



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies imersas numa forma espacial tridimensional com curvatura gaussiana constante

José Alan Farias dos Santos

Recife, 21 de Janeiro 2011

José Alan Farias dos Santos

Superfícies imersas numa forma espacial tridimensional com
curvatura gaussiana constante

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da
Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Orientador: Henrique José Morais de Araújo

Recife, 21 de Janeiro de 2011

Catálogo na fonte
Bibliotecário Vimário Carvalho da Silva, CRB 4-1204.

Santos, José Alan Farias dos.

Superfícies imersas numa forma espacial
tridimensional com curvatura gaussiana constante. /
José Alan Farias dos Santos. – Recife: O Autor,
2012.

135 f.: fig.

Orientador: Henrique José Morais de Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Superfícies (Matemática). 2. Curvatura. 3. Curvatura
Gaussiana. 4. Forma espacial. I. Araújo, Henrique José
Morais de (orientador). II. Título.

516.36 (22. ed.)

FQ 2012-003

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:

Henrique José Morais de Araújo, UFPE

Orientador

Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE

Jorge Antonio Hinojosa Vera, UFRPE

**SUPERFÍCIES IMERSAS NUMA FORMA ESPACIAL TRIDIMENSIONAL
COM CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE**

POR

José Alan Farias dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Janeiro – 2011

À Dona Rosa.

Agradecimentos

A esta força misteriosa que paira sobre o universo chamada Deus.

À minha mãe que sempre me dispensou todo apoio e incentivo com carinho e paciência.

À minha madrinha Eliane pelo apoio.

Ao meu pai.

À moça Carla pelo apoio, carinho, incentivo, paciência e pelas dicas, sugestões e correções do meu "português ruim".

Ao meu orientador, Professor Henrique, pelo apoio, incentivo e paciência nas muitas horas a mim dispensadas. Além do que pelo exemplo de ética e profissionalismo.

Aos outros professores que participaram de minha banca: Ramón Mendoza, Jorge Hinojosa, Evilson Silva, César Castilho por participarem de minha banca e é claro por suas importantes correções e sugestões. Em especial agradeço ao professor Ramón por seu apoio e conselhos.

Aos professores: Airton Castro pela amizade e apoio; Eduardo Leandro e Antonio Carlos pelo apoio a continuação dos meus estudos, Marcos Rabelo pelo apoio.

A meus professores da Escola Jornalista Costa Porto(Jordão), em especial Florita, Justino, Edson por nutrir meu sonho.

Ao todos do Curso Professores do Terceiro Milênio(UFPE) que me deram a possibilidade de ingressar numa universidade pública e de qualidade.

Aos amigos do Dmat: Halley, Lucas, Marcelo, Renato(xera), Bruno(Bob), Gleybson(binho), Allyson, Giovanna(Gigi), Eudes, Ricardo(Ricatti), André, Fábio, José Francisco(Zé), Marcos, entre outros.

As meus amigos fora do Dmat: Daniela(Dani), Mariana(Mari), Cintia, Wallace, Andréa, Ronaldo, Mauro, Juliana(Juju).

A todos funcionários do DMAT-UFPE que nos possibilitam as melhores condições de ambiente e suporte ao burocrático de modo que nos preocupemos apenas em estudar.

Ao ilustríssimo presidente Luís Inácio Lula da Silva pelo seu brilhante trabalho nos seus 8 anos de governo à frente de nosso Brasil em especial por sua valorização à educação.

A todos que participaram de forma direta ou indireta desta conquista.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

O teorema de Cartan assegura que as variedades $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ são essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Nomeia-se esses tipos de variedades como sendo Formas Espaciais. O trabalho apresenta, quando possível, a classificação das superfícies completas de curvatura constante imersas numa forma espacial tridimensional. Assim, são estabelecidos três teoremas de classificação os quais trazem a classificação geral, quando possível, pois algumas questões continuam em aberto.

No primeiro caso, referente ao \mathbb{R}^3 mostra-se que as classes das superfícies completas imersas em \mathbb{R}^3 , segundo o sinal da curvatura Gaussiana K são cilindros se $K \equiv 0$, ou esferas se $K > 0$. E não existem se $K < 0$ (teorema de Hilbert), .

As classificações referentes a \mathbb{S}^3 e \mathbb{H}^3 é feita segundo a curvatura extrínseca (K_{ext}). Porém, no final de cada respectivo capítulo figuram teoremas que trazem a classificação geral (quando possível) por meio da curvatura intrínseca (K_{int}).

Em relação ao \mathbb{S}^3 é evidenciado que a classe de superfícies são constituídas por 2-esferas se $K_{int} \geq 1$; pelo conjunto vazio se $K_{int} < 0$ ou $0 < K_{int} < 1$; e para o caso $K_{int} = 0$ (superfícies flats) é feita uma discussão sobre a classe das superfícies de translação, da qual os toros de Clifford fazem parte.

Para o \mathbb{H}^3 , estas superfícies são esferas Geodésicas se $K_{int} > 0$, horosferas ou conjunto de pontos equidistantes de uma quando $K_{int} = 0$. No caso $K_{int} \equiv -1$, elas são formadas por porção de Cones ou Cilindros Geodésicos se; não existem superfícies para quando $K_{int} < -1$ (consequência direta de uma versão mais geral do Teorema de Hilbert); finalmente, quando $-1 < K_{int} < 0$, exibimos apenas as superfícies de revolução, incluindo hiperesferas.

Palavras-Chave: Superfícies Imersas, Superfícies Completas, Forma Espacial, Curvatura Gaussiana, Curvatura Intrínseca, Curvatura Extrínseca.

ABSTRACT

Cartan's theorem tells us that the riemannian manifolds \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n are the only complete simply connected riemaninan manifolds with constant sectional curvature. Those are called space forms. This work presents, whenever possible, the classification of complete surfaces of constant curvature immersed in a tridimensional space form. Thus, three classification theorems are established, which present the classification when possible, for there are still some open questions.

For the first theorem, relative to the \mathbb{R}^3 case, it is shown that according to the sign of the Gaussian curvature K , these surfaces are cylinders when $K = 0$ or spheres when $K > 0$. There are no such surfaces when $K < 0$ (Hilbert's theorem).

For the case of \mathbb{S}^3 , these surfaces are 2-spheres if $K_{int} \geq 1$, and there are no such surfaces if either $0 < K_{int} < 1$ or else if $K_{int} < 0$. For flat surfaces, a discussion on translation surfaces is carried out, of which the Cliffrod tori are examples.

For the case of \mathbb{H}^3 , these surfaces are geodesic spheres if $K_{int} > 0$, horospheres or the set of points equidistant from a geodesic when $K_{int} = 0$. In the case $K_{int} = -1$, they are made of portions of cones and geodesic cylinders. There are no such surfaces when $K_{int} < -1$ (this is a consequence of a generalized version of Hilbert's theorem). Finally, when $-1 < K_{int} < 0$, we only exhibit the surfaces of revolution, including hyperspheres.

Keywords: Immersed surfaces, complete surfaces, Gaussian curvature, space forms, intrinsic curvature, extrinsic curvature.

“Quem sabe concentrar-se numa coisa e insistir nela como único objetivo, obtém, ao fim e ao cabo, a capacidade de fazer qualquer coisa.”

(Mahatma Gandhi)

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Superfícies de Curvatura Constante em \mathbb{R}^3 | 14 |
| 1.1 | Introdução | 14 |
| 1.2 | $K \equiv 0$ | 14 |
| 1.3 | $K > 0$ | 30 |
| 1.4 | $K < 0$ | 33 |
| 1.5 | Teorema Principal | 51 |
| 2 | Preliminares para \mathbb{S}^3 e \mathbb{H}^3 | 52 |
| 2.1 | Introdução | 52 |
| 2.2 | Algumas definições e resultados para ambientes mais gerais | 52 |
| 3 | Superfícies de Curvatura Constante em \mathbb{S}^3 | 69 |
| 3.1 | Introdução | 69 |
| 3.2 | $K_{ext} < -1$ | 69 |
| 3.3 | $K_{ext} \geq 0$ | 70 |
| 3.4 | $-1 < K_{ext} < 0$ | 72 |
| 3.5 | $K_{ext} = -1$ | 72 |

| | |
|--|------------|
| | 10 |
| 3.5.1 S^3 é um Grupo de Lie | 72 |
| 3.5.2 Superfícies de Translação | 79 |
| 3.6 Teorema Principal | 101 |
| 4 Superfícies Completas de Curvatura Constante em \mathbb{H}^3 | 102 |
| 4.1 Introdução | 102 |
| 4.2 Alguns Modelos para o espaço Hiperbólico | 102 |
| 4.2.1 Semi-Espaço-Poincaré. | 103 |
| 4.2.2 Bola-Poincaré | 103 |
| 4.2.3 Equivalência entre os modelos | 104 |
| 4.3 Superfícies Totalmente Umbílicas de \mathbb{H}^3 | 105 |
| 4.3.1 Superfícies totalmente Geodésicas ou Planos Geodésicos | 105 |
| 4.3.2 Superfícies Equidistantes ou Hiperesferas | 105 |
| 4.3.3 Horosferas | 106 |
| 4.3.4 Esferas Geodésicas | 106 |
| 4.3.5 Teorema de Classificação para Superfícies Umbílicas | 107 |
| 4.4 $K_{ext} < 0$ | 107 |
| 4.5 $K_{ext} > 1$ | 107 |
| 4.6 $K_{ext} = 1$ | 108 |
| 4.7 $K_{ext} = 0$ | 123 |
| 4.8 Classificação de Superfícies de Revolução com $0 < K_{ext} < 1$ | 124 |
| 4.9 Teorema Principal | 132 |

INTRODUÇÃO

As variedades \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , \mathbb{H}^n são completas e simplesmente conexas [4].

O teorema de Cartan, enunciado a seguir, garante que essas são essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Nomeia-se esses tipos de variedades como sendo Formas Espaciais.

Teorema: Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante K_{sec} . Então o recobrimento universal \tilde{M} de M , com a métrica do recobrimento, é isométrico ao:

- (a) Espaço hiperbólico de dimensão n ; \mathbb{H}^n , se $K_{sec} \equiv -1$
- (b) Espaço euclidiano de dimensão n ; \mathbb{R}^n , se $K_{sec} \equiv 0$
- (c) Esfera n -dimensional; \mathbb{S}^n , se $K_{sec} \equiv 1$

Existe uma grande quantidade de superfícies de curvatura constante imersas numa forma espacial de dimensão 3 ([3], [10]). Porém, se impusermos a hipótese adicional de completude, a quantidade se reduz a poucos exemplos. É objetivo desse trabalho fazer essa classificação, quando possível. A bibliografia básica utilizada foram os textos [3], [10], [11].

No capítulo 1 será feita a classificação para \mathbb{R}^3 segundo o sinal da curvatura Gaussiana K . Se $K \equiv 0$ os pontos da superfície são planares ou parabólicos. Assim, na seção 1.1 provaremos que as componentes conexas de pontos parabólicos e planares são a união de retas paralelas e a fronteira destes conjuntos, que são iguais, são limites de retas paralelas contidas em uma componente conexa parabólica. Assim, ficará estabelecido que para este caso os únicos tipos de superfícies são cilindros.

Na seção 1.2 abordaremos o caso $K > 0$, sendo a curvatura Gaussiana positiva o Teorema de Bonnet garante que a hipótese de completude pode ser substituída pela hipótese

de compacidade, isso será útil para garantir que a superfície em questão é umbílica, por conseguinte uma esfera. Assim, obteremos uma caracterização das esferas.

Na seção 1.3 tratamos do famoso teorema de Hilbert. Para demonstração deste definimos uma parametrização que cobre toda a superfície em termos de Redes de Tschebysheff. Assim, demonstraremos resultados globais fundamentais em termos das redes Tschebysheff. Assim, provaremos o famoso teorema de Hilbert o qual garante a não existência de superfícies completas de curvatura Gaussiana $K < 0$.

O capítulo 2 será dedicado a definição de conceitos como os de curvatura extrínseca (K_{ext}) e intrínseca (K_{int}) e a reformulação dos resultados geométricos de uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 , para o caso geral, em que essas estão imersas numa forma espacial qualquer. Para isto define-se as curvaturas intrínseca e extrínseca de uma superfície imersa numa forma espacial tridimensional. Como exemplos temos uma generalização do teorema de Hilbert que garante a não existência de superfícies completas de curvaturas extrínseca, intrínseca negativas imersas numa variedade dimensão 3 de curvatura contante; veremos também a verificação da validade das equações de Mainardi-Codazzi para ambientes mais gerais.

O capítulo 3 trás em cada seção a classificação, para \mathbb{S}^3 , segundo o sinal da curvatura extrínseca. Entretanto, na última seção do capítulo, figura o teorema geral, que apresenta a classificação segundo a curvatura intrínseca. No decorrer das seções deste capítulo muitos resultados do capítulo 2 são invocados, na seção 3.2 por exemplo a versão mais geral do teorema de Hilbert eliminará um caso de forma imediata.

Na seção 3.3 será demonstrada uma proposição que é uma consequência direta de uma versão mais geral do teorema de classificação das superfícies umbílicas. Assim, pode-se concluir imediatamente de que a superfície para este caso é uma n-esfera.

Na seção 3.4 será observada a grande importância do capítulo de preparação para que a classificação seja efetivada, pois vários resultados do mesmo serão utilizados como o teorema de classificação das superfícies compactas e uma versão mais geral do teorema de Gauss Bonnet e o famoso teorema da "esfera cabeluda". Assim, fica-se apenas o trabalho de juntar peças de um quebra cabeça para concluir a não existência de superfícies para este caso.

Na seção 3.5 será feita uma discussão sobre as superfícies de translação. Para isto será mostrado que \mathbb{S}^3 é um grupo de Lie, assim lançaremos mão da teoria dos Grupos de Lie para descrever um possível caminho para classificação deste caso. Sabe-se por exemplo que os Toros de Clifford figuram como uma classe importante de superfícies flats de translação.

Apresentando a mesma metodologia do capítulo 3, o Capítulo 4 fará durante as seções a classificação para \mathbb{H}^3 segundo a curvatura extrínseca e na última seção, 4.7, haverá o enunciado do teorema geral segundo a curvatura intrínseca. Na primeira seção, 4.2, deste capítulo 4.1, serão definidos três modelos do espaço hiperbólico e verificaremos a equivalência entre eles. Na seção 4.3, serão apresentadas as superfícies totalmente umbílicas \mathbb{H}^3 e no final desta seção irá figurar um teorema de classificação deste tipo de superfícies. Na seção 4.3 a classificação de fato se inicia. Aqui mais uma vez a versão mais geral do teorema de Hilbert será invocada. Na seção 4.4 é demonstrado o teorema de classificação devido a Volkov e Sasaki Vladmirova. A demonstração deste teorema é dependente de um teorema de caráter puramente analítico cujo crédito é devotado a Jörges. Na seção 4.5 faremos uma discussão dos avanços, feitos até o momento, para classificação das superfícies flats em \mathbb{H}^3 . O texto [6] é o que até o momento melhor se aproxima de uma classificação efetiva. Na seção 4.6 será faremos a classificação para as superfícies de revolução, expressando efetivamente uma parametrização para todas superfícies deste tipo. E por fim, mostramos que as calotas esféricas são um exemplo para este caso.

Capítulo 1

Superfícies de Curvatura Constante em \mathbb{R}^3

1.1 Introdução

Neste capítulo iremos classificar as superfícies completas em \mathbb{R}^3 segundo o sinal da curvatura Gaussiana.

1.2 $K \equiv 0$

De acordo com o teorema de Minding, superfícies regulares com curvatura gaussiana identicamente nula são localmente isométricas ao plano. Com a hipótese adicional de completude, nesta seção, será exposta uma versão global deste resultado.

Antes de enunciarmos o teorema principal, daremos três definições.

Definição 1.2.1 *Uma Superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita **Conexa** se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua inteiramente contida em S .*

Definição 1.2.2 *Seja S uma Superfície Regular e Conexa. S é denominada **Completa** quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ de S ,*

começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda reta real \mathbb{R} .

Definição 1.2.3 *Um cilindro é uma superfície regular S tal que por cada ponto $p \in S$ passa uma única reta distinguida $R(p) \subset S$ (a geratriz passando por p) que satisfaz a condição de que se $p \neq q$, então $R(p)$ e $R(q)$ são paralelas ou coincidem.*

Teorema 1.2.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa com Curvatura Gaussiana identicamente nula. Então S é um cilindro.*

Consideremos algumas propriedades locais de uma superfície de Curvatura Gaussiana Nula. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com curvatura gaussiana $K \equiv 0$. Sendo $K = k_1 \cdot k_2$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais, os pontos de S são parabólicos ou planares. Denotemos por P o conjunto dos pontos planares e por $U = S \setminus P$ o conjunto dos pontos parabólicos de S . Note que P é fechado, pois $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ é nula, portanto $P = H^{-1}(0)$ (imagem inversa de um fechado $\{0\}$ por uma aplicação contínua H). Segue-se que $U = S \setminus P$ é aberto, logo $FrU \subset P$.

A proposição 1.2.4 que demonstraremos a seguir garante que se tomarmos um ponto $p \in U$, sendo p um ponto parabólico, uma das direções principais em p é uma direção assintótica, e não a outra direção assintótica passando por p .

Teorema 1.2.2 ([3]) *Sejam w_1 e w_2 dois campos de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$, que são linearmente independentes em algum ponto $p \in U$. Então é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p de tal maneira que para cada $q \in V$ as curvas coordenadas dessa parametrização passando por q são tangentes às curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$.*

Proposição 1.2.1 ([3]) *Seja $p \in S$ um ponto não umbílico de S . Então é possível parametrizar uma vizinhança de p de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam linhas de curvatura.*

Essa última proposição é consequência do teorema 1.2.2 acima de caráter puramente topológico diferencial, bastando que se tome as direções principais para os campos de vetores. Essas são linearmente independentes numa vizinhança U de p , pois o ponto p é não umbílico e as funções curvaturas principais são contínuas.

Proposição 1.2.2 ([3]) *Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico de S . Então é possível parametrizar uma vizinhança de p de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as curvas assintóticas.*

Proposição 1.2.3 ([3]) (Olinde Rodrigues) *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C em S seja uma linha de curvatura é que*

$$(N \circ \alpha)'(t) = -\lambda(t).\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C , onde $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t . Nesse caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura(principal) segundo $\alpha'(t)$.

Proposição 1.2.4 *A única linha assintótica passando por um ponto parabólico $p \in U \subset S$ de uma superfície com curvatura $K \equiv 0$ é um segmento(aberto) de uma reta em S .*

Demonstração: Sendo $K \equiv 0 = k_1.k_2$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais e U é formado apenas por pontos parabólicos, então uma das destas é não nula, logo estamos tratando de pontos não-umbílicos.

A proposição 1.2.1 garante que é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p por $x(u, v) = x$ de tal maneira que as curvas coordenadas nesta vizinhança sejam linhas de curvatura.

Sendo $K \equiv 0$, podemos supor que $k_1 = 0$, onde k_1 é a curvatura correspondente a $v = cte$, ou seja, $\alpha(t) = x(u(t), v_0)$ é uma curva assintótica em V . Já de acordo com a proposição 1.2.3, podemos escrever:

$$(N \circ \alpha)'(t) = -\lambda(t).\alpha'(t),$$

onde α é uma parametrização qualquer da curva coordenada $v = cte$, $\lambda(t)$ é a curvatura principal associada a $\alpha'(t)$, a qual é sempre nula ao longo de $v = cte$ em V . Tomemos α sendo $\alpha(t) = x(t, v_0)$, logo temos que:

$$N_u = N_u.1 + N_v.0 = N_u.u' + N_v.v' = (N \circ \alpha)'(t) = -\lambda(t).\alpha'(t) = 0, \text{ ou seja:}$$

$$N_u = 0.$$

Como por cada ponto da vizinhança V passa uma curva $v = const$, a relação $N_u = 0$ vale para todos os pontos de V . Segue-se que em V , vale:

$$\langle x, N \rangle_u = \langle x_u, N \rangle + \langle x, N_u \rangle = 0 + 0 = 0$$

Portanto,

$$\langle x, N \rangle = \varphi(v) \quad \mathbf{(1)}$$

onde $\varphi(v)$ é uma função diferenciável que depende apenas de v .

Derivando a Eq.(1) com respeito a v , obtemos:

$$\langle x, N_v \rangle = \varphi'(v) \quad \mathbf{(2)}$$

Por outro lado, sendo $\| N \| \equiv 1$, temos que;

$$\langle N_v, N \rangle = 0,$$

ou seja, N_v é perpendicular a N .

Sendo $dN_p = [N_u N_v]$, $N_u = 0$ e os pontos de V são todos parabólicos ($dN_p \neq 0$), temos que $N_v \neq 0$ em V .

Logo, podemos afirmar que N e N_v são linearmente independentes. Sendo N uma aplicação C^∞ , temos que:

$$N_{vu} = N_{uv} = 0 \text{ em } V.$$

Agora observemos o que ocorre ao longo de cada curva coordenada $v = const = v_0$:

$$N(u) = N_0$$

Sendo

$$N_{vu} = 0 \text{ em } V$$

Temos que:

$$N_v = (a(v), b(v), c(v)) \text{ em } V,$$

onde a, b, c são funções de v apenas.

Fazendo $v = const = v_0$, teremos:

$$N_v(u) = (N_v)_o = cte \text{ em } V.$$

Assim, pela equação **(1)** podemos afirmar que a curva coordenada $x(u, v_0)$ pertence a um plano normal ao vetor constante N_0 . Já pela equação **(2)** podemos afirmar que a curva também pertence a um plano normal ao vetor constante $(N_v)_o$. Sendo os vetores $(N)_o$ e

$(N_v)_o$ linearmente independentes, temos que a curva $x(u, v_0)$ está contida na intersecção de dois planos distintos que se cruzam, desta forma, esta curva trata-se de um segmento aberto de reta. . ■

Observação 1.2.1 *A hipótese $K \equiv 0$ é fundamental nesta proposição que acabamos de demonstrar. Pois, se considerarmos o paralelo superior do toro de revolução em \mathbb{R}^3 , esta é uma curva assintótica formada apenas por pontos parabólicos, porém não se trata de um segmento aberto de reta.*

Veremos o que ocorre quando estendemos este segmento de reta. A proposição 1.2.8 que iremos provar a seguir garante que o segmento quando estendido jamais cortará P (conjunto dos pontos planares), ou seja, continua indefinidamente em U (conjunto dos pontos planares).

Utilizaremos a seguinte terminologia:

Uma **Linha Assintótica** passando por $p \in S$ é dita **Máxima** se não é um subconjunto próprio de alguma linha assintótica passando por p .

Listemos alguns fatos cujas demonstrações podem ser encontradas na fonte sugerida. Este nos possibilitará demonstrar um Lema, Lema 1.2.1, e este nos possibilitará demonstrar a proposição 1.2.8.

Equações de Codazzi-Mainardi([3]). Sejam \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{e} , \mathbf{f} , \mathbf{g} os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental respectivamente da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto p de S , temos a validade das igualdades a seguir:

$$\begin{aligned} e_v &= \frac{E_v}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ g_u &= \frac{G_u}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Enunciemos um outro resultado de existência de uma parametrização especial. Este resultado é consequência do teorema 1.2.2.

Proposição 1.2.5 ([3]) *Para todo $p \in S$ existe uma parametrização $x(u, v)$ é uma vizinhança V de p tal que as curvas coordenadas $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ intersectam-se ortogonalmente para cada $q \in V$ (diz-se que uma tal x é uma parametrização ortogonal).*

Proposição 1.2.6 ([3]) *Se x é uma parametrização ortogonal ($F=0$) de uma superfície regular, então:*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{E.G}} \cdot \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{E.G}} \right)_v \right] + \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{E.G}} \right)_u \right]$$

Proposição 1.2.7 ([3]) *Dados dois pontos p, q em S a distância entre p e q dada por*

$$d(p, q) = \inf \{ l(\alpha_{p,q}) \},$$

onde $\{ l(\alpha_{p,q}) \}$ é o conjunto dos comprimentos de todas curvas diferenciáveis por partes α ligando os pontos p e q .

Lema 1.2.1 *Seja s o comprimento de arco de uma linha assintótica passando por um ponto parabólico p de uma superfície com curvatura gaussiana nula e seja $H = H(s)$ a curvatura média de S ao longo desta curva. Então, em U ,*

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

Onde as derivadas são tomadas com respeito ao comprimento de arco ao longo da curva assintótica.

Demonstração: Da mesma forma como foi feito na proposição 1.2.4, introduzimos em uma vizinhança $V \subset U$ de p um sistema de coordenadas. Tal que as curvas coordenadas, sejam linhas de curvatura e as curvas $v = \text{const}$ sejam linhas assintóticas. Sejam $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ os coeficientes da segunda forma fundamental nesta parametrização. Sendo $N_u = 0$, temos que $f = -\langle N_u, x_v \rangle = 0$.

