

Omissões da aplicação normal de Gauss e o teorema de Mo-Osserman

DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA

orientador:

FRANCISCO FORTES DE BRITO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UFPE - fevereiro de 2006

Oliveira, Darlan Ferreira de

Omissões da aplicação normal de Gauss e o teorema de Mo – Osserman. / Darlan Ferreira de Oliveira. - Recife : O autor, 2006.

59 folhas. il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Superfícies mínimas – Representação de Weierstrass.
2. Superfície de Riemann. 3. Aplicação de Gauss. I. Título

517.545

CDU (2.ed.)

UFPE

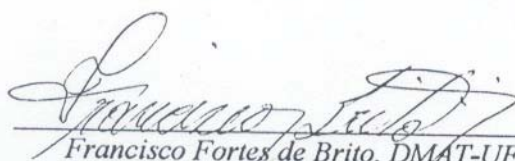
516.7

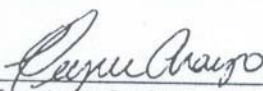
CDD (22.ed.)

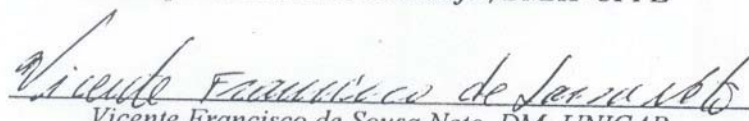
MEI2006-003

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


Francisco Fortes de Brito, DMAT-UFPE
Orientador


Henrique José Moraes de Araújo, DMAT-UFPE


Vicente Francisco de Sousa Neto, DM-UNICAP

**OMISSÕES DA APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS
E O TEOREMA DE MO-OSSERMAN**

Por

Darlan Ferreira de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2006

Agradecimentos

Agradeço ao professor Dr. Francisco Brito pela orientação precisa, bem como pela paciência e predisposição a mim dispensada no decorrer deste trabalho.

Agradeço aos professores Dr. Vicente de Sousa Neto e Dr. Henrique Araújo por participarem da banca.

Agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro.

Agradeço aos colegas do departamento de matemática que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização deste trabalho e em especial aos amigos Adriano Régis e Evaneide Carneiro pelo companheirismo.

Agradeço ao professor Dr. Haroldo Benatti pelo incentivo inicial.

E um agradecimento mais que especial as duas mulheres da minha vida: minha mãe-por tornar possível minha chegada até aqui; e minha esposa Ceíça-pelo incentivo, compreensão e confiança em mim depositados ao longo destes dois anos.

Resumo

Neste trabalho mostramos alguns dos principais resultados acerca do número de pontos omitidos pela aplicação normal de Gauss de superfícies mínimas regulares completas. Começamos com uma das versões do teorema de Bernstein e citamos os resultados conseguidos, no sentido de seu melhoramento, por Osserman, Xavier e Fujimoto. Por fim introduzimos o teorema de Mo-Osserman o qual se caracteriza como uma extensão do teorema de Fujimoto.

Abstract

In this work we show some of the main results on the number of points omitted by the Gauss map of a complete minimal surface in three-dimensional Euclidean space. We start with one of the versions of Bernsteins theorem, cite the results of Osserman, Xavier and Fujimoto on the subject, and finally prove the extension of Fujimotos theorem done by Mo and Osserman.

Sumário

1	Preliminares	6
1.1	Um pouco de história	6
1.2	A representação de Weierstrass	10
1.3	Superfícies mínimas completas	23
2	Omissões da aplicação de Gauss em superfícies mínimas completas	25
2.1	O teorema de Bernstein	26
2.2	O teorema de Osserman	30
2.3	O teorema de Xavier	36
3	Uma extensão do teorema de Fujimoto	42
	Bibliografia	58

Introdução

Superfícies mínimas completas são objetos muito interessantes de estudo. Durante o século XIX muitos resultados foram encontrados e publicações foram feitas graças aos trabalhos de matemáticos como, Catalan, Bonnet, Riemann, Weierstrass, Enneper, Schwarz dentre outros. Atualmente merecem destaque os trabalhos de Weierstrass e Enneper. Estes introduziram a chamada representação de Weierstrass que estabelece uma relação entre a teoria das superfícies mínimas com a análise complexa.

No século XX matemáticos como Bernstein, Osserman, Xavier e Fujimoto obtiveram resultados importantes acerca do número de pontos omitidos pela aplicação normal de Gauss de superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$. Bernstein mostrou ser o plano o único gráfico mínimo completo que dito de uma forma mais apropriada quer dizer que se a aplicação normal de Gauss omite um hemisfério de $\mathbb{S}^2$ então a superfície é um plano. O teorema de Bernstein é um resultado não trivial em equações diferenciais parciais porém resultados mais fortes que estes foram obtidos. O primeiro deles é devido a Osserman. O mesmo generaliza o teorema de Bernstein afirmando que se um domínio é omitido pela aplicação normal de Gauss então a superfície mínima completa é um plano. Seguindo esta linha poderíamos dizer que o resultado obtido por Xavier - se a aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ omite sete pontos, então a superfície é um plano - é, sem dúvida, espetacular pois este é o primeiro a obter uma quantidade finita para o número de pontos omitidos pela aplicação normal de Gauss de superfícies

mínimas completas. Porém, este resultado poderia ainda ser melhorado. Fujimoto conseguiu mostrar que cinco era o número que tornava o resultado de Xavier o melhor possível.

Basicamente esta dissertação mostra as demonstrações destes resultados, um pouco das teorias necessárias para compreendê-los e por fim uma extensão do teorema de Fujimoto, o teorema de Mo-Osserman, conseguida por Osserman num trabalho conjunto com seu aluno Xiaokang Mo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Um pouco de história

Atualmente definimos uma superfície que tem curvatura média, H , nula em todos os pontos como *mínima*. Porém o estudo de tais superfícies começou com Lagrange, em 1760, mesmo não se conhecendo esta definição. Ele considerou o problema de achar a superfície de área mínima que tem uma dada curva fechada e sem auto-intersecções como fronteira. Contudo, em seu tempo, muitas das questões sobre superfícies mínimas não foram esclarecidas e o próprio Lagrange não deu exemplos de superfícies mínimas, exceto o exemplo trivial do plano.

Ainda hoje, achar exemplos de superfícies com curvatura média nula não é uma tarefa fácil. Mesmo para o caso das superfícies que são gráficos, $z = f(x, y)$, de funções diferenciáveis, caso estudado por Lagrange, a curvatura média nula é equivalente a equação

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1)$$

que é conhecida como equação das superfícies mínimas ou equação de Lagrange.

Lagrange observou que uma função linear $f(x, y) = ax + by + c$ é claramente solução

desta equação, onde de fato os planos $(x, y, ax + by + c)$ são superfícies mínimas.

No tempo de Lagrange, além de não se conhecer a definição de curvatura média, também não estavam definidas as curvaturas principais k_1 e k_2 (estas introduzidas por Euler num trabalho também no ano de 1760). Foi somente em 1776 que Meusnier interpretou geometricamente a equação (1.1) como significando

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.$$

Como a equação (1.1) é complicada, Meusnier procurou soluções com propriedades especiais e obteve o helicóide, figura (1.1) e o catenóide, figura (1.2) como soluções.

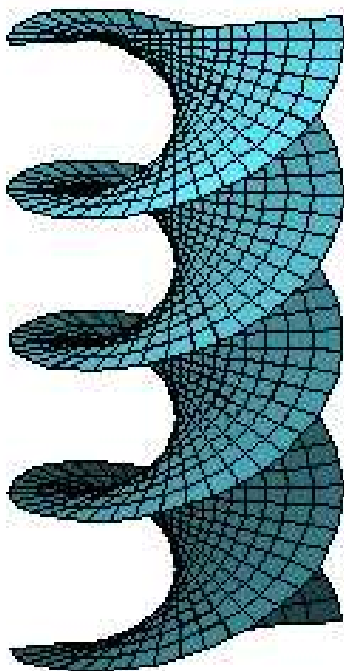


Figura 1.1: Helicóide

Em 1835 Scherk obteve outro importante exemplo de superfície mínima resolvendo a

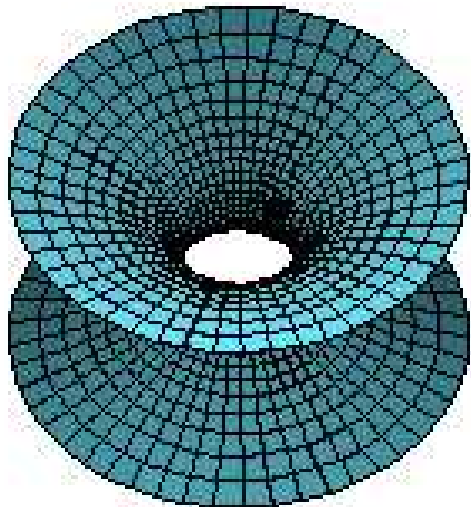


Figura 1.2: O Catenóide

equação (1.1) para funções do tipo $f(x, y) = g(x) + h(y)$, obtendo $g(x) = -\log \cos cx$ e $h(y) = \log \cos cy$ para c constante. Assim o gráfico de

$$f(x, y) = \log \frac{\cos cy}{\cos cx}$$

é conhecido como a superfície de Scherk, figura (1.3) cuja vista de um ângulo apropriado é percebida como um "tabuleiro de xadrez com infinitas casas". Scherk também tentou, mas sem sucesso, determinar todas as superfícies mínimas regradas, porém este problema foi resolvido por Catalan em 1842, que provou ser o helicóide a única superfície mínima regrada. Foi também mostrado que o catenóide é a única superfície mínima de revolução.

