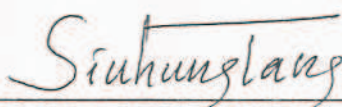


Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


Fernando Antonio Figueiredo Cardoso da Silva, DMAT-UFPE
Orientador


Eduardo Shirlippe Góes Leandro, DMAT-UFPE


Siu-Hung Tang, DM-University of Kentucky-USA

**TEORIA DE ESPALHAMENTO EM VARIEDADES
ASSINTOTICAMENTE HIPERBÓLICAS**

Por
Raphael Falcão da Hora

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Julho - 2006

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

**TEORIA DE
ESPALHAMENTO EM
VARIEDADES
ASSINTOTICAMENTE
HIPERBÓLICAS**

por

Raphael Falcão da Hora

sob orientação do

Prof. Dr. Fernando Cardoso

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE
Julho/2006

Hora, Raphael Falcão da
Teoria de espalhamento em variedades assintoticamente
hiperbólicas. / Raphael Falcão da Hora. - Recife: O autor, 2006.
xx, 71 folhas.: il., fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Espalhamento
(matemática). 3. Operadores Pseudodiferenciais. 4. Variedades
Assintoticamente Hiperbólicas.

513.353

CDD (22.ed.)

ME12006-010

Teoria de Espalhamento em Variedades Assintoticamente Hiperbólicas

por

Raphael Falcão da Hora

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Siu Hung Tang

Prof. Dr. Eduardo Leandro

Prof. Dr. Fernando Cardoso
Orientador

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho/2006

Dedicatória

Amigo é coisa para se guardar Debaixo de 7 chaves,
Dentro do coração,
assim falava a canção que na América ouvi,
mas quem cantava chorou ao ver o seu amigo partir,
mas quem ficou, no pensamento voou,
o seu canto que o outro lembrou
E quem voou no pensamento ficou,
uma lembrança que o outro cantou.
Amigo é coisa para se guardar
No lado esquerdo do peito,
mesmo que o tempo e a distância digam não,
mesmo esquecendo a canção.
O que importa é ouvir a voz que vem do coração.
Seja o que vier,
venha o que vier
Qualquer dia amigo eu volto pra te encontrar
Qualquer dia amigo, a gente vai se encontrar.

Canção da América/Milton Nascimento

Para meu cão, amigo e companheiro fiel Don Vito Corleone.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de estar no mundo. À minha esposa amada Elaine, aos meus pais, Admilson e Elisa, aos meus irmãos Missinho e Rodrigo, Eli, Wilson, e à minha família, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e respeito.

Aos amigos do Departamento de Matemática da UFPE, em especial: Aderbal “Cauchy-Schwartz”, Alexandre Simas “Static”, Anete Soares, Chicão Valadares, Cláudia Lira, Débora Lopes, Evaneide Carneiro, Fátima Bacelar, Flávio Tunico, Frederico “Elihimas”, Gersonilo Oliveira, Giovana Siracusa, Hélio Porto, Henrique Vitório, Hugo Leonardo, Humberto Viglioni “Víglio”, João Paulo “Jesus Christ”, Karla Ferreira, Lucas Lapa “O Estranho”, Manoel Ronaldo, Oscar, Prof. Antonio Carlos, Prof. Claudio Cuevas, Prof. Marcus Vinícius, Prof. Sérgio Santa Cruz, Prof. Sóstenes Lins, Ricardo Machado, Rodrigo Gondim, Tiago Duque, Wallisom Rosa.

Aos amigos do Salesiano, particularmente aos meus primeiros alunos Christiane Siqueira Campos, Cícero Tiago “C.T.”, Dênis Henrique, Eduardo Fonseca, Fernando Jorge “Cholinha”, Flávio Bonfim “Buiú”, João Thiago “Cabeça”, Luciana Valões, Marcos André “Down”, Mariana Oliveira. Aos amigos da nova aliança Cláudia Fell, Juliana e Mariana Zaidan, Paula Magalhães.

Aos amigos e familiares de Água Preta, em particular André Luis e Ulisseia, Andrezinho, Juliana, Renata Priscila, Tia Cira e Tio Nivaldo, Marcos André e Isis, Ednalva e Misso, Pereira Neto, Maria.

Aos amigos do Mercado da Boa Vista, especialmente ao grande Mestre Antonio Macarrão com quem tanto aprendi, à Dudu Trick-Trick, à Glaucy Bebê, ao grande Paulinho Tchatchatcha, e à Marquinho “Pig Face”.

Meus agradecimentos especiais a:

Minha esposa Elaine, pelo amor, amizade e companheirismo;

Meus Pais Admilson e Elisa, pelo amor, carinho e ajuda nos momentos difíceis;

Prof. Fernando Cardoso, pela amizade e pela Matemática que me ensinou;

Prof. Siu Hung Tang, pelas valiosas anotações fornecidas no seminário de Teoria de Espalhamento;

Eudes Naziazeno, pela bela amizade que formamos e por ter me ensinado a sonhar alto.

Resumo

Nesta Dissertação de mestrado descrevemos aspectos da Teoria clássica dos operadores pseudodiferenciais, apresentando suas definições básicas e o cálculo pseudodiferencial clássico. Em seguida introduzimos as variedades assintoticamente hiperbólicas, e damos importantes resultados obtidos por R. Melrose e R. Mazzeo sobre extensões meromorfas do resolvente modificado, a quase todo o plano complexo. Finalmente fazemos referência a resultados obtidos por A. Sá Barreto e M. Joshi sobre a Matriz de Espalhamento.

Palavras Chave: Teoria de Espalhamento, Operadores Pseudodiferenciais, Variedades Assintoticamente Hiperbólicas, Resolvente, Matriz de Espalhamento.

Abstract

In this Masters Thesis we describe aspects of the theory of pseudodifferential operators, presenting its basic definitions and the classical pseudodifferential calculus. Then we introduce the asymptotically hyperbolic manifolds, and we give important results obtained by R. Melrose and R. Mazzeo about meromorphic extensions of the modified resolvent, to almost all the complex plane. Finally we present some important results obtained by A. Sá Barreto and M. Joshi about the scattering matrix.

Key Words: Scattering Theory, Pseudodifferential Operators, Asymptotically Hyperbolic Manifolds, Resolvent, Scattering Matrix.

Sumário

Introdução	3
1 A Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev	6
1.1 A Transformada de Fourier	6
1.2 Espaços de Sobolev	12
2 Operadores Pseudodiferenciais	14
2.1 Parametrizes de Equações Elípticas	14
2.2 Definições e Relações entre Símbolo e Núcleo	21
2.3 O Cálculo Pseudodiferencial	29
3 Variedades Assintoticamente Hiperbólicas	41
4 Construção do Resolvente	47
4.1 Símbolos	47
4.2 Os Espaços Blow-up	51
4.3 O Cálculo dos Símbolos	55
4.4 Construção de Parametrizes	60
5 A Matriz de Espalhamento	66
Bibliografia	72

Introdução

Nesta Dissertação de mestrado descrevemos aspectos da Teoria clássica dos operadores pseudodiferenciais, apresentando suas definições básicas e o cálculo pseudodiferencial clássico. Em seguida introduzimos as variedades assintoticamente hiperbólicas, e damos importantes resultados obtidos por R. Melrose e R. Mazzeo sobre extensões meromorfas do resolvente modificado, a quase todo o plano complexo. Finalmente fazemos referência a resultados obtidos por A. Sá Barreto e M. Joshi sobre a Matriz de Espalhamento.

O primeiro capítulo contém um resumo sobre a Transformada de Fourier e espaços de Sobolev, com o resultados elementares que serão utilizados no decorrer do trabalho.

O capítulo seguinte, o 2, damos uma breve introdução à teoria clássica dos operadores pseudodiferenciais. Começamos com uma das motivações que levaram à formulação desta teoria: a obtenção de soluções especiais de equações diferenciais parciais, mais precisamente a construção de parametrizes de equações elípticas. Nas seções posteriores apresentamos o cálculo pseudodiferencial clássico, definindo o transposto e o adjunto de um operador pseudodiferencial, e a composição de operadores pseudodiferenciais. Mais detalhes sobre esta Teoria podem ser encontrados em Treves[5] e Hörmander[4]. No capítulo 3 consideramos as variedades assintoticamente hiperbólicas, que são variedades compactas X com fronteira, $\partial X = M$, com uma métrica completa g em seu interior, que pode ser escrita na forma $g = \rho^{-2}h$ numa vizinhança da fronteira ∂X de X , onde ρ é uma função que define ∂X , e h é uma métrica C^∞ em $\bar{X}$. Em particular, espaços hiperbólicos são exemplos importantes dessas variedades. Estas variedades, primeiramente consideradas por Richard Melrose, fornecem importantes aplicações em Teoria de Espalhamento.

O capítulo 4 é devotado à construção e extensões meromorfas do resolvente. Todo este capítulo foi inspirado no artigo de Richard Melrose e Rafe Mazzeo [1]. Introduzimos os espaços “blow-up”, considerados primeiramente por Richard Melrose, que são espaços que têm o objetivo de excluir algumas singularidades indesejáveis quando tentamos obter uma extensão meromorfa

do resolvente. Os principais resultados deste capítulo não estão com suas demonstrações completas, quisemos apenas fornecer os seus principais argumentos, uma vez que nosso primordial interesse foram as idéias que estão nestas demonstrações e não os seus detalhes que envolvem uma bagagem matemática mais sofisticada.

Finalmente no último capítulo, o 5, damos uma breve introdução da Matriz de Espalhamento. Construímos esta matriz e apresentamos suas propriedades básicas. Finalizamos fornecendo, sem demonstrações (pelo mesmo motivo acima) importantes resultados obtidos por Antônio Sá Barreto e Mark Joshi em [7].

Capítulo 1

A Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev

1.1 A Transformada de Fourier

Definição 1.1.1 Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier, $\hat{f}$, é a função contínua limitada em $\mathbb{R}^n$ definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.1.1)$$

Observação 1.1.1 Temos que $|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Se $\hat{f}$ também for integrável, podemos expressar f em termos de $\hat{f}$ pela fórmula inversa de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (1.1.2)$$

Provaremos esta fórmula adiante, antes consideremos funções de um subespaço de C^∞ que contém C_0^∞ .

Definição 1.1.2 Denote por $\mathcal{S}$, ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço vetorial das funções $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que para todos multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_x |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| < \infty, \quad (1.1.3)$$

onde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$ com $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$. A topologia de $\mathcal{S}$ é definida pelas seminormas do lado esquerdo de (1.1.3), que fazem $\mathcal{S}$ ser um espaço de Fréchet.

A importância de considerarmos a classe $\mathcal{S}$ é devida ao seguinte resultado, onde usamos a notação $D_j = -i\partial_j$ que é mais conveniente neste momento. Note que $D_j\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, $x_j\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, e que $\mathcal{S} \subset L^1$.

Lema 1.1.1 *A transformada de Fourier $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ vai de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ continuamente. A transformada de Fourier de $D_j\phi$ é $\xi_j\hat{\phi}(\xi)$, e a transformada de Fourier de $x_j\phi$ é $-D_j\hat{\phi}$.*

Demonstração:

Diferenciando (1.1.1) obtemos

$$D^\alpha \hat{\phi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha \phi(x) dx$$

e isto pode ser feito, pois a integral obtida é uniformemente convergente. Assim $\hat{\phi} \in C^\infty$ e $D^\alpha \hat{\phi}$ é a transformada de Fourier de $(-x)^\alpha \phi$. Integrando por partes obtemos

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\phi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D^\beta ((-x)^\alpha \phi(x)) dx. \quad (1.1.4)$$

Essas operações são válidas, já que $\phi \in \mathcal{S}$. Logo

$$\sup |\xi^\beta D^\alpha \hat{\phi}(\xi)| \leq \sup_x (1 + |x|)^{n+1} |D^\beta ((-x)^\alpha \phi(x))|$$

onde $C = \int (1 + |x|)^{-n-1} dx$, assim a transformada de Fourier vai de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ continuamente. Quando $\alpha = 0$ obtemos de (1.1.4) que $\xi^\beta \hat{\phi}$ é a transformada de Fourier de $D^\beta \phi$, e isto termina a demonstração. ■

Lema 1.1.2 *Se $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é uma aplicação linear tal que*

$$TD_j\phi = D_jT\phi, \quad Tx_j\phi = x_jT\phi, \quad j = 1, \dots, n, \quad \phi \in \mathcal{S},$$

então $T\phi = c\phi$ para alguma constante c .

Demonstração:

Se $\phi \in \mathcal{S}$ e $\phi(y) = 0$, então podemos escrever

$$\phi(x) = \sum (x_j - y_j) \phi_j(x)$$

onde $\phi_j \in \mathcal{S}$. De fato, podemos tomar $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty$, e para $x \neq y$ podemos tomar $\phi_j(x) = \phi(x)(x_j - y_j)|x - y|^{-2}$ que se comporta em ∞ como uma função em $\mathcal{S}$. Combinando essas duas escolhas por meio da partição da unidade, obtemos ϕ_j com as propriedades desejadas. Assim

$$T\phi(x) = \sum (x_j - y_j) T\phi_j(x) = 0 \quad \text{se} \quad x = y.$$

Segue que para toda $\phi \in \mathcal{S}$

$$T\phi(x) = c(x)\phi(x)$$

onde c é independente de ϕ . Tomando $\phi \neq 0$ em todos os pontos, obtemos $c \in \mathcal{C}^\infty$. Agora

$$0 = D_j T\phi - T D_j \phi = (D_j c)\phi, \quad \phi \in \mathcal{S},$$

assim c tem que ser uma constante. ■

Teorema 1.1.1 *A transformada de Fourier $F : \phi \rightarrow \hat{\phi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ com inversa dada pela fórmula inversa de Fourier (1.1.2).*

Demonstração:

Pelo Lema 1.1.1 F^2 vai de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e anticomuta com D_j e x_j . Com a notação $R\phi(x) = \phi(-x)$ concluímos do Lema 1.1.2 aplicado à $T = RF^2$ que $RF^2 = c$. Para determinar c , podemos tomar $\phi(x) = \exp(-|x|^2/2)$, que é uma função de $\mathcal{S}$. Então $(x_j + iD_j)\phi = 0$ logo $(-D_j + i\xi_j)\hat{\phi}(\xi) = 0, j = 1, \dots, n$. Assim $\hat{\phi} = c_1\phi$, onde $c_1 = \hat{\phi}(0) = (2\pi)^{n/2}$. Segue que $F^2\phi = c_1^2\phi$, donde $c = c_1^2 = (2\pi)^n$, isto completa a demonstração. ■

Ao invés de usar o Lema 1.1.2, poderíamos verificar diretamente que a fórmula inversa de Fourier é válida para alguma constante c ao invés de $(2\pi)^n$. O que está envolvido é calcular a integral dupla

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \int \phi(y) e^{-i\langle y, \xi \rangle} dy, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Como a integral dupla acima pode não convergir absolutamente, a ordem dos fatores de integração não pode ser invertida. Assim precisamos introduzir

um fator, que é uma função de ξ , para que haja convergência. Logo escolha $\psi \in \mathcal{S}$ com $\psi(0) = 1$, e note que pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \int \hat{\phi}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \psi(\epsilon \xi) \hat{\phi}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \psi(\epsilon \xi) \phi(y) e^{i\langle x-y, \xi \rangle} d\xi dy. \end{aligned}$$

Nesta integral dupla absolutamente convergente, podemos integrar com respeito à ξ e obtemos

$$\begin{aligned} \int \hat{\phi}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \phi(y) \hat{\psi}((x-y)/\epsilon) dy / \epsilon^n \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \phi(x + \epsilon z) \hat{\psi}(z) dz = \phi(x) \int \hat{\psi}(z) dz. \end{aligned}$$

Provaremos algumas propriedades fundamentais da transformada de Fourier em $\mathcal{S}$.

Teorema 1.1.2 *Se ϕ e ψ estão em $\mathcal{S}$, então*

$$\int \hat{\phi} \psi dx = \int \phi \hat{\psi} dx, \quad (1.1.5)$$

$$\int \phi \bar{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi} \bar{\hat{\psi}} dx \quad (\text{Formula de Parseval}) \quad (1.1.6)$$

$$\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi} \hat{\psi}, \quad (1.1.7)$$

$$\widehat{\phi \psi} = (2\pi)^{-n} \hat{\phi} * \hat{\psi}. \quad (1.1.8)$$

Demonstração:

Ambos os lado de (1.1.5) são iguais a integral dupla

$$\int \int \phi(x) \psi(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx d\xi.$$

Para provar (1.1.6) considere $\chi = (2\pi)^{-n} \bar{\hat{\psi}}$ e obtemos, usando a fórmula inversa de Fourier,

$$\overline{\hat{\chi}(\xi)} = (2\pi)^{-n} \int \hat{\psi}(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx = \psi(\xi).$$

Assim (1.1.6) segue se aplicamos (1.1.5) com χ no lugar de ψ , a prova de (1.1.7) segue de

$$\int \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \phi(x-y) \psi(y) dy dx = \int \int e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} \phi(x-y) e^{-i\langle y, \xi \rangle} \psi(y) dy dx.$$

Finalmente para obtermos (1.1.8) notamos que a transformada de Fourier de $\widehat{\phi\psi}$ é $(2\pi)^n \phi(-x) \psi(-x)$ e que a transformada de Fourier de $\hat{\phi} * \hat{\psi}$ é $(2\pi)^n \phi(-x) (2\pi)^n \psi(-x)$, devido a (1.1.7) e a fórmula inversa de Fourier. Isso completa a demonstração. ■

Definição 1.1.3 *Uma forma linear contínua u em $\mathcal{S}$ é chamada uma distribuição temperada. O conjunto de todas as distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'$.*

A restrição de uma distribuição temperada à $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é claramente uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Podemos de fato identificar $\mathcal{S}'$ com um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, pois o Lema abaixo mostra que se uma distribuição $u \in \mathcal{S}'$ anula-se em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então esta também se anula em $\mathcal{S}$.

Lema 1.1.3 $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}$.

Demonstração:

Seja $\phi \in \mathcal{S}$ e tome $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $\psi(x) = 1$ para $|x| \leq 1$. Ponha $\phi_\epsilon(x) = \phi(x)\psi(\epsilon x)$. Claramente $\phi_\epsilon \in \mathcal{C}_0^\infty$, e como

$$\phi_\epsilon(x) - \phi(x) = \phi(x)(\psi(\epsilon x) - 1) = 0 \quad \text{se} \quad |x| < 1/\epsilon,$$

concluimos que $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$ em $\mathcal{S}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Exemplos de elementos em $\mathcal{S}'$ são medidas $d\mu$ tais que, para algum m ,

$$\int (1 + |x|)^{-m} |d\mu(x)| < \infty.$$

Em particular, isso implica que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ para todo p . É também claro que $\mathcal{S}'$ é fechado com relação a diferenciação e multiplicação por polinômios ou funções em $\mathcal{S}$.

Definição 1.1.4 *Se $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier de u é definida por*

$$\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (1.1.9)$$

Segue do Lema 1.1.1 que $\hat{u} \in \mathcal{S}'$, e como a demonstração do Lema 1.1.1 é válida para $\phi, \psi \in L^1$, a definição acima está de acordo se $f \in L^1$.

A fórmula inversa de Fourier provada no Teorema 1.1.1 diz que

$$\hat{\check{\phi}} = (2\pi)^n \check{\phi}, \quad \text{se } \phi \in \mathcal{S}, \quad \check{\phi} = \phi(-x).$$

Se u está em $\mathcal{S}'$, obtemos que

$$\hat{u}(\phi) = u(\hat{\check{\phi}}) = (2\pi)^n u(\check{\phi}) = (2\pi)^n \check{u}(\phi).$$

Aqui $\check{u}$ é a composição de u com $x \rightarrow -x$. Assim temos

Teorema 1.1.3 *A transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathcal{S}'$ (com a topologia fraca), e a fórmula inversa de Fourier $\hat{u} = (2\pi)^n \check{u}$ é válida para todo $u \in \mathcal{S}'$.*

Em particular, se $u \in L^1$ e $\hat{u} \in L^1$, então a fórmula inversa de Fourier é também válida para quase todo x .

Definição 1.1.5 *Denotamos por $\mathcal{E}(X)$ o espaço $\mathcal{C}^\infty(X)$ equipado com a topologia definida pelas semi-normas*

$$\phi \rightarrow \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \phi|,$$

onde K varia sobre todos os subconjuntos compactos de X e k sobre todos os inteiros ≥ 0 .

O espaço dual a $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{E}'(X)$, é o espaço das distribuições com suporte compacto em X é denotado por $\mathcal{E}'(X)$.

Teorema 1.1.4 *A transformada de Fourier de uma distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ é uma função*

$$\hat{u}(\xi) = u_x(e^{-i\langle x, \xi \rangle}). \quad (1.1.10)$$

O lado direito é também definido para todo vetor complexo $\xi \in \mathbb{C}^n$ e é uma função analítica inteira de ξ , chamada a transformada de Fourier-Laplace de u .

1.2 Espaços de Sobolev

Nas seguintes definições s denota um número real arbitrário.