E a curva $v = \text{const}$, $u = u(s)$, deve satisfazer a equação diferencial das linhas assintóticas:

$$k_n(p) = \Pi_p(v) = e \cdot \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + g \cdot \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \therefore$$

$$e \cdot \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 0 \therefore$$

$$e = 0 \text{ (Pois, uma curva assintótica é regular, ou seja, } \alpha'(s) = \frac{du}{ds} \cdot x_u + \frac{dv}{ds} \cdot x_v \neq 0 \text{)}$$

A curvatura média nestas condições é dada por (Ver [3]) :

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2 \cdot f \cdot F + g \cdot E}{E \cdot G - F^2} = \frac{e \cdot G + g \cdot E}{E \cdot G} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{G} \quad (3)$$

Pela proposição 1.2.5, temos que $F = 0$ e pelas Equações de Mainardi-Codazzi, temos:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot E_v}{G}, \quad g_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot G_u}{G} \quad (4)$$

A partir da primeira equação de (4), temos que $g \cdot E_v = 0$. Sendo p um ponto parabólico de S , em cada ponto uma das curvaturas principais não se anula. Disto podemos concluir que $g \neq 0$, pois da equação (3) $0 \neq H = \frac{1}{2} \frac{g}{G}$. Daí, sendo $g \cdot E_v = 0$, temos que $E_v = 0$, e por conseguinte, $E = E(u)$ é uma função apenas de u . Portanto, é possível fazer uma mudança de parâmetros:

$$\bar{v} = v, \quad \bar{u} = \int \sqrt{E(u)} du$$

Nessa nova parametrização u mede o comprimento de arco ao longo de $v = \text{cte}$. De fato,

$$\bar{u} = \int \sqrt{\langle x_u, x_u \rangle} du = \int \|x_u\| du,$$

e no novo sistema de coordenadas, (\bar{u}, \bar{v}) , os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \langle x_{\bar{u}}, x_{\bar{u}} \rangle = \left\langle x_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, x_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \cdot \langle x_u, x_u \rangle = \frac{1}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2} \cdot \|x_u\|^2 = \\ \frac{\|x_u\|^2}{\|x_u\|^2} &= 1 \end{aligned}$$

Isto por que $F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$, e $v = \bar{v}$ não depende de \bar{u} .

$$\bar{F} = \langle x_{\bar{u}}, x_{\bar{v}} \rangle = \langle x_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, x_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \rangle = \langle x_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, x_v \rangle = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \cdot \langle x_u, x_v \rangle = 0$$

Por questão de comodidade continuaremos a denotar os novos parâmetros por u e v e os coeficientes da primeira forma fundamental por E, F, G .

Usando a expressão para curvatura Gaussiana dada pela proposição 1.2.6 e levando-se em consideração que nova parametrização $F = 0, E = 1$, temos:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \cdot \left(\frac{G_u}{\sqrt{E \cdot G}} \right)_u$$

$$\text{Mas, } \left(\sqrt{G} \right)_u = \frac{G_u}{\sqrt{G}}, \text{ portanto}$$

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \cdot \left(\sqrt{G} \right)_{uu} \equiv 0 \therefore \left(\sqrt{G} \right)_{uu} = 0 \therefore$$

$$\sqrt{G} = c_1(v) \cdot u + c_2(v) \quad (5)$$

Onde c_1, c_2 são funções apenas de v . Como $g \neq 0$, a 2ª equação do item (4) pode ser reescrita da forma:

$$\frac{g_u}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_u}{\sqrt{G} \cdot \sqrt{G}} = \frac{\left(\sqrt{G} \right)_u}{\sqrt{G}} \therefore$$

$$\ln g = \ln \sqrt{G} + \tilde{c}_3(v), \text{ onde } \tilde{c}_3 \text{ é uma função apenas de } v.$$

Dessa maneira, podemos escrever:

$$g = e^{\tilde{c}_3(v)} \cdot \sqrt{G}$$

Em outros termos:

$$g = c_3(v) \cdot \sqrt{G}. \quad (5)$$

Onde, c_3 é dada por:

$$c_3(v) = e^{\tilde{c}_3(v)},$$

uma função apenas de v .

Introduzindo as equações (5) e (6) na equação (3), obtemos:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\sqrt{G}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2} \cdot c_3(v) \cdot \frac{1}{c_1(v) \cdot u + c_2(v)} \cdot \dots$$

$$\frac{1}{H} = 2 \cdot \frac{c_1(v) \cdot u + c_2(v)}{c_3(v)}$$

Como u mede o comprimento de arco a partir de um certo ponto s_0 , então $u = s - s_0$. Derivando a expressão $\frac{1}{H}$ com respeito a s , obtemos:

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

■

Enunciemos um teorema da Topologia geral cuja demonstração o leitor pode encontrar na fonte sugerida.

Teorema 1.2.3 (Alfândega)([9]) *Sejam C , X subconjuntos de um espaço topológico M . Se C é conexo e tem pontos em comum com X e com $M \setminus X$, então algum ponto de C pertence à fronteira de X .*

Proposição 1.2.8 *Seja r uma linha assintótica máxima passando por um ponto parabólico $p \in U \subset S$ de uma superfície S com curvatura $K \equiv 0$, e seja $P \subset S$ o subconjunto de pontos planares de S . Então $r \cap P = \emptyset$.*

Demonstração: Usaremos de forma direta o teorema da alfândega. Isto é possível, pois uma superfície pode ser considerada um espaço métrico, bastando tomar para a mesma a métrica definida na proposição 1.2.7. Consideremos U , $S \setminus U = P$ e supomos que a linha assintótica máxima r tenha um ponto em comum q com P . Sendo r conexo pelo teorema citado existe um ponto p_0 associado a um s_0 , ou seja, $\alpha(s_0) = p_0$, sendo α uma parametrização qualquer de r .

Pelo lema 1.2.1 podemos concluir que para $s < s_0$, $H(s) = \frac{1}{a \cdot s + b}$, onde a e b são constantes. Como os pontos de P têm curvatura média nula:

$$0 = H(p_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} H(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{a \cdot s + b},$$

o que é um absurdo. ■

Observação 1.2.2 *r é uma reta contida em S . De fato. Já sabemos que a linha assintótica máxima passando por um ponto parabólico é um segmento de reta aberto contido em U . Seja y o extremo deste intervalo, pela completude de S y pertence a S . Usando um mesmo argumento por y passa um segmento aberto contido em U o qual estende o primeiro segmento. Assim, r é uma reta inteira contida em S .*

Proposição 1.2.9 *Seja $p \in FrU \subset S$ um ponto de fronteira do conjunto U de pontos parabólicos, de uma superfície com curvatura gaussiana $K \equiv 0$. Então por p passa um único segmento de reta $C(p) \subset S$. Além disto, $C(p) \subset FrU$, isto é, a fronteira de U é formada por segmentos de retas.*

Demonstração: Seja $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos parabólicos convergindo a p . Sejam $C(p_n) \subset U$ as únicas retas passando pelos p_n 's. Tome u_n como o versor do vetor dado por $q_n - p_n$ com $\{q_n\} = \{B_\varepsilon(p) \cap C(p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $B_\varepsilon(p)$ uma bola centrada em p de raio suficientemente pequeno ε . Portanto, $C(p_n)$ admite uma parametrização da forma: $C(p_n) : \alpha(t_n) = p_n + t \cdot u_n$, onde $t \in \mathbb{R}$.

Sendo uma esfera compacta, u_n admite uma subsequência convergente.

Assim, $\lim_{n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}} u_n = u$.

Portanto,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}'} p_n + t \cdot u_n = p + t \cdot u.$$

Denotaremos esta reta limite $\{p + t \cdot u; t \in \mathbb{R}\}$ por $C(p)$.

Verifiquemos $C(p)$ de fato é uma reta inteiramente contida em S . $C(p)$ é limite de uma sequência de retas $C(p_n)$. Considere o segmento maximal de $C(p)$ contido em S . Por completude, os extremos (digamos A e B) pertencem a S .

O ponto B é limite de pontos $B_n \in C(p_n)$. Uma vizinhança coordenada de B conterá uma sequência de segmentos $I_n \in C(p_n)$, centrados em cada B_n , e com todos I_n com mesmo tamanho δ . Por compacidade local, a vizinhança conterá um segmento de tamanho $\frac{\delta}{2}$ centrado em B , logo B não é maximal.

Observação 1.2.3 *Se a superfície é apenas imersa, a convergência $B_n \rightarrow B$ é na métrica da superfície abstrata. A maximalidade do segmento é com relação a estar contido em S e cada ponto ser limite de pontos em $C(p_n)$.*

Verifiquemos que $C(p) \subset FrU$. Seja $q \in C(p)$, existe $\{q_n\}$, $q_n \in C(p_n) \subset U$ com $q = \lim_{n \in \mathbb{N}} q_n$. Temos que $q \in U \cup FrU$, pois do contrário $q \in IntP$, daí existiria uma sequência de pontos $\{q_k\} \subset IntP$, o que levaria a uma contradição com a proposição 1.2.8. Supondo que $q \notin FrU$, teríamos que $q \in U$, mas $C(p)$ é a única linha assintótica máxima passando por $q \in U$ e $C(p) \subset U$, logo teríamos que $p \in U$. Daí, $p \in FrU \cap U$ o que seria um absurdo, pois $U \cap P = \emptyset$.

Agora considere uma outra sequência $\{p'_n\}$. Supomos por contradição que $C'(p'_n)$ tem uma outra direção limite $C'(p)$. Olhemos $C(p)$, $C'(p)$ em coordenadas, ver figura 1.1. Considere t, t' as retas tangentes em p a $C(p)$ e $C'(p)$, respectivamente. Claramente r e r' não coincidem. Tomemos dois pontos $q, q' \in C(p)$ localizados em lados opostos à reta t' . Por um argumento análogo ao da existência podemos afirmar que q, q' são limites de sequências de pontos x_n, \bar{x}_n nas retas $C(p_n) \subset U$, estas também vistas em coordenadas. Temos que para n suficientemente grande os x_n, \bar{x}_n 's estão localizados em lado opostos com respeito a reta $C'(p)$. Pelo teorema da alfândega existe $y \in C'(p)$ tal que $y \in C(p_n)$ para todo n suficientemente grande, o que contradiz o fato de $C(p) \subset FrU$. ■

Antes de demonstrar o teorema dessa seção enunciemos alguns resultados.

Proposição 1.2.10 ([3]) *Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Proposição 1.2.11 ([3]) *Seja S uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K \leq 0$. Então a aplicação $exp_p : T_p S \rightarrow S$, $p \in S$, é uma aplicação de recobrimento.*

Proposição 1.2.12 ([3]) *Seja $K \equiv 0$. Então $exp_p : T_p S \rightarrow S$, $p \in S$, é uma isometria local.*

Proposição 1.2.13 ([3]) *(Unicidade do Levantamento de Caminhos) Seja $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento, $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ um caminho em B , e $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ um ponto de \tilde{B} tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Então existe um único levantamento $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ de α com origem em \tilde{p}_0 , isto é, com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$.*

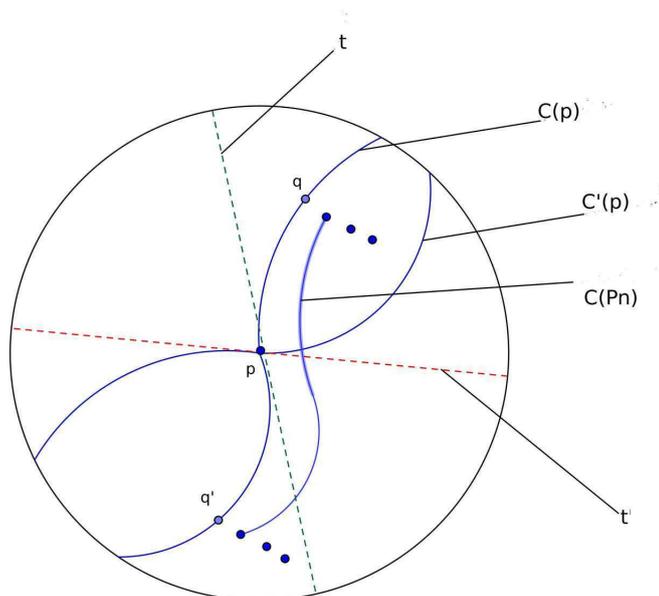


Figura 1.1: Direção Limite

Demonstração do teorema 1.2.1:

Admiteremos que S não seja um pedaço de plano e concluir que S é um outro tipo de cilindro. Sendo a curvatura Gaussiana de uma esfera de raio R igual a $\frac{1}{R^2}$ em todos os seus pontos temos que a superfície não está contida numa esfera nem está contida num plano. Logo, pela proposição 1.2.10, S tem ao menos um ponto não-umbílico. Sendo $K \equiv 0$, podemos garantir que S contém pontos parabólicos.

Sendo $IntP$ um conjunto que só contém pontos planares, todos seus pontos são umbílicos, segue da proposição 1.2.10 que cada componente conexa C_α de $IntP$ está contida num plano.

Mostraremos que por cada ponto $p \in S$ passa uma única reta distinguida $R(p) \subset S$ e duas destas retas passando por dois pontos distintos p, q , $R(p), R(q)$, são paralelas. Assim, S em todo caso será um cilindro, tendo em vista que um plano é também um cilindro cuja geratriz pode ser tomada como sendo uma reta com uma direção distinguida.

Iremos verificar primeiramente que a afirmação é válida quando estes dois pontos estão no conjunto $S \setminus IntP$, a partir daí definiremos uma direção para as retas numa componente conexa de $IntP$ como sendo a direção das retas de $S \setminus P$. Daí, teremos demonstrado o resultado.

Parte 1: Se $q \in U \cup FrU$, então por q passa uma única reta distinguida e duas destas retas caso não coincidam não se intersectam.

1º Caso: $p \in U, q \in U$.

Segue direto da proposição 1.2.8. E como já foi observado antes $R(p), R(q)$ são retas inteiras contidas em S .

2º Caso: $p \in U, q \in FrU$.

Segue direto da proposição 1.2.8, pois $R(p) \subset U, R(q) \subset FrU \subset P$ daí $R(p) \cap R(q) = \phi$.

3º Caso: $p \in FrU, q \in FrU$. Segue direto da proposição 1.2.9.

Parte 2: Provemos agora que tais retas são paralelas e assim poderemos concluir que cada componente conexa de $IntP$ está delimitada entre duas retas paralelas.

Tomemos $q \in U \cup FrU$ e $p \in U$ numa componente conexa de $U \cup FrU$. Sendo S é conexa, existe um caminho $\alpha : [0, l] \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p, \alpha(l) = q$. As proposições 1.2.11, 1.2.12 garantem que a aplicação $exp_p : T_p S \rightarrow S$ é uma aplicação de Recobrimento e uma Isometria Local, respectivamente.

Seja $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow T_p S$ o levantamento de α , com origem em $0 \in T_p S$ e os $\tilde{\alpha}(t)$, tais que $exp_p(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t) \in U \cup FrU$. Provemos que os levantamentos r_t com origem em $\tilde{\alpha}(t)$ das retas $R(\alpha(t))$ passando por $\alpha(t)$ são paralelas.

Sendo exp_p uma isometria local, r_t é uma reta em $T_p S$. Além disto, quando $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2), t_1, t_2 \in [0, l]$, as retas r_{t_1} e r_{t_2} são paralelas em $T_p S$. Se $v \in r_{t_1} \cap r_{t_2}$, então

$$exp_p(v) \in R(\alpha(t_1)) \cap R(\alpha(t_2)),$$

o que é uma contradição, pois provamos que retas(geratrizes) em S passando por pontos distintos têm intersecção vazia.

Definimos agora $R(\alpha(t))$ quando $\alpha(t) \in IntP$. Seja $\tilde{\alpha}(t)$ tal que $exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in IntP$. Traçamos a reta r por $\tilde{\alpha}(t)$ em $T_p S$ que é paralela à direção comum que acabamos de obter. Pelas proposições 1.2.4, 1.2.8 $exp_p(r) \subset intP$, e sendo uma geodésica, logo $exp_p(r)$ é uma reta inteira contida em S (pela completude de S). Assim, a reta $R(\alpha(t))$ fica definida para todo $t \in [0, l]$.

Agora provemos que as retas $R(\alpha(t)), t \in [0, l]$ são paralelas. Sendo o intervalo $[0, l]$

compacto, é possível cobri-lo com um número finito de intervalos abertos I_1, \dots, I_n tais que $\tilde{\alpha}(I_i)$ esteja contido em uma vizinhança V_i de $\alpha(t_i)$, $t_i \in I_i$, onde a restrição de exp_p a V_i seja uma isometria.

Afirmamos que, quando $t_1, t_2 \in I_i$ e $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, então $R(\alpha(t_1))$ é paralela a $R(\alpha(t_2))$.

Pela proposição 1.2.2 podemos reparametrizar uma vizinhança de $\alpha(t_i)$ por $x(u, v)$ de tal modo que as curvas $v = \text{const.}$ em S são as linhas $R(\alpha(t))$, e que as curvas $u = \text{cte}$ em S são suas trajetórias ortogonais. Como as curvas $v = \text{cte}$ são linhas assintóticas, da mesma forma que na prova do Lema 1.2.1 o parâmetro u pode ser escolhido de tal modo que ele mede o comprimento de arco ao longo de $v = \text{cte}$ (ou seja, $E \equiv 1$). Sendo $exp_p|_{V_i}$ uma isometria, duas linhas assintóticas quaisquer $v = v_1, v = v_2$, são equidistantes em $S \cap V_i$, pois pelo o que vimos acima seus levantamentos são retas paralelas em $T_p S$ por conseguinte equidistantes. Mostremos que $G_u = 0$.

Indiquemos a função distância entre $x(u, v_1)$ e $x(u, v_2)$ por $s(u, v)$. Temos que

$$s(u, v) = \int_{v_1}^{v_2} \|x_v\| dv.$$

Sendo as linhas assintóticas equidistantes, temos que $s(u, v)$ independe do valor de u , portanto

$$0 = \frac{ds}{du} = \frac{d}{du} \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G} dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{du} (\sqrt{G}) dv,$$

logo

$$\frac{d}{du} (\sqrt{G}) = 0, \text{ pois } \sqrt{G} \text{ é uma função contínua.}$$

Daí, podemos concluir que $G_u = 0$.

Como $E = \langle x_u, x_u \rangle \equiv 1$, temos que

$$\text{i) } \langle x_{uu}, x_u \rangle = 0$$

$$\text{ii) } \langle x_{uv}, x_u \rangle = 0$$

Sendo também $F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$, temos que

$$\text{iii) } \langle x_{uv}, x_v \rangle = 0$$

E por fim como $G_u = 0$, temos que

$$\text{iv) } \langle x_{uu}, x_v \rangle + \langle x_u, x_{uv} \rangle = 0$$

Por ii) e por iv), temos que:

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = 0$$

Resumindo, temos até o momento que:

$$\langle x_{uu}, x_u \rangle = 0$$

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = 0$$

$$\langle x_{uv}, x_u \rangle = 0$$

$$\langle x_{uv}, x_v \rangle = 0$$

Olhemos apenas para os pontos parabólicos U de S . Pelo argumento da proposição 1.2.4 nos pontos de U $N_u = 0$. Assim,

$$\langle x_{uu}, N \rangle = -\langle x_u, N_u \rangle = 0, \langle x_{uv}, N \rangle = -\langle x_v, N_u \rangle = 0$$

Daí tanto x_{uu} quanto x_{vu} são perpendiculares aos todos vetores de uma base $\{x_u, x_v, N\}$ em U . Logo, $(x_u)_u = (x_u)_v = 0$, portanto a direção x_u da linha assintótica $v = cte$ é constante em cada componente conexa de U . Sendo a FrU formada por retas que são limites de sequência de retas paralelas de U temos que cada componente conexa de $U \cup FrU$ é formada apenas por retas paralelas.

Se s é um outro ponto de $U \cup FrU$, usando o mesmo argumento para os pontos s, q podemos concluir que $R(s) // R(q)$ e sendo $R(q) // R(p)$, temos que $R(s) // R(q)$, $\forall s, q \in U \cup FrU$.

Assim, provamos que cada componente conexa de $U \cup FrU$ é formada por retas paralelas distinguidas, e a fronteira de cada uma destas componentes é formada por retas paralelas às primeiras.

Parte 3: Mostremos agora que cada componente conexa, C_α , de $IntP$ é uma faixa entre duas retas paralelas ou um semi-plano.

Tomemos uma componente conexa, C_α , qualquer de $IntP$. Sendo parte de um plano só temos duas possibilidades para C_α ou este é um semi-plano ou é limitado por duas retas paralelas. De fato, a existência de ao menos uma reta na sua fronteira segue do fato da superfície ter ao menos uma região conexa parabólica (lembre-se que assumimos que a superfície não é totalmente planar). C_α poderia admitir uma outra outra reta a delimitando contida em FrU , esta reta necessariamente tem que ser paralela a primeira, pois senão teríamos retas da fronteira distintas se encontrando num ponto, o que contradiziria a proposição 1.2.9. C_α não pode estar delimitada por mais que duas retas, pois

uma terceira reta estaria contida num mesmo plano sem ser paralelas as duas primeiras, portanto as encontraria, o que também iria contradizer a proposição 1.2.9.

Com a parte 2 e 3 podemos concluir que a superfície S é um cilindro. Para se convencer disto, basta notar que se tomarmos uma reta r contida em uma componente conexa de U podemos levá-la paralelamente ao longo desta componente, chegamos num reta que paralela contida na fronteira desta componente. Logo, continuamos levando esta reta ao longo de uma componente conexa planar. Caso esta seja uma semi-plano não a mais o que fazer, porém se a componente for uma região delimitada por duas retas paralelas, podemos levar essa reta paralelamente a outra fronteira desta componente e por conseguinte levá-la ao longo da outra componente conexa U por meio de retas paralelas. Portanto, se a superfície S não for um plano será um cilindro de um outro tipo. ■

1.3 $K > 0$

O Teorema de Bonnet nos garante que se uma superfície S de curvatura positiva, é Completa então obrigatoriamente é compacta. Portanto, para fazer a classificação neste caso não perderemos em generalidade se supusermos que a superfície que estamos tratando é compacta.

Teorema 1.3.1 (Bonnet)([3]) *Suponha que a curvatura Gaussiana K de uma superfície completa satisfaça*

$$K \geq \delta > 0$$

Então S é compacta e o diâmetro ρ de S satisfaz a desigualdade

$$\rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$$

Introduziremos a seguinte notação

$$1^{\text{a}} \text{ forma fundamental: } [I] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

$$2^{\text{a}} \text{ forma fundamental: } [II] = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

$$\text{Derivada da aplicação normal de Gauss: } [-dN] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Temos a seguinte relação entre essas três matrizes:

$$[II] = [-dN] \cdot [I]. \text{(Ver [3])}. \tag{1.2}$$

Lema 1.3.1 *Seja S uma superfície em \mathbb{R}^3 , e seja $p \in S$ um ponto não umbílico. Sejam $k_1 \geq k_2$ as curvaturas principais sobre S e suponha que k_1 tem um máximo local em p , e k_2 tem um mínimo local em p . Então $K(p) \leq 0$*

Demonstração:

Podemos escolher uma parametrização de forma que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura. Logo as equações de Gauss e as equações e Codazzi-Mainard ficam da forma:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E.G}} \cdot \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{E.G}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{E.G}} \right)_u \right] \quad (1)$$

$$e_v = \frac{E_v}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (2)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (3)$$

Temos que a aplicação diferencial de Gauss é auto-adjunta, logo existe uma base de T_pS de modo que a matriz $-dN$ é diagonal. Mais precisamente, essa matriz toma a forma:

$$[-dN] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Por 1.2, temos que:

$$[II] = [-dN] \cdot [I] \therefore$$

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \therefore$$

$$e = k_1 \cdot E, \quad g = k_2 \cdot G$$

Tomando a derivada as derivadas parciais com respeito a v, u respectivamente destas equações, temos:

$$e_v = \frac{\partial k_1}{\partial v} \cdot E + k_1 \cdot E_v, \quad g_u = \frac{\partial k_2}{\partial u} \cdot G + k_2 \cdot G_u$$

(As funções k_1, k_2 são diferenciáveis numa vizinhança de p , desde que as funções H e K são diferenciáveis, e, $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$, $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$, onde $H^2 - K > 0$ numa vizinhança de um ponto não-umbílico p).

Juntando com as equações (2) e (3) nós temos que:

$$(1') E_v = -\frac{2.E}{k_1 - k_2} \cdot \frac{\partial k_1}{\partial v}$$

$$(2') G_u = -\frac{2.G}{k_1 - k_2} \cdot \frac{\partial k_2}{\partial u}$$

Substituindo (1'), (2') dentro de (1) teremos:

$$K = -\frac{1}{2.E.G} \left[-\frac{2.E}{k_1 - k_2} \cdot \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2} + \frac{2.G}{k_1 - k_2} \cdot \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2} \right] + (\text{alguns termos continuos}) \cdot \frac{\partial k_1}{\partial v} + (\text{alguns termos continuos}) \cdot \frac{\partial k_2}{\partial u}$$

Como k_1 tem um máximo local em p , e k_2 um mínimo local, nós temos que:

$$\frac{\partial k_1}{\partial v}(p) = \frac{\partial k_2}{\partial u}(p) = 0; \quad \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(p) \leq 0; \quad \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2}(p) \geq 0$$

Substituindo isto na equação (1'), nós concluir que $K(p) \leq 0$ ■

Proposição 1.3.1 ([3]) *Seja $A \subset S$ um subconjunto de uma superfície regular S . Então, A é uma superfície regular se e somente se A é aberto em S .*

Teorema 1.3.2 *A única superfície conexa compacta de curvatura Gaussiana constante $K > 0$ que pode ser imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 é a esfera.*

Demonstração: Sejam $k_1 \geq k_2$ as curvaturas principais sobre S , sendo S compacta existe um ponto $p \in S$ onde k_1 atinge um máximo. Então, temos que $k_2 = \frac{K}{k_1}$ tem um mínimo em p , caso $k_1(p) > k_2(p)$, então p é um ponto não umbílico, logo pelo lema 1.3.1 temos que $K(p) \leq 0$, o que é uma contradição. Logo $k_1(p) = k_2(p)$. Daí para qualquer ponto $q \in S$ é verifica-se que:

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p) \geq k_1(q)$$

Ou seja, $k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_1(q)$, $\forall q \in S$. Assim, todos pontos de S são umbílicos, assim pela proposição 1.2.10 temos que S está contida em uma esfera Σ .