Antes de Weierstrass, dar a solução geral da equação de Lagrange em 1866, Enneper encontrou uma das mais simples superfícies mínimas, ver figura (1.4) no sentido em que suas funções coordenadas são produtos e somas de potências dos parâmetros u e v . Mais precisamente a superfície consiste na imagem da aplicação $x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x_1(u, v) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2,$$

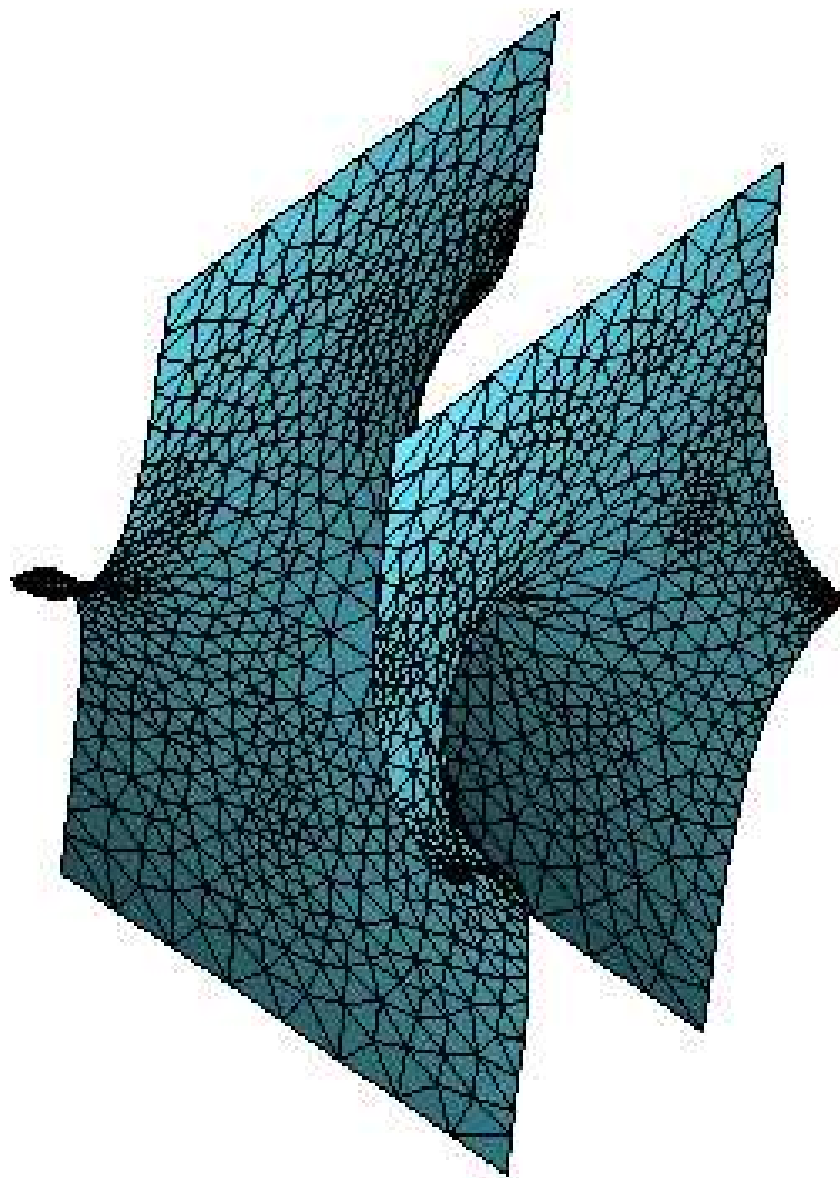


Figura 1.3: A superfície de Scherk

$$x_2(u, v) = v - \frac{v^3}{3} + vu^2$$

e

$$x_3(u, v) = u^2 - v^2.$$

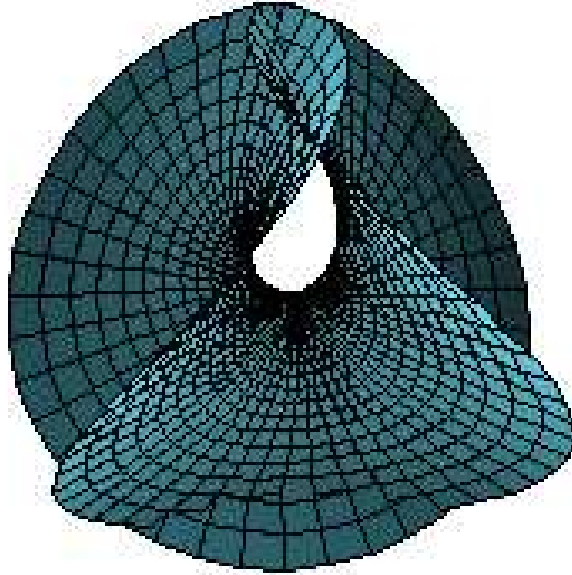


Figura 1.4: A superfície de Enneper

1.2 A representação de Weierstrass

Deste momento em diante passaremos a identificar o plano complexo $\mathbb{C}$ com o $\mathbb{R}^2$, fazendo $z = u + iv$ onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $z \in \mathbb{C}$.

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. Podemos escrever f como

$$f(z) = f_1(u, v) + if_2(u, v),$$

onde $f_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções reais. Nestas condições $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ é chamada a parte real de f e $f_2 = \operatorname{Im}(f)$ é chamada a parte imaginária de f .

Definição 1.2.1 Suponha que Ω é aberto em $\mathbb{C}$. Dizemos que f é *holomorfa* se as funções reais f_1 e f_2 possuem derivadas parciais contínuas que satisfazem às equações abaixo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}. \quad (1.2)$$

As equações (1.2) são conhecidas como as equações de Cauchy-Riemann.

Definição 1.2.2 Seja f uma função holomorfa num aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $z_0 \in \mathbb{C} - \Omega$ é uma *singularidade isolada* de f se f está definida e é holomorfa em todos os pontos de uma vizinhança perfurada de z_0 .

Lembremos que uma *vizinhança perfurada* de um dado ponto z_0 é um conjunto W que não contém z_0 e $W \cup \{z_0\}$ é uma vizinhança de z_0 no sentido usual.

Existem três tipos de singularidades isoladas, e elas são exclusivas, no sentido em que uma delas ocorrendo as outras duas não podem ocorrer. São elas as singularidades *removíveis*, *tipo pólos* e *essenciais*.

Podemos classificar as singularidades isoladas quanto ao comportamento da função f numa vizinhança perfurada:

1. z_0 é singularidade removível de $f \iff f$ é limitada numa vizinhança perfurada de $z_0 \iff$ existe e é finito o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
2. z_0 é um pólo de $f \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
3. z_0 é uma singularidade essencial de $f \iff$ para toda vizinhança perfurada W de z_0 , $f(W)$ é denso em $\mathbb{C} \iff$ o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ não existe.

Esta classificação é uma consequência dos teoremas da *extensão de Riemann* e *Cassorati-Weierstrass*.

Definição 1.2.3 Dizemos que uma função f é *meromorfa* num aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se existe um conjunto discreto $C \subset \Omega$ tal que f é holomorfa em $\Omega - C$ e os pontos de C são pólos de f .

Definição 1.2.4 Seja $f(u, v) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que f é *harmônica* se,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

em Ω .

Definição 1.2.5 Um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é chamado *simplesmente conexo* se toda curva fechada em Ω pode ser deformada continuamente em um ponto sem sair de Ω .

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $x(u, v) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada X . Se

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right| \quad e \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle = 0,$$

então x é uma *aplicação conforme* e os parâmetros u e v são chamados *coordenadas isotérmicas* para a superfície X .

Teorema 1.2.6 *Seja X uma superfície. Todo ponto regular de X tem uma vizinhança na qual existe uma reparametrização em termos de coordenadas isotérmicas.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7], vol. 4, porém na seção (2.1) faremos uma demonstração no caso em que X é mínima.

Lema 1.2.7 *Seja X uma superfície regular parametrizada por $x(u_1, u_2)$, onde u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos. As funções coordenadas $x_k(u_1, u_2)$ são harmônicas se, e somente se, X é superfície mínima.*

Demonstração Como u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos a primeira forma fundamental de X é dada por

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = \lambda^2 \quad (1.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = 0 \quad (1.4)$$

diferenciando (1.3) em relação a u_1 e (1.4) em relação a u_2 , temos

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle \quad (1.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \right\rangle \quad (1.6)$$

de (1.5) e (1.6) vem

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = 0$$

o que corresponde a

$$\left\langle \Delta x, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = 0$$

e analogamente encontramos que

$$\left\langle \Delta x, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = 0,$$

donde

$$\Delta x // N.$$

Agora

$$\langle \Delta x, N \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, N \right\rangle = b_{11} + b_{22}$$

onde b_{11} e b_{22} são os coeficientes da segunda forma fundamental. Usando a expressão da curvatura média em termos de parâmetros isotérmicos (ver [9], pág. 13) obtemos

$$\langle \Delta x, N \rangle = 2\lambda^2 H(N)$$

donde

$$\Delta x = 2\lambda^2 H(N)N.$$

Como as x_k são harmônicas $\Delta x_k = 0$, logo $\Delta x = 0$ onde $H(N)$ também é zero e isto implica X mínima. A recíproca é imediata. ■

Façamos agora uma conexão com funções harmônicas. Dada uma superfície X considere as funções complexas:

$$\phi_k(\xi) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}; \quad \xi = u_1 + iu_2 \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

Note que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\xi) &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right|^2 - \left| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle \end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(\xi)|^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|^2$$

donde temos as seguintes propriedades:

(i) $\phi_k(\xi)$ é analítica em $\xi \iff x_k$ é harmônica em u_1, u_2 .

(ii) u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos $\iff$

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\xi) \equiv 0. \quad (1.8)$$

(iii) se u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos, então X é regular $\iff$

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(\xi)|^2 \neq 0. \quad (1.9)$$

Lema 1.2.8 *Seja X uma superfície mínima regular, com u_1, u_2 parâmetros isotérmicos. Então as funções $\phi_k(\xi)$ definidas em (1.7) são analíticas e satisfazem as equações (1.8) e*

(1.9). Reciprocamente, sejam $\phi_1(\xi)$, $\phi_2(\xi)$ e $\phi_3(\xi)$ funções analíticas de ξ as quais satisfazem (1.8) e (1.9) num domínio simplesmente conexo Ω . Então, existe uma superfície mínima regular X definida sobre Ω , tal que as equações (1.7) são válidas.

Demonstração Como X é uma superfície mínima regular com parâmetros isotérmicos então, pelo lema (1.2.7) as funções coordenadas $x_k, k = 1, 2, 3$, são harmônicas em u_1, u_2 e pela propriedade (i) as ϕ_k são analíticas em ξ . Quanto a satisfazer as equações (1.8) e (1.9) o resultado segue-se de (ii) e (iii).

Reciprocamente, sejam $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \phi_3(\xi) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ analíticas. Seja P_k uma primitiva de ϕ_k em Ω , isto é,

$$P'_k(\xi) = \phi_k(\xi) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Assim

$$\begin{aligned} P'_k(\xi) &= \frac{\partial \operatorname{Re} P_k}{\partial u_1} + i \frac{\partial \operatorname{Im} P_k}{\partial u_1} \\ &= \frac{\partial \operatorname{Re} P_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial \operatorname{Re} P_k}{\partial u_2} \\ &= \phi_k. \end{aligned}$$

Desde que Ω é simplesmente conexo basta definir

$$x_k = \operatorname{Re} P_k = \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} \phi_k(\xi) d\xi$$

ao longo de qualquer caminho ligando ξ_0 a ξ . ■

Exemplo 1.2.9 Sejam $\phi_1(\xi) = 1$, $\phi_2(\xi) = -i$ e $\phi_3(\xi) = 0$. Temos que

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\xi) = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(\xi)|^2 \neq 0,$$

logo pela recíproca do lema (1.2.8) existe X superfície mínima cuja parametrização $x(\xi)$, $\xi = u_1 + iu_2$ com u_1, u_2 parâmetros isotérmicos, é

$$x_1(\xi) = \operatorname{Re} \int d\xi = u_1$$

$$x_2(\xi) = \operatorname{Re} \int -id\xi = u_2$$

$$x_3(\xi) = 0,$$

isto é, o plano $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$.

Definição 1.2.10 O *recobrimento universal* de uma variedade bi-dimensional M é a aplicação $\Pi : \widehat{M} \longrightarrow M$ de uma variedade bi-dimensional simplesmente conexa $\widehat{M}$ com a propriedade que todo ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U tal que $\Pi^{-1}(U)$ é uma união disjunta de conjuntos abertos V_i em $\widehat{M}$, chamadas vizinhanças distinguidas do recobrimento de U , cada uma das quais é aplicada homeomorficamente por Π sobre U .