$H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$: o espaço das distribuições temperadas u em $\mathbb{R}^n$, cuja transformada de Fourier $\hat{u}$ é quadrado-integrável em $\mathbb{R}_n$ (dual de $\mathbb{R}^n$) para a medida $(1 + |\xi|^2)^s d\xi$.

$(u, v)_s$: o produto interno em H^s ,

$$(u, v)_s = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

$\|u\|_s = [(u, u)_s]^{1/2}$: a norma em H^s , que é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno $(\cdot, \cdot)_s$.

$H_c^s(K)$: o subespaço de H^s que consiste das distribuições com suporte no compacto K ; $H_c^s(K)$ é um subespaço linear fechado de H^s .

$H_c^s(\Omega)$: a união dos espaços $H_c^s(K)$ para K variando na coleção de todos os subconjuntos compactos Ω .

$H_{loc}^s(\Omega)$: o espaço das distribuições u em Ω tais que $\phi u \in H^s$ para qualquer $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

A topologia de $H_{loc}^s(\Omega)$ é aquela definida pelas seminormas $u \mapsto \|\phi u\|_s$, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. É suficiente tomar ϕ variando no conjunto $\{\phi_\nu\}$ tal que os conjuntos compactos encaixados $K_\nu = \{x \in \Omega; \phi_\nu(x) = 1\}$ de Ω , i.e., $K_\nu \subset K_{\nu+1}$ e todo compacto de Ω está contido em K_ν para algum ν , e $\phi_\nu \leq \phi_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \dots$. Assim vemos que $H_{loc}^s(\Omega)$ é um espaço (reflexivo) de Fréchet.

A topologia de H_c^s é definida da seguinte forma: para cada $K \subset\subset \Omega$, $H_c^s(K)$ é equipado com a estrutura de espaço de Hilbert introduzida por H^s . Então um subconjunto convexo em $H_c^s(\Omega)$ é aberto se e só se sua interseção com todo $H_c^s(K)$ é aberto.

Temos as seguintes aplicações lineares contínuas injetivas com imagens densas

$$\mathcal{S} \hookrightarrow H^s \hookrightarrow H^{s'} \hookrightarrow \mathcal{S}' \quad (s' \leq s),$$

$$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \hookrightarrow H_c^s(\Omega) \hookrightarrow H_{loc}^s(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Temos ainda as seguintes igualdades de conjuntos (a primeira é topológica);

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \cap_s H_{loc}^s(\Omega), \quad \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \cap_s H_c^s(\Omega) \quad (1.2.1)$$

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \cup_s H_c^s(\Omega), \quad \mathcal{D}'^F(\Omega) = \cup_s H_{loc}^s(\Omega), \quad (1.2.2)$$

onde $\mathcal{D}'^F(\Omega)$ denota o espaço das distribuições de ordem finita em Ω .

$(1 - \Delta)^s$: o operador convolução

$$u(x) \mapsto (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.2.3)$$

Quando s varia sobre $\mathbb{R}$, $(1 - \Delta)^s$ forma um grupo de automorfismos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dado qualquer $t \in \mathbb{R}$, $(1 - \Delta)^s$ é uma isometria de H^t em H^{t-2s} sobrejetivamente, em particular, de H^s em H^{-s} .

Capítulo 2

Operadores Pseudodiferenciais

2.1 Parametrizes de Equações Elípticas

Considere uma equação diferencial parcial linear com coeficientes constantes

$$P(D)u = f, \quad (2.1.1)$$

onde f é uma função C^∞ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, i.e., $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aqui usamos a mesma notação usada anteriormente $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_i = -i\partial_i$.

$P(\xi)$ é um polinômio com coeficientes complexos em n variáveis complexas. O primeiro método que pensamos usar para resolver a equação (2.1.1) é tomar a transformada de Fourier, e assim transformar o problema diferencial (2.1.1) num problema de divisão

$$P(\xi)\hat{u} = \hat{f}, \quad (2.1.2)$$

donde

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi, \quad (2.1.3)$$

que deveria ser a solução de (2.1.1). Infelizmente a integral do lado direito de (2.1.3) não faz, em geral, sentido algum, devido aos zeros do polinômio P no denominador do integrando. Entretanto, existem alguns casos que uma pequena modificação da fórmula (2.1.3) pode ainda dar uma solução aproximada. Talvez o mais importante desses casos seja quando $P(D)$, ou equivalentemente, o polinômio $P(\xi)$, é elíptico.

Definição 2.1.1 *Um polinômio homogêneo $P(\xi)$ em n variáveis, com coeficientes complexos, é chamado elíptico se $P(\xi) \neq 0$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. Um*

polinômio não homogêneo é chamado elítico se sua parte homogênea de maior grau (chamada de símbolo principal) é elíptica.

Denotemos por P_m o símbolo principal de P , onde m é o grau de P . Em geral, como P_m é homogêneo de grau m , o conjunto dos seus zeros forma um cone C_{P_m} , chamado de cone característico. Dizer que P é elítico é o mesmo que dizer que esse cone característico consiste de um único ponto, a origem. Quando $n = 1$ todos os operadores diferenciais com coeficientes não nulos constantes são elíticos. Quando $n > 1$, importantes exemplos de operadores elíticos são os operadores de Laplace $\Delta = (\partial_1)^2 + \dots + (\partial_n)^2$. O símbolo principal do operador de Laplace é

$$-|\xi|^2 = -\xi_1^2 - \dots - \xi_n^2.$$

Uma importante propriedade dos polinômios elíticos é a seguinte:

Teorema 2.1.1 *Se P é elítico, então o conjunto dos zeros do polinômio $P(\xi)$ em $\mathbb{R}^n$ é compacto.*

Demonstração:

Seja $V_P = \{\xi \in \mathbb{R}^n; P(\xi) = 0\}$. Se P é elítico, $P_m(\xi)$ não se anula na esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, logo $P_m(\xi) \geq c > 0$ nesta esfera. Pela homogeneidade temos que

$$|P_m(\xi)| \geq c|\xi|^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1.4)$$

Por outro lado, temos que $|P(\xi) - P_m(\xi)| < C|\xi|^{m-1}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| > 1$. Assim, se $\xi \in V_P$, $|\xi| > 1$, temos que

$$c|\xi|^m \leq |P_m(\xi)| = |P_m(\xi) - P(\xi)| \leq C|\xi|^{m-1},$$

donde $|\xi| \leq C/c$. ■

Observação 2.1.1 *Não é verdade que os polinômios elíticos são os únicos com conjunto de zeros compacto em $\mathbb{R}^n$. O polinômio $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 1$ não é elítico em $\mathbb{R}^2$ e não possui zeros neste.*

Definição 2.1.2 *Uma distribuição $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é chamada solução fundamental do operador diferencial $P = \sum a_\alpha \partial^\alpha$ com coeficientes (complexos) constantes se $PE = \delta_0$. (δ_0 é a medida de Dirac em 0)*

Continuamos assumindo que P é elíptico e seja ρ um número positivo tal que os zeros de $P(\xi)$ estejam contidos na esfera centrada na origem de raio ρ . Temos agora o direito de considerar a integral

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \chi(\xi) d\xi, \quad (2.1.5)$$

onde $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) = 0$ se $|\xi| \leq \rho$, $\chi(\xi) = 1$ se $|\xi| > \rho$. Devido a presença da função característica χ , a função V não pode ser considerada uma solução exata da equação (2.1.1), mas veremos que ela não difere “substantialmente” de uma solução. Temos que

$$P(D)v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \chi(\xi) d\xi = f(x) - Sf(x), \quad (2.1.6)$$

onde

$$Sf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) (1 - \chi(\xi)) d\xi. \quad (2.1.7)$$

Destas fórmulas seguem importantes observações. Primeiramente, note que a função $P^{-1}\chi$ é $\mathcal{C}^\infty$ e limitada em $\mathbb{R}^n$. De fato,

$$|P(\xi)| \geq |P_m(\xi)| - |P(\xi) - P_m(\xi)| \geq (c|\xi| - C)|\xi|^{m-1} > 1$$

para $|\xi|$ suficientemente grande. Consequentemente, $P^{-1}\chi$ define uma distribuição temperada em $\mathbb{R}^n$, que é a transformada de Fourier de uma distribuição temperada K_x em $\mathbb{R}^n$. Temos:

$$v = K * f \quad (2.1.8)$$

Por outro lado,

$$Sf = h * f, \quad (2.1.9)$$

onde h é a transformada inversa de Fourier de $1 - \chi$. A última é uma função $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, logo, pelo Teorema de Paley-Wiener, h pode ser estendida à $\mathbb{C}^n$ como uma função analítica inteira de tipo exponencial. Sua restrição a $\mathbb{R}^n$ pertence ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}$. Em ambas as fórmulas (2.1.10) e (2.1.11), f não precisa necessariamente ser uma função, ela pode ser uma distribuição, mas precisa ter suporte compacto.

Podemos reescrever (2.1.8) na seguinte maneira

$$P(D)K = \delta_0 - h, \quad (2.1.10)$$

ou equivalentemente (denotando por $\underline{K}$ o operador convolução $K*$)

$$P(D)\underline{K} = I - S, \quad (2.1.11)$$

onde I é o operador identidade. Uma distribuição tal qual K (ou um operador tal qual $\underline{K}$) é chamado uma parametriz de $P(D)$.

Definição 2.1.3 Se $P(D)$ é um operador diferencial com coeficientes constantes, então $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é chamado uma parametriz de $P(D)$ se

$$P(D)E = \delta_0 + \omega, \quad \omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

No estudo equações elípticas uma parametriz pode servir para vários propósitos, como veremos adiante. De fato, podemos mostrar que ela pode dar uma solução de (2.1.1), pois se E é uma solução fundamental de $P(D)$, i.e.,

$$P(D)E = \delta_0. \quad (2.1.12)$$

(É suficiente tomar $u = E * f$). Com efeito, podemos mostrar diretamente, por análise funcional ou pelo Teorema de Cauchy-Kovalevskaja, que a equação

$$P(D)w = h \quad (2.1.13)$$

sempre tem uma solução w que é uma função inteira em $\mathbb{C}^n$. Então $E = K + w$ satisfaz (2.1.14).

Nossa próxima pergunta que queremos investigar é de extrema importância para o que iremos fazer: Podemos estender algumas das técnicas que fizemos a equações elípticas com coeficientes variáveis? Primeiramente definimos precisamente o que isso significa.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um operador diferencial (parcial linear) em Ω será um operador da forma

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha, \quad (2.1.14)$$

onde os coeficientes c_α são funções complexas $\mathcal{C}^\infty$ em Ω . Assumimos aqui que m é a ordem efetiva de $P(x, D)$, i.e., existe pelo menos um coeficiente c_α , com $|\alpha| = m$, que não é identicamente nulo em Ω . O símbolo principal de $P(x, D)$ é um polinômio com respeito a ξ , com coeficientes em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$,

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (2.1.15)$$

Para todo $x \in \Omega$, denotamos

$$C_{P_m}(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n; P_m(x, \xi) = 0\}. \quad (2.1.16)$$

Temos aqui, assim como antes, que $C_{P_m}(x)$ é um cone em $\mathbb{R}^n$, chamado de cone característico. Denotaremos freqüentemente P ao invés de $P(x, D)$. O operador diferencial $P_m(x, D)$ é chamado parte principal (as vezes termo líder) de $P(x, D)$.

Definição 2.1.4 *O operador diferencial $P(x, D)$ é dito elíptico em Ω se, para todo $x \in \Omega$, o cone característico $C_{P_m}(x)$ contém no máximo um ponto, a origem. Quando $m = 0$ isto significa que $C_{P_m}(x)$ é vazio para todo $x \in \Omega$.*

Queremos construir uma solução aproximada da equação

$$P(x, D)u = f \quad (2.1.17)$$

modificando a fórmula (2.1.7) para obter

$$P(x, D)v = f - Sf, \quad (2.1.18)$$

onde, como antes,

$$S : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega). \quad (2.1.19)$$

Tentamos aqui uma fórmula da seguinte forma, generalizando (2.1.7) :

$$v(x) = K * f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} k(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.1.20)$$

Denote por K $\underline{K}$. Primeiramente faremos uma determinação formal do símbolo $k(x, \xi)$, para que satisfaça

$$P(x, D)K = I \quad (2.1.21)$$

e então modificar este de modo que a integral em (2.1.22) faça sentido. Esta modificação leva a uma solução, não da equação (2.1.23), mas de

$$P(x, D)K = I - S, \quad (2.1.22)$$

onde S satisfaz (2.1.21).

Temos que

$$P(x, D)v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} P(x, D_x + \xi) k(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

já que

$$P(x, D_x)(e^{i\langle x, \xi \rangle} w(x)) = e^{i\langle x, \xi \rangle} P(x, D_x + \xi) w(x). \quad (2.1.23)$$

Pela fórmula inversa de Fourier é suficiente resolver a equação

$$P(x, D_x + \xi) k(x, \xi) = 1. \quad (2.1.24)$$

Na equação (2.1.26), ξ faz o papel de um parametro (variando em $\mathbb{R}^n$). Podemos ver $P(x, D_x + \xi)$ como um polinômio com respeito a ξ , cujos coeficientes são operadores diferenciais em Ω (na variável x). Temos

$$P(x, D_x + \xi) = P_m(x, \xi) + \sum_{j=1}^m P_j(x, \xi, D_x) \quad (2.1.25)$$

onde $P_j(x, \xi, D_x)$ é um operador diferencial com respeito à x (em Ω) de ordem j , cujos coeficientes são polinômios homogêneos com respeito à ξ de grau $m - j$. A idéia é tomar o símbolo $k(x, \xi)$ como uma soma de funções de (x, ξ) homogêneas com respeito à ξ . Por causa do uso da transformada de Fourier e da nossa condição de que o operador K age em distribuições, o símbolo $k(x, \xi)$ precisa ser temperado na variável ξ , e os graus de homogeneidade dos vários componentes tem, portanto, que permanecer limitados. Precisaremos de uma série infinita de tais termos e do seus graus de homogeneidade serão inteiros negativos, tendendo a $-\infty$. Escrevemos

$$k(x, \xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} k_j(x, \xi), \quad (2.1.26)$$

onde $k_j(x, \xi)$ é homogêneo com respeito à ξ , de grau $d_j \rightarrow -\infty$. Tentaremos determinar os termos sucessivos k_j identificando os termos com mesmo grau de homogeneidade com respeito à ξ nos dois lados de (2.1.26). De acordo com (2.1.27) a equação para os termos de maior grau de homogeneidade em ξ é simplesmente

$$P_m(x, \xi)k_0(x, \xi) = 1. \quad (2.1.27)$$

Assim vemos que $d_0 = -m$, já que $k_0 = 1/P_m$. Equacionando os termos de graus < 0 em (2.1.26) temos

$$P_m(x, \xi)k_j(x, \xi) = - \sum_{\substack{j'=0 \\ j' \geq j-m}}^{j-1} P_{j-j'}(x, \xi, D_x)k_{j'}(x, \xi), \quad j > 0. \quad (2.1.28)$$

Vemos que a determinação sucessiva dos termos k_j é possível: o lado direito de (2.1.30) só depende de $k_{j'}$ com $j' < j$ (que já foi determinado). Notamos também que o grau de homogeneidade de k_j com respeito à ξ , d_j , é igual a $-(m - j)$; portando d_j forma uma seqüência estritamente decrescente de inteiros negativos.

Entretanto, aparentemente teremos alguns problemas, por duas razões. Primeiro, todos os termos $k_j(x, \xi)$ podem ser representados como funções racionais cujos denominadores são da forma $P_m(x, \xi)^{\varpi_j}$ com $\varpi_j > 0$. Como consequência

os zeros de $P_m(x, \xi)$ geram alguma dificuldade. Esperamos cuidar dessa dificuldade, introduzindo uma função característica, com em (2.1.7). Mas agora encontramos uma nova dificuldade, devido ao fato da série (2.1.28) ser convergente ou não. Isto também terá que ser fixo. De fato, podemos fixar isso, usando infinitas funções características, cada uma multiplicando um dos termos homogêneos de $k_j(x, \xi)$. Seja $\chi(t) \in \mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$, que se anula quando $t < 1/2$ e é igual a 1 para $t > 1$. Para cada $j = 0, 1, \dots$, seja

$$\chi_j(\xi) = \chi(\rho_j^{-1}|\xi|), \quad (2.1.29)$$

onde ρ_j forma uma seqüência estritamente crescente de números positivos, tendendo a $+\infty$. Seja k_j definida como em (2.1.29) e (2.1.30), mas agora defina $k(x, \xi)$ não por (2.1.28), mas por

$$k(x, \xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \chi_j(\xi) k_j(x, \xi). \quad (2.1.30)$$

Sabemos que cada k_j é uma função $\mathcal{C}^\infty$ de (x, ξ) em $\Omega \times (\mathbb{R}_n - \{0\})$, onde $\mathbb{R}_n$ é o espaço dual de $\mathbb{R}^n$, homogênea de grau $-(m-j)$ com respeito a ξ . Conseqüentemente, se K' é um subconjunto compacto de Ω e α, β são duas enuplas, então existe uma constante $C_{\alpha, \beta}^{(j)}(K') > 0$ tal que

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta k_j(x, \xi)| < C_{\alpha, \beta}^{(j)}(K') |\xi|^{-(m+j+|\alpha|)}, \quad \forall x \in K', 0 \neq \xi \in \mathbb{R}_n. \quad (2.1.31)$$

Nós então selecionamos uma seqüência “encaixada” de subconjuntos compactos K_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) de Ω . Isto quer dizer que a união dos K_ν é igual a Ω e para cada ν , K_ν está contido no interior de $K_{\nu+1}$.

Depois de um certo aumento no valor das constantes $C_{\alpha, \beta}^{(j)}(K_\nu)$, chegamos a

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \sum_{j=0}^{+\infty} \chi_j(\xi) k_j(x, \xi)| \leq |\xi|^{-(m+|\alpha|)} \sum_{j=0}^{+\infty} C_{\alpha, \beta}^{(j)}(K_\nu) \rho_j^{-1}. \quad (2.1.32)$$

É necessário então que

$$\rho_j \geq 2 \sup_{\nu \leq j, |\alpha+\beta| \leq j} C_{\alpha, \beta}^{(j)}(K_\nu)^{1/j}, \quad (2.1.33)$$

para que a série (2.1.32) seja convergente em $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n)$ e que a soma satisfaça desigualdades similares a (2.1.33).

Agora perguntamos quando $k(x, \xi)$, definida por (2.1.32), satisfaz (2.1.26). A resposta é claramente negativa, pois tiramos todos os pedaços (em vi-

zinhanças de $\xi = 0$) dos termos homogêneos de $k_j(x, \xi)$. O que temos é o seguinte:

$$P(x, D_x + \xi)k(x, \xi) = 1 - r(x, \xi). \quad (2.1.34)$$

Temos

$$r(x, \xi) = 1 - \chi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} r_j(x, \xi), \quad (2.1.35)$$

onde

$$r_j(x, \xi) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \leq m}}^j [\chi_{j-k}(\xi) - \chi_j(\xi)] P_k(x, \xi, D_x) k_{j-k}(x, \xi). \quad (2.1.36)$$

Vemos que o suporte de cada símbolo $r_j(x, \xi)$ está contido num subconjunto compacto do ξ -espaço (mais precisamente, na bola $|\xi| \leq \rho_j$). Usando este fato, juntamente com as propriedades da série (2.1.32) e a equação (2.1.35), podemos provar que o operador S definido por

$$Sf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} r(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (2.1.37)$$

satisfaz (2.1.21). Como o objetivo da Teoria dos operadores pseudodiferenciais é formalizar este tipo de argumento, não daremos muitos detalhes aqui.

2.2 Definições e Relações entre Símbolo e Núcleo

Operadores Pseudodiferenciais podem ser vistos como uma generalização do tipo (2.1.22) e de operadores diferenciais. Estes dois tipos de operadores podem ser representados por fórmulas do seguinte tipo:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (2.2.1)$$

Isso é precisamente como construímos K na Seção 1. No caso de um operador diferencial $P(x, D)$ é suficiente aplicar $P(x, D)$ à $u(x)$, dado pela fórmula inversa de Fourier; o símbolo $a(x, \xi)$ é nada mais que o polinômio $P(x, \xi)$.

Parametrizes de equações elípticas e operadores diferenciais parciais possuem muitas propriedades em comum. Se assumimos que ambos estão definidos em um conjunto aberto Ω , eles definem aplicações contínuas de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Eles são pseudolocais. Um operador $A : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ é chamado pseudolocal se, dado $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, Au é uma função $\mathcal{C}^\infty$ em todo

conjunto aberto que u é $\mathcal{C}^\infty$.

Antes de começar a estudar essas propriedades, é conveniente lembrar algumas generalidades sobre operadores lineares contínuos agindo em distribuições, e o primeiro deles, o **Teorema dos Núcleos de Schwartz**: Para qualquer aplicação linear $K : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, corresponde uma única distribuição $K(x, y)$ em $\Omega \times \Omega$ tal que, para todo $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$Ku(x) = \int K(x, y)u(y)dy. \quad (2.2.2)$$

Nos referiremos à $K(x, y)$ como um núcleo de distribuição associado ao operador K , e à K como o operador associado ao núcleo $K(x, y)$.