Por compacidade, S é fechada em Σ , e como S é uma superfície regular, a proposição 1.3.1 garante que S é aberta em Σ . Como Σ é conexa e S é aberta e fechada em Σ , então $S = \Sigma$. ■

1.4 $K < 0$

O teorema de Hilbert, que iremos demonstrar nesta seção, garante a impossibilidade de existir uma imersão isométrica em \mathbb{R}^3 de uma superfície completa com curvatura gaussiana constante negativa.

Em outros termos esse teorema garante a impossibilidade de um modelo de geometria para uma superfície completa em \mathbb{R}^3 munida da métrica induzida, tal que a curvatura gaussiana dessa superfície seja constante e igual a -1. Assim, podemos garantir a não existência de uma geometria de Lobachevski para superfícies completas imersas isometricamente em \mathbb{R}^3 .

Iremos verificar agora que podemos supor sem perda de generalidade que a superfície tratada tem curvatura gaussiana igual a -1. Para verificar isto, admitamos a validade do teorema de Hilbert. Considere agora uma superfície \bar{S} imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana $K \equiv -\delta$. $\delta > 0$. Assim, existe uma imersão isométrica $\bar{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é uma variedade riemanniana de dimensão 2 e $\bar{\varphi}(M) = \bar{S}$.

Considere a aplicação $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x) = \sqrt{\delta}x$.

AFIRMAÇÃO: $S = A(\bar{S})$ é uma superfície completa de curvatura gaussiana igual a -1 imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 .

Se (x, U) é uma parametrização de S , então $(A \circ x, A(U))$ é uma parametrização para \bar{S} .

Verifiquemos que S é completa. Seja uma curva em α ligando dois pontos quaisquer p_1, p_2 de \bar{S} . Agora olhemos essa curva em S por meio da transformação A , ou seja $\beta = A \circ \alpha$, onde β conecta as imagens de p_1, p_2 ($q_1 = A(p_1), q_2 = A(p_2)$) em S . Portanto,

$$\begin{aligned} L_{p_1, p_2} &= \int_{s_1}^{s_2} |\alpha'| ds = \int_{s_1}^{s_2} |\alpha'| ds = \int_{s_1}^{s_2} |A^{-1} \circ \beta'| ds = \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}} \beta' \right| ds = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{s_1}^{s_2} |\beta'| ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} L_{q_1, q_2}. \end{aligned}$$

Assim, dados dois pontos $p_1, p_2 \in \bar{S}$, $q_1, q_2 \in S$ ($q_1 = A(p_1), q_2 = A(p_2)$), temos pela definição entre dois pontos numa superfície que a distância, \bar{d} , entre dois pontos na superfície \bar{S} e a distância entre estes pontos vistos na superfície S , d , se relacionam por:

$$\bar{d}(p_1, p_2) = \inf\{L_{p_1, p_2}\} = \inf\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}L_{q_1, q_2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \inf\{L_{q_1, q_2}\} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}d(q_1, q_2)$$

Daí, seqüências de Cauchy e convergência são preservadas. Logo, S é uma superfície completa.

Agora verifiquemos que a curvatura Gaussiana de S é igual a -1 .

Sejam E, F, G e e, f, g os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de S na base $\{x_u, x_v\}$ e $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de \bar{S} na base $\{y_u, y_v\}$.

Note que $y_u = \sqrt{\delta}x_u, y_v = \sqrt{\delta}x_v$, portanto as normais N, \bar{N} de S, \bar{S} , respectivamente, estão relacionadas por $N = \bar{N} \circ A$.

Vejam como os coeficientes de S, \bar{S} estão relacionados. Para isto consideremos as diferenciais das aplicações normais de Gauss em cada uma destas superfícies.

Seja $p \in S$ e α uma curva nesta superfície de modo que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = x_u \in T_p S$. Logo, podemos considerar uma curva β em \bar{S} dada por $\beta = A \circ \alpha$. Temos que $\beta(0) = A(p)$ e $\beta'(0) = y_u$.

$$\begin{aligned} d\bar{N}_{A(p)}(y_u) &= \frac{d}{dt} (\bar{N} \circ \beta) |_{t=0} = \frac{d}{dt} (\bar{N} \circ (A \circ \alpha)) |_{t=0} = \frac{d}{dt} ((\bar{N} \circ A) \circ \alpha) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (N \circ \alpha) |_{t=0} = dN_p(x_u). \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{e} = -\langle d\bar{N}_{A(p)}(y_u), y_u \rangle = -\langle dN_p(x_u), \sqrt{\delta}.x_u \rangle = -\sqrt{\delta} \cdot \langle dN_p(x_u), x_u \rangle = \sqrt{\delta}.e$$

Analogamente, temos que:

$$\bar{f} = \sqrt{\delta}.f$$

$$\bar{g} = \sqrt{\delta}.g$$

Temos também que:

$$\bar{F} = \langle y_u, y_v \rangle = \langle \sqrt{\delta}.x_u, \sqrt{\delta}.x_v \rangle = (\sqrt{\delta}.)^2 \langle x_u, x_v \rangle = \delta.F$$

Da mesma forma:

$$\bar{G} = \sqrt{\delta}.G$$

$$\bar{E} = \sqrt{\delta}.E$$

Portanto, a curvatura Gaussiana K_S é

$$K_S = \frac{e.g - f^2}{E.G - F^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \bar{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \bar{g} - (\frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \bar{f}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \bar{f})}{\left[(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^2 \cdot \bar{E} \right] \cdot \left[(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^2 \cdot \bar{G} \right] - \left[(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^2 \cdot \bar{F} \right]^2} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^2 \cdot \bar{e} \cdot \bar{g} - \bar{f}^2}{(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^4 \cdot \bar{E} \cdot \bar{G} - \bar{F}^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}^2} \cdot \frac{\bar{e} \cdot \bar{g} - \bar{f}^2}{\bar{E} \cdot \bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{1}{\delta} \cdot K_{\bar{S}} = \frac{1}{\delta} \cdot (-\delta) = -1$$

Por fim, temos que φ é uma imersão, pois $d\varphi_p = dA_{\bar{\varphi}(p)}(d\bar{\varphi}_p) = A(d\bar{\varphi}_p) = \sqrt{\delta} \cdot d\bar{\varphi}_p$ e $\bar{\varphi}$ é uma imersão, portanto φ também é uma imersão. Note que φ define um novo produto interno em M o que a torna automaticamente isométrica.

Sendo M e S isométricas, podemos supor sem perda de generalidade que a imersão φ tem como domínio S , ou seja $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definição 1.4.1 *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. o número positivo*

$$\iint_Q |x_u \wedge x_v| dudv = \iint_Q \sqrt{E.G - F^2} dudv = A(R) \quad Q = x^{-1}(R),$$

é chamado área de R .

Definamos o plano hiperbólico:

Definição 1.4.2 *Seja $S = \mathbb{R}^2$ um plano com coordenadas (u, v) e defina um produto interno em cada ponto $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ colocando*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_q = E = 1, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_q = F = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_q = G = e^{2u}$$

Pois bem, \mathbb{R}^2 munido deste produto interno é uma superfície geométrica chamada de
Plano Hiperbólico.

Portanto a área de H será:

$$A(H) = \iint_Q \sqrt{E.G - F^2} dudv =, \text{ onde, } Q = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$$

Logo:

$$A(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^u dudv = +\infty$$

Calculemos o valor da Curvatura Gaussiana de \mathbb{H} :

Usando a fórmula de Gauss, tem-se:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{E.G}} \cdot \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{E.G}} \right)_v \right] + \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{E.G}} \right)_u \right] \cdot \vdots$$

$$K = -\frac{1}{2.e^u} \cdot \left(\frac{2.e^{2u}}{e^u} \right)_u = -1$$

A proposição 1.2.11 garante que a aplicação $exp_p : T_p S \rightarrow S$ é uma aplicação de recobrimento, logo um difeomorfismo local, portanto ela induz um produto interno em $T_p S$, a saber:

$$\langle v, w \rangle_q := \langle d(exp_p)_q(v), d(exp_p)_q(w) \rangle_{exp_p(q)}$$

Temos que esse produto interno está bem definido, pois sendo exp_p um difeomorfismo local a aplicação:

$$d(exp_p)_q : T_q(T_p S) \approx T_p S \rightarrow T_{(exp_p(q))} S$$

é um isomorfismo para todo $q \in T_p S$. Portanto, todas as condições que definem um produto interno são verificadas.

Seja S' a superfície $T_p S$ com este produto interno. Temos que se $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica. O mesmo vale para $\psi = \varphi \circ exp_p : S' \rightarrow \mathbb{R}^3$.

De fato. Seja, $q \in T_p S$, $v \in T_q(T_p S) \approx T_p S$, temos pela regra da cadeia que:

$$d\varphi_q(v) = d(\psi \circ exp_p)_q(v) = d\psi_{exp_p(q)}((dexp_p)_q(v))$$

Portanto, $\forall q \in T_p S$, $\forall v, w \in T_q(T_p S) \approx T_p S$, temos que:

$$\langle d\psi_q(v), d\psi_q(w) \rangle_{\psi(q)} = \langle d\varphi_{exp_p(q)}((dexp_p)_q(v)), d\varphi_{exp_p(q)}((dexp_p)_q(w)) \rangle_{\varphi \circ exp_p(q)} =$$

$$= \langle (dexp_p)_q(v), (dexp_p)_q(w) \rangle_{exp_p(q)} = \langle v, w \rangle_q.$$

A penúltima igualdade segue da hipótese de φ ser um imersão isométrica e a última igualdade segue do produto interno induzido em $T_p S$ por exp_p .

Com o produto interno definido acima e aplicando o teorema egregium de Gauss podemos concluir que a curvatura gaussiana de S' é $K_{S'} \equiv -1$.

Portanto, basta mostrarmos que não existe imersão isométrica $\psi : S' \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um plano S' com um produto interno especial tal que $K_{S'} \equiv -1$.

Definição 1.4.3 *Diremos que uma aplicação entre duas superfícies $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ aumenta comprimentos se*

$$\|d\varphi_{p_1}v\| \geq \|v\|, \forall p_1 \in S_1, v \in T_{p_1}S_1.$$

Enunciemos alguns resultados fundamentais para demonstração que área da superfície S' é infinita.

Proposição 1.4.1 ([3]) *Seja S uma superfície completa com curvatura $K \leq 0$. Então, $\exp_p : T_pS \rightarrow S$, $p \in S$, aumenta comprimentos.*

Proposição 1.4.2 ([3]) *Sejam S_1, S_2 duas superfícies com S_1 completa. Então, todo difeomorfismo local entre S_1, S_2 $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$, que aumenta comprimentos, necessariamente é uma aplicação de recobrimento.*

Teorema 1.4.1 (Hopf-Rinow) ([3]) *Seja S uma superfície completa. Dados dois pontos $p, q \in S$, existe uma geodésica minimizante ligando p a q .*

Proposição 1.4.3 *Seja S uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K \leq 0$. Então, a aplicação $\exp_p : T_pS \rightarrow S$, $p \in S$, é uma aplicação de recobrimento.*

Teorema 1.4.2 (HADAMARD). *Seja S uma superfície completa simplesmente conexa, com curvatura Gaussiana $K \leq 0$. Então, $\exp_p : T_pS \rightarrow S$, $p \in S$ é um difeomorfismo.*

Proposição 1.4.4 ([3]) *Seja $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento com \tilde{B} conexo por caminhos e B simplesmente conexo. Então π é um homeomorfismo.*

Lema 1.4.1 *A área de S' é infinita.*

Demonstração: Iremos mostrar que S' é globalmente isométrica ao plano hiperbólico \mathbb{H} . Sendo a área deste último infinita isto irá demonstrar o lema, pois área é um conceito invariante por isometrias, pois por definição depende apenas dos coeficientes da 1ª forma fundamental.

Sendo $\dim T_q H = \dim H = 2$, $\dim T_{p'} S' = \dim S' = 2$ e cada um destes são espaços vetoriais, podemos definir uma isometria linear entre eles. De fato, basta definirmos $T : T_q H \rightarrow T_{p'} S'$ por exemplo $T(e_i) = f_i$, onde $\{e_l\}, \{f_m\}$ com $l, m \in \{1, 2\}$ são bases ortonormais de $T_q H, T_{p'} S'$ respectivamente.

Definamos uma aplicação por $\varphi = \exp_{p'} \circ \psi \circ \exp_q^{-1}$. Temos que H é simplesmente conexo pois H é um semi-plano, e H é completo, pois suas geodésicas são semi-círculos e retas (Ver [3]). Assim, pelo Teorema de Hopf-Rinow 1.4.1 cada ponto de H é ligado a q por uma única geodésica minimizante, logo φ está bem definida, pois pelo teorema de Hadamard 1.4.2 \exp_q é um difeomorfismo. Note também que S' é completo, S' é $T_p S$ munido da métrica induzida pela aplicação exponencial $\exp_p : T_p S \rightarrow S$, sendo S completa a proposição 2.2.11 garante que S' é completo.

Utilizamos coordenadas polares $(\rho, \theta), (\rho', \theta')$ em torno de q e p' , respectivamente. Com o mesmo argumento da demonstração do Teorema de Miding (Ver [3]), podemos admitir que φ aplique o eixo $\theta = 0$ sobre o eixo $\theta' = 0$, temos pela mesma demonstração que φ preserva a primeira forma fundamental, logo é uma isometria local. Pelas proposições 1.4.1, 1.4.2 tem-se também que φ é uma aplicação de recobrimento. S' é um plano, logo é simplesmente conexo. H é conexo por caminhos, pois é homeomorfo ao plano de Poincaré. Portanto podemos usar a proposição 1.4.4 para garantir que φ é um homeomorfismo, portanto um difeomorfismo global, logo uma isometria global. ■

Usaremos a seguinte terminologia:

Definição 1.4.4 *Quando os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado pelas curvas coordenadas de uma parametrização $x(u, v)$ são iguais, dizemos que elas constituem uma **Rede de Tschebysheff**.*

Daqui em diante iremos admitir que existe uma imersão isométrica $\varphi : S' \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde S' é uma superfície homeomorfa a um plano cuja curvatura gaussiana $K \equiv -1$.

Iremos trabalhar com S' para evitar as possíveis auto-intersecções de $\varphi(S')$, e usaremos a imersão φ para induzir em S' a geometria extrínseca local de $\varphi(S') \subset \mathbb{R}^3$. De forma mais precisa, sendo φ uma imersão, para cada $p \in S'$ existe uma vizinhança $V' \subset S'$ de p tal que a restrição $\varphi|_{V'} = \tilde{\varphi}$ é um difeomorfismo. Temos que $\tilde{\varphi}$ é uma isometria, portanto $\varphi(S')$ tem curvatura gaussiana -1, portanto em cada ponto de $\tilde{\varphi}(q) \in \tilde{\varphi}(V')$ existem, por exemplo, duas direções assintóticas distintas. Por meio de $\tilde{\varphi}$, estas direções induzem duas direções em $q \in S'$, que serão chamadas as direções assintóticas de S' em q . Assim, faz sentido falar de curvas assintóticas em S' , e o mesmo procedimento pode ser aplicado para qualquer outra entidade local de $\varphi(S')$

Proposição 1.4.5 *Uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas de uma parametrização $x(u, v)$ seja uma Rede de Tchebysheff é que*

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Demonstração: Considere as curvas coordenadas de $x(u, v)$, $\alpha(u) = x(u, v_0)$, $\beta(v) = x(u_0, v)$, com (u, v) , $(u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Assumimos que estas formem uma rede de Tchebysheff. Podemos afirmar em relação ao comprimento de curvas, L , que:

$$L_{\{x(u,v), x(u_0,v)\}} = L_{\{x(u_0,v_0), x(u,v_0)\}}.$$

Ou seja:

$$\int_{u_0}^u \left\| \frac{d}{ds} x(s, v) \right\| ds = \int_{u_0}^u \left\| \frac{d}{ds} x(s, v_0) \right\| ds$$

Tomando a derivada em ambos os lados em u , temos que:

$$\left\| \frac{dx}{ds}(u, v) \right\| = \left\| \frac{dx}{ds}(u, v_0) \right\|, \text{ ou seja, a função}$$

$$\Psi(u, v) = \left\| \frac{dx}{ds}(u, v) \right\| \text{ em } U \text{ não depende de } v. \text{ Portanto, } \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 \right) = 0.$$

De forma análoga, podemos verificar que $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ em U .

Vejam a recíproca. Se $\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = 0, \forall (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, temos que $\frac{\partial}{\partial v} \left(\left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\|^2 \right) (u, v) = 0$. Logo $\left(\left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\|^2 \right)$ não depende de v em U . Assim, $\forall (u, v), (u, v_0) \in U$, temos que:

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right\| = \left\| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0) \right\|.$$

Portanto,

$$\int_{u_0}^u \left\| \frac{\partial x}{\partial s}(s, v) \right\| ds = \int_{u_0}^u \left\| \frac{\partial x}{\partial s}(s, v_0) \right\| ds.$$

Ou seja,

$$L_{\{x(u,v), x(u_0,v)\}} = L_{\{x(u,v_0), x(u_0,v_0)\}} \text{ em } U.$$

Da mesma forma podemos verificar que: $L_{\{x(u_0,v_0), x(u_0,v)\}} = L_{\{x(u,v_0), x(u,v)\}} \text{ em } U$.

Desta forma, verificamos que as curvas coordenadas da parametrização $x(u, v)$ constituem uma rede de Tchebysheff. ■

Lema 1.4.2 *Para cada $p \in S'$ existe uma parametrização $x : U \rightarrow S'$, $p \in x(U)$, tal que as curvas coordenadas de x são as linhas assintóticas de $x(U) = V'$ e constituem uma rede de Tchebysheff (iremos expressar isto dizendo que as curvas assintóticas de V' formam uma rede Tchebysheff).*

Demonstração: Sendo $K < 0$ temos que todos pontos de S' são hiperbólicos. Segue da proposição 1.2.2 que existe uma vizinhança $x(U) = V' \subset S'$ de p de tal modo que as curvas coordenadas de V' sejam linhas assintóticas. Mostremos que e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S' nesta parametrização, então $e = g = 0$. Basta olharmos para a equação das curvas assintóticas

$$e.(u')^2 + 2.f.u'.v' + g.(v')^2 = 0, \text{ onde } \alpha(t) = x(u(t), v(t)) \text{ e } u' = \frac{du}{dt}(t), v' = \frac{dv}{dt}(t),$$

como na vizinhança as curvas coordenadas $u = cte, v = cte$ são as linhas assintóticas, temos que ao longo delas verifica-se que:

$$e.(u')^2 + g.(v')^2 = 0, \text{ pois } u' = 0 \text{ ou } v' = 0$$

Portanto, $e = g = 0$.

Como discutimos acima, convencionamos nos referir à segunda forma fundamental de S' em vez a de $\varphi(S') \subset \mathbb{R}^3$.

Verifiquemos que em $\varphi(V') \subset \mathbb{R}^3$, $N_u \wedge N_v = K.x_u \wedge x_v$.
De fato, considere:

$$[-dN_p]_{\{x_u, x_v\}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Daí

$$\begin{aligned} -N_u &= -dN_p(x_u) = a_{11}.x_u + a_{12}.x_v \\ -N_v &= -dN_p(x_v) = a_{21}.x_u + a_{22}.x_v \end{aligned}$$

Portanto:

$$N_u \wedge N_v = (a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}).x_u \wedge x_v = K.x_u \wedge x_v$$

Sendo $N = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{E.G - F^2}}$, podemos reescrever a igualdade acima da forma:

$$\text{i) } N_u \wedge N_v = K.D.N, \text{ onde } D = \sqrt{E.G - F^2}$$

$$\text{ii) } (N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = N_u \wedge N_v + N \wedge N_{vu} - N_v \wedge N_u - N \wedge N_{uv} = 2.N_u \wedge N_v$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } N \wedge N_u &= \frac{(x_u \wedge x_v)}{D} \wedge N_u = \frac{1}{D}.(x_u \wedge x_v) \wedge N_u = \frac{1}{D}. \{(x_u.N_u).x_v - (x_v.N_u).x_u\} = \\ &= \frac{1}{D}. \{-e.x_v + f..x_u\} = \frac{f}{D}.x_u, \text{ pois } e = 0. \end{aligned}$$

$$\text{iv) } N \wedge N_v = \frac{(x_u \wedge x_v)}{D} \wedge N_v = \frac{1}{D}.(x_u \wedge x_v) \wedge N_v = \frac{1}{D}. \{(x_u.N_v).x_v - (x_v.N_v).x_u\} =$$

$$= \frac{1}{D} \cdot \{-f \cdot x_v + g \cdot x_u\} = -\frac{1}{D} \cdot x_v, \text{ pois } g = 0.$$

$$\text{v) } -1 \equiv K = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = -\frac{f^2}{F^2} \therefore f^2 = D^2 \therefore f = \pm D$$

Substituindo v) em iii), iv) podemos reescrevê-los da forma:

$$\text{iii')} N \wedge N_u = \pm x_u.$$

$$\text{iv')} N \wedge N_v = \pm x_v$$

Substituindo i) em iii'), iv') em ii) teremos:

$$\mp 2x_{uv} = \mp x_{vu} = 2 \cdot N_u \wedge N_v = 2 \cdot K \cdot N \cdot D \therefore \mp x_{uv} = K \cdot N \cdot D$$

Assim, o vetor N é paralelo ao vetor x_{uv} .

Então, $E_v = 2 \cdot \langle x_{uv}, x_v \rangle = 0$, $G_u = 2 \cdot \langle x_{uv}, x_u \rangle = 0$. Daí, aplicando a proposição 1.4.5 concluímos que para cada ponto de S' existe uma parametrização cujas curvas coordenadas são linhas assintóticas e estas constituem uma Rede de Tchebysheff. ■

Proposição 1.4.6 *Sempre que as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebysheff é possível reparametrizar a vizinhança coordenada de tal maneira que os novos coeficientes da primeira forma fundamental são*

$$E = 1, F = \cos\theta, G = 1$$

onde θ é o ângulo pelas curvas coordenadas. E neste caso:

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\text{sen}\theta}$$

Demonstração:

1ª Parte: Pela proposição 1.4.5, podemos reparametrizar uma vizinhança de tal modo que: $E_v = G_u = 0$. Logo, $E = E(u)$ (função apenas de u), $G = G(v)$ (função apenas de v). Assim, podemos tomar uma nova parametrização:

$$\bar{u} = \int \sqrt{E} du, \bar{v} = \int \sqrt{G} dv.$$

Ou seja, temos uma parametrização que ao longo de $u = cte$, $v = cte$ mede o comprimento de arco. Portanto, os novos coeficientes da primeira forma fundamental serão:

$$\bar{E} = \bar{G} = 1, \bar{F} = \cos\theta, \text{ onde } \theta \text{ é o ângulo entre as curvas coordenadas.}$$

2ª Parte: Calculemos a curvatura Gaussiana a partir da equação que a relaciona com os símbolos de Christoffel. ([3], p.280) Para o cálculo destes usaremos as equações que os relacionam com os coeficientes da primeira forma fundamental. ([3], p.278)

$$I) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{array} \right., II) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{array} \right.,$$

$$III) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{array} \right.$$

$$IV) (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK$$

Substituindo $E = G = 1$, $F = \cos\theta$, nas equações I), II), III), teremos:

$$I) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 \cdot 1 + \Gamma_{11}^2 \cos\theta = 0 \\ \Gamma_{11}^1 \cdot \cos\theta + \Gamma_{11}^2 \cdot 1 = -\theta_u \cdot \text{sen}\theta \end{array} \right. .$$

$$\text{Sendo } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \text{sen}^2\theta, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos\theta \\ -\theta_u \text{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \theta_u,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & -\theta_u \text{sen}\theta \end{vmatrix} = -\text{sen}\theta \cdot \theta_u, \text{ temos que:}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \text{ctg}\theta \cdot \theta_u; \Gamma_{11}^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\text{csc}\theta \cdot \theta_u$$

$$II) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 \cdot 1 + \Gamma_{12}^2 \cos\theta = 0 \\ \Gamma_{12}^1 \cdot \cos\theta + \Gamma_{12}^2 \cdot 1 = 0 \end{array} \right.$$

Sendo $\Delta \neq 0$, logo $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$.

$$III) \begin{cases} \Gamma_{22}^1 \cdot 1 + \Gamma_{22}^2 \cos\theta = -\theta_v \cdot \text{sen}\theta \\ \Gamma_{22}^1 \cdot \cos\theta + \Gamma_{22}^2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Sendo $\tilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} -\theta_v \text{sen}\theta & \cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\text{sen}\theta \cdot \theta_v$, $\tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\theta_v \text{sen}\theta \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \theta_v$,
temos que:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\tilde{\Delta}_1}{\Delta} = -\text{csc}\theta \cdot \theta_v; \Gamma_{22}^2 = \frac{\tilde{\Delta}_2}{\Delta} = \text{ctg}\theta \cdot \theta_v.$$

Usando IV) e os símbolos calculados, temos que:

$$(0)_u - (-\text{csc}\theta \cdot \theta_u)_v + 0 \cdot (-\text{csc}\theta \cdot \theta_{uv}) + 0 \cdot 0 + (-\text{csc}\theta \cdot \theta_u) \cdot \text{ctg}\theta \cdot \theta_v - (-\text{ctg}\theta \cdot \theta_u) \cdot 0 = -K \therefore$$

$$-\text{csc}\theta \cdot \text{ctg}\theta \cdot \theta_v \cdot \theta_u + \text{csc}\theta \cdot \theta_{uv} + \text{csc}\theta \cdot \text{ctg}\theta \cdot \theta_v \cdot \theta_u = -K \therefore$$

$$K = \frac{-\theta_{uv}}{\text{sen}\theta}$$

■.

