].

Sejam $f_1, \dots, f_n$ polinômios homogêneos não nulos em $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ de mesmo grau d , onde k é um corpo. Estes polinômios definem uma função racional

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_k^{n-2} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{P}_k^{n-1} \\ (a_1 : \dots : a_{n-1}) & \longrightarrow & (f_1 : \dots : f_n)(a_1 : \dots : a_{n-1}) \end{array}$$

Estaremos supondo que $\dim(\lambda(\mathbb{P}_k^{n-2})) = n - 1$. Logo, $\lambda(\mathbb{P}_k^{n-2})$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}_k^{n-1}$ que será denotada por H e é definida por um ideal principal de A (cf. [15, pp. 18.40]).

O cálculo da equação de H é conhecido como o problema da implicação. Como observado, estudaremos tal problema relacionando-o à aciclicidade de certos complexos de aproximação obtendo, assim, uma equação para H nos casos em que o ideal $(f_1, \dots, f_n)$ tem dimensão um (isto é, dimensão geométrica zero) e é localmente interseção completa (l.c.i.). Um método alternativo é o das retas móveis (“moving lines”) que não será objetivo desta dissertação.

Observemos que, em geral, o k -homomorfismo $h : k[T] \longrightarrow A$, definido por $h(T_i) = f_i$, com $f_i \in A_d, \forall i = 1, \dots, n$, define a imagem fechada (= o fecho projetivo da imagem conjuntista) de λ , onde $\ker h$ é seu ideal de definição.

Consideremos o anel de polinômios $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$, com $n \geq 3$. Seja $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_{n-1}) \subset A$ o ideal irrelevante e $I = (f_1, \dots, f_n)$. Denotaremos por $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{M}$ os complexos de aproximação associados a I .

Consideremos uma apresentação da álgebra simétrica

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \longrightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\alpha} S_A(I) \longrightarrow 0$$

onde $\ker(\alpha) = (\sum b_i T_i / b_i \in A, \sum b_i f_i = 0) \subset A[T_1, \dots, T_n]$. Denotamos $S_A(I)_v = \oplus_{l \geq 0} A_v S_A^l(I)$, ou seja, $S_A(I)_v$ é a parte graduada de $S_A(I)$ correspondente à graduação de A (observemos que $S_A(I)$ é bigraduada de maneira natural pela graduação de A e as potências simétricas de I). A proposição a seguir nos fornece uma forma alternativa de investigar a equação de H .

Proposição 2.1.1 *Suponhamos que I é de tipo linear localmente no complementar de $V(\mathfrak{m})$, e seja η inteiro tal que $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v \geq \eta$. Então, $\text{ann}_{k[T]}(S_A(I)_v) = \ker(h), \forall v \geq \eta$.*

Demonstração. Por definição, temos

$$\begin{aligned} \text{ann}_{k[T]}(S_A(I)_v) &= \{f \in k[T] \mid f.S_A(I)_v = 0\} \\ &= \{f \in k[T] \mid f.A_v[T] \subset \ker(\alpha)_v \subset \ker(\alpha)\} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v &= \{f \in S_A(I)_v \mid \exists n : \mathfrak{m}^n f = 0\} \\ &= \{f \in A_v[T] \mid \exists n : \mathfrak{m}^n f \subset \ker(\alpha)_v\} \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do isomorfismo $S_A(I)_v = A_v[T_1, \dots, T_n] / \ker(\alpha)_v, \forall v$.

Além disso, $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0$ é equivalente a $\{f \in A_v[T] : \exists n, \mathfrak{m}^n f \subset \ker(\alpha)\} = \ker(\alpha)_v$. De fato, seja $f \in A_v[T]$ tal que $\mathfrak{m}^n f \subset \ker(\alpha)$. Assim, $\bar{f} = \bar{0} \in S_A(I)_v$ e, obviamente, $\mathfrak{m}_n \bar{f} = 0$. Então $\bar{f} = \bar{0}$ e, daí, $f \in \ker(\alpha)_v$.

Mas ainda, se $f \in \ker(\alpha)_v$, então $\bar{f} = 0$ em $S_A(I)_v$. Logo, $f.\mathfrak{m}^t = 0, \forall t$ e, portanto, $f.\mathfrak{m}^t \subset \ker(\alpha)$.

