

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática

**SIMETRIAS DE HIPERSUPERFÍCIES COM
CURVATURA ESCALAR NULA VIA
PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA**

Almir Rogério Silva Santos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
25 de fevereiro de 2005

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Almir Rogério Silva Santos

**SIMETRIAS DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA
ESCALAR NULA VIA PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da Univer-
sidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Henrique José Morais de Araújo*

Recife
25 de fevereiro de 2005

Santos, Almir Rogério Silva

Simetrias de hipersuperfícies com curvatura escalar nula via
princípio de tangência / Almir Rogério Silva Santos.- Recife : O
Autor, 2005.

91 folhas: il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN., Matemática, 2005.

Inclui bibliografia.

1. Curvatura. 2. Funções Simétricas. 3. Princípio da tangência. 4.
Hipersuperfícies. I. Título.

514.77

CDU (2.ed.)

UFPE

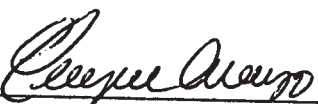
516.373

CDD (22.ed.)

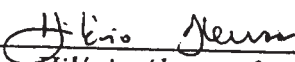
BC2006-257

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


Henrique José Moraes de Araújo, DMAT-UFPE
Orientador


Maria Luíza Soares Leite, DMAT-UFPE


Hilário Alencar da Silva, DM-UFAL

**SIMETRIAS DE HIPERSUPERFÍCIES
COM CURVATURA ESCALAR NULA
VIA PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA**

Por
Almir Rogério Silva Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2005

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida e por tudo que tem me proporcionado.

Um agradecimento mais que especial aos meus pais, João e Maria, e aos meus irmãos Wagner e Vanessa por toda a força que eles me deram.

Agradeço ao professor Henrique Araújo por sua orientação precisa e segura deste trabalho, bem como pela sua paciência e predisposição ao longo de muitas horas a mim dispensada.

Agradeço ao professor Hilário Alencar por participar da banca e à professora Maria Luiza Leite também por participar da banca, assim como por estar sempre disposta em tirar dúvidas que por ventura foram surgindo no decorrer do ano.

Agradeço aos professores da Universidade Federal de Sergipe, Antônio Santos Silva e Danilo Felizardo Barbosa, pelo incentivo inicial.

Agradeço a todos meus amigos de Sergipe, em especial a Araribóia, Davi, Hélio, Julierme, Nélío e Sheyla, que acreditaram e torceram por mim desde o início.

Agradeço aos meus grandes amigos Davy, Éder e Hélio pela sua amizade e companheirismo.

Agradeço a todos os sergipanos presentes neste momento, especialmente Adriano, Fábio, Naldson, Paulo e Solange.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

Enfim, agradeço a todos aqueles que de longe ou de perto me ajudaram de alguma forma na realização deste trabalho.

*Deus é o Geômetra Onipotente para quem o
mundo é um imenso problema matemático.*

—LEIBNIZ

RESUMO

Em 1983, R. Schoen provou que as únicas hipersuperfícies mínimas completas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, com dois fins regulares, são o catenóide e pares de planos. Os métodos por ele utilizados levaram J. Hounie e M. L. Leite a provar um resultado análogo para hipersuperfícies com curvatura escalar nula, ver [6]. A principal diferença entre as demonstrações dos dois teoremas, está no fato que a equação para a curvatura média nula sempre é elíptica, ao contrário da equação para a curvatura escalar nula, que nem sempre é elíptica. Daí, a necessidade de hipóteses a mais na versão para a curvatura escalar, a saber que a terceira função de curvatura não se anula. Neste trabalho apresentamos as ferramentas fundamentais para provar o teorema de Hounie-Leite, que são o Princípio do Máximo para equações elípticas, o Princípio da Tangência para hipersuperfícies com curvatura intermediária nula e um princípio de reflexão para hipersuperfície compactas com fronteira com curvatura intermediária nula. Também apresentamos a demonstração do teorema de Hounie-Leite.

Palavras-chave: Hipersuperfície, Curvatura Escalar Nula, Princípio da Tangência.

ABSTRACT

In 1983, R. Schoen proved that the only complete immersed minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with two regular ends are the catenoid and a pair of planes. The methods used by Schoen led J. Hounie and M. L. Leite to prove a similar result for hypersurfaces with zero scalar curvature. The main difference in the proof of the two theorems is in the fact that the equation for zero mean curvature is always elliptic, which does not always happen for the equation for zero scalar curvature. Hence the need for additional hypothesis in the version for zero scalar curvature, namely that the next curvature function H_3 does not vanish. In this work we present the basic tools for proving the Hounie-Leite Theorem, namely the Maximum Principle for elliptic equations, the Tangency Principle for hypersurfaces with vanishing intermediate curvature and a reflection principle for hypersurfaces with vanishing intermediate. We also present the proof of Hounie-Leite Theorem.

Keywords: Hypersurfaces, Zero Scalar Curvature, Tangency Principle.

SUMÁRIO

Introdução	1
Capítulo 1—A Geometria de um Gráfico	4
1.1 Introdução	4
1.2 Expressão para a r -ésima Curvatura	4
Capítulo 2—Raízes Elípticas das Funções Simétricas	10
2.1 Introdução	10
2.2 Polinômios Hiperbólicos	10
2.3 O Cone	12
2.4 As Folhas	13
2.5 Condição para a Elipticidade	16
Capítulo 3—O Princípio da Tangência	23
3.1 Introdução	23
3.2 Soluções Elípticas de $\mathcal{H}_r[u] = 0$	23

3.3	O Princípio do Máximo de E. Hopf	28
3.4	O Princípio da Tangência	31
Capítulo 4—Hipersuperfícies de Revolução com Curvatura Escalar Constante		37
4.1	Introdução	37
4.2	Equação para a Curvatura Escalar Constante	37
4.3	O Teorema de Classificação	44
Capítulo 5—Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Nula com Dois Fins		55
5.1	Introdução	55
5.2	Um Princípio de Reflexão	56
5.3	A Fórmula do Fluxo	61
5.4	O Resultado Final	70
Referências Bibliográficas		80

LISTA DE FIGURAS

4.1	Curvas de nível para $S = 0$	46
4.2	Curvas de níveis para $S > 0$	47
4.3	Curvas de níveis para $S < 0$	48

INTRODUÇÃO

Em 1983, R. Schoen [13] provou o seguinte teorema de unicidade

Teorema: *As únicas hipersuperfícies mínimas completas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, que são regulares no infinito com dois fins, são o catenóide e pares de planos.*

As técnicas por ele utilizadas, têm como base o Método de Reflexão de Alexandrov, que foi o método utilizado por A. D. Alexandrov, em 1956, para demonstrar que uma hipersuperfície mergulhada compacta com curvatura média constante é uma esfera. O método consiste basicamente em mostrar que a hipersuperfície tem planos de simetria em todas as direções dos eixos coordenados. O Princípio da Tangência, que decorre do Princípio do Máximo para equações elípticas, diz que não existem duas hipersuperfícies com curvatura média nula, $H_1 = 0$, tangenciando-se em um ponto, estando uma acima da outra, a menos que coincidam localmente pois uma hipersuperfície de curvatura média constante, localmente, sempre pode ser escrita como um gráfico de uma função que é solução da equação diferencial parcial elíptica quase linear $H_1 = 0$. No contexto do teorema de Schoen, a simetria é mostrada para todas as direções perpendiculares ao eixo x_n , bem como com relação ao plano horizontal $x_n = 0$. Nesse contexto, em 1999, J. Hounie e M. L. Leite mostraram um teorema análogo para hipersuperfícies com curvatura escalar nula

Teorema: *As únicas hipersuperfícies com curvatura escalar nula completa mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$, livres de pontos flat, que são regulares no infinito com dois fins, são as hipersuperfícies de revolução.*

No teorema de Hounie-Leite, hipóteses extras são necessárias. Isso ocorre devido ao fato que uma solução da equação para a r -ésima curvatura nula, $H_r = 0$ com $r > 1$,

nem sempre é elíptica, portanto temos que encontrar condições suficientes para que tal solução seja elíptica, a saber que a próxima função de curvatura seja diferente de zero. A demonstração do teorema de Hounie-Leite segue os passos percorridos por Schoen, mostrando, inicialmente, que os fins são paralelos com taxa de crescimento opostas e, a seguir, mostrando que a hipersuperfície é simétrica tanto em relação ao hiperplano horizontal quanto em relação à qualquer hiperplano vertical que contém o eixo de rotação, encontrado a priori.

O objetivo desse trabalho é apresentar a demonstração do teorema de Hounie-Leite que encontra-se em [6]. As principais referências utilizadas foram [6], [7], [9] e [10].

No capítulo 1 definimos a r -ésima função de curvatura H_r de uma hipersuperfície e encontramos uma expressão para H_r de uma hipersuperfície dada por um gráfico de alguma função.

O capítulo 2 dedica-se aos polinômios hiperbólicos, que são peças fundamentais na demonstração do Princípio da Tangência para $H_r = 0$ com $1 < r < n$, pois, a menos de uma constante, a r -ésima curvatura é simplesmente a r -ésima função simétrica, que é um polinômio hiperbólico, aplicada aos autovalores do operador de forma. Definimos o que é uma raiz elíptica ou uma raiz antielíptica de σ_r como sendo uma raiz tal que a próxima função simétrica aplicada nessa raiz é diferente de zero. É essa definição que irá nos permitir garantir a elipticidade de $H_r = 0$ através de alguns resultados sobre a elipticidade de uma raiz de σ_r que serão mostrados. Todos esses resultados podem ser encontrados em [10].

No capítulo 3 apresentamos o Princípio da Tangência para hipersuperfícies com $H_r = 0$, $r > 1$, que será usado no capítulo final. Ao contrário da curvatura média, que é elíptica com respeito à qualquer solução de $H_1 = 0$ e de $H_n = 0$ que nunca é elíptica, nem sempre uma solução de $H_r = 0$ é elíptica. Mostramos que a elipticidade de uma solução de $H_r = 0$ com $1 < r < n$ está extremamente relacionada com a elipticidade do vetor curvatura como raiz de $\sigma_r = 0$, pois a matriz das derivadas segundas de $H_r = 0$ tem como autovalores $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$. Para mostrar isso, usamos resultados sobre funções simétricas estabelecidos no capítulo 2.

No capítulo 4, apresentamos a classificação feita por Leite em 1990 [9], de todas as hipersuperfícies rotacionais completas de $\mathbb{R}^{n+1}$, e também apresentamos a expansão no infinito de um gráfico rotacional escalar flat, que servirá como motivação para a definição de um fim regular no infinito.

O resultado final encontra-se no capítulo 5, que traz também um princípio de reflexão para hipersuperfícies compactas com fronteira e $H_r = 0$, principal ferramenta para a demonstração do teorema de Hounie-Leite. Esse princípio consiste em mostrar que, com algumas condições, se qualquer hipersuperfície elíptica ou antielíptica compacta com fronteira mergulhada tem a r -ésima curvatura nula, então a parte da hipersuperfície que está acima do hiperplano horizontal, M_{0+} , é um gráfico com declividade localmente limitada e que a parte refletida, M_{0+}^* , está acima da parte da hipersuperfície que está abaixo do hiperplano horizontal. Além disso, encontramos a fórmula do fluxo de um círculo orientado em um fim escalar flat, que deriva da importante propriedade de que qualquer função altura h de uma hipersuperfície com $H_r = 0$, provada por Reilly [12], satisfaz a equação $\text{div}(T_{r-1}\nabla h) = 0$, onde T_{r-1} representa a $(r-1)$ -ésima Transformação de Newton. Essa fórmula será usada para demonstrar que sob as hipóteses do teorema, a hipersuperfície tem dois fins paralelos com taxas de crescimento opostas.

CAPÍTULO 1

A GEOMETRIA DE UM GRÁFICO

1.1 Introdução

Neste capítulo definimos a curvatura H_r de uma hipersuperfície, e logo em seguida encontramos uma expressão para H_r de uma hipersuperfície que é dada por um gráfico de alguma função.

1.2 Expressão para a r -ésima Curvatura

Definição 1.1 A curvatura H_r , $1 \leq r \leq n$, de uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com normal unitária N e operador de forma $B = -dN$, é definida por

$$\det(tI - B) = t^n - nH_1t^{n-1} + \binom{n}{2}H_2t^{n-2} - \binom{n}{3}H_3t^{n-3} + \cdots + (-1)^nH_n$$

Seja $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização de M numa vizinhança do ponto p . Considere a base de T_pM associada a essa parametrização, $\{X_1, \dots, X_n\}$. Seja $\alpha(t) = X(x_1(t), \dots, x_n(t))$ uma curva em M , com $\alpha(0) = p$, daí segue que

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p\left(\sum_{i=1}^n x'_i(0)X_i\right) \frac{d}{dt}N(x_1(t), \dots, x_n(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n N_i x'_i(0)$$

em particular $dN_p(X_i) = N_i$ e como $\langle N, X_i \rangle = 0$ então

$$\langle N_j, X_i \rangle + \langle N, X_{ij} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle N_j, X_i \rangle = -\langle N, X_{ij} \rangle = -\langle N, X_{ji} \rangle = \langle N_i, X_j \rangle \quad (1.1)$$

Daí decorre que a transformação linear $B_p = -dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é simétrica com respeito à *primeira forma fundamental* I_p , que é definida como a restrição do produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^{n+1}$ ao espaço tangente T_pM .

A *segunda forma fundamental* II_p é a forma quadrática associada ao operador de forma, isto é, $II_p(v) = I_p(v, B_p(v))$, $v \in T_pM$, e as *curvaturas principais* de M em p são os autovalores $k_1, \dots, k_n$ de B_p .

Como $N_i \in T_pM$, podemos escrever

$$N_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} X_j \Rightarrow [dN] = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

A segunda forma fundamental na base $\{X_1, \dots, X_n\}$ é dada por

$$II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n N_i x'_i, \sum_{j=1}^n x'_j X_j \right\rangle = - \sum_{i,j=1}^n x'_i x'_j \langle N_i, X_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x'_i x'_j c_{ij}$$

onde $c_{ij} = -\langle N_i, X_j \rangle$. Por (1.1) temos que $c_{ij} = c_{ji}$, o que implica que $[II] = (c_{ij})$.

Portanto,

$$-c_{ij} = \langle N_i, X_j \rangle \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ki}, X_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, X_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} d_{kj}$$

onde $[I] = (d_{ij})$.

Logo, $[B] = [I]^{-1} \times [II]$, onde $[I]$ e $[II]$ são, respectivamente, a matriz da primeira e da segunda forma fundamental.

A r -ésima curvatura, ver [5], é dada por

$$\binom{n}{r} H_r = \sum_{|J|=r} \det([B]_J) \quad (1.2)$$

onde $|J| = r$ diz que $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ é um conjunto de r índices tais que $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ e $[B]_J$ denota a submatrix principal $r \times r$ de $[B]$ com linhas e colunas indexadas por J . Em particular, H_r é homogêneo de grau r nas entradas $\{b_{ij}\}$ de $[B]$.

Logo, temos que

$$\binom{n}{r} H_r(p) = \sum_{j_1 < \dots < j_r} k_{j_1} \cdots k_{j_r} = \sigma_r(k_1, \dots, k_n) \quad (1.3)$$

onde $k_1, \dots, k_n$ denota os autovalores da matrix $[B_p]$ e σ_r a função simétrica de ordem r de $\mathbb{R}^n$.

Se trocarmos a normal N somente as curvaturas H_r com r ímpar mudarão de sinal. A escolha da constante $\binom{n}{r}$ foi feita para que a esfera unitária com normal apontando para dentro tenha $H_r = 1$ para todo $r = 1, \dots, n$.

Expressemos H_r localmente. Como toda hipersuperfície é localmente um gráfico de uma função C^∞ , então considere uma hipersuperfície dada pelo gráfico $= \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, que denotaremos por $graf(u)$. Considere a normal ao gráfico apontando para cima $N(x) = \frac{1}{W(x)}(-\nabla u(x), 1)$ onde $\nabla u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $W^2 = 1 + \|\nabla u\|^2$. Considere a base $\mathcal{B} = \{X_i = (e_i, u_i(x)), i = 1, \dots, n\}$ do espaço tangente $T_p M$.

Com respeito a essa base temos

$$[I]_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} + u_i u_j \Rightarrow [I]_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2}$$

e para a matriz $[II]$ segue de $\langle N, X_i \rangle = 0$ que

$$[II]_{ij} = \frac{u_{ij}}{W}$$

Logo $[B] = [I]^{-1} \times [II]$ é dado por

$$W^3[B] = W^2[u_{ij}] - [u_i c_j] \quad (1.4)$$

onde $c_j = \sum_{i=1}^n u_i u_{ij}$.

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [5], será a principal ferramenta para a demonstração da proposição 1.1 que foi provada por M. L. Leite. e pode ser encontrada em [10].

Lema 1.1 O polinômio $Q(t) = \det(R - tS)$, onde R e S são matrizes arbitrárias, pode ser escrito como uma soma de determinantes. O termo independente de $Q(t)$ é $\det(R)$. O coeficiente de $(-t)^j$ é a soma de determinantes obtidos pela substituição na matriz R de quaisquer j colunas pelas correspondentes colunas da matriz S .

Proposição 1.1 A r -ésima curvatura H_r , $1 \leq r \leq n$, do graf(u) $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz

$$\binom{n}{r} W^{r+2} H_r = \sum_{j_1 < \dots < j_r} (W^2 - u_{j_1}^2 - \dots - u_{j_r}^2) \begin{vmatrix} u_{j_1 j_1} & u_{j_1 j_2} & \dots & u_{j_1 j_r} \\ u_{j_1 j_2} & u_{j_2 j_2} & \dots & u_{j_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_1 j_r} & u_{j_2 j_r} & \dots & u_{j_r j_r} \end{vmatrix} \\ - 2 \sum_{i < k} u_i u_k \left(\sum_{\substack{j_2 < \dots < j_r \\ j_2, \dots, j_r \neq i, k}} \begin{vmatrix} u_{ik} & u_{ij_2} & \dots & u_{ij_r} \\ u_{j_2 k} & u_{j_2 j_2} & \dots & u_{j_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_r k} & u_{j_r j_2} & \dots & u_{j_r j_r} \end{vmatrix} \right)$$

onde $W^2 = 1 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

Demonstração Usaremos (1.2) para calcular H_r . Se $r = 1$ é imediato de (1.4) que

$$nW^3 H_1 = \sum_j (W^2 u_{jj} - u_j c_j) \sum_j (W^2 u_{jj} - u_j (u_1 u_{1j} + \dots + u_n u_{nj})) \\ \Rightarrow \binom{n}{1} W^3 H_1 = \sum_j (W^2 - u_j^2) u_{jj} - 2 \sum_{i < j} u_i u_j u_{ij}$$

Para demonstrar o caso $r > 1$, aplicaremos o lema 1.1 com $t = W^2$, $R_{ij} = u_i c_j$, e $S_{ij} = u_{ij}$ para calcular o $\det([B]_J)$. De (1.4) temos que

$$-W^3 [b_{ij}] = [u_i c_j] - W^2 [u_{ij}]. \quad (1.5)$$

Observe que todas as colunas de R são múltiplas de $[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$, pois a coluna j de R é $[u_1 c_j \ u_2 c_j \ \dots \ u_n c_j] = c_j [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$. Daí, o determinante da matriz encontrada

pela substituição de qualquer j colunas da submatriz R_J , com $|J| = r$, pelas correspondentes colunas da submatriz S_J , é zero quando pelo menos duas colunas de R_J não são substituídas. Segue então que o coeficiente de $(-t)^j$ no determinante $\det(R_J - tS_J)$ anula-se, exceto quando $j = r$ ou $j = r - 1$, pois para $j = r$ trocam-se todas as colunas e para $j = r - 1$ trocam-se todas menos uma. Portanto, de (1.5), temos que se $J = \{1, \dots, r\}$, por exemplo, então

$$\begin{aligned} (-W^3)^r \det B_J &= \left| \begin{bmatrix} u_1 c_1 & \cdots & u_1 c_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_r c_1 & \cdots & u_r c_r \end{bmatrix} - W^2 \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{r1} & \cdots & u_{rr} \end{bmatrix} \right| = (-W^2)^r \left| \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{r1} & \cdots & u_{rr} \end{bmatrix} \right| \\ &+ (-W^2)^{r-1} \left(c_1 \left| \begin{bmatrix} u_1 & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_r & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{bmatrix} \right| + \cdots + c_r \left| \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1,r-1} & u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{r1} & \cdots & u_{r,r-1} & u_r \end{bmatrix} \right| \right). \quad (1.6) \end{aligned}$$

O coeficiente de $(-W^2)^{r-1}$ é igual a

$$\sum_{j=1}^r c_j \det A_j = \sum_{j,i=1}^r \sum_{k=1}^n u_k u_i u_{kj} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k \in J} u_k u_i \sum_{j=1}^r u_{kj} \Delta_{ij} + \sum_{k \notin J} u_k u_i \sum_{j=1}^r u_{kj} \Delta_{ij} \right) \quad (1.7)$$

onde A_i é o i -ésimo determinante que aparece no coeficiente de $(-W^2)^{r-1}$ em (1.6) e Δ_{ij} é o i, j cofator de S_J . O fator

$$\sum_{j=1}^r u_{kj} \Delta_{ij} \quad (1.8)$$

é o determinante da submatriz S_J com a i -ésima linha substituída por $[u_{k1} \dots u_{kr}]$, portanto se $k \in J$ então (1.8) é igual a zero ou $\det S_J$, dependendo se $k \neq i$ ou $k = i$, respectivamente. Daí, segue que (1.7) é igual a

$$\sum_{i \in J} u_i^2 \det S_J + \sum_{i \in J, k \notin J} u_i u_k \sum_{j \in J} u_{kj} \Delta_{ij}.$$

Dividindo (1.6) por $(-1)^r W^{2(r-1)}$, obtemos que

$$W^{r+2} \det B_J = \left(W^2 - \sum_{j \in J} u_j^2 \right) \det S_J - \sum_{i \in J, k \notin J} u_i u_k \sum_{j \in J} u_{kj} \Delta_{ij}$$

para qualquer conjunto de índice J de medida r . A soma sobre $|J| = r$ é igual a

$$\binom{n}{r} W^{r+2} H_r = \sum_J \left(W^2 - \sum_{j \in J} u_j^2 \right) \det S_J - \sum_J \sum_{i \in J, k \notin J} u_i u_k \sum_{j \in J} u_{kj} \Delta_{ij} \quad (1.9)$$

Note que o fator $\sum_{j \in J} u_{kj} \Delta_{ij}$ da igualdade acima é exatamente igual ao determinante

$$\begin{vmatrix} u_{ik} & u_{ij_2} & \cdots & u_{ij_r} \\ u_{j_2k} & u_{j_2j_2} & \cdots & u_{j_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_rk} & u_{j_rj_2} & \cdots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix},$$

onde $J = \{j_2, \dots, j_r\} \cup \{i\}$, e além disso, que esse determinante permanece o mesmo se permutamos i e k , o que implica que ele aparece duas vezes no segundo termo de (1.9).

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_J \sum_{i \in J, k \notin J} u_i u_k \sum_{j \in J} u_{kj} \Delta_{ij} &= \sum_J \sum_{i \in J, k \notin J} u_i u_k \begin{vmatrix} u_{ik} & u_{ij_2} & \cdots & u_{ij_r} \\ u_{j_2k} & u_{j_2j_2} & \cdots & u_{j_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_rk} & u_{j_rj_2} & \cdots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix} \\ &= 2 \sum_{i < k} u_i u_k \left(\sum_{\substack{j_2 < \cdots < j_r \\ j_2, \dots, j_r \neq i, k}} \begin{vmatrix} u_{ik} & u_{ij_2} & \cdots & u_{ij_r} \\ u_{j_2k} & u_{j_2j_2} & \cdots & u_{j_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_rk} & u_{j_rj_2} & \cdots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

■

É com essa fórmula, para a r -ésima curvatura de uma hipersuperfície dada por um gráfico de uma função, que iremos estabelecer o Princípio do Máximo para hipersuperfície com curvatura escalar nula, $1 < r < n$.

RAÍZES ELÍPTICAS DAS FUNÇÕES SIMÉTRICAS

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e demonstrações extraídos de [1], [4] e [10].