Lema 1.4.3 *Seja $V' \subset S'$ uma vizinhança coordenada de S' tal que as curvas coordenadas sejam linhas assintóticas em V' . Então a área de qualquer quadrilátero formado pelas curvas coordenadas é menor que 2π .*

Demonstração: Sejam $(\underline{u}, \underline{v})$ as coordenadas de V' . Pelo argumento do Lema anterior as curvas coordenadas formam uma rede de Tchebyshef. Assim, pela proposição 1.4.6 é possível reparametrizar uma vizinhança V' por (u, v) de forma que $E = G = 1$ e $F = \cos\theta$. Considere agora R um quadrilátero formado pelas curvas coordenadas com vértices em $(u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_1, v_2)$ e ângulos internos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, respectivamente. Ainda pela proposição 1.4.6 temos que $E = G = 1$, e $\theta_{uv} = \text{sen}\theta$, daí:

$$\begin{aligned} A &= \int_R \sqrt{E \cdot G - F^2} dudv = \int_R \sqrt{1 - \cos^2\theta} dudv = \int_R \sqrt{\text{sen}^2\theta} dudv = \\ &= \int_R |\text{sen}\theta| dudv = \int_R \text{sen}\theta dudv = \int_R \theta_{uv} dudv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \theta_{uv} du dv = \int_{v_1}^{v_2} \theta_u(u, v_2) - \theta_u(u, v_1) dv = \\
&= \theta(u_2, v_2) - \theta(u_1, v_2) - \theta(u_2, v_1) + \theta(u_1, v_1) = \alpha_1 + \alpha_3 - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4) = \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi = \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi < 4\pi - 2\pi < 2\pi
\end{aligned}$$

Pois, cada $\alpha_i < \pi$. ■

Note que acima usamos o fato que $\text{sen}\theta \geq 0$, pois θ é o ângulo entre as curvas coordenadas o qual é menor ou igual π , portanto, podemos tirar o módulo da expressão $|\text{sen}\theta|$.

Vamos definir agora uma aplicação $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$ e posteriormente mostrar que x é uma parametrização para S' tal que $x(\mathbb{R}^2) = S'$

Fixemos um ponto qualquer $O \in S'$. Escolhamos orientações para as linhas assintóticas por O de modo que uma destas seja a_1 e a outra a_2 . Para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ percorramos um comprimento s ao longo de a_1 , e indiquemos por p' o ponto obtido deste modo. Temos que por p' passam duas linhas assintóticas sendo uma delas a_1 . Consideremos a outra linha assintótica passando por p' , \tilde{a}_2 , cuja direção é a extensão contínua da orientação de a_2 , ao longo de a_1 . Percorramos um comprimento t ao longo da linha \tilde{a}_2 . Definimos o ponto $x(s, t)$ como sendo o ponto obtido desta forma.

AFIRMAÇÃO: $x(s, t)$ está bem definida $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$.

De fato. Supondo que $x(s, 0)$ não está bem definida, daí existiria um $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que x está definida para $s < s_1$, mas não está definida para $s = s_1$. Seja $q = \lim_{s \rightarrow s_1} a_1(s)$, pela completude de S' temos que $q \in S'$. Pelo lema 1.2.2 existe uma parametrização y em torno de q tal que as curvas coordenadas desta parametrização são as linhas assintóticas, logo a_1 estaria definida em q o que é uma contradição. Portanto, $x(s, 0)$ está bem definida para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando um argumento idêntico podemos mostrar que $x(s, t)$ está bem definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $x(s, t)$ está bem definida $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Lema 1.4.4 *Para um t fixado, a curva $x(s, t)$, $-\infty < s < \infty$, é uma curva assintótica tendo s como comprimento de arco.*

Demonstração: Seja $p = x(s_0, t_0) \in S'$ um ponto qualquer. O lema 1.4.2 garante a existência de uma vizinhança coordenada $V' = x(U)$ de p de modo que as linhas assintóticas

constituem uma rede de Tschebysheff. E pela proposição 1.4.6 podemos considerar uma parametrização local y de p em S' tal que $E = G = 1$, $F = \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre as curvas coordenadas da vizinhança coordenada $y = x(\tilde{U})$ desta parametrização local, de modo que $y_v(0,0) = x_t(s_0, t_0)$, e $y_u(0,0)$ aponte na outra direção assintótica, com $\{y_u, y_v\}(0,0)$ na orientação escolhida para S' . Tomemos em torno de (s_0, t_0) retângulos abertos $R = (s_a, s_b) \times (t_a, t_b) \subset \tilde{U}$.

Comparemos $y(u, v)$ e $x(u + s_0, v + t_0)$.

Podemos afirmar que se para algum $t_0 \in (t_a, t_b)$ a curva $s \mapsto x(s, t_0)$, $s \in (s_a, s_b)$ é uma linha assintótica p.c.a. e que $\{x_s(s_0, t_0), x_t(s_0, t_0)\}$ é base na orientação escolhida para S' , então o mesmo é válido para toda curva $s \mapsto x(s, \bar{t})$, $\bar{t} \in (t_a, t_b)$.

Note primeiramente que, pela unicidade das linhas assintóticas p.c.a. por um ponto podemos afirmar que $y(u, 0) = x(u + s_0, t_0)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Pela definição da aplicação x , $x(u + s_0, v + t_0)$ é obtido ao percorrermos v unidades ao longo de uma curva assintótica a partir do ponto $x(u + s_0, t_0)$. Portanto, $y(u, v) = x(u + s_0, v + t_0)$ em R .

Agora estamos aptos a demonstrar o lema. Seja $x(s_1, t_1) \in S'$ um ponto arbitrário. Pela compacidade do segmento $x(s_1, t)$, $t \in [0, t_1]$ é possível cobri-lo com uma quantidade finita de vizinhanças retangulares de modo que as curvas assintóticas sejam p.c.a.. Sendo $x(s, 0)$ uma curva assintótica e interagando a afirmação do parágrafo anterior concluímos que $s \mapsto x(s, t_1)$ é uma curva assintótica p.c.a. numa vizinhança de s_1 . Como tomamos (s_1, t_1) arbitrário temos a demonstração do lema. ■

Lema 1.4.5 x é um difeomorfismo local.

Demonstração: Dado $p = (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, temos pelo lema anterior que as curvas $x(s_0, t)$, $x(s, t_0)$ são curvas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco. Então, $\left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\| = \left\| \frac{\partial x}{\partial t} \right\| = 1$ (logo são não-nulos) e são L.I.s por construção já que são tangentes a duas direções assintóticas distintas. Temos ainda que dx_q é um isomorfismo $\forall q \in U$.

De fato, pois:

$$dx_q : T_q U \rightarrow T_{x(q)}(S') \approx S'$$

Como $dx_q = [x_s \ x_t] \neq 0$, temos que dx_q é injetiva, como $\dim T_q U = \dim T_q \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim T_{x(q)} S' = \dim S' = 2$, podemos concluir que dx_q é um isomorfismo,

$\forall q \in U$. Portanto, pelo teorema da função inversa um difeomorfismo local. Assim, existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que x é um difeomorfismo. ■

Lema 1.4.6 x é sobrejetiva.

Demonstração: Seja $Q = x(\mathbb{R}^2)$. Como x é um difeomorfismo local, Q é aberto em S' . De fato. $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} U_p$, onde cada U_p são as vizinhanças dos pontos de $p \in \mathbb{R}^2$ restritas as quais x é um difeomorfismo. Portanto:

$Q = x(\mathbb{R}^2) = x(\bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} U_p) = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} x(U_p)$. Ou seja, Q é a união de abertos em S' .

Aplicando o lema 1.4.2 temos que se $p' = x(s_0, t_0)$, então as duas curvas assintóticas que passam por p' estão inteiramente contidas em Q .

Agora supomos que $Q \neq S'$. Sendo S' conexa, $Q \neq \emptyset$ aberto, temos que $FrQ \neq \emptyset$. Pois, do contrário Q seria fechado e por conseguinte $Q = S'$, um absurdo.

Tomemos $p \in FrQ$. Sendo Q aberto em S' , $p \notin Q$. Considere uma vizinhança retangular R de p na qual as linhas assintóticas formam uma rede de Tchebyshef. Seja $q \in Q \cap R$. Então uma das curvas assintóticas passando por q intersecta uma das linhas assintóticas passando por p , o que contradiz o fato das linhas assintóticas passando por um ponto p de Q estarem inteiramente contidas em Q . ■

Na demonstração do próximo lema usaremos o seguinte resultado topológico

Proposição 1.4.7 Sejam $\tilde{B}, B \subset \mathbb{R}^3$, $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento com \tilde{B} conexo por caminhos e B simplesmente conexo. Então π é um homeomorfismo.

Lema 1.4.7 x é injetiva.

Demonstração: Pela proposição 1.4.6 e pelo lema 1.4.2, existe parametrização local por curvas assintóticas

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U(\text{vizinhança de } p),$$

com $E = G = 1, F = \cos\theta$ e $F(0, 0) = p$. Prescrevamos as velocidades iniciais $F_s(0, 0), F_t(0, 0)$ de modo que a primeira "aponte" para à direita e a segunda "aponte" para a cima.

Verifiquemos que dado $(s_1, t_1) \in x^{-1}(p)$, então

$$x(s, t) = F(s - s_1, t - t_1), \text{ sempre que } |s - s_1| < \varepsilon, |t - t_1| < \varepsilon$$

De fato. $x(s_1, t_1) = p = F(s - s_1, t - t_1)$

Pela própria definição da F , x e F coincidem em U , pois ambas medem o comprimento de arco ao longo de $v = cte$ e $u = cte$

Verifiquemos agora que se $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in x^{-1}(p)$, então

$$V(s_1, t_1) \cap V(s_2, t_2) = \phi$$

onde

$$V(s_1, t_1) = (s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon) \times (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon),$$

$$V(s_2, t_2) = (s_2 - \varepsilon, s_2 + \varepsilon) \times (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$$

Supomos que exista $(\bar{s}, \bar{t}) \in V(s_1, t_1) \cap V(s_2, t_2)$.

Considere as translações:

$$T_1 : V(s_1, t_1) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon),$$

$$T_2 : V(s_2, t_2) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Dadas por:

$$T_1(s, t) = (s - s_1, t - t_1)$$

$$T_2(s, t) = (s - s_2, t - t_2)$$

Temos que T_1, T_2 medem o comprimento de arco ao longo de $u = cte$, $v = cte$ de modo que $(T_1)_u$ "aponta" para direita, $(T_1)_v$ "aponta" para cima. O mesmo ocorre com $(T_2)_u$, $(T_2)_v$.

Portanto, $T_1(\bar{s}, \bar{t}) \neq T_2(\bar{s}, \bar{t})$.

Logo, $F(T_1(\bar{s}, \bar{t})) \neq F(T_2(\bar{s}, \bar{t}))$

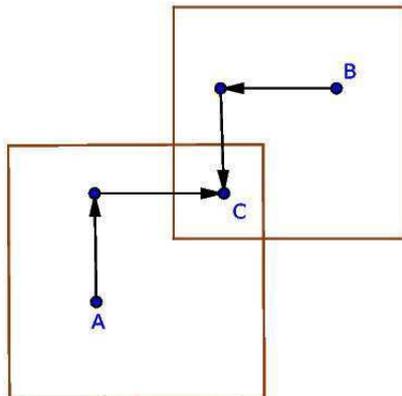


Figura 1.2: Comportamento de T_1 e T_2

Mas, $F \circ T_1 = F \circ T_2 = x$ em $V(s_1, t_1) \cap V(s_2, t_2)$, o que é uma contradição.

Verifiquemos agora que x é uma aplicação de recobrimento. Para ser mais preciso, verifiquemos que U é uma vizinhança admissível.

De fato. Sejam $p, q \in U$, temos que

$$x^{-1}(p) \cap x^{-1}(q) = \emptyset$$

Logo,

$$x^{-1}(U) = x^{-1}(\cup_{p \in U} \{p\}) = \cup_{p \in U} x^{-1}(\{p\}) = \cup_{p \in U} \cup_{\alpha} V_{(s_{\alpha}, t_{\alpha})}$$

Sendo cada uma das vizinhanças $\cup_{\alpha} V_{(s_{\alpha}, t_{\alpha})}$ disjuntas duas a duas, temos o afirmado.

Sendo x sobrejetiva, podemos concluir que x é uma aplicação de recobrimento.

Logo, pela proposição 1.4.7, podemos concluir que x é um homeomorfismo em particular uma aplicação injetiva. ■

Agora estamos aptos a provar o teorema:

Teorema 1.4.3 (HILBERT) *Uma superfície geométrica completa S com curvatura negativa constante não pode ser imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração: Suponhamos a existência de uma imersão isométrica $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde S é uma superfície completa com $K \equiv -1$. Seja $p \in S$ e denotemos por S' o plano tangente a S em p munido do produto interno induzido pelo difeomorfismo local \exp_p , logo $\varphi = \pi \circ \exp_p$ é uma imersão isométrica. Os lemas 1.4.5, 1.4.6, 1.4.7 garantem que $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$ é uma parametrização que cobre totalmente S' , de modo que as curvas coordenadas desta parametrização são linhas assintóticas 1.4.4.

AFIRMAÇÃO: Podemos cobrir S' por meio de "quadriláteros coordenados" Q_n com $Q_n \subset Q_{n+1}$. De fato. Podemos escrever $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n)$. Definamos $Q_n = x((-n, n) \times (-n, n))$. Claramente $Q_n \subset Q_{n+1}$. Ainda mais, temos que:

$$S' = x(\mathbb{R}^2) = x\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x((-n, n) \times (-n, n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$$

Ou seja, essa coleção de Q_n 's obedece o que a afirmação exige.

O lema 1.4.3 garante que cada Q_n tem área menos que 2π , logo a área de S' é menor que 2π , o que é uma contradição com o lema 1.4.1. ■

1.5 Teorema Principal

Pelo o que foi visto no decorrer deste capítulo podemos enunciar:

Teorema 1.5.1 *Segundo o sinal da curvatura Gaussiana K as possibilidades para uma superfície completa imersa em \mathbb{R}^3 são:*

Não existe caso $K < 0$.

Cilindro caso $K \equiv 0$.

Esfera caso $K > 0$.

A figura seguinte resume o teorema acima:

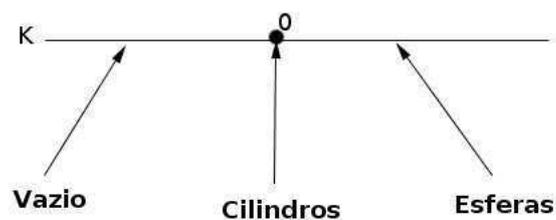


Figura 1.3: Classificação em \mathbb{R}^3

Capítulo 2

Preliminares para \mathbb{S}^3 e \mathbb{H}^3

2.1 Introdução

Nesta seção serão dadas algumas definições e estabelecidos alguns resultados importantes, que em alguns casos são apenas uma generalização de resultados clássicos a espaços mais abstratos que o \mathbb{R}^3 .

2.2 Algumas definições e resultados para ambientes mais gerais

Seja $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica com $\dim M = n$, $\dim \bar{M} = n + 1$. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \bar{M}$ decompõe $T_p \bar{M}$ na soma direta

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

Indicaremos a conexão de \bar{M} por $\bar{\nabla}$. Sejam, X, Y campos de vetores locais tangentes a M e \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais a \bar{M} . Definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T \tag{2.1}$$

onde T indica a componente tangencial de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ a M .

$\chi(M)$ indicará o conjunto dos campos vetoriais em M .

Definamos $B : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$ por:

$$B(X, Y) = \overline{\nabla_X} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

Proposição 2.2.1 ([4]) *Se $X, Y \in \chi(M)$, a aplicação B acima definida é bilinear e simétrica.*

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, definimos a aplicação:

$$II_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$B(X, Y) = II_\eta(X, Y) \cdot \eta \quad X, Y \in T_p M \quad (2.2)$$

Seja N a extensão local do vetor unitário η normal a M . Da definição de B podemos escrevermos

$$II_\eta(X, Y) = \langle \overline{\nabla_X} Y, N \rangle = -\langle Y, \overline{\nabla_X} N \rangle \quad (2.3)$$

Observação 2.2.1 *Pelo resultado anterior temos que II_η é bilinear e simétrica.*

À aplicação bilinear II_η está associada uma aplicação linear auto-adjunta:

$$S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$$

Dada por

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = II_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle \quad (2.4)$$

Proposição 2.2.2 ([4]) *Seja $p \in M$, $X \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local do vetor unitário η normal a M . Então*

$$S_\eta(X) = -(\overline{\nabla_X} N)^T$$

Observação 2.2.2 Pela definição de $\bar{\nabla}$ dada na equação 2.1, podemos escrever o resultado desta proposição assim:

$$S_\eta(X) = -\bar{\nabla}_{\bar{X}}N \quad (2.5)$$

Definição 2.2.1 O tensor Curvatura R de Riemann numa variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação

$$R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dada por

$$R(X, Y).Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, Z \in \chi(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Exemplo 2.2.1 Consideremos o caso $M = \mathbb{R}^n$. Então $R(X, Y)Z = 0, \forall X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$. De fato. Indiquemos $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas do \mathbb{R}^n . Temos que:

$$\nabla_X Z = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i z_j \Gamma_{ij}^k + X(z_k) \right) X_k,$$

como $\Gamma_{ij}^k = 0$, então:

$$\nabla_X Z = \sum_k (X(z_k)) X_k,$$

sendo $X_k = e_k$, então:

$$\nabla_X Z = (X z_1, \dots, X z_n)$$

Logo:

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y X z_1, \dots, Y X z_n)$$

Portanto:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = ((XY - YX)z_1, \dots, (XY - YX)z_n) = ([X, Y]z_1, \dots, [X, Y]z_n) = \nabla_{[X, Y]} Z \therefore$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0, \forall X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$$

Vamos utilizar a seguinte notação:

$$(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle$$

Definição 2.2.2 *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $X, Y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Definimos a curvatura seccional de $\sigma, K(X, Y) = K(\sigma)$ em p como sendo o número:*

$$K(\sigma) = \frac{(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|^2}$$

onde $|X \wedge Y|^2 = \langle X, X \rangle \cdot \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$

Observação 2.2.3 *A verificação de que K independe da escolha dos vetores $X, Y \in T_p M$ não oferece muitas dificuldades.*

Proposição 2.2.3 ([4]) *(Equação de Gauss) Seja M uma superfície imersa em \bar{M} com curvatura constante, e sejam R e \bar{R} os tensores curvatura de M e \bar{M} , respectivamente. Então,*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle - \langle B(Y, Z), B(X, W) \rangle \quad (2.6)$$

$\forall X, Y, Z, W \in T_p M$.

Por consequência direta da equação de Gauss, temos

Teorema 2.2.1 ([4]). *Sejam $p \in M$ e X, Y vetores ortonormais de $T_p M$. Então*

$$K(X, Y) - \bar{K}(X, Y) = \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - |B(X, Y)|^2 \quad (2.7)$$

Daremos um destaque ao número $K(X, Y)$.

Definição 2.2.3 *Quando $n = 2$, existe um subespaço bidimensional de T_pM , a saber o próprio T_pM . Neste caso $K(X, Y) = K(\sigma) = K(p)$ é uma função em M . Chamaremos $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ de curvatura intrínseca de M em p (pois, K independe da escolha de X, Y em T_pM) e denotaremos por K_{int} . Assim, podemos escrever:*

$$K_{int} = \langle R(X, Y) Y, X \rangle, \quad (2.8)$$

com X, Y ortonormais.

Consideremos o caso $n = 2$ e a curvatura seccional de \overline{M} constante $\overline{K} = K_0$. Considere uma base ortonormal de auto-vetores para S_η , $\{e_1, e_2\}$, ou seja $S_\eta(e_1) = k_1 \cdot e_1$, $S_\eta(e_2) = k_2 \cdot e_2$. Definimos a curvatura extrínseca de M em \overline{M} como sendo a função

$$K_{ext} = k_1 \cdot k_2 \quad (2.9)$$

Note que $B(e_i, e_j) = \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle \cdot \eta = \langle k_i \cdot e_i, e_j \rangle \cdot \eta = k_i \cdot \delta_{ij} \cdot \eta$. Assim, pelas equação de Gauss 2.7, temos

$$K_{int} = K_{ext} + K_0 \quad (2.10)$$

Proposição 2.2.4 ([16]) *Seja M uma hipersuperfície em \overline{M} , e seja η um campo normal unitário sobre uma vizinhança de p em M . Então para todo $X, Y, Z \in T_pM$, temos*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\nabla_X II)(Y, Z) - (\nabla_Y II)(X, Z) =$$

$$[X(II(Y, Z)) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z)] - [Y(II(X, Z)) - II(\nabla_Y X, Z) - II(X, \nabla_Y Z)] \quad (2.11)$$

A equação 2.11 é a versão para contextos mais gerais das Equações de Codazzi-Mainardi.

O resultado a seguir apresenta os novos formatos tomados pela equação de Gauss e a equação de Codazzi para hipersuperfícies de espaços de curvatura constante (ou seja, a curvatura seccional \overline{K} não depende do ponto nem do plano).

Proposição 2.2.5 ([16]) *Seja \overline{M} de curvatura constante K_0 . Então a equação de Gauss 2.6 toma a forma:*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = K_0 [\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle]. \quad (2.12)$$

E se M é uma hipersuperfície de \overline{M} as equações de Codazzi tomam a forma

$$(\nabla_X II)(Y, Z) = (\nabla_Y II)(X, Z) \quad (2.13)$$

ou

$$X(II(Y, Z)) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z) = \\ Y(II(X, Z)) - II(\nabla_Y X, Z) - II(X, \nabla_Y Z) \quad (2.13')$$

Vejam como ficam as equações de Codazzi no contexto de variedade de dimensão 3 com curvatura constante. Seja $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ base associada no espaço tangente a $x(U)$, onde $x(u, v)$ é uma parametrização local de M . Denotemos $II(X_1, X_1) = e$, $II(X_1, X_2) = II(X_2, X_1) = f$, $II(X_2, X_2) = g$. Na equação 2.13' tomemos

i) $X = Z = X_1, Y = X_2$, logo

$$X(f) - II(\nabla_X Y, Z) - II(X_2, \nabla_{X_1} X_1) = Y(e) - II(\nabla_Y X, Z) - II(X_1, \nabla_{X_2} X_1)$$

Pela simetria de ∇ e pela bilinearidade de II , temos que $II(\nabla_X Y, Z) = II(\nabla_Y X, Z)$. Portanto, a equação fica

$$f_u - II(X_2, \nabla_{X_1} X_1) = e_v - II(X_1, \nabla_{X_2} X_1) \therefore$$

$$f_u - II(X_2, \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2) = e_v - II(X_1, \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2) \therefore$$

$$e_v - f_u = e \cdot \Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \cdot \Gamma_{11}^2 \quad (2.14)$$

ii) Tomando $X = Z = X_1, Y = X_2$ obtemos

$$f_v - g_u = e \cdot \Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \cdot \Gamma_{12}^2 \quad (2.15)$$

As equações 2.14, 2.15 são as famosas equações de Codazzi que surgem no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 .

Vamos agora calcular os símbolos de Christoffel para superfícies M imersas em uma variedade de curvatura constante \overline{M} de dimensão 3 qualquer.

Seja ∇' a conexão de \overline{M} .

Fazendo $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = x_{uu}$, $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = x_{uv}$, $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} = x_{vv}$, $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial u}} N = N_u$, $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial v}} N = N_v$ e expressando as derivadas do triedo natural dados pelos vetores x_u, x_v e N na base $\{x_u, x_v, N\}$, obtemos

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{12}^1 x_v + L_1 N \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_2 N \\ x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + \overline{L}_2 N \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_3 N \\ -N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v \\ -N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v \end{aligned}$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados símbolos de Christoffel de M na parametrização x . Sendo a conexão Riemanniana simétrica, temos que $x_{uv} = x_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, ou seja, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Tomando o produto interno nas quatro primeiras relações acima com N obtemos $L_1 = e$, $L_2 = \overline{L}_2 = f$, $L_3 = g$, onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de M .

Para determinar os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das quatro relações com x_u, x_v , obtemos os sistemas

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle x_{vv}, x_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle x_{vv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas acima obtemos os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, E , F , G , e de suas derivadas

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Proposição 2.2.6 ([16]) *A curvatura Intrínseca de uma superfície é dada em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental por:*

$$K_{int} = -\frac{1}{4.D^4} \det \begin{pmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{pmatrix} + \frac{1}{2.D} \left[\left(\frac{F_v - G_u}{D} \right)_u + \left(\frac{F_u - E_v}{D} \right)_v \right], \tag{2.17}$$

onde $D = \sqrt{E.G - F^2}$.