Reciprocamente, se $f \in S_A(I)_v$ é tal que $f.\mathfrak{m}^t = 0$, para algum t , é claro que $f.\mathfrak{m}^t \subset \ker(\alpha)$. Por hipótese, temos então $f \in \ker(\alpha)_v$ e, pelo isomorfismo considerado anteriormente, $f = 0$.

Desta forma, temos: $\text{ann}_{k[T]}(S_A(I)_\eta) = \{f \in k[T]; f.A_\eta[T] \subset \ker(\alpha)\} = \{f \in k[T]; f.A_{\geq \eta}[T] \subset \ker(\alpha)\}$. Além disso, se $f \in \text{ann}_{k[T]}(S_A(I)_v)$, então $f.A_v[T] \subset \ker(\alpha) \Rightarrow \exists n \geq v = \eta + t, f.\mathfrak{m}^n \subset \ker(\alpha) \Rightarrow f.(\mathfrak{m}^n.\mathfrak{m}^t)[T] \subset \ker(\alpha) \Rightarrow f.\mathfrak{m}^n[T].\mathfrak{m}^t[T] \subset \ker(\alpha) \Rightarrow f.\mathfrak{m}^n[T] \subset \ker(\alpha)_\eta \subset \ker(\alpha) \Rightarrow f.A_\eta[T] \subset \ker(\alpha)[T] \Rightarrow f \in \text{ann}(S_A(I)_\eta)$. Portanto, $\text{ann}(S_A(I)_v) = \text{ann}(S_A(I)_\eta)$.

Como I é de tipo linear localmente no complementar de $V(\mathfrak{m})$ e $H_{\mathfrak{m}}^0(A) = 0$ (pois A é domínio), temos $\ker(h) = (\ker(\alpha)) : \mathfrak{m}^\infty \cap k[T]$ e, assim, $\ker(h) = \{f \in k[T]; \exists n, \mathfrak{m}^n f \subset \ker(\alpha)\} = \{f \in k[T]; \exists n, \forall \epsilon \in \mathfrak{m}[T]^n, f\epsilon \in \ker(\alpha)\} = \{f \in k[T]; \exists n, f.A_{\geq n}[T] \subset \ker(\alpha)\}$, onde a penúltima igualdade é dada pois $A : \mathfrak{m}^\infty = A[T] : \mathfrak{m}[T]^\infty$. $\square$

2.2 IMPLICITAÇÃO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE SEM PONTOS DE BASE

Suponhamos agora que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, isto é, que a variedade $V(I) \subset \text{Proj}(A)$ é vazia. Como $n \geq 2$ e $\text{prof}_I(A) = n - 1$ (pois $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$) sabemos que o $\mathcal{Z}$ -complexo é exato e, assim, temos o complexo exato

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{Z}_1 \longrightarrow A[T] \longrightarrow S_A(I) \longrightarrow 0.$$

Antes de passarmos à explicitação da equação H através do complexo anterior, destacamos o seguinte resultado que será usado em algumas situações daqui em diante. Este resultado será admitido sem demonstração, para o que referimos a [2, Theorem 2.5] (ver também [14, Theorem 6.6], [13, Theorem 19]).

Teorema 2.2.1 *Seja k um corpo e R , uma k -álgebra graduada standard de dimensão δ . Seja $I = (f_1, \dots, f_n)$ um ideal de R tal que cada f_i é de grau $d \geq 1$ e λ a aplicação racional definida pelos mesmos. Então, se $T = \text{Proj}(A/I)$ é finito sobre k , tem-se:*

$$\text{grau}_{\mathbb{P}_k^{T-1}}(\text{Proj}(A)) - e(T, \text{Proj}(A)) = \begin{cases} \frac{\text{grau}(\lambda) \cdot \text{grau}_{\mathbb{P}_k^{n-1}}(S)}{d^{\delta-1}} & \text{se } \text{codim } S = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde S denota a imagem fechada de λ .

No próximo resultado $\mathcal{Z}_i$ e $S_A(I)_v$ denotam, respectivamente, a parte graduada de $\mathcal{Z}$ e de $S_A(I)$ correspondente à graduação de A . Observemos que se M é $A[T]$ -módulo bigraduado, então M_v , indexado de acordo com a graduação de A , é naturalmente $k[T]$ -módulo. Observemos ainda que se M é $A[T]$ -módulo bigraduado, então ele é naturalmente $k[T]$ -graduado, assim que $M_\varphi = M \otimes_{k[T]} k[T]_\varphi$ faz sentido para qualquer ideal primo homogêneo $\varphi \subset k[T]$ e é rotineiramente relacionada com a localização homogênea $M_{(\varphi)} = M \otimes_{k[T]} k[T]_{(\varphi)}$.