Dizemos que $K(x, y)$ é separadamente regular em x e y se esta é uma função $\mathcal{C}^\infty$ com respeito a cada uma das variáveis, com distribuições de valores com respeito ao outro. Isto é equivalente a dizer que ambos K e seu transposto K^t (que é definido como o núcleo $K(x, y)$) vão de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ continuamente.

Dizemos que $K(x, y)$ é bastante regular se é separadamente regular e se, além disso, é uma função $\mathcal{C}^\infty$ no complemento da diagonal de $\Omega \times \Omega$. Esta terminologia também será aplicada ao operador linear K , quando for aplicada ao seu núcleo.

Uma das principais propriedades de operadores pseudodiferenciais é a que diz que núcleos são bastante regulares.

Lema 2.2.1 *Se $K(x, y)$ é bastante regular, o seu operador associado K é pseudolocal (i.e., dada uma distribuição com suporte compacto u em Ω , $\text{sing supp } Ku \subset \text{sing supp } u$).*

(sing supp T : o suporte singular de T , i.e., o menor conjunto fechado tal que no seu complemento T é uma função $\mathcal{C}^\infty$.)

Demonstração:

Sejam U e V subconjuntos abertos de Ω tais que $V \subset\subset U$. Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, $\phi = 1$ numa vizinhança do fecho de V . Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Então $Ku = K(\phi u) + K[(1 - \phi)u]$. Como $\phi u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e como K é separadamente regular, temos que $K(\phi u) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Por outro lado,

$$K[(1 - \phi)u](x) = \int K(x, y)[1 - \phi(y)]u(y)dy.$$

Veja que se x pertence a V e y ao suporte de $1 - \phi$, então (x, y) está no complemento de uma vizinhança da diagonal de $\Omega \times \Omega$, na qual $K(x, y)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$. Que $K[(1 - \phi)u]$ é $\mathcal{C}^\infty$ em V segue da diferenciação sob o

sinal da integral. ■

Diremos que o operador (2.2.2) é regularizável se ele pode ser estendido como aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Neste caso, é necessário e suficiente que o núcleo associado $K(x, y)$ seja $\mathcal{C}^\infty$ em $\Omega \times \Omega$. Operadores pseudodiferenciais serão definidos módulo operadores regularizáveis. O operador S da Seção 1 (veja (2.1.37)) era regularizável.

Lema 2.2.2 *Seja P um operador diferencial em Ω . Suponha que existe um operador bastante regular $K : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $KP - I$ é regularizável (isto algumas vezes é expresso dizendo que K é uma parametriz à esquerda de P). Então P é hipoelíptico, i.e., ele tem a seguinte propriedade: Dada um subconjunto aberto U qualquer de Ω , toda distribuição u em U tal que $Pu \in \mathcal{C}^\infty(U)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ em U .*

Demonstração:

Seja V e ϕ como na demonstração do Lema 2.2.1. Temos que

$$P(\phi u) = \phi Pu + w,$$

onde $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $w = 0$ em V . Seja $S = KP - I$. Temos, em V ,

$$\begin{aligned} u &= \phi u = KP(\phi u) - S(\phi u) \\ &= K(\phi Pu) + Kw - S(\phi u). \end{aligned}$$

Como S é regularizável, $S(\phi u) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$; como K é separadamente regular e $\phi u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $K(\phi Pu) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Como $w = 0$ em V e K é pseudolocal, $Ku \in \mathcal{C}^\infty(V)$. ■

Um fato comum de operadores diferenciais e parametrizes tais como K da Seção 1 é que os símbolos correspondentes $a(x, \xi)$ podem, em ambos os casos, ser representados por séries de termos que são homogêneos de grau decrescente com respeito à ξ (para $|\xi|$ grande o suficiente). É reconhecido que desigualdades tais como (2.1.33), juntamente com aquela representação em série, são a chave para muitas importantes propriedades dos operadores em questão. Por esta razão tem sido adotada a estimativa do tipo (2.1.33) como ponto de partida para a definição dos operadores pseudodiferenciais, pelo menos no caso clássico. Assim operadores pseudodiferenciais são freqüentemente definidos como operadores do tipo dado em (2.2.1), onde o símbolo $a(x, \xi)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ em $\Omega \times \mathbb{R}_n$ tal que para todo subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de Ω e para todo par $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ existe uma constante $C_{\alpha, \beta}(\mathcal{K}) > 0$ tal que

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}(\mathcal{K})(1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}, \quad x \in \mathcal{K}, \xi \in \mathbb{R}_n.$$

Chamamos $a(x, \xi)$ de símbolo de ordem $\leq m$; aqui m é um número real qualquer.

Entretanto, a teoria amadureceu, foram realizadas algumas modificações nesta definição que trazem vantagens expositórias. A versão modificada é essencialmente equivalente a não-modificada, como veremos. A versão modificada é baseada na observação que, em virtude da fórmula inversa de Fourier, a expressão (2.2.1) é equivalente a seguinte:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (2.2.3)$$

Uma vez que temos a expressão na forma (2.2.3), não parece nem um pouco óbvio lidar apenas com os símbolos $a(x, \xi)$ independente de y . Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.2.1 *Seja m um número real qualquer. Denotamos por $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ o espaço vetorial das funções $\mathcal{C}^\infty$ em $\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}_n$, $a(x, y, \xi)$, que possuem a seguinte propriedade:*

Para todo subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de $\Omega \times \Omega$ e para toda tripla de n -uplas α, β, γ , existe uma constante $C_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathcal{K}) > 0$ tal que

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathcal{K})(1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{K}, \xi \in \mathbb{R}_n. \quad (2.2.4)$$

Chamaremos os elementos de $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ de amplitudes de grau $\leq m$ (em $\Omega \times \Omega$). Um polinômio com respeito a ξ de grau m , agora um inteiro ≥ 0 , com coeficientes em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é claramente uma amplitude de grau m . A interseção dos conjuntos $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ quando m varia em $\mathbb{R}$ será denotada por $\mathcal{S}^{-\infty}(\Omega, \Omega)$.

O espaço $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ é naturalmente dotado de uma topologia localmente convexa: denote por $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}; \alpha, \beta, \gamma}(a)$ o ínfimo das constantes $C_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathcal{K})$ tal que (2.2.4) é verdade; vemos que $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}; \alpha, \beta, \gamma}$ é uma seminorma em $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ e define a topologia deste espaço quando $\mathcal{K}$ varia na coleção de todos os subconjuntos compactos de Ω e α, β, γ varia em todas as n -uplas. Esta topologia torna $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ um espaço de Fréchet.

De (2.2.4) vemos que $a(x, y, \xi)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ de (x, y) em $\Omega \times \Omega$ com valores em $\mathcal{S}'_\xi$ das distribuições temperadas de $\xi \in \mathbb{R}_n$. Fazendo uma mudança da variável ξ à variável z (em $\mathbb{R}_n$), da transformada inversa de Fourier, obtemos uma função $\mathcal{C}^\infty$ de (x, y) em $\Omega \times \Omega$, com valores em $\mathcal{S}'_z$, $A^\#(x, y, z)$. Podemos definir a seguinte distribuição em $\Omega \times \Omega$:

$$A(x, y) = A^\#(x, y, x - y). \quad (2.2.5)$$

O núcleo de distribuição $A(x, y)$ define uma aplicação linear contínua $A : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ pela fórmula

$$Au(x) = \int A(x, y)u(y)dy. \quad (2.2.6)$$

Temos que

$$A(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) d\xi. \quad (2.2.7)$$

A afirmação de que $A(x, y)$ é uma distribuição em $\Omega \times \Omega$ pode ser diretamente checada pela integração por partes e usando a propriedade (2.2.4) da amplitude $a(x, y, \xi)$. De fato, podemos escrever

$$(2\pi)^n A(x, y) = \int (1 - \Delta_x)^N (e^{i\langle x-y, \xi \rangle}) \frac{a(x, y, \xi)}{(1 + |\xi|^2)^N} d\xi, \quad (2.2.8)$$

onde N é um inteiro tão grande quanto quisermos. Nós então usamos a fórmula de transposição de Leibniz:

$$a(x, y, \xi)(1 + \Delta_x)^N (e^{i\langle x-y, \xi \rangle}) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq 2N} D_x^\alpha [c_{\alpha, \beta} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} D_x^\beta a(x, y, \xi)], \quad (2.2.9)$$

para uma escolha conveniente de coeficientes $c_{\alpha, \beta}$ (que, inicialmente, dependem apenas do inteiro N). Assim, pondo (2.2.9) em (2.2.8), obtemos

$$A(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq 2N} D_x^\alpha A_{(\alpha)}(x, y), \quad (2.2.10)$$

onde

$$(2\pi)^n A_{(\alpha)}(x, y) = \sum_{|\beta| \leq 2N - |\alpha|} c_{\alpha, \beta} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} D_x^\beta a(x, y, \xi) (1 + |\xi|^2)^{-N} d\xi. \quad (2.2.11)$$

Se então assumimos que

$$2N > m + n + 1, \quad (2.2.12)$$

onde m é o número real de (2.2.4), vemos que os integrandos do lado direito de (2.2.11) são dominados por uma $g(\xi) \in L^1$, e assim, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, $A_{(\alpha)}$ é uma função contínua de (x, y) em $\Omega \times \Omega$. Isto significa que (2.2.10) é a representação usual de uma distribuição como uma soma finita de derivadas de funções contínuas.

De fato, seja k um inteiro ≥ 0 e tome

$$2N > m + n + k + 1. \quad (2.2.13)$$

Neste caso podemos diferenciar k vezes com respeito à (x, y) sob o sinal de integral em (2.2.11) e ainda assim obtemos integrandos que são L^1 –dominados. Isto significa que na representação (2.2.10), tomando N suficientemente grande, podemos afirmar que $A_{(\alpha)} \in \mathcal{C}^k(\Omega \times \Omega)$ para todo $\alpha, |\alpha| \leq 2N$. Isto mostra que $A(x, y)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ de y em Ω com valores em $\mathcal{D}'_x(\Omega)$. Mas obviamente a definição (2.2.7) de $A(x, y)$ é “simétrica” com respeito à x e à y , e assim é também uma função $\mathcal{C}^\infty$ de x em Ω com valores em $\mathcal{D}'_y(\Omega)$. Em outras palavras, o núcleo de $A(x, y)$ é separadamente regular em x e em y . Também estamos contentes com a interpretação análoga a de (2.2.3):

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (2.2.14)$$

Definição 2.2.2 *Seja $a \in \mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$. Denotamos por $Op a$ o operador linear $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ definido por (2.2.14).*

Proposição 2.2.1 *Qualquer operador regularizável $A : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é da forma $Op a$, com $a \in \text{cal}S^{-\infty}(\Omega, \Omega)$.*

Demonstração:

O núcleo $A(x, y)$ de A pertence a $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$. É suficiente então tomar

$$a(x, y, \xi) = e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} A(x, y) \chi(\xi),$$

com $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}_n)$ tal que $\int \chi d\xi = 1$. ■

Definição 2.2.3 *Um operador linear $A : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ é chamado um operador pseudodiferencial (clássico) de ordem m se existe uma amplitude $a \in \mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ tal que $A = Op a$.*

O conjunto dos operadores pseudodiferenciais de ordem m será denotado por $\Psi^m(\Omega)$.

A união dos espaços $\Psi^m(\Omega)$, m real, será denotada por $\Psi(\Omega)$, a interseção por $\Psi^{-\infty}(\Omega)$.

Se $P(x, \xi)$ é um polinômio com respeito à ξ de grau $m \in \mathbb{Z}_+$ com coeficientes em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, então o operador diferencial $P(x, D)$ é igual a $Op a$ com $a(x, y, \xi) = P(x, \xi)$. É claro que $P(x, D) \in \Psi^m(\Omega)$.

Operadores pseudodiferenciais não são apenas contínuos de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas são aplicações contínuas de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e podem ser estendidos a aplicações lineares contínuas de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 2.2.1 *Seja A um operador pseudodiferencial em Ω , de ordem $\leq m$. Dado um número real s , $u \mapsto Au$ pode ser estendida à uma aplicação linear contínua de $H_c^s(\Omega)$ em $H_{loc}^{s-m}(\Omega)$.*

Demonstração:

Precisamos provar que para qualquer função $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e para todo subconjunto $\mathcal{K}$ de Ω , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|gAu\|_{s-m} \leq C\|u\|_s, \quad \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{K}). \quad (2.2.15)$$

É claro que nada muda se trocarmos gA por gAh com $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que é igual a 1 em alguma vizinhança de $\mathcal{K}$. Observe que um amplitude para gAh é dada por

$$g(x)a(x, y, \xi)h(y), \quad (2.2.16)$$

supondo que $a(x, y, \xi)$ é uma amplitude de A . Como (2.2.16) tem a propriedade de que a (x, y) -projecção do seu suporte está contida num subconjunto compacto de $\Omega \times \Omega$, vamos assumir que $a(x, y, \xi)$ possui esta propriedade e omitir a menção sobre as funções características g e h . Nossa outra suposição é que para toda tripla de n -uplas α, β, γ , existe uma constante $C_{\alpha, \beta, \gamma} > 0$ tal que

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2.17)$$

Denote por $\hat{a}(\xi', \eta', \xi)$ a transformada de Fourier de $a(x, y, \xi)$ com respeito à (x, y) , que tem sentido já que $a(x, y, \xi) \in (\mathcal{C}_c^\infty)_{x, y}$. De (2.2.17) concluímos que para toda n -upla α e para todo par de inteiros $k, l \geq 0$ existe uma constante $C_{\alpha, k, l} > 0$ tal que

$$|D_\xi^\alpha \hat{a}(\xi', \eta', \xi)| \leq C_{\alpha, k, l} (1 + |\xi'|)^{-k} (1 + |\eta'|)^{-l} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} \quad (2.2.18)$$

para todo $\xi, \xi', \eta' \in \mathbb{R}^n$.

Em virtude da fórmula inversa de Fourier temos

$$\widehat{Au}(\xi') = (2\pi)^{-2n} \int \int \int e^{-i\langle y, \xi - \eta' \rangle} \tilde{a}(\xi' - \xi, y, \xi) \hat{u}(\eta') dy d\xi d\eta'$$

Multiplique ambos os lados de (2.2.19) por $(1 + |\xi'|^2)^{(s-m)/2}$. Usaremos a seguinte desigualdade (as vezes chamada de desigualdade de Peetre).

Para todo número real s e para todos vetores θ, θ' em $\mathbb{R}_n$,

$$(1 + |\theta|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\theta - \theta'|^2)^{|s|} (1 + |\theta'|^2)^s. \quad (2.2.19)$$

Com efeito, quando $s > 0$, a afirmação acima é evidente depois de tomar a s -ésima raiz em ambos os lados. Quando $s < 0$, trocamos θ e θ' e aplicamos

o resultado para $-s$.

Aplicamos (2.2.19) com $\theta = \xi'$, $\theta' = \xi$ e com $\frac{1}{2}(s-m)$ em lugar de s . Obtemos

$$(1 + |\xi'|^2)^{(s-m)/2} |\widehat{Au}(\xi')| \leq$$

$$C_s \int \int (1 + |\xi - \xi'|^2)^{|s-m|/2} |\hat{a}(\xi' - \xi, \xi - \eta', \xi)| (1 + |\xi|^2)^{(s-m)/2} |\hat{u}(\eta')| d\xi d\eta'.$$

Em seguida aplicamos (2.2.19) com $\theta = \xi$, $\theta' = \eta'$ e $s/2$ ao invés de s . Obtemos

$$\begin{aligned} & (1 + |\xi'|^2)^{(s-m)/2} |\widehat{Au}(\xi')| \\ & \leq C_s \int \int (1 + |\xi - \xi'|)^{|s-m|} (1 + |\xi - \eta'|)^{|s|} (1 + |\xi|)^{-m} |\hat{a}(\xi' - \xi, \xi - \eta', \xi)| \\ & \quad \times (1 + |\eta'|^2)^{s/2} |\hat{u}(\eta')| d\xi d\eta'. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Neste ponto aplicamos (2.2.18) com $\alpha = 0$, $k = |s-m| + n + 1$, $l = |s| + n + 1$, $\xi' - \xi$ substituído por ξ' e $\xi - \eta'$ por η' . Obtemos então

$$\begin{aligned} & (1 + |\xi'|^2)^{(s-m)/2} |\widehat{Au}(\xi')| \\ & \leq C'_s \int \int (1 + |\xi - \xi'|)^{-n-1} (1 + |\xi - \eta'|)^{-n-1} (1 + |\eta'|^2)^{s/2} |\hat{u}(\eta')| d\xi d\eta'. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Podemos ver o lado direito acima como uma convolução dupla e aplicar a clássica desigualdade de Hölder, na forma iterada:

$$\|f * g * h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \|h\|_{L^2}. \quad (2.2.22)$$

Obtemos então

$$\|Au\|_{s-m} \leq C''_s \|u\|_s, \quad (2.2.23)$$

que é precisamente o que queríamos provar. $\blacksquare$

Corolário 2.2.1 *Todo operador pseudodiferencial A em Ω define uma aplicação linear contínua de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, que pode ser estendida a uma aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração:

Em virtude das relações (1.2.1) e (1.2.2) e do Teorema 2.2.1 deduzimos que A define uma aplicação linear de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e uma de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Para provar a continuidade destas aplicações é suficiente provar a continuidade de suas restrições aos subespaços $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{K})$ e $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ consistindo das funções ou distribuições com suporte em um subconjunto compacto fixo,

porém arbitrário, $\mathcal{K}$ de Ω . Mas $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{K})$ é igual a interseção de $H^s(\mathcal{K})$, como um espaço vetorial topológico. E $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ é o “limite” de $H^s(\mathcal{K})$, o que implica que uma aplicação linear de $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ é contínua se e somente se sua restrição a cada $H^s(\mathcal{K})$ é contínua. Por outro lado a primeira igualdade de (1.2.1) é também válida topologicamente, e todo $H_{loc}^s(\Omega)$ é continuamente mergulhado em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Tudo isso, juntamente com o Teorema 2.2.1, implica o resultado. ■

Corolário 2.2.2 *Todo operador pseudodiferencial A de ordem $-\infty$ em Ω é regularizável, i.e., vai de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ continuamente.*

Demonstração:

Segue do Teorema 2.2.1. ■

Corolário 2.2.3 *O núcleo $A(x, y)$ de um operador pseudodiferencial A de ordem $-\infty$ em Ω é uma função $\mathcal{C}^\infty$ em $\Omega \times \Omega$.*

Demonstração:

Segue do Corolário 2.2.2 e do Teorema do núcleo de Schwartz que diz que o núcleo de qualquer aplicação linear $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pertence a $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$. ■

Teorema 2.2.2 *O núcleo $A(x, y)$ de um operador pseudodiferencial A em Ω é uma função $\mathcal{C}^\infty$ da diagonal de $\Omega \times \Omega$ em $\Omega \times \Omega$, e A é pseudolocal.*

2.3 O Cálculo Pseudodiferencial

Seja A um operador pseudodiferencial num conjunto aberto Ω . Sabemos que A define um operador linear contínuo de $\mathcal{C}_c^\infty$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Portanto o mesmo é verdade para seu transposto A^t , que pode ser definido como

$$\langle A^t u, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \quad u, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \quad (2.3.1)$$

De fato, temos

Teorema 2.3.1 *O transposto de um operador pseudodiferencial A de ordem $\leq m$ em Ω , A^t , é um operador pseudodiferencial de ordem $\leq m$ em Ω .*

Demonstração:

Seja $a(x, y, \xi)$ a amplitude de A , que pertence a $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$. Sejam u e v funções testes em Ω . Por (2.3.1) temos

$$\langle A^t u, v \rangle = (2\pi)^{-n} \int \int \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(x) v(y) dx dy d\xi,$$

que mostra que

$$A^t u(x) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(y, x, -\xi) u(y) dy d\xi, \quad (2.3.2)$$

e assim $A^t = Op\ b$, onde $b(x, y, \xi) = a(y, x, -\xi)$. ■

Observação 2.3.1 *Enfatizamos o significado da fórmula (2.3.2). Se $a(x, y, \xi)$ é uma amplitude $A \in \Psi^m(\Omega)$, então $a(y, x, -\xi)$ é uma de A^t .*

Observação 2.3.2 *Sempre vamos distinguir o adjunto A^* de A da sua transposta, A^t . A^* é o conjugado complexo de A^t :*

$$A^* u = \overline{A^t \bar{u}}, \quad u \in \mathcal{E}'(\Omega). \quad (2.3.3)$$

Segue do Teorema 2.3.1 que

$$A \in \Psi^m(\Omega) \rightarrow A^* \in \Psi^m(\Omega);$$

e de (2.3.2) segue que se $a(y, x, \xi)$ é uma amplitude de A , então

$$\overline{a(y, x, \xi)} \quad (2.3.4)$$

é uma de A^* .