O par $(\widehat{M}, \Pi)$ é chamado a *superfície de recobrimento universal* de M e desde que Π é um homeomorfismo local qualquer estrutura local de M é herdada por $\widehat{M}$. Sendo X uma superfície mínima regular definida pela aplicação $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, temos associada a X uma superfície mínima regular simplesmente conexa $\widehat{X}$, chamada a superfície de recobrimento universal de X , que é definida pela composição $X \circ \Pi : \widehat{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Segue-se que

$$\widehat{X} \text{ é regular} \iff X \text{ é regular}$$

e

$$\widehat{X} \text{ é completo} \iff X \text{ é completo.}$$

Lema 1.2.11 *Uma superfície mínima regular não pode ser fechada¹.*

¹compacta sem bordo

Demonstração Seja X uma superfície mínima regular definida pela aplicação $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Então cada função coordenada x_k , $k = 1, 2, 3$, é harmônica sobre M . Se M for compacta, x_k atingirá um máximo interior e pelo princípio do máximo cada x_k deve ser constante o que contradiz a definição de superfície mínima regular. ■

Teorema 1.2.12 (Teorema da uniformização) *O recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann² é conformemente equivalente ao plano, ao disco unitário ou a esfera.*

O teorema da uniformização foi demonstrado por P. Koebe e H. Poincaré.

Observação 1.2.13 Pelo lema (1.2.11) e pelo teorema da uniformização poderemos sempre nos restringir a superfícies mínimas regulares $x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde Ω é o plano complexo ou o disco unitário.

Considere a equação

$$\phi_1^2(\xi) + \phi_2^2(\xi) + \phi_3^2(\xi) = 0. \quad (1.10)$$

Lema 1.2.14 *Seja Ω um domínio no plano complexo, $g(\xi)$ uma função meromorfa arbitrária em Ω e $f(\xi)$ uma função holomorfa em Ω tendo a propriedade que em cada ponto onde $g(\xi)$ tem um polo de ordem m , $f(\xi)$ tem um zero de ordem pelo menos $2m$. Então as funções*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) \quad , \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \quad e \quad \phi_3 = fg \quad (1.11)$$

são holomorfas em Ω e satisfazem (1.10). Reciprocamente, toda tripla de funções holomorfas em Ω satisfazendo (1.10) podem ser representadas na forma (1.11), exceto para $\phi_1 = i\phi_2$ e $\phi_3 = 0$.

²ver definição 1.3.2

Demonstração Com um cálculo simples verifica-se que as funções em (1.11) satisfazem (1.10).

Reciprocamente, dada uma solução de (1.10), sejam

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \quad , \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \quad (1.12)$$

Se escrevermos (1.10) na forma

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2,$$

teremos

$$\phi_1 + i\phi_2 = \frac{-\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2. \quad (1.13)$$

Combinando (1.12) e (1.13) temos :

$$\begin{aligned} 2\phi_1 &= f(1 - g^2) \quad \therefore \quad \phi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2) \\ 2i\phi_2 &= -f(1 + g^2) \quad \therefore \quad \phi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2) \end{aligned}$$

$$g = \frac{\phi_3}{f} \quad \therefore \quad \phi_3 = fg.$$

Como

$$\phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$$

é holomorfa segue-se que fg^2 é holomorfa e assim nos pontos onde g tem um polo de ordem m , f terá um zero de ordem pelo menos $2m$. Esta representação pode falhar, somente se o denominador de g em (1.12) se anular, isto é, $\phi_1 = i\phi_2$, o que implica $\phi_3 \equiv 0$. ■

Teorema 1.2.15 (Representação de Weierstrass) *Toda superfície mínima X em $\mathbb{R}^3$ definida num domínio simplesmente conexo $\Omega \in \mathbb{C}$ pode ser representada na forma*

$$x_k(\xi) = \operatorname{Re}\left(\int_{\xi_0}^{\xi} \phi_k(z) dz\right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

onde as funções ϕ_k são definidas por (1.11) e as funções f e g tem as propriedades do lema (1.2.14), sendo o domínio Ω o disco unitário ou o plano inteiro, e a integral sendo tomada ao longo de um caminho arbitrário ligando ξ_0 a ξ . A superfície será regular se, e somente se, f satisfizer a propriedade de se anular somente nos pólos de g com a ordem dos zeros exatamente o dobro da ordem dos pólos de g .

Demonstração Ver [9] pág. 64. ■

Podemos construir uma infinidade de exemplos de superfícies mínimas conhecendo-se as funções f e g . No exemplo a seguir daremos as funções f e g da representação de Weierstrass para as superfícies mínimas mencionadas na seção (1.1):

Exemplo 1.2.16 Para $g(\xi) = -ie^\xi$ e $f(\xi) = e^{-\xi}$, $\xi \in \mathbb{C}$, temos:

$$\phi_1(\xi) = \frac{e^{-\xi}}{2}(1 + e^{2\xi}) = \cosh \xi$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{ie^{-\xi}}{2}(1 - e^{2\xi}) = -i \sinh \xi$$

$$\phi_3(\xi) = -i$$

onde

$$x_1(\xi) = \operatorname{Re}\left(\int_{\xi_0}^{\xi} \cosh z dz\right) = \sinh u_1 \cos u_2$$

$$x_2(\xi) = \operatorname{Re}\left(\int_{\xi_0}^{\xi} -i \sinh z dz\right) = \sinh u_1 \sin u_2$$

$$x_3(\xi) = \operatorname{Re}\left(\int_{\xi_0}^{\xi} -i dz\right) = u_2.$$

Portanto $x(\xi)$ é dada por $x(u_1, u_2) = (\sinh u_1 \cos u_2, \sinh u_1 \sin u_2, u_2)$ que é a parametrização do helicóide.

Para $g(\xi) = \xi$ e $f(\xi) = 1$, $\xi \in \mathbb{C}$, temos a superfície de Enneper.

Para $g(\xi) = \xi$ e $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2}$, $\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$ temos o catenóide.

Para $g(\xi) = \xi$ e $f(\xi) = \frac{4}{1-\xi^4}$, $|\xi| < 1$, temos a superfície de Scherk.

Mostraremos agora a forte relação que há entre a função g , definida anteriormente e a aplicação normal de Gauss que passaremos a definir.

Seja $x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização da superfície mínima regular X no domínio simplesmente conexo Ω . O plano tangente em cada ponto $x(\xi)$, $\xi = u_1 + iu_2$, é gerado pelos vetores

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2},$$

onde

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} - i \frac{\partial x}{\partial u_2} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \text{ com } \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\xi) \equiv 0.$$

Segue-se por (1.8) que u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos. Assim

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\phi_k(\xi)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{|f|^2}{4} (1 + |g|^2)^2 + \frac{|f|^2}{4} ((1 - |g|^2)^2) + |f|^2 |g|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{|f|^2}{4} (2 + 2|g|^4) + |f|^2 |g|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{|f|^2}{2} (1 + |g|^4 + 2|g|^2) \right]
\end{aligned}$$

logo

$$\lambda^2 = \left[\frac{|f|}{2} (1 + |g|^2) \right]^2 \quad (1.15)$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} - \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right) \\
&= Im \{ (\phi_2 \overline{\phi_3}, \phi_3 \overline{\phi_1}, \phi_1 \overline{\phi_2}) \}
\end{aligned}$$

e por (1.11) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} &= Im \left\{ \frac{if}{2} (1 + g^2) \overline{f} \overline{g}, fg \frac{\overline{f}}{2} (1 - \overline{g}^2), \frac{-if}{2} (1 - g^2) \frac{\overline{f}}{2} (1 + \overline{g}^2) \right\} \\
&= \frac{|f|^2}{4} (1 + |g|^2) (2Re \{g\}, 2Im \{g\}, |g|^2 - 1)
\end{aligned}$$

Disto segue que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| &= \frac{|f|^2}{4} (1 + |g|^2) (4(Reg)^2 + 4(Img)^2 + |g|^4 - 2|g|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{|f|^2}{4} (1 + |g|^2) (|g|^4 + 2|g|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|f|^2}{4}(1 + |g|^2)^2 \\
&= \lambda^2,
\end{aligned}$$

logo

$$N = \frac{\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|} = \left(\frac{2\operatorname{Re}g}{1 + |g|^2}, \frac{2\operatorname{Im}g}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right) \quad (1.16)$$

é a normal unitária da superfície X com a orientação usual.

Definição 1.2.17 Seja N o campo normal à superfície $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Como N é unitário podemos vê-lo como uma aplicação de Ω sobre a esfera unitária, $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}^2$, o qual denominaremos a *aplicação normal de Gauss* de X .

Seja agora a projeção estereográfica a partir do pólo norte, isto é, a aplicação

$$\pi : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} \right) + i \left(\frac{x_2}{1 - x_3} \right) \quad (1.17)$$

e cuja inversa $\pi^{-1}(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\}$ é dada por

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}z}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right) \quad (1.18)$$

É evidente a relação entre $\pi^{-1}(z)$ e a aplicação N dada em (1.16). Note que

$$\pi^{-1} \circ g(\xi) = N(\xi), \quad (1.19)$$

ou seja, g é justamente a aplicação normal de Gauss de X seguida da projeção estereográfica. Note que g é holomorfa justamente nos pontos onde $N \neq (0, 0, 1)$.

Proposição 1.2.18 Se $x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ define uma superfície mínima regular em coordenadas isotérmicas, então a aplicação de Gauss $N(\xi)$ define uma aplicação complexa de Ω sobre a esfera unitária considerada como esfera de Riemann.

Demonstração Segue da precedente observação. ■

1.3 Superfícies mínimas completas

Definição 1.3.1 Uma variedade bi-dimensional M é um espaço de Hausdorff, em que cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um domínio do $\mathbb{R}^2$.

Um atlas $\mathbb{A}$ de uma variedade bi-dimensional M é uma coleção de triplas $(V_\alpha, \Omega_\alpha, F_\alpha)$, onde V_α é um domínio em $\mathbb{R}^2$, Ω_α é um conjunto aberto em M , F_α é um homeomorfismo de V_α sobre Ω_α e a união de todos os Ω_α é igual a M .

Uma variedade M é orientável se possui um atlas no qual cada transformação $F_{\alpha_1}^{-1} \circ F_{\alpha_2}$ preserve orientação sempre que estiver definida. Uma orientação de M é determinada pela escolha de um tal atlas.

Uma estrutura de classe C^k em M é um atlas para o qual $F_{\alpha_1}^{-1} \circ F_{\alpha_2}$ é de classe C^k . Neste caso M é chamada uma variedade diferenciável de classe C^k .

Uma estrutura conforme, $\mathbf{c}$, em uma variedade bi-dimensional M é um atlas de cartas $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com a propriedade que a aplicação de transição $F_{\alpha_1}^{-1} \circ F_{\alpha_2}$ entre quaisquer duas cartas $F_{\alpha_1} : \Omega_{\alpha_1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $F_{\alpha_2} : \Omega_{\alpha_2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação biholomorfa (difeomorfismo conforme com jacobiano positivo) de $F_{\alpha_2}(\Omega_{\alpha_1} \cap \Omega_{\alpha_2})$ sobre $F_{\alpha_1}(\Omega_{\alpha_1} \cap \Omega_{\alpha_2})$.

Definição 1.3.2 Um par (M, c) consistindo da variedade bi-dimensional M e da estrutura conforme c é chamado superfície de Riemann.

Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definindo uma variedade bi-dimensional conexa e orientável X . Sabemos pelo teorema (1.2.6) que na vizinhança de cada ponto regular de X , existe uma reparametrização em termos de parâmetros isotérmicos u, v , tais que

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right| = \lambda \quad e \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle = 0,$$

ou seja, a aplicação x é conforme e induz em M uma métrica, representada localmente pelos parâmetros u, v por

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2), \quad \text{onde } z = u + iv.$$

Pode ser verificado que a mudança de coordenadas entre dois quaisquer destes sistemas de coordenadas é biholomorfa, isto é, x induz em M uma estrutura conforme.

No caso em que $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é mínima a métrica induzida pode ser representada localmente em termos da representação de Weierstrass por

$$ds^2 = \frac{|f|^2(1 + |g|^2)^2}{4} |dz|^2.$$

Definição 1.3.3 Um *caminho divergente* numa variedade Riemanniana M é uma curva contínua $\gamma : [0, 1) \longrightarrow M$ tal que, para qualquer subconjunto compacto K de M , existe um número $t_0 \in [0, 1)$ tal que $\gamma(t)$ está contida no complemento $M - K$ para todo $t > t_0$.

Proposição 1.3.4 *Uma variedade Riemanniana M é completa se, e somente se, todo caminho divergente arbitrário de classe C^1 , $\gamma : [0, 1) \longrightarrow M$ tem comprimento infinito.*

Demonstração Ver [11] pág. 179. ■

Capítulo 2

Omissões da aplicação de Gauss em superfícies mínimas completas

O objetivo deste capítulo é mostrar os resultados obtidos por Robert Osserman e Frederico Xavier os quais melhoraram significativamente o teorema de S. Bernstein. Faremos isto em três seções. Na primeira seção damos a demonstração do teorema de Bernstein, provado pelo mesmo em 1915, o qual afirma que

Sendo $f(x, y)$ uma solução da equação de Lagrange definida em todo plano, então f é linear

ou de forma equivalente, porém mais apropriada,

Se X é uma superfície mínima completa cuja aplicação normal de Gauss omite um hemisfério de $\mathbb{S}^2$, então X é um plano.

Na segunda seção serão mostrados os resultados obtidos por Osserman em 1960, os quais melhoram o teorema de Bernstein, mostrando que apenas a omissão de um domínio em $\mathbb{S}^2$ é condição suficiente para que a superfície mínima completa seja um plano. Mostraremos

também um resultado de Osserman mais forte que este envolvendo a noção de conjunto de capacidade logarítmica zero.

Por fim, na terceira seção, exibiremos a prova do extraordinário resultado obtido por Xavier em 1981, onde o mesmo afirma, que na verdade, basta que a aplicação normal de Gauss omita sete pontos na esfera para que a superfície mínima completa seja um plano.

2.1 O teorema de Bernstein

Antes de começarmos a demonstração do teorema de Bernstein façamos as seguintes observações:

Obs.1 Fazendo $p = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $q = \frac{\partial f}{\partial x_2}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ e $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ a equação (1.1) assume a forma

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \quad (2.1)$$

e pode ser mostrado que as equações

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1 + q^2}{W} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{pq}{W} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{pq}{W} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1 + p^2}{W} \right), \quad (2.2)$$

onde

$$W = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

são satisfeitas por toda solução da equação (2.1).

Obs.2 Dadas as funções F e G definidas num domínio simplesmente conexo Ω com

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial G}{\partial x_1},$$

então existe $H(x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = F \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = G.$$

Obs.3 Sendo X uma superfície, cada ponto onde X é regular admite numa vizinhança deste ponto uma reparametrização como gráfico.

Teorema 2.1.1 (Existência de parâmetros isotérmicos) *Seja X uma superfície mínima. Todo ponto regular de X admite numa vizinhança uma reparametrização de X em termos de parâmetros isotérmicos.*

Demonstração Pela observação 3 podemos achar uma vizinhança de um ponto regular de X na qual X pode ser reparametrizada como um gráfico. Temos assim as equações (2.2) sendo satisfeitas em algum disco D e pela observação 2 existem funções $F(x_1, x_2)$ e $G(x_1, x_2)$ em D satisfazendo

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1+p^2}{W} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{pq}{W}; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{pq}{W} \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1+q^2}{W}. \quad (2.4)$$

Considere agora

$$\xi_1 = x_1 + F(x_1, x_2) \quad , \quad \xi_2 = x_2 + G(x_1, x_2). \quad (2.5)$$

Verifica-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 1 + \frac{1+p^2}{W} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= \frac{pq}{W} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= \frac{pq}{W} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= 1 + \frac{1+q^2}{W}, \end{aligned}$$

onde encontramos

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 2 + \frac{2+p^2+q^2}{W} > 0. \quad (2.6)$$

Assim a aplicação (2.5) tem uma inversa local $(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ onde podemos representar a superfície em termos dos parâmetros ξ_1, ξ_2 . Com um cálculo simples podemos mostrar que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right|^2 = \frac{W^2}{2W + 2 + p^2 + q^2} \quad e \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right\rangle = 0.$$

onde de fato ξ_1, ξ_2 são parâmetros isotérmicos. ■

Lema 2.1.2 *Seja $f(x_1, x_2)$ uma função real de classe C^1 num domínio conexo Ω . A superfície obtida como gráfico de f é um plano se, e somente se, existe uma transformação linear invertível $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ com u_1, u_2 parâmetros isotérmicos.*

Demonstração Suponha que tais parâmetros isotérmicos u_1, u_2 existam. Introduzindo as funções $\phi_k(\xi), k = 1, 2, 3$, temos ϕ_1 e ϕ_2 constantes desde que x_1 e x_2 são funções lineares de u_1, u_2 . Como u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos,

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\xi) = 0,$$

logo ϕ_3 deve também ser constante. Isto significa que x_3 tem gradiente constante com respeito a u_1, u_2 , portanto também com respeito a x_1, x_2 . Assim $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$. Reciprocamente, se a superfície é um plano, ou seja, $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$, podemos tomar a transformação linear invertível como sendo

$$(u_1, u_2) \longrightarrow (\lambda Au_1 + Bu_2, \lambda Bu_1 - Au_2)$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{1}{1 + A^2 + B^2}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.1.3 (Liouville) *Uma função inteira e limitada deve ser constante.*

Lema 2.1.4 *Seja f uma função inteira tal que $\text{Im}(f) < 0$. Então f é constante.*

Demonstração Defina $F(\xi) = e^{-if(\xi)}$. F é inteira e $|F| < 1$. Pelo teorema de Liouville F deve ser constante o que implica f constante.

Teorema 2.1.5 (Bernstein) *Se $f(x, y)$ é uma solução da equação (1.1) definida em todo o plano, então f é linear.*

Demonstração Seja a aplicação $(x_1, x_2) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2)$ definida em (2.5). Temos ξ_1, ξ_2 parâmetros isotérmicos e por um argumento usado em [9], capítulo cinco, sabemos que esta aplicação é um difeomorfismo global. Logo temos uma superfície mínima regular, $(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$, onde as funções

$$\phi_k(\xi) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}$$

são holomorfas. Desta forma,

$$\begin{aligned} \overline{\phi_1} \phi_2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) + i \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right), \end{aligned}$$

onde encontramos

$$Im(\overline{\phi_1} \phi_2) = -\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Portanto $Im(\overline{\phi_1} \phi_2) < 0$. Por outro lado $\overline{\phi_1} \phi_2 = |\phi_1|^2 \phi_2 / \phi_1$, logo $Im(\phi_2 / \phi_1) < 0$. Pelo lema (2.1.4) ϕ_2 / ϕ_1 deve ser constante. Logo, existe $c = a - ib$, $b > 0$, tal que $\phi_2 = c \phi_1$.

Assim,

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = (a - ib) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} &= a \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= b \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + a \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}. \end{aligned}$$

Definindo

$$x_1 = u_1 \quad e \quad x_2 = au_1 + bu_2$$

as equações acima se escrevem como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(au_1 + bu_2)}{\partial \xi_1} &= a \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - b \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial(au_1 + bu_2)}{\partial \xi_2} &= b \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + a \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}, \end{aligned}$$

onde obtemos

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \quad e \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1},$$

ou seja, a aplicação

$$h(\xi_1 + i\xi_2) = (u_1(\xi_1, \xi_2), u_2(\xi_1, \xi_2))$$

é holomorfa, logo conforme onde $h'(\xi) \neq 0$. Portanto u_1, u_2 são também parâmetros isotérmicos. Do lema (2.1.2) segue-se o resultado. ■

2.2 O teorema de Osserman

Iniciaremos esta seção introduzindo alguns conceitos e lemas básicos que nos auxiliarão numa melhor compreensão das demonstrações que nos proporemos a fazer.

Definição 2.2.1 *Uma função real u é chamada subharmônica num domínio Ω do plano se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *u é semicontínua superior em Ω , isto é, $u(z) \geq \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} u(z')$;*

(ii) *Para qualquer função v , harmônica numa região $\Omega' \subset \Omega$, a diferença $u - v$ ou é constante ou não atinge um máximo em Ω' .*

Definição 2.2.2 *Uma superfície de Riemann X é chamada parabólica se X é não compacta e não existem funções subharmônicas negativas e não-constantes em X . Se X admite a existência de funções subharmônicas negativas e não-constantes, então X é chamada Hiperbólica.*

Definição 2.2.3 *Uma superfície mínima regular $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita parabólica se M é conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ e Hiperbólica se M é conformemente equivalente ao disco unitário.*

Se M não é simplesmente conexo podemos passar para o recobrimento universal $\widehat{x} : \widehat{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo domínio paramétrico $\widehat{M}$ é simplesmente conexo e neste caso dizemos que a superfície mínima regular é parabólica ou hiperbólica se $\widehat{M}$ é parabólico ou hiperbólico respectivamente.

Exemplos 2.2.4 O plano complexo $\mathbb{C}$ é parabólico. Para ver isto considere a métrica hiperbólica,

$$\frac{2r|dz|}{r^2 - |z|^2}$$

no disco de raio r . Fazendo $r \longrightarrow \infty$ vemos que $\frac{2r}{r^2 - |z|^2} \longrightarrow 0$ onde o plano não é hiperbólico. Como este é não compacto o resultado segue da definição (2.2.2).

O disco unitário é hiperbólico visto que $f(\xi) = Re(\xi - 1)$ é uma função subharmônica negativa e não constante em $|\xi| < 1$.

Definição 2.2.5 Um conjunto fechado, E , na esfera de Riemann cujo complemento é parabólico é chamado um conjunto de *capacidade logarítmica zero*. Caso o complemento de E não seja parabólico o chamamos neste caso de conjunto de *capacidade logarítmica positiva*.

Uma maior abordagem acerca desta definição pode ser vista em [5].