Teorema 2.2.2 *Sejam I e $\mathfrak{m}$ ideais de A tais que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Seja η um inteiro tal que $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v \geq \eta$. Então o determinante da parte de grau v do $\mathcal{Z}$ -complexo associado a I , o qual é um complexo de $k[T]$ -módulos da forma $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_{n-1})_v \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \longrightarrow A_v[T]$ é exatamente $H^{\text{grau}(\lambda)}$ de grau d^{n-2} .*

Demonstração. Como I é $\mathfrak{m}$ -primário, temos que I é de tipo linear localmente no complementar de $V(\mathfrak{m})$ já que $S_A(I)_P \simeq R_A(I)_P, \forall P$ primo tal que $P \neq \mathfrak{m}$. Fixemos agora $v \geq \eta$ um inteiro. Pela proposição anterior, temos $\text{ann}_{k[T]}(H_0(\mathcal{Z})_v) = \ker(h)$ o qual é um ideal principal gerado por H . Tal ideal será denotado por φ . Além disso, como já observamos, o $\mathcal{Z}$ -complexo associado a I é acíclico e, assim, temos $\det((\mathcal{Z})_v) = \text{div}(H_0(\mathcal{Z})_v) = H^{(\text{length}((S_A(I)_v)_\varphi))}$, onde a primeira igualdade segue de uma propriedade do determinante

de um complexo (ver [11, Theorem 3(vi)]) e a segunda igualdade é a expressão divisorial do segundo membro da primeira igualdade.

Basta então mostrar que $\text{length}((S_A(I)_v)_\varphi) = \text{grau}(\lambda)$. De fato, denotemos $B = \mathcal{R}_A(I)$ a álgebra de Rees de I , que é A -graduada e $A[T]$ -bigraduada, pela mesma razão que o é a álgebra simétrica $S_A(I)$. Observemos que, muito particularmente, $S_A(I)_{(0)} = B_{(0)}$ onde 0 é o ideal primo nulo de A . Por outro lado, para qualquer $A[T]$ -módulo M tem-se $M_\varphi = M \otimes_{k[T]} k[T]_\varphi = M \otimes_{A[T]} A[T]_\varphi = M \otimes_{A_{(0)}[T]} A_{(0)}[T]_\varphi = M_{(0)} \otimes_{A_{(0)}[T]} A_{(0)}[T]_\varphi$, já que $\varphi A[T] \cap A = \{0\}$. Logo, tem-se $S_A(I)_\varphi = B_\varphi$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{length}((S_A(I)_v)_\varphi) &= \text{length}_{k[T]_\varphi} \Gamma(\text{Proj}_A(S_A(I)_\varphi), O_{\text{Proj}_A(S_A(I)_\varphi)}(v)) \\ &= \text{length}_{k[T]_\varphi} \Gamma(\text{Proj}_A(B_\varphi), O_{\text{Proj}_A(B_\varphi)}(v)) \\ &= \dim_{(\frac{k[T]}{\varphi})_\varphi} \Gamma(\text{Proj}_A(B)_\varphi, O_{\text{Proj}_A(B)_\varphi}), \end{aligned}$$

A última igualdade está demonstrada em [2, Theorem 2.5]. Finalmente, temos que $H^{\text{grau}(\lambda)}$ é de grau d^{n-2} de acordo com o teorema anterior. $\square$

No resultado a seguir fornecemos uma cota para o inteiro η nas condições do teorema anterior.