Na segunda seção definimos polinômios hiperbólicos e mostramos que as funções simétricas de $\mathbb{R}^n$ são polinômios hiperbólicos. Como mostra (1.3) a curvatura $H_r(p)$ é essencialmente a r -ésima função simétrica σ_r aplicada nas curvaturas principais, é essa forte relação, junto com os resultados deste capítulo, que será usada no capítulo 3 para a demonstração do Princípio da Tangência. A seguir, nas seções 3 e 4, definimos o cone e as folhas de um polinômio hiperbólico para logo em seguida apresentar alguns resultados. Na seção 5 mostramos algumas condições sobre as raízes de uma função simétrica para que ela seja elíptica ou antielíptica, bem como algumas propriedades de raízes de polinômios hiperbólicos.

2.2 Polinômios Hiperbólicos

Definição 2.1 *Seja $P = P(x)$ um polinômio homogêneo de grau $m > 0$ em n variáveis $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, e seja $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Dizemos que P é hiperbólico com respeito a a , ou simplesmente, que P é a -hiperbólico, se a equação $P(sa + x) = 0$ tem m zeros reais para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Geometricamente, isto diz que qualquer reta em $\mathbb{R}^n$ com a direção de a encontra a hipersuperfície $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\}$ em m pontos reais.

Se P é a -hiperbólico, então

$$P(sa + x) = P(a) \prod_{i=1}^m (s + \lambda_k(a, x)), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1(a, x) \leq \dots \leq \lambda_m(a, x). \quad (2.1)$$

Os λ'_k assim definidos são funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ contínuas, como podemos ver em [1].

Observação 2.1 Note que, diretamente da definição, quando um polinômio P é a -hiperbólico, então $\frac{P(x)}{P(a)}$ é real sempre que x é real. Assim um polinômio hiperbólico é essencialmente real, e podemos, sem perda de generalidade, nos restringir a polinômios reais tais que $P(a) = 1$.

Propriedade 2.1 Os λ'_k definidos em (2.1) têm as seguintes propriedades:

- (i) $\lambda_k(a, tx + sa) = t\lambda_k(a, x) + s; t, s \in \mathbb{R};$
- (ii) $\lambda_k(ta, x) = \frac{1}{t}\lambda_k(a, x); t \in \mathbb{R} - \{0\}.$

Lema 2.1 Se P é um polinômio homogêneo de grau $m > 1$ e a -hiperbólico, então

$$Q(x) = \sum a_k \frac{\partial P}{\partial x_k}(x)$$

é homogêneo de grau $m - 1$ e a -hiperbólico.

Proposição 2.1 Se P é um polinômio real homogêneo de grau m e a -hiperbólico, então os polinômios P_j dados por

$$P(sa + x) = \sum_{j=1}^m P_j(x)s^{m-j} + P(a)s^m, \quad (2.2)$$

são homogêneos de grau j e hiperbólicos a .

Esses resultados e suas demonstrações podem ser encontrados em [1] e [4].

Exemplo 2.1 Considere a r -ésima função simétrica σ_r definida por

$$\sigma_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Se $\sigma_n(a) \neq 0$ então σ_n é a -hiperbólico. Para $a = (1, \dots, 1)$ temos

$$\sigma_n(sa + x) = (s + x_1) \dots (s + x_n) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(x) s^{n-j} + s^n.$$

Portanto pela proposição 2.1 temos que as funções simétricas σ_r são hiperbólicas com respeito a $a = (1, \dots, 1)$.

Daqui por diante, sempre que considerarmos que a r -ésima função simétrica é a -hiperbólica, estaremos considerando $a = (1, \dots, 1)$.

2.3 O Cone

Segue diretamente da propriedade 2.1 que se o polinômio P é a -hiperbólico, então ele é hiperbólico com respeito a qualquer múltiplo de a . Além disso o conjunto dos pontos onde P é hiperbólico é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2 Definimos o cone de a com respeito ao polinômio P por

$$C(P, a) = \{x \in \mathbb{R}^n | P(ta + x) \neq 0, \ t \geq 0\}$$

Segue de (2.1) uma definição equivalente do cone, $C(P, a) = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda_1(a, x) > 0\}$.

O motivo de chamarmos esse conjunto de cone está na propriedade 2.1, pois $\lambda_1(a, tx) = t\lambda_1(a, x)$, $t > 0$, o que implica que se $x \in C(P, a)$ então a semi reta $\{tx \in \mathbb{R}^n | t > 0\} \in C(P, a)$.

Pelo lema 2.1 temos que se P é a -hiperbólico então $Q(x) = \langle \nabla P(x), a \rangle$ também é. Daí se $x \in C(P, a)$, então todos os zeros de $P(sa + x)$ são negativos assim como os zeros de sua derivada $Q(sa + x) = \langle \nabla P(sa + x), a \rangle$ o que implica que $C(P, a) \subset C(Q, a)$.

Exemplo 2.2 Como

$$\sigma_r(x) = \sigma_r(\hat{x}_i) + x_i \sigma_{r-1}(\hat{x}_i) \Rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}(x) = \sigma_{r-1}(\hat{x}_i),$$

onde a notação $\hat{x}_i$ diz que $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ e é obtido de x excluindo a i -ésima coordenada, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\sigma_{j+1}(x+sa) &= \langle \nabla \sigma_{j+1}(x+sa), a \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_j(\widehat{(x+sa)_i}) = (n-j)\sigma_j(x+sa), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

e daí

$$C(\sigma_n) \subset C(\sigma_{n-1}) \subset \dots \subset C(\sigma_1). \quad (2.4)$$

Em $\mathbb{R}^3$, o cone de $a = (1, 1, 1)$ com respeito a σ_1 , σ_2 e σ_3 são os seguintes: $C(\sigma_1, a) : x + y + z > 0$, pois $\lambda_1(a, p) = \frac{\sigma_1(p)}{3}$, o semi-cone de revolução $C(\sigma_2, a) : \{xy + xz + yz > 0\} \cap C(a, \sigma_1)$, expresso por $2s^2 - (t^2 + u^2) > 0$ em coordenadas ortogonais, com $s > 0$ coordenada de $(1, 1, 1)$ e (t, u) no plano $x + y + z = 0$, e o octante positivo $C(\sigma_3, a) : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0 \text{ e } z > 0\}$.

Teorema 2.1 (*Desigualdade de Gårding*) *As raízes do polinômio $P(sa + x)$ satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$\lambda_k(x + c) > \lambda_k(x), \quad \forall c \in C, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, m.$$

A demonstração desse teorema não é imediata e pode ser encontrada em [4].

2.4 As Folhas

Pelo que já foi visto até agora é possível mostrar que, se $b \in C(P, a)$, então P é b -hiperbólico e $C(P, a) = C(P, b)$. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [1] e os resultados desta seção em [10]. Portanto, a partir de agora consideraremos $a = (1, \dots, 1)$ e omitiremos a ou P da notação $C(P, a)$ e $\lambda_k(a, x)$, usando simplesmente C ou $C(a)$ e $\lambda_k(x)$.

Como já foi observado anteriormente, se P é um polinômio a -hiperbólico de grau m então qualquer reta paralela ao vetor a intersecta o conjunto $P = 0$ em exatamente m pontos (contando com multiplicidade). O que implica que o conjunto $P = 0$ é a união de

m folhas

$$Z_j = \{y - \lambda_j(y)a \mid y \in \Pi\}, \quad j = 1, \dots, m,$$

onde Π denota o hiperplano passando pela origem ortogonal a a .

Uma definição equivalente da folha é

$$Z_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_j(x) = 0\}.$$

De fato, pois usando a propriedade 2.1 temos

$$\lambda_j(y - \lambda_j(y)a) = \lambda_j(y) - \lambda_j(y) = 0$$

e, reciprocamente, se $\lambda_j(a, x) = 0$, então escreva x na forma $x = ta + y$, onde y pertence ao hiperplano ortogonal ao vetor a que passa pela origem. Daí

$$\lambda_j(x) = \lambda_j(ta + y) = \lambda_j(y) + t = 0 \Rightarrow t = -\lambda_j(y) \Rightarrow x = y - \lambda_j(y)a \text{ com } y \in \Pi.$$

Note que as folhas são independentes da escolha do ponto $a \in C$ escolhido e então podemos ordená-las como $Z_1 \geq \dots \geq Z_m$ de acordo com $-\lambda_1 \geq \dots \geq -\lambda_m$.

Chamaremos de cone positivo aberto de $\mathbb{R}^n$ ao conjunto

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Teorema 2.2 *Seja k uma raiz de um polinômio real P a -hiperbólico de grau $m > 0$ em $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Se $k \in Z_1$, então $P(k + c) > 0$, $\forall c \in C$.*

(ii) *Se $k \notin Z_1$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $(-1)^{i-1}P(k + c) > 0$, $\forall c \in C$ com $\|c\| < \epsilon$, onde $i = \min\{1, \dots, m\}$ tal que $k \in Z_i$.*

Demonstração (i) Se $k = 0$ então $P(c) = \prod_{j=1}^m \lambda_j(c) > 0$, $\forall c \in C$.

Se $k \neq 0$ então como $k \in Z_1$ podemos escrever $k = y - \lambda_1(y)a$ para um único $y \in \Pi$, o que implica que

$$P(k + c) = P(y + c - \lambda_1(y)a) = \prod_{j=1}^m (-\lambda_1(y) + \lambda_j(y + c)). \quad (2.5)$$

Segue do teorema 2.1 e de $\lambda_1(y) \leq \dots \leq \lambda_m(y)$ que

$$\lambda_j(y + c) > \lambda_j(y) \geq \lambda_1(y), \forall j \geq 1.$$

Logo $P(k + c) > 0, \forall c \in C$.

(ii) Seja $i = \min\{1, \dots, m\}$ tal que $k \in Z_i$. Como $k \notin Z_1$ então $i \neq 1$ e para $j < i$ temos que $\lambda_j(y) < \lambda_i(y)$ e por continuidade de λ_j existe $\epsilon_j > 0$ tal que $\lambda_j(y + c) < \lambda_i(y), \forall c \in \mathbb{R}^n$ com $\|c\| < \epsilon_j$. Da mesma forma que (2.5) encontramos

$$P(k + c) = \prod_{j=1}^m (-\lambda_i(y) + \lambda_j(y + c)).$$

e

$$\lambda_j(y + c) > \lambda_i(y), \forall j \geq i.$$

Tome então $\epsilon = \min\{\epsilon_j \mid j < i\}$, e obtém-se que

$$(-1)^{i-1}P(k + c) > 0, \forall c \in C \text{ com } \|c\| < \epsilon.$$

■

Corolário 2.1 *Seja k uma raiz de um polinômio hiperbólico tal que o cone Γ seja um subconjunto do cone C . Se Z_i é a maior folha que contém k então $(-1)^{i-1}\nabla P(k) \in \bar{\Gamma}$.*

Demonstração Seja $x \in \bar{\Gamma}$. Tome uma seqüência $c_n \in C$ tal que $c_n \rightarrow x$. Do teorema 2.2 tem-se que $(-1)^{i-1}P(k + tc_n) > 0, \forall t > 0$ tal que $\|tc_n\| < \epsilon$. Como $P(k) = 0$ então numa vizinhança de $t = 0$ temos que $(-1)^{i-1}P(k + tc_n)$ é crescente, já que P é um polinômio, portanto $(-1)^{i-1}\nabla\langle P(k + tc_n), c_n \rangle > 0$ o que implica que

$$(-1)^{i-1}\langle \nabla P(k), x \rangle \geq 0, \forall x \in \bar{\Gamma}.$$

Como $e_j \in \bar{\Gamma}$, segue que $(-1)^{i-1}\nabla P(k) \in \bar{\Gamma}$. ■

2.5 Condição para a Elipticidade

Nesta seção o foco principal dos resultados serão as funções simétricas, que como foi mostrado anteriormente, são polinômios hiperbólicos. O primeiro passo é definir uma classe de raízes desses polinômios que possuam uma propriedade em especial, e a partir daí demonstrar uma série de resultados que serão utilizados na próxima seção. A maior parte dos resultados desta seção foi demonstrado por Leite e pode ser encontrado em [7] e com maiores detalhes em [10].

Definição 2.3 Para um dado r , $1 < r < n$, dizemos que $k \in \mathbb{R}^n$ é uma raiz elíptica do polinômio $\sigma_r = 0$ se $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, e antielíptica se $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) < 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Se k é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$, então $-k$ é também uma raiz, que é elíptica ou antielíptica, dependendo se r for par ou ímpar, respectivamente.

Lema 2.2 Se $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $< r$, então $\sigma_r(k) = 0$. Além disso, k não é elíptico nem antielíptico.

Demonstração Se k tem no máximo $r - 1$ coordenadas diferentes de zero, então cada termo de $\sigma_r(k)$ anula-se e então $\sigma_r(k) = 0$. Se $k = 0$ claramente não é elíptico nem antielíptico, pois $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = 0$, $\forall i$. Se $k \neq 0$, escolha i tal que $k_i \neq 0$, o que implica que $\text{diag}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n)$ tem posto $< r - 1$. Logo $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = 0$ e k não é elíptico nem antielíptico. ■

Lema 2.3 Se $\sigma_r(k) = 0$ então os $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$ ou são todos ≤ 0 ou ≥ 0 , para todo $1 \leq i \leq n$.

Demonstração É uma aplicação direta do corolário 2.1, pois $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial k_i}$. ■

Observe que o lema não está dizendo que toda raiz de σ_r é elíptica ou antielíptica, pois podemos ter $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = 0$.

Lema 2.4 Se $\sigma_r(k) = \sigma_{r-1}(k) = 0$ então $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $< r - 1$.

Demonstração Fazemos a demonstração por indução em $r \geq 2$.

(i) Se $r = 2$ então $\sigma_1(k) = \sigma_2(k) = 0$ implica que $k = 0$, pois

$$0 = \sigma_1(k)^2 = k_1^2 + \cdots + k_n^2 + 2\sigma_2(k) = \|k\|^2.$$

(ii) Suponha verdade para $r - 1$, $r > 2$, e mostremos para r .

Se $\sigma_r(k) = \sigma_{r-1}(k) = 0$, então $\forall i = 1, \dots, n$ temos

$$0 = \sigma_r(k) = \sigma_r(\hat{k}_i) + k_i \sigma_{r-1}(\hat{k}_i), \quad (2.6)$$

$$0 = \sigma_{r-1}(k) = \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) + k_i \sigma_{r-2}(\hat{k}_i), \quad (2.7)$$

que resulta em

$$\sigma_r(\hat{k}_i) = -k_i \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = k_i^2 \sigma_{r-2}(\hat{k}_i).$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_{r-2}(\hat{k}_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_r(\hat{k}_i) = (n - r) \sigma_r(k) = 0.$$

Pelo lema 2.3, todos os $\sigma_{r-2}(\hat{k}_i)$ têm o mesmo sinal, e então $k_i^2 \sigma_{r-2}(\hat{k}_i) = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Se existe i tal que $k_i \neq 0$, então $\sigma_{r-2}(\hat{k}_i) = 0$ e (2.7) é reduzido a $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = 0$. Portanto $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = \sigma_{r-2}(\hat{k}_i) = 0$. Segue da hipótese de indução que $\text{diag}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n)$ tem posto $< r - 2$, daí $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $< r - 1$. ■

Lema 2.5 *Seja $\sigma_r(k) = 0$, para algum $1 < r < n$. Se $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $> r$, então $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) \neq 0$, $\forall i$.*

Demonstração Suponha que $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) = 0$, para algum i . Então (2.6) implica que $\sigma_r(\hat{k}_i) = 0$ e então pelo lema 2.4 temos que $\text{diag}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n)$ tem posto $< r - 1$, assim $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $< r$, contradição. ■

Teorema 2.3 *Seja k uma raiz de $\sigma_r = 0$, para algum $1 < r < n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) k é elíptica ou antielíptica;

(b) $\sigma_{r+1}(k) \neq 0$;

(c) a matriz $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $> r$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b) Suponha por contradição que (b) não é verdade, isto é, $\sigma_{r+1}(k) = \sigma_r(k) = 0$. Do lema 2.4 temos $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $< r$ e pelo lema 2.2, k não é elíptico nem antielíptico, que contradiz (a).

(b) $\Rightarrow$ (c) Contrapositiva da primeira parte do lema 2.2.

(c) $\Rightarrow$ (a) É imediato do lema 2.5 que $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) \neq 0$, $\forall i$, e do lema 2.3 que eles têm o mesmo sinal. Logo k é elíptico ou antielíptico. ■

Uma observação importante a fazer é que se k é uma raiz elíptica de $\sigma_r(k) = 0$ então $\sigma_{r+1}(k) < 0$ e se for uma raiz antielíptica então $\sigma_{r+1}(k) > 0$. De fato, pois de (2.6) temos que $\sigma_r(\hat{k}_i) = -k_i \sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$ e então

$$\begin{aligned} 0 \neq \sigma_{r+1}(k) &= \sigma_{r+1}(\hat{k}_i) + k_i \sigma_r(\hat{k}_i) = \sigma_{r+1}(\hat{k}_i) - k_i^2 \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) \\ \Rightarrow n \sigma_{r+1}(k) &= \sum_{i=1}^n \sigma_{r+1}(k) \sum_{i=1}^n \sigma_{r+1}(\hat{k}_i) - \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) \\ &= (n - r - 1) \sigma_{r+1}(k) - \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) \Rightarrow (r + 1) \sigma_{r+1}(k) = - \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_{r+1}(k) > 0$ se k é uma raiz antielíptica de $\sigma_r = 0$ e $\sigma_{r+1}(k) < 0$ se k é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$.

Lema 2.6 *Seja P um polinômio hiperbólico com cone C . Suponha que k e k' são raízes distintas de $P(x) = 0$ pertencentes a uma mesma folha Z_i , com $k - k' \in \overline{C}$. Então $k - k' \in \partial C$ e P anula-se no segmento de reta determinado por k e k' .*

Demonstração Suponha por contradição que $k - k' \in C$, então pelo teorema 2.1 temos que

$$\lambda_i(k) = \lambda_i(k' + (k - k')) > \lambda_i(k') = 0$$

contradizendo $k \in Z_i$. Logo $k - k' \in \partial C$.

Seja agora $c_n \in C$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k - k'$. Pelo teorema 2.1 e pelo fato que C é um cone, obtemos que

$$0 = \lambda_i(k') < \lambda_i(k' + tc_n) = \lambda(k' + c_n + (1 - t)c_n) < \lambda_i(k' + c_n) \rightarrow \lambda_i(k) = 0, \forall t \in (0, 1).$$

Portanto, $\lambda_i(k' + t(k - k')) = 0$ o que implica que $k' + t(k - k') \in Z_i, \forall t \in [0, 1]$. Daí

$$P(k' + t(k - k')) = P(a) \prod_{i=1}^m \lambda_i(k' + t(k - k')) = 0$$

■

Proposição 2.2 *Sejam k e k' raízes na mesma folha Z_i de $\sigma_r = 0, 1 < r < n$, com $k - k' \in \bar{\Gamma}$. Se k ou k' é elíptica, ou antielíptica, então $k = k'$.*

Demonstração Observe que

$$\sigma_r(k) = k_i \sigma_{r-1}(\hat{k}_i) + \sigma_r(\hat{k}_i) \Rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial k_i} = \sigma_{r-1}(\hat{k}_i), \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Assim, se k é elíptico, então $\nabla \sigma_r(k) \in \Gamma$. Pelo lema 2.6, temos que $\sigma_r(k + t(k' - k)) = 0$, resultando em $\langle \nabla \sigma_r(k), k - k' \rangle = 0$, com $\nabla \sigma_r(k) \in \Gamma$ e $k - k' \in \bar{\Gamma}$, que é possível somente quando $k - k' = 0$.

Se k' é elíptico temos $\sigma_r(k' + t(k - k')) = 0$ e segue-se da mesma forma que anteriormente que $k = k'$.

Se uma das raízes é antielíptica a prova é análoga. ■

Proposição 2.3 *Seja k uma raiz de $\sigma_r = 0, 1 < r < n$, e seja Z_1 a maior folha de $\sigma_r = 0$. Então*

$$(i) \quad k \in Z_1 \Leftrightarrow \sigma_j(k) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r - 1.$$

$$(ii) \quad k \in Z_1 \Rightarrow \sigma_{r+1}(k) \leq 0.$$

(iii) $k \in Z_1$ e é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0 \Leftrightarrow \sigma_{r+1}(k) < 0 < \sigma_j(k)$, $\forall j = 1, \dots, r-1$.

Demonstração (i) $(\Rightarrow)$ Se $k \in Z_1$ então existe um único $y \in \Pi$ tal que $k = y - \lambda_1(y)a$, onde Π é o hiperplano que passa pela origem que é ortogonal a $a = (1, \dots, 1)$. Se $y = 0$ então $k = 0$, pois $\lambda_1(0) = 0$ e daí $\sigma_j(0) = 0$, $\forall j = 1, \dots, n$. Suponhamos, então, que $y \neq 0$.

O polinômio $\sigma_j(y + sa)$, $s \in \mathbb{R}$, tem j raízes reais, pois, como foi mostrado anteriormente, as funções simétricas são polinômios hiperbólicos, e o coeficiente do termo de maior grau é $\sigma_j(a)$ que é positivo. Portanto existe um número real s_j tal que s_j é a maior raiz de $\sigma_j(y + sa) = 0$, $j = 1, \dots, n$ e o polinômio é positivo e estritamente crescente em $(s_j, +\infty)$, caso contrário existiria pelo menos um ponto de mínimo local e outro de máximo local, e então a derivada de $\sigma_j(y + sa)$ teria mais que $j + 1$ raízes, que é absurdo, pois ela possui no máximo $j - 1$ raízes distintas.

Temos de (2.3) que

$$\frac{d}{ds}\sigma_{j+1}(y + sa) = (n - j)\sigma_j(y + sa), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

Daí,

$$\frac{d}{ds}\sigma_{j+1}(y + sa) \big|_{s=s_j} = (n - j)\sigma_j(y + s_j a) = 0$$

e

$$\frac{d^2}{ds^2}\sigma_{j+1}(y + sa) \big|_{s=s_j} = (n - j)\frac{d}{ds}\sigma_j(y + sa) \big|_{s=s_j} = (n - j)(n - j + 1)\sigma_{j-1}(y + s_j a) \geq 0$$

já que $\sigma_j(y + sa)$ é estritamente crescente em (s_j, ∞) . Se a derivada acima for positiva então s_j é o maior ponto de mínimo de $\sigma_{j+1}(y + sa)$. Portanto, sendo s_j o maior ponto de mínimo e s_{j+1} a maior raiz de $\sigma_{j+1}(y + sa)$ então segue da definição de s_j que

$$\sigma_{j+1}(y + s_j a) \leq 0 \quad \text{e} \quad s_{j+1} \geq s_j, \quad \forall j \leq n-1. \quad (2.10)$$

Porém, se a derivada for nula então $\sigma_j(y + s_j a) = \sigma_{j-1}(y + s_j a) = 0$, o que implica, pelo lema 2.4, que o ponto $y + s_j a$ tem no máximo $j - 2$ coordenadas não nulas, daí $\sigma_{j+1}(y + s_j a) = 0$. Portanto, (2.10) é válido em qualquer caso.

Logo se $i \leq n - j$ então $s_{j+i} \geq s_j$ implica que $\sigma_j(y + s_{j+i}a) \geq \sigma_j(y + s_ja) = 0$, pois $\sigma_j(y + sa)$ é crescente em (s_j, ∞) .

Pela definição de s_r , temos que $s_r = -\lambda_1(y)$, então

$$\sigma_j(k) = \sigma_j(y + s_ra) \geq 0, \quad j \leq r - 1,$$

provando um lado de (i).

($\Leftarrow$) Inicialmente, observe que pelo fato de y pertencer à um hiperplano ortogonal ao vetor a temos $\sigma_1(y) = \langle y, a \rangle = 0$, o que implica que $\sigma_1(y + sa) = \sigma_1(y) + s\sigma_1(a) = ns$ e portanto $s_1 = 0$ e $s_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n$, por (2.10).

Seja k uma raiz de σ_r satisfazendo $\sigma_j(k) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r-1$ e escreva $k = y + ta, y \in \Pi$. Mostraremos que t é a maior raiz de $\sigma_r(y + sa), s \in \mathbb{R}$ e $k \in Z_1$.