Queremos agora definir a composição $A \circ B$ de dois operadores pseudodiferenciais (de ordem $\leq m, m'$ respectivamente) em Ω . Isto nem sempre é possível. Na verdade, A age somente em distribuições de suporte compacto em Ω , já a imagem de B consiste das distribuições em Ω que não necessariamente possuem suporte compacto. Precisamos então impor a seguinte restrição em B :

$$B : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}'(\Omega) \quad \text{continuamente.} \quad (2.3.5)$$

Se $B(x, y)$ é o núcleo de B , então (2.3.5) é equivalente a dizer que dado qualquer função teste h em Ω , o suporte de $B(x, y)h(y)$ é um subconjunto compacto de $\Omega \times \Omega$. Também veremos que (2.3.5) é equivalente à seguinte propriedade:

$$B : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad \text{continuamente.} \quad (2.3.6)$$

De fato, se (2.3.5) vale, B vai de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$. Reciprocamente, suponha que (2.3.6) vale. Então o transposto B^t de B vai de $\mathcal{D}'(\Omega)$ nele mesmo continuamente e assim (sendo pseudolocal, pelo Teorema 2.2.2) vai de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ nele mesmo continuamente. Consequentemente, o transposto de B^t , que é B , satisfaz (2.3.5).

Sobre amplitudes que satisfazem (2.3.5) podemos dizer o seguinte: Seja B satisfzendo (2.3.5) e seja $b(x, y, \xi) \in \mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ uma de suas amplitudes. Seja $\{h_j\}, j = 1, 2, \dots$, uma partição da unidade em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Por (2.3.5) sabemos que, para todo j , existe um subconjunto compacto de Ω tal que

$$(2.3.7)$$

Dado qualquer distribuição u em Ω , $B(h_j u)$ anula-se em $\Omega - K_j$. Então seja $g_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ igual a 1 em uma vizinhança de K_j e seja

$$b^\#(x, y, \xi) = \sum_j g_j(x) h_j(y) b(x, y, \xi). \quad (2.3.8)$$

Podemos ver que $b^\#(x, y, \xi) \in \mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ é uma amplitude de B . É claro que, $b^\#$ tem a seguinte propriedade:

$$(2.3.9)$$

Dado qualquer $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, a x -projeção do suporte de $h(y)b^\#(x, y, \xi)$ é compacta.

Assumimos a partir de agora que B tem a propriedade (2.3.5) e que $b = b^\#$ é uma amplitude de B com a propriedade (2.3.9). Seja u uma função teste arbitrária em Ω . Então temos

$$A(Bu)(x) = (2\pi)^{-2n} \int \int \int \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle + i\langle y-z, \eta \rangle} a(x, y, \xi) b(y, z, \eta) dy dz d\xi d\eta,$$

e após trocar y e z segue que

$$A(Bu)(x) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} k(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (2.3.10)$$

onde

$$k(x, y, \xi) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i\langle y-z, \eta \rangle} a(x, y, \xi) b(z, y, \eta) dz d\eta. \quad (2.3.11)$$

A integração em (2.3.11) é entendida da seguinte forma: seja y pertencente a um subconjunto compacto de Ω , K' . Então por (2.3.9) $b = b^\#$ anula-se para $z \notin K''$, outro subconjunto compacto de Ω . Conseqüentemente, a integração com respeito à z dá uma função de $\xi - \eta$ que pertence ao espaço $\mathcal{S}$ com respeito à $\xi - \eta$. Se ξ permanece fixo, ou em um conjunto limitado de $\mathbb{R}_n$, esta função é integrável com respeito à η .

Usando as expressões (2.3.10) e (2.3.11) podemos provar

Teorema 2.3.2 *Seja $A \in \Psi^m(\Omega)$, $B \in \Psi^{m'}(\Omega)$. Suponha que B vai de $\mathcal{E}'(\Omega)$ nele mesmo. Então $A \circ B \in \Psi^{m+m'}(\Omega)$.*

Demonstração:

Provaremos que $k(x, y, \xi)$, definido em (2.3.11), pertence a $\mathcal{S}^{m+m'}(\Omega, \Omega)$. A fórmula (2.3.10) mostra que este é uma amplitude de $A \circ B$.

Temos que, pela fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^n D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma k(x, y, \xi) = \\
& \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\gamma}{\gamma'} \int \int \{D_\xi^{\alpha-\alpha'} D_y^{\gamma-\gamma'} (e^{i\langle y-z, \xi-\eta \rangle})\} D_\xi^{\alpha'} D_x^\beta a(x, z, \xi) D_y^{\gamma'} b(z, y, \eta) dz d\eta \\
& = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\gamma}{\gamma'} \int \int \{(-D_\eta)^{\alpha-\alpha'} (-D_z)^{\gamma-\gamma'} (e^{i\langle y-z, \xi-\eta \rangle})\} \\
& \quad \times D_\xi^{\alpha'} D_x^\beta a(x, z, \xi) D_y^{\gamma'} b(z, y, \eta) dz d\eta \\
& = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\gamma}{\gamma'} \int \int e^{i\langle y-z, \xi-\eta \rangle} D_z^{\gamma-\gamma'} (D_\xi^{\alpha'} D_x^\beta a(x, z, \xi) D_\eta^{\alpha-\alpha'} D_y^{\gamma'} b(z, y, \eta)) dz d\eta \\
& = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\gamma}{\gamma'} \int \int e^{i\langle y-z, \xi-\eta \rangle} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-M} \\
& \quad \times (1 - \Delta_z)^M D_z^{\gamma-\gamma'} (D_\xi^{\alpha'} D_x^\beta a(x, z, \xi) D_\eta^{\alpha-\alpha'} D_y^{\gamma'} b(z, y, \eta)) dz d\eta,
\end{aligned}$$

onde integramos repetidamente por partes com respeito à z e η . Quanto a M , este é um inteiro positivo que iremos logo escolher. Vemos que $D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma k(x, y, \xi)$ é uma combinação linear de termos do tipo

$$\begin{aligned}
& \int \int \exp\{i\langle y-z, \xi-\eta \rangle\} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-M} D_\xi^{\alpha'} D_x^\beta D_z^\lambda a(x, y, \xi) \\
& \quad \times \{D_\eta^{\alpha-\alpha'} D_z^{\gamma-\gamma'} b(z, y, \eta)\} dz d\eta.
\end{aligned}$$

Obtemos, para (x, y) em um subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de $\Omega \times \Omega$,

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma k(x, y, \xi)| \leq \text{const} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \int (1 + |\xi - \eta|)^{-2M} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha'|} (1 + |\eta|)^{m'-|\alpha-\alpha'|} d\eta.$$

Usamos aqui o fato que y pertence a um subconjunto compacto de Ω (A y -projeção de $\mathcal{K}$) e (z, y, η) permanece no suporte de $b(z, y, \eta)$ (que satisfaz (2.3.9)), logo z permanece num subconjunto compacto de Ω e conseqüentemente a integração com respeito à z pode ser feita sem problema. Basta agora observar que (cf. (2.2.20))

$$(1 + |\eta|)^{m'-|\alpha-\alpha'|} \leq (1 + |\xi|)^{m'-|\alpha-\alpha'|} (1 + |\xi - \eta|)^{|m'|+|\alpha-\alpha'|}.$$

Trocando η e $\xi - \eta$ na integral acima, obtemos

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma k(x, y, \xi)| \leq \text{const}(1 + |\xi|)^{m+m'-|\alpha|} \int (1 + |\eta|)^{-2M+|m'|+|\alpha|} d\eta,$$

e é suficiente escolher $2M \geq n+1+|m'|+|\alpha|$, para ver que $k(x, y, \xi)$ realmente pertence a $\mathcal{S}^{m+m'}(\Omega, \Omega)$. ■

Se assumimos que B e seu transposto B^t têm a propriedade (2.3.5), então obtemos uma classe interessante de operadores pseudodiferenciais.

Definição 2.3.1 *Um operador pseudodiferencial A em Ω será propriamente suportado se ambos A e A^t aplicam $\mathcal{E}'(\Omega)$ nele mesmo.*

Proposição 2.3.1 *Um operador pseudodiferencial A em Ω é propriamente suportado se, e somente se, seu núcleo associado $A(x, y) \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ tem a seguinte propriedade:*

$$(2.3.12)$$

Dado uma função $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, ambas $g(x)A(x, y)$ e $A(x, y)g(y)$ tem suporte compacto(contido em $\Omega \times \Omega$).

Proposição 2.3.2 *Se $A \in \Psi(\Omega)$ é propriamente suportado, este pode ser estendido a uma aplicação linear contínua de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ nele mesmo e de $\mathcal{D}'(\Omega)$ nele mesmo. Ainda mais, ele vai de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ nele mesmo continuamente.*

Demonstração:

A última parte é óbvia, já que A vai de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (sendo um operador pseudodiferencial) e em $\mathcal{E}'(\Omega)$ (sendo propriamente suportado). Seu transposto A^t tem a mesma propriedade. Conseqüentemente, o transposto de A^t que é A , vai do dual de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ nele mesmo, e também no dual de $\mathcal{E}'(\Omega)$ nele mesmo. ■

Proposição 2.3.3 *Se A é propriamente suportado, então também o são A^t e A^* . Se B também é um operador pseudodiferencial propriamente suportado em Ω , então a composição $A \circ B$ também o é.*

Proposição 2.3.4 *Seja $A \in \Psi^m(\Omega)$. Então existe um operador pseudodiferencial propriamente suportado $A^\# \in \Psi^m(\Omega)$ tal que $A - A^\# \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$.*

Demonstração:

Seja $a(x, y, \xi) \in \mathcal{S}^m(\Omega \times \Omega)$ uma amplitude de A . Seja $\phi(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$ tendo a propriedade (2.3.12), bem como $g(x)\phi(x, y)$ e $\phi(x, y)g(y)$ tendo suporte compacto em $\Omega \times \Omega$, qualquer que seja $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (uma função ou distribuição em $\Omega \times \Omega$ com esta propriedade é dita ser propriamente suportada). Nós também assumimos que ϕ seja identicamente igual a um numa vizinhança da diagonal de $\Omega \times \Omega$. Seja

$$a^\#(x, y, \xi) = \phi(x, y)a(x, y, \xi).$$

Usando o mesmo argumento da demonstração do Teorema 2.2.2 podemos mostrar que

$$\{1 - \phi(x, y)\}a(x, y, \xi) \in \mathcal{S}^{-\infty}(\Omega, \Omega).$$

Conseqüentemente, $a^\#(x, y, \xi)$ é uma amplitude do operador pseudodiferencial $A^\#$ em Ω que tem as propriedades assumidas e que é obviamente propriamente suportado. ■

O significado da Proposição 2.3.4 pode ser expresso da seguinte forma: módulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$ os operadores pseudodiferenciais em Ω correspondem aos núcleos de distribuições concentrados em torno da diagonal de $\Omega \times \Omega$.

Veremos agora o que acontece com um operador pseudodiferencial quando ocorre uma mudança de variáveis, ou então quando aplicamos um difeomorfismo $x \mapsto y = \phi(x)$ de um conjunto aberto Ω a outro subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, Ω' . Lembramos que $x \mapsto y$ é uma bijeção $\mathcal{C}^\infty$ de Ω em Ω' cuja matrix Jacobiana J_ϕ é invertível em todo ponto. Denotamos por $y \mapsto x = \phi^{-1}(y)$ a inversa de ϕ . Também é conveniente denotar $\mathcal{J}(y)$ a matrix Jacobiana de ϕ^{-1} vista como uma função de y .

O difeomorfismo ϕ induz um isomorfismo $\phi^* : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega') \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pela fórmula

$$(\phi^*u)(x) = u(\phi(x)), \quad u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega').$$

Dali, pela fórmula de transposição

$$\langle \phi_*F, u \rangle = \langle F, \phi^*u \rangle, \quad u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega'), F \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

definimos um isomorfismo $\phi_* : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega')$. A restrição de ϕ_* a $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ não coincide com ϕ^{-1*} ; quando uma distribuição em Ω é definida por uma função $f(y)$ localmente integrável, sua ϕ_* -imagem é também definida por uma função localmente integrável, bem como, por

$$(\phi_*f)(y) = f(\phi^{-1}(y))|\det \mathcal{J}(y)|, \quad y \in \Omega'. \quad (2.3.13)$$

A restrição de ϕ_* a $\mathcal{E}'(\Omega)$ é um isomorfismo deste em $\mathcal{E}'(\Omega')$.
Então dado qualquer $A \in \Psi^m(\Omega)$, seja

$$A^\phi = \phi_* \circ A \circ (\phi_*)^{-1} : \mathcal{E}'(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega'). \quad (2.3.14)$$

Nós vamos nos referir a A^ϕ como a transferência de A para Ω' via ϕ .

Teorema 2.3.3 *Seja ϕ um difeomorfismo de Ω em Ω' . Para todo número real m , $A \rightarrow A^\phi$ é uma bijeção de $\Psi^m(\Omega)$ em $\Psi^m(\Omega')$.*

Demonstração:

É suficiente provar que se $A \in \Psi^m(\Omega)$, então $A^\phi \in \Psi^m(\Omega')$, depois basta ver que $B \rightarrow B^\psi$ com $\psi = \phi^{-1}$ é a inversa da aplicação em questão. Na verdade provaremos algo ainda mais forte, que se $A = Op\ a$ com $a \in \mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$, então $A^\phi = Op\ a^\phi$ com $a^\phi \in \mathcal{S}^m(\Omega', \Omega')$ construída explicitamente de a . Denotaremos por x, x' (resp. y, y') as variáveis em Ω (resp. Ω'). Precisaremos do seguinte Lema.

Lema 2.3.1 *Existe uma cobertura $\{\mathcal{W}_j\}(j \in J)$ de $\Omega' \times \Omega'$ tal que para cada j existe uma função $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{J}_j(y, y')$, com valores no espaço vetorial das matrizes $n \times n$, invertível tal que*

$$(\phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(y')) = \mathcal{J}_j(y, y')(y - y') \quad (2.3.15)$$

para todo (y, y') em $\mathcal{W}_j$.

Demonstração: (Lema 2.3.1):

Se y e y' estão num subconjunto convexo de Ω' podemos escrever

$$\phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(y') = \int_0^1 \mathcal{J}(ty + (1-t)y')(y - y')dt, \quad (2.3.16)$$

onde $\mathcal{J}(z)$ é a matriz Jacobiana de ϕ^{-1} no ponto $y = z$. Observando que

$$\mathcal{J}_0(y, y') = \int_0^1 \mathcal{J}(ty + (1-t)y')dt = \mathcal{J}(y') + O(|y - y'|),$$

vemos que $\mathcal{J}_0(y, y')$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ no espaço das matrizes, invertível em toda parte em alguma vizinhança $\mathcal{W}_0$ da diagonal em $\Omega' \times \Omega'$.

Considere agora um par arbitrário (y_0, y'_0) tal que $v_0 = y_0 - y'_0 \neq 0$. Existe

uma vizinhança aberta $U(v_0)$ em $\mathbb{R}^n$ e uma função $\mathcal{C}^\infty$ com valores no espaço das matrizes $G(v)$, invertível em $U(v_0)$, tal que

$$v = G(v)v_0 \quad \forall v \in U(v_0). \quad (2.3.17)$$

Analogamente, como $u_0 = \overset{-1}{\phi}(y_0) - \overset{-1}{\phi}(y'_0) \neq 0$, existe uma vizinhança $U(u_0)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$u = F(u)u_0 \quad \forall u \in U(u_0), \quad (2.3.18)$$

onde F é uma matriz invertível com entradas $\mathcal{C}^\infty$ em $U(u_0)$. Escolha uma matriz invertível qualquer M_0 , tal que $u_0 = M_0v_0$, e defina

$$M(u, v) = F(u)M_0G(v)^{-1}.$$

Temos

$$u = M(u, v)v, \quad \forall (u, v) \in U(u_0) \times U(v_0), \quad (2.3.19)$$

e $M(u, v)$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ com valores no n -ésimo grupo linear, no conjunto $U(u_0) \times U(v_0)$. Podemos formar

$$\mathcal{J}(y, y'; y_0, y'_0) = M(\overset{-1}{\phi}(y) - \overset{-1}{\phi}(y'), y - y').$$

e vemos que existe uma vizinhança aberta $\mathcal{W}(y_0, y'_0)$ de (y_0, y'_0) em que a matriz $\mathcal{J}(y, y'; y_0, y'_0)$ é $\mathcal{C}^\infty$ e invertível em toda parte. ■

Retornamos agora para a demonstração do Teorema 2.3.3. Vamos assumir que a cobertura $\{\mathcal{W}_j\}_{(j \in J)}$ do Lema 2.3.1 seja localmente finita, e formaremos uma partição $\mathcal{C}^\infty$ da unidade $h_j(y, y')$ em $\Omega \times \Omega$ subordinada a esta. Seja então $a(x, x', \xi)$ uma amplitude de A e v uma função teste em Ω' , considerada como uma distribuição (com suporte compacto) em Ω' . Temos

$$\begin{aligned} A^\phi v(y) &= \phi_*(A\{(v \circ \phi)| \det \mathcal{J}|^{-1}\}) \\ &= (2\pi)^{-n} \phi_* \int \int e^{i\langle x-x', \xi \rangle} a(x, x', \xi) v(\phi(x')) |\det \mathcal{J}(x')| dx' d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} |\det \mathcal{J}(y)| \int \int \exp\{i\langle \tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(y'), \xi \rangle\} a(\tilde{\phi}(y), \tilde{\phi}(y'), \xi) v(y') dy' d\xi. \end{aligned}$$

Defina

$$a_j^\#(y, y', \xi) = h_j(y, y') a(\tilde{\phi}(y), \tilde{\phi}(y'), \xi).$$

Pelo Lema 2.3.1 podemos escrever, para (y, y') no suporte de $a_j^\#$,

$$\overset{-1}{\phi}(y) - \overset{-1}{\phi}(y') = \mathcal{J}_j(y, y')(y - y'),$$

donde

$$\begin{aligned} (2\pi)^n |\det \mathcal{J}(y)|^{-1} A^\phi v(y) = \\ \sum_j \int \int \exp\{i \langle y - y', \mathcal{J}_j(y, y') \xi \rangle\} a^\#(y, y', \mathbf{1}) v(y') dy' d\xi = \\ \sum_j \int \int e^{i \langle y - y', \eta \rangle} a_j^\#(y, y', \mathcal{J}_j^{-1}(y, y') \eta) |\det \mathcal{J}_j(y, y')|^{-1} v(y') dy' d\eta. \end{aligned}$$

Assim, seja

$$\begin{aligned} a^\phi(y, y', \eta) \\ = |\det \mathcal{J}(y)| \sum_j h_j(y, y') |\det \mathcal{J}_j(y, y')|^{-1} a(\tilde{\phi}(y), \tilde{\phi}(y'), (\mathcal{J}_j^{-1})^t \eta). \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Provamos que

$$A^\phi v(y) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i \langle y - y', \eta \rangle} a^\phi(y, y', \eta) v(y') dy' d\eta. \quad (2.3.21)$$

Resta apenas mostrar que $a^\phi \in \mathcal{S}^m(\Omega', \Omega')$, que é uma consequência de (2.2.5). O fato chave é que apesar da diferenciação com respeito à y e y' trazem, como fatores, potências de η , via diferenciação de $a(\tilde{\phi}(y), \tilde{\phi}(y'), \xi)$ com respeito à $\xi = \mathcal{J}_j^{-1}(y, y') \eta$, cada diferenciação desta abaixa o grau de ξ , em virtude de (2.2.5), e portanto compensa o efeito do fator $\eta_i, i = 1, \dots, n$, que aparece por causa disso. ■

O Teorema 2.3.3 nos dá condições de provar a chamada invariância de espaços de Sobolev:

Teorema 2.3.4 *Seja ϕ como no Teorema 2.3.3. Para todo real s a aplicação “imagem direta” ϕ_* induz um isomorfismo de $H_c^s(\Omega)$ em $H_c^s(\Omega')$ (resp. de $H_{loc}^s(\Omega)$ em $H_{loc}^s(\Omega')$).*

Demonstração:

É suficiente provar a tese acima quando o índice é c e usar a dualidade quando este é loc . Se $u \in H_c^s(\Omega)$ e $A \in \Psi^{-s}(\Omega)$, temos (Teorema 2.2.1) $Au \in L_{loc}^2(\Omega)$. Reciprocamente suponha que $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e que $(1 - \Delta)^{-s/2} u \in L_{loc}^2(\Omega)$ (veja 2.2.12); então $u \in H^s$. Em outras palavras, $u \in H_c^s(\Omega)$ se, e somente se, $Au \in L_{loc}^2(\Omega)$ para todo $A \in \Psi^{-s}(\Omega)$. Mas $\phi_*(Au) = A^\phi(\phi_* u)$; e $A^\phi \in \Psi^{-s}(\Omega')$. Assim é suficiente provar a afirmação quando $s = 0$, neste o caso já é bem conhecido. (Segue da fórmula de mudança de variáveis na integral de Lebesgue.) ■

Definição 2.3.2 *Seja m um número real. Denotaremos por $\mathcal{S}^m(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ que consiste das amplitudes $a(x, \xi)$ independentes de y . Denotamos por $\mathcal{S}^{-\infty}(\Omega)$ a interseção dos espaços $\mathcal{S}^m(\Omega)$ quando m varia em $\mathbb{R}$.*

Qualquer elemento de $\mathcal{S}^m(\Omega)$ será visto como uma função $\mathcal{C}^\infty$ em $\Omega \times \mathbb{R}_n$ ao invés de $\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}_n$. Tais funções satisfazem a desigualdade (2.2.4). A topologia de $\mathcal{S}^m(\Omega)$ é aquela induzida por $\mathcal{S}^m(\Omega, \Omega)$ em que $\mathcal{S}^m(\Omega)$ é um subespaço vetorial fechado; portanto $\mathcal{S}^m(\Omega)$ é um espaço de Fréchet.