Proposição 2.2.3 *Se $n \geq 3$ então $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v \geq (n-2)(d-1)$.*

Demonstração. Consideremos o complexo de Koszul $K_*(\underline{f}, A)$ associado à sequência $f_1, \dots, f_n$ sobre A e denote por Z_i (respectivamente B_i) seus i -ciclos (respec. seus i -bordos). Como $\text{prof}_{\mathfrak{m}}(A) = \text{prof}_I(A) = n-1$, temos $B_i = Z_i, \forall i \geq 2$, pois sabemos que $\text{prof}_I(A) = n-h$, onde $h = \{\max i, H_i(\underline{f}, A) \neq 0\}$. Observe que $Z_n = 0$, já que $H_n = \{y \in A, y \in (0 : I)\} = 0$ e A é domínio. Logo, $Z_n = 0$. Temos ainda $B_{n-1} \simeq A(-d)$, pois o complexo em questão é $0 \rightarrow K_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow \dots$ e, portanto, $B_n \simeq K_n$. Segue, então, que $H_{\mathfrak{m}}^i(B_{n-1}) = 0, \forall i \neq n-1$. Além disso, vale (vide [2, Proposition 5.5]):

- (1) $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v$ tal que $H_{\mathfrak{m}}^i(Z_i)_v = 0$
- (2) $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(A)_v = 0, \forall v > -(n-1)$.

De (2) concluímos que $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(B_{n-1})_v = H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(Z_{n-1})_v = 0, \forall v \geq d-n+2$ já que $B_{n-1} \simeq A(-d)$.

Observando as seqüências exatas $0 \rightarrow B_{i+1} \rightarrow K_{i+1} \rightarrow B_i \rightarrow 0$ e regraduando os módulos B_{i+1} e K_{i+1} e a aplicação que vai de K_{i+1} para B_i , temos as seqüências exatas $0 \rightarrow B_{i+1}(-d) \rightarrow K_{i+1}(-d) \rightarrow B_i \rightarrow 0, \forall i \geq 2$. Assim, temos $H_{\mathfrak{m}}^i(B_i) = H_{\mathfrak{m}}^i(Z_i)_v = 0, \forall i \geq 2$ e $\forall v \geq (n-2)d-n+2$. Para finalizar, a seqüência exata $0 \rightarrow Z_1(-d) \rightarrow A(-d)^n \rightarrow I \rightarrow 0$ mostra que $H_{\mathfrak{m}}^1(Z_1)_v = 0, \forall v \geq d-n+2$, o que prova o resultado. $\square$

Observação 2.2.4 Notemos que $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I)) = 0 : \mathfrak{m}^\infty$ (saturação de $\mathfrak{m}$ na álgebra simétrica $S_A(I)$). Como I é $\mathfrak{m}$ -primário, $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))$ coincide então com o módulo de torção de $S_A(I)$ como A -módulo. Daí, temos que $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I)) = \ker(S_A(I) \rightarrow R_A(I))$. Ora, este núcleo é gerado por formas bihomogêneas de bigrau (v, u) , onde v é grau nas variáveis originais do anel $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ e u nas variáveis T . Assim, a proposição anterior está dando uma cota inferior para que a torção de $S_A(I)$ se anule, isto é, para que toda bi-forma de bi-grau (v, u) com v superior ou igual a esta cota já seja gerada pelas bi-formas de bi-grau $(v', 1)$, com $v' \leq v$.

2.2.1 Implicação de curvas em $\mathbb{P}_k^2$ sem pontos de base

Consideremos o caso particular $n = 3$. Temos $\mathfrak{m} = (X_1, X_2) \subset A = k[X_1, X_2]$. Sejam $f_1, f_2, f_3 \in A$ polinômios homogêneos de mesmo grau $d \geq 1$ que não têm fatores comuns. Estes polinômios definem uma aplicação regular $\lambda : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ cuja imagem é uma curva C definida por um polinômio irreduzível $g = g(T) \in k[T]$. Todas as hipóteses feitas anteriormente são satisfeitas e, assim, o determinante de cada complexo $(\mathcal{Z})_v, \forall v \geq d-1$, é exatamente $g^{\text{grau}(\lambda)}$. Estes complexos são da forma $0 \rightarrow (\mathcal{Z}_2)_v \rightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \rightarrow A_v[T]$. Mas, $Z_2 \simeq B_2 \simeq A(-d)[T]$, pois $\text{prof}_1(A) \geq 2$. Assim, $(Z_2)_v = 0, \forall v \leq d-1$. Logo, o determinante do complexo $(\mathcal{Z})_{d-1}$, o qual é $g^{\text{grau}(\lambda)}$, é na verdade o determinante da matriz $(\mathcal{Z}_1)_{d-1} \rightarrow A_{d-1}[T]$ de $k[T]$ -módulos, ou seja, é o determinante da primeira sizigias de f_1, f_2, f_3 em grau $d-1$. Este resultado é exatamente o método “moving lines” citado anteriormente.

