

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática

**Propagação Espacial de Epidemias:
Threshold e Ondas Viajantes**

Wallisom Rosa

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife

agosto de 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Wallisom Rosa

Propagação Espacial de Epidemias: Threshold e Ondas Viajantes

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado em Matemática do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. César Augusto Rodrigues Castilho, PhD*

Recife

agosto de 2005

Rosa, Wallison.

Propagação espacial de epidemias: Threshold e ondas viajantes./ Wallison .Rosa. - Recife : O Autor, 2005.

53 folhas. il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2005.

Inclui bibliografia.

1.Equações integrais (Do tipo Volterra e do tipo Fredholm) 2. Epidemiologia – Propagação Espacial (Threshold e ondas viajantes) I. Título.

519.642

CDU (2.ed.)

UFPE

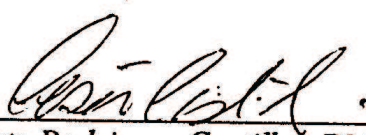
515.45

CDD (22.ed.)

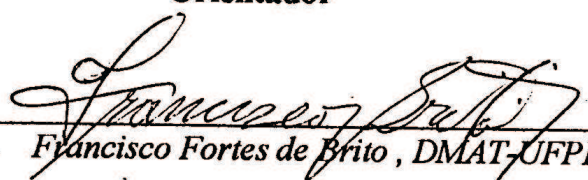
MEI2006-002

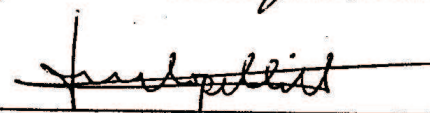
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE

Orientador


Francisco Fortes de Brito, DMAT-UFPE


Mauro Copelli, DF-UFPE

PROPAGAÇÃO ESPACIAL DE EPIDEMIAS: THRESHOLD E ONDAS VIAJANTES

Por
Wallisom da Silva Rosa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Agosto - 2005

Aos meus pais, à Bodeida e às Minas Gerais.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, aos meus pais – Adão Tomaz Rosa e Inez da Silva Rosa – pela educação, amor e apoio financeiro nos momentos em que precisei. Serei eternamente grato!

À minha mulher, Evaneide Alves Carneiro (Bodeida), pelo amor e dedicação. Obrigado por me incentivar e sempre acreditar em minha capacidade, e simplesmente, por fazer parte da minha vida!

Aos meus irmãos, Angélica e William e seus respectivos cônjuges, Waldomiro e Wilsa. E à minha linda sobrinha, Carolina. A distância só aumenta minhas saudades de todos vocês.

A todos os meus familiares, em especial à minha madrinha, Tia Deijinha.

Aos meus eternos professores, com quem aprendi e continuo aprendendo a cada dia. Destacam-se: Olimpio Hiroshi Miyagaki, Marinês Guerreiro, Simone Maria de Moraes e Margareth da Silva Alves da Universidade Federal de Viçosa, César Castilho, Cláudio Vidal, Francisco Brito, Paulo Santiago e Marcus Vinícius, da Universidade Federal de Pernambuco e Roberto Bedregal, da Universidade Federal da Paraíba. Aprendi muito com todos vocês, tanto dentro como fora das salas de aula.

Aos que, até o momento, nunca foram meus professores e que, de forma indireta, me incentivaram a gostar ainda mais da Matemática, seja através de sua postura e ética ou através de seus livros, seus trabalhos e até mesmo seus discursos políticos. São eles: Elon Lages Lima, Hildeberto Cabral e Manoel Lemos.

Aos funcionários do Departamento de Matemática, da Biblioteca e das áreas onde trabalhei: Área II e CFCH.

A todos os que foram meus alunos nos cursos de Administração, Biomédicas, Ciência da Computação, Ciências Contábeis, Economia, Física, Matemática, Química, Engenharias Civil e de Produção.

Ao meu orientador – César Castilho – pelo auxílio nesta empreitada e pela amizade.

Aos professores da banca: César Castilho, Francisco Brito e Mauro Copelli.

Aos amigos que compartilharam essa fase da minha vida contribuindo de alguma forma para a realização deste trabalho. Valeu a força!

Enfim, obrigado a todos que contribuíram direta ou indiretamente na produção desse trabalho.

Apoio financeiro: CNPQ.

Por que vocês não sabem do lixo ocidental?

Não precisam mais temer

Não precisam da solidão

Todo dia é dia de viver

Por que você não verá meu lado ocidental?

Não precisa medo não

Não precisa da timidez

Todo dia é dia de viver

Eu sou da América do Sul

Eu sei, vocês não vão saber

Mas agora sou cowboy

Sou do ouro, eu sou vocês

Sou do mundo, sou Minas Gerais.

— MILTON NASCIMENTO (Para Lennon e McCartney)

Resumo

Uma equação integral não linear do tipo mista Volterra - Fredholm descrevendo a propagação espacial de uma epidemia é desenvolvida e analisada. Uma atenção especial é dada ao efeito hair-trigger, onde demonstramos o Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall. Outro enfoque importante é o problema das ondas viajantes, onde analisamos como as soluções da equação integral se aproximam da distribuição final. A referência principal do trabalho é o artigo [1] “*Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*”, de O. Diekmann.

Palavras Chave: Efeito Hair-Trigger, Fenômeno Threshold, Ondas Viajantes.

Abstract

The aim of this work is to develop and analyze a nonlinear integral equation of the type mixed Volterra-Fredholm describing the epidemics spatial spread. A special attention is given to the hair-trigger effect, where we demonstrate the Kendall's Pandemic Threshold Theorem. Also, the Traveling Wave problem is emphasized as we analyze how the solutions of the integral equation approach the final distribution. The main reference of this work is the paper [1] "*Thresholds and traveling waves for the geographical spread of infection*", by O. Diekmann.

Key Words: Hair-Trigger Effect, Threshold Phenomenon, Traveling Waves.

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xiii
Abstract	xv
Introdução	1
1 Epidemias Determinísticas Espaciais	3
1.1 O Modelo	3
1.2 Casos Especiais Importantes	7
2 Equações Integrais	13
2.1 Equações Integrais do tipo Volterra e do tipo Fredholm	13
2.2 O Princípio da Contração	15
2.3 Existência, Unicidade e Dependência Contínua	18
3 O Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall	25
3.1 O Problema de Valor Inicial	25
3.2 A Equação da Medida Final	36

4 Ondas Viajantes	41
4.1 Uma Equação Não Linear de Convolução	41
4.2 Ondas Viajantes	45
Bibliografia	53

Introdução

Em 1927, Kermack e McKendrick propuseram, em [9], um modelo determinístico para a evolução, com o tempo, de uma doença contagiosa em uma população fechada. O modelo conduz a uma equação integral não linear do tipo Volterra. Acima de tudo, a análise desta equação revela que, alongo prazo, uma fração da população suscetível escapa de ser infectada.

Um caso especial do modelo de Kermack e McKendrick conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Em [8], Kendall introduz um análogo espacial desse sistema tomando a infectividade como a média espacial ponderada da densidade de infectivos. Nesse caso, a fração final de suscetíveis que escapa de ser infectada é uma função da posição e é encontrada a partir de uma solução de uma equação integral não linear. Esse resultado é chamado de efeito “*hair-trigger*”, ou seja, não importa quão pequena é a infectividade introduzida em algum ponto, esta produzirá um grande efeito em todos os pontos.

Este trabalho tem como objetivo modelar a propagação espacial de uma epidemia e estudar como se dá esta propagação. Consideraremos um modelo espacial análogo ao modelo de Kermack e McKendrick e provaremos o efeito hair-trigger. Com isso podemos afirmar, sob certas condições, se haverá ou não uma epidemia garantindo inclusive qual fração da população de suscetíveis escapará de ser infectada. Esta dissertação se concentra no artigo [1] “*Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*”, de Diekmann.

No capítulo 1 construímos um modelo espacial para uma epidemia em uma população fechada vivendo em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dividida em classes de suscetíveis e infectados. O modelo é descrito por uma equação integral do tipo mista Volterra-Fredholm, a equação

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\Omega} g(u(t - \tau, \xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f(t, \mathbf{x}). \quad (1.12)$$

Alguns casos especiais desta equação serão destacados: uma *epidemia simples* e uma

epidemia geral.

No capítulo 2, daremos um resumo da teoria das equações integrais que utilizaremos durante toda a dissertação. Definiremos as equações integrais do tipo Volterra e do tipo Fredholm e discutiremos a existência, unicidade e a dependência contínua das soluções destas equações. Todos os resultados seguem diretamente do “*Teorema do Ponto Fixo de Banach*” e de seus corolários. Este capítulo poderia ter sido colocado como um apêndice já que não é o enfoque principal do trabalho. Porém, o conhecimento dele ajuda na compreensão do capítulo 3.

No capítulo 3, resolvemos um problema de valor inicial para a equação integral encontrada no capítulo 1, a equação (1.12), que modela a propagação espacial de uma epidemia. Mostraremos que a equação (1.12) possui uma única solução e discutiremos o comportamento assintótico desta. O resultado principal desse capítulo é o “*Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall*” que garante, através do *fenômeno Threshold*, que o efeito hair-trigger ocorre se Ω é compacto. O problema torna-se muito mais interessante se Ω não é compacto.

O capítulo 4 trata do caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e, portanto, não é compacto. Adicionando mais hipóteses, podemos concluir, para $n = 1$ ou $n = 2$, que as soluções de (1.12) também estabilizam e também ocorre o efeito hair-trigger. Depois disso, partiremos para uma outra discussão:

Como as soluções se aproximam da distribuição final?

Esta questão será também resolvida nesse capítulo, na seção 4.2, com o estudo das *ondas viajantes*.

Epidemias Determinísticas Espaciais

Nesse capítulo construiremos um modelo matemático para a propagação espacial de uma epidemia em uma população fechada e veremos alguns casos especiais deste.

1.1 O Modelo

Considere uma população vivendo em um habitat Ω (um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$) e suscetível a alguma doença contagiosa. Nosso objetivo inicial é desenvolver heurísticamente uma equação para a evolução de uma epidemia em uma população com base em algumas hipóteses simples.

O único fenômeno dinâmico que consideraremos é a infecção. Simplesmente ignoraremos efeitos de mudanças devido à natalidade, migração, etc. Assumimos que existe uma dependência espacial que manifesta-se sobre a possibilidade de um indivíduo infeccioso na posição x_1 ser capaz de infectar um indivíduo suscetível na posição x_2 . Nestas condições podemos modelar de forma análoga fenômenos como a propagação de um incêndio em uma floresta, a proliferação pelo vento de sementes de ervas daninhas, ou o contágio entre animais (ou pessoas) que perambulam pelo dia e retornam para seus lares à noite.

Sejam $S(t, \mathbf{x})$ e $I(t, \mathbf{x})$ as densidades de *suscetíveis* e *infectados*, respectivamente, no instante t e posição $\mathbf{x}$. Seja $i(t, \tau, \mathbf{x})d\tau$ a densidade de infectados que se infectaram num instante entre $t - \tau$ e $t - \tau - d\tau$. Então

$$I(t, \mathbf{x}) = \int_0^\infty i(t, \tau, \mathbf{x})d\tau. \quad (1.1)$$

Supomos que o tamanho da população é suficientemente grande e assim podemos considerar as variáveis S , I e i como funções reais contínuas, ou até mesmo continuamente diferenciáveis, de seus argumentos.

Seja $B = B(t, \mathbf{x})$ a *infectividade*, definida como a taxa em que suscetíveis tornam-se infectados. As hipóteses básicas são:

(i) a doença induz uma imunidade permanente, isto é, uma vez infectado o indivíduo não volta a ser suscetível;

(ii) uma função não-negativa $A = A(\tau, \mathbf{x}, \xi)$ é tal que

$$B(t, \mathbf{x}) = \int_0^\infty \int_\Omega i(t, \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau. \quad (1.2)$$

Assim, $A(\tau, \mathbf{x}, \xi)$ descreve a infectividade em $\mathbf{x}$ devido a um indivíduo na posição ξ que está infectado há um tempo τ .

Muitas das características da doença e do habitat são incorporadas em A .