Como $\sigma_j(y + sa) > 0$ em (s_j, ∞) , segue de (2.9) que $\sigma_{j+1}(y + sa)$ é estritamente crescente em $[s_j, \infty)$. Provemos por indução que $t \geq s_r$. Como, por hipótese, $0 \leq \sigma_1(k) = \sigma_1(y + ta) = nt$ então $t \geq 0 = s_1$. Assuma que $t \geq s_j$, para algum $j = 1, \dots, r-1$. Como, por hipótese, $\sigma_{j+1}(y + ta) \geq 0$ então $t \geq s_{j+1}$, caso contrário $t \in [s_j, s_{j+1})$ onde σ_{j+1} é estritamente crescente e daí $\sigma_{j+1}(y + ta) < \sigma_{j+1}(y + s_{j+1}a) = 0$, que é uma contradição.

Como s_r é a maior raiz de $\sigma_r(y + sa) = \sigma_r(a) \prod_{i=1}^r (s + \lambda_i(y)) = 0$, ou seja, $s_r = -\lambda_1(y)$, obtemos que $t = s_r$. Logo $k \in Z_1$, e então a prova de (i) está completa.

(ii) Como $s_r = -\lambda_1(y)$ então segue de (2.10) que

$$\sigma_{r+1}(k) = \sigma_{r+1}(y + s_ra) \leq 0.$$

(iii) ($\Rightarrow$) Pelo teorema 2.3 e o item (ii) segue que $\sigma_{r+1} < 0$ e pelo item (i) já temos que $\sigma_j(k) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r-1$, resta mostrar que a desigualdade é estrita.

Suponha que $\sigma_j(k) = 0$ para algum $j \leq r-1$. Foi provado acima que $k = y + s_ra = y - \lambda_1(y)a \in Z_1$. Então $\sigma_j(y + s_ra) = 0$ implica que $s_r \leq s_j$. Por (2.10) temos que $s_j \leq \dots \leq s_{r-1} \leq s_r$ o que implica que $s_j = s_r, \sigma_j(k) = \sigma_{r-1}(k) = \sigma_r(k) = 0$. Logo, pelo lema 2.4, temos $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ tem posto $< r-1$ e, pelo lema 2.2, k não é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$, contradição.

($\Leftarrow$) Pelo ítem (i) já temos que $k \in Z_1$ e do corolário 2.1 segue que $\nabla \sigma_r(k) \in \overline{\Gamma}$, que junto com o teorema 2.3 implica que k é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$. ■

Proposição 2.4 $x \in \overline{C} \Leftrightarrow \sigma_j(x) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r$; além disso, $x \in C \Leftrightarrow \sigma_j(x) > 0, \forall j = 1, \dots, r$.

Demonstração Por (2.4) temos que $C = C(\sigma_r) \subset \dots \subset C(\sigma_1)$. Portanto se $x \in C$ então $\sigma_j(x) > 0, \forall j = 1, \dots, r$ e por continuidade, se $x \in \overline{C}$, então $\sigma_j(x) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r$. Reciprocamente, seja $x = ta + y$, com $y \in \Pi$ e $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo $\sigma_j(x) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r$. Usando o argumento de indução da demonstração da proposição 2.3 mostramos que $t \geq s_j, j = 1, \dots, r$. Usando a propriedade 2.1, temos que $\lambda_1(x) = \lambda_1(y + ta) = \lambda_1(y) + t = -s_r + t \geq 0$. Portanto, se $-s_r + t > 0$ então $\lambda_1(x) > 0$ o que implica que $x \in C$. Se $t = s_r$ então $\lambda_1(x) = 0$ o que implica que $\lambda_1(x + \alpha a) > 0, \forall \alpha > 0$, e daí $x \in \overline{C}$. ■

Proposição 2.5 Sejam $Z_i, i = 1, \dots, r$ as folhas de σ_r . Se $x \in Z_i \cap Z_j, i \neq j$ então $\sigma_{r+1}(x) = 0$.

Demonstração Por definição $Z_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_j(x) = 0\}$, então sem perda de generalidade podemos supor que $x \in Z_j \cap Z_{j+1}$, já que $-\lambda_1 \geq \dots \geq -\lambda_r$.

Como $\sigma_r(sa + x) = \sigma_r(a)s^2 \prod (s + \lambda_i(x))$ com $i \neq j, j + 1$ então

$$\frac{d}{ds} \sigma_r(sa + x) \big|_{s=0} = (n - r + 1) \sigma_{r-1}(x) = 0.$$

Assim, pelo lema 2.4 temos que $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ tem posto $< r - 1$, o que implica que $\sigma_{r+1}(x) = 0$. ■

O PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA

3.1 Introdução

O principal resultado deste capítulo encontra-se na seção 3.4, que é o Princípio da Tangência, que diz que sobre certas condições duas hipersuperfícies, tangentes em um ponto p , não podem permanecer uma acima da outra, na direção da normal no ponto de tangência. É com ele que, no capítulo 5, demonstraremos um princípio de reflexão, principal ferramenta para a demonstração do resultado final. Na segunda seção definimos quando o operador $\mathcal{H}_r[u] = 0$ é elíptico com respeito a uma função u . Como introduzido por Reilly em [12], definimos a r -ésima Transformação de Newton, que junto com o operador $\mathcal{H}_r$, será usada para a demonstração dos teoremas 3.5 e 3.6. Na seção 3.3 apresentamos alguns resultados de [11] que serão usados na seção 3.4.

Os resultados presentes neste capítulo foram extraídos de [7] e [10], com exceção da seção 3 que se encontra em [11].

3.2 Soluções Elípticas de $\mathcal{H}_r[u] = 0$

Consideremos o operador associado a H_r , definido por $\mathcal{H}_r = \binom{n}{r} W^{r+2} H_r(\text{graf } u)$.

$$\mathcal{H}_r[u] = \sum_{j_1 < \dots < j_r} (W^2 - u_{j_1}^2 - \dots - u_{j_r}^2) \begin{vmatrix} u_{j_1 j_1} & u_{j_1 j_2} & \dots & u_{j_1 j_r} \\ u_{j_1 j_2} & u_{j_2 j_2} & \dots & u_{j_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_1 j_r} & u_{j_2 j_r} & \dots & u_{j_r j_r} \end{vmatrix} -$$

$$-2 \sum_{i < k} u_i u_k \left(\sum_{\substack{j_2 < \dots < j_r \\ j_2, \dots, j_r \neq i, k}} \begin{vmatrix} u_{ik} & u_{ij_2} & \dots & u_{ij_r} \\ u_{j_2k} & u_{j_2j_2} & \dots & u_{j_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_rk} & u_{j_rj_2} & \dots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix} \right) \quad (3.1)$$

Dessa forma, a equação diferencial parcial para $H_r(\text{graf } u) = 0$, $1 \leq r \leq n$ é dada por

$$\mathcal{H}_r[u] = 0$$

que é um polinômio de grau r na derivada segunda u_{ij} .

Definição 3.1 O operador $\mathcal{H}_r$ é dito *elíptico* com respeito a uma função u no ponto $x \in \Omega$ se a matriz $\left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}(u) \right](x)$ existe e é positiva definida; ele é *uniformemente elíptico* com respeito a u se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω , onde $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são os autovalores mínimos e máximos da matriz $\left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}(u) \right](x)$. Dizemos que uma solução de $\mathcal{H}_r[u] = 0$ é *elíptica* se o operador $\mathcal{H}_r$ é elíptico com respeito a ela.

Exemplo 3.1 Uma solução de $\mathcal{H}_1[u] = 0$ é sempre elíptica. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1[u] &= \sum_i^n (1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n u_j^2) u_{ii} - 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n u_i u_j u_{ij} \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial u_{ij}} &= -2u_i u_j, \text{ se } i < j, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial u_{ij}} = 0 \text{ se } i > j \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial u_{ii}} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n u_j^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $A = \left[\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial u_{ij}} \right] = [a_{ij}]$ então, para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle &= \sum_{i,j=1}^n v_i a_{ij} v_j \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n u_j^2 \right) v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i < j}^n u_i u_j v_i v_j \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i < j}^n (u_i v_j - u_j v_i)^2 \geq \sum_{i=1}^n v_i^2. \end{aligned}$$

Logo, a matriz A é definida positiva, e portanto uma solução de $\mathcal{H}_1[u] = 0$ é sempre elíptica.

No entanto, uma solução de $\mathcal{H}_n[u] = 0$ nunca é elíptica. Pois,

$$\mathcal{H}_n[u] = \det[u_{ij}] = u_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + u_{in}\Delta_{in} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial u_{ij}} = \Delta_{ij}.$$

Segue de $[u_{ij}] \times \left[\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial u_{ij}} \right] = \det[u_{ij}] I_{n \times n} = 0$ que uma solução u faz com que a matriz $\left[\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial u_{ij}} \right]$ seja singular, daí nunca definida.

Definiremos agora, a r -ésima Transformação de Newton, que foi introduzida por Reilly em [12]. Essas transformações serão fundamentais para a demonstração do Princípio da Tangência, pois são elas e as funções simétricas que nos possibilitam o uso do Princípio do Máximo.

Definição 3.2 A r -ésima Transformação de Newton (ou tensor) da matrix A , $r = 0, 1, \dots, n$, é a transformação linear $T_r(A) = h_r(A)I - h_{r-1}(A)A + \cdots + (-1)^r A^r$, onde $h_r(A) = \sum_{|J|=r} \det A_J$, $r = 1, \dots, n$ e $h_0(A) = 1$.

A transformação de Newton pode ser definida indutivamente por $T_0(A) = I$, $T_{r+1}(A) = h_{r+1}(A)I - AT_r(A)$. A seguir, apresentamos a proposição, extraída de [10], que será aplicada para demonstrar que um certo operador diferencial parcial é elíptico, para então aplicar o Princípio do Máximo.

Proposição 3.1 Para cada $r = 1, \dots, n$, temos que

(i) Se $D = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ é diagonal, então $h_r(D) = \sigma_r(k_1, \dots, k_n)$ e

$$T_{r-1}(D) = \text{diag}\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial \sigma_r}{\partial k_n}\right) = \text{diag}(\sigma_{r-1}(\hat{k}_1), \dots, \sigma_{r-1}(\hat{k}_n)).$$

(ii) $\left[\frac{\partial h_r}{\partial a_{ij}} \right] (A) = T_{r-1}(A)$.

Demonstração (i) É imediato da definição de σ_r que $h_r(D) = \sigma_r(k)$, onde $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Mostremos por indução que $T_{r-1}(D) = \text{diag}(\sigma_{r-1}(\hat{k}_1), \dots, \sigma_{r-1}(\hat{k}_n))$.

Para $r = 1$ temos que $T_0(D) = I$ e $\sigma_0(\hat{k}_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n$.

Suponha que a afirmação seja verdadeira para $r < n$ e provemos para $r + 1$. Por definição, temos que $T_r(D) = \sigma_r(k)I - DT_{r-1}(D)$ e a hipótese de indução diz que $T_{r-1}(D)$ é diagonal com o i -ésimo elemento da diagonal igual a $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$. Daí, $DT_{r-1}(D)$ é diagonal com o i -ésimo elemento da diagonal igual a $k_i\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$. Portanto, $T_r(D)$ é uma matriz diagonal com o i -ésimo elemento da diagonal igual a $\sigma_r(k) - k_i\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$ que é igual a $\sigma_r(\hat{k}_i)$ pela igualdade (2.8). Logo $T_r(D) = \text{diag}(\sigma_{r-1}(\hat{k}_1), \dots, \sigma_{r-1}(\hat{k}_n))$.

(ii) Seja P uma matriz ortogonal tal que $P^tAP = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$. Como $h_r(A) = \sigma_r(k)$ e $k_s = \sum_{i,j} p_{is}a_{ij}p_{js}$, então usando a regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial h_r}{\partial a_{ij}}(A) = \sum_s \frac{\partial \sigma_r}{\partial k_s}(k) p_{is}p_{js} \quad (3.2)$$

e note que (3.2) corresponde exatamente às entradas da matriz

$$\left[\frac{\partial h_r}{\partial a_{ij}} \right] (A) P \text{diag} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial \sigma_r}{\partial k_n} \right) P^t,$$

o que implica que

$$P^{-1} \left(\left[\frac{\partial h_r}{\partial a_{ij}} \right] (A) \right) P = \text{diag} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial \sigma_r}{\partial k_n} \right) = T_{r-1}(P^{-1}AP) \quad (3.3)$$

pelo ítem (i).

Provemos por indução que $T_r(P^{-1}AP) = P^{-1}T_r(A)P, \forall r = 1, \dots, n$.

Para $r = 1$ temos que

$$\begin{aligned} T_1(P^tAP) &= h_1(P^tAP)I - P^tAPT_0(P^tAP) \\ &= h_1(A)I - P^tAP = P^t(h_1(A)I - A)P = P^tT_1(A)P. \end{aligned}$$

Suponha que seja verdade para $r < n$ e provemos para $r + 1$.

$$\begin{aligned} T_{r+1}(P^t AP) &= h_{r+1}(P^t AP)I - P^t APT_r(P^t AP) \\ &= h_{r+1}(A)I - P^t AT_r(A)P = P^t(h_{r+1}(A)I - AT_r(A))P = P^t T_{r+1}(A)P \end{aligned}$$

Logo por (3.3) segue o resultado. ■

Corolário 3.1 *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $H_r = 0$, para algum $r < n$, e seja p um ponto de M tal que seu vetor curvatura principal $k = (k_1, \dots, k_n)$ seja uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$. Então existe uma vizinhança U de p tal que $U = \{(x, u(x)), x \in \Omega\}$ e o operador $\mathcal{H}_r$ é uniformemente elíptico com respeito a solução u em Ω .*

Demonstração Sem perda de generalidade, seja p a origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, com normal $N(p) = (0, \dots, 0, 1)$ e suponha que uma vizinhança de p esteja parametrizada como um gráfico. Como $\mathcal{H}_r[u] = W^{r+2}h_r(B)$, com $W^2 = 1 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ e $B = [-dN] = \frac{1}{W}[u_{ij}] - [u_i c_j]$, então

$$\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u] = W^{r+2} \frac{\partial h_r(B)}{\partial u_{ij}} W^{r+2} \sum_{s,t} \frac{\partial h_r}{\partial b_{st}}(B) \frac{\partial b_{st}}{\partial u_{ij}}.$$

Mas, na origem $\frac{\partial h_{st}}{\partial u_{ij}}$ é igual a 1, se $s = i$ e $t = j$, ou zero, caso contrário. Portanto, pela proposição 3.1,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}} \right] (0) = \left[\frac{\partial h_r}{\partial h_{ij}} \right] ([u_{ij}(0)]) = T_{r-1}([u_{ij}(0)]). \quad (3.4)$$

Portanto, todos os autovalores, $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$, da matriz (3.4) são positivos, pela proposição 3.1 e o fato que k é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$. Em outras palavras, $\mathcal{H}_r$ é elíptico com respeito à solução u na origem. Por continuidade das curvaturas principais em torno de p , podemos contrair Ω , se necessário, para termos $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i) > 0$ e uniformemente limitado.

■

Observe que se k é uma raiz antielíptica e r é par, então podemos inverter a orientação de M em p para mudar o sinal do vetor curvatura, tal que $-k$ seja elíptico e o corolário possa ser aplicado.

3.3 O Princípio do Máximo de E. Hopf

Considere o operador diferencial linear de segunda ordem

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Como $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$, podemos definir

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$$

e escrever o operador acima como

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

ou seja, sem perda de generalidade podemos supor que os coeficientes do operador de segunda ordem $\mathcal{L}$ são simétricos.

Definição 3.3 *O operador (3.5) é chamado elíptico no ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ se e somente se existe um número positivo $\mu(x)$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (3.6)$$

para toda n -upla de números reais $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. O operador $\mathcal{L}$ é dito elíptico no domínio D se ele é elíptico em todo ponto de D . Ele é uniformemente elíptico em D se (3.6) vale para todo ponto de D e se existe uma constante μ_0 tal que $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ para todo $x \in D$.

A condição (3.6) é equivalente a dizer que a matriz simétrica

$$A(x) = (a_{ij}(x))$$

é definida positiva em cada ponto x .

Definição 3.4 *O operador*

$$(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$$

é dito elíptico em x se e somente se

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

é elíptico em x . Ele é uniformemente elíptico se $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico. O operador $\mathcal{L}$ é chamado a parte principal de $L + h$.

A seguir enunciamos o Princípio do Máximo de E. Hopf para operadores elípticos que é uma generalização do fato que se uma função u satisfaz a desigualdade estrita $\Delta u > 0$ em cada ponto de um domínio D , onde Δ é o Laplaciano definido como

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

então u não pode atingir um valor máximo em um ponto interior de D .

Teorema 3.1 (Hopf) *Seja $u(x_1, \dots, x_n)$ satisfazendo a desigualdade diferencial*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

em um domínio D onde L é uniformemente elíptico. Suponha que os coeficientes a_{ij} e b_i são uniformemente limitados. Se u atinge um máximo M em um ponto de D , então $u \equiv M$ em D .

Observação 3.1

(i) É suficiente assumir que

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}(x)}{\mu(x)} \text{ e } \sum_{i=j}^n \frac{|b_i(x)|}{\mu(x)}$$

são limitadas em toda bola contida no interior de D .

- (ii) O domínio D não precisa ser limitado.
- (iii) O princípio do mínimo para funções satisfazendo $L[u] \leq 0$ é obtido pela aplicação do princípio do máximo à função $-u$. Portanto, uma solução não constante da equação diferencial elíptica $L[u] = 0$ não atinge máximo nem mínimo no interior de D .

Teorema 3.2 *Seja u satisfazendo a desigualdade*

$$(L + h)[u] \geq 0$$

com $h \leq 0$, com L uniformemente elíptico em D , e com os coeficientes de L e h limitados. Se u atinge um máximo não negativo M no interior de D então $u \equiv M$.

Observação 3.2 A restrição $h \leq 0$ é essencial. Se $h > 0$ então a função $u = e^{-r^2}$ tem um máximo absoluto em $r = 0$ e é uma solução da equação $\Delta u + (2n - 4r^2)u = 0$ em n dimensões.

Suponha agora que u é uma função contínua e limitada em $D \cup \partial D$ e que existe um ponto $p \in \partial D$ no qual u atinge seu valor máximo e uma bola $B \subset D$ tal que $\partial U \cap \partial B = p$, condição “bola na fronteira”. Seja $\mathbf{n}$ o vetor normal a B unitário “para fora” no ponto p . Dizemos que o vetor ν aponta “para fora” de D no ponto p se

$$\langle \nu, \mathbf{n} \rangle > 0.$$

Definição 3.5 *Definimos a derivada direcional de u no ponto de fronteira P na direção ν como*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lim_{x \rightarrow P} \langle \nu, \nabla u \rangle \lim_{x \rightarrow P} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

se o limite existe. A derivada direcional é dita ser “para fora” se ν aponta para fora de D .

Teorema 3.3 *Seja u satisfazendo a desigualdade*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

no domínio D no qual L é uniformemente elíptico. Suponha que $u \leq M$ em D e que $u = M$ no ponto de fronteira p . Assuma que p está na fronteira da bola K_1 em D . Se u é contínua em $D \cup \{p\}$ e uma derivada direcional para fora $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ existe em p , então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \text{ em } p$$

a menos que $u \equiv M$.

Teorema 3.4 *Seja u satisfazendo a desigualdade*

$$(L + h)[u] \geq 0,$$

onde L é o operador do Teorema 3.3, e $h(x) \leq 0$ em D . suponha que $u \leq M$ em D , que $u = M$ no ponto de fronteira p , e que $M \geq 0$. Assuma que p está na fronteira de uma bola em D . Se u é contínua em $D \cup \{p\}$, então qualquer derivada direcional para fora de u em p é positiva a menos que $u = M$ em D .

3.4 O Princípio da Tangência

Definiremos agora uma classe de hipersuperfícies com uma característica em especial, as hipersuperfícies elípticas e antielípticas, hipersuperfícies com a propriedade de não poderem permanecer do mesmo lado de seu plano tangente. No entanto, para termos condições de mostrar esse resultado, é necessário apresentar o Princípio da Tangência, que diz que se duas hipersuperfícies são tangentes e satisfazem a certas hipóteses, então uma não pode estar acima da outra no sentido da normal no ponto de tangência, a menos que coincidam. Esse princípio será a ferramenta principal, no capítulo 5, para a demonstração de um princípio de reflexão.

Definição 3.6 *Uma hipersuperfície orientada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $H_r = 0$, $1 < r < n$ é*

- (i) *elíptica se o vetor curvatura principal é uma raiz elíptica de $\sigma_r = 0$.*
- (ii) *antielíptica se o vetor curvatura principal é uma raiz antielíptica de $\sigma_r = 0$.*

Observe que, pelo teorema 2.3, dizer que uma hipersuperfície é elíptica ou antielíptica é equivalente a dizer que $H_{r+1} \neq 0$ ou, até mesmo, que a aplicação normal de Gauss tem posto pelo menos r . Uma propriedade importante de uma hipersuperfície elíptica (antielíptica) é que o operador $T_{r-1}(B)$ é definido positivo (negativo), pela proposição 3.1.

Teorema 3.5 (Princípio de Tangência para hipersuperfícies com $H_r = 0$) *Sejam M e M' hipersuperfícies orientadas de $\mathbb{R}^{n+1}$, com ou sem fronteira, satisfazendo $H_r(M) = H_r(M') = 0$, para algum $1 < r < n$. Assuma que elas são tangentes em p , bem como suas fronteiras, caso $p \in \partial M \cap \partial M'$, com vetor normal para fora apontando na mesma direção, e vetores curvaturas principais k e k' no ponto de tangência pertencentes a mesma folha Z_i . Se M' permanece no mesmo lado de M próximo do ponto de tangência e $H_{r+1}(M) \neq 0$ ou $H_{r+1}(M') \neq 0$, então $M = M'$ próximo de p .*

Demonstração Sem perda de generalidade, podemos supor que as hipersuperfícies são tangentes na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $M = \text{graf } u$, $M' = \text{graf } u'$, com vetor normal $N_p = (0, \dots, 0, 1)$. Daí, $u(0) = u'(0) = 0$ e $\nabla u(0) = \nabla u'(0) = 0$, pois uma base para o espaço tangente a M em $p = (0, \dots, 0)$ é $\{(e_i, u_i(0)), i = 1, \dots, n\}$, porém no zero temos que $\langle (e_i, u_i(0)), N_p \rangle = 0$ o que implica que $u_i(0) = 0$, da mesma forma temos que $u'_i(0) = 0$. Como $W^3[B] = W^2[u_{ij}] - [u_i c_j]$, com $W^2 = 1 + u_1^2 + \dots + u_n^2$, então os autovalores da matriz Hessiana de u e u' na origem são as curvaturas principais de M e M' em p .

Queremos mostrar que se $u \geq u'$ ou $u \leq u'$ então $u = u'$. Suponhamos que $u \geq u'$ em uma vizinhança U de $\mathbb{R}^n$ ou em uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ que é interseção dos domínios das funções u e u' , caso o ponto de tangência pertença à fronteira. Note que, pelo fato das fronteiras serem tangentes com vetor normal para fora apontando na mesma direção, V satisfaz a condição “bola na fronteira” na origem. Segue que $A = [u_{ij}(0)] \geq [u'_{ij}(0)] = C$, pois $u - u' \geq 0$ tem um mínimo na origem, implicando que a matriz Hessiana de $u - u'$ é semi-definida positiva. Como M ou M' satisfaz $H_{r+1} \neq 0$ então, pela definição de hipersuperfície elíptica ou antielíptica e pelo teorema 2.3, k ou k' é uma raiz elíptica ou antielíptica de $\sigma_r = 0$, o que implica, pela proposição 2.2, que $k = k'$, já que ambos os vetores curvaturas estão na mesma folha. A caracterização para os autovalores ordenados $k_1 \leq \dots \leq k_n$ de uma matriz simétrica A (ver [5])

$$k_j = \max_V \min_{x \in V} \{\langle Ax, x \rangle \mid \|x\| = 1\}, \quad \dim V = n - j + 1,$$

nos diz que, $A = C = [B]$, onde $B = -dN$. De fato, se tomamos uma base ortonormal de autovalores $\{v_1, \dots, v_n\}$ de A tal que $Av_i = k_i v_i$, $i = 1, \dots, n$, e usando o fato que $A \geq C$, temos que

$$\langle Av_1, v_1 \rangle = k_1 \geq \langle Cv_1, v_1 \rangle \geq k_1,$$

o que implica que $\langle Cv_1, v_1 \rangle = k_1$. Tome o espaço gerado por $\{v_2, \dots, v_n\}$ e proceda da mesma forma para mostrar que $\langle Av_2, v_2 \rangle = \langle Cv_2, v_2 \rangle$, e então por indução mostramos que A e C têm a mesma base ortonormal de autovalores.