Definição 2.2.4 *Uma curva c em uma variedade riemanniana M^2 imersa em \overline{M}^3 é chamada linha de curvatura(ou curva principal) se c' é sempre uma direção principal. Ou seja $\nabla_{c'} N = -kc'$, onde k é a curvatura principal em $c(t)$.*

Definição 2.2.5 *Um vetor X sobre uma variedade riemanniana M^2 imersa em \overline{M}^3 é dito uma direção assintótica, se*

$$II(X_p, X_p) = 0$$

Proposição 2.2.7 *.Seja $M^2 \subset \overline{M}^3$ com \overline{M}^3 de curvatura constante.*

(A) *Quando as curvas coordenadas de M são ortogonais, F e a curvatura intrínseca K_{int}*

são dada por:

$$F = 0$$

$$K_{int} = -\frac{1}{2\sqrt{E.G}} \cdot \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{E.G}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{E.G}} \right)_u \right] \quad (2.18)$$

(B) Se M não possui pontos umbílicos e suas curvas coordenadas são linhas de curvatura, tem-se que:

$$e = k_1.E, g = k_2.G, f = 0, F = 0$$

$$e_v = \frac{E_v}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (2.19)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right)$$

(C) Se as curvas coordenadas de M são linhas assintóticas, tem-se que:

$$e = 0, g = 0$$

$$f_u = \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (E.G - F^2)_u + F.E_v - E.G_u \right]}{E.G - F^2} \cdot f \quad (2.20)$$

$$f_v = \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (E.G - F^2)_v + F.G_u - G.E_v \right]}{E.G - F^2} \cdot f$$

Demonstração:

(A) Basta usar a expressão da proposição 2.2.6.

(B) Sendo as curvas coordenadas linhas de curvatura, temos que as direções coordenadas são direções principais. Portanto,

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

Daí, $e = k_1E$, $g = k_2G$, $f = k_1F$ e $f = k_2F$. Como nenhum ponto da superfície é umbílico, podemos garantir que $F = 0$, e por conseguinte que $f = 0$.

Sendo $F = 0$ os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}$$

Logo para este caso a equação 2.14 toma a forma

$$e_v = \frac{E_v}{2} \cdot \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right)$$

Para verificar a validade da última equação basta considerar 2.15 e proceder de forma análoga.

(C) Por consequência da definição, as duas primeiras igualdades são imediatas. Para a verificar a penúltima igualdade tomemos:

$$X = Z = X_1, Y = X_2$$

$$[X_1(B(X_2, X_1)) - B(\nabla_{X_1} X_2, X_1) - B(X_2, \nabla_{X_1} X_1)] - [X_2(B(X_1, X_1)) - B(\nabla_{X_2} X_1, X_1) - B(X_1, \nabla_{X_2} X_1)] = 0 \therefore$$

$$X_1(f) - B(X_2, \nabla_{X_1} X_1) = -B(X_1, \nabla_{X_2} X_1) \therefore$$

$$X_1(f) - B(X_2, \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2) = -B(X_1, \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2) \therefore$$

$$f_u = \Gamma_{11}^1 \cdot B(X_2, X_1) - \Gamma_{22}^2 \cdot B(X_1, X_2) = f(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2) \therefore$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} - \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v - EG_u + FE_v}{2(EG - F^2)} = \\ &= \frac{(GE_u + EG_u - 2FF_u) + 2FE_v - 2EG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{\frac{1}{2}(EG - F^2)_u + FE_v - EG_u}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos garantir a validade da última igualdade. Basta tomarmos $X = Z = X_2, Y = X_1$. ■

Lema 2.2.1 *Seja M uma superfície imersa em uma variedade N^3 completa, simplesmente conexa de curvatura constante, e seja $p \in M$ um ponto não-umbílico. Sejam $k_1 \geq k_2$ as curvaturas principais sobre M , e suponha que k_1 tem um máximo local em p , e k_2 tem um mínimo local em p . Então $K_{int}(p) \leq 0$.*

Demonstração: Basta olhar a demonstração do Lema 1.3.1, tendo-se em conta que as expressões para curvatura Intrínseca é idêntica a da curvatura Gaussiana naquele caso e as equações de Codazzi-Mainardi são mesmas. ■

Teorema 2.2.2 *Seja N^3 de curvatura constante. Se M é uma superfície compacta conexa em N de curvatura extrínseca $K_{ext} \geq 0$ e curvatura intrínseca constante $K_{int} > 0$, então todos pontos de M são umbílicos.*

Demonstração:

i) Supondo que $K_{ext} > 0$, sejam $k_1 \geq k_2$ as curvaturas principais. Supondo que k_1 atinge o máximo em p . Logo $k_2 = \frac{K_{ext}}{k_1}$ atinge o mínimo em p . Caso p seja um ponto não-umbílico, pelo lema anterior tem-se que $K_{int}(p) \leq 0$, o que contradiz a hipótese. Portanto, p deve ser umbílico. Assim, $\forall q \in M$, tem-se que:

$$k_1(q) \leq k_1(p) = k_2(p) \leq k_2(q)$$

, mas $k_1 \geq k_2$, daí todos pontos de M são umbílicos.

ii) Supondo agora que $K_{ext} \equiv 0$. Admite-se que M possua um ponto não umbílico p . Assim, $k_1(p).k_2(p) = 0$ possibilita dois casos excludentes:

ii.I) $k_1(p) > 0, k_2(p) = 0$. Logo existe uma vizinhança de p tais que $k_1 > 0$. Seja \bar{p} um ponto onde k_1 atinge o máximo, portanto $k_1(\bar{p}) > 0$, daí existe uma vizinhança deste ponto tais que $k_2 \equiv 0$, ou seja \bar{p} é um ponto de mínimo local de k_2 , logo pelo lema anterior pode-se concluir que: $K_{int}(\bar{p}) \leq 0$, o que é uma contradição.

ii.II) $k_1(p) = 0, k_2(p) < 0$ A abordagem é idêntica a anterior.

Portanto, todos os pontos de M são umbílicos. ■

Teorema 2.2.3 *Seja N^3 uma variedade de curvatura constante. Seja M uma subvariedade imersa de dimensão 2 de N com curvatura extrínseca contante $K_{ext} < 0$. Então para todo ponto $p \in M$ existe um sistema de coordenadas*

$$x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

$$x(0, 0) = p$$

cujas curvas coordenadas são linhas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco.

Demonstração: Pela parte (b) da proposição 1.2.2 para todo ponto $p \in M$, existe um sistema de coordenadas $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $x(0, 0) = p$, tal que as curvas coordenadas são linhas assintóticas. Por meio de uma reparametrização conveniente podemos admitir que as curvas coordenadas passando pelo ponto $p = x(0, 0)$ estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Logo,

$$E(u, 0) = 1, \quad G(0, v) = 1, \quad \forall (u, v) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (1)$$

Pelas equações da parte (c) da proposição 2.2.7 temos:

$$e = g = 0$$

$$(f^2)_u = 2 \cdot f \cdot f_u = 2 \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (E \cdot G - F^2)_u + F \cdot E_v - E \cdot G_u\right]}{E \cdot G - F^2} \cdot f^2$$

(2)

$$(f^2)_v = 2 \cdot f \cdot f_v = 2 \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (E \cdot G - F^2)_v + F \cdot G_u - G \cdot E_v\right]}{E \cdot G - F^2} \cdot f^2$$

Como a curvatura extrínseca é dada por:

$$K_{ext} = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = \frac{-f^2}{E \cdot G - F^2},$$

temos que:

$$f^2 = (-K_{ext}) \cdot (E \cdot G - F^2), \text{ onde } K_{ext} \text{ é uma constante.}$$

Substituindo esta expressão na primeira equação de (2), obtemos:

$$-K_{ext} \cdot (E \cdot G - F^2)_u = \frac{(E \cdot G - F^2)_u}{E \cdot G - F^2} \cdot (-K_{ext}) \cdot (E \cdot G - F^2) + 2 \cdot \frac{F \cdot E_v - E \cdot G_u}{E \cdot G - F^2} \cdot f^2 \therefore$$

$$2 \cdot \frac{F \cdot E_v - E \cdot G_u}{E \cdot G - F^2} \cdot (E \cdot G - F^2) = 0 \therefore$$

$$F \cdot E_v - E \cdot G_u = 0 \quad (3)$$

Substituindo na 2ª equação de (2) e fazendo as mesmas contas, concluímos que:

$$F \cdot G_u - G \cdot E_v = 0 \quad (4)$$

Multiplicando (3) por G e (4) por F, teremos:

$$(-E \cdot G) \cdot G_u + (G \cdot F) \cdot E_v = 0$$

$$F^2 \cdot G_u + (-G \cdot F) \cdot E_v = 0$$

Somando estas duas equações, temos que:

$$(F^2 - E \cdot G) \cdot G_u = 0$$

Por regularidade, temos que $E \cdot G - F^2 \neq 0$, portanto, $G_u = 0$, de forma análoga, obtemos que $E_v = 0$, portanto G depende apenas de v , logo por (1) concluímos que $G \equiv 1$, usando o mesmo argumento concluímos que $E \equiv 1$. Portanto, as curvas coordenadas estão parametrizadas pelo comprimento de arco. ■

Lema 2.2.2 *Seja M^2 variedade riemanniana de dimensão 2 e seja $x : (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$ uma rede Tchebyshef. Defina $\omega : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma: $\omega(u_0, v_0)$ é o único número com $0 < \omega(u_0, v_0) < \pi$ tal que $\omega(u_0, v_0)$ é o ângulo entre*

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0)|_{u=u_0} \quad e \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v)|_{v=v_0}$$

Então ω satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = (-K_{int}) \cdot \text{sen} \omega$$

Demonstração: Sendo x uma rede de Tchebysheff todas as curvas coordenadas são parametrizadas pelo comprimento de arco, portanto, $E = G = 1$ e

$$F = \langle g_u, g_v \rangle = |g_u| \cdot |g_v| \cos \omega = \cos \omega$$

Portanto:

$$D = \sqrt{E \cdot G - F^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \omega} = \sqrt{\text{sen}^2 \omega} = \text{sen} \omega, \text{ pois } 0 < \omega < \pi$$

De acordo com a proposição 2.2.6 a K_{int} , neste caso, é dada por:

$$\begin{aligned} K_{int} &= \frac{1}{2D} \cdot \left[\left(\frac{F_v}{D} \right)_u + \left(\frac{F_u}{D} \right)_v \right] \\ &= \frac{1}{2D} \cdot \left[\left(\frac{-\text{sen} \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}}{D} \right)_u + \left(\frac{-\text{sen} \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v}}{D} \right)_v \right] \\ &= \frac{1}{2\text{sen} \omega} \cdot \left[\left(-1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)_u + \left(-1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v} \right)_v \right] \\ &= -\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}}{\text{sen} \omega}. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.2.4 *Seja N^3 de curvatura constante. Então, não existe uma superfície completa M imersa isometricamente em N de curvatura extrínseca constante $K_{ext} < 0$ e curvatura intrínseca constante $K_{int} < 0$.*

Demonstração: A demonstração deste teorema é praticamente idêntica a do teorema 1.4.3. Este na verdade pode ser chamado do teorema de Hilbert generalizado. Temos um gargalo para ambiente mais gerais no lema 1.4.2, pois este refere-se especificamente ao \mathbb{R}^3 . Assim, basta trocá-lo pelo teorema 2.2.3, daí seguirá a primeira parte da proposição 1.4.6, e a segunda parte desta proposição seguirá do lema 2.2.2. Por conseguinte os outros lemas e o resultado. ■

Proposição 3.0.2 (10) *Toda variedade diferenciável conexa admite um recobrimento universal.*

Proposição 3.0.3 (10) *Toda variedade diferenciável conexa admite um recobrimento duplo orientável.*

Proposição 3.0.4 (10) *Seja $p : \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento duplo orientado. \tilde{M} é conexa se, e somente se M é não orientável.*

Teorema 3.0.4 (Cartan)(4) *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura intrínseca constante K_{int} . Então o recobrimento universal \tilde{M} de M com a métrica do recobrimento é isométrico a:*

- (a) *O espaço hiperbólico de dimensão n ; \mathbb{H}^n , se $K_{int} \equiv -1$;*
- (b) *O espaço euclídeo de dimensão n ; \mathbb{R}^n , se $K_{int} \equiv 0$;*
- (c) *A esfera n -dimensional; \mathbb{S}^n , se $K_{int} \equiv 1$;*

Proposição 3.0.5 *Seja \tilde{M} um recobrimento de uma variedade Riemanniana M . Então, \tilde{M} é completa se, e somente se, M é completa.*

Demonstração: Basta notar primeiramente que com o produto interno $\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p}} = \langle d\pi_{\tilde{p}}\tilde{v}, d\pi_{\tilde{p}}\tilde{w} \rangle_{\pi(\tilde{p})}$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\tilde{v}, \tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ a aplicação $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ torna-se uma isometria local.

Logo, supondo que M é completa e seja $\tilde{\gamma} : [0, a) \rightarrow \tilde{M}$ uma geodésica de \tilde{M} . Sendo π uma isometria local, temos que $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ é uma geodésica de M e, sendo M completa é possível estender γ além de a . Agora, considere o levantamento de γ , $\bar{\gamma}$, a partir de $\tilde{\gamma}(0)$. Assim, $\bar{\gamma}$ é uma geodésica de \tilde{M} definida num intervalo que contém $[0, a)$ e que restrita a $[0, a)$ coincide com $\tilde{\gamma}$. Disto, $\tilde{\gamma}$ se estende além de a . Portanto, \tilde{M} é completa. Reciprocamente, tome uma geodésica de M e levante γ a $\tilde{\gamma}$ em \tilde{M} . Se \tilde{M} for completa, a geodésica $\tilde{\gamma}$ pode ser estendida. A projeção de $\tilde{\gamma}$ em M por π fornece uma geodésica que é uma extensão de γ . ■

Temos também o seguinte resultado que é apenas uma adaptação para curvatura intrínseca do teorema egregium Gauss.

Teorema 2.2.6 ([2]) *A curvatura intrínseca de uma superfície imersa em um espaço qualquer de curvatura constante é invariante por isometrias locais.*

Proposição 2.2.12 ([10]) *Sejam $(N^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade riemanniana conexa completa orientável de curvatura constante K_0 , $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade riemanniana simplesmente conexa, com derivada covariante ∇ e tensor curvatura R , e seja S um tensor simétrico sobre M , covariante de ordem 2. Supondo que S satisfaz as equações de Gauss e as equações de Codazzi-Mainardi. Então existe uma única imersão isométrica tal que $S = f^*II$ onde II é a segunda forma fundamental sobre $f(M)$ para algum campo normal unitário v .*

Teorema 2.2.7 (Bonnet) ([10]). *Seja $M \subset N^3$ uma superfície completa e conexa, e $K_{int}(p) \geq \frac{1}{r^2}$ para todo $p \in M$, então M é compacta com diâmetro $\leq \pi.r$.*

Proposição 2.2.13 ([16]) *Seja M uma superfície compacta e orientável, então*

$$\int_M K_{int} dA = 2.\pi.\chi(M)$$

onde χ é a característica de Euler da Variedade M .

Proposição 2.2.14 (Classificação de Superfícies Compactas). *Seja $M^2 \subset N^3$ uma superfície compacta e conexa, então um dos valores $2, 0, -2, \dots, -2n$, é assumido pela característica de Euler-Poincaré, $\chi(M)$. Além disto, se $M' \subset N$ é outra superfície compacta, conexa e $\chi(M) = \chi(M')$, então M é homeomorfa à M' .*

Corolário 2.2.1 ([16]) $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, $\chi(\text{toro}) = 0$.

Teorema 2.2.8 (Miding) *Quaisquer duas superfícies de igual curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas.*

Proposição 2.2.15 *Toda superfície que é um conjunto fechado é completa.*

Capítulo 3

Superfícies de Curvatura Constante em \mathbb{S}^3

3.1 Introdução

A curvatura da esfera \mathbb{S}^3 é constante e igual a 1([4]). Para este caso serão utilizados os resultados da seção anterior e consideradas todas as possibilidades para superfícies completas em \mathbb{S}^3 segundo o valor da curvatura íntinseca K_{int} . No caso de \mathbb{S}^3 a equação 2.7 toma a forma:

$$K_{int} = K_{ext} + 1 \tag{3.1}$$

3.2 $K_{ext} < -1$

Será verificada a não existência de superfícies para este caso.

Pela equação 3.1, $K_{int} < 0$. O teorema 2.2.4 garante o afirmado.

3.3 $K_{ext} \geq 0$

Será verificado que existe um único tipo de superfície para este caso é uma 2-esfera. Esta será definida a seguir.

Definição 3.3.1 *Uma n -esfera de raio R (ou simplesmente n -esfera) em \mathbb{R}^m é um subconjunto de um plano $\pi \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $n+1$ -dimensional, da forma*

$$\mathbb{S}_R^n = \{x \in \pi; d(x, x_0) = R\}, \text{ para algum } x_0 \in \pi.$$

Enunciemos um resultado de caráter algébrico linear cuja demonstração é imediata.

Proposição 3.3.1 *Sejam $U \subset V \subset W$ espaços vetoriais de dimensão finita. Denotando A_B^\perp o complemento ortogonal de A em relação a B , tem-se que*

$$U_W^\perp = U_V^\perp \oplus V_W^\perp \quad (3.2)$$

Teorema 3.3.1 *([10]) Para $n \geq 2$, seja $M^n \subset \mathbb{R}^m$ uma subvariedade imersa cujos pontos são todos umbílicos. Então, ou M está em algum plano n -dimensional ou M está em alguma n -esfera.*

Proposição 3.3.2 *Seja $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma m -esfera. Para $n \geq 2$, seja $M^n \subset \mathbb{S}^m$ uma subvariedade conexa cujos pontos são todos umbílicos. Então, M é parte de uma n -esfera.*

Demonstração: Sejam $\nabla, \nabla', \bar{\nabla}$ as conexões de $M \subset \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, respectivamente. Dados, $X_p, Y_p \in T_p M$ extendemos estes a campos de vetores X, Y em \mathbb{R}^{m+1} tangentes a M ao longo de M e tangentes a S ao longo de S .

i) Olhemos \mathbb{S}^m como subvariedade de \mathbb{R}^{m+1}

Seja $\eta \in (M_p)_{\mathbb{S}^m}^\perp \subset \mathbb{S}_p^m$, então:

$$\langle \bar{\nabla}_{X_p} Y, \eta \rangle = \langle \nabla'_{X_p} Y + (\bar{\nabla}_{X_p} Y)^\perp, \eta \rangle = \langle \nabla'_{X_p} Y, \eta \rangle,$$

$$\text{pois, } (\bar{\nabla}_{X_p} Y)^\perp \in (\mathbb{S}_p^m)_{\mathbb{R}^{m+1}}^\perp.$$

Agora, tome um vetor unitário $\nu \in (\mathbb{S}_p^m)_{\mathbb{R}^{m+1}}^\perp \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Tem-se que

$$\langle \bar{\nabla}_{X_p} Y, \nu \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_{X_p} \nu \rangle = -\langle Y, -\frac{1}{r} X \rangle = \frac{1}{r} \langle Y, X \rangle, \text{ onde } r \text{ é o raio de } \mathbb{S}^m$$

pois, todos pontos de \mathbb{S}^m são umbílicos em \mathbb{R}^{m+1} . ([10]).

Ou seja

$$(1) \quad \langle \bar{\nabla}_{X_p} Y, \nu \rangle = \frac{1}{r} \langle Y, X \rangle, \forall \nu \in (\mathbb{S}_p^m)_{\mathbb{R}^{m+1}}^\perp$$

ii) Olhemos M como subvariedade de \mathbb{S}^m

Sendo $B(X_p, Y_p) = \nabla'_X Y - \nabla_{X_p} Y_p$, temos que

$$\lambda \langle X_p, Y_p \rangle = \langle B(X_p, Y_p), \eta \rangle = \langle \nabla'_X Y - \nabla_{X_p} Y_p, \eta \rangle = \langle \nabla'_X Y, \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_{X_p} Y, \eta \rangle, \lambda \in \mathbb{R},$$

pois, p é umbílico e $\nabla_{X_p} Y_p \in M_p$ e pela parte i) $\langle \bar{\nabla}_{X_p} Y, \eta \rangle = \langle \nabla'_X Y, \eta \rangle$.

Ou seja

$$(2) \quad \langle \bar{\nabla}_{X_p} Y, \eta \rangle = \lambda \langle X_p, Y_p \rangle, \forall \eta \in (M_p)_{\mathbb{S}_p^m}^\perp.$$

Pela equação 3.2 da proposição 3.3.1 e as conclusões (1), (2) temos que todos pontos de M são umbílicos quando olhamos M como uma subvariedade de \mathbb{R}^{m+1} . Portanto, pelo teorema 3.3.1 podemos garantir que M é parte de uma n -esfera. ■

Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.3 *Uma superfície completa imersa isometricamente em \mathbb{S}^3 de curvatura extrínseca $K_{ext} \geq 0$ constante é uma 2-esfera.*

Demonstração: Sendo $K_{ext} \geq 0$, temos que $K_{int} > 0$. Pelo teorema de Bonnet podemos garantir que M é compacta. Pelo teorema 2.2.2 todos os pontos de M são umbílicos. Logo, pela proposição 3.3.2 M é parte de uma esfera 2-esfera, \mathbb{S}_R^2 . Por compacidade M é fechada em \mathbb{S}_R^2 . Por regularidade M é também aberta em \mathbb{S}_R^2 . Portanto, $M = \mathbb{S}_R^2$. ■

3.4 $-1 < K_{ext} < 0$

Será verificada a não existência de superfícies para este caso.

Proposição 3.4.1 ([14]) *Não existe uma maneira contínua de escolha de um subespaço de dimensão 1 de $T_p\mathbb{S}^2$, para cada $p \in \mathbb{S}^2$.*

Proposição 3.4.2 *Não existe superfície completa imersa em \mathbb{S}^3 com curvatura constante satisfazendo $-1 < K_{ext} < 0$.*

Demonstração: Será analisado primeiramente o caso em que M é orientável. Como $K_{int} > 0$, o teorema de Bonnet garante que M é compacta, e os teoremas 2.2.13, 2.2.14 garante que M é homomorfa a \mathbb{S}^2 . Porém, $K_{ext} < 0$, logo $\forall p \in \mathbb{S}^2$ as curvaturas principais $k_1(p), k_2(p)$ possuem sinais opostos. Daí, escolhendo vetores apontando nas direções principais correspondentes as curvaturas principais, tem-se uma escolha contínua de subespaços de dimensão 1 em $T_p\mathbb{S}^2$, o que contradiz a proposição 3.4.1.

Agora supõe-se que M é não orientável. Passamos ao recobrimento duplo orientável de M , \tilde{M} Pelas proposições 2.2.9, 2.2.10 este existe e é conexo. A proposição 2.2.11 garante que \tilde{M} é completa. Sendo a aplicação de recobrimento uma isometria local, o teorema 2.2.8 garante que a curvatura intrínseca de \tilde{M} coincide com a curvatura de M , por conseguinte a curvatura extrínseca também. Assim, recaímos no caso anterior. ■

3.5 $K_{ext} = -1$

Nesta seção faremos uma discussão sobre as superfícies de translação. Os toros de Clifford formam uma classe de superfícies importantes para este caso. Para isto provaremos que \mathbb{S}^3 é um Grupo de Lie. E assim, toda nossa discussão será fundamentada em termos da teoria de Grupos de Lie.

3.5.1 \mathbb{S}^3 é um Grupo de Lie

Definição 3.5.1 *Um Grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de forma que as aplicações*

$$p : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G};$$

$$p(g, h) = gh$$

$$Inv : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G};$$

$$Inv(g) = g^{-1}$$

sejam diferenciáveis.

Definição 3.5.2 Consideremos as aplicações diferenciáveis $L_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$, $R_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ definidas respectivamente por $L_g(h) = gh$, $R_g(h) = hg$. Chamamos estas aplicações de translação à esquerda e translação à direita, respectivamente.

Definição 3.5.3 Um campo de vetores X sobre \mathbb{G} é invariante à esquerda se:

$$dL_a X = X \circ L_a, \quad \forall a \in \mathbb{G}$$

Assim, os campos invariante à esquerda ficam inteiramente determinados pelos seus vetores em algum ponto de \mathbb{G} .

$$(dL_a)X(b) = X(ab), \quad \forall a, b \in \mathbb{G}$$

Portanto

$$(dL_a)X(e) = X(a), \quad \forall a \in \mathbb{G}$$

Portanto, cada elemento do espaço tangente $T_e \mathbb{G}$ determina um único campo invariante à esquerda.

De forma análoga definimos um campo de vetores invariante à direita.

Definição 3.5.4 Uma métrica riemanniana \mathbb{G} é dita invariante à esquerda sse

$$\langle (dL_a)_b u, (dL_a)_b v \rangle_{a,b} = \langle u, v \rangle_b, \quad \forall a, b \in \mathbb{G}, \quad u, v \in \mathbb{G}_b$$

De forma análoga definimos uma métrica invariante à direita.

Diremos que uma métrica riemanniana é **bi-invariante** se é ao mesmo tempo invariante à esquerda e à direita.

Listemos alguns resultados básicos e conhecidos da teoria dos Grupos de Lie, Topologia das Variedades. Para demonstração de cada um deles o leitor pode consultar a fonte sugerida.