As definições e hipóteses acima nos levam ao seguinte modelo:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = -S(t, \mathbf{x})B(t, \mathbf{x}), \quad (1.3)$$

$$i(t, 0, \mathbf{x}) = -\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}), \quad (1.4)$$

$$i(t, \tau, \mathbf{x}) = i(t - \tau, 0, \mathbf{x}). \quad (1.5)$$

Das equações (1.3), (1.4) e (1.5) temos:

$$i(t, \tau, \xi) = i(t - \tau, 0, \xi) = -\frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi).$$

Por (1.2), (1.3) e da relação acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= -S(t, \mathbf{x})B(t, \mathbf{x}) \\ &= -S(t, \mathbf{x}) \int_0^\infty \int_\Omega i(t, \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \\ &= S(t, \mathbf{x}) \int_0^\infty \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = S(t, \mathbf{x}) \int_0^\infty \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau. \quad (1.6)$$

As soluções de (1.6) estão definidas pelo menos para $-\infty < t \leq T$, para algum T finito.

Um *Problema de Valor Inicial* apropriado é dado por

$$i(0, \tau, \mathbf{x}) = i_0(\tau, \mathbf{x}) \quad e \quad S(0, \mathbf{x}) = S_0(\mathbf{x})$$

restringindo a validade das equações dinâmicas para $t > 0$. Daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = S(t, \mathbf{x}) & \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + \right. \\ & \left. + \int_t^{\infty} \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \right\} \end{aligned}$$

Mudando a variável τ para $\tau - t$ na segunda integral e usando a equação (1.4) junto com a relação $i_0(\tau, \mathbf{x}) = i(-\tau, 0, \mathbf{x})$ obtemos, ao invés de (1.6):

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = S(t, \mathbf{x}) \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau - h(t, \mathbf{x}) \right\}, \quad (1.7)$$

onde

$$h(t, \mathbf{x}) = \int_0^{\infty} \int_{\Omega} i_0(\tau, \xi) A(t + \tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau. \quad (1.8)$$

Assumindo $S_0(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, integramos (1.7) com relação a t obtendo¹

$$\ln \frac{S(t, \mathbf{x})}{S_0(\mathbf{x})} = \int_0^t \int_0^v \int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial v}(v - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau dv - \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv.$$

No plano - $v\tau$ a região de integração é dada por

$$\{(v, \tau) / 0 \leq v \leq t, 0 \leq \tau \leq v\}$$

que (veja a figura 1.1) pode ser reescrita como

$$\{(v, \tau) / 0 \leq \tau \leq t, \tau \leq v \leq t\}.$$

¹Basta observar que $\frac{\partial}{\partial t} \left[\ln \frac{S(t, \mathbf{x})}{S_0(\mathbf{x})} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\ln(S(t, \mathbf{x})) - \ln(S_0(\mathbf{x})) \right] = \frac{1}{S(t, \mathbf{x})} \cdot \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x})$.

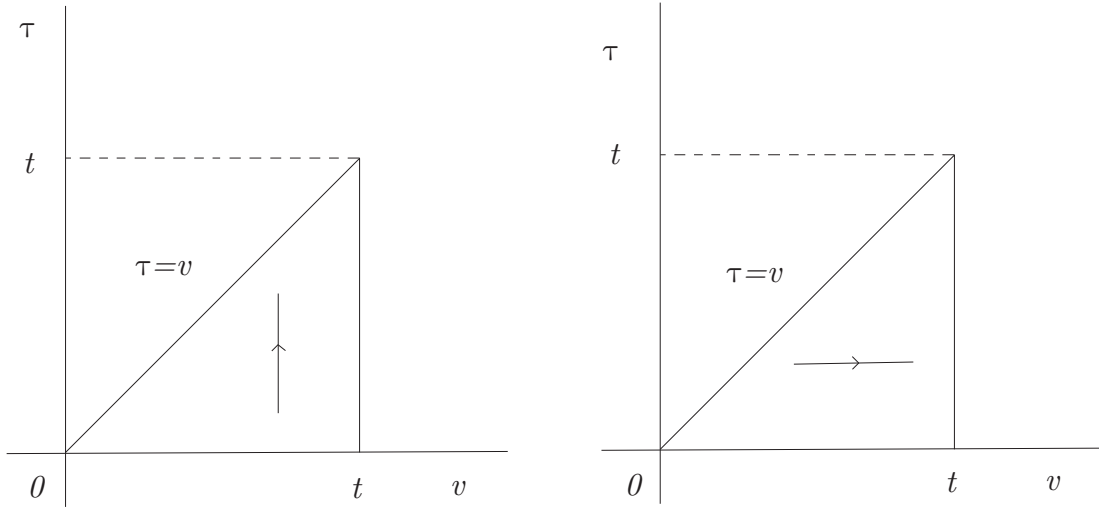


Figura 1.1

Portanto, trocando a ordem de integração na integral anterior temos:

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{S(t, \mathbf{x})}{S_0(\mathbf{x})} &= \int_0^t \int_\tau^t \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial v}(v - \tau, \xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi dv d\tau - \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv \\
 &= \int_0^t \int_\Omega A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi \int_\tau^t \frac{\partial S}{\partial v}(v - \tau, \xi) dv d\tau - \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv \\
 &= \int_0^t \int_\Omega A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi [S(t - \tau, \xi) - S(0, \xi)] d\tau - \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv \\
 &= \int_0^t \int_\Omega [S(t - \tau, \xi) - S_0(\xi)] A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau - \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 -\ln \frac{S(t, \mathbf{x})}{S_0(\mathbf{x})} &= \int_0^t \int_\Omega [S_0(\xi) - S(t - \tau, \xi)] A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv \\
 &= \int_0^t \int_\Omega \left[1 - \frac{S(t - \tau, \xi)}{S_0(\xi)} \right] S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv \\
 &= \int_0^t \int_\Omega \left[1 - e^{-\left(-\ln \frac{S(t, \mathbf{x})}{S_0(\mathbf{x})} \right)} \right] S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv.
 \end{aligned}$$

Se fizermos

$$u(t, \mathbf{x}) = -\ln \frac{S(t, \mathbf{x})}{S_0(\mathbf{x})} \quad (1.9)$$

$$g(y) = 1 - e^{-y} \quad (1.10)$$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int_0^t h(v, \mathbf{x}) dv \quad (1.11)$$

então, finalmente, obtemos a equação

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\Omega} g(u(t - \tau, \xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f(t, \mathbf{x}). \quad (1.12)$$

que será o objeto desse trabalho.

Até certo ponto a forma específica da função de forçamento f será irrelevante; tudo que vamos exigir é que f seja não-negativa e não-decrescente com respeito a t .

Para concluir esta seção faremos algumas observações em relação aos aspectos biológicos do modelo.

Observação 1.1.1. *Se Ω é limitado, a influência da fronteira é incorporada na função A . Por exemplo, se Ω é uma plantação e o vento está agindo como uma força motriz para o espalhamento de sementes, então a fronteira $\partial\Omega$ não influencia ativamente na dispersão delas e todas as que caem fora de Ω não interagem com o sistema.*

Observação 1.1.2. *Uma outra característica de A é sua ligação com o tempo τ de duração da doença e as variáveis espaciais $\mathbf{x}$ e ξ . Mais uma vez, esta ligação varia conforme o mecanismo considerado.*

1.2 Casos Especiais Importantes

Vejamos algumas aplicações do modelo construído na seção anterior.

Um caso especial importante ocorre se supomos

$$A(\tau, \mathbf{x}, \xi) = H(\tau)W(\mathbf{x}, \xi), \quad (1.13)$$

onde

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} = 1. \quad (1.14)$$

Isso significa que estamos considerando as partes temporal e espacial da infectividade desacopladas.

A situação simplifica-se bastante se supomos que W depende somente da posição de $\mathbf{x}$ em relação a ξ , isto é,

$$W(\mathbf{x}, \xi) = V(\mathbf{x} - \xi). \quad (1.15)$$

Dois casos especiais da equação (1.7) merecem atenção especial. Ambos os casos têm em comum que $\Omega = \mathbb{R}^n$, que (1.13) a (1.15) ocorrem, e que $i_0(\tau, \mathbf{x}) = j_0(\mathbf{x})\delta(\tau)$ (densidade inicial de infectados; δ é a função delta de Dirac), com $S_0(\mathbf{x}) + j_0(\mathbf{x}) = 1$ (densidade populacional constante). Com estas hipóteses (1.7) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = S(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) H(\tau) d\tau - H(t) j_0(\xi) \right\} V(\mathbf{x} - \xi) d\xi. \quad (1.16)$$

Os dois casos mencionados acima são:

a. Uma epidemia simples: $H(t) \equiv a$.

Uma epidemia que considera a população dividida em *suscetíveis* (**S**) e *infectados* (**I**) é chamada de *epidemia simples*.

De (1.16) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= S(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(t - \tau, \xi) a d\tau - a j_0(\xi) \right\} V(\mathbf{x} - \xi) d\xi \\ &= a S(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ S(t, \xi) - S_0(\xi) - j_0(\xi) \right\} V(\mathbf{x} - \xi) d\xi \\ &= a S(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} (S(t, \xi) - 1) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi \\ &= a S(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} S(t, \xi) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi - a S(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} V(\mathbf{x} - \xi) d\xi \\ &= a S(t, \mathbf{x}) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} S(t, \xi) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi - 1 \right\}, \end{aligned}$$

que escrevemos

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = a S(t, \mathbf{x}) \{ \bar{S}(t, \mathbf{x}) - 1 \}, \quad (1.17)$$

onde $\bar{S}$ é a média espacial ponderada de S definida por

$$\bar{S}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} S(t, \xi) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi. \quad (1.18)$$

b. Uma epidemia geral: $H(t) = ae^{-\mu t}$.

Em uma epidemia geral, além das classes de *suscetíveis* e *infectados*, considera-se também a classe dos *removidos* (**R**) (indivíduos que se recuperaram da doença ou morreram).

Logo

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = -aS(t, \mathbf{x}) \int_{\Omega} \left\{ - \int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \xi) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau + e^{-\mu t} j_0(\xi) \right\} V(\mathbf{x} - \xi) d\xi. \quad (1.19)$$

Defina

$$Y(t, \mathbf{x}) = - \int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau + e^{-\mu t} j_0(\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

Afirmamos que Y e S satisfazem as equações

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = - \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \mu Y(t, \mathbf{x}) \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = -aS(t, \mathbf{x}) \bar{Y}(t, \mathbf{x}), \quad (1.22)$$

onde $\bar{Y}$ é a média espacial ponderada de Y como foi definido em (1.18).

É fácil verificar que S e Y satisfazem a equação (1.22) pois basta identificar em (1.19) a média espacial ponderada de Y .

Quanto à equação (1.21), se Y é dado por (1.20) então

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = - \frac{\partial Y}{\partial t} \left[\int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \right] + j_0(\mathbf{x}) \frac{d}{dt} e^{-\mu t}. \quad (1.23)$$

A proposição a seguir – uma aplicação imediata da Regra de Leibniz² – será útil para prosseguirmos em nossos cálculos.

²Para maiores detalhes sobre a Regra de Leibniz veja [11] pág. 143.

Proposição 1.2.1. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $g : U \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 . Então a função $\phi(\mathbf{x}) = \int_a^{g(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t) dt$ é de classe C^1 e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^{g(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})). \quad (1.24)$$

DEMO: Defina a função $h : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $h(\mathbf{x}, u) = \int_a^u f(\mathbf{x}, t) dt$. Aplicando a Regra de Leibniz e a regra de derivação de uma integral indefinida temos:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}, u) = \int_a^u \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt \quad e \quad \frac{\partial h}{\partial u}(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}, u).$$

Como a integral indefinida de uma função qualquer é contínua e f também é então temos que as derivadas parciais $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial h}{\partial u}$ são contínuas. Logo, h é de classe C^1 .

Podemos então aplicar a Regra da Cadeia para a função $\phi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ e daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial h}{\partial u}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \\ &= \int_a^{g(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})). \quad \square \end{aligned}$$

Vamos aplicar esta proposição para o caso mais simples em que g é a identidade de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Assim se

$$f(t, \tau) = \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mu(t-\tau)}$$

então, pela proposição (1.2.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t f(t, \tau) d\tau \right] &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau + f(t, t) \\ &= -\mu \int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau + \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Voltando à equação (1.23) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \mu \int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau - \frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \mu j_0(\mathbf{x}) e^{-\mu t} \\ &= -\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \mu \left[-\int_0^t \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau + \mu j_0(\mathbf{x}) e^{-\mu t} \right] \\ &= -\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \mu Y(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Logo Y e S satisfazem as equações (1.21) e (1.22). As equações (1.21) e (1.22) admitem a seguinte interpretação: Y é a densidade de infectados, todo infectado tem infectividade constante a , e os infectados são removidos com taxa μ .