Temos que u e u' satisfazem a equação $\mathcal{H}_r[u] = 0$, então, fazendo $u_t = (1 - t)u + tu'$ segue que

$$0 = \mathcal{H}_r[u'] - \mathcal{H}_r[u] = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\mathcal{H}_r[u_t])dt = \int_0^1 \left(\sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}(u_t) w_{ij} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_k}(u_t) w_k \right) dt,$$

que pode ser escrito como

$$0 = L[w] = \sum_{i,j} c_{ij} w_{ij} + \sum_k b_k w_k,$$

onde $w = u' - u$ e os coeficientes $c_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}(u_t(x))dt$ e $b_k(x) = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_k}(u_t(x))dt$, do operador linear L , são claramente contínuos.

Para todo $t \in [0, 1]$ tem-se que $u_t(0) = 0$ e, pela definição de $\mathcal{H}_r[u]$ e por (3.4),

$$\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_k}(u_t(0)) = 0,$$

para todo k e

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}} \right] (u_t(0)) = T_{r-1}((1 - t)u_{ij}(0) + tu'_{ij}(0)) = T_{r-1}([u_{ij}(0)]),$$

pois $u_{ij}(0) = u'_{ij}(0)$ assim, pela igualdade de matrizes, temos que cada integrando de $c_{ij}(0)$ é constante, portanto $[c_{ij}(0)] = T_{r-1}([u_{ij}(0)])$. Pela proposição 3.1, a matriz $T_{r-1}([u_{ij}(0)])$ tem autovalores $\sigma_{r-1}(\hat{k}_i)$, $i = 1, \dots, n$, que são positivos ou negativos, dependendo se k é uma raiz elíptica ou antielíptica de $\sigma_r = 0$, respectivamente. Portanto, o operador diferencial parcial linear de segunda ordem L ou $-L$ é elíptico na origem, e como os coeficientes são contínuos, então podemos assumir que ele é uniformemente elíptico. Como $w \leq 0$ satisfaz $L[w] = 0$ e atinge seu máximo, que é zero, na origem, então o Princípio do Máximo, Teorema 3.1 ou 3.3, dependendo se o ponto de tangência é na fronteira ou não, pois a derivada de u é nula em qualquer direção, implica que $w = 0$, em uma vizinhança U da origem.

Logo as hipersuperfícies coincidem numa vizinhança da origem. ■

Corolário 3.2 Se M satisfaz $H_r = 0$ e $H_{r+1} \neq 0$ então, localmente, M não pode permanecer do mesmo lado do plano tangente. De fato, pois se M' é o plano tangente à M , em um ponto p , tal que M esteja apenas de um lado em alguma vizinhança de p , então podemos aplicar o teorema 3.5 para concluir que localmente M está contida no plano M' , logo $H_{r+1} = 0$, contradição.

Teorema 3.6 *Sejam M e M' hipersuperfícies orientadas de $\mathbb{R}^{n+1}$, com ou sem fronteira, e seja $1 < r < n$. Assuma que M satisfaz $H_r = 0$ e que M' satisfaça $H_r \geq 0$. Assuma que elas são tangentes em p , bem como suas fronteiras com normais para fora apontando na mesma direção, caso $p \in \partial M \cap \partial M'$, e que o vetor curvatura principal de M' , k' , no ponto de tangência pertença à $Z_1 \cup C = \overline{C}$, além disso, que M ou M' satisfaça $H_{r+1} \neq 0$. Se M permanece acima de M' então M e M' coincidem numa vizinhança de p .*

Demonstração Podemos assumir, sem perda de generalidade, que as normais a M e a M' coincidem no ponto de tangência, pois as hipóteses do teorema continuam sendo satisfeitas se trocamos a orientação de M . Da mesma forma que na demonstração do teorema anterior, consideramos que M e M' localmente são representadas pelos gráficos das funções u e u' , respectivamente, com plano tangente em comum na origem e com normal para cima. Supondo que $u \geq u'$, para alguma vizinhança U da origem em $\mathbb{R}^n$ ou em uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ que é intersecção dos domínios das funções u e u' , vamos mostrar que $u = u'$.

Da caracterização dos autovalores ordenados $k_1 \leq \dots \leq k_n$ de uma matriz simétrica A , temos que $k - k' \in \overline{\Gamma} \subset Z_1 \cup C$. Tome $c_n \in C$ convergindo a $k - k'$ e use a continuidade de λ_j na desigualdade $\lambda_j(k' + c_n) > \lambda_j(k')$, $j = 1, \dots, r$, do teorema 2.1, para obter que $\lambda_j(k) = \lim \lambda_j(k' + c_n) \geq \lambda_j(k')$. Como $k' \in \overline{C}$ temos que $\lambda_1(k') \geq 0$, o que implica que $\lambda_j(k) \geq \lambda_j(k') \geq 0$. Daí,

$$0 = \sigma_r(k) = \sigma_r(a) \prod_j \lambda_j(k) \geq \sigma_r(a) \prod_j \lambda_j(k') = \sigma_r(k') \geq 0. \Rightarrow \sigma_r(k') = 0,$$

já que $H_r(M) = 0$ e $H'_r \geq 0$ para M' . Como $k' \in Z_1 \cup C$ e $\sigma_r(k') = 0$, temos que, pela proposição 2.4, $k' \in Z_1$ e também $k \in Z_1$, pois $0 = \lambda_1(k') \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_i(k)$, $\forall i = 1, \dots, r$, e $\lambda_i(k) = 0$ para algum i . Logo, como os vetores curvaturas no ponto de tangência estão na mesma folha, a demonstração segue como a demonstração do teorema 3.5, com a diferença que $L[w] \geq 0$. ■

Esses dois últimos resultados serão usados no capítulo final, sendo que a hipersuperfície M' será igual a reflexão em torno de um hiperplano da hipersuperfície M .

A hipótese de k e k' pertencerem a mesma folha é fundamental. De fato, pois se temos

$$u(x, y, z) = 4 \log \cos \frac{x}{4} - \frac{16}{5} \log \cos \frac{5y}{16} - \frac{4}{5} \log \cos \frac{5z}{4}$$

e

$$u'(x, y, z) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2) + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16}} - 1$$

e consideramos

$$M = \{(x, y, z, u(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4\} \quad \text{e} \quad M' = \{(x, y, z, u'(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4\}$$

temos que

$$\begin{aligned} u_x &= -\tan \frac{x}{4} & u'_x &= \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2) + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16}}} \\ u_y &= \tan \frac{5y}{16} & u'_y &= \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2) + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16}}} \\ u_z &= \tan \frac{5z}{4} & u'_z &= \frac{\frac{z}{2} + \frac{z^3}{8}}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2) + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16}}} \end{aligned} \quad \text{e}$$

o que implica que M e M' são tangentes na origem, pois uma base do espaço tangente a cada uma das hipersuperfícies na origem é $\{(e_1, 0), (e_2, 0), (e_3, 0)\}$, ou seja, elas têm o mesmo espaço tangente. Além disso, usando a proposição 1.1, chegamos que

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} W^4 H_2 &= (1 + u_x^2) \begin{vmatrix} u_{yy} & u_{zy} \\ u_{yz} & u_{zz} \end{vmatrix} + (1 + u_y^2) \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{zx} \\ u_{xz} & u_{zz} \end{vmatrix} + (1 + u_z^2) \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{yx} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} \\ &\quad - 2u_x u_y \begin{vmatrix} u_{xy} & u_{xz} \\ u_{zy} & u_{zz} \end{vmatrix} - 2u_x u_z \begin{vmatrix} u_{xz} & u_{xy} \\ u_{yz} & u_{yy} \end{vmatrix} - 2u_y u_z \begin{vmatrix} u_{yz} & u_{yx} \\ u_{xz} & u_{xx} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

mostrando que $H_2(M) = H_2(M') = 0$. Como $u_x(0) = u_y(0) = u_z(0) = 0$ assim como $u'_x(0) = u'_y(0) = u'_z(0) = 0$, então na origem as curvaturas principais de M e M' são os autovalores das matrizes Hessiana de u e u' , respectivamente. Na origem temos que

$$[u_{ij}(0)] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [u'_{ij}(0)] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto se k e k' são os vetores curvaturas principais ordenados de M e M' , respectivamente, então $k = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{5}{4}) > k' = (-1, -1, \frac{1}{2})$.

Afirmamos que k e k' estão em folhas distintas de $\sigma_2 = 0$. De fato, pois

$$\sigma_2(sa + k) = 3s \left(s + \frac{7}{8} \right) \quad \text{e} \quad \sigma_2(sa + k') = 3s(s - 1)$$

daí, como $\lambda_1 \leq \lambda_2$ então

$$\lambda_1(k') = 0 \leq \frac{7}{8} = \lambda_2(k) \quad \text{e} \quad \lambda_1(k') = -1 \leq 0 = \lambda_2(k).$$

O que implica que $k' \in Z_1$ e $k \in Z_2$. Logo M e M' satisfazem todas as hipóteses do teorema 3.5, exceto que k e k' estão na mesma folha. No entanto temos que $u > u'$ numa vizinhança da origem, já que a expansão de u e u' numa vizinhança da origem são

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{16}y^2 + \frac{5}{4}z^2 + o(\|(x, y, z)\|^2)$$

e

$$u'(x, y, z) = -x^2 - y^2 + \frac{1}{2}z^2 + o(\|(x, y, z)\|^2).$$

HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO COM CURVATURA ESCALAR CONSTANTE

4.1 Introdução

O conteúdo desse capítulo foi extraído de [9], onde Leite classificou todas as hipersuperfícies rotacionais de $\mathbb{R}^n$ completas com curvatura escalar constante. Ao final do capítulo, encontramos a expansão no infinito de um gráfico rotacional com curvatura escalar nula, que servirá de base para a definição de um fim regular no infinito.

4.2 Equação para a Curvatura Escalar Constante

Seja M uma hipersuperfície conexa de revolução de $\mathbb{R}^n$, isto é, uma hipersuperfície invariante pelo grupo ortogonal $O(n-1)$ considerado como um subgrupo de isometrias de $\mathbb{R}^n$. A órbita de um ponto em $\mathbb{R}^n$ sobre a ação de $O(n-1)$ é uma esfera $(n-2)$ -dimensional de raio igual à distância r do ponto ao eixo de revolução. Escolhemos (Θ, s) para coordenadas da hipersuperfície, onde s é o comprimento de arco da curva perfil α , que é a intersecção da hipersuperfície com o semi plano $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \text{ e } x_n \geq 0\}$, e $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ parametriza a esfera euclidiana unitária $(n-2)$ -dimensional. O eixo de rotação é o eixo x_n e a curva perfil α encontra-se na região de $\mathbb{R}^n$ tal que $x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ e $x_1 \geq 0$.

Neste caso, $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, onde as coordenadas da hipersuperfície é (Θ, s) , é uma parametrização, não necessariamente injetiva, que deixa de ser regular nos pontos onde a curva perfil tem auto-intersecção e nos pontos que ela toca no eixo de rotação. Portanto, uma base para o espaço tangente à M em um dado ponto é dado por $\{\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial s}\}$, com $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ ortogonal à $\frac{\partial}{\partial s}$ para todo $i = 1, \dots, n-2$, o que implica que a primeira forma

fundamental é dada por

$$I = r^2(s) \sum_{i,j} g_{ij}(\Theta) d\theta_i \otimes d\theta_j + ds \otimes ds, \quad (4.1)$$

onde g_{ij} é a métrica da curvatura sectional constante 1 em uma esfera $(n-2)$ -dimensional.

Observação 4.1 Se $X(x_1, \dots, x_{n-1})$ é um sistema de coordenadas em torno de $p \in M$ então

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right\rangle$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Definição 4.1 Considere M uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$. Seja $x = z_{n-1}$ um vetor em $T_p M$, tomemos uma base ortogonal $\{z_1, \dots, z_{n-2}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a z_{n-1} . A curvatura de Ricci na direção x em p é definida como

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle.$$

Definição 4.2 Considere M uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$. Tomemos uma base ortogonal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do espaço tangente $T_p M$. A curvatura escalar em p é definida como

$$S(p) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\text{Ric}_p(z_j)}{\|z_i, z_j\|^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n-1} \frac{\langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle}{\|z_i, z_j\|^2},$$

onde $\|z_i, z_j\|^2 = \|z_i\|^2 \|z_j\|^2 - \langle z_i, z_j \rangle^2$.

As definições 4.1 e 4.2, como podemos encontrar em [3], não dependem da escolha das correspondentes bases ortogonais.

Proposição 4.1 Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície de revolução com curva perfil α dada por $\alpha(s) = (r(s), 0, \dots, 0, x_n(s))$. A curvatura escalar S de M é constante ao longo da órbita de um ponto da curva perfil e é dada por

$$S = \frac{(n-3)(1 - \dot{r}^2)}{(n-1)r^2} - \frac{2\ddot{r}}{(n-1)r},$$

onde $\dot{}$ indica a derivada em relação ao comprimento de arco s .

Demonstração Considere $X(\Theta, s)$ um sistema de coordenadas para M . Seja $p \in M$. Para esse sistema de coordenadas temos que a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial s} \right\}$ de $T_p M$ é ortogonal. Pela definição 4.2, para calcular a curvatura escalar S , precisamos calcular

$$\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle, \quad 1 \leq i < j \leq n-2.$$

Pela observação 4.1 e o fato que $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel e $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ é uma base de $T_p M$, encontramos que

$$\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle = \sum_k \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ii}^k}{\partial \theta_j} \tilde{g}_{kj} + \sum_{k,l} \tilde{\Gamma}_{ii}^k \tilde{\Gamma}_{jk}^l \tilde{g}_{lj} - \sum_k \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ji}^k}{\partial \theta_i} \tilde{g}_{kj} - \sum_{k,l} \tilde{\Gamma}_{ji}^k \tilde{\Gamma}_{ik}^l \tilde{g}_{lj}$$

onde, para simplificar a notação, consideraremos $\theta_{n-1} = s$. De (4.1), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= r^2 g_{ij}, \quad i, j < n-1 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \theta_l} = \begin{cases} r^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_l}, & l < n-1 \\ 2r \dot{r} g_{ij}, & l = n-1 \end{cases} \\ \tilde{g}_{n-1, n-1} &= 1 \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{n-1, j} = \tilde{g}_{i, n-1} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A notação com o $\sim$ (til) representa os símbolos de Christoffel e a métrica da Hipersuperfície M e sem o $\sim$ corresponde à esfera.

Note que a matriz $[\tilde{g}^{ij}]$, inversa da matriz $[\tilde{g}_{ij}]$, é do mesmo tipo que a matriz $[\tilde{g}_{ij}]$, ou seja, ela tem todos os elementos da última coluna e da última linha nulos com exceção da última entrada da linha e da coluna que é igual a 1. Além disso, $\tilde{g}^{ij} = \frac{g^{ij}}{r^2}$, $\forall i, j < n-1$. Portanto para encontrar os símbolos de Christoffel, usamos a fórmula

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{ki}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \theta_k} \right) \tilde{g}^{km}$$

e (4.2), chegando a

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^m &= \Gamma_{ij}^m, & i, j, m < n-1 \\ \tilde{\Gamma}_{in-1}^m &= \frac{\dot{r}}{r} \delta_{im}, & i, m < n-1; \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^{n-1} &= -r \dot{r} g_{ij}, & i, j < n-1; \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^m &= 0, & \text{para os outros casos,} \end{aligned}$$

onde Γ_{ij}^m são os símbolos de Christoffel da esfera $(n-2)$ -dimensional de $\mathbb{R}^n$.

Logo, temos que, se $i, j < n-1$ e $i \neq j$ então

$$\begin{aligned} \left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle &= r^2 \sum_k^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{ii}^k}{\partial \theta_j} g_{kj} + r^2 \sum_{k,l}^{n-2} \Gamma_{ii}^k \Gamma_{jk}^l g_{lj} - r^2 \dot{r}^2 g_{ii} \sum_l^{n-2} \delta_{jl} g_{lj} \\ &\quad - r^2 \sum_k^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial \theta_i} g_{kj} - r^2 \sum_{k,l}^{n-2} \Gamma_{ji}^k \Gamma_{ik}^l g_{lj} + r^2 \dot{r}^2 \sum_l^{n-2} g_{ji} \delta_{il} g_{lj} \\ &= r^2 \left(\sum_k^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{ii}^k}{\partial \theta_j} g_{kj} + \sum_{k,l}^{n-2} \Gamma_{ii}^k \Gamma_{jk}^l g_{lj} - \sum_k^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial \theta_i} g_{kj} - \sum_{k,l}^{n-2} \Gamma_{ji}^k \Gamma_{ik}^l g_{lj} \right) \\ &\quad - r^2 \dot{r}^2 \left(g_{ii} \sum_l^{n-2} \delta_{jl} g_{lj} - \sum_l^{n-2} g_{ji} \delta_{il} g_{lj} \right) = r^2 (1 - \dot{r}) (g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2) \end{aligned}$$

pois S^{n-2} tem curvatura seccional constante igual a 1, e

$$\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj} - \tilde{g}_{ij}^2 = r^4 (g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2)$$

portanto,

$$\frac{\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle}{\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj} - \tilde{g}_{ij}^2} \frac{1 - \dot{r}}{r^2}.$$

Se $j < n-1$ e $i = n-1$ então

$$\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = -r^2 \sum_k^{n-2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\dot{r}}{r} \delta_{jk} \right) g_{kj} - \dot{r}^2 \sum_{k,l}^{n-2} \delta_{jk} \delta_{kl} g_{lj} = -r \ddot{r} g_{jj}$$

e

$$\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj} - \tilde{g}_{ij}^2 = r^2 g_{jj}$$

portanto,

$$\frac{\left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle}{\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj} - \tilde{g}_{ij}^2} = -\frac{\ddot{r}}{r}.$$

Daí, da definição 4.2 temos que

$$S = \frac{(n-3)(1 - \dot{r}^2)}{(n-1)r^2} - \frac{2\ddot{r}}{(n-1)r}.$$

■

Uma outra demonstração da proposição 4.1 é calcular o vetor curvatura principal k e usar (1.3) para $r = 2$. De fato, pois se α é a curva perfil, então

$$\alpha(s) = r(s)e_1 + x_n(s)e_n \Rightarrow \dot{\alpha}(s) = \dot{r}(s)e_1 + \dot{x}_n(s)e_n$$

e a normal à hipersuperfície ao longo da curva é dada por

$$N \circ \alpha(s) = -\dot{x}_n(s)e_1 + \dot{r}(s)e_n \Rightarrow dN(\dot{\alpha}) = -\ddot{x}_n e_1 + \ddot{r} e_n = \frac{\ddot{r}}{\dot{x}_n} \dot{\alpha},$$

pois $\dot{r}^2 + \dot{x}_n^2 = 1 \Rightarrow \dot{r}\ddot{r} = -\dot{x}_n\ddot{x}_n$. Daí, se $\dot{x}_n \neq 0$,

$$k_{n-1} = \frac{\ddot{r}}{\dot{x}_n} = \frac{\ddot{r}}{\sqrt{1 - \dot{r}^2}}.$$

Para calcular as outras curvaturas principais considere $\beta(s) = (r \cos s)e_1 + (r \sin s)v + x_n e_n$, com $v = (0, v_1, \dots, v_{n-2}, 0)$, $\|v\| = 1$ e $\langle v, e_1 \rangle = 0$. Portanto, $\dot{\beta}(s) = -(r \sin s)e_1 + (r \cos s)v$ com $\dot{\beta}(0) = v$. A normal à hipersuperfície ao longo da curva β é

$$N \circ \beta(s) = -(\dot{x}_n \cos s)e_1 - (\dot{x}_n \sin s)v + \dot{r}e_n$$

e então

$$dN(\dot{\beta}) = (\dot{x}_n \sin s)e_1 - (\dot{x}_n \cos s)v = -\frac{\dot{x}_n}{r}\dot{\beta}$$

Logo,

$$k_1 = \dots = k_{n-2} = -\frac{\dot{x}_n}{r} = -\frac{\sqrt{1 - \dot{r}^2}}{r}.$$

e usando (1.3) para $r = 2$ temos o resultado desejado.

Note que, se $\dot{x}_n(s_0) = 0$ então $S = 0$ ao longo da órbita, e a fórmula continua válida.

Da proposição temos que uma hipersuperfície de revolução é gerada por uma curva regular parametrizada por comprimento de arco $\alpha(s) = r(s)e_1 + x_n(s)e_n$, que corresponde a uma solução $r(s)$ do sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem dado pelas equações

$$2r\ddot{r} - (n-3)(1 - \dot{r}^2) + (n-1)Sr^2 = 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{r}^2 + \dot{x}_n^2 = 1 \quad (4.4)$$

De agora em diante assumiremos que $n \geq 4$. O caso $n = 3$ é de natureza diferente, pois o termo $(n - 3)(1 - \dot{r}^2)$ da equação (4.3) anula-se, reduzindo-se à $\ddot{r} = -Sr$, cujas soluções são $r = A \cosh(\sqrt{-S}s + B)$ se $S < 0$, $r = as + b$ se $S = 0$, com a e b constantes, e $r = A \cos(\sqrt{S}s + \phi)$ se $S > 0$, com ϕ constante. Daí as superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante, que coincide com a curvatura escalar, são encontradas resolvendo a integral, ver [2],

$$x_3 = \int_0^s \sqrt{1 - \dot{r}^2} ds.$$

Se uma hipersuperfície de revolução M intersectar seu eixo de revolução então o plano tangente à hipersuperfície nesse ponto é horizontal, considerando que o eixo de revolução é vertical. De fato, pois se $\alpha(s)$ é a curva perfil tal que o ponto $\alpha(s_0)$ pertence ao eixo de rotação, então qualquer vetor v do espaço tangente à M em $\alpha(s_0)$, é da forma $v = cT\dot{\alpha}(s_0)$, onde c é uma constante e $T \in O(n - 1)$, ou seja, $\dot{\alpha}(s_0)$ é horizontal, caso contrário obteríamos um “cone tangente”. Portanto, qualquer vetor do espaço tangente $T_{\alpha(s_0)}M$, pertence ao hiperplano horizontal $x_n = \text{constante}$, logo eles coincidem.

Portanto, em qualquer hipersuperfície de revolução temos que $\dot{r}^2(s) \rightarrow 1$ quando $r(s) \rightarrow 0$, onde r é a distância da curva perfil ao eixo de rotação.

Proposição 4.2 *A equação (4.3) é equivalente à equação de primeira ordem*

$$r^{n-3}(1 - \dot{r}^2) - Sr^{n-1} = K \quad (4.5)$$

onde K é uma constante. Além disso, para uma solução constante igual a r_0 tem-se que

$$S > 0, \quad r_0^2 = \frac{n-3}{(n-1)S} \quad e \quad K_0 = \frac{2}{n-1} \left(\frac{n-3}{(n-1)S} \right)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Demonstração Derivando a equação (4.5) temos que

$$\begin{aligned} (n-3)\dot{r}r^{n-4}(1 - \dot{r}^2) - 2r^{n-3}\dot{r}\ddot{r} - (n-1)Sr^{n-2}\dot{r} &= 0 \\ \Rightarrow -\dot{r}r^{n-4}(2r\ddot{r} - (n-3)(1 - \dot{r}^2) + (n-1)Sr^2) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se (4.3) vale então (4.5) também vale. Agora, se (4.5) é verdade, temos que

$$-\dot{r}r^{n-4} = 0 \quad \text{ou} \quad 2r\ddot{r} - (n-3)(1-\dot{r}^2) + (n-1)Sr^2 = 0.$$

Se $2r\ddot{r} - (n-3)(1-\dot{r}^2) + (n-1)Sr = 0$, não temos nada a provar. Se $-\dot{r}r^{n-4} = 0$ temos os seguintes casos:

Caso 1: Se existe algum s_0 tal que $r(s_0) = 0$ segue imediatamente que em s_0 temos que $2r\ddot{r} - (n-3)(1-\dot{r}^2) + (n-1)Sr^2 = 0$, pois $\dot{r}(s_0) = 1$.