Exemplo 2.2.5 Sejam $f_1 = X_1^2, f_2 = X_1X_2, f_3 = X_2^2$. Neste caso, a matriz de sizigias de grau $d-1$ é

$$\begin{pmatrix} -T_2 & T_3 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, a equação procurada é $T_2^2 - T_1T_3$.

Exemplo 2.2.6 Consideremos agora os polinômios $f_1 = X_1^3, f_2 = X_1^2X_2, f_3 = X_2^3$. A matriz de sizigias em grau 2 é

$$Z = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ -X_1 & X_2^2 \\ 0 & -X_1^2 \end{pmatrix}.$$

Um elemento genérico de Z é da forma

$$\mathfrak{z} = (\alpha_i X_1 + \beta_i X_2) \begin{pmatrix} X_2 \\ -X_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_i \begin{pmatrix} 0 \\ X_2^2 \\ -X_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i X_1 X_2 + \beta_i X_2^2 \\ -\alpha_i X_1^2 - \beta_i X_1 X_2 + \gamma_i X_2^2 \\ -\gamma_i X_1^2 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in k$. Assim,

$$(t \ u \ v)\mathfrak{z} = (\alpha_i X_1 X_2 + \beta_i X_2^2)t + (-\alpha_i X_1^2 - \beta_i X_1 X_2 + \gamma_i X_2^2)u - \gamma_i X_1^2 v.$$

Donde a matriz

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\alpha_1 u - \gamma_1 v & -\alpha_2 u - \gamma_2 v & -\alpha_3 u - \gamma_3 v \\ \alpha_1 t - \beta_1 u & \alpha_2 t - \beta_2 u & \alpha_3 t - \beta_3 u \\ \beta_1 t + \gamma_1 u & \beta_2 t + \gamma_2 u & \beta_3 t + \gamma_3 u \end{pmatrix}.$$

Especializando para $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0 = \gamma_1, \alpha_2 = 0 = \gamma_2, \beta_2 = 1, \alpha_3 = \beta_3 = 0, \gamma_3 = 1$, vem

$$\Phi = \begin{pmatrix} -u & 0 & -v \\ t & -u & 0 \\ 0 & t & u \end{pmatrix}.$$

Pelos resultados anteriores, temos $g = \det \Phi = u^3 - t^2 v$.

2.2.2 Implicação de superfícies em $\mathbb{P}_k^3$ sem pontos de base

Consideraremos aqui o caso particular $n = 4$. Sejam $f_1, f_2, f_3, f_4 \in A = k[X_1, X_2, X_3]$ polinômios homogêneos de mesmo grau d gerando um ideal (X_1, X_2, X_3) -primário. Seja λ a aplicação regular definida por estes polinômios, cuja imagem é uma superfície definida por um polinômio irreduzível $g = g(T)$. Vimos que o determinante de cada complexo $(\mathcal{Z}_v)_v, \forall v \geq 2(d-1)$ é exatamente $g^{(\text{grau} \lambda)}$. Estes complexos são da forma $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_3)_v \longrightarrow (\mathcal{Z}_2)_v \longrightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \longrightarrow A_v[T]$. Como no caso de curvas temos $Z_3 \simeq A(-d)[T]$, mas aqui $2(d-1) \geq d$, pois $d \geq 1$. Assim, para $v \leq d-1 \leq 2(d-1)-1 \leq 2(d-1)$ temos $(\mathcal{Z}_3)_v = 0$ e o determinante do complexo $(\mathcal{Z}_v)_{d-1}$ é o determinante do complexo $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_2)_v \longrightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \longrightarrow A_v[T]$, o qual é expresso como o produto de dois determinantes dividido por um outro.

Exemplo 2.2.7 Consideremos os polinômios $f_1 = X_1^2, f_2 = X_2^2, f_3 = X_3^2, f_4 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$. Aplicando o método em grau $v = 2(2-1) = 2$, obtemos as três matrizes do complexo que são respectivamente (da direita para a esquerda) de tamanho $6 \times 6, 9 \times 4, 4 \times 1$. O determinante deste complexo é o produto de dois determinantes de tamanho 6×6 e 1×1 dividido por outro de tamanho 3×3 (cf. [6]), a saber, $(T_1 + T_2 + T_3 - T_4)^4$. Como o grau da aplicação λ é igual a 4, a equação implícita é $T_1 + T_2 + T_3 - T_4 = 0$.