Equações Integrais

Faremos aqui um resumo da teoria de equações integrais que utilizaremos no decorrer do texto. Definiremos as equações integrais do tipo Volterra e Fredholm e mostraremos condições necessárias para a existência, unicidade e dependência contínua das soluções destas equações. Todos os resultados desse capítulo decorrem imediatamente do “Teorema do Ponto Fixo de Banach” e de seus corolários.

2.1 Equações Integrais do tipo Volterra e do tipo Fredholm

Sejam $K(t, s)$ uma função real (ou complexa) definida em¹ $[a, b] \times [a, b]$, $f(t)$ uma função real (ou complexa) definida em $[a, b]$ e λ um número complexo arbitrário.

Uma “*equação integral linear do tipo Fredholm de segunda espécie*” para uma função $y(t)$ é uma equação do tipo

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)y(s)ds = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (2.1)$$

enquanto uma “*equação integral linear do tipo Fredholm de primeira espécie*” é da forma

$$\int_a^b K(t, s)y(s)ds = f(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (2.2)$$

Em ambos os casos K é contínua em $[a, b] \times [a, b]$ ou, ao menos, as descontinuidades de K são tais que a integral dupla

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(t, s)|dsdt$$

¹Podemos trocar $[a, b]$ por qualquer subconjunto mensurável limitado da reta real.

converja (seja finita).

As equações integrais *não-lineares* do tipo Fredholm de primeira e segunda espécie são dadas, respectivamente, por²

$$\int_a^b K(t, s, y(s)) ds = f(t). \quad (2.3)$$

e

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t, s, y(s)) ds = f(t) \quad (2.4)$$

Se considerarmos um domínio n -dimensional Ω para a função y , ao invés das equações (2.1) e (2.4) teremos as equações:

$$y(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \alpha) y(\alpha) d\alpha = f(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

e

$$y(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \alpha, y(\alpha)) d\alpha = f(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{x}, \alpha \in \Omega$ e $d\alpha$ é o elemento de volume em Ω .

Um outro tipo de equações integrais são as do tipo Volterra. Estas possuem a propriedade de que $K(t, s)$ é limitada e quando $\tau > t$ tem-se $K(t, \tau) = 0$. Com esta condição temos:

$$\int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau = \int_a^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau.$$

Assim, uma “*equação integral linear do tipo Volterra*” é dada por

$$y(t) - \lambda \int_a^t K(t, s) y(s) ds = f(t) \quad (2.7)$$

e uma “*equação integral não-linear do tipo Volterra*” é dada por

$$y(t) - \lambda \int_a^t K(t, s, y(s)) ds = f(t). \quad (2.8)$$

Note que o parâmetro λ pode ser sempre tomado como sendo 1. Basta definir uma nova função K^* pondo $K^* = \lambda K$.

²Aqui K é uma função real(ou complexa) definida em $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$.

2.2 O Princípio da Contração

Faremos aqui uma breve apresentação de um dos teoremas mais importantes no estudo das equações diferenciais e integrais: o “Teorema do Ponto Fixo de Banach”.

Um *ponto fixo* de uma transformação $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é um ponto $x \in \mathcal{X}$ tal que $Tx = x$. Se $\mathcal{F}$ é um subconjunto de um espaço de Banach $\mathcal{X}$ e T é uma transformação de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach, então T é uma *contração* em $\mathcal{F}$ se existe λ , $0 \leq \lambda < 1$, tal que

$$|Tx - Ty| \leq \lambda |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathcal{F}.$$

A constante λ é chamada de *constante de contração* para T em $\mathcal{F}$.

Teorema 2.2.1. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Se $\mathcal{F}$ é um subconjunto fechado de um espaço de Banach $\mathcal{X}$ e $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é uma contração em $\mathcal{F}$, então T tem um único ponto fixo $\bar{x}$ em $\mathcal{F}$. Ademais, se x_0 em $\mathcal{F}$ é arbitrário, então a sequência $\{x_n\}$, onde $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, converge para $\bar{x}$ quando $n \rightarrow \infty$ e $|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$, onde $\lambda < 1$ é a constante de contração para T em $\mathcal{F}$.

DEMO: Mostremos primeiro a unicidade.

Unicidade

Seja $0 \leq \lambda < 1$ a constante de contração para T em $\mathcal{F}$ e suponha que x e y são dois pontos fixos para T em $\mathcal{F}$, ou seja, $x = Tx$ e $y = Ty$. Então

$$|x - y| = |Tx - Ty| \leq \lambda |x - y|,$$

o que implica:

$$(1 - \lambda)|x - y| \leq 0.$$

Como $0 \leq \lambda < 1$ temos que $|x - y| \leq 0$ e, portanto, $x = y$. $\square$

Existência

Seja x_0 arbitrário em $\mathcal{F}$, e $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Por hipótese, cada x_n , $n =$

$0, 1, 2, \dots$ pertence a $\mathcal{F}$. Além disso,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^n |x_1 - x_0|, \quad n = 0, 1, \dots$$

Assim, para $m > n$,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + \lambda^n) |x_1 - x_0| \\ &= \lambda^n (1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-n-1}) |x_1 - x_0| \\ &= \frac{\lambda^n (1 - \lambda^{m-n})}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Assim a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy e como $\mathcal{F}$ é um subconjunto fechado em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ (espaço métrico completo) temos que existe $\bar{x} \in \mathcal{F}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

Como T e $|\cdot|$ são contínuas segue que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{m+1} - Tx_m| = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_{m+1} - Tx_m] = [\bar{x} - T\bar{x}],$$

o que implica em $T\bar{x} = \bar{x}$. Isto mostra a existência de um ponto fixo para T em $\mathcal{F}$.

Para provar a estimativa citada, tome o limite quando $m \rightarrow \infty$ na estimativa anterior de $|x_m - x_n|$. Isso completa a demonstração. $\square$

■

Definição 2.2.2. Sejam $\mathcal{F}$ um subconjunto de um espaço de Banach $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ um subconjunto de um espaço de Banach $\mathcal{Y}$ e $\{T_y : y \in \mathcal{G}\}$ uma família de operadores de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{X}$. O operador T_y é uma contração uniforme em $\mathcal{F}$ se $T_y : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ e existe λ , $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$|T_y x - T_y \bar{x}| \leq \lambda |x - \bar{x}|$$

para todo $y \in \mathcal{G}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{F}$. Em outras palavras, T_y é uma contração para cada $y \in \mathcal{G}$ e a constante de contração pode ser escolhida independentemente de $y \in \mathcal{G}$.

A seguir temos um corolário imediato do teorema 2.2.1, o qual será utilizado na demonstração do teorema 3.1.2. Trata-se da dependência contínua do ponto fixo de T_y em relação ao parâmetro y .

Corolário 2.2.3. *Se $\mathcal{F}$ é um subconjunto fechado de um espaço de Banach $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ é um subconjunto de um espaço de Banach $\mathcal{Y}$, $T_y : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é uma contração uniforme em $\mathcal{F}$ e $T_y x$ é contínua em y para cada x fixado em $\mathcal{F}$, então a aplicação $y \mapsto g(y)$, onde $g(y)$ é o ponto fixo de T_y , $y \in \mathcal{G}$, é contínua.*

DEMO: Como $T_y : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é uma contração uniforme, existe λ , $0 \leq \lambda < 1$, tal que $|T_y x - T_y \bar{x}| \leq \lambda |x - \bar{x}|$ para todo $y \in \mathcal{G}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{F}$. Seja $g(y)$ o único ponto fixo de T_y em $\mathcal{F}$ cuja existência é assegurada pelo teorema 2.2.1. Então

$$\begin{aligned} g(y+h) - g(y) &= T_{y+h}g(y+h) - T_y g(y) \\ &= T_{y+h}g(y+h) - T_{y+h}g(y) + T_{y+h}g(y) - T_y g(y), \end{aligned}$$

e

$$|g(y+h) - g(y)| \leq \lambda |g(y+h) - g(y)| + |T_{y+h}g(y) - T_y g(y)|.$$

O que implica:

$$|g(y+h) - g(y)| \leq (1 - \lambda)^{-1} |T_{y+h}g(y) - T_y g(y)|.$$

Como $T_y x$ é contínua em y para cada $x \in \mathcal{F}$ fixado, temos que $g(y)$ é contínua. ■

A seguir temos uma outra importante consequência do teorema do ponto fixo.

Corolário 2.2.4. *Seja $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que, para algum m , a iterada T^m é uma contração. Então T tem um único ponto fixo e, para todo $x_1 \in \mathcal{X}$, a sequência $(T^n x_1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao ponto fixo.*

DEMO: Seja $\bar{x}$ o único ponto fixo de T^m . Provemos que $\bar{x}$ é o único ponto fixo de T . Como $T(T^n x) = T^{n+1} x$, para todo $x \in \mathcal{X}$, temos

$$T\bar{x} = T(T^m \bar{x}) = T^m(T\bar{x}),$$

logo, pela unicidade de $\bar{x}$, $T\bar{x} = \bar{x}$. Por outro lado, como todo ponto fixo de T é ponto fixo de T^m , $\bar{x}$ é o único ponto fixo de T .

A última afirmação decorre da convergência $T^{km}x_1 \rightarrow \bar{x}$, garantida pelo teorema 2.2.1 e de que, para todo r , $1 \leq r \leq m-1$,

$$T^{km+r}x_1 = T^{km}(T^r x_1) \rightarrow \bar{x}.$$

■

2.3 Existência, Unicidade e Dependência Contínua

Vamos agora aplicar o “Teorema do Ponto Fixo de Banach” para obter informações quanto à existência e unicidade das soluções destas equações integrais.

Teorema 2.3.1. *Considere a equação integral linear do tipo Fredholm de segunda espécie*

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)ds = f(t) \quad (2.9)$$

onde $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1/M(b-a)$, onde $M \geq \|K\|$, dada $f \in C([a, b], \mathbb{C})$, existe uma única solução $u \in C([a, b], \mathbb{C})$ da equação integral (2.9).

DEMO: $E = C([a, b], \mathbb{C})$ é um espaço métrico completo. Seja

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

onde

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Um ponto fixo de T é uma solução da equação integral (2.9) e reciprocamente. Portanto, pelo “Teorema do Ponto Fixo de Banach”, é suficiente mostrar que, para

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

T é uma contração.

Com efeito, dados $u, v \in E$, temos

$$(Tu)(t) - (Tv)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)[u(s) - v(s)]ds$$

e, portanto,

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq |\lambda|(b-a)M\|u - v\|,$$

donde segue que

$$\|Tu - Tv\| \leq c\|u - v\|$$

onde $c = |\lambda|(b-a)M < 1$.

■

Teorema 2.3.2. *Seja $K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C})$ lipschitziana na terceira variável e de constante de Lipschitz L . Então, se $|\lambda| < 1/[L(b-a)]$, então, para toda $f \in C([a, b])$, a equação integral não linear do tipo Fredholm de segunda espécie*

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t, s, y(s))ds = f(t) \quad (2.10)$$

tem uma única solução $u \in C([a, b])$.

DEMO: Analogamente a demonstração do teorema anterior, $E = C([a, b], \mathbb{C})$ é um espaço métrico completo. Seja

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

onde

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s, x(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

Por hipótese, dados x_1 e x_2 em $\mathbb{C}$, vale:

$$|K(t, s, x_1) - K(t, s, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Um ponto fixo de T é uma solução da equação integral (2.10) e reciprocamente. Portanto, pelo “Teorema do Ponto Fixo de Banach”, é suficiente mostrar que, para

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)},$$

T é uma contração.

Com efeito, dados $u, v \in E$, temos

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left| \lambda \int_a^b [K(t, s, u(s)) - K(t, s, v(s))] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |K(t, s, u(s)) - K(t, s, v(s))| ds \\ &\leq |\lambda| \int_a^b L |u(s) - v(s)| ds \\ &\leq |\lambda| L(b-a) \|u - v\| \end{aligned}$$

Pela hipótese sobre λ segue o resultado. ■

O teorema a seguir diz respeito à dependência contínua das soluções de (2.9) com relação a f , K e λ e, para demonstrá-lo, faremos uso do seguinte lema:

Lema 2.3.3. *Sejam $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico completo e Λ um espaço topológico. Para todo $\lambda \in \Lambda$, seja $T_\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que*

1. *$(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de contrações localmente uniforme, isto é, para todo $\lambda_0 \in \Lambda$, existem uma vizinhança Λ_0 de λ_0 e uma constante $c_{\Lambda_0} < 1$ tais que*

$$d(T_\lambda x, T_\lambda y) \leq c_{\Lambda_0} d(x, y), \quad x, y \in \mathcal{X}, \quad \lambda \in \Lambda_0.$$

2. *A função $\lambda \in \Lambda \mapsto T_\lambda x \in \mathcal{X}$ é contínua para todo $x \in \mathcal{X}$.*

Então se, para cada $\lambda \in \Lambda$, x_λ denota o ponto fixo de T_λ , a aplicação $\lambda \in \Lambda \mapsto x_\lambda \in \mathcal{X}$ é contínua.