Caso 2: Se existe algum ponto s_0 tal que $\dot{r}(s_0) = 0$ e s_0 possui uma seqüência s_n tal que $\dot{r}(s_n) \neq 0$. Para cada s_n a equação (4.3) é válida e por continuidade temos que a equação é válida para s_0 .

Caso 3: Se $\dot{r} = 0$ em algum intervalo fechado $[a, b]$ tal que a e b possuam uma seqüência, s_n e t_n , respectivamente, tal que $\dot{r} \neq 0$ em cada ponto das seqüências, então a equação (4.3) é verificada para cada ponto das seqüências. Por continuidade a equação (4.3) é verificada nos extremos do intervalo. Note que, se $\dot{r} = 0$ em algum intervalo temos que $r = \text{constante}$ nesse intervalo, o que implica que

$$2r\ddot{r} - (n-3)(1-\dot{r}^2) + (n-1)Sr^2 = (n-3) + (n-1)Sr^2 = \text{constante},$$

porém nos extremos do intervalo $[a, b]$ essa constante é igual a zero.

Logo a equação (4.3) é válida para todo o intervalo $[a, b]$.

Agora, se $r(s) = r_0$ então de (4.3) temos que

$$r_0^2 = \frac{n-3}{(n-1)S} \quad \text{com } S > 0$$

e de (4.5) obtemos que

$$K_0 = \frac{2}{n-1} \left(\frac{n-3}{(n-1)S} \right)^{\frac{n-3}{2}}.$$

■

4.3 O Teorema de Classificação

Note que pela teoria de EDO se nos restringirmos a $r > 0$ então toda solução de (4.3) está definida em algum intervalo maximal (a, b) de existência o qual é um intervalo aberto.

Se fazemos $u = r$ e $v = \dot{r}$, então a equação (4.5) diz que se r é uma solução de (4.3), então o conjunto $\{(r(s), \dot{r}(s)) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (a, b)\}$ denotada por $(r, \dot{r})$, é um subconjunto das curvas de nível da função H definida por

$$H(u, v) = u^{n-3}(1 - v^2 - Su^2), \quad (4.6)$$

com $u > 0$.

Lema 4.1 *As curvas de nível de H dada em (4.6) estão representadas nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3.*

Demonstração Estamos interessados apenas nas curvas de nível que contidas na região $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. Daí, se $H = K$, então cada curva é uma união suave de dois gráficos

$$(\pm v)^2 = 1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}}, \quad (4.7)$$

exceto para o nível K_0 dado pela proposição 4.2, que nos dá $S > 0$, $u^2 = \frac{n-3}{(n-1)S}$ e $v = 0$. De fato, se $K = 0$, então a curva é uma elipse. Se $K \neq 0$, então de (4.7) obtém-se

$$2\dot{v}v = \left(-2Su + \frac{(n-3)K}{u^{n-2}}\right)\dot{u}.$$

Logo, se $v = 0$, então $\dot{u} = 0$ ou $-2Su + \frac{(n-3)K}{u^{n-2}} = 0$. Daí, se $\dot{u} = 0$ então a curva é vertical, pois a reta tangente à curva nesse ponto é vertical. Se $-2Su + \frac{(n-3)K}{u^{n-2}} = 0$, então $u^{n-1} = \frac{(n-3)K}{2S}$ o que implica que K e S têm o mesmo sinal. Como $1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} = 0$ e $u^{n-1} = \frac{(n-3)K}{2S}$, então segue que

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - S \left(\frac{(n-3)K}{2S} \right)^{\frac{2}{n-1}} - \left(\frac{(n-3)K}{2S} \right)^{\frac{3-n}{n-1}} 1 - \left(\frac{(n-3)K}{2S} \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n-3} \right) S \\ \Rightarrow 1 &= \left(\frac{n-1}{n-3} \right) \left(\frac{n-3}{2} \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{K}{S} \right)^{\frac{2}{n-1}} S \Rightarrow K = \left(\frac{n-3}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n-3} S^{\frac{3-n}{2}}. \end{aligned}$$

Logo $S > 0$ e $K > 0$. Assim, fazendo

$$f(u) = v^2 = 1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} = 1 - Su^2 - \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n-3} \frac{S^{\frac{3-n}{2}}}{u^{n-3}},$$

obtemos que $f(u) \rightarrow -\infty$, se $u \rightarrow 0$ ou $u \rightarrow \infty$ e f possui um único ponto crítico, pois se $f'(u) = 0$ então $u^2 = \frac{n-3}{(n-1)S} = u_0^2$ e nesse ponto crítico temos $f(u_0) = 0$ e, portanto, $f(u) < 0$, exceto quando $u = u_0$. Como $f(u) = v^2$, a curva se reduz a um ponto $(u_0, 0)$. Além disso, v possui no máximo dois zeros, pois

$$\frac{d}{du} \left(1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} \right) - 2Su + (n-3) \frac{K}{u^{n-2}}$$

tem no máximo 1 zero quando K e S e têm o mesmo sinal.

Note que a derivada de v em relação à u é dada, a menos do sinal, por

$$v' = \frac{-2Su^{n-1} + (n-3)K}{2u^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{u^{n-3} - Su^{n-1} - K}},$$

o que implica que v possui dois pontos críticos somente quando S e K são diferentes de zero e têm o mesmo sinal, v possui infinitos pontos críticos se $S = K = 0$, pois $v \equiv 1$, e nenhuma caso contrário.

Consideremos então os seguintes casos:

Caso $S = 0$ (figura 4.1): Nesse caso H não tem ponto crítico, pois $H(u, v) = u^{n-3}(1 - v^2)$ implica que $\nabla H = u^{n-4}((n-3)(1 - v^2), -2uv)$ nunca pode ser nulo já que estamos considerando $u > 0$, portanto os valores possíveis para K são todos os reais.

Se $K = 0$ então $v = \pm 1$, ou seja, a curva de nível correspondente a $K = 0$ é um par de semi retas paralelas.

Se $K > 0$ então de (4.7) temos $u^{n-3} \geq K$ e a curva de nível é uma curva na região limitada pelas retas $v = \pm 1$, tendo as mesmas como assíntotas e quando $u^{n-3} = K$ temos $v = 0$.

Se $K < 0$ então $v \rightarrow \pm \infty$ quando $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow \pm 1$ quando $u \rightarrow \infty$, sem nunca interceptar as retas $v = \pm 1$.

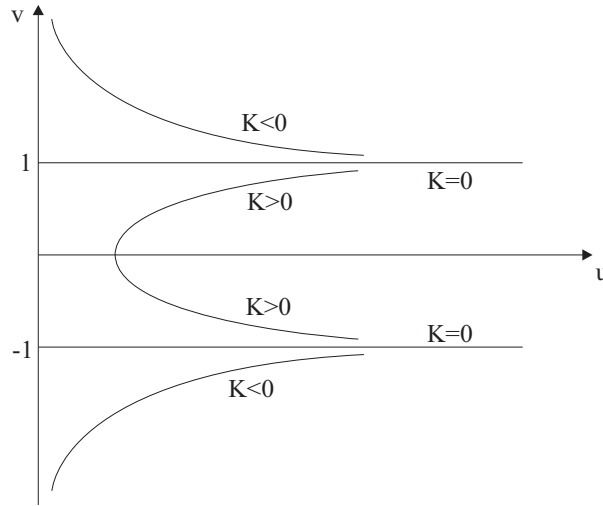


Figura 4.1. Curvas de nível para $S = 0$.

Caso $S > 0$ (figura 4.2): Neste caso temos que

$$\nabla H = u^{n-4}((n-3)(1-v^2) - (n-1)Su^2, -2uv),$$

implicando que H tem um ponto crítico em (u_0, v_0) , onde $v_0 = 0$ e $u_0^2 = \frac{n-3}{(n-1)S}$. A matriz Hessiana de H calculada em (u_0, v_0) é

$$\begin{pmatrix} -2(n-3)u_0^{n-5} & 0 \\ 0 & -2u_0^{n-3} \end{pmatrix}$$

que é negativa definida, portanto o ponto (u_0, v_0) é um ponto de máximo, cujo respectivo valor máximo é exatamente K_0 , pois $H \leq 0$, se $|v| \geq 1$ ou $u^2 \geq \frac{1}{S}$, então o máximo local será máximo global do compacto $\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{S}}, |v| \leq 1\right\}$. Daí, $K \in (-\infty, K_0)$.

Se $K = 0$, então $v^2 + Su^2 = 1$ é a equação de uma elipse e a curva de nível será a semi-elipse que se encontra na região com $u > 0$.

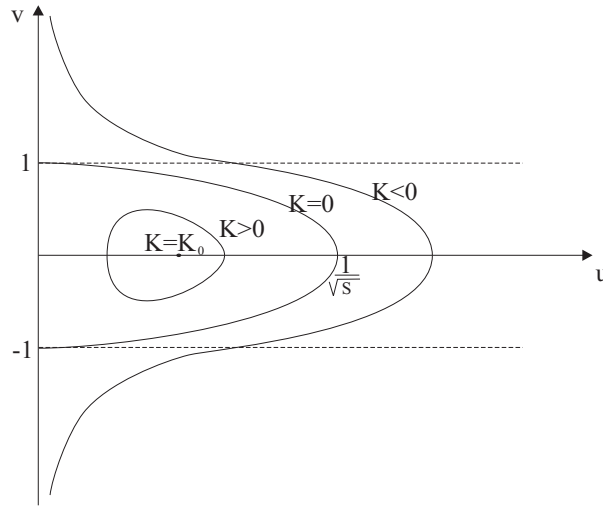


Figura 4.2. Curvas de níveis para $S > 0$.

Se $0 < K < K_0 = \frac{2}{n-1} \left(\frac{n-3}{(n-1)S} \right)^{\frac{n-3}{2}}$ então, se $u = u_0$ temos que

$$1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} = 1 - \frac{n-3}{n-1} - K \left(\frac{n-3}{(n-1)S} \right)^{\frac{3-n}{2}} > 1 - \frac{n-3}{n-1} - \frac{2}{n-1} = 0$$

e como $1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}}$ tende a $-\infty$ quando u tende a 0 ou $+\infty$ segue, por continuidade, que a curva de nível é uma curva compacta.

Se $K < 0$ temos que $1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} \rightarrow -\infty$ quando $u \rightarrow +\infty$ e diverge para $+\infty$ quando $u \rightarrow 0$, portanto para que v esteja definida u deve assumir valores em um intervalo do tipo $(0, t]$, tal que $v(t) = 0$.

Caso $S < 0$ (figura 4.3): Tomando u fixo e fazendo $v \rightarrow -\infty$, vemos que $H(u, v) \rightarrow -\infty$ e tomando v fixo e fazendo $u \rightarrow +\infty$, vemos que $H(u, v) \rightarrow +\infty$. Portanto, K pode assumir todos os valores reais e então H não possui ponto de máximo nem de mínimo.

Se $K = 0$ temos $v^2 + Su^2 = 1$, que é a equação de uma hipérbole e então a curva de nível é a parte da hipérbole que se encontra na região com $u > 0$.

Se $K > 0$ a curva de nível encontra-se na região limitada pelos ramos da hipérbole assintotando a hipérbole, pois $v^2 = 1 - Su^2 - \frac{K}{u^{n-3}} < 1 - Su^2$, enquanto que para $K <$

0, $v^2 > 1 - Su^2$ a curva de nível encontra-se na região acima ou abaixo da hipérbole assintotando a hipérbole, como mostra a figura 4.3.

■

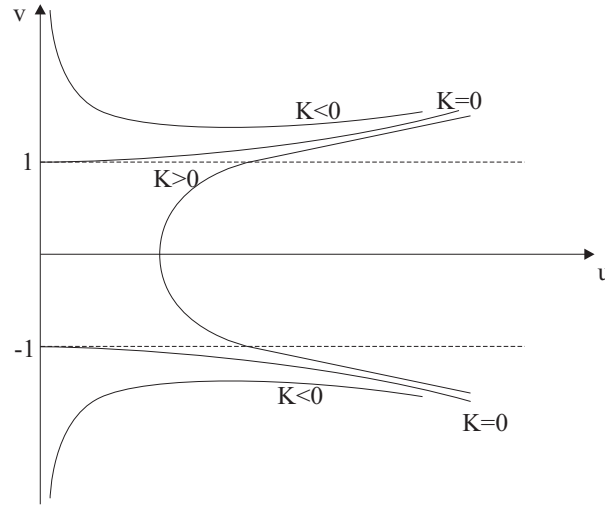


Figura 4.3. Curvas de níveis para $S < 0$.

Lema 4.2 Cada componente conexa das curvas de níveis de H , dadas nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3, correspondem à uma solução $(r, \dot{r})$ da EDO (4.3).

Demonstração Usaremos a notação e a teoria contida em [14]. Fazendo $u = r$ e $v = \dot{r}$, então a EDO de primeira ordem equivalente à EDO de segunda ordem (4.3) é

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.8)$$

onde $x = (u, v)$ e $f(x) = \left(v, \frac{n-3}{2} \frac{1-v^2}{u} - \frac{n-1}{2} Su\right)$, com $u > 0$ e $v \in \mathbb{R}$. Já temos que a órbita de cada solução da EDO (4.8) está contida em uma curva de nível da função H . Resta mostrar que a trajetória é toda a curva.

Note que, uma órbita de qualquer solução da EDO (4.8) é uma órbita fechada como subconjunto de $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$ e também como subconjunto das curvas de níveis de H . De fato, pois caso existisse alguma órbita que não fosse fechada, então o ponto

de acumulação da órbita que não pertence à órbita seria um ponto singular da EDO, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, pois neste caso a solução estaria definida para todo tempo. Porém, a EDO possui um único ponto singular, que corresponde ao ponto crítico de H quando $S > 0$ e $K > 0$, e esse ponto crítico de H não é ponto de acumulação de nenhuma curva de nível.

Além disso, toda órbita da EDO (4.8) é aberta. De fato, tome uma condição inicial, $x(t_0) = x_0$, com x_0 diferente de um ponto singular, e mostremos que existe um conjunto aberto na curva de nível, contendo x_0 e pertencente à órbita da solução que passa por x_0 no tempo t_0 . Temos que $\dot{x}(t_0) = f(x_0) \neq 0$, pois x_0 é um ponto regular. Da mesma forma, a curva de nível é regular em x_0 , pois $\nabla H \neq 0$. Se α é a órbita e β é a curva de nível, então podemos aplicar o teorema da função inversa localmente para concluir que $\beta(\alpha^{-1}(t))$ é um difeomorfismo local e portanto α é aberta em β em t_0 .

Logo, como à órbita de cada solução é aberta e fechada nas curvas de níveis, segue que cada componente conexa das curvas de níveis de H corresponde à uma órbita de alguma solução da EDO (4.8). ■

Teorema 4.1 (Classificação das Hipersuperfícies de Revolução de $\mathbb{R}^n$)

- (i) *A menos de translações verticais, existe uma única família paramétrica de hipersuperfícies de revolução completas de curvatura escalar constante $S = 0$, convergindo no infinito à um hiperplano $\mathbb{R}^{n-1}$. Em $\mathbb{R}^4$ a curva perfil é uma parábola, em $\mathbb{R}^5$ a curva perfil é uma catenária e em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 6$, a curva perfil assintota duas retas horizontais. Em todos os casos as hipersuperfícies estão mergulhadas.*
- (ii) *Para qualquer $S > 0$, existe uma única família paramétrica de hipersuperfícies mergulhadas completas de curvatura escalar constante S , todas periódicas e cilíndricamente limitadas. Quando o parâmetro aproxima-se de K_0 , dado na proposição 4.2, as hipersuperfícies geradas ficam cada vez mais próximas do cilindro $x_n \times S^{n-2}(r)$, e quando o parâmetro aproxima-se de zero as hipersuperfícies geradas ficam cada vez mais próximas de um conjunto de esferas duas a duas tangentes, com o centro no eixo de rotação e raio $\frac{1}{\sqrt{S}}$.*
- (iii) *Não existe hipersuperfície de revolução completa com curvatura escalar constante*

$$S < 0.$$

Demonstração Pela equação (4.5) temos que $\dot{r}^2 \leq 1$, portanto estamos interessados apenas nas curvas de níveis da equação (4.6) que encontra-se na região $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0 \text{ e } v^2 \leq 1\}$.

Como $u = r$ e $v = \dot{r}$ então a intersecção das curvas de nível com o eixo horizontal, $v = 0$, corresponde precisamente aos pontos onde a distância r da curva perfil ao eixo de rotação x_n é crítica, porém pelas curvas de níveis, vemos que os pontos críticos são apenas de mínimo ou de máximo.

Tomando, sem perda de generalidade, $x_n(0) = 0$, consideremos os seguintes casos:

Caso $S = 0$: A figura 4.1 nos diz que os valores de K que nos interessam é qualquer valor no intervalo $[0, \infty)$.

Para $K = 0$ temos que $\dot{r} = 1$ e a menos de translação, $r(s) = s$ para $s \geq 0$ e, além disso, usando a equação (4.4), encontramos que $x_n(s) = 0$, que corresponde ao hiperplano $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$.

Para um valor de $K > 0$ fixo, r atinge um ponto de mínimo $r_1 > 0$ quando $v = 0$, que é igual a $r_1^{n-3} = K$. Diretamente das equações (4.4) e (4.5) segue que

$$\dot{x}_n^2 = 1 - \dot{r}^2 = \frac{K}{r^{n-3}} \Rightarrow \dot{x}_n^2 r^{n-3} = K = r_1^{n-3}$$

e então r^{n-3} assume valores no intervalo $[K, \infty)$. Se $r \neq r_1$, podemos dividir $\dot{x}_n^2$ por $\dot{r}^2$ para obter

$$\frac{\dot{x}_n^2}{\dot{r}^2} = \left(\frac{dx_n}{dr} \right)^2 = \frac{K}{\dot{r}^2 r^{n-3}} \frac{r_1^{n-3}}{(1 - \dot{x}_n^2) r^{n-3}} = \frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3} - \dot{x}_n^2 r^{n-3}} \frac{r_1^{n-3}}{r^{n-3} - r_1^{n-3}},$$

o que implica que a curva perfil α é formada por dois gráficos simétricos, pois

$$\pm x_n = \sqrt{r_1^{n-3}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}}. \quad (4.9)$$

Note que pelo teorema do valor médio que $r^{n-3} - r_1^{n-3} = (n-3)\tilde{r}^{n-2}(r - r_1)$ com

$\tilde{r} \in [r_1, r]$. Daí, $r^{n-3} - r_1^{n-3} \geq (n-3)r_1^{n-2}(r - r_1)$, e então

$$|x_n| \leq \sqrt{r_1^{n-3}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{(n-3)^{\frac{1}{2}} r_1^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{r-r_1}} \frac{2\sqrt{r-r_1}}{\sqrt{r_1}\sqrt{n-3}} \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow r_1.$$

Por outro lado, para cada $r > r_1$, r fixo, chame $r_1 = \frac{r}{\alpha}$ e faça $r_1 \rightarrow 0$, que é o mesmo que fazer $\alpha \rightarrow \infty$. Se $\alpha > 2$ então $r^{n-3} - r_1^{n-3} \geq r^{n-3} - \frac{r^{n-3}}{2^{n-3}} r^{n-3} \left(\frac{2^{n-3}-1}{2^{n-3}} \right)$ e então

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq r_1^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{2^{n-3}}{2^{n-3}-1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{r_1}^r r^{\frac{3-n}{2}} dr \\ &= r_1^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{2^{n-3}}{2^{n-3}-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^{\frac{5-n}{2}} - r_1^{\frac{5-n}{2}}}{\frac{5-n}{2}} \right) \rightarrow 0, \text{ quando } r_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, quando a distância da hipersuperfície ao eixo de rotação tende a zero a hipersuperfície converge ao hiperplano $x_n = 0$.

Se $n = 4$ então

$$\pm x_4 = \sqrt{r_1} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r-r_1}} = 2\sqrt{r_1}\sqrt{r-r_1} \Rightarrow r = \frac{x_4^2}{4r_1} + r_1,$$

ou seja, a curva perfil é uma parábola.

Se $n = 5$, temos

$$\begin{aligned} \pm x_5 &= r_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_1^2}} = r_1 \log \frac{\sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} \Rightarrow \log \frac{\sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} = \pm \frac{x_5}{r_1} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{r^2 - r_1^2} + r}{r_1} &= e^{\pm \frac{x_5}{r_1}} \Rightarrow \sqrt{r^2 - r_1^2} = r_1 e^{\pm \frac{x_5}{r_1}} - r \Rightarrow r^2 - r_1^2 = r_1^2 e^{\pm \frac{2x_5}{r_1}} + r^2 - 2r_1 r e^{\pm \frac{x_5}{r_1}} \\ \Rightarrow 2r e^{\pm \frac{x_5}{r_1}} &= r_1 e^{\pm \frac{2x_5}{r_1}} + r_1 \Rightarrow \frac{r}{r_1} \frac{e^{\pm \frac{2x_5}{r_1}} + 1}{2e^{\pm \frac{x_5}{r_1}}} \Rightarrow \frac{r}{r_1} \frac{e^{\pm \frac{x_5}{r_1}} + e^{\mp \frac{x_5}{r_1}}}{2} \\ &\Rightarrow r = r_1 \cosh \frac{x_5}{r_1}, \end{aligned}$$

e portanto a curva perfil é uma catenária.

Para $n \geq 6$ temos

$$\begin{aligned} r \geq \sqrt[n-3]{2} r_1 &\Rightarrow r_1^{n-3} \leq \frac{r^{n-3}}{2} \Rightarrow \frac{r^{n-3}}{2} \leq r^{n-3} - r_1^{n-3} \Rightarrow \sqrt{\frac{r^{n-3}}{2}} \leq \sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{r^{n-3}}{2}}} \Rightarrow \int_{2r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} \leq \int_{2r_1}^\infty \frac{\sqrt{2} dr}{\sqrt{r^{n-3}}} = \frac{2^{\frac{8-n}{2}}}{n-5} \frac{1}{r_1^{\frac{n-5}{2}}} \end{aligned}$$

o que implica que a curva perfil assintota as duas retas horizontais $x_n = \pm$ constante, pois

$$\pm x_n = \sqrt{r_1^{n-3}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} \leq \sqrt{r_1^{n-3}} \int_{r_1}^{2r_1} \frac{dr}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}} + \frac{2^{\frac{8-n}{2}}}{n-5} r_1$$

portanto x_n é limitada e como $\dot{x}_n^2 + \dot{r}^2 = 1$, $\dot{r} \neq 1$ e $\dot{x}_n \neq 0$, ou seja, $x_n > 0$ ou $x_n < 0$, então x_n converge para uma constante.

Uma hipersuperfície é completa se e somente se ela é fechada como subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Daí, como a hipersuperfície considerada é de revolução, isso ocorre se e somente se a curva perfil é fechada, o que no caso é verdade pois é um gráfico. Assim como a propriedade da hipersuperfície estar mergulhada é clara, pois os dois gráficos colam suavemente em $(r_1, 0)$, com reta tangente paralela ao eixo de rotação x_n , pois $\frac{dx_n}{dr} = \frac{\sqrt{r_1^{n-3}}}{\sqrt{r^{n-3} - r_1^{n-3}}}$ diverge para o infinito quando r converge para r_1 , e a curva perfil não tem auto intersecção, pois x_n é monótona. Isto completa a prova do item (i).

Caso $S < 0$: A figura 4.3 diz que para $K > 0$ existe solução local, no entanto nenhuma dessas hipersuperfícies são completas pois nesse caso $\dot{r}$ torna-se maior que 1. E para $K = 0$ e $K < 0$ não existem solução nem mesmo local. Assim provamos (iii).

Caso $S > 0$: Da figura 4.2 vemos que os valores possíveis para K é qualquer valor no intervalo $[0, K_0]$ e que todas as curvas de níveis são compactas com exceção se $K = 0$, e portanto toda solução da EDO (4.3) está definida em toda reta real, além disso, temos que se $K < 0$ então as hipersuperfícies não são completas, pois nesse caso $\dot{r}$ torna-se maior que 1.

Se $K = K_0$ temos a solução $r(s) = r_0$ e $x_n(s) = s$, correspondendo ao cilindro $x_n \times S^{n-2}(r_0)$.