2.3 IMPLICITAÇÃO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE COM PONTOS DE BASE L.C.I.

A partir de agora, suporemos que o ideal $I = (f_1, \dots, f_n)$ é l.c.i. em $\text{Proj}(A)$ e de altura $n - 2$, isto é, $\mu(I_P) = \text{codim}(I_P) = n - 2, \forall P \in \text{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{m})$. Nestas condições, temos $\text{alt}(I) = \text{prof}_I(A) = n - 2 < \text{prof}_{\mathfrak{m}}(A) = n - 1$. Logo, o $\mathcal{Z}$ -complexo associado a I é acíclico. Como no caso sem pontos de base obtemos o complexo exato $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_{n-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathcal{Z}_1) \longrightarrow A[T] \longrightarrow S_A(I) \longrightarrow 0$. O próximo resultado

relaciona, como no caso anterior, a equação implícita procurada com uma parte graduada do $\mathcal{Z}$ -complexo associado a I .

Teorema 2.3.1 *Seja $I = (f_1, \dots, f_n)$ um ideal satisfazendo às condições anteriores. Seja η um inteiro tal que $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v \geq \eta$. Então, o determinante da parte de grau v do $\mathcal{Z}$ -complexo associado a I , o qual é um complexo de $k[T]$ -módulos da forma $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_{n-1})_v \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \longrightarrow A_v[T]$, é exatamente $g^{(\text{grau} \lambda)}$, de grau $d^{n-2} - \dim_k \Gamma(\mathbb{T}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$, onde $\mathbb{T} = \text{Proj}(A/I)$ e g é a equação da imagem da aplicação racional λ definida pelos f_i 's.*

Demonstração. Como I é l.c.i. em $\text{Proj}(A)$ temos que I é de tipo linear localmente no complementar de $V(\mathfrak{m})$ pelo mesmo argumento do caso sem pontos de base. Seja v um inteiro maior do que ou igual a η . Pela proposição 2.1.1 temos $\text{ann}_{k[T]}(H_0(\mathcal{Z})_v) = \ker(h)$ o qual é um ideal principal gerado por g . Além disso, o $\mathcal{Z}$ -complexo associado a I é exato e, assim, pelo mesmo argumento usado no caso sem pontos de base concluímos que $\det((\mathcal{Z})_v) = g^{\text{grau}(\lambda)}$. Finalmente, o teorema 2.2.1 mostra que o polinômio $g^{\text{grau}(\lambda)}$ é de grau $d^{n-2} - e(\mathbb{T}, \text{Proj}(A))$. Como $\mathbb{T}$ é l.c.i., a multiplicidade algébrica é igual à soma dos comprimentos das localizações (homogêneas) nos ideais primos correspondentes àqueles pontos. Além disso, temos $\dim(\mathbb{T}) = n - 1 - (n - 2) = 1$. Portanto, temos $e(\mathbb{T}, \text{Proj}(A)) = \dim_k \Gamma(\mathbb{T}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$. $\square$

Como no caso sem pontos de base procuramos dar uma cota para o inteiro η .

Proposição 2.3.2 *Suponhamos $n \geq 3$. Considere o ideal $I = (f_1, \dots, f_n)$ nas condições anteriores. Então, $H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v \geq (n - 2)(d - 1)$.*

Demonstração. Consideremos, como na demonstração da Proposição 2.2.3, o complexo de Koszul $K(\underline{f}, A)$ associado à seqüência $\underline{f} = f_1, \dots, f_n$ sobre A e denote por Z_i (respectivamente B_i) seus i -ciclos (respectivamente seus i -bordos). Como $\text{prof}_{\mathfrak{m}}(A) = n - 1$ e $\text{prof}_{\mathfrak{l}}(A) = n - 2$, concluímos pelo argumento usado em 2.2.3 que $Z_i = B_i, \forall i > 2$. Como na proposição 2.2.3, concluímos que $Z_n = 0$ (e assim $\mathcal{Z}_n = 0$) e que $B_{n-1} \simeq A(-d)$. Temos, portanto, $H_{\mathfrak{m}}^i(B_{n-1}) = 0, \forall i \neq n - 1$. Tem-se ainda neste caso ([2, Proposition 5.5]):

$$(1) H_{\mathfrak{m}}^0(S_A(I))_v = 0, \forall v \text{ tal que } H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{Z}_i)_v = 0, \forall i \geq 1$$

$$(2) H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(A)_v = 0, \forall v > -(n - 1)$$