Proposição 3.5.1 ([4]) *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo de dimensão n . Então, G admite uma métrica bi-invariante.*

Proposição 3.5.2 ([4]) *Seja \mathbb{G} um grupo de Lie com métrica bi-invariante, e X, Y, Z campos unitários e invariantes á esquerda em \mathbb{G} , então:*

$$(1) \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

Teorema 3.5.1 ([8]) *Seja G um grupo de Lie e seja $H \subset G$ um subgrupo de G um subgrupo de G que também é uma subvariedade de G . Então, H é um grupo de Lie.*

Proposição 3.5.3 ([8]) *Todo conjunto de nível regular de uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciáveis é uma subvariedade mergulhada.*

Iremos considerar a geometria usual de \mathbb{S}^3 . Dados dois pontos $x, y \in \mathbb{S}^3$, a distância $d(x, y)$ (a distância não euclideana entre x e y) é a medida em radianos do ângulo entre x e y . Portanto, temos que:

$$\cos d(x, y) = \langle x, y \rangle$$

Queremos saber se existe alguma isometria $A \in O(4)$ de \mathbb{S}^3 com a propriedade que $d(x, Ax)$ assume o mesmo valor para todo $x \in \mathbb{S}^3$. Se $A = (a_{ij})$, então

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} x_i x_j$$

Iremos fazer a escolha para $A \in O(4)$ de forma que $d(x, Ax)$ seja constante.

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = a, \forall x \in \mathbb{S}^3$$

Note que $a \neq 0$, pois senão $A = 0$.

Logo $\forall x \in \mathbb{R}^3$, temos que:

$$\langle x, Ax \rangle = \langle |x|v, A(|x|v) \rangle = |x|^2 \langle v, Av \rangle, \text{ com } v \in \mathbb{S}^3. \text{ Logo:}$$

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = \left(\sum_i^4 x_i^2 \right) \cdot a$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} & a_{11}.x_1x_1 + a_{12}.x_1x_2 + a_{13}.x_1x_3 + a_{14}.x_1x_4 + \\ & a_{21}.x_2x_1 + a_{22}.x_2x_2 + a_{23}.x_2x_3 + a_{24}.x_2x_4 + \\ & a_{31}.x_3x_1 + a_{32}.x_3x_2 + a_{33}.x_3x_3 + a_{34}.x_3x_4 + \\ & a_{41}.x_4x_1 + a_{42}.x_4x_2 + a_{43}.x_4x_3 + a_{44}.x_4x_4 = \\ & a.x_1x_1 + a.x_2x_2 + a.x_3x_3 + a.x_4x_4 \end{aligned}$$

Portanto:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a, \quad a_{ij} + a_{ji} = 0, \text{ se } i \neq j \quad (3.3)$$

Sendo A ortogonal, temos que:

$$\sum_{k=1}^4 b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}, \text{ com } b_{ik} = a_{ki}$$

Portanto:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} + a_{4i}a_{4j} = \delta_{ij}$$

Tomando $i = 1, j = 2$ na igualdade anterior, obtemos:

$$0 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} = aa_{12} - aa_{12} + a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} = a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} \therefore$$

$$0 = a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} \quad (2)$$

Tomando agora $i = j = 1$ e $i = j = 2$, obtemos:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 = 1 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{42}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{42}^2 \therefore$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{42}^2 \quad (3)$$

De (1), obtemos que:

$$a_{31}^2 + a_{41}^2 = a_{32}^2 + a_{42}^2 \quad (4)$$

As equações (2) e (4) nos dizem que os vetores $(a_{31}, a_{41}), (a_{32}, a_{42}) \in \mathbb{R}^2$ são perpendiculares e têm o mesmo comprimento, portanto:

$$\begin{cases} a_{32} = a_{41} \\ a_{42} = -a_{31} \end{cases} \quad (\text{I})$$

ou

$$\begin{cases} a_{32} = -a_{41} \\ a_{42} = a_{31} \end{cases} \quad (\text{II})$$

Daí encontramos duas formas possíveis para A com a propriedade desejada. Fazendo $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a$, $a_{21} = b$, $a_{31} = c$, $a_{41} = d$, teremos:

$$a_{12} = -b, a_{13} = -c, a_{14} = -d$$

Considerando o caso (I):

$$a_{32} = d, a_{42} = c \therefore$$

$$a_{23} = -d, a_{24} = -c$$

Portanto, A terá a forma:

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Procedendo de forma análoga ao caso (II) verifica-se que A é da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Temos que as matrizes 3.4, 3.5 são as translações à esquerda e à direita, respectivamente, pelo quaternio $g = a + bi + cj + dk \in \mathbb{S}^3$.

Com efeito.

$$L_{a+bi+cj+dk}(x + yi + zj + wk) = (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + wk) = (ax - by - cz - dw) + (bx + ay - dz + cw)i + (cx + dy + az - bw)j + (dx - cy + bz + aw)k, \text{ logo } L_g X = AX,$$

$$\text{com } g = a + bi + cj + dk, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Iremos expressar isto dizendo que $A = A_g$ é a **Matriz Associada** a g .

Daí, obtemos que L_g é uma isometria.

De fato, sendo L_g linear temos que $(dL_g)_h = L_g, \forall g \in \mathbb{G}, h \in \mathbb{S}^3$. Assim,

$$\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle (dL_g)_h u, (dL_g)_h v \rangle, \forall u, v \in T_g \mathbb{S}^3 \text{ e } L_g \text{ é uma isometria.}$$

A existência destas "translações" em \mathbb{S}^3 é diretamente relacionado ao fato que \mathbb{S}^3 é um grupo, o grupo dos quaternios de norma 1. Os quaternios são \mathbb{R}^4 com a estrutura de uma álgebra não comutativa sobre \mathbb{R} tendo $1 = (1, 0, 0, 0)$ como elemento neutro e os elementos

$$i = (0, 1, 0, 0), j = (0, 0, 1, 0), k = (0, 0, 0, 1)$$

satisfazendo

$$i = j.k = -k.j, \quad j = k.i = -i.k, \quad k = i.j = -j.i, \quad i.i = j.j = k.k = 1$$

Verifiquemos que os quatérnios $\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ é um Grupo de Lie.

A aplicação produto $p : (\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}) \times (\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}) \rightarrow (\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\})$

$$p((a, b, c, d), (x, y, z, w)) = (ax - by - cz - dw, bx + ay - dz + cw, cx + dy + az - bw, dx - cy + bz + aw),$$

é C^∞ .

Verifiquemos agora que a aplicação

$Inv : (\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}) \rightarrow (\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\})$, dada por

$$Inv(X) = X^{-1},$$

também é C^∞ .

De fato. Seja $g \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$, A_g a matriz associada a g . Ou seja, $L_g h = A_g \cdot h$. Tomando $g = X$, $h = X^{-1}$, obtemos

$$A_X \cdot X^{-1} = L_X \cdot X^{-1} = X \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore$$

Sendo $A_X \cdot (A_X)^t = \det(A_X)$, obtemos

$$Inv(X) = X^{-1} = (A_X)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(A_X)^T}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \\ -w \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\text{Inv}(X) = X^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \\ -w \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

é C^∞

Iremos agora definir um isomorfismo entre \mathbb{S}^3 e um subgrupo de $O(4)$. Considere

$$\psi : \mathbb{S}^3 \rightarrow O(4) \text{ da forma } \psi(X) = A_X,$$

Onde A_X é a matriz associada a X pela relação $L_X Z = A_X Z, \forall Z \in \mathbb{S}^3$.

i) ψ é um homomorfismo.

De fato. $A_{X.Y}(Z) = L_{X.Y}Z = (L_X \circ L_Y)(Z) = (L_X)(L_Y(Z)) = A_X(A_Y(Z)) = (A_X.A_Y)Z$. Daí, $\psi(X.Y) = \psi(X).\psi(Y)$.

ii) ψ é injetiva.

De fato. Se $\psi(X) = I$, então $a = 1, b = c = d = 0$, portanto, $X = 1$.

Usaremos esse isomorfismo para identificar \mathbb{S}^3 com um subgrupo de $O(4)$.

A norma $|x|$ de um quatérnio x satisfaz $|xy| = |x|.|y|$. Daí se identificarmos a esfera \mathbb{S}^3 com o conjunto dos quatérnios de módulo 1, \mathbb{S}^3 com o produto dos quatérnios é um subgrupo do conjunto dos quatérnios não-nulos. \mathbb{S}^3 é um conjunto de nível regular da função diferenciável $f : \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 - 1$.

3.5.2 Superfícies de Translação

Definição 3.5.5 *Seja G um grupo e e o elemento neutro de G , $X_e, Y_e \in T_e G$ e a operação em $T_e G$*

$$[X_e, Y_e] = [X, Y]_e$$

$T_e G$ com a operação $[\cdot, \cdot]$ é chamada a **Álgebra de Lie** G . Denotaremos ela por $\mathcal{L}(G)$.

Consideremos a algebra de Lie $\mathcal{L}(\mathbb{S}^3)$ do grupo \mathbb{S}^3 . Ou seja, o espaço tangente a \mathbb{S}^3 em $e = (1, 0, 0, 0)$. Este é gerado pelos vetores:

$$\begin{aligned} X_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ X_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ X_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Considere X_1 como sendo um vetor tangente no ponto $(1, 0, 0, 0)$ Temos que $X_1 = c'(0)$, onde

$$\begin{aligned} c(t) &= (\cos t, \sin t, 0, 0) \in \mathbb{S}^3 \\ &= \cos t + (\sin t)i \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a identificação de \mathbb{S}^3 com um subgrupo de $O(4)$. Assim X_1 pode ser identificado com

$$c'(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in O(4).$$

Da mesma forma X_2 e X_3 podem ser identificados com

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Utilizando a multiplicação de matrizes e o fato que $[X_e, Y_e] = X_e Y_e - Y_e X_e$, podemos concluir que:

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2. \quad (1)$$

Fixemos orientação positiva para \mathbb{S}^3 com (X_1, X_2, X_3) positiva. $u \times v$ é definido por $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w), \forall w \in T_p \mathbb{S}^3$, onde \det é calculado em relação a qualquer base ortonormal positiva de $T_p \mathbb{S}^3$.

Sejam \tilde{X}_1 ou \tilde{X}_2 ou \tilde{X}_3 as extensões contínuas dos vetores X_1, X_2, X_3 em $T_e \mathbb{S}^3$, dadas por $\tilde{X}_1 = dL_g X_1(e), \tilde{X}_2 = dL_g X_2(e), \tilde{X}_3 = dL_g X_3(e)$. (Note que aqui usamos o fato de que a um vetor em $T_e \mathbb{S}^3$ está associado um único campo de vetores invariante à esquerda). Afirmamos que o produto vetorial de dois entre os vetores $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ será o mesmo que o produto vetorial de dois entre os vetores X_1, X_2, X_3 $\mathbb{S}_{(1,0,0)}^3$ em termos do produto interno usual e da orientação usual para \mathbb{S}^3 .

L_g é uma isometria que preserva orientação. Sendo \mathbb{S}^3 conexo existe uma curva contínua ligando os pontos e e g . Daí, L_g preserva orientação sse L_e preserva orientação. Sendo, $L_e = I$ (Identidade), temos que $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ é positiva. Logo, se

$$W = \alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2 + \alpha_3 \cdot X_3,$$

por linearidade

$$\tilde{W} = dL_g X = \alpha_1 \cdot \tilde{X}_1 + \alpha_2 \cdot \tilde{X}_2 + \alpha_3 \cdot \tilde{X}_3$$

Assim, como L_g preserva a orientação e é uma isometria, temos que $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ também é um base ortonormal positiva. Assim, as matrizes de $(X_1, X_2, W), (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{W})$ com respeito às bases ortonormais $\{X_1, X_2, X_3\}, \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3\}$ nos pontos e, g , respectivamente, são iguais a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\langle \tilde{X}_3, \tilde{W} \rangle_g = \langle dL_g X_3, dL_g W \rangle_g = \langle X_3, W \rangle_e = \det(X_1, X_2, W) = \det(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{W}),$$

Portanto, $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$.

De forma análoga verifica-se que $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 \times \tilde{X}_3$, $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$.

Assim se \tilde{X}_i é o campo de vetores invariantes à esquerda que estende X_i , então podemos escrever

$$\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 = \tilde{X}_3, \quad \tilde{X}_2 \times \tilde{X}_3 = \tilde{X}_1, \quad \tilde{X}_3 \times \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2, \quad (2)$$

onde \times em cada espaço tangente é definido em termos da métrica usual \langle, \rangle sobre \mathbb{S}^3 e a orientação usual sobre \mathbb{S}^3 .

Então, agora podemos dar um desenvolvimento especial à teoria das curvas em \mathbb{S}^3 , pois podemos expressar cada vetor tangente em termos de campos de vetores invariantes à esquerda.

Seja c uma curva em \mathbb{S}^3 parametrizada pelo comprimento de arco, e seja t um vetor unitário tangente a c dado por:

$$t(s) = \sum_{i=1}^3 f_i(s) \tilde{X}_i(c(s)), \quad (3)$$

onde

$$\sum_i f_i^2 = 1 \Rightarrow \sum_i f_i f_i' = 0. \quad (4)$$

Usaremos a notação ∇' para a derivada covariante no ambiente \mathbb{S}^3 . Então para cada campo de vetores $\sum_{j=1}^3 h_j(s) \tilde{X}_j(c(s))$ ao longo de c nós temos:

$$\frac{D'}{ds} \left[\sum_{j=1}^3 h_j(s) \tilde{X}_j(c(s)) \right] = \sum_j h_j'(s) \tilde{X}_j(c(s)) + \sum_j h_j(s) \frac{D'}{ds} \tilde{X}_j(c(s))$$

Sendo Y_j dado por $Y_j(s) = \tilde{X}_j(c(s))$ é induzido por \tilde{X}_j , temos que $\frac{D'Y_j}{ds} = \nabla_{dc/ds}\tilde{X}_j$.
E sendo $\frac{dc}{ds}(s) = \sum_{i=1}^3 f_i(s)\tilde{X}_i(c(s))$, temos também que:

$$\frac{D'}{ds} \left[\sum_{j=1}^3 h_j(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s)) \right] = \sum_j h'_j(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s)) + \sum_j h_j(s) \sum_i f_i(s) \nabla'_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j(c(s)),$$

Pela proposição 3.5.2 $\nabla'_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j = \frac{1}{2}[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]$, portanto:

$$\begin{aligned} & \sum_j h_j \sum_i f_i \nabla'_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j = \\ & \frac{1}{2} \sum_j h_j \sum_i f_i [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_j h_j (f_1 [\tilde{X}_1, \tilde{X}_j] + f_2 [\tilde{X}_2, \tilde{X}_j] + f_3 [\tilde{X}_3, \tilde{X}_j]) \right\} = \\ & \frac{1}{2} \{ h_1 f_1 [\tilde{X}_1, \tilde{X}_1] + h_2 f_1 [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] + h_3 f_1 [\tilde{X}_1, \tilde{X}_3] + h_1 f_2 [\tilde{X}_2, \tilde{X}_1] + h_2 f_2 [\tilde{X}_2, \tilde{X}_2] + h_3 f_2 [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] \\ & \quad + h_1 f_3 [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] + h_2 f_3 [\tilde{X}_3, \tilde{X}_2] + h_3 f_3 [\tilde{X}_3, \tilde{X}_3] \} \end{aligned}$$

Sendo $\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_i = 0$ e $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = -[\tilde{X}_j, \tilde{X}_i]$, temos que:

$$\begin{aligned} & \sum_j h_j \sum_i f_i \nabla'_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j = \\ & \frac{1}{2} \{ (f_1 h_2 - f_2 h_1) [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] + (f_1 h_3 - f_3 h_1) [\tilde{X}_1, \tilde{X}_3] + (f_2 h_3 - f_3 h_2) [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] \} \end{aligned}$$

Sendo $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 2\tilde{X}_3$, $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_3] = -2\tilde{X}_2$, $[\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = 2\tilde{X}_1$, podemos escrever:

$$\sum_j h_j \sum_i f_i \nabla'_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j = (f_1 h_2 - f_2 h_1) \tilde{X}_3 + (f_3 h_1 - f_1 h_3) \tilde{X}_2 + (f_2 h_3 - f_3 h_2) \tilde{X}_1$$

Assim:

$$\frac{D'}{ds} \left[\sum_{j=1}^3 h_j(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s)) \right] = \sum_j h'_j(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s)) + [(f_2 h_3 - f_3 h_2) \tilde{X}_1 + (f_3 h_1 - f_1 h_3) \tilde{X}_2 +$$

$$+(f_1 h_2 - f_2 h_1) \tilde{X}_3], \quad (5)$$

onde todas funções são avaliadas em s , e todos os \tilde{X}_i em $c(s)$.

Em particular, para t , temos que $h_i = f_i$, portanto

$$\frac{D't(s)}{ds} = \sum_j f'_j \tilde{X}_j \quad (6)$$

Definição 3.5.6 Fixemos orientação de \mathbb{S}^3 com $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ base ortonormal positiva em cada ponto. Se $t(s) = c'$ denota o vetor unitário tangente a curva $c : [a, b] \rightarrow N$, então definimos a função curvatura k de c por

$$k(s) = \left| \frac{D't(s)}{ds} \right|$$

Se $k(s) \neq 0, \forall s \in [a, b]$, definimos o vetor normal a c por

$$n(s) = k(s)^{-1} \cdot \frac{D't(s)}{ds},$$

$$b = t \times n.$$

E definimos a torção por

$$\tau = \left\langle \frac{D'n}{ds}, b \right\rangle$$

Assim, $\{t, n, b\}$ é base ortonormal positiva ao longo de c .

Definição 3.5.7 Definimos planos especiais. Chamaremos

- 1) O plano gerado pelos vetores t, n , plano osculador.
- 2) O plano gerado pelos vetores n, b , plano normal.
- 3) O plano gerado pelos vetores t, b , plano retificante.

Sendo n unitário, $\langle \frac{D'n}{ds}, n \rangle = 0$. Logo, podemos escrever

$$\frac{D'n}{ds} = A.t + C.b, \text{ com } A, C \in \mathbb{R} \text{ constantes.}$$

$$\text{Daí, } A = \langle \frac{D'n}{ds}, t \rangle = -\langle n, \frac{D't}{ds} \rangle = -k, C = \langle \frac{D'n}{ds}, b \rangle = \tau.$$

Portanto,

$$\frac{D'n}{ds} = -k.t + \tau.b$$

Agora

$$\langle \frac{D'b}{ds}, b \rangle = 0, \text{ pois } |b| = 1.$$

Escrevemos

$$\frac{D'b}{ds} = M.t + N.n, \text{ com } M, N \in \mathbb{R} \text{ constantes.}$$

Temos que

$$M = \langle \frac{D'b}{ds}, t \rangle = -\langle b, \frac{D't}{ds} \rangle = -\langle b, k.n \rangle = -k.\langle b, n \rangle = 0$$

$$N = \langle \frac{D'b}{ds}, n \rangle = -\langle b, \frac{D'n}{ds} \rangle = -\tau$$

Logo,

$$\frac{D'b}{ds} = -\tau.n$$

Note que de $\frac{D'n}{ds} = -k.t + \tau.n$, obtemos

$$\tau.b = \frac{D'n}{ds} + k.t,$$

tomando a norma, obtemos

$$|\tau| = \left| \frac{D'n}{ds} + k.t \right|.$$

Veja que τ pode ser positivo, negativo ou nulo.

Assim, temos as ditas equações de Serre-Frenet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D't(s)}{ds} = k(s).n(s) \\ \frac{D'n(s)}{ds} = -k(s).t(s) + \tau(s).b(s) \\ \frac{D'b(s)}{ds} = -\tau(s).n(s) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Proposição 3.5.4 ([10]) *Seja N uma variedade riemanniana de dimensão 3 de curvatura constante. Sejam $c, \bar{c} : [a, b] \rightarrow N$ curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que o valor das curvaturas e das torções de c e \bar{c} coincidem em toda parte, então existe uma única isometria $A : N \rightarrow N$ tal que $\bar{c} = A \circ c$.*

Pela definição acima, temos que a curvatura k é dada por

$$k = \sqrt{\sum_i (f'_i)^2} \quad (7)$$

e n é dado por

$$n = \frac{\sum_i f'_i \tilde{X}_i}{k} \quad (8)$$

Portanto b é dado por:

$$b = t \times v = \frac{1}{k} \left(\sum_i f_i \tilde{X}_i \right) \times \left(\sum_j f'_j \tilde{X}_j \right) = \frac{1}{k} \sum_{i,j} f_i f'_j (\tilde{X}_i \times \tilde{X}_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} [f_1 f_2' (\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2) + f_1 f_3' (\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_3) + f_2 f_1' (\tilde{X}_2 \times \tilde{X}_1) + f_2 f_3' (\tilde{X}_2 \times \tilde{X}_3) + \\
&\quad + f_3 f_1' (\tilde{X}_3 \times \tilde{X}_1) + f_3 f_2' (\tilde{X}_3 \times \tilde{X}_2)] = \\
&= (f_1 f_2' - f_2 f_1') \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 + (f_1 f_3' - f_3 f_1') \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_3 + (f_2 f_3' - f_3 f_2') \tilde{X}_2 \times \tilde{X}_3 = \\
&= (f_1 f_2' - f_2 f_1') \tilde{X}_3 - (f_1 f_3' - f_3 f_1') \tilde{X}_2 + (f_2 f_3' - f_3 f_2') \tilde{X}_1
\end{aligned}$$

Fazendo $g_1 = f_2 f_3' - f_3 f_2'$, $g_2 = f_3 f_1' - f_1 f_3'$, $g_3 = f_1 f_2' - f_2 f_1'$, podemos escrever:

$$b = \frac{1}{k} \sum_i g_i \tilde{X}_i \quad (\mathbf{9})$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{D'b(s)}{ds} &= \frac{1}{k} \frac{D'}{ds} \left(\sum_i g_i \tilde{X}_i \right) - \left(\frac{1}{k} \right)' \sum_i g_i \tilde{X}_i = \\
&= \frac{1}{k} \left[\sum_i g_i' \tilde{X}_i + (f_2 g_3 - f_3 g_2) \tilde{X}_1 + (f_3 g_1 - f_1 g_3) \tilde{X}_2 + (f_1 g_2 - f_2 g_1) \tilde{X}_3 \right] - \frac{k'}{k^2} \sum_i g_i \tilde{X}_i = \\
&= \frac{1}{k} \left[(f_2 g_3 - f_3 g_2) \tilde{X}_1 + (f_3 g_1 - f_1 g_3) \tilde{X}_2 + (f_1 g_2 - f_2 g_1) \tilde{X}_3 \right] + \sum_i \left(\frac{g_i}{k} \right)' \tilde{X}_i
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
f_3 g_1 - f_1 g_3 &= f_3 (f_2 f_3' - f_3 f_2') - f_1 (f_1 f_2' - f_2 f_1') = f_2 (f_3 f_3' + f_1 f_1') - f_2' (f_1^2 + f_3^2) = \\
&= f_2 (-f_2 f_2') - f_2' (1 - f_2^2) = -f_2'
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que:

$$f_2 g_3 - f_3 g_2 = -f_1', \quad f_1 g_2 - f_2 g_1 = -f_3'$$

Portanto, obtemos:

$$(10) \quad \frac{D'b(s)}{ds} = \frac{-\sum_i f'_i \tilde{X}_i}{k} + \sum_i \left(\frac{g_i}{k}\right)' \tilde{X}_i = -n + \sum_i \left(\frac{g_i}{k}\right)' \tilde{X}_i, \text{ por (8).}$$

Definição 3.5.8 Dizemos que um subgrupo de G é um subgrupo a 1-parâmetro se existe uma aplicação diferenciável $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ tal que $\psi(r + s) = \psi(r) \cdot \psi(s)$, onde \cdot é a operação do grupo G .

Proposição 3.5.5 ([8]) Seja G um grupo de Lie Então os subgrupos a um parâmetro de G são precisamente as curvas integrais de campos invariantes à esquerda começando na identidade. Portanto existe uma correspondência bijetiva.

$$\{\text{subgrupo de } G \text{ a } 1 - \text{parametro}\} \leftrightarrow \mathcal{L}(G) \leftrightarrow T_e G$$

Em outros termos: Um subgrupo a 1-parâmetro é unicamente determinado por seu vetor tangente inicial em $T_e G$

Definição 3.5.9 Definimos a curvatura normal de uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$, em s , onde M é uma hipersuperfície de uma variedade curvatura constante \overline{M} (M é uma subvariedade imersa de co-dimensão 1), como sendo o número

$$k_n(s) = -\frac{\langle c'(s), \overline{\nabla}_{c'(s)} N \rangle}{|c'(s)|^2},$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de \overline{M} e N é o campo de vetores normal de Gauss de M em $c(s)$.

Observação 3.5.1 Note que esta definição só é válida para curvas regulares, ou seja $\frac{dc}{ds}(c(s)) = c'(s) \neq 0, \forall s \in [a, b]$.

Definição 3.5.10 Uma direção assintótica numa Variedade Riemanniana M é um vetor $X \in T_p M$ tal que $II(X, X) = 0$.

Definição 3.5.11 Uma curva c em M é dita assintótica se todos seus vetores tangente são direções assintóticas.

Proposição 3.5.6 *Seja c uma curva sobre uma superfície M . Então*

*c é uma curva assintótica \Leftrightarrow o vetor normal a n , quando definido, é sempre tangente a $M \Leftrightarrow$ o plano osculador, quando definido, sempre coincide com o plano tangente de M
 \Leftrightarrow a curvatura normal de c é sempre nula, $k_n = 0$.*

Demonstração: Pela definição de II , dada pela equação 2.3, temos $k_n(s) \cdot |c'(s)|^2 = II(c'(s), c'(s))$.