Para $K = 0$, resolvendo a EDO (4.4) e (4.5) com $r(0) = 0$ e $x_n(0) = 0$, temos a solução

$$r(s) = \frac{1}{\sqrt{S}} \sin(\sqrt{S}s), \quad x_n(s) = \frac{1}{\sqrt{S}}(1 - \cos(\sqrt{S}s))$$

que é simplesmente uma esfera com centro em $(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{S}})$ e raio $\frac{1}{\sqrt{S}}$.

Para $K \in (0, K_0)$, segue da teoria de EDO, ver [14], que a solução correspondente à cada curva de nível, está definida para todo tempo. Além disso, que cada solução é uma solução periódica, pois as curvas de níveis são fechadas. Portanto, cada solução varia monotonicamente de um valor mínimo $r_1 > 0$ a um máximo $r_2 < \frac{1}{\sqrt{S}}$, enquanto o quadrado de sua derivada $\dot{r}^2(s)$ sempre é menor que 1. Logo, $\dot{x}_n^2 = 1 - \dot{r}^2$ é sempre maior que zero, o que implica que x_n é monótona e a curva perfil está mergulhada.

Note que os valores possíveis para o parâmetro K é qualquer valor no intervalo $[0, K_0]$. Quando $K = 0$ temos uma esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{S}}$, quando $K = K_0$ temos o cilindro $x_n \times S^{n-2}(r_0)$. Portanto, de acordo com o parâmetro, quando ele se aproxima de zero, por continuidade, as hipersuperfícies geradas tendem a se aproximar cada vez mais a um conjunto de esferas tangentes duas a duas, cada uma delas com o centro pertencente ao eixo de rotação e raio $\frac{1}{\sqrt{S}}$. E quando o parâmetro aproxima-se de K_0 , as hipersuperfícies geradas tendem a se aproximar cada vez mais de um cilindro. ■

Proposição 4.3 *Sejam $u(x)$ definida como em (4.9), ou seja,*

$$\pm \frac{u(x)}{\sqrt{\rho^{n-2}}} = \int_{\rho}^{\|x\|} \frac{dt}{\sqrt{t^{n-2} - \rho^{n-2}}}, \quad n \geq 3 \quad (4.10)$$

e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Para $\|x\|$ no exterior de uma bola suficientemente grande tem-se a seguinte expansão para $u(x - x_0)$:

$$\begin{aligned} u(x - x_0) &= A + 2\sqrt{\rho}\sqrt{\|x\|} - \frac{\rho\sqrt{\rho}}{\sqrt{\|x\|}} - \sqrt{\rho}\frac{\langle x_0, x \rangle}{\sqrt{\|x\|^3}} + \sqrt{\|x\|}\mathcal{O}(\|x\|^{-2}), \quad n = 3; \\ u(x - x_0) &= A + \rho \ln \|x\| - \rho\frac{\langle x_0, x \rangle}{\|x\|^2} + \mathcal{O}(\|x\|^{-2}), \quad n = 4; \\ u(x - x_0) &= A - \frac{2\rho^{\frac{n-2}{2}}}{n-4} \frac{1}{\|x\|^{\frac{n-4}{2}}} - \rho^{\frac{n-2}{2}} \frac{\langle x_0, x \rangle}{\|x\|^{\frac{n}{2}}} + \mathcal{O}(\|x\|^{-\frac{n}{2}}), \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

A demonstração dessa proposição é um cálculo direto e pode ser encontrada em [6]. Definiremos um fim regular de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula de tal forma

que ele terá o mesmo comportamento assintótico no infinito que uma hipersuperfície de revolução, portanto a expansão para $u(x)$ servirá como motivação para definir o que é um fim regular de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula.

HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA ESCALAR NULA COM DOIS FINS

5.1 Introdução

Este capítulo dedica-se exclusivamente à provar o teorema de Hounie-Leite, que pode ser encontrado em [6], um teorema análogo ao teorema de Schoen mostrado em 1983 [13]. Mas para isso, antes precisamos apresentar alguns resultados preliminares, como por exemplo, um teorema de reflexão que é consequência do método de Alexandrov e que foi provado por Hounie-Leite em [7].

Inicialmente, na seção 5.2, consideramos uma hipersuperfície M mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$, compacta com $H_r = 0$ e com posto da aplicação de Gauss pelo menos r , na qual estabeleceremos um princípio de reflexão, consequência do método de Alexandrov. Na seção 3, definimos quando uma hipersuperfície é regular no infinito e estabelecemos uma fórmula para o fluxo de um $(n-1)$ -ciclo orientado α em um fim regular no infinito de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula. Essa fórmula será então usada na seção 4 para mostrar que se uma hipersuperfície com curvatura escalar nula, regular no infinito é completa e orientada com dois fins então os fins são paralelos com taxa de crescimento opostas. Esse resultado será então fundamental para a demonstração do resultado final, onde também é aplicado um princípio de reflexão estabelecido na seção 2. A demonstração do resultado final, consiste basicamente em mostrar que a hipersuperfície é simétrica, tanto em relação ao hiperplano horizontal quanto à qualquer hiperplano vertical contendo o eixo de rotação, que é encontrado a priori.

5.2 Um Princípio de Reflexão

O princípio de reflexão a seguir baseia-se fundamentalmente no Princípio da Tangência, que é a principal ferramenta para a sua demonstração, e no método de reflexão de Alexandrov. Ele será usado na seção final, onde iremos aplicá-lo na demonstração do teorema de Hounie-Leite. Apresentamos aqui a notação usada daqui por diante e logo a seguir enunciaremos e demonstramos esse princípio de reflexão.

Seja $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação projeção dada por $p(x, x_{n+1}) = x$, e para $t \in \mathbb{R}$ seja Π_t o hiperplano $\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = t\}$. Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é qualquer conjunto e $t \in \mathbb{R}$, denotaremos por Σ_{t+} e Σ_{t-} os seguintes conjuntos

$$\Sigma_{t+} = \{(x, x_{n+1}) \in \Sigma \mid x_{n+1} \geq t\},$$

$$\Sigma_{t-} = \{(x, x_{n+1}) \in \Sigma \mid x_{n+1} \leq t\},$$

ou seja, a porção de Σ que está acima e abaixo de Π_t , respectivamente. E denotemos por Σ_{t+}^* o seguinte conjunto

$$\Sigma_{t+}^* = \{(x, 2t - x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x_{n+1}) \in \Sigma_{t+}\},$$

ou seja, é o refletido de Σ_{t+} com respeito a Π_t .

Diremos que Σ é um gráfico se a aplicação projeção restrita a Σ for injetiva. Se Σ é uma variedade de $\mathbb{R}^{n+1}$, com ou sem fronteira, então Σ terá declividade localmente limitada se o plano tangente $T_p S$ não contém o vetor unitário vertical $v = (\mathbf{0}, 1)$. Um gráfico compacto com declividade localmente limitada é realmente um gráfico sobre algum aberto de $\mathbb{R}^m$, $m < n + 1$. De fato, pelo teorema da função inversa a imagem de p é uma variedade m -dimensional de $\mathbb{R}^n$ e a inversa de p é diferenciável. Se $A, B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são quaisquer conjuntos, então denotaremos por $A \geq B$ se para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $p^{-1}(x) \cap A \neq \emptyset$ e $p^{-1}(x) \cap B \neq \emptyset$ tivermos que todo ponto de $p^{-1}(x) \cap A$ está acima de todos os pontos de $p^{-1}(x) \cap B$, ou seja, se $(x, x_{n+1}) \in p^{-1}(x) \cap A$ e $(x, y_{n+1}) \in p^{-1}(x) \cap B$, então $x_{n+1} \geq y_{n+1}$.

Sejam $B = B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto compacto mergulhado C^2 de dimensão $n - 1$, M^n uma hipersuperfície compacta mergulhada suave em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\partial M = B$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo limitado em $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\partial \Omega$ é conexa e tem vetor curvatura em

$\overline{C}$, onde C denota o cone com respeito a σ_r . Enunciaremos e demonstraremos a seguir um princípio de reflexão.

Teorema 5.1 *Sejam B e Ω como acima, tais que $B \subset \partial\Omega \times \mathbb{R}$, B_0^+ é um gráfico com declividade localmente limitada e $B_{0+}^* \geq B_{0-}$. Se M é qualquer hipersuperfície compacta mergulhada com $\partial M = B$ e M possui todos os seus pontos interiores contidos em $\Omega \times \mathbb{R}$ e satisfaz $\sigma_r = 0$ com posto da aplicação de Gauss pelo menos r em todo ponto, então*

- (i) M_{0+} é um gráfico com declividade localmente limitada;
- (ii) $M_{0+}^* \geq M_{0-}$.

Demonstração Seja $\bar{t} = \max\{x_{n+1} \in \mathbb{R} \mid (x, x_{n+1}) \in B\}$. Se $\bar{t} \leq 0$ então M_{0+} não tem pontos interiores, e nesse caso $M_{0+} = B_{0+}$, ou M_{0+} tem um ponto interior p de altura máxima, o que implica que M permanece abaixo de seu espaço tangente $T_p M$ que é um hiperplano horizontal, pelo corolário 3.2 temos que M localmente coincide com $T_p M$. Considere o conjunto $C = \{x \in M \mid x \text{ possui uma vizinhança em } M \text{ contida em } T_p M\}$. Claramente C é aberto em M , para mostrar que C é fechado considere uma seqüência $x_n \in C$ convergindo para x e mostremos que $x \in C$. Por continuidade, M e $T_p M$ são tangentes em x e como M está abaixo de $T_p M$, novamente pelo corolário 3.2, existe uma vizinhança de x em M contida em $T_p M$, o que implica que C é fechado em M . Portanto, a componente conexa de M que contém p coincide com $T_p M$, porém estamos supondo que $\bar{t} \leq 0$, o que implica que $T_p M = \Pi_0$. Logo M_{0+} é uma região em Π_0 e de qualquer modo o teorema é válido.

Se $\bar{t} > 0$, considere o subconjunto $T \subset [0, \bar{t}]$, tal que se $t \in T$ então:

- (i) M_{t+} é um gráfico com declividade localmente limitada;
- (ii) $M_{t+}^* \geq M_{t-}$.

Pelo mesmo argumento usado no caso em que $\bar{t} \leq 0$, tem-se que $\bar{t} \in T$. Se mostrarmos que T é fechado e aberto em $[0, \bar{t}]$, teremos que $0 \in T$ e daí o teorema estará provado.

Para mostrar que T é aberto em $[0, \bar{t}]$, tome $t \in T$ e mostremos inicialmente que e_{n+1} não é tangente à M em um ponto $p \in \Pi_t$. Se $p \in B \cap \Pi_t$ com $e_{n+1} \in T_p M$, então devemos

ter $T_p M = T_p(\partial\Omega \times \mathbb{R})$ já que $e_{n+1} \notin T_p B$. Tomando M' como sendo a parte de $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ que está abaixo ou acima de B , pois as normais às fronteiras precisam apontar na mesma direção e sentido, unido com B , temos que M satisfaz $H_r = 0$ e $H_{r+1} \neq 0$, pois o posto da aplicação de Gauss é no mínimo r , a função simétrica σ_r em M' é maior ou igual a zero, já que o vetor curvatura de $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ está contido em $\overline{C}$ e então, aplicando o teorema 3.6, temos que uma vizinhança de p em M está contida em $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, , contradizendo o fato que todos os pontos interiores de M estão no interior de $\Omega \times \mathbb{R}$. Seja p um ponto interior de M com $p \in \Pi_t$. Tem-se que M_{t+}^* e M_{t-} encontram-se no ponto de fronteira p , com M_{t+}^* acima de M_{t-} , pois $t \in T$. Se $e_{n+1} \in T_p M$, então M_{t+}^* e M_{t-} encontram-se tangencialmente em p com vetor curvatura na mesma folha, pois a curvatura principal é invariante por isometria, ou seja, se ρ é uma isometria então os vetores curvaturas principais em p e em $\rho(p)$ coincidem.

Mostremos que se M_{t+}^* está acima de M_{t-} na direção de e_{n+1} , então M_{t+}^* também está acima de M_{t-} na direção da normal para cima em um ponto de tangência. Basta mostrar esse resultado no plano para duas funções crescentes ou decrescentes, pois é só considerar M_{t+}^* e M_{t-} intersectadas com um plano vertical passando pelo ponto de tangência. Portanto, sejam f e g duas funções crescentes tais que $g(x) \geq f(x)$ e seus gráficos sejam tangentes no ponto x_0 . Podemos considerar que $f'(x_0) = a > 0$, pois para o caso $a = 0$ a normal coincide com o vetor unitário vertical. Nesse caso, iremos escrever f e g em um novo sistema de coordenadas com base igual a $\{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$, onde o vetor $(-\sin \theta, \cos \theta)$ é a normal aos gráficos no ponto de tangência, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Logo, se $(w, G(w))$ e $(w, F(w))$ são dois pontos no novo sistema de coordenadas nos gráficos de g e f , respectivamente, queremos mostrar que $G(w) - F(w) > 0$. De fato, pois esses pontos na base canônica são iguais a

$$(w, G(w)) = w(\cos \theta, \sin \theta) + G(w)(-\sin \theta, \cos \theta) = (x, g(x)),$$

e

$$(w, F(w)) = w(\cos \theta, \sin \theta) + F(w)(-\sin \theta, \cos \theta) = (y, f(y)),$$

o que implica que

$$\begin{cases} w \cos \theta - G(w) \sin \theta = x \\ w \sin \theta + G(w) \cos \theta = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cos \theta + g(x) \sin \theta = w \\ -x \sin \theta + g(x) \cos \theta = G(w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \cos \theta - F(w) \sin \theta = y \\ w \sin \theta + F(w) \cos \theta = f(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cos \theta + f(y) \sin \theta = w \\ -y \sin \theta + f(y) \cos \theta = F(w) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow G(w) - F(w) &= (y - x) \sin \theta + (g(x) - f(y)) \cos \theta = (y - x) \sin \theta + (G(w) - F(w)) \cos^2 \theta \\ \Rightarrow \sin \theta &= \frac{y - x}{G(w) - F(w)} > 0,\end{aligned}$$

pois $g(x) - f(y) = (G(w) - F(w)) \cos \theta$. Se $x > y$ então $G(w) - F(w) < 0$ e como g é crescente e está acima de f , temos que $g(x) > g(y) > f(y)$ e daí $G(w) - F(w) > 0$, pois $\cos \theta > 0$, contradição. Logo $y > x$ e $G(w) > F(w)$.

O teorema 3.5 implica que M_{t+}^* e M_{t-} coincidem em uma vizinhança de p , assim como toda a componente conexa de p , usando o mesmo argumento de conexidade acima. Dessa forma, a fronteira seria simétrica com respeito a Π_t , com $t > 0$, contradizendo $B_{0+}^* \geq B_{0-}$, pois se (x, x_{n+1}) e (x, y_{n+1}) são dois pontos da fronteira da componente conexa que contém p com $x_{n+1} > y_{n+1}$, então $2t - x_{n+1} = y_{n+1}$, o que implica que $-x_{n+1} < y_{n+1}$. Portanto, $e_{n+1} \notin T_p M$.

Como M tem declividade localmente limitada em todos os pontos de Π_t , existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \epsilon' \in (0, \epsilon]$ o conjunto $M \cap S_{\epsilon'}$ é um gráfico com declividade localmente limitada sobre um subconjunto de Π_0 , já que o espaço tangente varia continuamente com p , onde $S_{\epsilon'}$ denota a faixa $|x_{n+1} - t| < \epsilon'$ e $M \cap \Pi_t$ é compacta.

Tome $s \in (t - \frac{\epsilon}{4}, t + \frac{\epsilon}{4}) \cap (0, \bar{t}]$ e denotemos por ρ_s a reflexão em torno do hiperplano Π_s , então $\rho_s(S_{\frac{\epsilon}{2}}) \subset S_{\epsilon}$, daí $\rho_s(M_{s+} \cap S_{\frac{\epsilon}{2}}) \geq M_{s-}$, já que a intersecção de $\rho_s(M_{s+} \cap S_{\frac{\epsilon}{2}})$ com M_{s-} na faixa S_{ϵ} ocorre em $M \cap \Pi_s$, pois $M \cap S_{\epsilon}$ é um gráfico. Por outro lado, o complemento $M_{s+} \setminus S_{\frac{\epsilon}{2}}$ é um subconjunto compacto de M_{t+} , assim $\rho_t(M_{s+} \setminus S_{\frac{\epsilon}{2}}) \geq M_{t-}$. Observe que $M_{t+}^* \cap M_{t-} = M \cap \Pi_t$, pois a igualdade vale em Π_t e M está mergulhada. Caso contrário, elas seriam tangentes em um ponto interior P pois M_{t+}^+ está acima de M_{t-} e na fronteira a desigualdade é estrita. Por um argumento análogo ao já utilizado nesta demonstração, M_{t+}^* está acima de M_{t-} próximo a p também na direção do vetor normal. Os vetores curvatura principal de M_{t+}^* e M_{t-} estão na mesma folha: de fato, o vetor curvatura principal de M_{t+}^* em p é igual ao de M_{t+} em p^* pois a reflexão é uma isometria de $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, os vetores curvaturas principais de quaisquer dois pontos em M estão na mesma folha, caso contrário por conexidade haveria um ponto em M onde o vetor curvatura principal pertenceria a duas folhas distintas, o que pela proposição 2.5 temos que $H_{r+1} = 0$ e pelo teorema 2.3 a aplicação normal de Gauss teria posto menor ou igual a r . Para aplicação do princípio da tangência, resta mostrar que os vetores

normais apontam na mesma direção. Se M é compacta sem fronteira, então $\mathbb{R}^{n+1} - M$ tem duas componentes conexas e a normal a M aponta para o interior de uma delas (ver [15] vol. I). Usando este fato pode-se mostrar que, na aplicação do método de reflexão de Alexandrov, M e sua parte refletida tem normal na mesma direção, ver por exemplo [1]. Usando esse fato, se M é com fronteira então estendemos M a uma compacta sem fronteira e então usamos o caso acima para concluir que, na aplicação do método de Alexandrov, M e sua parte refletida tem normal na mesma direção. Logo, pelo teorema 3.5 temos que M_{t+}^* e M_{t-} coincidem localmente e então, por um argumento de conexidade, uma componente conexa coincidiria, contradizendo a desigualdade na fronteira B . Como $M_{s+} \setminus S_{\frac{\epsilon}{2}}$ está estritamente acima de Π_t , tem-se que $\rho_t(M_{s+} \setminus S_{\frac{\epsilon}{2}})$ está estritamente acima de M_{t-} , já que $M_{s+} \setminus S_{\frac{\epsilon}{2}} \subset M_{t+}$, o que ocorre também com s próximo de t . Assim fica provado que $M_{s+}^* \geq M_{s-}$, para s suficientemente próximo de t . O fato que M_{s+} é um gráfico com declividade localmente limitada segue do fato que $M \cap S_\epsilon$ é um gráfico com declividade localmente limitada, assim como M_{t+} tem declividade localmente limitada. Logo T é aberto em $[0, \bar{t}]$.

Mostremos que T é fechado. Se $(t, \bar{t}] \subset T$ para algum $t \in [0, \bar{t})$ então mostremos que $t \in T$. Suponha que M_{t+} não seja um gráfico, então existem dois pontos em M_{t+} , (x, x_{n+1}) e (x, y_{n+1}) com $x_{n+1} > y_{n+1}$, o que diz que $y_{n+1} = t$ pois $s \in T$ para $s > t$. Como B_{0+} é um gráfico e $B_{t+} \subset B_{0+}$ segue que $x \in \Omega$ e (x, t) é um ponto interior de M . A declividade de M em (x, x_{n+1}) é limitada, pois $x_{n+1} \in (t, \bar{t}]$, e então uma vizinhança deste ponto em M pode ser representado como um gráfico G sobre uma vizinhança V de (x, t) em Π_t , com G estritamente acima de V . Dado um ponto $(y, t) \in V$, tem-se que $p^{-1}\{y\}$ intersecta G em um nível $s > t$, que é o único ponto de intersecção com M , já que para todo $s > t$ temos que M_{s+} é um gráfico. Como G é disjunto de V , segue que uma vizinhança de (x, t) em M está abaixo de Π_t , e pelo corolário 3.2 esta vizinhança está contida em Π_t , pois neste caso Π_t é o plano tangente à M em (x, t) .

O conjunto $A = \{(x, t) \in M \cap (\Omega \times t) \mid \text{existe } (x, s) \in M \text{ com } s > t\}$ é aberto e fechado em $\Omega \times t$. De fato, que é aberto já temos feito acima e que é fechado tome uma seqüência $(x_n, t) \in M$ convergindo para (x, t) . Então existe uma outra seqüência, $(x_n, s_n) \in M$ com $s_n > t$, convergindo para (x, s) . Se $s > t$, pelo fato de M ser compacta, esse ponto pertence a A , porém se $s = t$ então temos que $(x_n, t) - (x_n, s_n) = (t - s_n)e_n$ converge para o vetor nulo, porém o resultado do apêndice da página 74 de [1] nos diz

que e_n pertence ao espaço tangente a M no ponto (x, t) e por continuação e_n é o vetor normal nesse ponto, absurdo. Logo, uma componente de M está contida em Π_t , e daí uma componente de B é igual a $\partial\Omega \times \{t\}$ e isto contradiz a hipótese de que B_{0+} é um gráfico, pois estamos assumindo que existem pontos de M acima de $\Omega \times \{t\}$ o que implica que existem pontos de B_{0+} acima desse conjunto. Além disso M_{t+} é um gráfico com declividade localmente limitada. Também temos que $M_{t+}^* \geq M_{t-}$ do contrário existiriam dois pontos $(x, x_{n+1}) \in M_{t+}$ e $(x, y_{n+1}) \in M_{t-}$ com $2t - x_{n+1} < y_{n+1}$, implicando que para $s > t$ suficientemente próximos de t teríamos uma vizinhança de M_{s+}^* abaixo de uma vizinhança de M_{s-} , contradizendo o fato que $s \in T$. Isto completa a prova que T é fechado e a prova do teorema. ■

5.3 A Fórmula do Fluxo

Agora definiremos o fluxo de um $(n - 1)$ -ciclo orientado α , em uma hipersuperfície com curvatura escalar nula imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, na direção de um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mas antes disso, apresentamos uma importante propriedade provada por Reilly [12], que será usada para encontrar uma fórmula para o fluxo de um ciclo em um fim regular no infinito de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula. Definimos também um fim regular no infinito de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula.

Definição 5.1 *Para qualquer hipersuperfície M de $\mathbb{R}^{n+1}$ e qualquer inteiro $1 \leq r \leq n$ definimos o operador diferencial linear de segunda ordem L_{r-1} agindo sobre funções definidas em M , como*

$$L_{r-1}(\phi) = \operatorname{div}(T_{r-1} \nabla \phi),$$

onde $\nabla \phi$ é o gradiente de ϕ restrito a M e T_r é a r -ésima Transformação de Newton da definição 3.2 na página 25, que para simplificar a notação estamos considerando com respeito ao operador de forma.

Este operador é uma ferramenta muito utilizada no estudo de hipersuperfícies com a r -ésima função de curvatura constante. Enunciamos agora uma das principais propriedades de L_{r-1} , propriedade essa que foi provada por Reilly [12] e que será usada logo adiante.

Proposição 5.1 *Se M é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $H_r = 0$ e h é qualquer função altura, então h satisfaz a equação $L_{r-1}(h) = 0$ (uma generalização do fato que a função altura de uma superfície mínima é harmônica).*

Definição 5.2 *Dado um $(n - 1)$ -ciclo orientado α em uma hipersuperfície orientada imersa com curvatura escalar nula, o fluxo de α na direção de um vetor unitário v em $\mathbb{R}^{n-1}$, é definido por*

$$Flux(\alpha; v) = \oint_{\alpha} \langle T_1 \nabla h, \nu \rangle d\sigma,$$

onde T_1 é a Transformação de Newton com relação ao operador de forma, ν é a normal para fora e h é a função altura com respeito a v , isto é, $h(x) = \langle v, x \rangle$.