DEMO: Seja $\lambda_0 \in \Lambda$ e Λ_0 como em 1). Temos:

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) &= d(T_\lambda x_\lambda, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \\ &\leq d(T_\lambda x_\lambda, T_\lambda x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \\ &\leq c_{\Lambda_0} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}), \end{aligned}$$

donde

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{1 - c_{\Lambda_0}} d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0})$$

e, por 2), o segundo membro tende a zero quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$. O que conclui a demonstração. ■

Observação 2.3.4. Quando $\Lambda_0 = \Lambda$, dizemos que $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família uniforme de contrações ou, ainda, que a aplicação

$$(\lambda, x) \mapsto T_\lambda x$$

é uma contração uniforme. Esse é o caso abordado no corolário 2.2.3.

Teorema 2.3.5. Sejam $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $|\lambda| < 1/M(b-a)$, onde $\|K\| \leq M$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\tilde{K} \in C([a, b] \times [a, b], \mathbb{C})$, $\tilde{f} \in C([a, b], \mathbb{C})$ satisfazem $\|\tilde{K}\| \leq M$, $\|\tilde{K} - K\| \leq \delta$, $\|\tilde{f} - f\| \leq \delta$ e, se $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ satisfaz $|\tilde{\lambda}| < 1/M(b-a)$ e $|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \delta$, então, se u é solução de

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)y(s)ds = f(t) \quad (2.11)$$

e $\tilde{u}$ é solução de

$$y(t) - \tilde{\lambda} \int_a^b \tilde{K}(t, s)y(s)ds = \tilde{f}(t)$$

temos

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \varepsilon.$$

DEMO: Como na demonstração do teorema 2.2.1, a constante de contração de

$$T = T_{f, \lambda, K} : C([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{C})$$

definida por

$$(T_{f, \lambda, K}x)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

é $c = |\lambda|(b-a)\|K\| < 1$. Fixados λ e K , existe c tal que, para $\tilde{\lambda}$ suficientemente próximo de λ e $\tilde{K}$ suficientemente próximo de K , o mesmo c serve como constante de contração de $\tilde{T}$. Logo, a condição 1) do lema 2.3.3 está satisfeita. Também a condição 2) está satisfeita, logo segue a afirmação.



O próximo teorema diz respeito a existência e unicidade de soluções de equações integrais do tipo Volterra.

Teorema 2.3.6. *Sejam $f \in C([a, b], \mathbb{C})$, $K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$, K lipschitziana na terceira variável. Então a equação integral de Volterra*

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, y(s)) ds, \quad t \in [a, b] \quad (2.12)$$

tem uma única solução $u \in C([a, b], \mathbb{C})$.

DEMO: Seja L a constante de Lipschitz de K , ou seja, tal que

$$|K(t, s, z_1) - K(t, s, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. No espaço métrico completo $E = C([a, b], \mathbb{C})$, consideramos $T : E \rightarrow E$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s)) ds.$$

Vamos demonstrar que existe $m \geq 1$ tal que T^m é uma contração e aplicar o corolário 2.2.4. Para isso, vamos demonstrar que, dados $u, v \in E$, e $t \in [a, b]$, temos

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{L^n (t-a)^n}{n!} \|u - v\|. \quad (2.13)$$

A demonstração é feita por indução sobre n . Para $n = 1$, o resultado é imediato pois

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left| \int_a^t [K(t, s, u(s)) - K(t, s, v(s))] ds \right| \\ &\leq \int_a^t L|u(s) - v(s)| ds \\ &\leq L(t-a)\|u - v\|. \end{aligned}$$

Supondo que a igualdade (2.13) é verdadeira para n , vamos demonstrá-la para $n+1$:

$$\begin{aligned} |(T^{n+1}u)(t) - (T^{n+1}v)(t)| &= |T(T^n u)(t) - T(T^n v)(t)| \\ &= \left| \int_a^t \{K[t, s, (T^n u)(s)] - K[t, s, (T^n v)(s)]\} ds \right| \\ &\leq \int_a^t L|(T^n u)(s) - (T^n v)(s)| ds \\ &\leq \int_a^t L \frac{L^n (s-a)^n}{n!} \|u - v\| ds \\ &\leq \frac{L^{n+1} (t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|. \end{aligned}$$

Logo, (2.13) é verdadeira para todo n e daí, segue que

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{L^n(b-a)^n}{n!} \|u - v\|,$$

e, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n(b-a)^n}{n!} = 0$$

temos que existe um n_0 suficientemente grande tal que T^m é uma contração para todo $m \geq n_0$. Do corolário 2.2.3 segue a conclusão do teorema. ■

Sobre a dependência contínua:

Teorema 2.3.7. *Sejam $f \in C([a, b], \mathbb{C})$, $K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ lipschitziana na terceira variável e u solução de*

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, y(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que, se $\tilde{f} \in C([a, b], \mathbb{C})$, $\tilde{K} \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$, lipschitziana na terceira variável, satisfazem

$$\|\tilde{f} - f\| \leq \delta, \quad |\tilde{K}(t, s, v) - K(t, s, v)| < \delta$$

para $(t, s, v) \in [a, b] \times [a, b] \times \overline{B_c(0)}$, então, se $\tilde{u}$ é solução de

$$y(t) = \tilde{f}(t) + \int_a^t \tilde{K}(t, s, y(s)) ds, \tag{2.14}$$

vale $\|\tilde{u} - u\| \leq \varepsilon$.

DEMO: Seja $E = C([a, b], \mathbb{C})$ e, para $x \in E$, seja

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s)) ds.$$

Considere $u_n = T^n \tilde{u}$, onde $\tilde{u}$ é solução de (2.14). Então

$$|\tilde{u}(t) - u_1(t)| \leq |\tilde{f}(t) - f(t)| + \left| \int_a^t [\tilde{K}(t, s, \tilde{u}(s)) - K(t, s, \tilde{u}(s))] ds \right|.$$

Como $T^n \tilde{u} \rightarrow u$ (pelo corolário 2.2.4), existe c tal que

$$(t, s, u_n(s)) \in [a, b] \times [a, b] \times \overline{B_c(0)}, \quad \forall s \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$\|\tilde{K} - K\|_c = \sup\{|\tilde{K}(t, s, v) - K(t, s, v)| : t, s \in [a, b], v \in \overline{B_c(0)}\}.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t) - u_1(t)| &\leq \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c |t - a|, \\ |\tilde{u}(t) - u_2(t)| &\leq \|\tilde{f} - f\| + \left| \int_a^t [\tilde{K}(t, s, \tilde{u}(s)) - K(t, s, u_1(s))] ds \right| \\ &\leq \|\tilde{f} - f\| + \int_a^t |\tilde{K}(t, s, \tilde{u}(s)) - K(t, s, \tilde{u}(s))| ds + \\ &\quad + \int_a^t |K(t, s, \tilde{u}(s)) - K(t, s, u_1(s))| ds \\ &\leq \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c (t - a) + L \int_a^t [\|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c (s - a)] ds \\ &= \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c (t - a) + L \|\tilde{f} - f\| (t - a) + L \|\tilde{K} - K\|_c \frac{(t - a)^2}{2} \\ &= \|\tilde{f} - f\| [1 + L(t - a)] + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L} \left[L(t - a) + L^2 \frac{(t - a)^2}{2!} \right] \\ &\leq \|\tilde{f} - f\| e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L} [e^{L(t-a)} - 1]. \end{aligned}$$

Por indução sobre n temos

$$\|\tilde{u}(t) - u_n(t)\| \leq \|\tilde{f} - f\| e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L} [e^{L(t-a)} - 1].$$

Desde que $u_n \rightarrow u$, segue que

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \|\tilde{f} - f\| e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L} [e^{L(t-a)} - 1].$$

■

O Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall

Neste capítulo discutiremos os problemas de existência, unicidade e comportamento assintótico das soluções de (1.12). O resultado fundamental deste capítulo é o “*Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall*” que apresenta condições suficientes – chamadas de “*fenômeno threshold*” – para o surgimento de uma epidemia.

3.1 O Problema de Valor Inicial

Segundo as definições da seção 2.1 a equação

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\Omega} g(u(t-\tau, \xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f(t, \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

é uma equação integral não-linear do tipo Volterra com respeito a t e do tipo Fredholm com respeito a $\mathbf{x}$.

Seja $BC(\Omega)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas em Ω munido com a norma uniforme (norma do supremo). Uma estrutura conveniente para o estudo de (3.1) é o espaço de Banach $C_T = C([0, T]; BC(\Omega))$ das funções contínuas em $[0, T]$ assumindo valores em $BC(\Omega)$, munido com a norma

$$\|f\|_{C_T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f[t]\|_{BC(\Omega)},$$

onde $f[t] = f(t, \cdot)$, ou seja, $f[t](\mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Guiados pela idéia acima, quando olharmos para u como um elemento de C_T escreveremos $u[t](\mathbf{x})$ ao invés de $u(t, \mathbf{x})$. Com essa convenção podemos escrever (3.1) como

$$u[t] = Qu[t] + f[t] \quad (3.2)$$

onde Q é definido por

$$Qu[t](\mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\Omega} g(u[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.3)$$

Como será provado no lema a seguir, as seguintes hipóteses garantem que Q é uma aplicação de C_T em C_T . São elas:

H_{S_0} : $S_0 \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$; S_0 é não-negativa.

H_g : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua; $g(0) = 0$.

H_A^1 : $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ definida e não-negativa em $[0, \infty) \times \Omega \times \Omega$; para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ e para cada $T > 0$, $A(\cdot, \mathbf{x}, \cdot) \in \mathcal{L}^1([0, T] \times \Omega)$.

H_A^2 : Sejam

$$\eta(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \int_\Omega A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau$$

e $T > 0$ arbitrário. Então a família de funções $\{\eta(\cdot, \mathbf{x})/\mathbf{x} \in \Omega\}$ definidas em $[0, T]$ é uniformemente limitada e equicontínua.

H_A^3 : Para cada $T > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ tal que se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ e $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta$ então

$$\int_0^T \int_\Omega |A(\tau, \mathbf{x}_1, \xi) - A(\tau, \mathbf{x}_2, \xi)| d\xi d\tau < \varepsilon.$$

Para simplificar as notações definimos

$$\bar{S}_0 = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} S_0(\mathbf{x}).$$

Lema 3.1.1. *Dado um $T > 0$, se u pertence a C_T então a imagem de u por Q também pertence a C_T , ou seja, para cada $T > 0$ e $u \in C_T$, $Qu \in C_T$.*

DEMO: Sejam $T > 0$ e $u \in C_T$. Queremos mostrar que Q_u é uma aplicação contínua de $[0, T]$ em $BC(\Omega)$, isto é, para cada $t \in [0, T]$ a função $Q_u[t]$ é contínua e uniformemente limitada em Ω .

Ponha $K = \|u\|_{C_T}$.

Passo I: $Q_u[t]$ é uniformemente limitada.

De fato, note que

$$\begin{aligned}
 |Q_u[t](\mathbf{x})| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} g(u[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \right| \\
 &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |g(u[t-\tau](\xi))| \cdot |S_0(\xi)| \cdot |A(\tau, \mathbf{x}, \xi)| d\xi d\tau \\
 &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \sup_{|y| \leq K} |g(y)| \cdot \bar{S}_0 \cdot A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \\
 &= \sup_{|y| \leq K} |g(y)| \cdot \bar{S}_0 \cdot \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$|Q_u[t](\mathbf{x})| \leq \sup_{|y| \leq K} |g(y)| \cdot \bar{S}_0 \cdot \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.4)$$

o que mostra que $Q_u[t]$ é limitada.