De (2) concluímos então que $H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(Z_{n-1})_v = H_{\mathfrak{m}}^{n-1}(B_{n-1})_v = 0, \forall v \geq d - n + 2$ (lembre-se de que $B_{n-1} \simeq A(-d)$). Considerando as seqüências exatas (obtidas pela regradação dos módulos) $0 \longrightarrow B_{i+1}(-d) \longrightarrow K_{i+1}(-d) \longrightarrow B_i \longrightarrow 0, \forall i \geq 2$, deduzimos via iteração que $H_{\mathfrak{m}}^i(B_i)_v = H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{Z}_i)_v = 0, \forall i \geq 3$ e $\forall v \geq (n - 3)d - n + 2$ e que $H_{\mathfrak{m}}^2(B_2)_v =$

$0, \forall v \geq (n-2)d - n + 2$. Além disso, a seqüência exata $0 \longrightarrow Z_1(-d) \longrightarrow A(-d)^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$ mostra que $H_{\mathfrak{m}}^1(Z_1)_v = 0, \forall v \geq d - n + 2$. Para finalizar, resta mostrarmos que $H_{\mathfrak{m}}^2(Z_2)_v = 0, \forall v \geq (n-2)d - n + 2$. De fato isto ocorre pois $H_{\mathfrak{m}}^2(H_2(f, A)) = 0$, já que $H_2(f, A)$ tem suporte em $V(I)$ e tem dimensão 1. Sendo assim, a seqüência exata $0 \longrightarrow B_2 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow H_2 \longrightarrow 0$ mostra que $H_{\mathfrak{m}}^2(Z_2)_v = 0, \forall v$ tal que $H_{\mathfrak{m}}^2(B_2)_v = 0$ e, como vimos, isto ocorre para todo $v \geq (n-2)d - n + 2$. $\square$

Como no caso sem pontos de base, vamos considerar os casos particulares de curvas e superfícies.

2.3.1 Implicação de curvas em $\mathbb{P}_k^2$ com pontos de base

Suponhamos $n = 3$. Sejam f_1, f_2, f_3 polinômios homogêneos de mesmo grau $d \geq 1$ em $A = k[X_1, X_2]$ de forma que f_1, f_2, f_3 tenham um fator comum. De acordo com os resultados anteriores, o determinante de cada complexo $(\mathcal{Z}_\bullet)_v, \forall v \geq d - 1$ é exatamente $g^{(grau\lambda)}$, onde g é o polinômio irredutível que define a curva em questão. Estes complexos são da forma $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_2)_v \longrightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \longrightarrow A_v[T]$. Observe que aqui não podemos usar o mesmo argumento que no caso sem pontos de base já que aqui $\text{prof}_I(A) = 2$ e, portanto, não temos $\mathcal{Z}_2 \simeq A(-d)[T]$. O determinante do complexo $(\mathcal{Z}_\bullet)_{d-1}$ é obtido como o quociente de dois determinantes (cf. [6]).

Exemplo 2.3.3 Considere os polinômios $f_1 = X_1^3, f_2 = X_1^2 X_2, f_3 = X_1 X_2^2$. A primeira

matriz à direita é $\begin{pmatrix} -T_2 & -T_3 & -T_3 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & -T_3 \\ 0 & T_1 & 0 & T_2 \end{pmatrix}$ e a segunda é dada por $\begin{pmatrix} -T_3 \\ T_2 \\ 0 \\ -T_1 \end{pmatrix}$

A equação implícita é obtida então como o quociente $\frac{\det \begin{pmatrix} -T_2 & -T_3 & -T_3 \\ T_1 & 0 & T_2 \\ 0 & T_1 & 0 \end{pmatrix}}{|-T_1|}$

(É importante observarmos que a escolha dos menores não altera a equação obtida.)