Pela equação $k_n(s) \cdot |c'(s)|^2 = II(c'(s), c'(s))$, temos $k_n(s) = II\left(\frac{c'(s)}{|c'(s)|}, \frac{c'(s)}{|c'(s)|}\right)$. Assim, $t(s) = \frac{c'(s)}{|c'(s)|}$ é um vetor unitário tangente à curva c . Portanto,

$$\left\langle \frac{D't(s)}{ds}, N \right\rangle = -\langle t(s), \bar{\nabla}_{t(s)} N \rangle = -\frac{\langle c'(s), \bar{\nabla}_{c'(s)} N \rangle}{|c'(s)|^2} = II\left(\frac{c'(s)}{|c'(s)|}, \frac{c'(s)}{|c'(s)|}\right) = k_n(s)$$

Daí, pelas equações de Frenet 3.7, podemos escrever

$$k_n(s) = \langle k(s) \cdot n(s), N \rangle = k(s) \cdot \langle n(s), N \rangle$$

Portanto, c é assintótica sse $k_n(s) = 0$ sse $n(s)$ é perpendicular a $N(s)$ sse $n(s) \in T_{c(s)}M$ sse $t(s), n(s)$ gera $T_{c(s)}M$ (ou seja, o plano osculador coincide com o plano tangente a M ao longo de c). ■

Agora estamos aptos para demonstrar um teorema.

Teorema 3.5.2 *Seja c uma curva em \mathbb{S}^3 cuja torção $\tau (= k_2)$ satisfaz $\tau = 1$ em toda parte, então b é invariante à esquerda ao longo de c , isto é,*

$$b(s) = L_{c(s)c(0)^{-1}*} b(0).$$

Já se a curva tem torção $\tau = -1$ em toda parte, então b é invariante à direita ao longo de c .

Demonstração:

Consideremos o primeiro caso. Sendo $\tau_c = 1$. Pela terceira equação de Serret-Frenet 3.7 e por (10) temos que:

$$-n = \frac{D'b(s)}{ds} = -n + \sum_i \left(\frac{g_i}{k}\right)' \tilde{X}_i \therefore$$

$$0 = \sum_i \left(\frac{g_i}{k}\right)' \tilde{X}_i \therefore$$

$\left(\frac{g_i}{k}\right)' = 0$, portanto cada $\frac{g_i}{k}$ é constante.

Mas, pela equação (9), temos que os $\frac{g_i}{k}$'s são as componentes de b com respeito a campos de vetores invariantes à esquerda \tilde{X}_i , o que prova a primeira parte.

Aqui $t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha, k_\alpha, \tau_\alpha$ e $t_c, n_c, b_c, k_c, \tau_c$ denotarão os vetores tangente, normal, binormal, as curvaturas e torções das curvas α, c , respectivamente, onde $\alpha = f \circ c$ com $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ dada por $f(x) = x^{-1}$.

Por 3.6, temos que $f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \\ -w \end{bmatrix}$. Assim, f é a restrição a \mathbb{S}^3 de uma transformação linear ortogonal $(x, y, z, w) \rightarrow (x, -y, -z, -w)$. Logo, uma isometria de \mathbb{S}^3 .

Note que f reverte a orientação de subgrupos a 1-parâmetro passando por $(1, 0, 0, 0)$. De fato, seja ϕ um subgrupo a 1-parâmetro de \mathbb{S}^3 , com $\phi(0) = 1$, tem-se que $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$, pois $\phi(t) \cdot \phi(-t) = \phi(t - t) = \phi(0) = e$. Assim, $f_* \phi'(0) = -\phi'(0)$. Pela proposição acima ϕ é curva integral de campos invariantes à esquerda começando em 1. Como, $T_e \mathbb{S}^3$ é tridimensional, f_* reverte a orientação em e . Sendo, \mathbb{S}^3 conexo f_* reverte sua orientação em toda parte.

Pela primeira parte que provamos deste resultado, temos

$$b_c(c(t)) = (dL_{c(t) \cdot c^{-1}(0)})_{c(0)}(b_c(0))$$

Derivando α em t , temos

$$t_\alpha(\alpha(t)) = df_{c(t)}(c'(t)) = df_{c(t)}(t_c(c(t)))$$

Sendo f uma isometria, temos que $df_{c(t)}$ preserva a norma e comuta com $\frac{D'}{dt}$.

$$\begin{aligned}
n_\alpha(\alpha(t)) &= \frac{\frac{D't_\alpha(\alpha(t))}{dt}}{\left\| \frac{D't_\alpha(\alpha(t))}{dt} \right\|} = \frac{\frac{D'df_{c(t)}t_c(c(t))}{dt}}{\left\| \frac{D'df_{c(t)}t_c(c(t))}{dt} \right\|} = \frac{df_{c(t)}\left(\frac{D't_c(c(t))}{dt}\right)}{\left\| df_{c(t)}\left(\frac{D't_c(c(t))}{dt}\right) \right\|} = \frac{df_{c(t)}\left(\frac{D't_c(c(t))}{dt}\right)}{\left\| \frac{D't_c(c(t))}{dt} \right\|} = \\
&= \frac{df_{c(t)}\left(\frac{D't_c(c(t))}{dt}\right)}{\left\| \frac{D't_c(c(t))}{dt} \right\|} = df_{c(t)}\left(\frac{\frac{D't_c(c(t))}{dt}}{\left\| \frac{D't_c(c(t))}{dt} \right\|}\right) = df_{c(t)}(n_c(c(t)))
\end{aligned}$$

Como f é uma isometria e reverte a orientação, temos que $\{df(t_c), df(n_c), df(b_c)\} = \{t_\alpha, n_\alpha, df(b_c)\}$ é base ortonormal negativa, enquanto $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ é base ortonormal positiva. Portanto, $df(b_c) = -b_\alpha$.

$$\begin{aligned}
-\tau_\alpha n_\alpha(\alpha(t)) &= \frac{D'b_\alpha}{dt}(\alpha(t)) = \frac{D'}{dt}(-df_{c(t)}b_c(c(t))) = -df_{c(t)}\left(\frac{D'b_c}{dt}(c(t))\right) = \\
&= -df_{c(t)}(-\tau_c n_c(c(t))) = \tau_c n_\alpha(\alpha(t))
\end{aligned}$$

Portanto, $\tau_\alpha = -\tau_c$.

Assim, $f \circ c$ tem torção -1 se e somente se c torção 1. Queremos verificar que

$$b_c(c(t)) = (dR_{c^{-1}(0)c(t)})_{c(0)}(b_c(c(0)))$$

Para ver isto basta notar que

$$\begin{aligned}
b_c(c(t)) &= -df_{\alpha(t)}(b_\alpha(\alpha(t))) = -df_{\alpha(t)}(dL_{\alpha(t)\alpha^{-1}(0)})(b_\alpha(0)) = \\
&= df_{\alpha(t)} \circ (dL_{\alpha(t)\alpha^{-1}(0)})_{\alpha(0)} \circ df_{c(0)}(b_c(c(0))),
\end{aligned}$$

e

$$df_{\alpha(t)} \circ (dL_{\alpha(t)\alpha^{-1}(0)})_{\alpha(0)} \circ df_{c(0)} = d(f \circ L_{\alpha(t)\alpha^{-1}(0)} \circ f)_{c(0)} = d(R_{c^{-1}(0)c(t)})_{c(0)}.$$

Em resumo provamos o seguinte. Se α tem torção 1, então c tem torção -1. Logo, b_c é invariante à esquerda e por conseguinte b_α é invariante à direita. ■

Considere uma superfície imersa em \mathbb{S}^3 com curvatura extrínseca $K_{ext} = -1$. Supomos M orientável, pois caso não seja passamos ao seu recobrimento duplo orientável.

Sendo $K_{ext} < 0$, existem duas direções assintóticas distintas possíveis em cada ponto da superfície M . No argumento da demonstração do teorema 2.2.4 podemos garantir a existência de uma rede de Tschebysheff $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ com f sobrejetiva.

A métrica $I_f = f^*\langle , \rangle$ sobre \mathbb{R}^2 é portanto:

$$I_f = f^* = du \otimes du + \cos\omega [du \otimes dv + dv \otimes du] + dv \otimes dv,$$

onde ω é o ângulo entre a primeira e a segunda curva coordenada.

Consideremos a curva $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $c(u) = (u, v)$, a qual é parametrizada pelo comprimento de arco pela métrica I_f . $\frac{D}{du}$ denotará a derivada covariante determinada pela métrica I_f .

As matrizes da métrica I_f e sua inversa são

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \frac{1}{\text{sen}^2\omega} \begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix},$$

Assim, pela fórmula

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

Temos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\cos\omega}{\text{sen}\omega} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial u}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{\text{sen}\omega} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial u}$$

Escrevamos $c'(u) = v_1 \frac{\partial}{\partial u} + v_2 \frac{\partial}{\partial v} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}$, onde $v_1 = \frac{\partial u}{\partial u}$, $v_2 = \frac{\partial v}{\partial u}$.

Usando a fórmula da derivada Covariante para um campo de vetores C^∞ ao longo de uma curva c

$$\frac{Dc'(u)}{du} = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{dv_k}{du} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(c(u)) \frac{dc_i}{ds} v_j(u) \right] \frac{\partial}{\partial x_k} |_{c(u)},$$

Assim, temos que

$$\frac{Dc'(u)}{du} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial u}}{\text{sen}\omega} \left[\cos\omega \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right]$$

Se $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ é o único campo vetorial tal que $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$ é uma base ortornormal na métrica I_f e $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)\right)$ tem orientação positiva.

$$\frac{\partial}{\partial v} = \cos\omega \frac{\partial}{\partial u} + \text{sen}\omega \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$$

Assim, temos que:

$$\frac{Dc'(u)}{du} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$$

Portanto, se t denota o vetor tangente unitário à curva coordenada $u \mapsto f(u, v)$ em M e $\frac{D}{ds}$ denota a derivação em M

$$\frac{Dt}{du} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$$

Onde $\{t, \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)\}$ está positivamente orientado.

Mas, $u \mapsto f(u, v)$ é curva assintótica, assim a derivada covariante $\frac{Dt}{du}$ em M é a mesma que a derivada covariante de $\frac{D't}{du}$ em \mathbb{S}^3 , pois sendo $u \mapsto f(u, v)$ uma curva assintótica, a proposição 3.5.6 garante que o vetor n normal a esta curva é sempre tangente a M .

Assim, temos que:

$$(11) \quad \frac{D't}{du} = -\frac{\partial \omega}{du} \cdot \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$$

Isto mostra que $\left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$ é \pm o vetor normal a curva $u \mapsto f(u, v)$. Pois,

$$n = \frac{\frac{D't}{du}}{\left|\frac{D't}{du}\right|} = \frac{-\frac{\partial\omega}{\partial u} \cdot \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)}{\left|\frac{\partial\omega}{\partial u}\right|},$$

de acordo com o sinal de $\frac{\partial\omega}{\partial u}$.

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial u}(u, v)\right| = k(u) \text{ curvatura da curva } u \mapsto f(u, v).$$

Pelo lema 2.2.2, temos que ω satisfaz

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} = 0$$

logo existem funções S e T com

$$(12) \omega(u, v) = S(u) + T(v),$$

assim

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}(u, v) = S'(u), \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = T'(v)$$

Disto, todas curvas coordenadas parametrizadas pelo comprimento de arco $u \mapsto f(u, v)$ tem todas mesma função curvatura $k(u) = |S'(u)|$. De forma análoga, todas curvas $v \mapsto f(u, v)$ tem mesma função curvatura $|T'(v)|$.

Considere a base ortonormal $\frac{\partial}{\partial u}, \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$ ao longo da curva $c(u)$. Sabemos que $n = \pm \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}}\right)$, portanto

$$b = t \times n = \pm \frac{\partial}{\partial u} \times \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}} \right) = \pm N,$$

N é normal à superfície tal que $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}} \right), N \right\}$ é base positiva de \mathbb{S}^3 .

Assim,

$$\frac{D'b}{du} = \pm \frac{DN}{du} = \pm dN \left(\frac{\partial}{\partial u} \right),$$

como

$$\frac{D'b}{du} = -\tau \cdot n = -\tau \cdot n = -\tau \cdot \left(\pm \overline{\frac{\partial}{\partial u}} \right)$$

Obtemos

$$-dN \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \tau \cdot \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}} \right)$$

A matriz de $-dN$ nesta base é simétrica, pois a base é ortonormal e $-dN$ é auto-adjunta. Logo,

$$[-dN]_{\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}} \right) \right\}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & * \end{bmatrix}$$

Como $K_{ext} = \det(-dN) = -1$, obtemos $-\tau^2 = -1$, daí $\tau^2 = 1$.

Tomando a curva coordenada $c(v)$ com torção $\tilde{\tau}$, obtemos de forma análoga que $\tilde{\tau}^2 = 1$.

Nosso objetivo é mostrar que $\tau \cdot \bar{\tau} = -1$.

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} &= \cos\omega \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \sen\omega \cdot \left(\overline{\frac{\partial}{\partial u}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} &= -\sen\omega \cdot \left(\overline{\frac{\partial}{\partial v}} \right) + \cos\omega \cdot \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

Assim, na base $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$, temos

$$[-dN] \left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\} = \begin{bmatrix} -\tau \cdot \frac{\cos\omega}{\text{sen}\omega} & -\frac{\tilde{\tau}}{\text{sen}\omega} \\ \frac{\tau}{\text{sen}\omega} & \frac{\cos\omega}{\text{sen}\omega} \cdot \tilde{\tau} \end{bmatrix},$$

Assim,

$$-1 \equiv K_{ext} = \det[-dN] = \tau \cdot \tilde{\tau}.$$

Podemos supor então que $\tau \equiv 1, \tilde{\tau} \equiv -1$.

Por possuírem mesma torção e mesma curvatura a proposição 3.5.4 garante que todas as curvas $u \mapsto f(u, v)$ são congruentes. Seja A_u a isometria com $A_u(f(0, v)) = f(u, v)$ para todo u .

Isso sugere que todas as A_u são justamente translações à esquerda. Vamos provar este fato. Enunciemos antes a proposição que será fundamental para a conclusão:

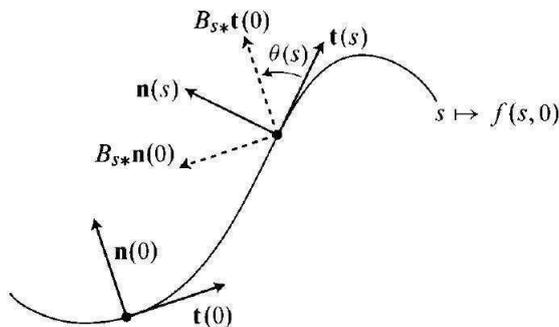
Proposição 3.5.7 ([4]) *Sejam $f_i : M \rightarrow N, i = 1, 2$, duas isometrias locais da variedade Riemanniana (conexa) M na variedade Riemanniana N . Suponhamos que existe um ponto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ e $(df_1)_p = (df_2)_p$. Então, $f_1 = f_2$.*

Assim, considere uma família de translações à esquerda $\{B_u\} = \{L_{f(u,0)f(0,0)^{-1}}\}$ a qual leva $f(0, 0)$ a $f(u, 0)$. Pelo teorema 3.5.2, $(B_u)_*$ leva o binormal $b(0)$ de $u \mapsto f(u, 0)$ em 0 no binormal $b(u)$ em u . Portanto, $(B_u)_*$ leva o plano osculador desta curva no 0 no plano osculador em u . Portanto, podemos escrever

$$t(u) = \cos\theta(u) \cdot (B_u)_* t(0) - \text{sen}\theta(u) \cdot (B_u)_* n(0),$$

logo

$$n(u) = \text{sen}\theta(u) \cdot (B_u)_* t(0) + \cos\theta(u) \cdot (B_u)_* n(0),$$



Calculemos $\frac{D't}{du}$ em termos de θ . Assumamos sem perda de generalidade que $f(0, 0) = 1$, e que $t(0)$ e $n(0)$ são $X_1, X_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{S}^3)$, caso contrário, aplicamos uma isometria de \mathbb{S}^3 apropriada. Portanto,

$$(B_u)_*t(0) = \tilde{X}_1(f(u, 0)), (B_u)_*n(0) = \tilde{X}_2(f(u, 0))$$

Então as funções f_i na equação (3) são:

$$f_1 = \cos\theta \quad f_2 = -\sin\theta, \quad f_3 = 0,$$

pela equação (6), temos que:

$$\frac{D't}{du} = -\theta'(u) [\sin\theta(u) \cdot (B_u)_*t(0) + \cos\theta(u) \cdot (B_u)_*n(0)] = -\theta'(u) \cdot n(u).$$

Estamos supondo que $\{t, n\}$ está na mesma orientação que $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$. Caso contrário, inverte-se o sentido das u-curvas.

Supondo isto, então $n = \frac{\bar{\partial}}{\partial u}$, logo comparando $\frac{D't}{du} = -\theta'(u) \cdot n$, $\frac{D't}{du} = -\frac{\partial\omega}{\partial u} \cdot \frac{\bar{\partial}}{\partial u}$, obtemos

$$\theta' = \frac{\partial \omega}{\partial u} = S',$$

logo,

$$S(u) - \theta(u) = S(0).$$

Sabemos que $t = \frac{\partial}{\partial u}$, $n = \frac{\bar{\partial}}{\partial u}$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial v} = \cos \omega . t + \operatorname{sen} \omega . n$$

Comparemos $(B_u)_* \frac{\partial}{\partial u}(0, 0)$ com $\frac{\partial}{\partial v}(u, 0)$:

$$\frac{\partial}{\partial v}(u, 0) = \cos \omega(u, 0) . t + \operatorname{sen} \omega(u, 0) . n =$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(u, 0) &= \cos \omega(u, 0) [\cos \theta(u) . (B_u)_* t(0) - \operatorname{sen} \theta(u) . (B_u)_* n(0)] + \\ &\quad \operatorname{sen} \omega(u, 0) [\operatorname{sen} \theta(u) . (B_u)_* t(0) + \cos \theta(u) . (B_u)_* n(0)] = \end{aligned}$$

$$\cos [\omega(u, 0) - \theta(u)] . (B_u)_* t(0) + \operatorname{sen} [\omega(u, 0) - \theta(u)] . (B_u)_* n(0)$$

Mas,

$$\omega(u, 0) = S(u) + T(0) = \omega(0, 0)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial v}(u, 0) = \cos \omega(0, 0) (B_u)_* t(0) + \operatorname{sen} \omega(0, 0) (B_u)_* n(0) =$$

$$(B_u)_* . [\cos \omega(0, 0) . t(0) + \operatorname{sen} \omega(0, 0) . n(0)] = (B_u)_* . \frac{\partial}{\partial v}(u, 0)$$

Ou seja, $(B_u)_*$ leva o vetor tangente à curva $v \mapsto f(0, v)$ em $v = 0$ no vetor tangente à curva $v \mapsto f(u, v)$ em $v = 0$.

Pela proposição 3.5.6 o plano osculador de uma curva assintótica é o plano tangente à superfície. Logo, o plano osculador de $v \mapsto f(u, v)$ em $v = 0$ é igual a $T_p M$ onde $p = f(u, 0)$ é igual ao plano osculador de $u \mapsto f(u, 0)$ em u .

Sejam $b(u_0, v_0)$ o vetor binormal à curva $u \mapsto f(u, v_0)$ em $u = u_0$, $\tilde{b}(u_0, v_0)$ o vetor binormal da curva $v \mapsto f(u_0, v)$ em $v = v_0$.

Sendo t, n base positiva do plano tangente, $b = N$ normal à superfície).

Como agora podemos afirmar que \tilde{b} também é unitário e normal à superfície, então ou $\tilde{b} = N$ em toda parte ou $\tilde{b} = -N$.

Sendo b invariante à esquerda, pois $\tau \equiv 1$, temos

$$(B_u)_* b(0, 0) = b(u, 0),$$

logo

$$(B_u)_* \tilde{b}(0, 0) = (B_u)_* (\pm b(0, 0)) = \pm b(u, 0) = \tilde{b}(u, 0).$$

Ou seja, $(B_u)_*$ leva o binormal à curva $v \mapsto f(0, v)$ no binormal à curva $v \mapsto f(u, v)$.

Logo, $(B_u)_*$ leva $t_1 =$ (vetor tangente a $v \mapsto f(0, v)$) $t_2 =$ (vetor tangente a $v \mapsto f(u, v)$) e também

$b_1 =$ (vetor binormal a $v \mapsto f(0, v)$) em $b_2 =$ (vetor binormal a $v \mapsto f(u, v)$)

Como $(B_u)_*$ é isometria linear e preserva orientação (pois, é translação à esquerda), concluímos que $(B_u)_*$ leva $n_1 =$ (vetor normal a $v \mapsto f(0, v)$) $n_2 =$ (vetor normal a $v \mapsto f(u, v)$).

Assim, comparado B_u e A_u . Pelo o que acabamos de concluir e pela definição de A_u , temos

$$(B_u)_*(t_1) = t_2 = (A_u)_*(t_1)$$

$$(B_u)_*(b_1) = b_2 = (A_u)_*(b_1)$$

$$(B_u)_*(n_1) = n_2 = (A_u)_*(n_1)$$

Logo, $(B_u)_* = (A_u)_*$ em $p = f(0, 0)$.

Portanto, pela proposição 3.5.7, $A_u = B_u$.

Se escrevermos $c(u) = f(u, 0)$ e $\gamma(v) = f(0, v)$, temos que a superfície M pode ser escrita como uma coleção de translações à esquerda de γ ,

$$M = \{[c(u).c(0)^{-1}] . \gamma(v)\}$$

podemos também escrever:

$$M = \{[c(u).c(0)^{-1}] . \gamma(v)\} = \{c(u).c(0)^{-1} . \gamma(v)\} = \{c(u). \gamma(0)^{-1} . \gamma(v)\} = \{c(u). [\gamma(0)^{-1} . \gamma(v)]\}$$

Assim, M é também uma coleção de translações à direita de c .

3.6 Teorema Principal

Pelo o que foi visto no decorrer desse capítulo podemos enunciar:

Teorema 3.6.1 *Segundo o valor da curvatura intrínseca as possibilidades para uma superfície completa imersa em \mathbb{S}^3 são:*

Não existe caso $K_{int} < 0$

Se $K_{int} > 0$, são 2-esferas quando $K_{ext} \geq 0$, não existe quando $-1 < K_{ext} < 0$.

Se $K_{int} = 0$, temos como exemplos das superfícies de translação.

A figura seguinte resume o teorema acima:

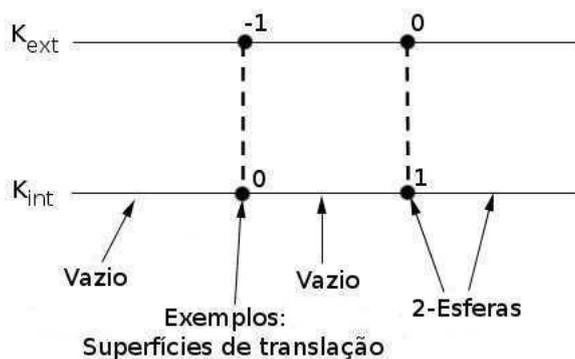


Figura 3.1: Classificação em \mathbb{S}^3

Capítulo 4

Superfícies Completas de Curvatura Constante em \mathbb{H}^3

4.1 Introdução

Analogamente ao caso \mathbb{S}^3 serão classificadas as superfícies em \mathbb{H}^3 segundo o valor da curvatura extrínseca. E no final desta seção enunciamos o resultado geral segundo o valor da curvatura intrínseca. A curvatura intrínseca de \mathbb{H}^3 é constante e igual a -1. Portanto, a equação 2.7 toma a forma

$$K_{int} = K_{ext} - 1 \quad (4.1)$$

4.2 Alguns Modelos para o espaço Hiperbólico

Em certas situações, um modelo para o espaço hiperbólico é mais conveniente. Cada um destes diferem por uma isometria. Logo, não estaremos perdendo em optarmos por um modelo. Existem quatro modelos mais conhecidos: Semi-espaço de Poincaré, Bola de Beltrami, Hiperbolóide ou de Lorentz e o menos comum, Projetivo ou de Klein. Serão definidos os dois primeiros e verificar a equivalência(iguais a menos de isometria) entre eles. Mudando o raio da bola e definindo uma nova métrica sobre ela será verificada a equivalência entre dois modelos para a bola de Beltrami. Portanto, teremos a liberdade de escolher entre três modelos de acordo com a conveniência.

4.2.1 Semi-Espaço-Poincaré.

Considere o semi-espaço do \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e introduza em \mathbb{H}^n a métrica:

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$$

\mathbb{H}^n com esta métrica é o chamado **Modelo de Poincaré** do espaço hiperbólico de dimensão n .

Algumas propriedades desse espaço são:

\mathbb{H}^n é simplesmente conexo. Com a métrica definida acima é completo e possui curvatura intrínseca constante igual a -1 . As geodésicas desse modelos são as semi-retas verticais e os semi-círculos ortogonais ao plano $\{x_n = 0\}$.([4])

4.2.2 Bola-Poincaré

Consideremos duas bolas com raios distintos.

A primeira $\mathbb{B}^n(2) \subset \mathbb{R}^n$ de raio 2 e centro na origem.

$$\mathbb{B}^n(2) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < 2\}, \quad p = (x_1, \dots, x_n)$$

e introduza em $\mathbb{B}^n(2)$ a métrica

$$g_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 - \frac{1}{4}|p|^2\right)^2}$$

A segunda $\mathbb{B}^n(1) \subset \mathbb{R}^n$ de raio 1 também centrada na origem.

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum(x^i)^2 < 1\},$$

com a métrica:

$$h_{ij}(p) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |p|^2)^2},$$

\mathbb{B}^n ou $\mathbb{B}^n(2)$ com suas respectivas métricas representam o **Modelo da Bola** para o espaço hiperbólico. Na seção seguinte será verificada a equivalência entre esses modelos.