Definição 2.3.3 *Denotamos por $\dot{\mathcal{S}}^m(\Omega)$ o espaço vetorial quociente $\mathcal{S}^m(\Omega)/\mathcal{S}^{-\infty}(\Omega)$. Os elementos de $\dot{\mathcal{S}}^m(\Omega)$ serão chamados de símbolos de grau $\leq m$ em Ω . Denotamos por $\dot{\mathcal{S}}(\Omega)$ a união dos $\dot{\mathcal{S}}^m(\Omega)$.*

É comum quando lidamos com conjuntos quocientes representar uma classe de equivalência por um de seus representantes. Mas vamos também representar esta por uma certa série, que introduziremos agora e que estão relacionadas com a série que representa uma parametriz K na seção 1 (veja (2.1.28) e (2.1.32)).

Na verdade é conveniente lidar com símbolos formais ao invés de símbolos verdadeiros. Um símbolo formal é uma sequência de símbolos $a_j \in \mathcal{S}^{m_j}(\Omega)$ cujas ordens são estritamente decrescentes e convergem a $-\infty$. É de costume representar esta por uma série formal

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x, \xi). \quad (2.3.22)$$

Agora, destes símbolos formais podemos construir os verdadeiros símbolos, elementos de $\mathcal{S}^{m_0}(\Omega)$, que pertencem a mesma classe modulo $\mathcal{S}^{-\infty}(\Omega)$. Representaremos esta classe pela notação (2.3.22). Podemos proceder da seguinte forma:

Primeiramente, podemos assumir que o símbolo $a(x, \xi)$ pertence a classe (2.3.22) se, dado qualquer número positivo “grande” M , existe um inteiro $J \geq 0$ tal que

$$a(x, \xi) - \sum_{j=0}^J a_j(x, \xi) \in \mathcal{S}^{-M}(\Omega).$$

Depois, podemos construir tal símbolo $a(x, \xi)$ como a soma de uma série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \chi_j(\xi) a_j(x, \xi), \quad (2.3.23)$$

onde $\chi_j(\xi) = \chi(\rho_j^{-1}|\xi|)$ como em (2.1.31).

De agora em diante usaremos a notação $\dot{\Psi}^m(\Omega)$ para denotar o espaço quociente $\Psi^m(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega)$. Nós freqüentemente iremos nos referir aos elementos de $\dot{\Psi}^m(\Omega)$ como classes (mod $\Psi^{-\infty}(\Omega)$) de operadores pseudodiferenciais em Ω , de ordem m . A união dos $\dot{\Psi}^m(\Omega)$ será denotada por $\dot{\Psi}(\Omega)$.

As noções de transposto, adjunto e composto podem ser transferidas numa forma natural para as classe mod $\Psi^{-\infty}(\Omega)$ de operadores pseudodiferenciais em Ω ; se A e B são congruentes mod $\Psi^{-\infty}(\Omega)$, o mesmo é verdade para seus transpostos A^t e B^t e também para seus adjuntos A^* e B^* .

Se o operador Op a , definido por

$$(Opa)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (2.3.24)$$

pertence a classe $\dot{A} \in \dot{\Psi}^m(\Omega)$, dizemos que a classe de $a(x, \xi)$ mod $\mathcal{S}^{-\infty}(\Omega)$ é o símbolo de $\dot{A}$, ou de qualquer representante A de $\dot{A}$.

Teorema 2.3.5 *Seja $\dot{A} \in \dot{\Psi}^m(\Omega)$ com símbolo $a(x, \xi) \in \dot{\mathcal{S}}^m(\Omega)$. Então o símbolo do transposto A^t de A é definido pelo símbolo formal*

$$\sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} a)(x, -\xi), \quad (2.3.25)$$

e o símbolo do adjunto A^* , por

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} \overline{a(x, \xi)}. \quad (2.3.26)$$

Demonstração:

Trocamos $\dot{A}$ por um representante A , $a(x, \xi)$ por um de seus representantes, ainda denotado por $a(x, \xi)$, tal que (2.2.3) vale. Podemos então considerar $\overline{a(x, \xi)}$ como uma amplitude de A , que não depende de y . Então $a(y, -\xi)$ e $\overline{a(y, \xi)}$ são amplitudes de A^t e A^* respectivamente. Para que tenhamos (2.3.25) e (2.3.26) é suficiente formar a expressão

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} a(x, x, \xi),$$

onde trocamos $a(x, y, \xi)$ por estes símbolos formais respectivamente. ■

Corolário 2.3.1 *Seja $\dot{A}$ como no Teorema 2.3.5, mas assumimos que existe um símbolo real $a_0(x, \xi) \in \dot{\mathcal{S}}^m(\Omega)$ tal que $a(x, \xi) - a_0(x, \xi) \in \dot{\mathcal{S}}^{m-1}(\Omega)$. Então $\dot{A} - \dot{A}^* \in \dot{\Psi}^{m-1}(\Omega)$.*

Demonstração:

Escrevemos $a(x, \xi) = a_0(x, \xi) + r(x, \xi)$, $r(x, \xi) \in \dot{\mathcal{S}}^{m-1}(\Omega)$. Então, por (2.3.26), o símbolo de A^* é igual a

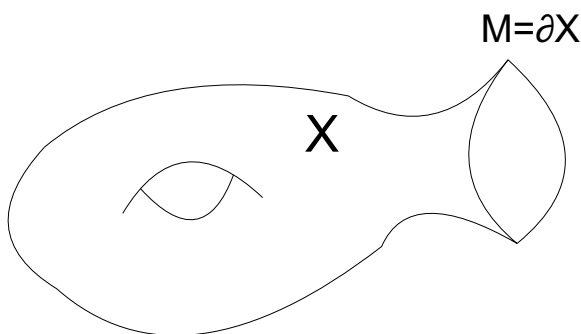
$$a_0(x, \xi) + \overline{r(x, \xi)} + \sum_{|\alpha| > 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \overline{D_x^\alpha a(x, \xi)}, \quad (2.3.27)$$

e portanto $\dot{A} - \dot{A}^*$ pertence a $\dot{\mathcal{S}}^{m-1}(\Omega)$. ■

Capítulo 3

Variedades Assintoticamente Hiperbólicas

Seja X uma variedade compacta com fronteira e suponha que o seu interior, $\overset{\circ}{X}$, é equipado com uma métrica Riemanniana completa g .



Definição 3.0.4 *Seja X uma variedade compacta com fronteira $\partial X = M$, com uma métrica completa g em seu interior. (X, g) é chamado conformemente compacto se*

$$g = \rho^{-2}h$$

numa vizinhança de M para uma função que define a fronteira ρ , tal que $\rho > 0$ em X , $\rho = 0$ em ∂X e $d\rho \neq 0$ em ∂X , h é uma métrica C^∞ em $\bar{X}$.

Note que ρ , logo h , são determinados unicamente pela multiplicação por uma função positiva. Portanto g determina uma classe conforme de métricas $[h|_{\partial X}]$ em $\partial X = M$.

Exemplos importante de variedades do tipo descrito acima são os espaços

hiperbólicos.

Note que ρ , logo, h são determinados somente pela multiplicação por uma função positiva. Portanto g determina uma classe conforme de metricas $[h|_{\partial X}]$ em $\partial X = M$.

Lema 3.0.2 *A curvatura seccional de g se aproxima de $-|d\rho|_h^2$ na fronteira.*

Demonstração:

Temos que

$$g' = e^{2f}g, \quad (3.0.1)$$

donde

$$R' = e^{2f}(R - g \circ_1 (D(f - df \circ df + \frac{1}{2}|df|^2g))) \quad (3.0.2)$$

$$e^{2f} = \frac{1}{\rho^2} \implies f = -\log \rho$$

$$R' = \frac{1}{\rho^2}(R - g \circ_1 (D(\frac{-1}{\rho}d\rho) - (\frac{1}{\rho})^2d\rho \circ d\rho + \frac{1}{2}\frac{|d\rho|_g^2}{\rho^2}g)), \quad (3.0.3)$$

onde $\circ$ é o produto simétrico e

$$(h \circ_1 k)(x, y, z, t) = h(x, z)k(y, t) + h(y, t)k(x, z) - h(x, t)k(y, z) - h(y, z)k(x, t) \quad (3.0.4)$$

Agora vemos que

$$g(X, X) = 1, \quad g'(X, X) = \frac{1}{\rho^2},$$

onde X é uma vetor tangente. Logo ρX tem de tamanho 1 com respeito à g' . Temos

$$R'(\rho X, \rho Y, \rho X, \rho Y) = \frac{1}{\rho^2}(R(\rho X, \rho Y, \rho X, \rho Y) - g(\rho X, \rho Y)), \quad (3.0.5)$$

$$g \circ_1 g(x, y, x, y) = 1 + 1 = 2$$

$$-D(\frac{1}{\rho}d\rho) = -(d\frac{1}{\rho} \otimes d\rho + \frac{1}{\rho}D^g d\rho) + \frac{1}{\rho^2}d\rho \otimes d\rho - \frac{1}{\rho}Dd\rho$$

Fazendo $\rho \rightarrow 0$, temos o resultado desejado. ■

Definição 3.0.5 *X é chamado uma variedade assintoticamente hiperbólica se é uma variedade compacta conforme com $|d\rho|_h^2 = 1$ na fronteira de X , ∂X .*

Agora fixe uma representação da classe conforme, f , em $\partial X = M$.
Então existe uma função que define a fronteira ρ tal que

$$g = \frac{d\rho^2 + h_\rho}{\rho^2}, \quad h_0 = f$$

perto de M .

Isso é equivalente a achar ρ tal que

$$\begin{cases} g = \frac{h}{\rho^2} & \text{se } h|_{\partial X} = f \\ |d\rho|_h^2 \equiv 1 & \text{ numa vizinhança de } M \end{cases},$$

Portanto

$$h \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_0 = h|_{\partial X} \end{pmatrix}$$

Demonstração: Fixe uma função que define a fronteira $\bar{\rho}$.

Uma função que define a fronteira ρ pode ser escrita na forma

$$\rho = e^w \bar{\rho}$$

O.b.s.: queremos encontrar uma função equivalente para w .

Escreva

$$g = \frac{\bar{h}}{\bar{\rho}^2} = \frac{h}{\rho^2} = \frac{h}{e^{2w} \bar{\rho}^2}$$

$$\implies h = e^{2w} \bar{h}$$

$$d\rho = e^w (d\bar{\rho} + \bar{\rho} dw)$$

$$|d\rho|_h^2 = e^{2w} |d\bar{\rho} + \bar{\rho} dw|_{\bar{h}}^2$$

$$= |d\bar{\rho} + \bar{\rho} dw|_{\bar{h}}^2 = \langle d\bar{\rho} + \bar{\rho} dw, d\bar{\rho} + \bar{\rho} dw \rangle$$

$$= |d\bar{\rho}|_{\bar{h}}^2 + 2\bar{\rho} \langle dw, d\bar{\rho} \rangle + \bar{\rho}^2 |dw|_{\bar{h}}^2$$

$$= |d\bar{\rho}|_{\bar{h}}^2 + 2\bar{\rho} \nabla \bar{\rho}(w) + \bar{\rho}^2 |dw|_{\bar{h}}^2 = 1$$

A equação $|d\rho|_h^2 \equiv 1$ é a mesma que

$$2\nabla \bar{\rho}(w) + \bar{\rho} |dw|_{\bar{h}}^2 = \frac{1 - |d\bar{\rho}|_{\bar{h}}^2}{\bar{\rho}} \quad (3.0.6)$$

que possui uma solução w , pois (3.0.6) é uma equação diferencial parcial não-característica.

De agora em diante denotaremos por (X, g) como sendo uma variedade assintoticamente hiperbólica com métrica completa g em seu interior.

$$(i) \quad g = \frac{h}{x^2} \quad (3.0.7)$$

$$(ii) |dx|_h^2 = 1 \quad \text{em} \quad \partial X \quad (3.0.8)$$

Consideremos a forma normal:

$$g = \frac{dx^2 + h(x, y, dy)}{x^2} \quad (3.0.9)$$

Nosso propósito é construir uma parametriz de $\Delta_g - s(n - s)$, i.e., $R(s)$ tal que

$$(\Delta_g - s(n - s))R(s) = I + E(s), \quad (3.0.10)$$

onde $E(s)$ é um operador compacto (em L^2 ou em L^2 com peso). Não podemos esperar isso para uma variedade Riemanniana mais geral em algum sentido, pois Δ_g se torna elíptico no infinito, mas para uma métrica assintoticamente hiperbólica, temos uma descrição precisa das singularidades, e a principal idéia do trabalho de Mazzeo-Melrose [1] é construir um refinado cálculo pseudodiferencial para lidar com estas singularidades.

O operador pseudodiferencial refinado terá núcleo de Schwartz em algum espaço “blow up” que definiremos precisamente mais adiante.

Primeiramente discutiremos a forma do Laplaceano. Veremos como o operador de Laplace de um espaço assintoticamente hiperbólico se parece.

Caso Modelo:

Considere o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_y^n$ com

$$ds^2 = \frac{dx^2 + |dy|^2}{x^2} \quad (3.0.11)$$

Escrevendo $g = ds^2$ na forma

$$g = \sum_{i,j=0}^n g_{ij} dx_i dx_j, \quad (3.0.12)$$

obtemos

$$\Delta_g = \Delta_{\mathbb{H}^{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (3.0.13)$$

onde

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x^2 \end{pmatrix} \quad (3.0.14)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^{n+1}} &= -x^{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x^2}{x^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= -x^2 \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + (n-1)x \frac{\partial}{\partial x} \\ &= -x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) + (n-1)x \frac{\partial}{\partial x} \\ &= -(x\partial_x)^2 - \sum_{i=1}^n (x\partial_{y_i})^2 + nx\partial_x \end{aligned} \quad (3.0.15)$$

Caso Geral:

Consideremos agora uma variedade assintoticamente hiperbólica geral.

Neste caso

$$g = \frac{dx^2 + h(x, y, dy)}{x^2} \quad (3.0.16)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{h_{\alpha\beta}}{x^2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq i, j \leq n \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n \quad (3.0.17)$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 h_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq i, j \leq n \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n \quad (3.0.18)$$

$$\det g = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \det h, \quad h = h_0 + xh_1 + x^2h_2 + \dots \quad (3.0.19)$$

Temos que

$$h_0^{-1}h = 1 + xh_0^{-1}h_1 + x^2h_0^{-1}h_2 + \dots,$$

segue que

$$\begin{aligned} \det h_0^{-1}h &= \det(1 + xh_0^{-1}h_1 + x^2h_0^{-1}h_2 + \dots) \\ \sqrt{\det h_0^{-1}h} &= \sqrt{\det h} = \sqrt{1 + xf(x)} = 1 + xf'(x), \end{aligned}$$

donde

$$\sqrt{\det h} = \sqrt{\det h_0} + xf''(x). \quad (3.0.20)$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_g &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial y_\alpha} x^2 h^{\alpha\beta} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \\
&\quad - \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{\det h_0} + xf(x))} \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial y_\alpha} x^{-n+1} h^{\alpha\beta} (\sqrt{\det h_0} + xf(x)) \frac{\partial}{\partial y_\beta} \\
&= -\frac{x^{n+1}}{\sqrt{\det h_0}} x^{-n+1} \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial y_\alpha} h_0^{\alpha\beta} \sqrt{\det h_0} \frac{\partial}{\partial y_\beta} + \dots \\
&= x^2 \Delta_{h_0} + x^3(\dots)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta_g = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + (n-1)x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \Delta_{h_0} + xE = -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2 \Delta_{h_0} + xE, \quad (3.0.21)$$

onde E é um operador diferencial gerado pelos campos de vetores $x\partial_x, x\partial y$. Da expressão dada acima, vemos que Δ_g é um operador diferencial gerado pelos campos de vetores da forma $x dx, x dy_i, i = 1, \dots, n$. Isto define a classe de operadores diferenciais que está contida na classe refinada de operadores pseudodiferenciais.

Capítulo 4

Construção do Resolvente

O principal resultado que provaremos é o seguinte:

Teorema 4.0.6 *Sejam (X, g) uma variedade assintoticamente hiperbólica. $\Delta_g - s(n-s)$ é invertível para $\text{Re } s \gg 0$, o inverso, $R(s)$, chamado resolvente em s se estende a uma família meromorfa*

$$R(s) \in \Psi_0^{-2, \zeta, \zeta}(X)$$

em $\mathbb{C} \setminus \{\text{conjunto discreto}\}$.

Note que a aplicação $R(s) : \dot{C}^\infty(X) \longrightarrow x^s \mathcal{C}^\infty(X)$, mencionada anteriormente, é uma propriedade de $\Psi_0^{-2, \zeta, \zeta}(X)$. O espaço de operadores pseudodiferenciais $\Psi_0^{-2, \zeta, \zeta}(X)$ será definido posteriormente.

4.1 Símbolos

Definição 4.1.1 $\mathcal{V}_0 = \{\text{Campos de vetores em } X \text{ que se anulam na fronteira}\} = x\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ é o espaço dos campos de vetores em X).

Se $V \in \mathcal{V}_0$, então $V = ax\partial_x + \sum_{i=1}^n b_i x\partial_{y_i}$. $\mathcal{V}_0$ é uma Álgebra de Lie com respeito ao colchete de Lie.

$\text{Diff}_0^k(X) = \text{Espaço dos operadores diferenciáveis de ordem } k \text{ gerado por um campo de vetores em } \mathcal{V}_0$. Se $P \in \text{Diff}_0^k(X)$, chamamos P de 0-operador diferencial. Em particular $\Delta_g \in \text{Diff}_0^2$.

Dado $P \in \text{Diff}_0^k$, definiremos um símbolo, que chamaremos de 0-símbolo principal de P e um novo símbolo chamado de operador normal de P . Todas

essas definições e cálculos se tornarão mais claros posteriormente. Na verdade, teremos quatro símbolos, descrevendo o comportamento do núcleo do operador na diagonal, na face frontal, na face de baixo e na face de cima. Para definir o 0-símbolo principal de P é mais conveniente começar definindo alguns objetos auxiliares.

Note que os conjuntos dos termos de $\mathcal{V}_0$ é localmente livre e eles são as seções de um fibrado vetorial denotado por 0TX (a descrição local de 0TX é dada pela base da seção $\{x\partial_x, x\partial_{y_1}, \dots, x\partial_{y_n}\}$. Seu (fibrado) dual é definido por ${}^0T^*X$ e tem triangularização dada por $\{dx/x, dy_1/x, \dots, dy_n/x\}$.