Lema 2.2.6 *Seja $x(\xi) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima regular X , onde M é o plano complexo. Então $x(\xi)$ está num plano ou as normais de X assumem todas as direções com no máximo duas exceções.*

Demonstração Para a superfície X definimos a função $g(\xi)$ que não está definida apenas para $\phi_1 = i\phi_2$ e $\phi_3 = 0$. Porém neste caso x_3 é constante e a superfície está num plano. Como $g(\xi)$ é meromorfa em M deve pelo teorema de Picard (uma função meromorfa não constante omite no máximo dois pontos na esfera de Riemann) admitir todos os

valores com no máximo duas exceções ou ser constante. Como a aplicação g é justamente a aplicação normal de Gauss seguida pela projeção estereográfica, o resultado segue da representação $N(\xi) = \pi^{-1} \circ g(\xi)$. ■

Lema 2.2.7 *A aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima regular não plana $X : M \longrightarrow R^3$ do tipo parabólico omite no máximo dois pontos na esfera unitária.*

Demonstração Se X é do tipo parabólico então o correspondente recobrimento universal $\widehat{X} : \widehat{M} \longrightarrow R^3$ é definido num domínio paramétrico $\widehat{M}$ que é conformemente equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$. Como as imagens esféricas de X e $\widehat{X}$ são iguais, o resultado segue do lema (2.2.6). ■

Lema 2.2.8 *Se $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa no disco unitário Ω com um número finito de zeros, então existe um caminho divergente $\gamma : [0, 1) \longrightarrow \Omega$ tal que*

$$\int_{\gamma} |\mu(z)| |dz| < \infty. \quad (2.7)$$

Demonstração Suponha primeiro que $\mu(w) \neq 0$ em Ω . Então a função holomorfa $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(w) = \int_0^w \mu(\xi) d\xi$$

é invertível numa vizinhança da origem em Ω . Seja $G(z)$ uma inversa local de F numa vizinhança de $z = 0$ a qual é definida em algum disco $|z| < R$. Podemos assumir R como o raio de convergência da expansão de G em série de Taylor. Seja I o conjunto de todos $\rho \in (0, R]$ tal que $G(B_\rho(0)) \subset \Omega$ e que a aplicação

$$G : B_\rho(0) \longrightarrow G(B_\rho(0))$$

seja bijetiva. Pelo teorema de Liouville o número

$$r = \sup I$$

é finito pois G é não-constante.

Afirmamos que existe um ponto $z_0 \in \partial B_r(0)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} |G(tz_0)| = 1$$

implicando que o caminho

$$\gamma(t) = G(tz_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

é divergente em Ω e

$$\int_{\gamma} |\mu(w)| |dw| = \int_{\gamma} |F'(w)| |dw| = \int_{F(\gamma)} |dz| = |z_0| = r < \infty$$

o que prova o lema.

Se não pudermos achar $z_0 \in \partial B_r(0)$, como afirmado, então para qualquer $z_0 \in \partial B_r(0)$ escolhemos uma seqüência $\{t_n\}$ de números $t_n \in (0, 1)$ tal que $t_n \rightarrow 1^-$ quando $n \rightarrow \infty$ e que $G(t_n z_0)$ converge para algum ponto $w_0 \in \Omega$. Como $F'(w_0) \neq 0$, existe uma vizinhança V_0 de w_0 onde F é invertível. Seja $\tilde{G}$ a inversa de $F|_{V_0}$. Como

$$F(w_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(G(t_n z_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n z_0 = z_0,$$

a intersecção $F(V_0) \cap B_r(0)$ é não vazia e $\tilde{G}$ deve ser uma extensão de G em alguma vizinhança de z_0 . Por um argumento de compacidade deduzimos que G admite uma extensão holomorfa em algum disco $B_{\rho'}(0)$ tal que $r < \rho' < R$ e $G(B_{\rho'}(0)) \subset \Omega$. Pela unicidade da continuação analítica deduzimos que G é bijetiva em $B_{\rho'}(0)$ desde que $F(G(z)) = z$ para $z \in B_{\rho}(0)$ e $0 < \rho < r$. Entretanto a existência de um tal ρ contradiz a definição de r . Assim o lema está provado se $\mu(w) \neq 0$ em Ω .

Se $\mu(w)$ tem finitos zeros $w_1, \dots, w_n \in D$ de ordens $k_1, \dots, k_n$ então a função

$$\tilde{\mu}(w) = \mu(w) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1 - \overline{w_j} w}{w - w_j} \right)^{k_j}$$

nunca se anula em Ω . Como para qualquer $a \in \Omega$ a transformação

$$w \mapsto \frac{w - a}{1 - \overline{a} w}$$

fornece uma aplicação conforme de D sobre ele mesmo, temos

$$|\tilde{\mu}(w)| \geq |\mu(w)| \text{ em } \Omega.$$

O precedente argumento implica que existe um caminho divergente $\gamma : [0, 1) \longrightarrow \Omega$ tal que

$$\int_{\gamma} |\tilde{\mu}(w)| |dw| < \infty \quad \text{donde} \quad \int_{\gamma} |\mu(w)| |dw| < \infty$$

o que prova o lema no caso geral. ■

Lema 2.2.9 *Seja Ω um domínio no plano complexo. O complemento E de Ω na esfera de Riemann tem capacidade logarítmica zero se, e somente se, a função $\log(1 + |w|^2)$ não tem majorante harmônico em Ω .*

Demonstração Ver [9] pag. 70. ■

Teorema 2.2.10 (Osserman) *Seja X uma superfície mínima regular completa. Se a aplicação normal de Gauss omite um domínio aberto na esfera unitária, então X é um plano.*

Demonstração Por um movimento rígido podemos assumir que o ponto $(0, 0, 1)$ está nesse conjunto aberto. Desta forma a normal unitária $N = (N_1, N_2, N_3)$ satisfaz a condição $N_3 \leq \eta < 1$. O mesmo acontece com a superfície de recobrimento universal $\hat{X}$ de X , a qual podemos pela observação (1.2.13), representar na forma $\hat{x}(\xi) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde D é o plano ou o disco unitário. Por (1.16) temos que

$$\frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \leq \eta < 1,$$

onde

$$|g(\xi)|^2 \leq \frac{1 + \eta}{1 - \eta} = R < \infty.$$

Isto mostra que $g(\xi)$ é holomorfa e sendo $\widehat{X}$ regular $f(\xi)$ nunca se anula. Seja γ um caminho qualquer em $\widehat{X}$. Então seu comprimento é dado por

$$\int_{\gamma} \lambda |d\xi| = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |f|(1 + |g|^2) |d\xi| < \frac{1 + R^2}{2} \int_{\gamma} |f| |d\xi|.$$

Se D é o disco unitário, então pelo lema (2.2.8) existe um caminho divergente γ em D tal que

$$\int_{\gamma} |f| |d\xi| < \infty$$

o que contradiz a completude de $\widehat{X}$. Assim D é o plano, e desde que a aplicação normal de Gauss de $\widehat{X}$ omite mais que dois pontos segue do lema (2.2.6) que $\widehat{X}$ está num plano. O mesmo ocorre com X e sendo X completa $X = \mathbb{C}$. ■

Lema 2.2.11 *O plano complexo perfurado $\mathbb{C} - p$ é parabólico.*

Demonstração Desde que a função $e^z + p$ definida em $\mathbb{C}$ recobre $\mathbb{C} - p$ o resultado segue da definição (2.2.3). ■

Teorema 2.2.12 (Osserman) *Seja X uma superfície mínima regular completa em $\mathbb{R}^3$. Então, a menos que X seja um plano, o conjunto dos pontos omitidos pela aplicação normal de Gauss de X tem capacidade logarítmica zero.*

Demonstração Se X não é um plano, então a aplicação de Gauss é uma função analítica não constante. Pelo teorema da aplicação aberta a imagem de X pela aplicação de Gauss é um conjunto aberto e conexo da esfera cujo complemento, E , é um conjunto compacto em $\mathbb{S}^2$. Se E é vazio o resultado é imediato. Caso E seja diferente do vazio, podemos supor por um movimento rígido, se necessário, que E contém o ponto $(0, 0, 1)$. Podemos passar para a superfície de recobrimento universal $\widehat{X}$ de X , cuja aplicação de Gauss omite o mesmo conjunto E . Sabemos que a superfície X é dada por uma aplicação $x(\xi) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde, de novo pela observação (1.2.13), Ω é o plano complexo ou o disco unitário. No primeiro caso E pode conter no máximo dois pontos, onde pelo lema (2.2.11) a superfície X é do

tipo parabólico e portanto E tem capacidade logarítmica zero. Se Ω é o disco unitário, nós temos a função $g(\xi)$, a qual é analítica em Ω , visto que a aplicação de Gauss omite o ponto $(0, 0, 1)$. Pela regularidade da superfície de recobrimento universal $\widehat{X}$, $f(\xi) \neq 0$ em Ω . Suponha agora que E tem capacidade logarítmica positiva. Então na imagem Ω' de Ω pela aplicação $g(\xi) = w$ existe um majorante harmônico, $h(w)$, para a função $\log(1 + |w|^2)$. Então $h(g(\xi))$ é harmônica em Ω , e é a parte real de uma função holomorfa $G(\xi)$ em Ω . A função $F(\xi) = e^{G(\xi)}$ é holomorfa em Ω e nunca se anula. Para um caminho arbitrário γ em Ω , nós temos o comprimento

$$\int_{\gamma} \lambda |d\xi| = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |f|(1 + |g|^2) |d\xi| \leq \frac{1}{2} \int_{\gamma} |fF| |d\xi|.$$

Porém a função $f(\xi)F(\xi)$ nunca se anula em Ω e pelo lema (2.2.8) existe um caminho divergente γ tal que

$$\int_{\gamma} |fF| |d\xi| < \infty,$$

donde a superfície X não é completa. Assim o conjunto E deve ter capacidade logarítmica zero e o teorema está provado. ■

2.3 O teorema de Xavier

Para a demonstração do teorema de Xavier precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 2.3.1 *Seja $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} - \{0, a\}$, ($a \neq 0$), uma função holomorfa no disco unitário Ω . Seja $\alpha = 1 - 1/k$, onde k é um número natural. Então,*

$$\frac{|g'(z)|}{|g(z)|^{\alpha} + |g(z)|^{2-\alpha}} \in L^p(\Omega)$$

para todo p com $0 < p < 1$.

Demonstração Ver [10].

Teorema 2.3.2 (Yau) *Seja M uma variedade riemanniana completa de volume infinito e u uma função não-negativa satisfazendo $\Delta \log u = 0$ em quase toda parte, então*

$$\int_M u^p dA = \infty,$$

para todo $p > 0$.

Teorema 2.3.3 (Xavier) *Seja X uma superfície mínima regular completa em $\mathbb{R}^3$. Se a aplicação normal de Gauss de X omite sete ou mais pontos, então X é um plano.*

Demonstração Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima, não plana cuja aplicação normal de Gauss omite 7 pontos em $\mathbb{S}^2$. Mostraremos então que M não é completa. Passando para a superfície de recobrimento universal de X , segue-se pelo lema (2.2.7) que este é não parabólico, logo podemos assumir que $\widehat{M}$ é o disco unitário Ω . Como o conjunto de pontos omitidos pela aplicação normal de Gauss não muda com a passagem ao recobrimento universal podemos assumir que X está parametrizada em Ω .

Denotemos por (f, g) o par da representação de Weierstrass. Por uma rotação da superfície em $\mathbb{R}^3$ podemos assumir que um dos pontos omitidos é o pólo norte e assim g se torna holomorfa e $|f| > 0$ em Ω .

Considere a função

$$h = f^{-2/p} g' \prod_{i=1}^6 (g - a_i)^{-\alpha},$$

onde $5/6 < \alpha < 1$ e $\alpha p = 5/6$.

Observe que $f^{-2/p}$ está bem definida em Ω pois $|f| > 0$.