Uma aplicação direta do teorema da divergência mostra que $Flux(\alpha; v)$ depende somente da classe de homologia de α , pois se D é um domínio regular de M , então pela proposição 5.1 temos

$$\oint_{\partial D} \langle T_1 \nabla h, \nu \rangle d\sigma = \int_D L_1(h) d\mu = 0.$$

A motivação para definir um fim regular no infinito de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula em $\mathbb{R}^{n+1}$, vem da expansão da expressão explícita de uma hipersuperfície rotacional com curvatura escalar nula em $\mathbb{R}^{n+1}$, pois iremos considerar fins de hipersuperfícies com $H_2 = 0$ tendo o mesmo comportamento assintótico que uma hipersuperfície rotacional com curvatura escalar nula.

Definição 5.3 *Um fim de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, é regular no infinito com taxa de crescimento $a \neq 0$, se ele é um gráfico de uma função $u(x)$ definida no exterior de uma bola limitada em algum hiperplano Π de $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que para $x \in \Pi$ com $\|x\|$ grande,*

$$u(x) = a\sqrt{\|x\|} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\|x\|}} + \frac{\langle c, x \rangle}{\sqrt{\|x\|^3}} + \sqrt{\|x\|}\phi(x), \quad n = 3,$$

$$u(x) = a \ln \|x\| + a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^2} + \phi(x), \quad n = 4,$$

$$u(x) = \frac{a}{\|x\|^{\frac{n-4}{2}}} + a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^{\frac{n}{2}}} + \|x\|^{\frac{4-n}{2}}\phi(x), \quad n \geq 5,$$

para constantes $a \neq 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\|\phi(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|^2},$$

$$\|D_j \phi(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|^3},$$

$$\|D_{ij} \phi(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|^4}.$$

A próxima proposição será fundamental na demonstração do lema 5.1.

Proposição 5.2 *Seja $C_R \subset M$ o ciclo dado por $\{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = R\}$ com a orientação induzida de S^{n-1} , onde S^{n-1} está orientada com a normal para fora, em um fim regular no infinito com taxa de crescimento $a \neq 0$ sobre Π de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula. Então*

$$Flux(C_R; v) = \langle v, u \rangle \gamma_n Vol(S^{n-1}) a^2,$$

onde u é a normal unitária positiva ao hiperplano Π , e $\gamma_n = \frac{(n-1)(4-n)^2}{4}$ se $n \neq 4$ e $\gamma_4 = 3$.

Demonstração Da definição de fim regular no infinito com taxa de crescimento $a \neq 0$ temos que

$$u(x) = a\|x\|^{\frac{4-n}{2}} + g(x), \quad \text{se } n \neq 4,$$

$$u(x) = a \ln \|x\| + g(x), \quad \text{se } n = 4,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $g(x)$ é igual a

$$g(x) = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\|x\|}} + \frac{\langle c, x \rangle}{\sqrt{\|x\|^3}} + \sqrt{\|x\|} \phi(x), \quad n = 3,$$

$$g(x) = a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^2} + \phi(x), \quad n = 4,$$

$$g(x) = a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^{\frac{n}{2}}} + \|x\|^{\frac{4-n}{2}} \phi(x), \quad n \geq 5,$$

e calculando as derivadas de primeira e de segunda ordem de $g(x)$ chegamos que elas são da ordem $\mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}})$ e $\mathcal{O}(R^{-\frac{n+2}{2}})$, respectivamente, quando $R = \|x\| \rightarrow \infty$. Calculando as derivadas até segunda ordem de u temos

$$u_i = b_n a R^{-\frac{n}{2}} x_i + g_i,$$

$$u_{ij} = b_n a R^{-\frac{n}{2}} \left(\delta_{ij} - \frac{n}{2} \frac{x_i x_j}{R^2} \right) + g_{ij},$$

onde $b_n = \frac{4-n}{2}$ se $n \neq 4$ e $b_4 = 1$. Como

$$\left| R^{\frac{n-2}{2}} u_i \right| = \left| b_n a \frac{x_i}{R} + R^{\frac{n-2}{2}} g_i \right| < C = \text{constante}$$

quando R é suficientemente grande, então $u_i = \mathcal{O}(R^{-\frac{n-2}{2}})$.

Devemos encontrar a normal exterior à C_R na hipersuperfície. Assumindo que o fim é um gráfico sobre o hiperplano horizontal em $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que a normal da hipersuperfície M é dada por $\frac{1}{W(x)}(-\nabla u(x), 1)$, onde $W^2(x) = 1 + u_1^2 + \dots + u_n^2$, $W \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow +\infty$, e que qualquer vetor da forma $(v, \langle \nabla u(x), v \rangle)$ é ortogonal à $(-\nabla u(x), 1)$. Porém para que esse vetor seja normal à C_R é necessário que ele seja ortogonal a qualquer vetor tangente à C_R e além disso, temos que se w é ortogonal a x então o vetor $(w, \langle \nabla u(x), w \rangle)$ é tangente à C_R . Portanto,

$$\begin{aligned} \langle (v, \langle \nabla u(x), v \rangle), (w, \langle \nabla u(x), w \rangle) \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle \nabla u(x), v \rangle \langle \nabla u(x), w \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle v, w + \langle \nabla u(x), w \rangle \nabla u(x) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Se fazemos $v = ax + b\nabla u(x)$ então

$$\langle \nabla u(x), w \rangle (a \langle \nabla u(x), x \rangle + bW^2) = 0.$$

Se $\langle \nabla u(x), w \rangle = 0$ então tome v como sendo qualquer vetor na direção de x , porém se $a \langle \nabla u(x), x \rangle + bW^2 = 0$ então podemos considerar $a = W^2$ e $b = -\langle \nabla u(x), x \rangle$, assim para qualquer caso, v pode ser tomado como sendo igual a

$$v = xW^2 - \langle \nabla u(x), x \rangle \nabla u(x).$$

O que implica que o vetor normal à C_R é dado por $\nu = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, onde

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) + \|\nabla u(x)\|^2 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) - \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle (\nabla u(x), \|\nabla u(x)\|^2),$$

usando a estima para u_i temos que

$$\|\vec{n}\| \leq \left\| \left(\frac{x}{R}, \nabla u(x) \cdot \frac{x}{R} \right) \right\| + \|\mathcal{O}(R^{2-n})\| \leq \sqrt{1 + \mathcal{O}(R^{2-n})} + \mathcal{O}(R^{2-n}),$$

porém,

$$\sqrt{1 + \mathcal{O}(R^{2-n})} - 1 \frac{\mathcal{O}(R^{2-n})}{\sqrt{1 + \mathcal{O}(R^{2-n})} + 1} \mathcal{O}(R^{2-n}).$$

Daí,

$$\|\vec{n}\| = 1 + \mathcal{O}(R^{2-n}) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|\vec{n}\|} = 1 + \mathcal{O}(R^{2-n}).$$

O gradiente $\nabla h(p)$ é tomado restrito à hipersuperfície M , daí $\nabla h(p)$ coincide com a projeção ortogonal de v em $T_p M$. Como T_1 é auto-adjunto e $\vec{n}$ é tangente a M então

$$\langle T_1 \nabla h, \vec{n} \rangle_{M_p} \langle v, T_1(\vec{n}) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \left\langle v, T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle v, T_1(\mathcal{O}(R^{2-n})) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} Flux(C_R; v) &= \oint_{C_R} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma = \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \langle v, T_1(\vec{n}) \rangle d\sigma \\ &= \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left\langle v, T_1 \left(\frac{x}{R}, \nabla u(x) \cdot \frac{x}{R} \right) \right\rangle d\sigma + \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \langle v, T_1(\mathcal{O}(R^{2-n})) \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Se C_R e C_r , $R \neq r$, são dois ciclos com a orientação induzida de M_R , onde M_R é a parte compacta de M que tem como fronteira os ciclos C_R e C_r , então temos que

$$\begin{aligned} \oint_{C_R} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma - \oint_{C_r} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma &= \oint_{C_R \cup (-C_r)} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma \\ &= \oint_{\partial D} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma = \oint_D L_1(h) d\mu = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\oint_{C_r} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma = - \oint_{-C_r} \left\langle T_1 \nabla h, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle d\sigma$$

e pela proposição 5.1 temos $L_1(h) = 0$, onde $\partial D = C_R \cup (-C_r)$ e $(-C_r)$ indica o ciclo C_r com a orientação oposta. Portanto o fluxo é constante para qualquer valor de R e então podemos tomar $R \rightarrow \infty$ que o fluxo continua constante.

Cálculo de $T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right)$: Se $X(x) = (x, u(x))$ é uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in M$ temos do capítulo 1 que a matriz de $B = -dN$ na base $\mathcal{B} = \{(e_i, u_i), i = 1 \dots, n\}$ é dada por $[b_{ij}] = \left[\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right] \times \left[\frac{u_{ij}}{W} \right]$, onde $W^2 = 1 + u_1^2 \dots + u_n^2$.

Calculando $\left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle$, encontramos que

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle &= \sum_{i=1}^n u_i \frac{x_i}{R} \sum_{i=1}^n (b_n a R^{-\frac{n}{2}} x_i + g_i) \frac{x_i}{R} = \sum_{i=1}^n \left(b_n a R^{-\frac{n}{2}} \frac{x_i^2}{R} + \frac{x_i}{R} g_i \right) \\ &= \frac{b_n a}{R^{\frac{n-2}{2}}} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{R} g_i b_n \frac{a}{R^{\frac{n-2}{2}}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) \end{aligned}$$

e então

$$\left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) \left(\frac{x}{R}, b_n \frac{a}{R^{\frac{n-2}{2}}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) \right).$$

O comportamento de g_{ij} , quando $R \rightarrow \infty$, implica que $u_{ij} = \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}})$. Os elementos da matriz B são dados por

$$b_{ij} = \sum_k \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_k}{W^2} \right) \left(\frac{u_{kj}}{W} \right) = \frac{u_{ij}}{W} - \sum_k \frac{u_i u_k u_{kj}}{W^3},$$

e como $W > 1$, temos que

$$\left| \frac{u_{ij}}{W} \right| \leq |u_{ij}| = \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) \quad \text{e} \quad \left| \frac{u_i u_k u_{kj}}{W} \right| \leq |u_i u_k u_{kj}| \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}).$$

Portanto, $b_{ij} - u_{ij} = \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}})$, ou seja, a matriz do operador de forma satisfaz a igualdade $B = [b_{ij}] = [u_{ij}] + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}})$. Lembrando que $T_1 = nH_1 I - B$ e que $nH_1 = \sum_{i=1}^n u_{ii} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}})$, segue que

$$\begin{aligned} [(T_1)_{ij}] &= \sum_{k=1}^n u_{kk} \delta_{ij} - u_{ij} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left(1 - \frac{n}{2} \frac{x_k^2}{R^2} \right) + g_{kk} \right) \delta_{ij} \\ &\quad - \left(\frac{b_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left(\delta_{ij} - \frac{n}{2} \frac{x_i x_j}{R^2} \right) + g_{ij} \right) + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) = \frac{n}{2} \frac{b_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \delta_{ij} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n+2}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{b_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left(\delta_{ij} - \frac{n}{2} \frac{x_i x_j}{R^2} \right) + \mathcal{O}(R^{-\frac{n+2}{2}}) + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) &= \frac{b_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{n}{2} \delta_{ij} - \delta_{ij} + \frac{n}{2} \frac{x_i x_j}{R^2} \right) + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) \\
&= \frac{c_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left[\delta_{ij} + \frac{n}{n-2} \frac{x_i x_j}{R^2} \right] + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}),
\end{aligned}$$

onde $\sum_k x_k^2 = R^2$ e $c_n = \frac{(n-2)(4-n)}{4}$ se $n \neq 4$ e $c_4 = 1$.

O vetor $T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right)$ na base $\mathcal{B}$ é o produto da matriz de T_1 , $[(T_1)_{ij}]$, pelo vetor $\left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right)$ na base $\mathcal{B}$, isto é,

$$T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) \frac{c_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left[\delta_{ij} + \frac{n}{n-2} \frac{x_i x_j}{R^2} \right] \times \left[\frac{x_j}{R} \right] + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{c_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \sum_k \left(\delta_{ik} + \frac{n}{n-2} \frac{x_i x_k}{R^2} \right) \frac{x_k}{R} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) \\
&= \frac{c_n a}{R^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{x_i}{R} + \frac{n}{n-2} \frac{x_i}{R} \right) + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) = \frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} x_i + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}),
\end{aligned}$$

onde $d_n = \frac{(n-1)(4-n)}{2}$ se $n \neq 4$ e $d_4 = 3$. Se $T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ está na base $\mathcal{B}$ então o vetor $T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ na base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ é

$$T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, u_i(x)) (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \langle \nabla u(x), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle).$$

Resultando que a $(n+1)$ -ésima coordenada de $T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u(x), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle &= \sum_i u_i \alpha_i = \sum_i \left(\frac{b_n a}{R^{\frac{n}{2}}} x_i + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) \right) \left(\frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} x_i + \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) \right) \\
&= \frac{\gamma_n a^2}{R^{n+1}} \sum_i x_i^2 + \mathcal{O}(R^{3-2n}) + \mathcal{O}(R^{-n}) + \mathcal{O}(R^{2-2n}) \\
&= \frac{\gamma_n a^2}{R^{n-1}} + \mathcal{O}(R^{-n}),
\end{aligned}$$

onde $\gamma_n = \frac{(n-1)(4-n)^2}{4}$ se $n \neq 4$ e $\gamma_4 = 3$. Daí,

$$\left\langle v, T_1 \left(\frac{x}{R}, \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle \right) \right\rangle \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) \frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} + v_{n+1} \frac{\gamma_n a^2}{R^{n-1}} + \mathcal{O}(R^{-j}),$$

onde $j = \min \left\{ n, \frac{3n-4}{2} \right\}$.

Multiplicando a matriz de T_1 por um vetor cujas coordenadas são da ordem de $\mathcal{O}(R^{2-n})$ achamos que $T_1(\mathcal{O}(R^{2-n})) = \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}})$ e então $\langle v, T_1(\mathcal{O}(R^{2-n})) \rangle = \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}})$. Portanto

$$\begin{aligned} Flux(C_R; v) &= \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) \frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} d\sigma + \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} v_{n+1} \frac{\gamma_n a^2}{R^{n-1}} d\sigma \\ &\quad + \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \mathcal{O}(R^{-j}) d\sigma + \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \mathcal{O}(R^{-\frac{3n-4}{2}}) d\sigma \\ &= \frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) d\sigma + \frac{\gamma_n a^2}{R^{n-1}} \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} v_{n+1} d\sigma + \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \mathcal{O}(R^{-j}) d\sigma \end{aligned}$$

O elemento de volume $d\sigma$ corresponde ao elemento de volume do ciclo C_R em $\mathbb{R}^{n+1}$, que converge ao elemento de volume dV da esfera $S^{n-1}(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = R\}$ em $\mathbb{R}^n = \Pi$, quando $R \rightarrow \infty$. De fato, se o gradiente de u , $\nabla u(x)$, for paralelo a x , então escolha uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de $T_x S^{n-1}(R)$, tal que $\langle \nabla u(x), e_i \rangle = 0$. Como C_R é um ciclo de um fim regular, temos que $\varphi(x) = (x, u(x))$ é uma função de $S^{n+1}(R)$ em C_R , portanto $d\varphi_x(e_i) = (e_i, 0)$ é uma base ortonormal de C_R , o que implica que o conjunto $\mathcal{U} = \{(e_1, 0), \dots, (e_{n-1}, 0), N, \nu\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$, onde N é a normal à hipersuperfície e ν é a normal ao ciclo em relação à hipersuperfície. Portanto, neste caso, $d\sigma = \sqrt{\det g_{ij}} dV = dV$, pois

$$\det((e_1, 0), \dots, (e_{n-1}, 0), (-\nabla u(x), 1), \nu) = \sqrt{\det g_{ij}} = 1,$$

onde g_{ij} é o produto interno do i -ésimo elemento da base $\mathcal{U}$ com o j -ésimo elemento, ou seja, $g_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $g_{ii} = 1$.

Se, porém o gradiente de u não é paralelo a x , tome $e_1 = \frac{(\nabla u(x))^T}{\|(\nabla u(x))^T\|}$ e complete-o para uma base ortonormal de $T_x S^{n-1}(R)$, $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$, onde $(\nabla u(x))^T$ é a parte tangencial

de $\nabla u(x)$ em relação ao ciclo C_R . Como acima, temos que $d\varphi_x(e_1) = (e_1, \|(\nabla u(x))^T\|)$ e $d\varphi_x(e_i) = (e_i, 0)$, $i = 2, \dots, n-1$. Daí, o conjunto $\{e'_1 = (e_1, \|(\nabla u(x))^T\|), e'_2 = (e_2, 0), \dots, e'_{n-1} = (e_{n-1}, 0), e'_n = N, e'_{n+1} = \nu\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Tomando a base ortonormal $\left\{\frac{e'_1}{\|e'_1\|}, e'_2, \dots, e'_{n+1}\right\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que $d\sigma = \sqrt{\det g_{ij}} dV = \widetilde{W} dV$, onde $\det g_{ij}$ é como acima, $g_{11} = 1 + \|(\nabla u(x))^T\|^2 = \widetilde{W}^2$, $g_{ii} = 1$, $i = 2, \dots, n+1$ e $g_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Como $\|(\nabla u(x))^T\| \leq \|\nabla u(x)\|$ e $\|\nabla u(x)\| = \mathcal{O}(R^{-\frac{n-2}{2}})$, então $\|(\nabla u(x))^T\| = \mathcal{O}(R^{-\frac{n-2}{2}})$, o que implica que $\widetilde{W} = 1 + \mathcal{O}(R^{2-n})$.

Logo, independente se o gradiente de u é paralelo ou não a x , temos que $d\sigma = (1 + \mathcal{O}(R^{2-n}))dV$. Portanto,

$$\frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} \left| \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) d\sigma \right| = \frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} \left| \oint_{C_R} \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) (1 + \mathcal{O}(R^{2-n})) dV \right|$$

Também temos que

$$= \frac{d_n a}{R^{\frac{n+2}{2}}} \left| \oint_{C_R} \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) \mathcal{O}(R^{2-n}) dV \right| \leq \frac{d_n a}{R^{\frac{3n-2}{2}}} \oint_{C_R} \left| \sum_{i=1}^n v_i x_i \right| dV \leq \frac{C}{R^{\frac{n-2}{2}}}$$

onde C é uma constante e pela simetria do integrando, temos que

$$\oint_{C_R} \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i \right) dV = 0.$$

$$\left| \frac{1}{R^{n-1}} \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} d\sigma - \frac{1}{R^{n-1}} \oint_{C_R} dV \right| \left| \frac{1}{R^{n-1}} \oint_{C_R} \mathcal{O}(R^{2-n}) dV \right| \leq \frac{C}{R^{n-2}}$$

onde C é uma constante.

$$\left| \oint_{C_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|} \mathcal{O}(R^{-j}) d\sigma - \oint_{C_R} \mathcal{O}(R^{-j}) dV \right| = \left| \oint_{C_R} \mathcal{O}(R^{2-n}) \mathcal{O}(R^{-j}) d\sigma \right| \leq \frac{C}{R^k},$$

onde $k = \min \left\{ n-1, \frac{3n-6}{2} \right\}$ e como

$$\left| \oint_{C_R} \mathcal{O}(R^{-j}) \right| \leq \frac{C}{R^{-i}}$$

onde $i = \min \left\{ 1, \frac{n-2}{2} \right\}$. O que implica que

$$Flux(C_R; v) = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\|x\|=R} v_{n+1} \frac{\gamma_n a^2}{R^{n-1}} dV = v_{n+1} \gamma_n Vol(S^{n-1}) a^2$$

E assim, obtemos o resultado desejado. ■

Note que o fundamental na demonstração foi usar a expansão da expressão de um fim regular no infinito de uma hipersuperfície com curvatura escalar nula em $\mathbb{R}^{n+1}$, além do fato que o fluxo depende somente da classe de homologia do ciclo C_R .

5.4 O Resultado Final

Nesta seção, definiremos o que é uma hipersuperfície completa com curvatura escalar nula regular no infinito. Em seguida, demonstraremos um lema que diretamente já faz parte da demonstração do resultado final.

Definição 5.4 *Uma hipersuperfície completa com curvatura escalar nula $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, é dita regular no infinito se existe um subconjunto compacto $K \subset M$ tal que se K' é um outro compacto contendo K então $M \setminus K'$ é a união de r componentes $M_1, \dots, M_r$, chamados de fins, tal que cada fim M_i é regular no infinito.*

Pela definição 5.4, concluímos que uma hipersuperfície completa com curvatura escalar nula regular no infinito é sempre orientável. De fato, pois a parte compacta $K \subset M$ é orientável, ver [15], assim como cada fim já que eles são gráficos de funções, daí para orientar M , oriente K e tome uma orientação para cada fim compatível com essa orientação, ou seja, de forma que a normal definida seja contínua. Logo, nesta seção consideraremos sempre hipersuperfícies orientáveis.

Lema 5.1 *Seja M uma hipersuperfície completa imersa com curvatura escalar nula, regular no infinito. Se M tem dois fins, então eles são paralelos com taxas de crescimento opostas a e $-a$.*

Demonstração Tome R suficientemente grande e seja $M_R = M \cap B_R(0)$ a parte compacta de M complementar aos fins, onde $B_R(0)$ é a bola de raio R e centro na origem, daí $\partial M_R = C_R^1 \cup C_R^2$ consiste de dois gráficos $C_R^1 = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Pi_1 \text{ e } \|x\| = R\}$ e $C_R^2 = \{(y, v(y)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in \Pi_2 \text{ e } \|y\| = R\}$, onde u e v têm taxa de crescimento $a \neq 0$ e $b \neq 0$, respectivamente. Tendo fixado uma orientação em $\mathbb{R}^{n+1}$, orientamos Π_1 e Π_2 tal

que a orientação induzida em suas esferas $\|x\| = R$ e $\|y\| = R$ sejam compatíveis com a orientação de C_R^1 e C_R^2 , respectivamente, como componentes da fronteira de M_R , ou seja, como M_R induz uma orientação aos ciclos C_R^1 e C_R^2 , então a orientação das esferas $\|x\| = R$ e $\|y\| = R$, são tais que se φ_1 e φ_2 são duas aplicações das esferas de Π_1 e Π_2 nos ciclos C_R^1 e C_R^2 , respectivamente, definidas por $\varphi_1(x) = (x, u(x))$ e $\varphi_2(x) = (x, v(x))$, então as aplicações $d\varphi_1(x)$ e $d\varphi_2(x)$ levam bases positivas em bases positivas. Aqui estamos tomando a orientação dos ciclos C_R^1 e C_R^2 com a normal para fora.

Observe que os sinais de a e b na expansão de $u(x)$ e $v(x)$ são determinados pela orientação em Π_1 e Π_2 , pois se h é uma função altura então $h(x) = \langle x, v \rangle$, onde v é um vetor unitário.

Dado um vetor unitário arbitrário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se que

$$Flux(C_R^1; v) + Flux(C_R^2; v) = \oint_{\partial M_R} \langle T_1 \nabla h, \nu \rangle d\sigma = \oint_{M_R} L_1(h) d\mu = 0, \quad (5.1)$$

pela proposição 5.1. Portanto pela proposição 5.2 e pela equação (5.1) temos que

$$\langle v, u_1 \rangle a^2 + \langle v, u_2 \rangle b^2 = 0, \quad (5.2)$$

onde u_i é o vetor normal unitário orientado positivamente a Π_i , $i = 1, 2$.

Seja T um operador ortogonal em $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que T preserve orientação, aplique Π_1 sobrejetivamente em Π_2 e $Tu_1 = u_2$. Como

$$\langle v, u_2 \rangle = \langle v, Tu_1 \rangle = \langle T^t v, u_1 \rangle$$

então (5.2) reduz-se a

$$\langle a^2 v + b^2 T^t v, u_1 \rangle = 0.$$

Daí, $T^t \Pi_1 = \Pi_1$, caso contrário existiria um vetor $v \in \Pi_1$ tal que $T^t v \notin \Pi_1$ com $\langle a^2 v + b^2 T^t v, u_1 \rangle = 0$, o que implica que $a^2 v + b^2 T^t v = v'$ para algum $v' \in \Pi_1$ e portanto $T^t v \in \Pi_1$, contradição. Se $v \in \Pi_1$ então $0 = \langle a^2 T v + b^2 T^t T v, u_1 \rangle = \langle a^2 T v + b^2 v, u_1 \rangle = a^2 \langle T v, u_1 \rangle$, e daí, também temos que $T \Pi_1 = \Pi_1$ e então $\Pi_1 = \Pi_2$ e $u_2 = u_1$ ou $u_2 = -u_1$. Em qualquer caso, os fins são paralelos.