Definição 4.1.2 *Dado $P \in \text{Diff}_0^k$, ${}^0\sigma_k(P) \in \mathcal{C}^\infty({}^0T^*X)$ é obtido trocando os termos em P com ordem menor ou igual a k , $x\partial_x, x\partial_{y_1}, \dots, x\partial_{y_n}$ por $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ (aqui $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ são consideradas coordenadas em ${}^0T^*X$ com respeito à base $\{dx/x, dy_1/x, \dots, dy_n/x\}$).*

Exemplo 4.1.1 *Considere $\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}} = -(x\partial_x)^2 - \sum (x\partial_{y_i})^2 + nx\partial_x$. Então ${}^0\sigma_2(\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}}) = \xi_0^2 + |\xi'|^2, \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.*

Definição 4.1.3 *$P \in \text{Diff}_o^k(X)$ é elíptico se, e somente se, ${}^0\sigma_k(P) \neq 0$ em ${}^0T^*X$.*

Definição 4.1.4 *Seja $P \in \text{Diff}_0^k(X)$. Tome $p \in \partial X$, definimos o operador em p de P normal, $N_p(P)$, congelando os coeficientes de P em p . Mais precisamente, podemos escrever*

$$P = \sum_{j+|\alpha|=0}^k P_{j,\alpha}(x, y) (x\partial_x)^j (x\partial_y)^\alpha, \quad (4.1.1)$$

onde escolhemos uma coordenada normal local (com respeito à h_0 de ∂X em torno de p tal que $p = (0, 0, \dots, 0)$, então

$$N_p(P) = \sum_{j+|\alpha|=0}^k P_{j,\alpha}(0, 0) (x\partial_x)^j (x\partial_y)^\alpha. \quad (4.1.2)$$

Exemplo 4.1.2

$$N_p(\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}}) = -(x\partial_x)^2 - \sum_{i=1}^n (x\partial_{y_i})^2 + nx\partial_x = \Delta_{\mathbb{H}^{n+1}}$$

Exemplo 4.1.3 Considere a bola B^{n+1} , $ds^2 = \frac{4dz^2}{(1-|z|^2)^2}$, $z = (z_1, \dots, z_n)$. Considere $r = |z|$ e $\rho = 1 - |z|^2$ é a função que define a fronteira. Temos que

$$dz^2 = dr^2 + r^2 d\omega_{S^n}^2.$$

$$\begin{aligned} d\rho &= -2rdr \Rightarrow d\rho^2 = 4r^2 dr^2 \Rightarrow dr^2 = \frac{d\rho^2}{4r^2} = \frac{d\rho^2}{4(1-\rho)} \\ \Rightarrow ds^2 &= \frac{4 \left(\frac{d\rho^2}{4(1-\rho)} + (1-\rho) d\omega_{S^n}^2 \right)}{\rho^2} = \frac{4}{\rho^2} \left(\frac{d\rho^2}{1-\rho} + (1-\rho) d\omega_{S^n}^2 \right) \\ \Rightarrow ds^2 &= \frac{d\rho^2}{(1-\rho)\rho^2} + \frac{4(1-\rho)}{\rho^2} d\omega_{S^n}^2. \end{aligned}$$

Ponha

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^2}{(1-\rho)\rho^2} &= \frac{dx^2}{x^2} \\ \Rightarrow \int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho}\rho} &= \int \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Faça $\eta = 1 - \rho$, segue que $d\eta = -d\rho$ e

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho}\rho} = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}(\eta-1)},$$

ponha $\beta = \eta^{1/2}$, segue que $d\beta = \frac{d\eta}{\eta^{1/2}}$, donde

$$\begin{aligned} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}(\eta-1)} &= \int \frac{2d\beta}{\beta^2-1} = 2 \int \frac{d\beta}{(\beta-1)(\beta+1)} \\ &= - \int \frac{d\beta}{\beta+1} + \int \frac{d\beta}{\beta-1} = -\ln(\beta+1) + \ln(\beta-1) = \ln \frac{\beta-1}{\beta+1} \\ &= \ln \frac{\eta^{1/2}-1}{\eta^{1/2}+1} = \ln \frac{(1-\rho)^{1/2}-1}{(1-\rho)^{1/2}+1} = \ln x, \\ x &= \frac{(1-\rho)^{1/2}-1}{(1-\rho)^{1/2}+1} \Rightarrow (1-\rho)^{1/2}x - x = (1-\rho)^{1/2} + 1 \\ \Rightarrow 1+x &= (1-\rho)^{1/2}(x-1) \Rightarrow (1-\rho)^{1/2} = \frac{x+1}{x-1} \\ \Rightarrow 1-\rho &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 \Rightarrow \rho = 1 - \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 = \frac{-4x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \rho^2 &= \frac{16x^2}{(x-1)^4} \\
\Rightarrow ds^2 &= \frac{dx^2}{x^2} + \frac{\frac{4(x+1)^2}{(x-1)^2}}{\frac{16x^2}{(x-1)^4}} d\omega_{S^n}^2 \\
&= \frac{dx^2}{x^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)^2}{4x^2} d\omega_{S^n}^2 = \frac{dx^2}{x^2} + \frac{(x^2-1)^2}{4x^2} d\omega_{S^n}^2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta_{B^{n+1}} &= (-x\partial_x)^2 - \frac{n(x+1)^2}{x^2-1} x\partial_x + \frac{1}{(x^2-1)^2} x^2 \Delta_{S^n} \\
\Rightarrow N_p(\Delta_{B^{n+1}}) &= -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + \sum (x\partial_{y_i})^2,
\end{aligned}$$

$p \in S^n$ em coordenadas normais em torno de p . Em p

$$\Delta_{S^n} = \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}^2.$$

Assim o mesmo para o $N_p(\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}})$ ou $\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}}$ seguem do caso geral, o Laplaceano para uma variedade assintoticamente hiperbólica

$$\begin{aligned}
\Delta_g &= -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2 \Delta_h + xE \\
N_p(\Delta_g) &= -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x - \sum (x\partial_{y_i})^2.
\end{aligned}$$

Portanto eles são o mesmo que o Laplaceano de $\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}}$.

Isto termina as definições dos símbolos de $P \in Dif_0^k(X)$.

Agora vamos analisar a definição intrínseca do operador normal.

Tome $p \in \partial X$, $T_p(\partial X) \subseteq T_p(X)$ divide $T_p(X)$ em duas partes.

Seja $X_p = \text{"inward point half"}$ de $T_p(X)$ (sua fronteira é $T_p(\partial X)$.) Tome $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ difeomorfismo tal que

$$f(\partial X) \subset \partial X,$$

onde Ω é uma vizinhança de 0 em X_p , Ω' é uma vizinhança de p em X . Sejam $P \in Dif_0^k(X)$ e u uma função $\mathcal{C}^\infty$ em X_p . Ponha

$$N_p(P)u = \lim_{r \rightarrow 0} R_r^* f^* P(f^{-1})^* (R^{1/r})^* u, \quad (4.1.3)$$

onde R_r é a multiplicação pelo escalar r em X_p . Então

1. $N_p(P)$ é independente da escolha de f .
2. $N_p(P)$ coincide com a definição feita anteriormente.
3. $N_p(P)$ é um operador diferencial em X_p .

4.2 Os Espaços Blow-up

Para definir $\Psi_0^{-2,\zeta,\zeta}(X)$ precisamos introduzir a noção de espaço blow-up, introduzida por Richard Melrose.

Vamos definir nossa classe “refinada” de operadores pseudodiferenciais pela condição do núcleo de Schwartz.

$K_P(x, x') \in \mathcal{C}^\infty(X)$, para que K_P defina um operador compacto, precisamos que K_P cresça com relação a x' e decresça com relação a x .

Para distinguir os dois procedimentos, precisamos separar a diagonal e as duas faces da fronteira.

Melrose faz isso através de um “blow up” no corner (que não é nada mais que uma mudança de coordenadas $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.)

Uma vez que separamos a diagonal das duas faces da fronteira, gostaríamos de ser capazes de aplicar cálculos simples para remover as singularidades da diagonal. Isso pode ser feito se “dobrarmos” o espaço “blow up” de modo que nossa classe de operadores se estenda pela diagonal como uma distribuição conormal usual. Mas isso não é claro, já que o operador Δ_g tem singularidades na diagonal. Os principais propósitos do “blow-up” são:

1. remover singularidades do operador
2. separar as faces da diagonal e da fronteira.

Um caso interessante de espaço “blow-up” é o chamado produto esticado de $X \times X$. Faremos primeiramente uma discussão geral sobre espaços “blow-up”.

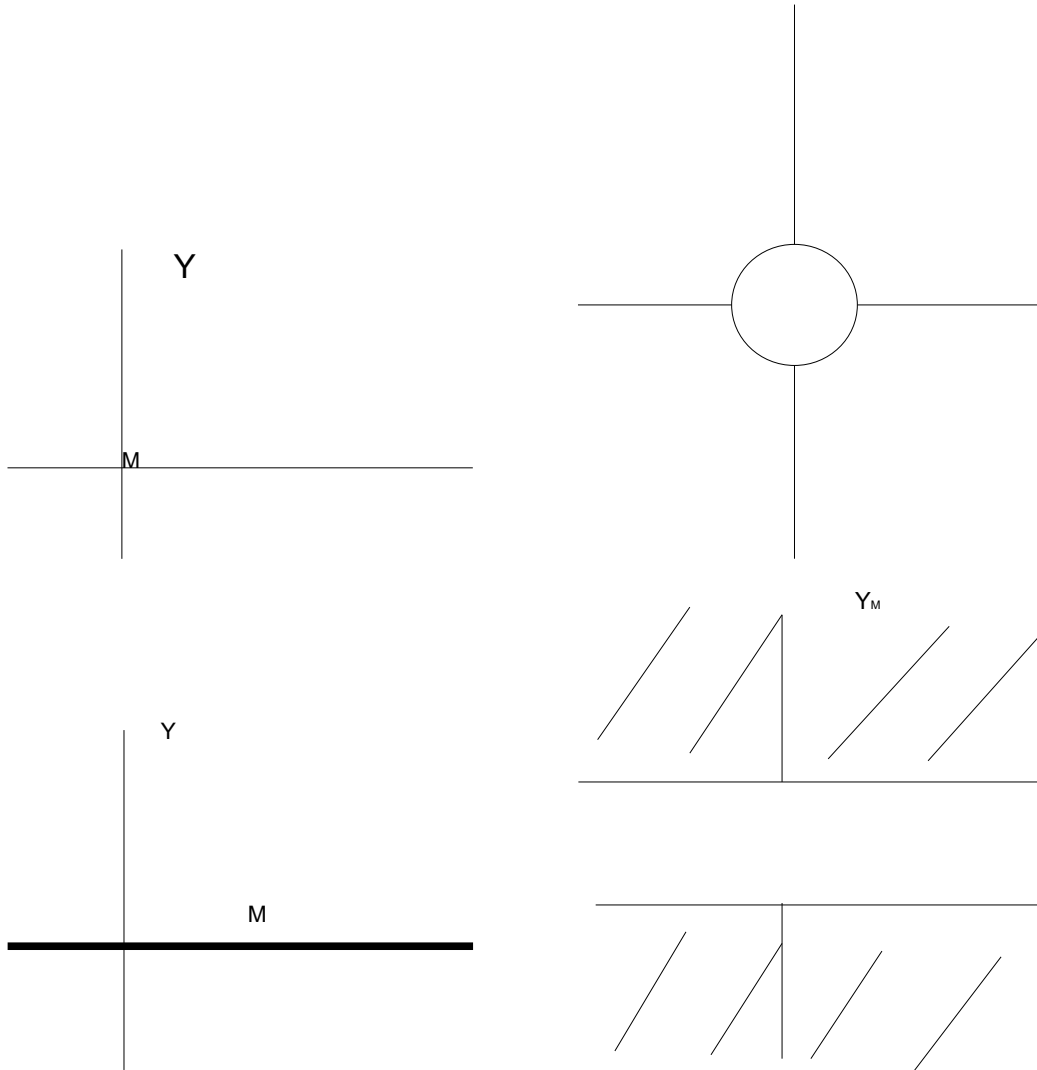
Sejam Y uma variedade com fronteira e $M \subset Y$ uma subvariedade fechada mergulhada em Y . Seja $m \in M$, o fibrado normal à M em Y é dado por $N_m M = T_m Y / T_m M$. O fibrado normal unitário SNM (“sphere normal bundle”) tem fibras $SN_m M = (N_m M - \{0\}) / \mathbb{R}^+$. Então o espaço “blow-up” de Y em torno de M é

$$Y_M = SNM \coprod (Y - M) \quad (\text{como conjunto}), \quad (4.2.1)$$

onde $\coprod$ representa união disjunta, com estrutura $\mathcal{C}^\infty$ tal que a aplicação “blow down” $b : Y_M \rightarrow Y$ é $\mathcal{C}^\infty$, onde b é definida por $b = id$ em $Y - M$, $b = \text{projeção } SNM \rightarrow M$ em M .

Exemplo 4.2.1 *Seja $Y = \mathbb{R}^2$, $M = \{0\}$.*

Exemplo 4.2.2 *Sejam $Y = \mathbb{R}^2$, $M = \text{eixo-}x$.*



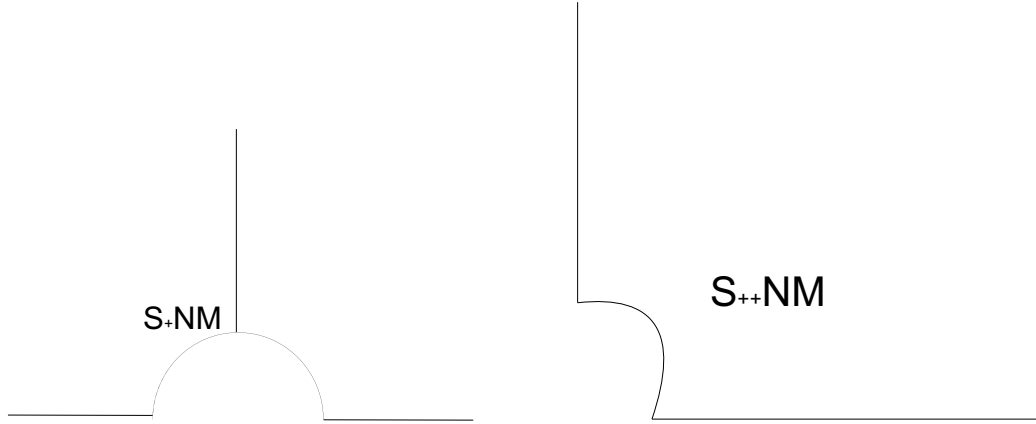
Aplique agora a definição acima à $Y = X \times X$, $M = \Delta_l$, onde Δ_l é a diagonal de $Y (\cong X)$ que tem como fronteira $\partial\Delta_l$.

Perceba que esta é uma definição um pouco diferente da definição de espaço “blow-up” que demos a pouco. Agora Y é uma variedade com bordo e M está no bordo de Y .

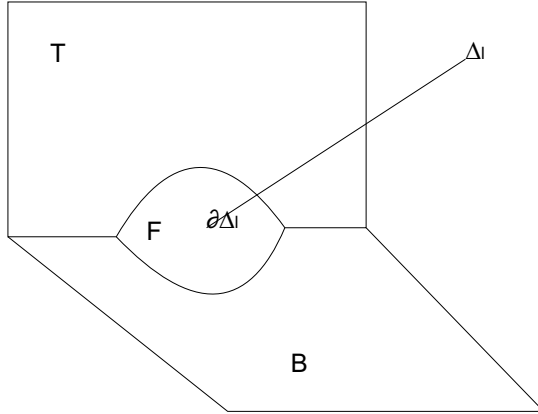
Ao invés de tomar a esfera fibrada normal, tomamos o quarto da esfera normal fibrada $S_{++}NM$. Por exemplo $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $M = \{0\}$

Assim

$$X \times_0 X = S_{++}N(\partial\Delta_l) \coprod (X \times X - \partial\Delta_l), \quad (4.2.2)$$



e $b : X \times_0 X \rightarrow X \times X$ é a aplicação “blow down”.



Onde T é a face superior (Top face), F é a face frontal (Front face) e B é a face inferior (Bottom face). Temos que T, B, F são faces de codimensão 1, $T \cap B, F \cap T, F \cap B$ são faces de codimensão 2 e $T \cap B \cap F$ é uma face de codimensão 3.

Como F é dada por $S_{++}NM$ seu interior é simplesmente o interior da quarta parte da esfera fibrada sobre $\partial\Delta_l$. Portanto cada fibra de F é uma quarta parte da esfera.

Continuamos considerando (X, g) uma variedade assintoticamente hiperbólica, $\mathcal{V}_0 = \{\text{campos de vetores gerados por } x\partial_x, x\partial_{y_1}, \dots, x\partial_{y_n}\}$ e $Diff_0^*(X) = \text{conjunto dos operadores diferenciais gerado por } \mathcal{V}_0$.

Vimos que se $P \in Diff_0^k(X)$, então o 0-símbolo principal ${}^0\sigma_k(P) \in \mathcal{C}^\infty({}^0T^*X)$, e se $p \in \partial X$, o operador normal $N_p(P) : \mathcal{C}^\infty(X_p) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X_p)$.

Seja $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Definimos a seguinte operação em G , dados $\gamma = (s, v), \gamma' = (s', v') \in G$,

$$\gamma' \cdot \gamma = (s', v') \cdot (s, v) = (ss', v + sv'). \quad (4.2.3)$$

Vemos que dado $\gamma = (s, v) \in G$, então o seu inverso, com relação à operação acima, é dado por $\gamma^{-1} = (\frac{1}{s}, \frac{-v}{s})$.

Vemos que $G \simeq X_p$. Temos ainda que $N_p(P) : \mathcal{C}^\infty(G) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(G)$ é um operador invariante, à esquerda, em G .

Nós agora veremos que F_p (fibra sobre $(p, p) \in \partial\Delta_l$) tem uma estrutura de grupo identificada com G_p .

Primeiramente veremos que existe um ponto distinto em F_p , a origem natural. Com efeito, tome $v \in X_p$, $(v, v) \in X_p \times X_p$, que define um elemento $O_p = [(v, v)] \in S_{++}N_p(\partial\Delta_l)$.

Depois vemos que G_p age em $X_p \times X_p$ de duas formas (que induz um mergulho de G_p em $GL(T_p X \times T_p X)$, chamado G_p^l a imagem de $GL(T_p X \times T_p X)$ via aquela ação). Temos que

- (i) $\gamma(v, w) = (\gamma v, w)$, $\gamma \in G_p$;
- (ii) $\gamma(v, w) = (v, \gamma w)$ $v, w \in X_p$,

que descendem da ação em F_p .

A ação é transitiva e induz um grupo, usando a ação de G_p^l em F_p . Assim $F_p \simeq G_p$.

A ação de G_p^l em F_p é então via translação à esquerda (G_p^r em F_p é feita via translação à direita). Finalmente damos algumas coordenadas locais do espaço “blow-up” $X \times_0 X$ perto da face frontal, F .

Em $X_{(x,y)} \times X_{(x',y')}$ usamos (x, y, x', y') como coordenadas (como usual x, x' funções que definem a fronteira). Podemos também usar as seguintes coordenadas: $(x, y, x', Y = y - y')$. Agora $\partial\Delta_l = \{x = x' = Y = 0\}$, e podemos identificar o fibrado normal de $\partial\Delta_l$, $N(\partial\Delta_l)$, com sua vizinhança tabular. Podemos ver x, x', Y como coordenadas lineares nas fibras de $N(\partial\Delta_l)$, y como coordenada em $\partial\Delta_l$.

Vemos que x, y, x', y', Y podem ser levantadas à $X \times X - \partial\Delta_l \subset X \times_0 X$, e então se estendem a funções $\mathcal{C}^\infty$ em $X \times_0 X$. Ainda mais $R = (x'^2 + x^2 + |Y|^2)^{1/2}$ é uma função que define a fronteira da face frontal, F .

Note que

$$s = \frac{x}{x'}, \quad z = \frac{Y}{x'}, \quad t = \frac{x'}{x} = \frac{1}{s}, \quad (4.2.4)$$

$$z' = \frac{-Y}{x}, \quad \rho = \frac{x}{|Y|}, \quad \rho' = \frac{x'}{|Y|} \quad (4.2.5)$$

$$r = |Y|, \quad \omega = \frac{Y}{|Y|} \quad (4.2.6)$$

são todas definidas em $X \times_0 X$, x, x', Y como coordenadas em $N(\partial\Delta_l)$.

Temos que

1. As coordenadas (s, z, x', y') estão bem definidas fora de $B \cap F$, $x' = 0$ define a face frontal F e $s = 0$ define a face superior T .

2. As coordenadas (t, z', x, y) estão bem definidas fora de $F \cap T$, $x = 0$ define a face frontal F e $t = 0$ define a face inferior B .
3. As coordenadas $(\rho, \rho', r, \omega, y)$ estão bem definidas perto de $T \cap B \cap F$ (fora do centro de F), $r = 0$ define a face frontal F , $\rho = 0$ define a face superior T e $\rho' = 0$ define a face inferior B .

Após a definição de produto esticado, podemos agora definir uma $\mathcal{V}_0$ classe de operadores pseudodiferenciais. Esta classe de operadores pseudodiferenciais não irá conter a parametriz que estamos procurando. No paper [1], Melrose chamaria isso de “pequeno” cálculo, e uma classe de operadores pseudodiferenciais chamada cálculo “completo” que contém a parametriz de um elemento elíptico de $\mathcal{V}_0$, que será definido posteriormente.

4.3 O Cálculo dos Símbolos

Como dissemos, a classe $\mathcal{V}_0$ de operadores pseudodiferenciais será definida por propriedades do seu núcleo de Schwartz, mas para fazer isso mais invariante, devemos incorporar a chamada meia densidade fibrada.

Lembremos que X é uma variedade compacta sem bordo. Um operador linear contínuo $A : \dot{\mathcal{C}}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^{-\infty}(X)$ (distribuições estendíveis), definido como sendo o dual da densidade $\mathcal{C}^{-\infty}$. Seu núcleo de Schwartz $K_A \in \mathcal{C}^{-\infty}(X \times X, \Gamma_r)$, onde Γ_r é o levantamento da desidade fibrada de X à $X \times X$ por π_2 . Queremos incorporar a meia densidade.

$\Gamma(X)$ = densidade fibrada usual em X .

Não é nada natural para nós considerarmos como a densidade Riemanniana de uma métrica assintoticamente hiperbólica tem a forma $a(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{x^n}$, em coordenadas locais $(g = \frac{dx^2 + h(x, y, dy)}{x^2})$.

Portanto, é mais natural considerar a meia densidade singular fibrada $\Gamma_0^{1/2}(X)$ como funções $\mathcal{C}^\infty$ da forma

$$\nu = a(x, y)^{1/2} \left| \frac{dx}{x} \frac{dy}{x^n} \right|^{1/2} \quad (4.3.1)$$

Assim considere o operador

$$B : \dot{\mathcal{C}}^\infty(X; \Gamma_0^{1/2}(X)) \rightarrow \mathcal{C}^{-\infty}(X; \Gamma_0^{1/2}(X)), \quad (4.3.2)$$

onde $K_B \in \mathcal{C}^{-\infty}(X \times X, \Gamma_0^{1/2}(X \times X))$. Note que

$$\Gamma_0(X) = \rho^{-n-1} \Gamma(X), \quad (4.3.3)$$

onde ρ é uma função que define a fronteira de X .

$$\Gamma_0(X \times X) = (\rho\rho')^{-n-1}\Gamma(X \times X), \quad (4.3.4)$$

onde ρ, ρ' são funções que definem a fronteira de $X \times X$. Logo definimos $\Gamma_0(Y)$ para qualquer variedade Y com fronteira como

$$\Gamma(Y) = (\rho_1 \dots \rho_n)^{-n-1}\Gamma(Y), \quad (4.3.5)$$

localmente perto de $p \in Y$, onde $\rho_1, \dots, \rho_n$ são funções que definem a fronteira de faces de codimensão 1 que contêm p .