Seja a função $u = |h|$. Fora de um conjunto discreto de Ω (onde g' se anula) u é harmônica donde temos $\Delta \log u = 0$ em quase toda parte de Ω .

Afirmamos que $u \notin L^p(M)$. De fato, se u é uma constante não nula, então, a afirmação segue-se do fato de que no caso em que estamos considerando a área de M é infinita, isto

é,

$$\int \int_{\Omega} |f|^2(1 + |g|^2)^2 dx dy = \infty.$$

Para tanto basta observar que o raio de Ω é divergente e por ser Ω completa este deve ter comprimento infinito, assim

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} |f|(1 + |g|^2) dx dy &\geq \int \int_{1/2 < |z| < 1} |f|(1 + |g|^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 |f|(1 + |g|^2) r dr d\theta \\ &\geq 1/2 \int_0^{2\pi} \left[\int_{1/2}^1 |f|(1 + |g|^2) dr \right] d\theta = \infty, \end{aligned}$$

visto que a expressão

$$\int_{1/2}^1 |f|(1 + |g|^2) dr$$

representa o comprimento do caminho divergente definido no segmento $[1/2, 1)$ que também tem comprimento infinito. Porém, se M tem área finita temos

$$\int \int_{\Omega} |f|^2(1 + |g|^2)^2 dx dy < \infty$$

, logo para todo $r < 1$ temos pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\int \int_{0 \leq |z| \leq r} |f|(1 + |g|^2) dx dy \leq \left(\int \int_{0 \leq |z| \leq r} dx dy \right)^{1/2} \left(\int \int_{0 \leq |z| \leq r} |f|^2(1 + |g|^2)^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Tomando-se o limite de ambos os membros desta desigualdade quando $r \rightarrow 1^-$, obtemos uma contradição se M tiver área finita. Assim a área de M é infinita.

Se u é não constante isto segue-se do teorema de Yau. Desta forma podemos escrever a condição de $u \notin L^p(\Omega)$ como sendo:

$$\int_{\Omega} |h|^p |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2 dx dy = \int_{\Omega} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - a_i|^{p\alpha}} dx dy = \infty.$$

Para achar uma contradição mostraremos que a integral acima é finita contradizendo M ser completa. Para isto consideraremos os conjuntos:

$$\Omega_j = \{z \in \Omega ; |g(z) - a_j| \leq \ell\},$$

onde ℓ é tomado suficientemente pequeno para que os Ω_j sejam disjuntos. Considere também

$$\Omega' = \Omega - \bigcup_{j=1}^6 \Omega_j$$

e

$$H(z) = \frac{|g'(z)|^p (1 + |g(z)|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g(z) - a_i|^{p\alpha}}.$$

Desta forma temos

$$\int_{\Omega} H dx dy = \sum_{j=1}^6 \int_{\Omega_j} H dx dy + \int_{\Omega'} H dx dy.$$

Note que em cada Ω_j temos que $|g - a_i| > \ell$ se $i \neq j$ e $|g| = |g - a_j + a_j| \leq |g - a_j| + |a_j| \leq \ell + |a_j|$, portanto

$$H \leq \frac{|g'|^p (1 + (\ell + |a_j|)^2)^2}{|g - a_j|^{p\alpha} \ell^{5p\alpha}} \leq C_j \frac{|g'|^p}{|g - a_j|^{p\alpha}}.$$

Sendo $C = \max\{C_j\}$ teremos

$$H \leq C \frac{|g'|^p}{|g - a_j|^{p\alpha}}.$$

Note que

$$|g - a_j|^\alpha > |g - a_j|^{2-\alpha}$$

donde obtemos

$$|g - a_j|^\alpha \geq \frac{|g - a_j|^\alpha + |g - a_j|^{2-\alpha}}{2}$$

o que equivale a

$$\frac{1}{|g - a_j|^\alpha} \leq \frac{2}{|g - a_j|^\alpha + |g - a_j|^{2-\alpha}} \quad (2.8)$$

Multiplicando por $|g'|$ e elevando a p ambos os membros da desigualdade (2.8) obtemos

$$\frac{|g'|^p}{|g - a_j|^{p\alpha}} \leq \frac{2^p |g'|^p}{(|g - a_j|^\alpha + |g - a_j|^{2-\alpha})^p}.$$

Podemos assim aplicar o lema (2.3.1) em cada Ω_j obtendo

$$\int_{\Omega_j} H dx dy < \infty.$$

Mostremos agora que

$$\int_{\Omega'} H dx dy < \infty.$$

Como $p\alpha = 5/6$, e $0 < p < 1$ sobre Ω' temos que

$$H \leq \frac{C|g'|^p}{|g - a_6|^{p\alpha+5p\alpha-4}} = \frac{C|g'|^p}{|g - a_6|}. \quad (2.9)$$

fazendo $Y = |g - a_6| > \ell$, note que

$$\frac{(Y^\alpha + Y^{2-\alpha})^p}{Y}$$

é limitada por uma constante C' quando $Y \rightarrow \infty$ desde que $0 < p < 11/12$ e $\alpha > 10/11$.

Assim a última igualdade em (2.9) se torna

$$\frac{C|g'|^p}{|g - a_6|} \leq \frac{C''|g'|^p}{(|g - a_6|^\alpha + |g - a_6|^{2-\alpha})^p},$$

e de novo pelo lema (2.3.1) temos

$$\int_{\Omega'} H dx dy < \infty.$$

Como

$$\Omega = \Omega' \bigcup_{j=1}^6 \Omega_j,$$

temos

$$\int_{\Omega} H dx dy < \infty$$

e o resultado está provado. ■

Capítulo 3

Uma extensão do teorema de Fujimoto

O resultado de Frederico Xavier foi um passo importante na tentativa de se resolver completamente o problema da distribuição das normais de uma superfície mínima completa, entretanto não se conseguiam exemplos de superfícies mínimas completas das quais a aplicação normal de Gauss omitisse cinco ou seis pontos em $\mathbb{S}^2$. A procura destes exemplos terminou em 1988 com o extraordinário resultado de Hyrokata Fujimoto o qual afirma que tais exemplos não existem e que na verdade a aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima completa e não plana pode omitir no máximo quatro pontos na esfera unitária.

Inspirado pelo trabalho de Fujimoto Robert Osserman e seu aluno Xiaokang Mo, dois anos depois, puseram na forma final a conexão entre curvatura total e aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$. O resultado destes autores inclui a seguinte extensão do teorema de Fujimoto:

Sendo X uma superfície mínima regular completa em $\mathbb{R}^3$, se a aplicação normal de Gauss de X atinge cinco valores distintos um número finito de vezes, então X tem

curvatura total finita.

Nosso objetivo neste capítulo é exibir a prova desta extensão. Iniciaremos com algumas considerações sobre a métrica hiperbólica induzida em superfícies de Riemann hiperbólicas bem como daremos alguns conceitos que serão utilizados na prova do teorema de Fujimoto que pode ser encontrada em [11] pág. 188. Por fim mostraremos o resultado principal a que nos propomos desde o início exibindo a prova do teorema de Mo-Osserman.

Iniciaremos analisando o comportamento assintótico da métrica hiperbólica induzida em superfícies do tipo $\Omega = \mathbb{C} - \{w_1, \dots, w_n\}$ com $n \geq 2$, na vizinhança dos pontos $w_1, \dots, w_n$.

Definição 3.0.4 Uma métrica hiperbólica ou de curvatura gaussiana -1 em uma superfície de Riemann hiperbólica, X , é uma métrica conforme e completa, $ds_X = \rho_X(w)|dw|$, em X , satisfazendo a equação

$$\Delta \log \rho_X = \rho_X^2. \quad (3.1)$$

Denomina-se ρ_X como a expressão da métrica ds_X e define-se a *densidade da métrica* pela expressão

$$\varphi(w) = \log \rho_X(w). \quad (3.2)$$

Exemplo 3.0.5 Como exemplos de superfícies de Riemann hiperbólicas temos:

(i) o *semi-plano de Poincaré*. Esta superfície consiste do semi-plano superior

$$H = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

munido com a métrica

$$ds_H = \rho_H(z)|dz| \quad \text{onde} \quad \rho_H(z) = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}.$$

(ii) o *disco hiperbólico*. Esta superfície consiste do disco unitário

$$\Delta = \{w \in \mathbb{C} ; |w| < 1\}$$

munido com a métrica

$$ds_{\Delta} = \rho_{\Delta}(w)|dw| \text{ onde } \rho_{\Delta}(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}.$$

(iii) o *disco perfurado*. Esta superfície consiste do disco perfurado na origem

$$\Delta_0 = \{u \in \mathbb{C} ; 0 < |u| < 1\}$$

munido com a métrica

$$ds_{\Delta_0} = \rho_{\Delta_0}(u)|du| \text{ onde } \rho_{\Delta_0}(u) = \frac{1}{|u| \log \frac{1}{|u|}}.$$

Note que ρ_H , ρ_{Δ} e ρ_{Δ_0} satisfazem (3.1) donde são, de fato, métricas hiperbólicas em H , Δ e Δ_0 respectivamente.

Exemplo 3.0.6 Sejam H , Δ e Δ_0 como no exemplo (3.0.5) e considere as funções

$$h : H \longrightarrow \Delta_0 \text{ dada por } h(z) = e^{iz}$$

e

$$g : \Delta \longrightarrow \Delta_0 \text{ / dada por } g(\xi) = e^{\frac{\xi+1}{\xi-1}}.$$

Verifica-se que h e g são homeomorfismos locais donde (H, h) e (Δ, g) são dois exemplos de superfícies de recobrimento de Δ_0 . Como H e Δ são simplesmente conexos e localmente conexos por caminhos (H, h) e (Δ, g) são chamadas *superfícies de recobrimento universal* de Δ_0 .

Para fixar idéias, suponha que não se conheça a expressão da métrica hiperbólica em Δ_0 . Como conhecemos algumas das superfícies de recobrimento universal de Δ_0 , podemos usá-las para induzir a métrica hiperbólica em Δ_0 . Procedemos do seguinte modo:

Seja a superfície de recobrimento universal (H, h) . Queremos munir Δ_0 com uma métrica de tal forma que o pull-back, h^* , via aplicação h seja a métrica hiperbólica ds_H em H , ou seja, queremos encontrar ρ_{Δ_0} de tal forma que

$$h^*(\rho_{\Delta_0}(w)|dw|) = \rho_H(z)|dz|. \quad (3.3)$$

De (3.3) segue-se que

$$\rho_{\Delta_0}(w) = \rho_H(z)|z'(w)| \quad (3.4)$$

e como $z(w) = -i \log w$ temos

$$|z'(w)| = \frac{1}{|w|} \quad e \quad \text{Im}(z) = -\log |w|.$$

Portanto (3.4) é dada por

$$\rho_{\Delta_0}(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{|w|}}$$

como queríamos.

Analogamente, para a superfície de recobrimento universal (Δ, g) , temos

$$\rho_{\Delta_0}(w) = \rho_{\Delta}(\xi)|\xi'(w)|. \quad (3.5)$$

Como

$$\xi(w) = \frac{\log w + 1}{\log w - 1}$$

temos

$$|\xi'(w)| = \frac{2}{|w| |\log w - 1|^2} \quad e \quad \rho_{\Delta}(\xi) = \frac{-|\log w - 1|^2}{2 \log |w|},$$

logo (3.5) também é dada por

$$\rho_{\Delta_0}(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{|w|}}$$

como queríamos.