Segue que a relação (5.2) reduz-se a $\langle v, u_1 \rangle (a^2 \pm b^2) = 0$ e fazendo $v = u_1$ temos $a^2 \pm b^2 = 0$ o que é possível somente quando $a^2 = b^2$, pois estamos supondo que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o que implica que $|a| = |b|$. De (5.2) chegamos a $u_2 = -u_1$, o que implica que T restrito a Π_1 é um operador ortogonal que inverte orientação.

Agora, para provar que os fins têm taxas de crescimento opostas, ou seja, têm o mesmo valor absoluto com sinais opostos, suponhamos que as taxas sejam iguais. Daí, os dois fins são assintóticos a menos de uma constante, ou seja, a diferença das expansões no infinito dos fins converge para uma constante, o que implica que existe um ponto de altura máxima ou de altura mínima, e nesse ponto temos que o hiperplano tangente Π encontra-se apenas de um lado da hipersuperfície M , logo pelo teorema 3.5, temos que M tem uma vizinhança do ponto de altura máxima, por exemplo, contida em Π . Seja B o conjunto dos pontos de M que possuem uma vizinhança em M contida em Π . Claramente esse conjunto é aberto, para provar que ele é fechado tome uma seqüência $x_n \in B$ convergindo para um ponto x e provemos que $x \in B$. De fato, pois por continuidade Π é o hiperplano tangente a M em x e Π está acima de M e novamente pelo teorema 3.5 temos que x possui uma vizinhança em M contida em Π . Portanto a componente conexa de M que possui o ponto de altura máxima coincide com Π , assim como um dos fins, mas como os fins são assintóticos a menos de uma constante temos que os fins são planos, o que é uma contradição pois a taxa de crescimento do plano é nula. ■

Um ponto de uma hipersuperfície é flat se todas as curvaturas seccionais nesse ponto são nulas, o que é equivalente a dizer que o posto da aplicação de Gauss é menor do que 2. Agora enunciaremos e demonstraremos o resultado final.

Teorema 5.2 *As únicas hipersuperfícies mergulhadas completas com curvatura escalar nula $M^n \subset R^{n+1}$, livre de pontos flat, que são regulares no infinito e têm dois fins, são as hipersuperfícies de revolução.*

Demonstração Note que se M é livre de pontos flat, então $H_3 \neq 0$ para todo ponto $p \in M$, caso contrário existiria um ponto $p \in M$ tal que $\sigma_2(k) = \sigma_3(k) = 0$, onde k é o vetor curvatura principal de M em p , o que, pelo lema 2.4, implicaria que a aplicação de Gauss nesse ponto teria posto < 2 e daí todas as curvaturas seccionais seriam nulas, ou seja, p seria um ponto flat. Logo pelo teorema 2.3, M é uma hipersuperfície elíptica ou

antielíptica.

Pelo lema 5.1 temos que a hipersuperfície tem dois fins paralelos com taxa de crescimento opostas. Suponhamos que os fins são gráficos sobre o hiperplano horizontal $\Pi_0 = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$. Fazendo uma translação vertical, ou seja, na direção do eixo x_{n+1} , se necessário, podemos assumir que

$$u(x) = h(x) + \mathcal{O}(R^{-\frac{n-2}{2}}); \quad v(x) = h(x) + \mathcal{O}(R^{-\frac{n-2}{2}}), \quad (5.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} h(x) &= a\|x\|^{\frac{4-n}{2}} + a_1, \text{ se } n \neq 4; \\ h(x) &= a \ln \|x\| + a_1, \text{ se } n = 4. \end{aligned}$$

Note que se $n = 3$ ou 4 então podemos considerar $a > 0$, a menos de renomear as funções u e v , pois de (5.3) temos que ou $u(x) \rightarrow +\infty$ ou $v(x) \rightarrow +\infty$, quando $\|x\| \rightarrow +\infty$. E quando $n \geq 5$, podemos considerar, sem perda de generalidade, $a_1 > 0$ e $a < 0$, pois temos que $u(x)$ ou $-v(x)$ convergindo para a_1 , quando $\|x\| \rightarrow +\infty$. Além disso a hipersuperfície M é limitada por dois hiperplanos $x_{n+1} = a_1$ e $x_{n+1} = -a_1$, caso contrário existiria um ponto de altura máxima ou mínima p no interior de M , o que implicaria que o hiperplano tangente a M em p seria horizontal com M abaixo ou acima. Logo pelo corolário 3.2 temos que existe uma vizinhança de p em M contida no hiperplano, e isso contradiz o fato que M é livre de pontos flat. Daí, se $a_1 > 0$ e $a > 0$ então temos que para $\|x\|$ muito grande

$$u(x) = \frac{a}{\|x\|^{\frac{n-4}{2}}} + a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^{\frac{n}{2}}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n-2}{2}}) > a_1,$$

contradição. Portanto, se $a_1 > 0$ então $a < 0$.

Mostremos inicialmente que M é simétrica em relação a Π_0 . Como $u(x) \rightarrow +\infty$ ou $u(x) \rightarrow a_1$ com $u(x) < a_1$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$, então tomando $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que se $\|x\|$ for suficientemente grande então $u(x) + v(x) = \mathcal{O}(\|x\|^{-\frac{n-2}{2}}) < 2t$, $u(x) > t$ e $v(x) < t$, pois nesse caso $v(x) \rightarrow -\infty$ ou $v(x) \rightarrow -a_1$ com $v(x) > -a_1$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$. Se $V = \{\|x\| < R\} \times \mathbb{R}$ e $B = M \cap \partial V = \{(x, x_{n+1}) \in M \mid x_{n+1} = u(x) \text{ ou } v(x) \text{ e } \|x\| = R\}$, então $B_{t+} = \{(x, u(x)) \in M \mid \|x\| = R\}$ e $B_{t-} = \{(x, v(x)) \in$

$M \mid \|x\| = R\}$ o que implica que temos $B_{t+}^* \geq B_{t-}$, pois $2t - u(x) > v(x)$, além disso segue que tanto B_{t+} quanto B_{t-} são gráficos com declividade localmente limitada. Como M tem dois fins regulares então $M \cap \overline{V}$ é compacto com $\partial(M \cap \overline{V}) = M \cap \partial\overline{V}$, pois se $p \in M \cap V$ então $p \in \text{Int } M \cap \overline{V}$, pois V é aberto e se $p \in M \cap \partial V$ então $p \in \partial(M \cap \overline{V})$ já que $T_p M$ e $T_p \partial V$ são transversais, pois e_{n+1} pertence a $T_p \partial V$ mas não pertence a $T_p M$. Portanto pelo teorema 5.1 concluímos que $(M \cap \overline{V})_{t+}$ é também um gráfico com declividade localmente limitada e $(M \cap \overline{V})_{t+}^* \geq (M \cap \overline{V})_{t-}$. Como R é arbitrariamente grande, segue que M_{t+} é um gráfico com declividade limitada e $M_{t+}^* \geq M_{t-}$, para qualquer $t > 0$, além disso, M_{0+} é um gráfico e $M_{0+}^* \geq M_{0-}$, caso contrário, usando o mesmo argumento usado na demonstração do teorema 5.1 para mostrar que o conjunto T era fechado, mostramos que existe um aberto de M contido no plano, o que é uma contradição já que todo ponto do plano é flat.

Trocando x_{n+1} por $-x_{n+1}$, podemos aplicar o mesmo argumento acima, com $v' = -v > -u = u'$ e então $2t - v' > u'$, para obter que $M_{0-}^* \leq M_{0+}$, que é equivalente a $M_{0+}^* \leq M_{0-}$. Portanto M_{0+} e M_{0-} são gráficos sobre Π_0 , com $u(x) = -v(x)$ em todos os pontos x para os quais u e v estejam definidos. Mas como M é completa, um argumento de continuação nos diz que $M_{0+}^* = M_{0-}$.

Mostremos agora que M é rotacionalmente simétrica, primeiro localizando o eixo vertical de simetria.

Caso 1: Para $n = 3$ temos que $u(x) = -v(x)$ e podemos supor que $a > 0$, com

$$u(x) = a\sqrt{\|x\|} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\|x\|}} + \frac{\langle c, x \rangle}{\sqrt{\|x\|^3}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}}).$$

Fazendo $x = y + \beta$ e usando o fato que,

$$(1 - s)^{-\frac{k}{2}} = 1 + \frac{k}{2}s + \mathcal{O}(s^2),$$

quando $s \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{\|y + \beta\|} &= (\|y + \beta\|^2)^{\frac{1}{4}} (\|y\|^2 + 2\langle y, \beta \rangle + \|\beta\|^2)^{\frac{1}{4}} \|y\|^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\frac{\langle y, \beta \rangle}{\|y\|^2} + \frac{\|\beta\|^2}{\|y\|^2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\|y\|} + \frac{1}{2} \frac{\langle y, \beta \rangle}{\sqrt{\|y\|^3}} + \frac{1}{4} \frac{\|\beta\|^2}{\sqrt{\|y\|^3}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

da mesma forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\|y + \beta\|}} &= \frac{1}{\sqrt{\|y\|}} - \frac{1}{2} \frac{\langle y, \beta \rangle}{\sqrt{\|y\|}^5} - \frac{1}{4} \frac{\|\beta\|^2}{\sqrt{\|y\|}^5} + \mathcal{O}(R^{-\frac{5}{2}}), \\ \frac{\langle c, y + \beta \rangle}{\sqrt{\|y + \beta\|}^3} &= \frac{\langle c, y \rangle}{\sqrt{\|y\|}^3} - \frac{3}{2} \frac{\langle c, y \rangle \langle y, \beta \rangle}{\sqrt{\|y\|}^7} - \frac{3}{4} \frac{\|\beta\|^2 \langle c, y \rangle}{\sqrt{\|y\|}^7} \\ &+ \frac{\langle c, \beta \rangle}{\sqrt{\|y\|}^3} - \frac{3}{2} \frac{\langle c, \beta \rangle \langle y, \beta \rangle}{\sqrt{\|y\|}^7} - \frac{3}{4} \frac{\|\beta\|^2 \langle c, \beta \rangle}{\sqrt{\|y\|}^7} + \mathcal{O}(R^{-\frac{7}{2}}), \end{aligned}$$

e finalmente

$$\mathcal{O}(\|y + \beta\|^{-\frac{3}{2}}) \mathcal{O}(\|y\|^{-\frac{3}{2}}).$$

Com isso, chegamos a seguinte expansão para $u(y + \beta)$

$$u(y + \beta) = a\sqrt{\|y\|} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\|y\|}} + \frac{\langle c + \frac{a}{2}\beta, y \rangle}{\sqrt{\|y\|}^3} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}}).$$

Escolhendo $\beta = -\frac{2}{a}c$, e renomeando y como x podemos então assumir que

$$u(x) = a\sqrt{\|x\|} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\|x\|}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}}). \quad (5.4)$$

Mostremos agora que o eixo vertical x_4 é um eixo de simetria de M , mostrando que M é simétrica com relação a qualquer plano vertical contendo o eixo x_4 . Contudo, como a expansão de u é invariante por uma rotação de x , é suficiente mostrar que M é simétrica com relação ao hiperplano $\Pi_0 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$. Considere $B = B^1 \cup B^2$, onde $B^1 = M \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = -\Lambda\}$ e $B^2 = M \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = \Lambda\}$ com $\Lambda \in \mathbb{R}_+$. Para $t \in \mathbb{R}$ considere $\Pi_t = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = t\}$. Mostremos que para Λ suficientemente grande teremos que B_{t+} é um gráfico com declividade localmente limitada e que $B_{t+}^* \geq B_{t-}$, agora estamos considerando altura com respeito ao hiperplano $x_1 = 0$. Analisaremos somente B^2 já que a análise para B^1 é análoga.

De (5.4) temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a}{2} \frac{x_1}{\sqrt{\|x\|}^3} - \frac{a_2}{2} \frac{x_1}{\sqrt{\|x\|}^5} + \mathcal{O}(R^{-\frac{5}{2}}) > 0,$$

para $x_1 \geq t > 0$ e $\|x\|$ suficientemente grande, onde $\mathcal{O}(R^{-\frac{5}{2}})$ é devido à definição 5.3. Se $u(x) = \Lambda$ então de (5.4) segue que

$$a\sqrt{\|x\|} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\|x\|}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}}) = \Lambda \Rightarrow \sqrt{\|x\|} + \frac{a_2}{a\sqrt{\|x\|}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}})\frac{\Lambda - a_1}{a} > 0,$$

que elevando-se ao quadrado temos

$$\|x\| + 2\frac{a_2}{a} + \mathcal{O}(R^{-1}) = \left(\frac{\Lambda - a_1}{a}\right)^2 > 0 \Rightarrow \|x\| + \mathcal{O}(R^{-1}) = A = \text{constante},$$

onde $A = \left(\frac{\Lambda - a_1}{a}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a}$.

Daí para Λ suficientemente grande todo ponto de B^2 tem $\|x\|$ grande. De fato, dado uma constante arbitrária K temos que $M \cap V$ é compacto, onde $V = \{\|x\| \leq K\} \times \mathbb{R}$, pois a hipersuperfície tem dois fins regulares. Então tome Λ maior que a altura máxima de $M \cap V$, portanto se $u(x) = \Lambda$ então $\|x\| > K$. Daí, B_{t+}^2 é um gráfico sobre Π_0 para Λ suficientemente grande, pois a derivada de u em relação a x_1 é positiva e uma aplicação do teorema da função implícita mostra que é localmente um gráfico. E para mostrar que é globalmente um gráfico, basta mostrar que a projeção em relação a x_1 é injetiva. Suponha que não seja, então existe dois pontos pertencente a B_{t+}^2 da forma $(\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, u(\lambda, \alpha))$ e $(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, u(\lambda, \alpha))$ com $\beta > \lambda$, e considere a curva $(t\beta + (1-t)\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, u(t))$. Note que $\|(t\beta + (1-t)\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\| \geq \min\{\|(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\|, \|(\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\|\}$, logo

$$0 = u(1) - u(0) = \int_0^1 \frac{d(u(t))}{dt} dt = \int_0^1 (\beta - \lambda) \frac{\partial u}{\partial x_1} dt > 0,$$

contradição. Note que a normal η à B_{t+}^2 está no plano $P_\Lambda = \{(x, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = \Lambda\}$ e é dado por $\eta = \left(-\frac{\nabla u(x)}{\|\nabla u(x)\|}, 0\right)$, pois a normal à superfície é dada por $N = \frac{(-\nabla u(x), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla u(x)\|^2}}$, que se encontra no mesmo plano vertical que η . Portanto, B_{t+}^2 tem declividade localmente limitada já que $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ para $x_1 > t$ e Λ suficientemente grande.

Além disso, temos que B^2 está a uma certa distância, que diminui a medida que Λ aumenta, de uma esfera tridimensional de raio A centrado na origem em P_Λ . Note que se C é a esfera de raio A centrado na origem em P_Λ , temos que a distância de C_{t+}^* a $C_{\frac{t}{2}-}$ é maior ou igual à $\epsilon(t) > 0$. Segue que se Λ for suficientemente grande teremos que

$B_{t+}^{2*} \geq B_{\frac{t}{2}-}^2$. Mas como $B_{\frac{t}{2}+}$ é um gráfico sobre Π_0 , então segue que $B_{t+}^{2*} \geq B_{t-}^2 \cap \{(x, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > \frac{t}{2}\}$. Logo $B_{t+}^{2*} \geq B_{t-}^2$ e da mesma forma mostramos que $B_{t+}^{1*} \geq B_{t-}^1$. Daí segue que $B_{t+}^* \geq B_{t-}$. Escolhendo $\Omega \times \mathbb{R}$, do teorema 5.1, um cilindro adequado tal que as curvaturas principais de Ω sejam todas maiores ou iguais a zero. Pelo teorema 5.1 temos que $(M \cap \{(x, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x_4| \leq \Lambda\})_{t+}^* \geq (M \cap \{(x, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x_4| \leq \Lambda\})_{t-}$ para Λ suficientemente grande. Assim para qualquer $t > 0$ temos que $M_{t+}^* \geq M_{t-}$ e M_{t+} é um gráfico, o que implica que $M_{0+}^* \geq M_{0-}$. Podemos então repetir o argumento com $-x_1$ no lugar de x_1 para obter que $M_{0-}^* \leq M_{0+}$ que é equivalente a $M_{0+}^* \leq M_{0-}$. Logo $M_{0+}^* = M_{0-}$ e então fica provado o teorema para $n = 3$.

Caso 2: Para $n = 4$ o argumento é análogo já que podemos supor $a > 0$ com

$$u(x) = a \ln \|x\| + a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^2} + \mathcal{O}(\|x\|^{-2})$$

e fazer uma translação para podermos considerar

$$u(x) = a \ln \|x\| + a_1 + \mathcal{O}(\|x\|^{-2}),$$

e então

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{ax_1}{\|x\|^2} + \mathcal{O}(\|x\|^{-3}) > 0$$

para $x_1 \geq t$ e $\|x\|$ suficientemente grande.

Além disso, se $u(x) = \Lambda$ então $a \ln \|x\| + a_1 + \mathcal{O}(R^{-2}) = \Lambda \Rightarrow \ln(\|x\|e^{\mathcal{O}(R^{-2})}) = \frac{\Lambda - a_1}{a} \Rightarrow \|x\|e^{\mathcal{O}(R^{-2})} = e^{\frac{\Lambda - a_1}{a}} = C$, como $e^{\mathcal{O}(R^{-2})} = 1 + \mathcal{O}(R^{-2})$ segue que $\|x\| = C + \mathcal{O}(R^{-1})$.

Caso 3: Para $n \geq 5$ o argumento também é análogo ao anterior, com uma pequena diferença.

Neste caso temos que

$$-v(x) = u(x) = \frac{a}{\|x\|^{\frac{n}{2}-2}} + a_1 + \frac{\langle c, x \rangle}{\|x\|^{\frac{n}{2}}} + \mathcal{O}(\|x\|^{-\frac{n}{2}}).$$

Da mesma forma que anteriormente, podemos fazer uma translação e considerar que

$$u(x) = \frac{a}{\|x\|^{\frac{n}{2}-2}} + a_1 + \mathcal{O}(\|x\|^{-\frac{n}{2}}) \quad (5.5)$$

Note que quando $\|x\| \rightarrow \infty$ então $u(x) \rightarrow a_1$. Então podemos considerar, sem perda de generalidade, que $a_1 > 0$. Além disso a hipersuperfície M é limitada por dois hiperplanos $x_{n+1} = a_1$ e $x_{n+1} = -a_1$, caso contrário existiria um ponto de altura máxima p no interior de M o que implica que o hiperplano tangente à M em p é horizontal com M abaixo. Logo pelo exemplo 3.2 temos que existe uma vizinhança de p em M contida no hiperplano, que contradiz o fato que M é livre de pontos flat.

Daí, como no caso 1, basta mostrar que M é simétrica em relação ao hiperplano vertical $\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 = 0\}$. Então para $\Lambda < a_1$ próximo de a_1 considere $B = B^1 \cup B^2$, onde $B^1 = M \cap \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_4 = -\Lambda\}$ e $B^2 = M \cap \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_4 = \Lambda\}$ com $\Lambda \in \mathbb{R}_+$. Para $t \in \mathbb{R}$ seja $\Pi_t = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 = t\}$. De (5.5) temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a \frac{4-n}{2} \frac{x_1}{\|x\|^{\frac{n}{2}}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}-1}) > 0$$

para $x_1 \geq t > 0$ e $\|x\|$ suficientemente grande. Se $u(x) = \Lambda$ de (5.5) segue que

$$\begin{aligned} \frac{a}{\|x\|^{\frac{n}{2}-2}} + a_1 + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) &= \Lambda \Rightarrow \frac{1}{\|x\|^{\frac{n-4}{2}}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) \|x\|^{\frac{n-4}{2}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) \frac{\Lambda - a_1}{a} = A \\ \Rightarrow (R^{\frac{4-n}{2}} + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}))^{\frac{2}{4-n}} &= A^{\frac{2}{4-n}} \Rightarrow R(1 + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) R^{\frac{n-4}{2}})^{\frac{2}{4-n}} A^{\frac{2}{4-n}} \\ &\Rightarrow R - A^{\frac{2}{4-n}} R(1 - (1 + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) R^{\frac{n-4}{2}})^{\frac{2}{4-n}}) \end{aligned}$$

pelo teorema do valor médio

$$\begin{aligned} 1 - CR^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n-4}{2}} &\leq (1 + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) R^{\frac{n-4}{2}})^{\frac{2}{4-n}} \leq 1 + CR^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n-4}{2}} = CR^{-2} \\ &\Rightarrow 1 - (1 + \mathcal{O}(R^{-\frac{n}{2}}) R^{\frac{n-4}{2}})^{\frac{2}{4-n}} \leq CR^{-2} \\ R - A^{\frac{2}{4-n}} &\leq RCR^{-2} = CR^{-1} \Rightarrow \|x\| = A^{\frac{2}{4-n}} + \mathcal{O}(R^{-1}). \end{aligned}$$

Daí para Λ suficientemente próximo de a_1 todo ponto de B^2 tem $\|x\|$ suficientemente grande. De fato, dado uma constante arbitrária K temos que $M \cap V$ é compacto, onde $V = \{\|x\| \leq K\} \times \mathbb{R}$, pois a hipersuperfície tem dois fins regulares. Portanto, $M \cap V$ atinge uma altura máxima que é menor que a_1 , pois a hipersuperfície está limitada pelo hiperplano $x_{n+1} = a_1$. Daí, tome Λ maior que a altura máxima e menor que a_1 , o que implica que se $u(x) = \Lambda$ então $\|x\| > K$. Logo, podemos fazer $\|x\|$ suficientemente

grande tomando apenas Λ suficientemente próximo de a_1 . Logo, B_{t+}^2 é um gráfico sobre Π_0 para Λ suficientemente próximo de a_1 . Note que a normal η à B_{t+}^2 está no plano $P_\Lambda = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = \Lambda\}$ e é dado por $\eta = (-\nabla u(x), 0)$, pois a normal à superfície é dada por $N = (-\nabla u(x), +1)$ que se encontra no mesmo plano vertical que η . Portanto, B_{t+}^2 tem declividade localmente limitada já que $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ para $x_1 > t$ e Λ suficientemente próximo de a_1 . Portanto, pelo mesmo processo usado no caso 1, mostramos que $B_{t+}^* \geq B_{t-}$ tomando Λ suficientemente próximo de a_1 e mostramos que $M_{0+}^* = M_{0-}$. Logo o teorema está provado para $n \geq 5$. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARAÚJO, H. J. M., *A Rigidez das Esferas para uma Função de Curvatura Constante*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 1994.
- [2] CARMO, M. DO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, N. J., Prentice-Hall, 1976.
- [3] CARMO, M. DO, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [4] GÅRDING, L., *An inequality of hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8**, 957 – 965, 1959.
- [5] GEL'FAND, I. M., *Lectures on Linear Algebra*. New York: Dover Publications, Inc. 1989.
- [6] HOUNIE, J. E LEITE, M. L., *Two-ended Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature*, Indiana Univ. Math. J. **48**, 867 – 882, 1999.
- [7] HOUNIE, J. E LEITE, M. L., *The maximum principle for hypersurfaces with vanishing curvature functions*, J. Diff. Geom. **41**, 247 – 258, 1995.
- [8] LEÃO, K. F., *O Princípio da Tangência e Aplicações*, Informes de Matemática, série E-007/83, Rio de Janeiro, IMPA, 1983.
- [9] LEITE, M. L., *Rotational hypersurfaces on space forms with constant scalar curvature*, Manuscripta Math. **67**, 289 – 304, 1990.
- [10] LEITE, M. L., *The Tangency Principle for Hypersurfaces with a null Intermediate Curvature*, XI Escola de Geometria Diferencial. Universidade Federal Fluminense - Instituto de Matemática, 2000.

- [11] PROTTER, M. E WEINBERGER, H., *Maximum principles in differential equations*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. 1967.
- [12] REILLY, R., *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*. J. Diff. Geom. **8**, 465-477, 1973.
- [13] SCHOEN, R., *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Diff. Geom. **18**, 791 – 809, 1983.
- [14] SOTOMAYOR, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [15] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Houston, Publish or Perish, 1979.