Lema 4.3.1 *Seja $b : X \times_0 X \rightarrow X \times X$ a aplicação “blow down”. Então $b^*(\Gamma_0^{1/2}(X \times X)) = \Gamma_0^{1/2}(X \times_0 X)$.*

Demonstração:

Vemos que precisamos apenas checar a afirmação acima perto de F , i.e., numa vizinhança de F . Temos que (s, z, x', y') são coordenadas válidas em $F \cap T$ (lembre que $s = \frac{x}{x'}, z = \frac{y - y'}{x'}$). Considere a aplicação

$$\left| \frac{dx dy dx' dy'}{x^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{1/2} \mapsto \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s s^n x' x'^n} \right|^{1/2}.$$

Lembre que $x' = 0$ define F e $s = 0$ define T . O caso de $F \cap B$ é similar. Para $F \cap B \cap T$, considere

$$\left| \frac{dx dy dx' dy'}{x^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{1/2} \mapsto \left| \frac{d\rho d\rho' dr d\omega dy}{\rho \rho' r \rho^n \rho'^n r^n} \right|^{1/2}.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Observação 4.3.1 *Note que do Lema acima segue que $K_B \in \mathcal{C}^{-\infty}(X \times_0 X), \Gamma_0^{1/2}(X \times_0 X)$.*

Vamos agora escrever em coordenadas locais B em termos de K_B . Na verdade, o que vamos fazer é usar as coordenadas (x', y', s, z) no interior de $X \times_0 X$. Usando as coordenadas (x', y', s, z) na face frontal, temos pela observação acima que

$$K_B = K(x', y', s, z)\gamma, \quad \gamma = \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s s^n x' x'^n} \right|^{1/2}.$$

Tome $f = f(x, y)\mu$, $\mu = \left| \frac{dxdy}{x^{n+1}} \right|^{1/2}$, temos que

$$Bf = (\pi_l)_*(b_*K_B \otimes \pi_r^*f) = (\pi_l \circ b)_*(K_B \otimes b^*\pi_r^*f),$$

já que $\pi_r^*f = f(x', y')\mu$, daí

$$Bf(x, y) = \int K\left(\frac{x}{s}, y - \frac{x}{s}z, s, z\right) f\left(\frac{x}{s}, y - \frac{x}{s}z\right) \frac{ds}{s} dz \mu,$$

lembre que

$$s = \frac{x}{x'}, z = \frac{y - y'}{x'} \Rightarrow x' = \frac{x}{s}, y' = -x'z + y = y - \frac{x}{s}z.$$

Note que

$$K_{Id} = \delta(s - 1)\delta(z)\gamma, \int \delta(s - 1)\delta(z) f\left(\frac{x}{s}y - \frac{x}{s}z\right) ds \frac{dz}{z} \mu = f(x, y). \quad (4.3.6)$$

Definição 4.3.1 *Seja $K_0^n(X) \subseteq \mathcal{C}^{-\infty}(X \times_0 X, \Gamma_0^{1/2}(X \times_0 X))$ o espaço das seções de distribuições conormais de $\Gamma_0^{1/2}(X \times_0 X)$ associadas à Δ_{l_0} , e que se anulam em T e B em todas as ordens.*

Ponha $B \in \Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2}(X))$ se, e somente se, $K_B \in K_0^m(X)$. Note que $\text{Diff}_0^k(X, \Gamma_0^{1/2}(X)) \subseteq \Psi_0^k(X, \Gamma_0^{1/2}(X))$.

A seguir, nós gostaríamos de definir o 0-símbolo e o operador normal para um $B \in \Psi_0^m(X)$.

Note que K_B é uma distribuição conormal associada à Δ_{l_0} , e que Δ_{l_0} intersecta F (face frontal) transversalmente. Logo

$$WF(K_B) \cap N^*F = \emptyset, \quad (4.3.7)$$

e $K_B|_F$ está bem definida. Definimos para $p \in \partial X$

$$N_p(B) = K_B|_{F_p}. \quad (4.3.8)$$

Assim, mais precisamente, estamos nos restringindo à F_p . Na verdade o fibrado normal de F_p , num ponto distinto, pode ser identificado com Δ_{l_0} .

Lembremos que $F_p \simeq G(\simeq X_p)$, logo interpretamos o operador normal $N_p(B)$ como o operador convolução invariante à esquerda em G . (Lembre que se K_C é uma distribuição em um grupo, o operador convolução à esquerda correspondente C é dado por

$$Cf(g) = \int K_C(z) f(z^{-1}g) dz, \quad z = gh^{-1}.)$$

Assim, seja $p = (0, \bar{y})$ um ponto em $\partial X = \partial \Delta_l$ (aqui usamos o sistema de coordenadas (x, y) em X). Escreva, como fizemos anteriormente, para $B \in \Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2})$

$$k_B = k(x', y', s, z)\gamma, \quad \gamma = \left| \frac{dsdzdx'dy'}{s^{n+1} + x'^{n+1}} \right|,$$

segue que

$$k_B|_{F_p} = k(0, y, s, z)\gamma. \quad (4.3.9)$$

Portanto para $f = f(x, y)\mu$ uma meia densidade singular em F_p , $\mu = \left| \frac{dxdy}{x^{n+1}} \right|^{1/2}$,

$$N_p(B)f(x, y) = \int k(0, \bar{y}, s, z)f((s, z)^{-1} \cdot (x, y)) \frac{ds}{s} dz \mu, \quad (s, z)^{-1} = \left(\frac{1}{s}, \frac{-z}{s} \right)$$

$$N_p(B)f(x, y) = \int k(0, \bar{y}, s, z)f\left(\frac{x}{s}, y - \frac{x}{s}z\right) \frac{ds}{s} dz \mu, \quad (4.3.10)$$

onde $f = f(x, y)\mu$. Para ver que esta definição coincide com aquela dada para operadores diferenciais, tome $P \in Diff_0^k(X, \Gamma_0^{1/2})$ e defina

$$P' = \sum_{j+|\alpha| \leq k} p_{j,\alpha}(x, y)(x\partial_x)^j(x\partial_y)^\alpha.$$

Como $k_{Id} = \delta(s-1)\delta(z)\gamma$, segue que

$$k_P = \sum_{j+|\alpha| \leq k} p_{j,\alpha}(x, y)(s\partial_s)^j(s\partial_z)^\alpha \delta(s-1)\delta(z)\gamma,$$

donde

$$N_p(P) = K_P|_{F_p} = \sum_{j+|\alpha| \leq k} p_{j,\alpha}(0, \bar{y})(s\partial_s)^j(s\partial_z)^\alpha \delta(s-1)\delta(z)\gamma,$$

que é o núcleo de Schwartz do operador diferencial $\sum p_{j,\alpha}(0, \bar{y})(s\partial_s)^j(s\partial_z)^\alpha$ fora de $F_p \simeq X_p$. Lembre que $b_*(s\partial_s) = x\partial_x, b_*(s\partial_z) = x\partial_y$.

Veremos agora o 0-símbolo para $B \in \Psi_0^m(X)$. Primeiramente, lembremos o que γ significa quando escrevemos $B \in \Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2}(X)), k_B \in K_0^m(X)$, em termos dos símbolos $k_B \in \mathcal{C}^{-\infty}(X \times_0 X, \Gamma_0^{1/2}(X \times_0 X))$ tais que $k_B|_{X \times_0 X - \Delta_{l_0}} \in \mathcal{C}^\infty(X \times_0 X, \Gamma_0^{1/2}(X \times_0 X))$.

Perto de um ponto no interior de Δ_{l_0}

$$k_B(w, w') = (2\pi)^{-n-1} \int e^{i\langle w-w', \xi \rangle} a(w, w', \xi) d\xi |dw dw'|^{1/2}, \quad w = (x, y), w' = (x', y'), \quad (4.3.11)$$

onde $a \in \mathcal{S}^m$.

Perto de um ponto em $\partial\Delta_{l_0}$ usamos as coordenadas (s, z, x', y') . Temos

$$k_B(s, z, x', y') = (2\pi)^{-n} \int e^{i[(s-1)\zeta+2\eta]} b(s, z, x', y', \xi, \eta) d\eta d\zeta \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s^{n+1} x'^{m+1}} \right|, \quad (4.3.12)$$

quando $b \in \mathcal{S}^m$.

Na verdade, as duas expressões acima são exatamente a representação local da integral oscilatória de uma distribuição conormal. Note que $w = w'$ e $s = 1, z = 0$ definem Δ_{l_0} . Uma distribuição u , $u \in I^m(X, Y)$ é uma distribuição conormal de ordem m em X se, e somente se, localmente, $X \simeq \mathbb{R}_{(x', x'')}^{n_1+n_2}, Y \simeq \mathbb{R}_{x''}^{n_2} \simeq \{x' = 0\}$,

$$u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x', \xi \rangle} a(x, \xi) d\xi,$$

$a \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2})$, $|\partial_x^\alpha \partial_{x_i}^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}$. Agora este símbolo local se une (“patches together”) para dar o 0-símbolo principal de $B \in \Psi_0^m(X)$, ${}^0\sigma_m(B) \in \mathcal{S}^m({}^0T^*X)/\mathcal{S}^{m-1}({}^0T^*X)$.

Observação 4.3.2 *Vemos que na região sobreposta, (4.3.16) é obtida de (4.3.15) por uma mudança de variáveis. Em algum sentido, o “blow-up” que usamos para construir o produto esticado é destacado pelo fato que após esta mudança de coordenadas, teremos a forma correta da integral oscilatória que representa a distribuição conormal na diagonal.*

Com relação aos dois símbolos, temos o seguinte resultado (ver Mazzeo-Melrose [1]).

Teorema 4.3.1 *Para qualquer variedade com fronteira X , os espaços de operadores pseudodiferenciais $\mathcal{V}_0$ formam um anel “symbol filtre” de operadores*

$$B : \dot{\mathcal{C}}^\infty(X) \rightarrow \dot{\mathcal{C}}^\infty(X), \quad \forall B \in \Psi_0^m(X);$$

e para todo $m \in \mathbb{R}$ a aplicação de símbolos dá uma seqüência exata

$$0 \rightarrow \Psi_0^{m-1}(X, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow \Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow \mathcal{S}^m({}^0T^*X)/\mathcal{S}^{m-1}({}^0T^*X) \rightarrow 0 \quad (4.3.13)$$

tal que, para $B \in \Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2}), B' \in \Psi_0^{m'}(X, \Gamma_0^{1/2})$,

$${}^0\sigma_{m+m'}(B \cdot B') \equiv {}^0\sigma_m(B) \cdot {}^0\sigma_{m'}(B') \mod \mathcal{S}^{m+m'-1}({}^0T^*X). \quad (4.3.14)$$

Além disso, a aplicação N_p dá um isomorfismo, $\mathcal{C}^\infty$ na base, no fibrado das álgebras G_l —convoluções nas fibras de $X_{\partial X}$, que consiste das metades pontos interiores (“inward-pointing halves”) de $T_{\partial X}X$, sobre ∂X e tem núcleo (espaço nulo) $\rho\Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2})$, onde ρ é uma função que define ∂X .

4.4 Construção de Parametrizes

Terminamos aquilo que chamamos de “pequeno” cálculo. Como dissemos anteriormente o “pequeno” cálculo não contém a parametriz que estamos procurando, porque, como veremos adiante, o resolvente do modelo $\Delta_{\mathbb{H}^{n+1}}$ tem núcleo de Schwartz com termos de fronteira. Assim, temos que incorporar estes no cálculo. Esses termos de fronteira são dados pelas seguintes formas conormais.

Definição 4.4.1 *Seja Z uma variedade $\mathcal{C}^\infty$ com fronteira; seja ρ_i a função que define a fronteira de suas fronteiras de codimensão 1, $i = 1, \dots, N$.*

Definição 4.4.2

$$\mathcal{A}^J(Z) = \{u \in \mathcal{C}^{-\infty}(Z) : \mathcal{V}_b^k u \in \rho^J L^\infty(Z), \forall k\},$$

onde J é um multi-índice, $J = (j_1, \dots, j_n)$, $\rho^J = \rho_1^{j_1} \dots \rho_N^{j_N}$.

Aplicando a definição acima à $Z = X \times_0 X$, temos a seguinte definição.

Definição 4.4.3

$$K_0^{-\infty, a, b}(X) = \mathcal{A}^{a, b}([X \times_0 X]^2)|_{X \times_0 X} \otimes \mathcal{C}^\infty(X \times_0 X, \Gamma_0^{1/2}).$$

$$K_0^{m, a, b} = K_0^{-\infty, a, b}(X) + K_0^m(X).$$

Temos que

$$B \in \Psi_0^{m, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) \Leftrightarrow k_B \in K_0^{m, a, b}(X).$$

$$B \in R^k \Psi^{m, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) \Leftrightarrow k_B \in R^k K_0^{m, a, b}(X),$$

onde R é uma função que define a fronteira de F .

Em Mazzeo-Melrose [1], temos o seguinte resultado.

Lema 4.4.1 *Qualquer aplicação $B \in R^\infty \Psi_0^{-\infty, \infty, b}(X)$ define uma aplicação*

$$x^p L^2(X, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow x^m \mathcal{C}^\infty(X, \Gamma_0^{1/2}), \quad \forall m \gg 0,$$

em particular se $p > n - b$, então a aplicação acima é compacta em $x^p L^2(X, \Gamma_0^{1/2})$.

Observação 4.4.1 *Na verdade no artigo original de Rafe Mazzeo e Richard Melrose (Lema 5.5) é dito que qualquer $B \in \Psi_0^{-\infty, \infty, b}(X)$ define uma aplicação de $x^p H_b^\infty(X, \Gamma_0^{1/2})$ em $\mathcal{C}^\infty(X, \Gamma_0^{1/2})$ se $p > n - b$. Mas foi comprovado que isso não é válido.*

Ainda em Mazzeo-Melrose [1], temos o seguinte.

Proposição 4.4.1

$$Diff_0^k(X, \Gamma_0^{1/2}) \cdot \Psi_0^{m, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) \subset \Psi_0^{m+k, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}).$$

Seja $B \in \Psi_0^{m, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$. Por definição $B = B' + B''$, $B' \in \Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2})$, $B'' \in \Psi_0^{-\infty, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$, e $k_B = k_{B'} + k_{B''}$.

1. Defina o 0-símbolo principal de $B \in \Psi_0^{m, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$ por ${}^0\sigma_m(B) = {}^0\sigma_m(B')$. Vemos que este está bem definido, já que $\Psi_0^m(X, \Gamma_0^{1/2}) \cap \Psi_0^{-\infty, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) = \Psi_0^{-\infty}(X, \Gamma_0^{1/2})$.

2. Existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \Psi_0^{m-1, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow \Psi_0^{m, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$$

$${}^0\sigma_m \rightarrow \mathcal{S}^m({}^0T^*X)/\mathcal{S}^{m-1}({}^0T^*X) \rightarrow 0.$$

3. $P \in Diff_0^m(X, \Gamma_0^{1/2})$, $B \in \Psi_0^{m', a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$

$${}^0\sigma_{m+m'}(P \cdot B) = {}^0\sigma_m(P) \circ {}^0\sigma_{m'}(B)$$

Seja $B \in \Psi_0^{-\infty, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$, $k_B \in \mathcal{C}^\infty(X \times_0 X, \Gamma_0^{1/2})$.

1. **Definição 4.4.4** *Seja $p \in \partial X$, $N_p(B) = k_B|_{F_p}$ é bem definida.*

2. Existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow R\Psi_0^{-\infty, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow \Psi_0^{-\infty, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2}) \xrightarrow{N} \mathcal{A}^{a, b}(F, \Gamma_0^{1/2}|_F) \rightarrow 0,$$

onde R é uma função que define a fronteira de F .

3. $P \in Diff_0^m(X, \Gamma_0^{1/2})$, $B \in \Psi_0^{-\infty, a, b}(X, \Gamma_0^{1/2})$, $p \in \partial X$,

$$N_p(P \cdot B) = N_p(P) \cdot N_p(B)$$

Lembremos que queremos encontrar um termo de erro em $R^\infty \Psi_0^{-\infty, \infty, b}(X)$. Logo, temos que remover singularidades conormais em Δ_{l_0} e remover a série de Taylor do núcleo na face frontal, F.

Isso é feito pelo 0-símbolo principal e pelo operador normal respectivamente, como exemplificado pela seqüência exata nos dois casos.

Como temos que remover a série de Taylor do núcleo de Schwartz na face superior, T , temos que definir outro símbolo para a face superior.

Primeiramente note que o espaço residual após os dois primeiros símbolos é $R^\infty \Psi_0^{-\infty, a, b}(X)$.

Definição 4.4.5

$$R(\zeta) = (\Delta_g - \zeta(n - \zeta))^{-1},$$

onde Δ_g é um operador positivo auto-adjunto em $L^2(X, vol_g)$.

Temos $R(\zeta) : L^2(X, vol_g) \rightarrow L^2(X, vol_g)$ limitado para $Re\zeta > n$. (pois, neste caso, $\zeta(n - \zeta) \notin \mathbb{R}^+$.)

Considere $\gamma = |dx dg| = |vol_g|$, $\tilde{\Delta}_g = \gamma^{1/2} \Delta_g \gamma^{-1/2}$, $\tilde{R}(\zeta) = (\tilde{\Delta}_g - \zeta(n - \zeta))^{-1} = \gamma^{1/2} R(\zeta) \gamma^{-1/2}$. Em Mazzeo-Melrose [1], temos o seguinte importante proposição.

Proposição 4.4.2 Para n par a todo $\zeta \in \mathbb{C}$ o resolvente

$$\tilde{R}(\zeta) \in \Psi_0^{-2, \zeta, \zeta}(B^{n+1}, \Gamma_0^{1/2}) \quad (4.4.1)$$

forma uma função inteira de ζ no seguinte sentido. Existe uma decomposição

$$\tilde{R}(\zeta) = R'(\zeta) + R''(\zeta), \quad R'(\zeta) \in \Psi_0^{-2}(B^{n+1}, \Gamma_0^{1/2}), \quad R''(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}(B^{n+1}, \Gamma_0^{1/2}) \quad (4.4.2)$$

com termo de fronteira, $R''(\zeta)$, tendo núcleo na forma

$$k''(\zeta) = (\rho)^\zeta (\rho')^\zeta F(\zeta), \quad F(\zeta) \in \mathcal{C}^\infty(X \times_0 X, \Gamma_0^{1/2}), \quad (4.4.3)$$

onde F é inteira em ζ ; aqui ρ e ρ' são funções que definem as faces superior e inferior de $X \times_0 X$, respectivamente. Para n ímpar, o mesmo fato é válido, exceto que $\tilde{R}(\zeta)$ tem polos, de ordem finita, em $-\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, \dots\}$.

Lema 4.4.2 Se ϕ é uma função que define a fronteira de B^{n+1} , então

$$\tilde{R}(\zeta) : \mathcal{C}^\infty(B^{n+1}, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow \phi^\zeta \mathcal{C}^\infty(B^{n+1}, \Gamma_0^{1/2}) \quad (4.4.4)$$

é inteira em ζ , para n par, e meromorfa com polos de ordem finita em $-\mathbb{N}_0$ para n ímpar.

Talvés, o resultado mais forte do artigo de Mazzeo-Melrose [1] é o seguinte.

Teorema 4.4.1 *Se g é uma métrica Riemanniana do tipo definido no capítulo 4 em uma variedade compacta com fronteira, X , de dimensão $n + 1$, então o operador*

$$P(\zeta) = |d\rho|_h^{-2} \Delta_g + \zeta(n - \zeta) \quad (4.4.5)$$

é invertível, pelo Teorema Espectral, para $\operatorname{Re} \zeta$ suficientemente grande, com inverso $\tilde{R}(\zeta)$ estendível a uma família meromorfa

$$\tilde{R}(\zeta) \in \Psi_0^{-2, \zeta, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2}) \quad (4.4.6)$$

em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})\}$.

O passo mais importante na demonstração do Teorema acima é a construção de uma boa aproximação de $\tilde{R}(\zeta)$.

Proposição 4.4.3 *Sob as hipóteses do Teorema 5.4.1, existe uma família de operadores $M(\zeta)$, meromorfa com polos só em $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$ e resíduos de ordem finita tal que*

$$P(\zeta) \cdot M(\zeta) - Id = E(\zeta) \in R^\infty \Psi_0^{-\infty, \infty, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2}). \quad (4.4.7)$$

Demonstração:

Dividiremos a demonstração desta proposição em três passos.