Como veremos mais adiante no lema (3.0.9), podemos nos deparar com a situação onde teremos que induzir a métrica hiperbólica numa superfície $\Omega = \mathbb{C} - \{w_1, \dots, w_n\}$, $n \geq 2$, cujo recobrimento universal π é conformemente equivalente ao disco hiperbólico Δ . Apesar de não termos uma expressão para a aplicação de recobrimento universal $\pi : \Delta \longrightarrow \Omega$ e conseqüentemente não podermos explicitar a expressão da métrica, ρ_Ω , podemos estudar o seu comportamento assintótico na vizinhança dos pontos $w_1, \dots, w_n$ e $w_{n+1} = \infty$, que são na verdade singularidades, visto que a expressão da métrica $\rho_\Omega(w)$ torna-se nula ou infinita nestes pontos.

Seja w_j um dos pontos $w_1, \dots, w_n$ e R_j tal que $0 < R_j < \min |w_j - w_i|$ para $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$. O fato a ser usado é que a métrica ρ_Ω restrita ao disco perfurado $\Delta_{w_j} = \{w \in \Omega ; 0 < |w - w_j| < R_j\}$ se comporta como a métrica hiperbólica em Δ_{w_j} que é determinada por

$$\rho_{\Delta_{w_j}}(w) = \frac{-R_j}{|w - w_j| \log |w - w_j|}.$$

Desta forma

$$\rho_\Omega(w) \sim \frac{-R_j}{|w - w_j| \log |w - w_j|}, \quad \text{quando } w \longrightarrow w_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

e para $w_{n+1} = \infty$

$$\rho_\Omega(w) \sim \frac{R_0}{|w| \log |w|}, \quad \text{quando } w \longrightarrow \infty, \quad (3.7)$$

onde $R_j > 0$ para $j = 0, 1, \dots, n$.

Finalizamos enunciando o lema de *Schwarz* o qual usaremos na demonstração do lema de *Schwarz-Pick*.

Lema 3.0.7 (Schwarz) *Se $f(z)$ é analítica em $|z| < 1$ e satisfaz as condições*

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 0,$$

então

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{e} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

A igualdade é válida se, e somente se,

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

com θ real.

Teorema 3.0.8 *Seja $f : \Delta_r \longrightarrow \Delta_R$ uma aplicação analítica do disco de raio r no disco de raio R . Então são reduzidas por f as seguintes quantidades:*

- (i) a distância não-euclídeana entre dois pontos;
- (ii) o comprimento não-euclídeano de um arco;
- (iii) a área não-euclídeana de um conjunto.

No que segue precisaremos apenas do item (ii) deste teorema, o qual é conhecido como **lema de Schwarz-Pick** e sua demonstração se baseia numa generalização do lema de Schwarz.

demonstração do item (ii). Em outras palavras queremos mostrar que sendo $f : \Delta_r \longrightarrow \Delta_R$ uma aplicação analítica vale a seguinte desigualdade:

$$\rho_{\Delta_R}(f(z))|f'(z)| \leq \rho_{\Delta_r}(z) \quad (3.8)$$

Suponha que $f(z_0) = w_0$ onde $|z_0| < r$ e $|w_0| < R$. Sejam $T : \Delta_r \longrightarrow \Delta$ e $S : \Delta_R \longrightarrow \Delta$ transformações lineares fracionárias tais que $T(z_0) = 0$ e $S(w_0) = 0$. Usando o fato que uma transformação fracionária $P : \Delta \longrightarrow \Delta$ com $P(\xi_0) = 0$ é dada por

$$P(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{1 - \overline{\xi_0}\xi},$$

segue-se que a expressão para T é dada por

$$T(rv) = \frac{v - v_0}{1 - \overline{v_0}v} \quad \text{para } |v| < 1,$$

onde para $z = rv$ temos

$$T(z) = \frac{r(z - z_0)}{r^2 - \overline{z_0}z} \quad (3.9)$$

e analogamente para S encontramos

$$S(w) = \frac{R(w - w_0)}{R^2 - \overline{w_0}w}. \quad (3.10)$$

Como a aplicação $F = S \circ f \circ T^{-1}$ é uma aplicação analítica do disco no disco, segue-se do lema de Schwarz que

$$|F(\xi)| \leq |\xi| \quad \text{onde } \xi = T(z)$$

o que é o mesmo que

$$|S \circ f(z)| \leq |T(z)|,$$

e por (3.9) e (3.10) chegamos a desigualdade

$$\left| \frac{R(f(z) - f(z_0))}{R^2 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{r(z - z_0)}{r^2 - \overline{z_0}z} \right|. \quad (3.11)$$

Fazendo $z_0 \longrightarrow z$ em (3.11) encontramos

$$\frac{R|f'(z)|}{R^2 - |f(z)|^2} \leq \frac{r}{r^2 - |z|^2}, \quad (3.12)$$

que nos dá a desejada desigualdade em (3.8). ■

A igualdade em (3.12) é válida somente quando f é uma transformação linear fracionária.

Lema 3.0.9 (Fujimoto) *Seja $h(z)$ analítica em $|z| < r$ e omitindo os pontos $w_1, \dots, w_4$. Sejam ϵ, ϵ' satisfazendo*

$$0 < 4\epsilon' < \epsilon < 1. \quad (3.13)$$

Então existe uma constante positiva b dependendo somente de $w_1, \dots, w_4, \epsilon, \epsilon'$ tal que

$$\frac{(1 + |h(z)|^2)^{\frac{3-\epsilon}{2}} |h'(z)|}{\prod_{j=1}^4 |h(z) - w_j|^{1-\epsilon'}} \leq \frac{2br}{r^2 - |z|^2} \quad (3.14)$$

Demonstração Seja $\Omega = \mathbb{C} - \{w_1, \dots, w_4\}$. O recobrimento universal de Ω é conformemente equivalente ao disco unitário Δ . Podemos induzir a métrica hiperbólica, $ds_\Omega = \rho_\Omega(w) |dw|$, em Ω , de tal modo que o pull-back de ds_Ω via a aplicação de recobrimento universal seja a métrica hiperbólica em Δ , isto é,

$$\pi^*(\rho_\Omega(w)|dw|) = \rho_\Delta(\xi)|d\xi| \quad , \quad w = \pi(\xi). \quad (3.15)$$

Para $\rho_\Omega(w)$ temos o comportamento assintótico descrito em (3.6) e (3.7),

$$\rho_\Omega(w) \sim \frac{c_j}{|w - w_j| \log |w - w_j|} \quad \text{quando } w \longrightarrow w_j \quad , \quad 1 \leq j \leq 4 \quad (3.16)$$

e

$$\rho_\Omega(w) \sim \frac{c_0}{|w| \log |w|} \quad \text{quando } w \longrightarrow \infty = w_5 \quad (3.17)$$

onde c_0 e c_j são constantes diferentes de zero.

Consideremos a função

$$\psi(w) = \frac{(1 + |w|^2)^{\frac{3-\epsilon}{2}}}{\rho_\Omega(w) \prod_{j=1}^4 |w - w_j|^{1-\epsilon'}} \quad w \in \Omega \quad (3.18)$$

que é positiva e contínua em Ω . Por (3.16) e (3.17) temos $\psi(w) \longrightarrow 0$ quando $w \longrightarrow w_j$, $j = 1, \dots, 5$. Portanto $\psi(w)$ tem um máximo positivo em Ω , o valor b , o qual depende somente de $w_1, \dots, w_4, \epsilon, \epsilon'$ e portanto obtemos

$$\psi(w) \leq b \quad (3.19)$$

para algum $w \in \Omega$.

Sendo $\pi : \Delta \longrightarrow \Omega$ a aplicação de recobrimento universal, podemos levantar $h : \Delta_r \longrightarrow \Omega$ para uma aplicação analítica $H : \Delta_r \longrightarrow \Delta$ onde $h = \pi \circ H$, ver [8]. Por (3.15) e pelo lema de Schwarz-Pick temos que

$$\rho_\Omega(h(z))|h'(z)| = \rho_\Delta(H(z))|H'(z)| \leq \rho_{\Delta_r}(z)$$

logo

$$\rho_{\Omega}(h(z))|h'(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2}. \quad (3.20)$$

Usando as desigualdades (3.19) e (3.20) na função (3.18) obtemos a expressão (3.14) como queríamos. ■

Teorema 3.0.10 (Fujimoto) *Se $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima regular completa e não-plana, então a aplicação normal de Gauss de X pode omitir no máximo quatro pontos em $\mathbb{S}^2$.*

Ver [11] pág. 188.

Para a prova do teorema de Mo-Osserman precisaremos dos seguintes resultados:

Teorema 3.0.11 (Picard) *Se $f : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica e tem uma singularidade essencial em z_0 , então em cada vizinhança de z_0 f assume cada valor em $\mathbb{C}$, com uma possível exceção, um número infinito de vezes.*

Demonstração Ver [3] pág. 300. ■

Este teorema é conhecido como o "grande teorema de Picard" e é uma notável extensão do teorema de Cassorati-Weierstrass o qual afirma que

Se z_0 uma singularidade essencial de uma função analítica $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, então para toda vizinhança perfurada de z_0 , $W_0 \subset U$, o conjunto $f(W_0)$ é denso em $\mathbb{C}$.

Definição 3.0.12 Uma superfície de Riemann M é do tipo topológico finito se é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann fechada (compacta sem bordo), $\bar{M}$, com um número finito de pontos removidos.

Como exemplo de uma superfície de Riemann de tipo topológico finito temos a esfera com n asas e com um número finito de pontos removidos.

Em 1957 A. Huber estabeleceu a extraordinária relação entre curvatura total finita de uma superfície completa X e seu tipo topológico. Huber demonstrou que :

Teorema 3.0.13 (Huber) *Se a curvatura total de uma superfície completa X existe e é finita, então X é do tipo topológico finito.*

Uma demonstração mais simples foi dada por V. Bangert em 1980 e para o caso em que $K \leq 0$, que é o que precisamos para superfícies mínimas , uma prova simples dada por R. Bryant, pode ser encontrada na dissertação de mestrado no IMPA de D. Benarrós [1] em 1986.

Mostraremos agora alguns resultados obtidos por Osserman a partir do teorema de Huber.

Teorema 3.0.14 (Osserman) *Seja M uma variedade Riemanniana completa bi-dimensional cuja curvatura Gaussiana satisfaz*

$$K \leq 0 \quad e \quad \int_{\Omega} |K| dA < \infty. \quad (3.21)$$

Então existe uma variedade Riemanniana compacta bi-dimensional, $\bar{M}$, um número finito de pontos $p_1, \dots, p_n$ em $\bar{M}$ e uma isometria entre M e $\bar{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$.

Demonstração Ver [9] pág. 81. ■

Teorema 3.0.15 (Osserman) *Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ denotando a superfície mínima regular completa X . Se a curvatura total de X é finita, então a conclusão do teorema (3.0.14) é válida e a função $g : M \longrightarrow \mathbb{C}$ se estende para uma função meromorfa em $\bar{M}$.*

Demonstração Ver [9] pág. 82. ■

Teorema 3.0.16 (Osserman) *Seja X uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$. Então a curvatura total de X pode admitir somente os valores $-4\pi m$, m um inteiro não-negativo, ou $-\infty$.*

Demonstração Ver [9] pág. 83. ■

Teorema 3.0.17 *Seja $g : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação holomorfa onde M é uma superfície de Riemann compacta. Então existe um inteiro positivo m tal que todo ponto de $\mathbb{S}^2$ é atingido exatamente m vezes em M por g , contando-se as multiplicidades.*

Demonstração Ver [2] pag. 12.