2.3.2 Implicação de superfícies em $\mathbb{P}_k^3$ com l.c.i. pontos de base

Suponhamos agora $n = 4$. Sabemos que a equação procurada é dada pelo determinante do complexo $(\mathcal{Z}_\bullet)_v, \forall v \geq 2(d-1)$. Como vimos, estes complexos são da forma $0 \longrightarrow (\mathcal{Z}_3)_v \longrightarrow (\mathcal{Z}_2)_v \longrightarrow (\mathcal{Z}_1)_v \longrightarrow A_v[T]$ e aqui temos $\mathcal{Z}_3 \simeq A(-d)[T]$ já que $\text{prof}_I(A) = 2$. Concluimos, então, que a equação implícita procurada é dada pelo produto de dois determinantes dividido por um outro.

Exemplo 2.3.4 Consideremos os polinômios

$$f_1 = X_1X_3^2, f_2 = X_2^2(X_1 + X_3), f_3 = X_1X_2(X_1 + X_3), f_4 = X_2X_3(X_1 + X_3).$$

Aplicando o método descrito em grau $2(3 - 1) = 4$, obtemos a equação implícita como o quociente $\frac{\Delta_0\Delta_2}{\Delta_1}$ onde Δ_0 é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_3 & T_2 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_3 & 0 & T_2 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_4 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & -T_4 & 0 & 0 & 0 \\ T_4 & 0 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_3 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T_4 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & 0 & 0 & -T_4 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 & 0 \\ -T_4 & 0 & T_4 & 0 & 0 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_1 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & -T_1 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

Δ_1 é o determinante de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & 0 & -T_4 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_3 & 0 \\ 0 & -T_1 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & -T_1 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & T_2 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_1 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

e Δ_2 é o determinante de

$$\begin{pmatrix} 0 & -T_4 & T_1 \\ 0 & T_1 & 0 \\ -T_1 & 0 & T_1 \end{pmatrix}$$

Efetuada os cálculos, concluímos que a equação implícita é $T_1T_2T_3 + T_1T_2T_4 - T_3T_4^2$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. F. Andrade e A. Simis, *Tópicos de Álgebra Comutativa*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas-MG, 1981.
- [2] L. Busé and J.-P. Jouanolou, On the closed image of a rational map and the implicitization problem. *J. Algebra* **265** (2003), n.1, 312–357.
- [3] L. Busé and M. Chardin, Implicitizing rational hypersurfaces using approximation complexes, *J. Symb. Algebra*, *em publicação*.
- [4] D. A. Cox, Equations of parametric curves and surfaces via sygygies, *Contemporary Mathematics* **286** (2001) 1–20.
- [5] D. A. Cox, H. Schenck, Local complete intersections in $\mathbb{P}^2$ and Koszul sygygies, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131**, No. 7 (2003), 2007–2014.
- [6] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.
- [7] D. A. Buchsbaum, D. Eisenbud, What makes a complex exact?, *J. of Algebra* **2(5)** (1973) 259–268.
- [8] J. Herzog, A. Simis, W. Vasconcelos, Approximation complexes of blowing-up rings, *J. of Algebra* **74** (1982) 466–493.
- [9] J. Herzog, A. Simis, W. Vasconcelos, Approximation complexes of blowing-up rings II, *J. of Algebra* **82** (1983) 53–83.
- [10] J. Herzog, A. Simis, W. Vasconcelos, Koszul homology and blowing-up rings, *in* COMMUTATIVE ALGEBRA, Proceedings of the Trento Conference (Silvio Greco and Giuseppe Valla, Eds.), **Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 84**, Marcel-Dekker, New York, (1983), 79–169 (1983) 53–83.
- [11] F. Knudsen, D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on Det and Div, *Math. Scand.* **39** (1976) 19–55.
- [12] A. Simis, Algebraic aspects of tangent cones, *in* XII ESCOLA DE ÁLGEBRA, Proceedings of Diamantina D. Avritzer and M. Spira, Eds.), Brazil, July 1992, **Matemática Contemporânea**, vol. 7, 1994, pp. 71–127.

- [13] A. Simis, *Álgebras Notáveis em Álgebra Comutativa*, Notas de conferências, Universidade do Porto, maio, 2004 Disponível eletronicamente: www.fc.up.pt/cmup/monograph/Porto2004Roteiro.pdf).
- [14] A. Simis, B. Ulrich, W. Vasconcelos, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **130**, (2001), 237–257.
- [15] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, vol.1, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [16] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 1993.