Passo 1: Existe $M_0(\zeta) \in \Psi_0^{-2}(X, \Gamma_0^{1/2})$ tal que

$$P(\zeta)M_0(\zeta) - Id = Q_1(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty}(X, \Gamma_0^{1/2}), \quad (4.4.8)$$

com $M_0(\zeta)$ inteira.

Primeiramente vemos que existe $M_{0,0}$ tal que

$${}^0\sigma_2(P(\zeta)) {}^0\sigma_{-2}(M_{0,0}(\zeta)) = {}^0\sigma_0(Id),$$

pois $P(\zeta)$ é elíptico. Segue que

$$P(\zeta)M_{0,0}(\zeta) - Id = Q_{1,0}(\zeta) \in \Psi_0^{-1}.$$

Vemos agora que existe $M_{0,1}(\zeta)$ tal que

$${}^0\sigma_2(P(\zeta)) {}^0\sigma_{-3}(M_{0,1}(\zeta)) = {}^0\sigma_{-1}(Q_{1,0}(\zeta)).$$

Segue que

$$P(\zeta)(M_{0,0}(\zeta) + M_{0,1}(\zeta)) - Id = Q_{2,0} \in \Psi_0^{-2}.$$

Procedendo indutivamente, ponha

$$M_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} M_{k,0}(\zeta). \quad (4.4.9)$$

Passo 2: Existe $M_1(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2})$ tal que

$$P(\zeta)M_1(\zeta) - Q_1(\zeta) = Q_2(\zeta) \in R^\infty \Psi_0^{-\infty, \zeta+1, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2}) \quad (4.4.10)$$

com polos em

- (a) polos do resolvente modelo (n ímpar, polos em $-\frac{N_0}{2}$)
- (b) Propriedades do resolvente modelo

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}(n-1) - \frac{N_0}{2} \\ -\frac{N_0}{2} \end{array} \right.$$

Temos que existe $M_{1,0}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}$ tal que

$$N_p(P(\zeta))N_p(M_{1,0}(\zeta)) = N_p(Q_1(\zeta)) \quad (4.4.11)$$

Segue que

$$P(\zeta)M_{1,0}(\zeta) - Q_1(\zeta) = Q_{1,1}(\zeta) \in R\Psi_0^{-\infty, \zeta+1, \zeta}, \quad (4.4.12)$$

donde

$$P(\zeta)M_{1,0}(\zeta) - Q_1(\zeta) = -zQ''_{1,1}(\zeta) \in R\Psi_0^{-\infty, \zeta+1, \zeta}, \quad Q''_{1,1}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}, \quad (4.4.13)$$

onde x anula-se nas faces frontal e superior.

Considere o sistema de equações para $M_{1,k}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2})$, $k > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\zeta)M_{1,k}(\zeta) - Q_{1,k}(\zeta) = -xQ''_{1,k+1}(\zeta), \quad Q''_{1,k+1}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta-k} \\ Q_{1,k}(\zeta) = \frac{x}{x'}Q''_{1,k}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta+1, \zeta-k}, \quad k \geq 0 (k=0, Q_{1,0}(\zeta) = Q_1(\zeta)) \end{array} \right. \quad (4.4.14)$$

Assume que a equação acima é resolvível. Ponha

$$M_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} x'^k M_{1,k}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}. \quad (4.4.15)$$

Temos que

$$\begin{aligned}
P(\zeta)M_1(\zeta) - Q_1(\zeta) &= P(\zeta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x'^k M_{1,k}(\zeta) \right) \\
&= \sum x'^k (P(\zeta)M_{1,k}(\zeta)) = \sum (x'^k) (-Q_{1,k}(\zeta) + xQ''_{1,k+1}(\zeta)) \\
&= Q_1(\zeta) - xQ''_{1,1}(\zeta) + xQ''_{1,1}(\zeta) - x'xQ''_{1,2}(\zeta) + x'xQ''_{1,2}(\zeta) + \dots
\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Resta portanto provar que o sistema de equações acima possui solução. Temos que

$$\begin{aligned}
N_p(P(\zeta))N_p(M_{1,k}(\zeta)) &= N_p(Q_{1,k}(\zeta)) \\
\Rightarrow P(\zeta)M_{1,k}(\zeta) - Q_{1,k}(\zeta) &\in R\Psi_0^{-\infty, \zeta+1, \zeta-k}.
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Logo, basta mostrar que a equação (5.4.20) possui solução $M_{1,k}(\zeta) \in \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta-k}$, mas isto é exatamente a Proposição 6.17 de Mazzeo-Melrose [1], que enunciaremos aqui.

Proposição 4.4.4 *Seja Q uma quarta parte da esfera como fibras da face frontal com x, r funções que definem a fronteira das faces superior e inferior, respectivamente. Para $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$*

$$\tilde{R}(\zeta) : r^{\zeta+p} x^{\zeta+k} \mathcal{C}^\infty(Q, \Gamma_0^{1/2}) \rightarrow r^{\zeta+p} x^\zeta \mathcal{C}^\infty(Q, \Gamma_0^{1/2}), \tag{4.4.18}$$

$\zeta \in \frac{1}{2}(n-k) - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0, \zeta \in \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ e $\zeta \in -\mathbb{N}_0$ para n ímpar.

Assim $Q_{1,k}(\zeta) \in r^{\zeta+1} x^{\zeta-k} \mathcal{C}^\infty(Q, \Gamma_0^{1/2})$ e $M_{1,k}(\zeta) \in r^{\zeta-k} x^\zeta \mathcal{C}^\infty(Q, \Gamma_0^{1/2})$.

Passo 3: Existe $M_2(\zeta) \in R^\infty \Psi_0^{-\infty, \zeta, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2})$ tal que

$$P(\zeta)M_2(\zeta) - Q(\zeta) = Q_3(\zeta) \in R^\infty \Psi_0^{-\infty, \infty, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2}), \tag{4.4.19}$$

onde $M_2(\zeta)$ possui polos em $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$.

Em seguida ponha

$$M(\zeta) = M_0(\zeta) - M_1(\zeta) - M_2(\zeta) \in \Psi_0^{-2, \zeta, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2}). \tag{4.4.20}$$

Segue que

$$P(\zeta)M(\zeta) - Id = E(\zeta) = Q_3(\zeta) \in R^\infty \Psi_0^{-\infty, \infty, \zeta}(X, \Gamma_0^{1/2})$$

Capítulo 5

A Matriz de Espalhamento

Continuamos aqui supondo que (X, g) é uma variedade assintoticamente hiperbólica, onde $g = \frac{dx^2 + h(x, y, dy)}{x^2}$, x é uma função que define a fronteira de X , ∂X .

Considere $h_0 = i^*(x^2 g)$, onde $i : \partial X \rightarrow X$ é a aplicação inclusão.

Proposição 5.0.5 *Considere o seguinte problema de Poisson:*

$$\begin{cases} (\Delta_g - s(n-s))u_i = r_i \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(X), & u_i \in \mathcal{C}^\infty(X), i = 1, 2; \\ u_i = x^{n-s}f_i + x^s g_i + O(x^{\frac{n}{2}+1}), & f_i, g_i \in \mathcal{C}^\infty(\partial X). \end{cases} \quad (5.0.1)$$

Onde $Res = n/2$, que implica que $s(n-s)$ é real. Temos então o seguinte

$$\int_X (u_1 \bar{r}_2 - r_1 \bar{u}_2) dv_g = (2s - n) \int_{\partial X} (f_1 \bar{f}_2 - g_1 \bar{g}_2) dv_{h_0}. \quad (5.0.2)$$

Demonstração:

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} \int_X (u_1 \bar{r}_2 - r_1 \bar{u}_2) dv_g &= \int_X u_1 \overline{(\Delta_g - s(n-s))u_2} - (\Delta_g - s(n-s))u_1 \bar{u}_2 dv_g = \\ &= \int_X u_1 \Delta_g \bar{u}_2 - \Delta_g u_1 \bar{u}_2 dv_g. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes:

Teorema 5.0.2 *Sejam Ω uma variedade compacta com fronteira $\partial\Omega$ e g uma métrica Riemanniana suave a partir da fronteira de Ω . Então*

$$\int_\Omega \phi_1 \Delta \phi_2 - \phi_2 \Delta \phi_1 dv_g = \int_{\partial\Omega} \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial v} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial v} v \cdot \perp dv_g, \quad (5.0.3)$$

onde v é um “unit inward point of vector” em $\partial\Omega$.

Escrevemos

$$\int_X u_1 \Delta_g \bar{u}_2 - \Delta_g u_1 \bar{u}_2 dv_g = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{X_\epsilon = \{x > \epsilon\}} u_1 \Delta_g \bar{u}_2 - \Delta_g u_1 \bar{u}_2 dv_g. \quad (5.0.4)$$

Aplique agora o Teorema de Stokes acima com $\Omega = X_\epsilon$, $\phi_1 = u_1$, $\phi_2 = \bar{u}_2$. Temos antes que calcular v e $v \perp dv_g$ no nosso caso.

$$1. \ v = x \frac{\partial}{\partial x}. \text{ Temos } \frac{\partial}{\partial x} \perp \text{ as superfícies de nível de } \{x = \epsilon\}, \ g \left(x \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{dx^2 \left(x \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial x} \right)}{x^2} = 1.$$

$$2. \ dv_g = \frac{\sqrt{\det h_0}(1 + O(x))}{x^{n+1}} dx \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n, \text{ donde}$$

$$v \perp dv_g = \frac{\sqrt{\det h_0}(1 + O(x)) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n}{x^n}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \int_{X_\epsilon} u_1 \Delta_g \bar{u}_2 - \Delta_g u_1 \bar{u}_2 dv_g &= \int_{\partial X_\epsilon} (x^{n-s} f_1 + x^s g_1 + O(x^{n/2+1})) ((n-\bar{s})x^{n-\bar{s}} \bar{f}_2 + \bar{s}x^{\bar{s}} \bar{g}_2 + O(x^{n/2+1})) \\ &\quad (5.0.5) \\ &- \int x^{n-\bar{s}} \bar{f}_2 + x^{\bar{s}} \bar{g}_2 + O(x^{n/2+1}) ((n-s)x^{n-s} f_1 s x^s g_1 + O(x^{n/2+1})) \frac{\sqrt{\det h_0}(1 + O(x))}{x^n} dy_1 \dots dy_n, \quad x = \epsilon \\ &= \int_{\partial X_\epsilon} u_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial v} - \bar{u}_2 \frac{\partial u_1}{\partial v} v \perp dv_g. \end{aligned}$$

Podemos ignorar os termos com ordem $O(\epsilon^{n+1})$. Calculando diretamente obtemos que (5.0.5) é igual a

$$\int_{\partial X_\epsilon} [(2s-n)(f_1 \bar{f}_2 - g_1 \bar{g}_2) dv_{h_0} + O(\epsilon)]. \quad (5.0.6)$$

E.g. o termo envolvendo $f_1, \bar{f}_2$

$$\epsilon^{n-s} \epsilon^{n-\bar{s}} (n-\bar{s}) f_1 \bar{f}_2 - \epsilon^{n-\bar{s}} \epsilon^{n-s} (n-s) f_1 \bar{f}_2 = (s-\bar{s}) \epsilon^{2n-(s+\bar{s})} f_1 \bar{f}_2,$$

onde $s = \frac{n}{2} + ia \Rightarrow s - \bar{s} = 2ia, 2s - n = n + 2ia - n = 2ia$.

$$\Rightarrow \epsilon^{n-s} \epsilon^{n-\bar{s}} (n-\bar{s}) f_1 \bar{f}_2 - \epsilon^{n-\bar{s}} \epsilon^{n-s} (n-s) f_1 \bar{f}_2 = (2s-n) \epsilon^n f_1 \bar{f}_2.$$

■

Observação 5.0.2 *Vemos que*

$$\int_X (u_1 r_2 - r_1 u_2) dv_g = (2s - n) \int_{\partial X} (f_1 g_2 - f_2 g_1) dv_{h_0}. \quad (5.0.7)$$

Tentaremos agora resolver o problema de Poisson. Primeiramente vejamos as propriedades de Δ_g .

1.

$$\sigma(\Delta_g) = \left[\frac{n^2}{4}, +\infty \right) \cup \sigma_{PP}(\Delta_g)$$

$$\sigma_{PP}(\Delta_g) \subset [0, n^2/4] \text{ e é finito.}$$

2. $(\Delta_g - s(n - s))^{-1} = R(s) : \dot{\mathcal{C}}^\infty(X) \rightarrow x^s \mathcal{C}^\infty(X)$, onde s não é um polo de $R(s)$.

Proposição 5.0.6 *Seja s tal que $\operatorname{Res} \geq \frac{n}{2}$, $s \neq \frac{n}{2} + \frac{\mathbb{N}_0}{2}$. Então existe um operador $\Phi(s) : \mathcal{C}^\infty(\partial X) \rightarrow x^{n-s} \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial X)$*

$$\begin{cases} (\Delta_g - s(n - s))\Phi(s)f \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(X) \\ \Phi(s)f = x^{n-s}f + O(x^{n-s+1}) \end{cases}$$

Demonstração:

Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial X)$ existe $u \in x^{n-s} \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que

$$\begin{cases} (\Delta_g - s(n - s))u \in \mathcal{C}^\infty(X) \\ u = x^{n-s}f + O(x^{n-s+1}) \end{cases}$$

Pelo Lema de Borel, é suficiente achar uma série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{n-s+j} u_j,$$

$$\begin{cases} (\Delta_g - s(n - s))(\sum_{j=0}^{\infty} x^{n-s+j} u_j) = O(x^\infty) \\ u_0 = f \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} & (\Delta_g - s(n - s))(x^{n-s-j} u_j) = \\ & = (-(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2\Delta_{h_0} + xE - s(n - s))(x^{n-s+j} u_j), \end{aligned} \quad (5.0.8)$$

onde $E \in \operatorname{Diff}_0^2(X)$, e (5.0.8) é igual a

$$j(2s - n - j)x^{n-s+j} u_j + O(x^{n-s+j+1}),$$

onde $O(x^{n-s+j+1}) = x^{n-s+j+1}E_0u_j + x^{n-s+j+2}(\Delta_{h_0}u_j + E_1u_j) + O(x^{n+j-s+3})$, onde E_0 é um operador de ordem 0 e E_1 é um operador de ordem 1. Temos

$$j = 0 \Rightarrow j(2s - n - j) = 0.$$

Assim podemos escolher u_0 arbitrariamente. Tome $u_0 = f$.

$$j = 1 \Rightarrow (2s - n - 1)x^{n-s+1}u_1 = -x^{n-s+1}E_0u_0,$$

logo podemos escolher $u_1 = -\frac{E_0f}{2s - n - 1}$.

$$j = 2 \Rightarrow 2(s - n - s)x^{n-s+2}u_2 = -x^{n-s+2}(\Delta_{h_0}u_0 + E_1u_0) - x^{n-s+2}E_0u_1$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{-[(\Delta_{h_0}f + E_1f) - \frac{E_0^2f}{2s-n-1}]}{2(2s - n - 2)}, \quad 2s - n \notin \mathbb{N}_0.$$

E assim sucessivamente. ■

Proposição 5.0.7 *Seja $s, Res \geq \frac{n}{2}, s \neq \frac{n}{2} + \frac{\mathbb{N}_0}{2}, s(n-s) \notin \sigma_{PP}(\Delta_g)$. Então existe $\mathcal{P}(s) : \mathcal{C}^\infty(\partial X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que*

$$\begin{cases} (\Delta_g - s(n-s))(\mathcal{P}(s)f) = 0 \\ \mathcal{P}(s)f = x^{n-s}F + x^sG, \quad FG \in \mathcal{C}^\infty(X) \quad F|_{\partial X} = f \end{cases} \quad (5.0.9)$$

Demonstração:

Ponha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(s) &= (Id - R(s)(\Delta_g - s(n-s)))\Phi(s)f \\ &= \Phi(s)f - R(s)(\Delta_g - s(n-s))\Phi(s)f, \end{aligned} \quad (5.0.10)$$

e $\Phi(s) \in x^{n-s}\mathcal{C}^\infty(X)$, i.e. $\Phi(s) = x^{n-s}f + \dots$

$(\Delta_g - s(n-s)) \in x^s\mathcal{C}^\infty(X)$, temos que

$$\begin{aligned} &(\Delta_g - s(n-s))(\Phi(s)f - R(s)(\Delta_g - s(n-s))\Phi(s)f) \\ &= \Delta_g - s(n-s)\Phi(s)f - (\Delta_g - s(n-s))\Phi(s)f = 0 \end{aligned}$$

■

Proposição 5.0.8 *Com as mesmas hipóteses em s da proposição anterior, a solução acima do problema de Poisson é única.*

Demonstração:

Suponha que w_1 e w_2 são duas soluções. Temos que $w_1 - w_2 = x^s \mathcal{C}^\infty(X)$.

$$Res > \frac{n}{2} \Rightarrow w_1 - w_2 \in L^2(X) \quad \left(dv_g = \frac{\varphi}{x^{n+1}} dx dy_1 \dots dy_n, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X) \right)$$

$x^{2s} \frac{1}{x^{n+1}} = x^{2s-(n+1)}$ é integrável quando $Res > \frac{n}{2}$. Isto implica que $s(n-s) \in \sigma_{PP}(\Delta_g)$, contradição! Logo $Res = \frac{n}{2}$, usando a proposição 5.0.1 com $u_1 = w_1 - w_2, u_2 = R(n-s)\psi$, onde ψ é qualquer função em $\dot{\mathcal{C}}^\infty(X)$. Temos que $r_1 = 0, f_1 = 0, r_2 = \psi, g_2 = 0$, segue que

$$\int_X (w_1 - w_2) \bar{\psi} dv_g = (2s - n) \int_{\partial X} 0 = 0,$$

onde ψ é arbitrária. Portanto $w_1 - w_2 \equiv 0$. ■

Definição 5.0.6 Dado $s, Res \geq \frac{n}{2}, s \neq \frac{n}{2} + \frac{\mathbb{N}_0}{2}, s(n-s) \in \sigma_{PP}(\Delta_g)$. Definimos a matriz de espalhamento $\tilde{S}(s) : \mathcal{C}^\infty(\partial X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\partial X)$ como

$$S(s)f = G|_{\partial X}, \quad (5.0.11)$$

onde G é aquela da proposição 5.0.3.

Proposição 5.0.9 A matriz de espalhamento $S(s), Res = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} \neq s$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $S(n-s) = S(s)^{-1}$.
2. $S(s)$ é unitária.

Demonstração:

Aplicando a proposição 5.0.1 à $u_1 = \mathcal{P}(s)\phi_1, u_2 = \mathcal{P}(s)\phi_2, r_1 = 0, r_2 = 0, f_1 = \phi_1, f_2 = \phi_2, g_1 = S(s)\phi_1, g_2 = S(s)\phi_2$, segue que

$$0 = \int_{\partial X} \phi_1 \bar{\phi_2} - S(s)\phi_1 \overline{S(s)\phi_2} dv_{h_0}, i.e.,$$

$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle S(s)\phi_1, S(s)\phi_2 \rangle$, em outras palavras $S(s)^* = S(s)^{-1}$.

Usaremos agora o fato de que $S(s)$ tem extensão meromorfa à $\mathbb{C}$, de fato, podemos definir

$$S(n - \bar{s}) = (S(s)^*)^{-1}, \quad Re \geq \frac{n}{2}. \quad (5.0.12)$$

Note que $n - \bar{s}$ é a reflexão de s em torno da reta $Res = \frac{n}{2}$. Vemos que se $Res = \frac{n}{2}$, então $n - \bar{s} = s$, donde $S(n - \bar{s}) = S(s) = (S(s)^*)^{-1}$, desta última igualdade segue que $S(s)$ é unitária. ■

Um importante resultado que foi provado por Joshi e Sá Barreto é o seguinte:

Teorema 5.0.3 .

(i) $S(s) \in \Psi^{2Res-n}(\partial X)$ é uma família meromorfa em $\mathbb{C} \setminus \{\text{conjunto discreto}\}$ e

$$\sigma(S(s))(x, \xi) = \frac{2^{n-2s} \Gamma\left(\frac{1}{2}n - s\right)}{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}n\right)} |\xi|_{h_0, x}^{2s-n}.$$

(ii) $s \in \mathbb{C} \setminus \{\text{conjunto discreto}\}$, singularidade do núcleo de $S(s)$ determina $h_i, i = 0, 1, 2, \dots$

Referências Bibliográficas

- [1] R.B. Melrose and R. R. Mazzeo, *Meromorphic Extension of the Resolvent on Complete Spaces with Asymptotically Constant Negative Curvature*, Journal of Functional Analysis 75, 260-310, 1987.
- [2] R.B. Melrose, *Geometric Scattering Theory*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [3] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Equations*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [4] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Equations*, vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [5] F. Trèves, *An Introduction to Pseudodifferential Operators and Fourier Integral Operators*, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1973.
- [6] F. Trèves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [7] A. Sá Barreto and M. Joshi, *Inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds*, Acta Mathematica, 184, 41-86, 2000.
- [8] M. Zworski and C.R. Graham, *Scattering matrix in conformal geometry*, Inventiones Mathematicae, 152, 89-118, 2003.
- [9] P.D. Lax and R.S. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, New York, London, 1967.