Pela hipótese H_A^2 temos que existe $M > 0$ tal que

$$|\eta(T, \mathbf{x})| \leq \sup_{t \in [0, T]} \{|\eta(t, \mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \Omega\} \leq M,$$

e daí segue a limitação uniforme. $\square$

Passo II: $Q_u[t]$ é contínua em Ω .

Dado $\varepsilon > 0$, por H_A^3 existe $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ tal que sempre que

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta$$

tem-se

$$\int_0^T \int_{\Omega} |A(\tau, \mathbf{x}_1, \xi) - A(\tau, \mathbf{x}_2, \xi)| d\xi d\tau < \frac{\varepsilon}{\sup_{|y| \leq K} |g(y)| \cdot \bar{S}_0}.$$

Logo,

$$|Q_u[t](\mathbf{x}_1) - Q_u[t](\mathbf{x}_2)| \leq \sup_{|y| \leq K} |g(y)| \cdot \bar{S}_0 \cdot \int_0^T \int_{\Omega} |A(\tau, \mathbf{x}_1, \xi) - A(\tau, \mathbf{x}_2, \xi)| d\xi d\tau < \varepsilon$$

sempre que $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta$. O que mostra a continuidade de $Q_u[t]$ em Ω . $\square$

Passo III: A aplicação $t \mapsto Qu[t]$ de $\mathbb{R}$ em $BC(\Omega)$ é contínua.

Suponha $0 \leq t_2 \leq t_1 \leq T$. Então

$$\begin{aligned} |Qu[t_1](\mathbf{x}) - Qu[t_2](\mathbf{x})| &= \left| \int_0^{t_1} \int_{\Omega} g(u[t_1 - \tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_2} \int_{\Omega} g(u[t_2 - \tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_2} \int_{\Omega} \left\{ g(u[t_1 - \tau](\xi)) - g(u[t_2 - \tau](\xi)) \right\} \cdot S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} g(u[t_1 - \tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \right|. \end{aligned}$$

Logo, tomando o supremo em Ω temos

$$\begin{aligned} &\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |Qu[t_1](\mathbf{x}) - Qu[t_2](\mathbf{x})| \leq \\ &\leq \bar{S}_0 \cdot \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi \cdot \sup_{\xi \in \Omega, \tau \in [0, t_2]} |g(u[t_1 - t_2 + \tau](\xi)) - g(u[\tau](\xi))| + \\ &\quad + \sup_{|y| \leq K} |g(y)| \cdot \bar{S}_0 \cdot \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Se $t_1 - t_2 \rightarrow 0$ então ambos os termos da soma acima tendem a zero. Para o primeiro termo isso segue de H_A^2 e da continuidade de $t \mapsto u[t]$ em $[0, T]$ e $y \mapsto g(y)$ em $|y| \leq K$.

Para o segundo isso decorre da hipótese de equicontinuidade em H_A^2 . $\square$

■

Se assumimos que f satisfaz

$H_f : f : [0, \infty) \rightarrow BC(\Omega)$ é contínua,

então a equação (3.2) faz sentido em C_T com $T > 0$ arbitrário.

Teorema 3.1.2. (Existência e Unicidade Local) *Suponha que g é localmente Lipschitziana. Então existe um $T > 0$ tal que (3.2) tem uma única solução u em C_T . Ademais, a aplicação $f \mapsto u$, de C_T em C_T , é contínua.*

DEMO: A demonstração será dividida em duas partes. Na primeira, demonstraremos a existência e unicidade local das soluções de (3.2) e na outra demonstraremos a continuidade da aplicação $f \mapsto u$.

Existência e Unicidade Local

Considere, em C_T , a bola unitária fechada de centro em f que representaremos por

$$X_{f,T} = \{h \in C_T / \|h - f\|_{C_T} \leq 1\}$$

e a aplicação $R_f : C_T \rightarrow C_T$ definida por

$$R_f u = Qu + f.$$

Escolha $T_0 > 0$ e seja ℓ a constante de Lipschitz de g no conjunto¹ $\{y / |y| \leq 1 + \|f\|_{C_{T_0}}\}$. Pela continuidade da norma $\|\cdot\|_{C_T}$ temos

$$\|u\|_{C_T} - \|f\|_{C_T} \leq \|u - f\|_{C_T} \leq 1.$$

Como $\|f\|_{C_T}$ é uma função não-decrescente de T , para todo $T < T_0$ e $u \in X_{f,T}$ temos

$$\|u\|_{C_T} \leq 1 + \|f\|_{C_T} \leq 1 + \|f\|_{C_{T_0}}.$$

Sejam $u, v \in X_{f,T}$. Então, da desigualdade (3.4) decorre

$$\|R_f u - f\|_{C_T} = \|Qu\|_{C_T} \leq \ell \cdot \bar{S}_0 \cdot \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \cdot (1 + \|f\|_{C_{T_0}})$$

e

$$\begin{aligned} \|R_f u - R_f v\|_{C_T} &= \|Qu - Qv\|_{C_T} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ g(u[t-\tau](\xi)) - g(v[t-\tau](\xi)) \right\} S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \bar{S}_0 \cdot \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |g(u[t-\tau](\mathbf{x})) - g(v[t-\tau](\mathbf{x}))| \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \\ &\leq \bar{S}_0 \cdot \ell \cdot \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \cdot \|u - v\|_{C_T}. \end{aligned}$$

¹Se g é localmente Lipschitziana em um compacto K então g é Lipschitziana em K .

Daí, se

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau < \left(\ell \cdot \bar{S}_0 (1 + \|f\|_{C_{T_0}}) \right)^{-1},$$

das desigualdades acima, concluímos que

$$\|R_f u - f\|_{C_T} \leq 1$$

e

$$\|R_f u - R_f v\|_{C_T} \leq \left(\frac{1}{1 + \|f\|_{C_{T_0}}} \right) \|u - v\|_{C_T}, \quad \forall u, v \in X_{f,T},$$

isto é, R_f é uma contração de $X_{f,T}$ em $X_{f,T}$.

Da hipótese H_A^2 concluímos que podemos, de fato, escolher $T \in (0, T_0]$ que torne esta desigualdade verdadeira e então a primeira afirmação do teorema segue do “*Teorema do Ponto Fixo de Banach*”, que garante a existência em $X_{f,T}$ de um único ponto fixo u para R_f e, assim, temos

$$u = R_f u = Qu + f,$$

isto é, a equação (3.2) possui única solução u em $X_{f,T}$. $\square$

Continuidade da aplicação $f \mapsto u$

Dado $f \in C_{T_0}$, considere

$$Y = \{h \in C_{T_0} / \|h - f\|_{C_{T_0}} \leq 1\}$$

e seja ℓ a constante de Lipschitz de g em $\{y / |y| \leq 1 + \|f\|_{C_{T_0}}\}$.

Como na demonstração anterior, podemos escolher $T \in (0, T_0]$ tal que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau < \left(\ell \cdot \bar{S}_0 (1 + \|f\|_{C_{T_0}}) \right)^{-1}$$

e, para toda $\tilde{f} \in Y$ temos

$$\begin{aligned} \|R_{\tilde{f}} u - R_{\tilde{f}} v\|_{C_T} &= \|Qu - Qv\|_{C_T} \\ &\leq \bar{S}_0 \cdot \ell \cdot \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_0^T \int_{\Omega} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau \cdot \|u - v\|_{C_T} \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \|f\|_{C_{T_0}}} \right) \|u - v\|_{C_T}, \end{aligned}$$

para quaisquer $u, v \in X_{f,T}$. Isto é, $R_{\tilde{f}}$ é uma contração em $X_{f,T}$ para toda $\tilde{f} \in Y$.

Já a aplicação $f \mapsto R_f u$ é contínua em C_T para cada $u \in C_T$ pois, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon$ e daí, se $\|f - \tilde{f}\|_{C_T} < \delta$ temos

$$\begin{aligned} \|R_f u - R_{\tilde{f}} u\|_{C_T} &= \|Qu + f - Qu - \tilde{f}\|_{C_T} \\ &= \|f - \tilde{f}\|_{C_T} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, se denotarmos por $u(f)$ o ponto fixo de R_f , $f \in Y$, então

$$\begin{aligned} u(f+h) - u(f) &= R_{f+h} u(f+h) - R_f u(f) \\ &= R_{f+h} u(f+h) - R_{f+h} u(f) + R_{f+h} u(f) - R_f u(f) \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |u(f+h) - u(f)| &\leq |R_{f+h} u(f+h) - R_{f+h} u(f)| + |R_{f+h} u(f) - R_f u(f)| \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \|f\|_{C_{T_0}}} \right) |u(f+h) - u(f)| + |R_{f+h} u(f) - R_f u(f)| \\ &= \lambda |u(f+h) - u(f)| + |R_{f+h} u(f) - R_f u(f)|. \end{aligned}$$

O que implica:

$$|u(f+h) - u(f)| \leq (1 - \lambda)^{-1} |R_{f+h} u(f) - R_f u(f)|.$$

Como, para cada u fixado em $X_{f,T}$, $R_f u$ é contínua em f , a aplicação $f \mapsto u = u(f)$ é contínua.² $\square$ ■

O método utilizado para encontrar a solução u é o mesmo método utilizado na demonstração do “Teorema do Ponto Fixo de Banach”. Construímos uma sequência $\{u_n\}$ em C_T , tal que $u_0 = f$ e $u_{n+1} = Qu_n + f$, $n = 0, 1, 2, \dots$. A seguir mostramos que esta sequência é de Cauchy em C_T e, como este é um espaço métrico completo (de Banach), a sequência é convergente e o restante segue da continuidade de Q .

²Para maiores detalhes sobre a dependência contínua da solução u em relação a f veja o corolário 2.2.3 ou consulte [5] e [6].

Observação 3.1.3. *Se conhecemos uma solução de (3.2) em C_{T_1} podemos escrever*

$$\tilde{u}[t] = Q\tilde{u}[t] + \tilde{f}[t],$$

com

$$\begin{aligned}\tilde{u}[t] &= u[T_1 + t], \\ \tilde{f}[t](\mathbf{x}) &= f[T_1 + t](\mathbf{x}) + \int_0^{T_1} \int_{\Omega} g(u[\tau](\xi)) S_0(\xi) A(T_1 + t - \tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Aplicando o teorema 3.1.2 obtemos uma continuação de u em C_{T_2} , $T_2 > T_1$. Repetindo esse argumento, podemos encontrar uma solução definida num intervalo maximal.

O teorema a seguir fornece informações sobre a existência e unicidade global de uma solução da equação (3.2).

Teorema 3.1.4. (Existência e Unicidade Global) *Suponha que g é uniformemente Lipschitziana. Então (3.2) tem uma única solução contínua $u : [0, \infty) \rightarrow BC(\Omega)$.*

DEMO: Repetindo a demonstração do teorema 3.1.2, encontramos uma única solução u de (3.2) definida e contínua em um intervalo $[0, T]$ assumindo valores em $BC(\Omega)$.

Resta provar que existe uma solução de (3.2) definida em $[0, \infty)$ que é uma continuação desta. Para isto basta aplicar o método mostrado na observação 3.1.3, fazendo $T_1 = T$ e, como g é uniformemente Lipschitziana, podemos sempre escolher $T_{n+1} = T_n + T$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ■

Vamos agora voltar nossa atenção para algumas propriedades importantes das soluções que surgem como consequência da estrutura da função de forçamento f e das propriedades de g no modelo biológico.

Em $BC(\Omega)$ introduziremos uma ordem parcial da seguinte maneira:

“ $\phi \geq \psi$ se, e somente se, $\phi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.”

Teorema 3.1.5. (Positividade e monotonicidade)

a. Suponha $g(y) > 0$ para $y > 0$ e $f[t] \geq 0$ para todo $t \geq 0$, então $u[t] \geq 0$ no domínio de definição de u .

b. Suponha, além disso, que g é não-decrescente e $f[t+h] \geq f[t]$ para todo $h \geq 0$. Então $u[t+h] \geq u[t]$ para todo $h, t \geq 0$ tais que $t+h$ pertence ao domínio de definição de u .