Definição 3.0.18 *O número m mencionado no teorema, será chamado o grau da aplicação g e diremos que g é um recobrimento de m folhas de $\mathbb{S}^2$ por M , ou seja, (M, g) é uma superfície de recobrimento de m folhas de $\mathbb{S}^2$.*

Teorema 3.0.19 (Mo-Osserman) *Seja X uma superfície mínima regular completa em $\mathbb{R}^3$. Se a aplicação normal de Gauss de X atinge cinco valores distintos, $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{S}^2$, apenas um número finito de vezes, então X tem curvatura total finita.*

Demonstração Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e o par (f, g) denotando, respectivamente, a superfície mínima completa X e sua representação de Weierstrass. Por um movimento rígido da superfície X em $\mathbb{R}^3$, podemos assumir que um dos pontos $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ é o pólo norte de $\mathbb{S}^2$. Fixemos $\alpha_5 = (0, 0, 1)$. Como $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ são pontos distintos atingidos um número finito de vezes, existe K compacto tal que

$$N^{-1}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}) \subset K \subset M.$$

Desta forma a restrição de g a $M - K$ omite os valores $\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_5) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$, onde é, portanto, analítica.

Seja

$$M' = \{\xi \in (M - K) \mid g'(\xi) \neq 0\}.$$

Note que os valores de $g'(\xi)$ dependem da escolha do parâmetro ξ , porém nunca se anulam. Em M' definimos a nova métrica

$$ds_1^2 = \left| \frac{f(\xi)^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (g(\xi) - \pi(\alpha_j))^{\frac{p(1-\epsilon')}{1-p}}}{g'(\xi)^{\frac{p}{1-p}}} \right| |d\xi|^2, \quad (3.22)$$

onde

$$0 < 4\epsilon' < \epsilon < 1 \quad e \quad p = \frac{2}{3 - \epsilon}. \quad (3.23)$$

Essa representação é independente da escolha do parâmetro local ξ e da indeterminação que aparece por conta dos expoentes fracionários. Como f e g são holomorfas a métrica ds_1^2 é plana em M' . Podemos então estendê-la suavemente sobre K , obtendo assim uma métrica em

$$M'' = M' \cup K$$

que é plana fora do conjunto compacto K .

Nosso propósito é provar que M'' é completa na métrica ds_1^2 . Faremos isto por contradição. Se M'' não é completa, então existe um caminho divergente $\gamma(t) : [0, 1) \longrightarrow M''$ com comprimento finito. Sem perda de generalidade podemos supor que existe uma distância positiva d entre γ e o conjunto compacto K . Assim, $\gamma(t) \subset M'$ e como γ é divergente em M'' , com comprimento finito, segue-se que $\gamma(t)$ ou tende para um ponto ξ_0 onde $g'(\xi_0) = 0$, ou $\gamma(t)$ é divergente em M quando $t \longrightarrow 1^-$. O primeiro caso não pode ocorrer, visto que se $g'(\xi_0) = 0$, então

$$g'(\xi) \sim c(\xi - \xi_0)^m, \quad m \geq 1, \quad ,$$

e por (3.22) e (3.23)

$$\begin{aligned} ds_1^2 &\sim c' |\xi - \xi_0|^{\frac{mp}{p-1}} |d\xi|^2 \\ &\sim c' |\xi - \xi_0|^{\frac{2m}{\epsilon-1}} |d\xi|^2 \end{aligned}$$

$$> c' |\xi - \xi_0|^{-2} |d\xi|^2.$$

Assim

$$\int_0^1 ds_1 > c' \int_0^1 |\xi - \xi_0|^{-1} |d\xi| \geq c' \left| \int_0^1 (\xi - \xi_0)^{-1} d\xi \right| = \infty$$

contradizendo o comprimento finito de γ . Podemos, então, assumir que γ é divergente em M , isto é, $\gamma(t)$ tende para um fim de M quando $t \rightarrow 1^-$. Escolha t_0 tal que

$$\int_{t_0}^1 ds_1 < \frac{d}{3}, \quad (3.24)$$

isto é, tal que o comprimento de $\gamma([t_0, 1))$ seja menor do que $d/3$. Considere o menor disco geodésico, Δ , centrado em $\gamma(t_0)$. Como ds_1^2 é plana, Δ é isométrico a um disco no plano. Seja I uma isometria de $D(0, r)$ sobre Δ com $I(0) = \gamma(t_0)$. Podemos estender I em M' como uma isometria local no maior disco possível $D(0, R)$. Por (3.24) e pelo fato de γ ser um caminho divergente em M , temos que $R \leq d/3$. Portanto a imagem sobre I deve ser limitada fora de K por uma distância de pelo menos $2d/3$. Assim, o motivo pelo qual I não pode ser estendida para um grande disco deve ser que a imagem chega a um fim de M'' . Como os zeros de g' ocorrem infinitamente longe na métrica, a imagem deve na verdade chegar a um fim de M . Mais especificamente, deve existir um ponto w_0 com $|w_0| = R$, tal que a imagem sob I do segmento de linha de 0 à w_0 é um caminho divergente Γ em M . O objetivo é mostrar que Γ tem comprimento finito na métrica original ds^2 em M , contradizendo a completude de M .

Defina $G = g \circ I$ no disco $D(0, R)$. Como g omite os valores $\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_5) = \infty$ em M' e desde que a imagem sob I de $D(0, R)$ está em M' , G deve omitir os mesmos valores. Estamos, assim, nas hipóteses do lema (3.0.9). Mostremos, então, que Γ tem comprimento finito. Como I é uma isometria local, temos

$$ds_1^2 = |dw|^2. \quad (3.25)$$

Como a expressão (3.22) independe da escolha de parâmetros conformes, podemos usar w como parâmetro local. Comparando (3.22) com (3.25) temos

$$\left| \frac{f(w) \prod_{j=1}^4 (G(w) - \pi(\alpha_j))^{p(1-\epsilon')}}{G'(w)^p} \right| = 1$$

ou

$$|f(w)| = \left| \frac{G'(w)}{\prod_{j=1}^4 (G(w) - \pi(\alpha_j))^{1-\epsilon'}} \right|^p. \quad (3.26)$$

Se C é o segmento em $D(0, R)$ ligando zero a w_0 e Γ é a imagem de C em M , então para o comprimento L de Γ , temos

$$\begin{aligned} 2L &= \int_C |f(w)| (1 + |G(w)|^2) |dw| \\ &= \int_C \frac{(1 + |G(w)|^2) |G'(w)|^p}{\prod_{j=1}^4 |G(w) - \pi(\alpha_j)|^{p(1-\epsilon')}} |dw| \end{aligned}$$

onde a primeira equação é a expressão para o comprimento em termos das funções F e G e a segunda equação segue de (3.26). Pelo lema (3.0.9) e por (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} 2L &= \int_C \left[\frac{(1 + |G(w)|^2)^{(3-\epsilon)/2} |G'(w)|}{\prod_{j=1}^4 |G(w) - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} \right]^p |dw| \\ &\leq B^p \int_C \left(\frac{2R}{R^2 - |w|^2} \right)^p |dw| \\ &= \frac{(2B)^p}{R^{p-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^p} \\ &= \frac{(2B)^p}{R^{p-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^p (1+t)^p} \\ &\leq \frac{(2B)^p}{R^{p-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^p} \end{aligned}$$

e desde que $p < 1$ temos $L < \infty$.

Isto mostra que se a superfície M'' não é completa, podemos achar um caminho divergente em M com comprimento finito na métrica original

$$ds = \frac{|f(w)|}{2} (1 + |G(w)|^2) |dw|$$

implicando na não completude de M , o que é absurdo. Esta contradição prova que M'' é completa na métrica ds_1^2 . Como a métrica ds_1^2 é plana fora de um conjunto compacto de M'' , temos M'' com curvatura total finita. Pelo teorema de Huber, M'' é do tipo topológico finito. Em particular, g' tem um número finito de zeros e M é do tipo topológico finito. Portanto cada fim anular de M'' , e portanto de M , é conformemente equivalente a um disco perfurado. Assim a superfície de Riemann M deve ser conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta, $\bar{M}$, com um número finito de pontos removidos. Na vizinhança de cada um destes pontos, g é holomorfa e omite quatro valores. Pelo teorema (3.0.11) cada um dos pontos deve ser no máximo um pólo de g . Desta forma g tem uma extensão meromorfa em $\bar{M}$. Pelo teorema (3.0.17) existe um inteiro positivo m tal que $(\bar{M}, g)$ é uma superfície de recobrimento de m folhas para $\mathbb{S}^2$. Assim pelo teorema (3.0.16) a curvatura total é dada por

$$\int_M K dA = -4\pi m,$$

o que prova o teorema. ■

Lembremos um importante resultado de Osserman o qual diz que a aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima regular completa de curvatura total finita omite no máximo três pontos em $\mathbb{S}^2$. Baseado neste teorema e de posse do teorema de Fujimoto é natural indagarmos sobre o comportamento da aplicação normal de Gauss em superfícies mínimas regulares completas de quem a aplicação normal de Gauss omite exatamente quatro pontos. Uma resposta a essa pergunta se dá como uma extensão do teorema de Fujimoto:

Teorema 3.0.20 (Extensão do teorema de Fujimoto) *A aplicação normal de Gauss de Uma superfície mínima regular completa omite no máximo quatro pontos e se omitir exatamente quatro deve cobrir todos os outros uma infinidade de vezes, a menos que a superfície seja um plano.*

Demonstração Suponha que a aplicação normal de Gauss omite quatro pontos e não cubra todos os outros uma infinidade de vezes. Assim deve existir pelo menos um coberto

um número finito de vezes. Estamos nas hipóteses do teorema de Mo-Osserman e assim a superfície deve ter curvatura total finita e pelo resultado de Osserman mencionado acima a superfície deve ser um plano. ■

Referências Bibliográficas

- [1] D. Benarrós, Dissertação de mestrado, IMPA, 1986.
- [2] H. M. Farkas and I. Kra, Riemann Surfaces, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.
- [3] J. Conway, Functions of One Complex Variable I, 2nd ed., Springer, Berlin Heidelberg New York, 1978.
- [4] J. L. Barbosa and A. G. Colares, Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, IMPA, 1984.
- [5] L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann Surfaces, Princeton Univ. Press: Princeton, New Jersey 1960.
- [6] M. Do Carmo, Differential Geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1976.
- [7] M. Spivak, A comprehensive introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, Inc. , Berkley, 1979.
- [8] E. Lima, Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, 2ª Ed., Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1998.
- [9] R. Osserman, A survey of minimal surface, 2nd ed., Dover, New York, 1986. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1976.

- [10] F. Xavier, The Gauss Map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, *Annals of Math.*, 113 (1981), 211-214.
- [11] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster and O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, 1991.
- [12] X. Mo, R. Osserman, On the Gauss Map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theorem. *J. Differential Geom.*, Vol. 31, N° 2 (1990), 343-355.