DEMO: **Parte a.** Da construção da solução u temos

$$\begin{aligned} u_0[t](\mathbf{x}) &= f[t](\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ u_1[t](\mathbf{x}) &= Qu_0[t](\mathbf{x}) + f \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} g(u_0[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f[t](\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ &\dots \dots \\ u_{n+1}[t](\mathbf{x}) &= Qu_n[t](\mathbf{x}) + f[t](\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

E portanto, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ e $t \geq 0$

$$u[t](\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n[t](\mathbf{x}) \geq 0,$$

ou seja, $u[t] \geq 0$. $\square$

Parte b. Analogamente, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\begin{aligned} u_0[t+h](\mathbf{x}) &= f[t+h](\mathbf{x}) \geq f[t](\mathbf{x}) = u_0[t](\mathbf{x}), \\ u_1[t+h](\mathbf{x}) &= Qu_0[t+h](\mathbf{x}) + f[t+h](\mathbf{x}) \\ &\geq \int_0^{t+h} \int_{\Omega} g(u_0[t+h-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f[t](\mathbf{x}) \\ &\geq \int_0^t \int_{\Omega} g(u_0[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f[t](\mathbf{x}) \\ &\geq \int_0^t \int_{\Omega} g(u_0[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\xi d\tau + f[t](\mathbf{x}) \\ &= Qu_0[t](\mathbf{x}) + f[t](\mathbf{x}) = u_1[t](\mathbf{x}). \end{aligned}$$

E, prosseguindo com este raciocínio, por indução sobre n :

$$u_n[t+h](\mathbf{x}) \geq u_n[t](\mathbf{x}), \quad \forall n.$$

Assim, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$u[t+h](\mathbf{x}) \geq u[t](\mathbf{x}),$$

para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. $\square$

■

Se f é dada por (1.11) e g por (1.10) então estas possuem as propriedades exigidas nas hipóteses do teorema 3.1.5.

A seguir discutimos a limitação e o comportamento assintótico, quando $t \rightarrow \infty$, de uma solução definida globalmente. Se f , g e η (veja H_A^2) são limitadas superiormente então, da definição de u , é fácil ver que u também é limitada superiormente. Se, além disso, f e g satisfazem as hipóteses do teorema 3.1.5 (partes **a** e **b**) então concluímos que $u[t](\mathbf{x})$ converge pontualmente em $\mathbf{x}$ para um limite finito quando $t \rightarrow \infty$. Adicionando mais hipóteses sobre A e f podemos fortalecer a convergência e deduzir uma equação para o limite.

Teorema 3.1.6. (Estabilização) *Além das hipóteses do teorema 3.1.5 (partes **a** e **b**), suponha que g é limitada e uniformemente Lipschitziana em $[0, \infty)$, que o subconjunto $\{f[t] / t \geq 0\}$ de $BC(\Omega)$ é uniformemente limitado e equicontínuo, e que A satisfaz*

H_A^4 : Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\int_0^t A(\tau, \mathbf{x}, \cdot) d\tau \rightarrow \int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}, \cdot)$$

em $\mathcal{L}^1(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$, e para algum $C > 0$

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_\Omega \int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau d\xi < C.$$

H_A^5 : Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ e $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta$ então

$$\int_\Omega \int_0^\infty |A(\tau, \mathbf{x}_1, \xi) - A(\tau, \mathbf{x}_2, \xi)| d\tau d\xi < \varepsilon.$$

Então a solução de (3.2) está definida em $[0, \infty)$ e existe $u[\infty] \in BC(\Omega)$ tal que, quando $t \rightarrow \infty$, $u[t] \rightarrow u[\infty]$ em $BC(\Omega)$ se Ω é compacto, e uniformemente em subconjuntos compactos de Ω se Ω não é compacto. Além disso, $u[\infty]$ satisfaz a equação limite

$$u[\infty](\mathbf{x}) = \int_\Omega g(u[\infty](\xi)) S_0(\xi) \int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau d\xi + f[\infty](\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

DEMO: A existência global segue do teorema 3.1.4 e do fato de g ser uniformemente Lipschitz em $[0, \infty)$. Já comentamos sobre a convergência pontual de $u[t](\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}$, o que implica na limitação pontual do subconjunto $\{u[t] / t \geq 0\}$ de $BC(\Omega)$. A estimativa

$$|u[t](\mathbf{x}_1) - u[t](\mathbf{x}_2)| \leq \sup_{y \geq 0} g(y) \cdot \bar{S}_0 \cdot \int_{\Omega} \int_0^{\infty} |A(\tau, \mathbf{x}_1, \xi) - A(\tau, \mathbf{x}_2, \xi)| d\tau d\xi + \\ + |f[t](\mathbf{x}_1) - f[t](\mathbf{x}_2)|,$$

mostra que o subconjunto $\{u[t] / t \geq 0\}$ de $BC(\Omega)$ é equicontínuo, devido a hipótese H_A^5 e a hipótese sobre a equicontinuidade de $\{f[t] / t \geq 0\}$.

Portanto, pelo “Teorema de Arzela-Ascoli” e pela monotonicidade de $u[t]$ (em t)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u[t] = u[\infty]$$

uniformemente em Ω , se Ω é compacto, e uniformemente em cada parte compacta de Ω se Ω não é compacto.

Antes de mostrar a equação limite (3.5), note que

$$\left| \int_0^t g(u[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau - \int_0^{\infty} g(u[\infty](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau \right| \\ \leq \left| \int_0^t \left\{ g(u[t-\tau](\xi)) - g(u[\infty](\xi)) \right\} S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau \right| + \\ + \left| \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^t g(u[\infty](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau \right| \\ \leq \int_0^t \left| g(u[t-\tau](\xi)) - g(u[\infty](\xi)) \right| S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau + \\ + g(u[\infty](\xi)) S_0(\xi) \left| \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^t A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau \right|.$$

Como g é contínua e $u[t-\tau](\xi) \rightarrow u[\infty](\xi)$ quando $t \rightarrow \infty$ temos que a primeira parcela da soma acima tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Pela hipótese H_A^4 temos que a outra parcela da soma também tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Provar a igualdade dada por (3.5) equivale a mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} u[t](\mathbf{x}) = u[\infty](\mathbf{x})$ onde $u[\infty](\mathbf{x})$ é dado por (3.5). Assim, observe:

$$|u[t](\mathbf{x}) - u[\infty](\mathbf{x})| \leq \left| \int_{\Omega} \int_0^t g(u[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau d\xi - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} g(u^{[\infty]}(\xi)) S_0(\xi) \int_0^{\infty} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau d\xi + |f[t](\mathbf{x}) - f^{[\infty]}(\mathbf{x})| \\
& \leq \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(u[t-\tau](\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau - \int_0^{\infty} g(u^{[\infty]}(\xi)) S_0(\xi) A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau \right| d\xi + \\
& \quad + |f[t](\mathbf{x}) - f^{[\infty]}(\mathbf{x})|.
\end{aligned}$$

A primeira parcela da soma acima tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ como foi visto nas observações acima e a segunda parte também tende a zero pois o subconjunto $\{f[t] / t \geq 0\}$ de $BC(\Omega)$ é uniformemente limitado e equicontínuo, o que garante a convergência de $f[t](\mathbf{x})$.

Logo, (3.5) é verdadeira. ■

Em termos biológicos $\exp(-u^{[\infty]})$ é a fração da população suscetível que escapa de ser infectada. Portanto chamamos $u^{[\infty]}$ a *medida final* e (3.5) a *equação da medida final* do modelo.

3.2 A Equação da Medida Final

A análise em [3] do problema de valor inicial para o modelo espaço-independente é análoga a que fizemos na seção anterior. Existe uma equação de medida final, a equação escalar

$$x(\infty) = \gamma s_0 g(x(\infty)) + f(\infty), \quad (3.6)$$

que pode ser analisada graficamente, em princípio. Com g dada por (1.10), (3.6) tem uma única solução $x(\infty)$ para cada $f(\infty)$ positivo. A dependência de $x(\infty)$ em relação aos parâmetros s_0 e γ torna-se clara se consideramos que

$$\underline{x} = \inf_{f(\infty) > 0} x(\infty).$$

Segue disto que $\underline{x}$ satisfaz a equação homogênea

$$y = \gamma s_0 g(y) \quad (3.7)$$

e $\underline{x}$ é positivo se, e somente se, $\gamma s_0 > 1$. Este é o chamado *fenômeno Threshold* (*threshold phenomenon*).

A investigação da equação de medida final (3.5) para o modelo espaço - dependente não é tão simples. Entretanto, é ainda possível mostrar que existe um fenômeno Threshold similar. A análise requer um passo extra: à equação (3.5) associaremos uma equação escalar (análoga à equação (3.7)) e então mostraremos que uma solução positiva da equação escalar serve pontualmente como uma cota inferior para qualquer solução não-negativa limitada de (3.5).

Ponha

$$s_0 = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} S_0(\mathbf{x})$$

e

$$\gamma = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} A(\tau, \mathbf{x}, \xi) d\tau d\xi.$$

Assim, γ é o ínfimo da infectividade total em $\mathbf{x}$ devido a uma distribuição homogênea de infectados durante o decorrer da doença. A equação escalar que temos em mente é a equação (3.7). Com

$$\underline{u} = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} u[\infty](\mathbf{x}),$$

obtemos de (3.5) e da monotonicidade de g que

$$\underline{u} \geq s_0 \gamma g(\underline{u}) \quad (3.8)$$

e daí conjecturamos que $\underline{u} \geq p$, onde p é definido como a solução positiva de (3.7), se $\gamma s_0 > 1$ e $p = 0$, se $\gamma s_0 \leq 1$. Esse resultado é às vezes chamado de “*Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall*.” Ele pode ser encontrado também em [7].

Teorema 3.2.1. (Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall) *Suponha que*

- (i) Ω é compacto;
- (ii) $s_0 \gamma g(y) > y$ para $0 < y < p$;
- (iii) $\int_0^{\infty} A(\tau, \mathbf{x}, \cdot) d\tau$ é contínua em Ω ;
- (iv) para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ existe $\delta = \delta(\mathbf{x}) > 0$ tal que o conjunto $\{\xi / \|\mathbf{x} - \xi\| \leq \delta\} \cap \Omega$

$(\overline{B_\delta(\mathbf{x})} \cap \Omega)$ está contido no suporte de

$$\int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}, \cdot) d\tau.$$

Se $f[\infty] \in BC(\Omega)$ é não-negativa então toda solução não-negativa $u[\infty] \in BC(\Omega)$ de (3.5) satisfaz $u[\infty] \geq p$.

DEMO: Afirmamos: ou $\underline{u} = 0$ ou $\underline{u} \geq p$ pois, caso contrário,
ou $\underline{u} = 0$ e $\underline{u} \geq p$ ou $\underline{u} \neq 0$ e $\underline{u} < p$.

A primeira afirmação implica em $p = 0$, o que é um absurdo pois supomos inicialmente que p é uma solução positiva da equação (3.7). A segunda afirmação implica em $0 < \underline{u} < p$ que, por (ii), implica em $s_0 \gamma g(\underline{u}) > \underline{u}$ o que também é um absurdo visto que $\underline{u}$ satisfaz a desigualdade (3.8). Logo, de fato, ou $\underline{u} = 0$ ou $\underline{u} \geq p$.

Suponha que $\underline{u} = 0$. Daí, como Ω é compacto, $u[\infty]$ atinge seu ínfimo em Ω , ou seja, existe $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ tal que $u[\infty](\mathbf{x}_0) = 0$. Logo,

$$0 = u[\infty](\mathbf{x}_0) = \int_\Omega g(u[\infty](\xi)) S_0(\xi) \int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}_0, \xi) d\tau d\xi + f[\infty](\mathbf{x}_0).$$

Desde que ambos os termos são não-negativos, por (iii), para que esta igualdade seja verdadeira é necessário

$$\int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}_0, \xi) d\tau = 0$$

para todo $\xi \in \Omega$.

Isto implicaria que o suporte de $\int_0^\infty A(\tau, \mathbf{x}_0, \cdot) d\tau$ é vazio, o que contradiz (iv).

Logo, $u[\infty] \geq \underline{u} \geq p$. ■

Como acabamos de ver, a conjectura é verdadeira se Ω é compacto. As hipóteses sobre A satisfazer (iv) no teorema 3.2.1 expressam que Ω não poderia consistir de partes que são isoladas com respeito à infecção.

Matematicamente, o problema é muito mais interessante se Ω não é compacto. Restringindo nossa atenção para o caso especial em que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e assumindo que as

condições (1.13) a (1.15) ocorrem, obtemos de (3.5):

$$\begin{aligned}
u^{[\infty]}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) S_0(\xi) \int_0^\infty H(\tau) V(\mathbf{x} - \xi) d\tau d\xi + f^{[\infty]}(\mathbf{x}) \\
&\geq s_0 \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) \int_0^\infty H(\tau) d\tau d\xi \\
&\geq s_0 \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^\infty H(\tau) d\tau \right\} d\xi \\
&\geq s_0 \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^\infty H(\tau) d\tau \int_{\mathbb{R}^n} V(\mathbf{x} - \xi) d\mathbf{x} \right\} d\xi \\
&= s_0 \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty H(\tau) V(\mathbf{x} - \xi) d\mathbf{x} d\tau \right\} d\xi \\
&= s_0 \gamma \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$u^{[\infty]}(\mathbf{x}) \geq s_0 \gamma \int_{\mathbb{R}^n} g(u^{[\infty]}(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi.$$

Isso nos induz a investigar soluções limitadas da equação

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(w(\xi)) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi + h(\mathbf{x}),$$

com $h(\mathbf{x}) \geq 0$ e a constante $s_0 \gamma$ incorporada na função g . Os resultados da próxima seção implicarão na veracidade da conjectura para $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n = 1$ ou $n = 2$.

É bom ter em mente que a cota inferior p independe da função $f[t]$ contanto que f seja não-negativa.

Se $s_0 \gamma > 1$, então a equação (3.1) manifesta o efeito *hair-trigger*: não importa quão pequena é a infectividade introduzida em um subconjunto arbitrariamente pequeno de Ω , esta produzirá eventualmente um grande efeito em todo ponto. Com efeito, se $s_0 \gamma > 1$ então existe a solução positiva p de (3.7) tal que, segundo o teorema 3.2.1, $u^{[\infty]} \geq p$. Daí,

$$\exp \{-u^{[\infty]}(\mathbf{x})\} \leq e^{-p},$$

isto é, a fração de suscetíveis em $\mathbf{x}$ que escapa de ser infectada não excede e^{-p} . Portanto são os parâmetros s_0 e γ que determinam se haverá ou não uma epidemia.

CAPÍTULO 4

Ondas Viajantes

Veremos aqui, com algumas hipóteses extras, que o resultado do “*Teorema do Threshold Pandêmico de Kendall*” também vale se Ω não é compacto.

Vamos demonstrar isso na primeira seção para $n = 1$ ou $n = 2$. Com isso, teremos mostrado que, nessas condições, as soluções do problema de valor inicial estabilizam e daí partiremos para uma outra discussão:

Como as soluções do P.V.I. se aproximam da distribuição final?

Responderemos esta pergunta na seção 4.2.

4.1 Uma Equação Não Linear de Convolução

Considere a equação não linear de convolução

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(w(\xi))V(\mathbf{x} - \xi)d\xi + h(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

para a função $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $n = 1$ ou $n = 2$. As funções g , V e h satisfazem as seguintes hipóteses:

H_g : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e monótona não-decrescente; $g(0) = 0$ e a equação

$$y = g(y) \quad (4.2)$$

tem uma raiz positiva p . Ademais, $g(y) > y$ para $0 < y < p$ e $g(y) < y$ para $y > p$ (Veja a figura 4.1).

H_V : $V \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} V(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$; $\int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|^n V(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty$; ($\|\cdot\|$ é a norma euclidiana); V é uma função não-negativa.

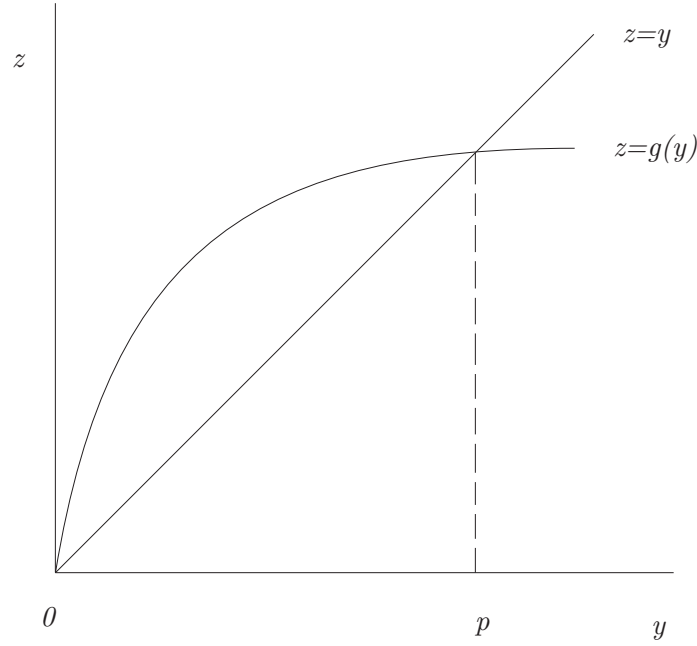


Figura 4.1

H_h : $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, não negativa e não é identicamente nula.

A menos de algumas hipóteses restritivas irrelevantes a existência de uma solução não-negativa de (4.1) pode ser estabelecida por meio de um processo monótono de iteração. Mas temos um objetivo diferente em mente, visamos provar que p é uma cota inferior para qualquer tal solução.

Teorema 4.1.1. *Seja $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução contínua não-negativa de (4.1). Então $w(\mathbf{x}) \geq p$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

DEMO: Seja v definida por $v(\mathbf{x}) = \min\{w(\mathbf{x}), p\}$. Então afirmamos:

$$v(\mathbf{x}) \geq \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) V(\mathbf{x} - \xi) d\xi. \quad (4.3)$$

De fato, se $v(\mathbf{x}) = p$ então da hipótese H_V temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(\mathbf{x} - \xi) d\xi = 1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} p V(\mathbf{x} - \xi) d\xi = p.$$

Agora, se $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) \leq p$ então, de (4.1) e H_g , temos

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(w(\xi))V(\mathbf{x} - \xi)d\xi + h(\mathbf{x}) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} g(w(\xi))V(\mathbf{x} - \xi)d\xi \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} w(\xi)V(\mathbf{x} - \xi)d\xi. \end{aligned}$$

Segundo [4](teorema 3.1) esta desigualdade é, na verdade, uma igualdade (A hipótese H_V – sobre a existência do n -ésimo momento de V – é importante aqui).

Também segundo [4] (teorema 2.1) as únicas soluções contínuas limitadas da equação

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi)V(\mathbf{x} - \xi)d\xi$$

são constantes. Assim, $v(\mathbf{x}) \equiv c$. O caso $c = 0$ pode ser excluído pois implica em $w(\mathbf{x}) \equiv 0$ e daí, (4.1) não é satisfeita devido a H_h . Se $0 < c < p$, então, por H_g , a desigualdade (4.3) é estrita. Logo, $c = p$ e a demonstração está completa. ■

Teorema 4.1.2. *Seja $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução não-negativa limitada da equação*

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(w(\xi))V(\mathbf{x} - \xi)d\xi. \quad (4.4)$$

Então ou $w(\mathbf{x}) \equiv 0$ ou $w(\mathbf{x}) \equiv p$.

DEMO: Da demonstração do teorema 4.1.1, ou $w(\mathbf{x}) \equiv 0$ ou $w(\mathbf{x}) \geq p$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se

$$\beta = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} w(\mathbf{x}),$$

então (4.4) e H_g implicam

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(w(\xi))V(\mathbf{x} - \xi)d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} g(\beta)V(\mathbf{x} - \xi)d\xi \\ &= g(\beta) \int_{\mathbb{R}^n} V(\mathbf{x} - \xi)d\xi \\ &= g(\beta). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$w(\mathbf{x}) \leq g(\beta).$$

Suponha $\beta > p$. Então, pela hipótese H_g , $g(\beta) - \beta < 0$. O que implica:

$$g(\beta) - \beta < \frac{1}{2}(g(\beta) - \beta).$$

Logo

$$w(\mathbf{x}) \leq g(\beta) < \beta + (g(\beta) - \beta).$$

Daí,

$$\beta - w(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}(\beta - g(\beta)) > 0$$

o que contraria a definição de β .



4.2 Ondas Viajantes

Agora que já mostramos que as soluções do problema de valor inicial estabilizam, podemos perguntar como elas se aproximam da distribuição final. Ao invés de estudar esta questão no caso geral, nos concentraremos em um caso especial e um conjunto particular de soluções.

Seja $\Omega = \mathbb{R}$ e $A(\tau, x, \xi) = \gamma H(\tau) V(x - \xi)$. Durante toda esta seção assumiremos:

(i) $H \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$; $\int_0^\infty H(\tau) d\tau = 1$; H é não-negativa;

(ii) $V \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; $\int_{-\infty}^\infty V(x) dx = 1$; V é não-negativa; $V(-x) = V(x)$;

se $W_\lambda(x) = e^{-\lambda x} V(x)$, então $W_\lambda \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ para λ em uma faixa vertical (de largura positiva) do plano complexo.

Considere a equação (1.6) como ponto de partida. Seja $S(-\infty, x) = S$ uma constante dada (vamos assumir uma densidade populacional constante). Integrando a equação (1.6) com relação a t (veja os cálculos realizados para obter a equação (1.12)), obtemos

$$u(t, x) = \int_0^\infty H(\tau) \int_{-\infty}^\infty g(u(t - \tau, \xi)) V(x - \xi) d\xi d\tau \quad (4.5)$$

com

$$u(t, x) = -\ln \frac{S(t, x)}{S},$$

e

$$g(y) = \gamma S(1 - e^{-y}). \quad (4.6)$$

Uma *solução onda viajante* de (4.5) é uma solução da forma $u(t, x + ct) = w(x + ct)$. Podemos visualizar uma solução onda viajante como uma função de x que, à medida que o tempo cresce, é propagada (para a esquerda se $c > 0$ e para a direita se $c < 0$) com velocidade constante c sem qualquer alteração na sua forma.

Como uma onda viajante w depende de uma combinação linear das variáveis independentes x e t , esperamos que seja possível deduzir uma equação para w em uma das variáveis independentes. Com efeito, podemos rearranjar a equação (4.5) para uma solução onda viajante da seguinte forma

$$w(\xi) = \int_{-\infty}^\infty g(w(\eta)) V_c(\xi - \eta) d\eta, \quad \xi = x + ct, \quad (4.7)$$

onde

$$V_c(\xi) = \int_0^\infty H(\tau)V(\xi - c\tau)d\tau, \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (4.8)$$

Para todo c , (4.7) é uma equação não linear de convolução homogênea com um núcleo não negativo. As soluções constantes de (4.7) são raízes de

$$y = g(y) \quad (4.9)$$

e assumimos que (4.9) tem, além da raiz $y = 0$, uma raiz positiva $y = p$ (de (4.6), isso ocorre se $\gamma S > 1$).

Se $c = 0$ o núcleo V_c é simétrico e podemos aplicar o teorema 4.1.2 para concluir que $w \equiv 0$ e $w \equiv p$ são as únicas soluções não-negativas limitadas de (4.7). Uma pergunta que podemos fazer é se existem ou não valores de c para os quais a equação (4.7) tem uma solução satisfazendo $0 < w(\xi) < p$ e quais desses valores de c podem ser caracterizados. Da simetria de V , se $w(\xi)$ satisfaz (4.7) para $c = \bar{c}$, então $w(-\xi)$ satisfaz (4.7) para $c = -\bar{c}$ e daí, podemos restringir nossa atenção para o caso em que $c > 0$. Agora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty V_c(\xi)d\xi &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty H(\tau)V(\xi - c\tau)d\tau d\xi \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty H(\tau)V(\xi - c\tau)d\xi d\tau \\ &= \int_0^\infty H(\tau) \int_{-\infty}^\infty V(\xi - c\tau)d\xi d\tau \\ &= \int_0^\infty H(\tau)d\tau = 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^\infty V_c(\xi)d\xi = 1.$$

Considere a equação linearizada (em $w \equiv 0$):

$$v(\xi) = g'(0) \int_{-\infty}^\infty v(\eta)V_c(\xi - \eta)d\eta \quad (4.10)$$

e sua correspondente equação característica¹

$$L_c(\lambda) = 1, \quad (4.11)$$

¹Para saber como encontrar tal equação característica veja [14], preliminares do teorema 146.

onde

$$L_c(\lambda) = g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \xi} V_c(\xi) d\xi = g'(0) \int_0^{\infty} e^{-\lambda c \tau} H(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \xi} V(\xi) d\xi. \quad (4.12)$$

Se λ_0 é uma raiz de (4.11) com multiplicidade $k \geq 1$, então $\xi^m e^{\lambda_0 \xi}$ é uma solução de (4.10) para $m = 0, 1, \dots, k-1$ e essencialmente todas as soluções são geradas desta maneira (veja [14], teorema 146). A observação de que soluções positivas de (4.10) correspondem a raízes reais de (4.11) nos motiva a estudar L_c como uma função de variável real e, a seguir, listamos algumas de suas propriedades:

- (i) $L_c(\lambda)$ está definida em uma vizinhança à direita de 0;
- (ii) $L_c(0) = g'(0) > 1$ (por hipótese!);
- (iii) $\frac{dL_c}{d\lambda}(0) = -cg'(0) \int_0^{\infty} \tau H(\tau) d\tau < 0$ (possivelmente $-\infty$);
- (iv) $\frac{d^2 L_c}{d\lambda^2}(\lambda) = g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\lambda \xi} V_c(\xi) d\xi > 0$, isto é, L_c é uma função convexa.

Das propriedades listadas, a única que não é imediata é a (iii). Esta é obtida derivando (4.12) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{dL_c}{d\lambda}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left(g'(0) \int_0^{\infty} e^{-\lambda c \tau} H(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \xi} V(\xi) d\xi \right) \\ &= g'(0) \frac{d}{d\lambda} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda c \tau} H(\tau) d\tau \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \xi} V(\xi) d\xi + \\ &\quad + g'(0) \int_0^{\infty} e^{-\lambda c \tau} H(\tau) d\tau \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \xi} V(\xi) d\xi \right) \\ &= -g'(0)c \int_0^{\infty} \tau e^{-\lambda c \tau} H(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \xi} V(\xi) d\xi + \\ &\quad - g'(0) \int_0^{\infty} e^{-\lambda c \tau} H(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\lambda \xi} V(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dL_c}{d\lambda}(0) &= -cg'(0) \int_0^{\infty} \tau H(\tau) d\tau - g'(0) \int_0^{\infty} H(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi V(\xi) d\xi \\ &= -cg'(0) \int_0^{\infty} \tau H(\tau) d\tau - g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \xi V(\xi) d\xi \\ &= -cg'(0) \int_0^{\infty} \tau H(\tau) d\tau \end{aligned}$$

pois $\xi V(\xi)$ é uma função ímpar.

A seguir, descrevemos a dependência de L_c em relação a c (Veja a figura 4.2). Se $c = 0$, de (iii) e (iv), L_c tem um mínimo para $\lambda = 0$. De (iii) e (iv) segue que para $c > 0$ um mínimo pode ocorrer somente para um λ positivo. Para $\lambda > 0$, $L_c(\lambda)$ é uma função decrescente de c , e podemos concluir que $L_c(\lambda) < 1$ para c suficientemente grande. Consequentemente, o conjunto

$$\{c \mid \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } L_c(\lambda) < 1\}$$

consiste de uma semi-reta, digamos (c_0, ∞) .

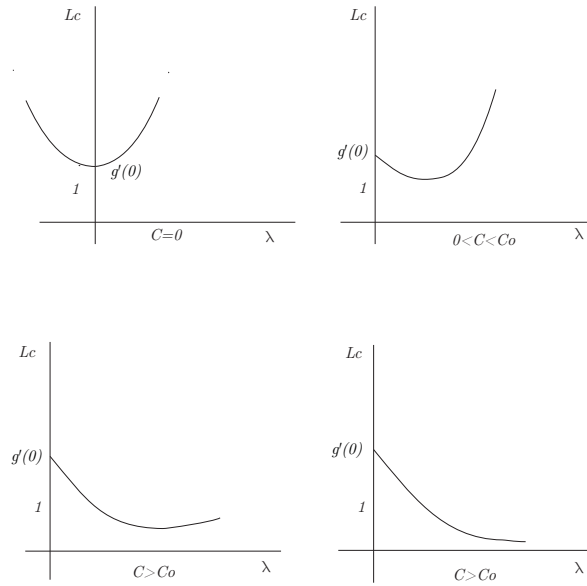


Figura 4.2 Dependência de $L_c(\lambda)$ em relação a c .

Teorema 4.2.1. *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não-decrescente e suponha que $g(0) = 0$, $g(y) > y$ para $0 < y < p$ e $g(p) = p$. Ademais, assuma que existe $g'(0)$ e que, para algum $k > 0$,*

$$g'(0)y - ky^2 \leq g(y) \leq g'(0)y,$$

para $0 \leq y \leq p$.

Seja $K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ não-negativa e $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$. Suponha que exista $\lambda_0 > 0$ para o qual $L(\lambda_0) < 1$, onde²

$$L(\lambda) = g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} K(x) dx.$$

²Note que a convergência da integral para $\lambda = \lambda_0$ é parte da hipótese.

Então a equação

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w(\eta))K(x-\eta)d\eta \quad (4.13)$$

tem uma solução não-decrescente w que tem as seguintes propriedades:

- (i) $0 < w(x) < p$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = 0$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = p$.

DEMO: A convergência da integral em $L(\lambda)$ para $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_0$ implica a convergência da mesma para $0 < \lambda < \lambda_0$. Como $L(\lambda)$ é contínua, $L(0) = g'(0) > 1$ e $L(\lambda_0) < 1$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\sigma \in (0, \lambda_0)$ tal que $L(\sigma) = 1$ e, como L é convexa, $L(\lambda) < 1$ para $\sigma < \lambda \leq \lambda_0$.

Defina as seguintes funções

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \min\{pe^{\sigma x}, p\}, \\ \phi(x) &= \max\{pe^{\sigma x} - Me^{(\sigma+\delta)x}, 0\}, \end{aligned}$$

com $M, \delta > 0$.

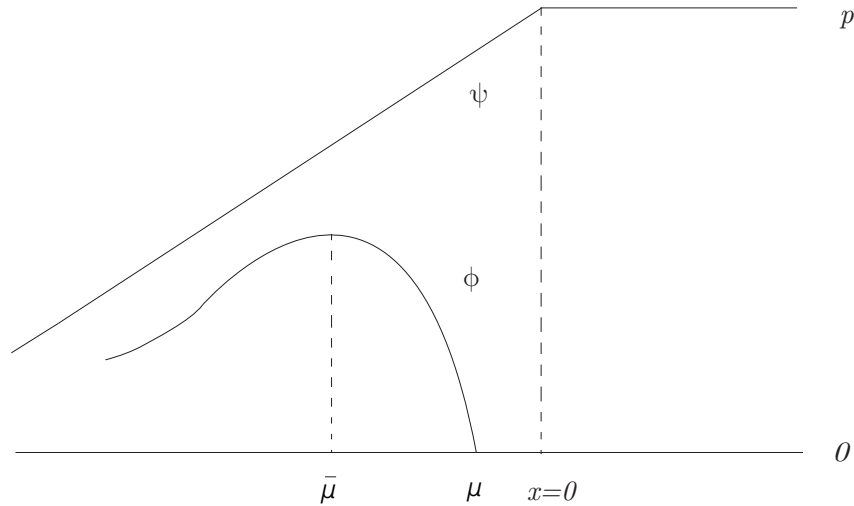


Figura 4.3 $\mu = \frac{1}{\delta} \ln \frac{p}{M}$ e $\bar{\mu} = \frac{1}{\delta} \ln \left[\frac{p\sigma}{M(\sigma+\delta)} \right]$.

Uma primeira exigência que fazemos para encontrar M e δ é que $\phi(x) < \psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se o máximo de $pe^{\sigma x} - Me^{(\sigma+\delta)x}$ é atingido para x negativo então

este é certamente o caso e assim encontramos como uma condição suficiente para nossa exigência que

$$M > \frac{\sigma p}{\sigma + \delta}. \quad (4.14)$$

Definindo um operador integral T pelo lado direito da equação (4.13) tentaremos agora escolher M e δ tais que $T\psi \leq \psi$ e $T\phi \geq \phi$. A primeira das desigualdades segue diretamente das hipóteses e da igualdade $L(\sigma) = 1$. Portanto, vamos nos concentrar na segunda.

As propriedades de g implicam a estimativa

$$(T\phi)(x) \geq g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\eta)K(\eta)d\eta - k \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x-\eta)K(\eta)d\eta.$$

Escolhendo $0 < \delta \leq \sigma$ podemos obter

$$\phi^2(x) \leq \psi^2(x) \leq p^2 e^{(\sigma+\delta)x},$$

e daí

$$\begin{aligned} (T\phi)(x) &\geq g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-\eta)K(\eta)d\eta - k \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x-\eta)K(\eta)d\eta \\ &\geq g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} p e^{\sigma(x-\eta)} K(\eta)d\eta - M g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+\delta)(x-\eta)} K(\eta)d\eta - \\ &\quad - k \int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{(\sigma+\delta)(x-\eta)} K(\eta)d\eta \\ &\geq p e^{\sigma x} - M L(\sigma + \delta) e^{(\sigma+\delta)x} - \frac{k p^2}{g'(0)} L(\sigma + \delta) e^{(\sigma+\delta)x}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$(T\phi)(x) \geq p e^{\sigma x} - M e^{(\sigma+\delta)x},$$

desde que

$$M L(\sigma + \delta) + \frac{k p^2}{g'(0)} L(\sigma + \delta) \leq M. \quad (4.15)$$

Escolha δ tal que $0 < \delta \leq \min\{\sigma, \lambda_0 - \sigma\}$ e daí, $L(\sigma + \delta) < 1$ e podemos satisfazer (4.14) e (4.15) escolhendo M suficientemente grande tal que

$$M \geq \max \left\{ \frac{k p^2}{g'(0)} (1 - L(\sigma + \delta))^{-1}, \frac{\sigma p}{\sigma + \delta} \right\}.$$

Então realmente $T\phi \geq \phi$ (note que $T\phi \geq 0$ é trivial).

Como g é não-decrescente, o operador T é monótono não-decrescente. Isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $Tx_1 \leq Tx_2$. Começando com ϕ e iterando com T obtemos uma sequência monótona decrescente $\{\psi_n = T^n\psi \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ que é limitada inferiormente por ϕ e, portanto, pontualmente convergente. O teorema de Arzelá-Ascoli pode ser aplicado para mostrar que a convergência é de fato uniforme em cada parte compacta, o que implica que o limite, digamos w , satisfaz a equação (4.13). Como ψ é monótona não-decrescente, o mesmo acontece com $T^n\psi$ e, daí, w também é monótona não-decrescente. Das propriedades de ψ e ϕ obtemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = 0$. A monotonicidade e a limitação de w implicam na existência de $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x)$ e, finalmente, um argumento de translação mostra que este limite é uma solução constante de (4.13) e, assim, igual a p .

■

Corolário 4.2.2. *Seja g dada por (4.6) com $\gamma S > 1$. Então existe um $c_0 > 0$ tal que (4.5) tem uma solução onda viajante para todo $c > c_0$. A constante c_0 é dada por*

$$c_0 = \inf\{c \mid \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } L_c(\lambda) < 1\}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] DIEKMANN, O., Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math Biol.* **6** (1978), 109-130.
- [2] DIEKMANN, O., HEESTERBEEK, J.A.P., *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis, and Interpretation*, Wiley, 2000.
- [3] DIEKMANN, O., Limiting behaviour in a epidemic model, *Nonl. Anal., Theory Meth. Appl.* **1**, 459-470 (1977).
- [4] ESSÉN, M., Studies on a Convolution inequality, *Ark. Mat.* **5**, 113-152 (1963).
- [5] HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations*, New York, Wiley, 1969.
- [6] HÖNIG, C.S., *Aplicações da Topologia à Análise*, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1976.
- [7] KENDALL, D.G., Discussion of 'Measles Periodicity and Community Size' by M.S. Barlet, *J.Roy. Statist. Soc. A* **120**, 64-67 (1957).
- [8] KENDALL, D.G., Mathematical Models of the Spread of Infection. In: *Mathematical and Computer Science in Biology and Medicine*, pp.213-224. London: Medical Research Council, 1965.
- [9] KERMACK, W.O., MCKENDRICK, A.G., A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. Roy. Soc. A* **115**, 700-721 (1927).
- [10] LIMA, E.L., *Espaços Métricos*, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 2003.
- [11] LIMA, E.L., *Curso de Análise vol.2*, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1981.
- [12] MIKHLIN, S.G., *Integral equations and their applications to certain problem in mechanics, mathematical physics and technology*, Pergamon Press, 1957.

- [13] RASS, Linda, RADCLIFFE, John; *Spatial Deterministic Epidemics*, American Mathematical Society, 2003.
- [14] TITCHMARSH, E.C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford: Clarendon Press, 1937.
- [15] TRICOMI, F.G., *Integral Equations*, Interscience Publishers, New York, 1957.