Observação 4.2.1 *As geodésicas deste modelo são os diâmetros ou os arcos de círculos ortogonais ao seu bordo([4]).*

4.2.3 Equivalência entre os modelos

(1) \mathbb{H}^n e $\mathbb{B}^n(2)$:

Temos que $f : \mathbb{B}^n(2) \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por

$$f(p) = 4 \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - (0, \dots, 1), \text{ onde } p_0 = (0, \dots, -2),$$

é uma isometria. De fato, pois

$$df_p(v) = 4 \cdot \frac{v|p - p_0|^2 - 2\langle v, p - p_0 \rangle(p - p_0)}{|p - p_0|^4}$$

logo

$$\langle df_p(v), df_p(v) \rangle_{f(p)} = \frac{16\langle v, v \rangle_p}{|p - p_0|^4}.$$

Indicando $f(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$, obtemos:

$$f_n(p) = \frac{4(x_n + 2)}{|p - p_0|^2} - 1 = \frac{4 - |p|^2}{|p - p_0|^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\langle df_p(v), df_p(v) \rangle_{f(p)}}{(f_n(p))^2} = \frac{16|p - p_0|^4 \langle v, v \rangle_p}{(4 - |p|^2)^2 |p - p_0|^4} = \frac{\langle v, v \rangle_p}{(1 - \frac{1}{4}|p|^2)^2}$$

Sendo f injetiva, conclui-se que f é uma isometria de $\mathbb{B}^n(2)$ em \mathbb{H}^n .

(2) $\mathbb{B}^n(2)$ e \mathbb{B}^n :

Basta considerar a aplicação $\varphi : \mathbb{B}^n(2) \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por $\varphi(x) = \frac{x}{2}$. De fato. Seja $\{v_k\}_k$ base ortonormal de $T_p\mathbb{R}^n$. Então, $g_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{(1 - \frac{1}{4}|p|^2)^2}$, $h_{ij}(p) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |p|^2)^2}$, $\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$, são as métricas de $\mathbb{B}^n(2)$, \mathbb{B}^n , respectivamente.

Assim, tome $p \in \mathbb{B}^n(2)$ qualquer, temos que $\{v_k\}$ é base de $T_p\mathbb{B}^n(2)$, logo

$$\langle d\varphi_p v_i, d\varphi_p v_j \rangle_{\varphi(p)} = \langle \frac{v_i}{2}, \frac{v_j}{2} \rangle_{\varphi(p)} = \frac{1}{4} \langle v_i, v_j \rangle_{\varphi(p)} = \frac{1}{4} \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |\varphi(p)|^2)^2} = \frac{\delta_{ij}}{(1 - \frac{1}{4}|p|^2)^2} = \langle v_i, v_j \rangle_p.$$

4.3 Superfícies Totalmente Umbílicas de \mathbb{H}^3

No espaço Euclideano o plano e as esferas são superfícies com propriedades geométricas importantes, sendo estas as únicas superfícies totalmente umbílicas, isto é, com curvaturas principais iguais em todos os pontos. Utilizamos o modelo do semi-espaço de Poincaré para o espaço hiperbólico e identificamos suas superfícies completas e umbílicas.

4.3.1 Superfícies totalmente Geodésicas ou Planos Geodésicos

São representados como os planos euclidianos verticais e os hemisférios ortogonais a $\partial\mathbb{H}^3$, inteiramente contido em \mathbb{H}^3 . Estas superfícies são "cópias" do plano hiperbólico bidimensional. Estas satisfazem $K_{int} \equiv -1$.

4.3.2 Superfícies Equidistantes ou Hiperesferas

Superfícies equidistantes são superfícies tal que seus pontos estão a uma distância fixa de um plano totalmente geodésico.

Elas são representadas por semi-planos inclinados em relação ao \mathbb{H}^3 ou por calotas esféricas que não são hemisférios cujo bordo é uma circunferência contida em $\partial\mathbb{H}^3$.

Estas satisfazem $K_{int} \equiv const$ e $-1 < K_{int} < 0$.

4.3.3 Horosferas

As horoesferas de \mathbb{H}^3 são representadas por uma esfera tangente $\partial\mathbb{H}^3$ (contida em $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$) ou por planos paralelos a $\partial\mathbb{H}^3$ (horizontais).

Estas satisfazem $K_{int} \equiv 0$.

4.3.4 Esferas Geodésicas

As esferas geodésicas são esferas totalmente contidas em \mathbb{H}^3 . Elas são definidas da mesma forma que no espaço Euclidiano, como os pontos que equidistam ρ de um ponto dado. No entanto, devido a métrica em \mathbb{H}^3 ser diferente da métrica Euclideana, o seu centro fica deslocado em relação ao centro Euclidiano.

Estas satisfazem $K_{int} \equiv const > 0$.

A figura seguinte resume o que dissemos:

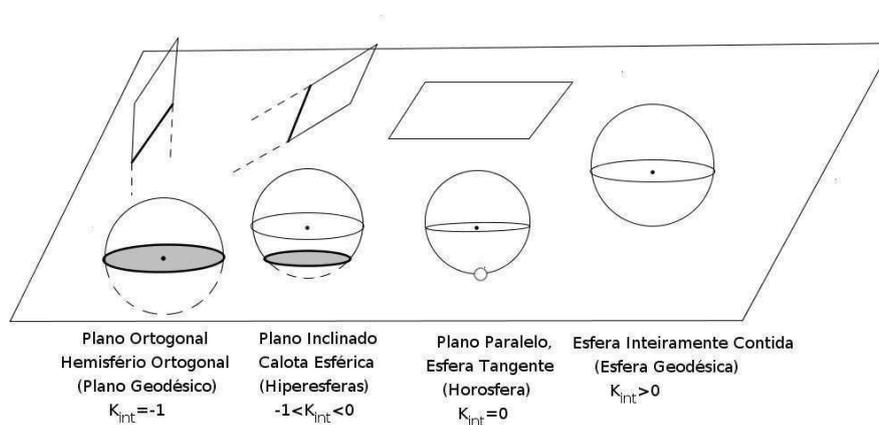


Figura 4.1: Superfícies umbílicas de \mathbb{H}^3

4.3.5 Teorema de Classificação para Superfícies Umbílicas

O seguinte teorema classifica as possibilidades para superfícies umbílicas de \mathbb{H}^3 segundo o valor das curvaturas principais.

Proposição 4.3.1 ([10]) *Seja M^2 uma superfície completa, conexa imersa de \mathbb{H}^3 , cujos pontos são todos umbílicos. Então, ou M é totalmente geodésica, ou M é uma esfera geodésica, ou uma horosfera, ou uma hipersuperfície equidistante. De forma mais precisa, caso:*

As curvaturas principais sejam iguais a zero, então M é um Plano geodésico.

As curvaturas principais sejam em módulo maior que 0 e menor que 1, então M é uma superfície equidistante.

As curvaturas principais sejam em módulo iguais a 1, então M é uma horosfera.

As curvaturas principais sejam em módulo valor maior que 1, então M é uma esfera geodésica.

4.4 $K_{ext} < 0$

Será verificada a não existência de superfícies para este caso.

Pela equação 4.1 $K_{int} < 0$. O teorema 2.2.4 garante o afirmado.

4.5 $K_{ext} > 1$

De acordo com a equação 4.1 temos que $K_{int} > 0$. O teorema 2.2.2 garante que uma superfície completa imersa em \mathbb{H}^3 com $K_{ext} > 1$ tem todos os seus pontos umbílicos. Nessas condições a proposição 4.3.1 garante que esta superfície é uma esfera geodésica.

4.6 $K_{ext} = 1$

Os responsáveis pelo teorema de classificação para este caso são Volkov e Sasaki Vladmirova [5]. Este resultado garante que as únicas superfícies para este caso ou são horosferas ou uma família de superfícies equidistantes de uma geodésica.

Provaremos adiante o teorema de Jörges. O qual ser útil para garantirmos a determinação da segunda forma fundamental da imersão.

Para demonstração deste resultado precisaremos de outros dois da análise complexa, cujos enunciados figuram logo abaixo.

Teorema 4.6.1 ([1]) *Se f é uma função analítica num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, então f é infinitamente diferenciável em Ω , e as derivadas $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, também são analíticas em Ω . Além disso, se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \text{ para } z \in B_r(a) \in \Omega,$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}, \text{ para } k \in \mathbb{N}, z \in B_r(a) \in \Omega, \text{ e}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Teorema 4.6.2 (Liouville)([1]) *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira (analítica sobre todo \mathbb{C}) e limitada, então f é constante.*

Teorema 4.6.3 (JÖRGES). *Se $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 definida sobre o plano inteiro satisfazendo:*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 1$$

Então ϕ é um polinômio quadrático em x e y .

Demonstração: Escrevamos as derivadas da seguinte forma:

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

As equações acima podem ser reescritas da forma:

$$r.t - s^2 = 1 \quad (\mathbf{1})$$

Isto implica que $r.t > 0$, daí r e t têm o mesmo sinal. Podemos assumir que $r, t > 0$, substituindo apenas ϕ por $-\phi$ se necessário. Para dois pontos fixados (x_0, y_0) definamos a função:

$$h(\tau) = \phi(x_0 + \tau.(x_1 - x_0), y_0 + \tau.(y_1 - y_0))$$

Derivando com relação a τ , e usando a regra da cadeia, temos que:

$$h'(\tau) = (x_1 - x_0).p + (y_1 - y_0).q, \text{ com } (p, q) = (p(h(\tau)), q(h(\tau)))$$

Derivando mais uma vez com respeito à τ , temos que:

$$h''(\tau) = (x_1 - x_0)^2.r + 2.(x_1 - x_0)(y_1 - y_0).s + (y_1 - y_0)^2.t,$$

onde p, q, r, s, t são todas avaliadas no ponto $(x_0 + \tau.(x_1 - x_0))$

Se $x_1 = x_0$, então $h''(\tau) = (y_1 - y_0)^2.t \geq 0$, pois $t > 0$.

Se $x_1 \neq x_0$, então:

$$h''(\tau) = (x_1 - x_0)^2 \left[r + 2.s. \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) + t. \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right)^2 \right],$$

Os termos entre colchetes é um polinômio quadrático em $\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$ com discriminante: $\Delta = 4.s^2 - 4.r.t = 4.(s^2 - r.t) < 0$ (por **(1)**), portanto sempre positivo, logo sempre é válido que $h''(\tau) \geq 0$, pois $\tau > 0$. Isto implica que a função h' é não decrescente, daí podemos afirmar que:

$$h'(1) \geq h'(0)$$

Disto, temos que:

$$(x_1 - x_0).(p_1 - p_0) + (y_1 - y_0).(q_1 - q_0) \geq 0 \quad (1)$$

Onde:

$$p_i = p(x_i, y_i), \quad q_i = q(x_i, y_i), \quad i=0,1.$$

Considere a transformação de Lewy:

$$T(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x + p(x, y), y + q(x, y)) \therefore$$

$$\xi(x, y) = x + p(x, y), \quad \eta(x, y) = y + q(x, y)$$

Se fizermos:

$$\xi_i = \xi(x_i, y_i), \quad \eta_i = \eta(x_i, y_i) \quad i=0, 1,$$

Então da equação (1), temos:

$$\begin{aligned} (\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 &= [(x_1 - x_0) + (p_1 - p_0)]^2 + [(y_1 - y_0) + (q_1 - q_0)]^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + 2. [(x_1 - x_0).(p_1 - p_0) + (y_1 - y_0).(q_1 - q_0)] \\ &\geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \text{ (por (1))}. \end{aligned}$$

Daí, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aumenta distâncias, em particular é injetiva.

De fato, basta notar que se $T(x_0, y_0) = T(x_1, y_1)$, então $\xi_1 = \xi_0$, $\eta_1 = \eta_0$, portanto:

$$0 \geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \therefore$$

$$x_1 = x_0, \quad y_1 = y_0$$

Além disto, a matriz Jacobiana de T é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{bmatrix},$$

Cujo determinante é:

$$1 + r + t + r.t - s^2 = 2 + r + t \text{ (por (1))}$$

$$> 2.$$

Logo, T é uma imersão. Portanto, um difeomorfismo local (pois T é de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2). Daí, a imagem T é um aberto. Agora iremos verificar que T também é fechada.

Seja $T(x_i, y_i) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^2$, se $\{T(x_i, y_i)\}$ é uma sequência de Cauchy, então $\{(x_i, y_i)\}$ é também uma sequência de Cauchy, pois T aumenta distâncias, portanto $\{(x_i, y_i)\} \rightarrow \beta \in \mathbb{R}^2$, daí:

$\alpha = \lim_i T((x_i, y_i)) = T(\lim_i (x_i, y_i)) = T(\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $T(\mathbb{R}^2)$ contém todos seus pontos aderentes.

Portanto, T é um difeomorfismo global.

Denotaremos a aplicação inversa T^{-1} por $(\xi, \eta) \rightarrow (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, cuja matriz jacobiana é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2+r+t} \begin{bmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+s \end{bmatrix}$$

Agora definamos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$\begin{aligned}
F(\xi, \eta) &= (U(\xi, \eta), V(\xi, \eta)) = (x - p, -y + q) \\
&= (x(\xi, \eta) - p(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), -y(\xi, \eta) + q(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)))
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2+r+t} [1+t - r \cdot (1+t) - s \cdot (-s)] \\
&= \frac{1+t-r-r \cdot t + s^2}{2+r+t} \\
&= \frac{t-r}{2+r+t}
\end{aligned}$$

Da mesma forma descobrimos que:

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{t-r}{2+r+t} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{2s}{2+r+t} = -\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

Portanto, (U, V) satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, então a aplicação $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por:

$$F(\xi + i\eta) = U(\xi, \eta) + iV(\xi, \eta) = x - p + i(-y + q)$$

é analítica complexa, e para a derivada complexa F' temos que:

$$\begin{aligned}
F'(\xi + i\eta) &= \frac{\partial U}{\partial \xi} + i \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \quad (2) \\
&= \frac{t-r}{2+r+t} + i \cdot \frac{2s}{2+r+t}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 |F'(\xi + i.\eta)|^2 &= \frac{(t-r)^2}{(2+r+t)^2} + \frac{4s^2}{(2+r+t)^2} \\
 &= \frac{(t-r)^2 + 4.r.t - 4}{(2+r+t)^2} \quad (\text{por (1)}) \\
 &= \frac{(t+r)^2 - 4}{(2+r+t)^2} \\
 &= \frac{(t+r+2).(t+r-2)}{(2+r+t)^2} = \frac{-2+r+t}{2+r+t}
 \end{aligned}$$

Disto, temos que:

$$1 - |F'(\xi + i\eta)|^2 = \frac{4}{2+r+t} > 0 \therefore (3)$$

$$|F'(\xi + i\eta)| < 1$$

Portanto, F' é limitada, pelo teorema 4.6.1 F' também é analítica sobre \mathbb{C} , logo pelo teorema de Liouville 4.6.2 F' é constante.

Mas, pelas equações (2) e (3) podemos resolver r, s, t em termos de F' :

$$s = \frac{2+r+t}{2} . ImF' = \frac{2.ImF'}{1-|F'|^2}$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} t-r = \frac{4.ReF'}{1-|F'|^2} \\ t+r = \frac{4}{1-|F'|^2} - 2 \end{array} \right. \therefore$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \text{Re}F'}{1 - |F'|^2} + \frac{4}{1 - |F'|^2} - 2 \right) \\ r = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{1 - |F'|^2} - 2 - \frac{4 \cdot \text{Re}F'}{1 - |F'|^2} \right) \end{cases}$$

Sendo F' constante, temos que r, s, t também são constantes, portanto

$$\text{i) } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = r, \text{ r constante,}$$

Logo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = r \cdot x + f(y), \text{ com f uma função apenas de y,}$$

$$\text{ii) } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = s, \text{ s constante,}$$

Por i), ii) temos que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = s, \text{ com s constante,}$$

Logo:

$f(y) = s \cdot y + c_1$, com c_1 uma função que não depende nem de x nem de y . Portanto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = r \cdot x + s \cdot y + c_1, \text{ com } c_1 \text{ uma constante. (4)}$$

Logo:

Usando t , podemos concluir de forma análoga que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = t \cdot y + s \cdot x + c_3, \text{ com } c_3 \text{ uma constante. (5)}$$

Logo, por (4), temos: $\phi(x, y) = r \cdot \frac{x^2}{2} + s \cdot y \cdot x + c_1 \cdot x + c_2(y)$

Derivando este última com respeito à y e considerando (5), temos:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = s \cdot x + \frac{\partial c_2(y)}{\partial y} = t \cdot y + s \cdot x + c_3, \text{ logo:}$$

$$\frac{\partial c_2(y)}{\partial y} = t \cdot y + c_3.$$

Daí

$$c_2(y) = t \cdot \frac{y^2}{2} + c_3 \cdot y + c_4, \text{ com } c_4 \text{ constante.}$$

Portanto:

$$\phi(x, y) = r \cdot \frac{x^2}{2} + s \cdot y \cdot x + c_1 \cdot x + t \cdot \frac{y^2}{2} + c_3 \cdot y + c_4 \text{ com } r, s, t, c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ constantes reais.}$$

■

Proposição 4.6.1 ([8]) *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo irrotacional, ou seja, $\text{rot}F = 0$, se U é aberto e estrelado, então F é conservativo.*

Iremos admitir que M é simplesmente conexa. Caso não seja passamos ao seu recobrimento universal. O teorema 2.2.5 garante que M , com a métrica induzida pelo recobrimento, é isométrico à \mathbb{R}^2 , estando este com a métrica usual. Em outros termos, iremos considerar uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, onde \mathbb{R}^2 está munido com a métrica $dx \otimes dx + dy \otimes dy$, e \mathbb{H}^2 com a métrica de curvatura constante -1.

Sejam l_{ij} os coeficientes da segunda forma fundamental II_f :

$$II_f = l_{11}dx \otimes dx + l_{12}dx \otimes dy + l_{21}dy \otimes dx + l_{22}dy \otimes dy.$$

Seja, $\{e_i\}_{i=1}^2$ base ortonormal de $T_p\mathbb{R}^2$. Na equação de Gauss 2.6, tomando $X = Z = e_1$, $Y = W = e_2$, obtemos

$$(6) \quad l_{11} \cdot l_{22} - l_{21}^2 = 1$$

Consideremos agora as equações de Codazzi em espaços de curvatura constante dada por 2.13. Todos os coeficientes de Christoffel nulos em \mathbb{R}^2 $\nabla_{e_i} e_j = 0, \forall i, j \in \{1, 2\}$. Assim, tomemos $X = e_1$, $Y = e_2$ e

i) $Z = X$

$$0 = X(l_{21}) - Y(l_{11}) \therefore$$

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial x} = \frac{\partial l_{11}}{\partial y} \quad (7)$$

ii) $Z = Y$

$$0 = X(l_{22}) - Y(l_{12}) \therefore$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial x} = \frac{\partial l_{12}}{\partial y} \quad (8)$$

Definamos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $F(x, y) = (l_{12}(x, y), l_{22}(x, y))$, temos que este campo é irrotacional, pois por (8) $\frac{\partial l_{22}}{\partial x} = \frac{\partial l_{12}}{\partial y}$, e sendo \mathbb{R}^2 um aberto estrelado a proposição 4.6.1 garante que F admite um potencial, ou seja, existe $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $F = \text{grad}\alpha$, onde $\text{grad}\alpha$ é o gradiente de α , ou seja

Existe uma função $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , tais que:

$$(a) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = l_{12}, \quad (b) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = l_{22}$$

De forma análoga por (7) se verifica que existe uma função $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , tais que:

$$(c) \frac{\partial \beta}{\partial x} = l_{12}, \quad (d) \frac{\partial \beta}{\partial y} = l_{11}$$

Usando um mesmo argumento acima, de (a) e (c), também podemos afirmar que existe uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \beta$$

De (b) e (c) temos que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = l_{11}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = l_{22}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = l_{12}$$

Logo da equação (6) obtemos:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 = 1$$

Aplicando o Teorema de Jörges a nossa ϕ , temos que os l_{ij} são constantes. Sendo, II_f simétrica, podemos assumir que $l_{12} = l_{21} = 0$, pois aplicação normal de Gauss é auto-adjunta, logo pelo teorema espectral existe uma base ortonormal, tal que $l_{12} = l_{21} = 0$, $l_{11} = k_1$, $l_{22} = k_2$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais da superfície imersa $f(\mathbb{R}^2)$, e $k_1 \cdot k_2 = 1$. Pela proposição 2.2.12 temos que a imersão f é determinada, a menos de um isometria de \mathbb{H}^3 , pelo par $\{k_1, k_2\}$, com $k_1, k_2 > 0$. Devemos encontrar uma imersão para cada par $\{k_1, k_2\}$ com $k_1 \cdot k_2 = 1$.

Vejam os casos

Primeiramente se $k_1 = k_2 = 1$, todos os pontos são umbílicos, logo a superfície é uma horosfera.

Para analisar os outros casos, iremos considerar o modelo do semi-espço superior de Poincaré para \mathbb{H}^3 .

Iremos verificar agora que a menos de uma isometria do espaço ambiente \mathbb{H}^3 , existe apenas uma família de imersões, do plano \mathbb{R}^2 em \mathbb{H}^3 , sendo essa imersão isométrica.

Considere a parametrização para o cone:

$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$, dada por:

$X(\rho, \varphi) = \rho(\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\varphi, \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\varphi, \text{cos}\theta)$, onde θ é o ângulo formado pelas geratrizes do cone e o eixo z .

Agora será visto como calcular a distância em \mathbb{H}^3 entre dois pontos que não estão sobre uma mesma geodésica vertical. Sejam dois pontos P, Q no espaço hiperbólico que não estão sobre uma mesma reta perpendicular a $\partial\mathbb{H}^3$. Como as únicas geodésicas de \mathbb{H}^n são estas retas e semi-círcunferências centradas no plano $\partial\mathbb{H}^3$, sobra apenas a possibilidade

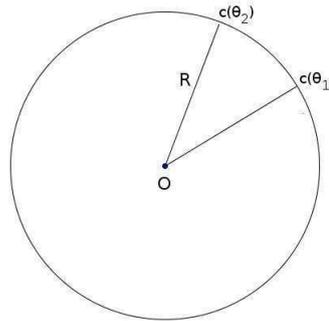


Figura 4.2: Distancia hiperbólica

de conectarmos os dois pontos por meio de um arco de círculo. A circunferência Γ está em um plano bi-dimensional. Logo, podemos supor sem perda de generalidade que seus pontos estão no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , ou seja num plano contendo a direção vertical. Seja $O = (a, 0)$ o centro de Γ e R seu raio, como na figura 4.1. Considere a parametrização $c(t) = (a + R \cdot \cos t, R \cdot \sin t)$ para Γ . Façamos $P = c(\theta_1)$, $Q = c(\theta_2)$. Denotando $L_{\{c(\theta_1), c(\theta_2)\}}$ como sendo o comprimento de $c(\theta_1)$, $c(\theta_2)$ ao longo da circunferência Γ , temos

$$L_{\{c(\theta_1), c(\theta_2)\}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |c'(t)| dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |(-R \cdot \sin t, R \cdot \cos t)| dt =$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\frac{(-R \cdot \cos t)^2 + (R \cdot \sin t)^2}{(R \cdot \sin t)^2}} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin t} dt = \ln |csc t - ctgt|_{\theta_1}^{\theta_2} \therefore$$

$$d(P, Q) = L_{\{c(\theta_1), c(\theta_2)\}} = \ln |csc t - ctgt|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (4.2)$$

Em particular considere a distância entre pontos do cone P ao eixo z . Neste caso, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$. Assim,

$$d(P, z) = \ln |csc t - ctgt|_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \left| csc \frac{\pi}{2} - ctg \frac{\pi}{2} \right| - \ln |csc \theta_1 - ctg \theta_1| =$$

$$\begin{aligned} \ln |1 - 0| + \ln \left| \frac{1}{\csc\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_1} \right| &= \ln \left| \frac{1}{\csc(\frac{\pi}{2} - \theta) - \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \theta)} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{1}{\sec\theta - \operatorname{tg}\theta} \right| = \ln \left| \frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} \right| (\text{constante}). \end{aligned}$$

Portanto, o cone de \mathbb{H}^3 é equivalente a um cilindro de \mathbb{R}^3 com a métrica euclideana.

Computemos as curvaturas principais do cone.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = (\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \rho(-\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} = \rho(-\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle} = \sqrt{\frac{\rho^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2 \cdot \cos^2\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

Assim:

$$N = \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\|} = \rho \cdot \cos\theta (-\cos\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta).$$

A matriz da matriz da aplicação de Gauss é:

$$\left[\begin{array}{cc} -\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} N & -\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} N \end{array} \right]_{\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}} = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right].$$

Calculemos $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} N$.

$$\begin{aligned} \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} N &= \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} \rho \cdot \cos\theta (-\cos\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cos\theta) (-\cos\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) + (\rho \cdot \cos\theta) \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (-\cos\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) = \\ &= (-\cos^2\theta \cdot \cos\varphi, -\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + (\rho \cdot \cos\theta) \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (-\cos\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Veamos que:

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (-\cos\theta \cdot \cos\varphi, -\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) =$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (-\cos\theta.\cos\varphi.e_1 - \cos\theta.\text{sen}\varphi.e_2 + \text{sen}\theta.e_3) \\
&= \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (-\cos\theta.\cos\varphi.e_1) + \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (-\cos\theta.\text{sen}\varphi.e_2) + \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (\text{sen}\theta.e_3) = \\
&= -\cos\theta.\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (\cos\varphi).e_1 - \cos\theta.\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} (\text{sen}\varphi).e_2 + \text{sen}\theta.\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} .e_3 \\
&= -\cos\theta. \left[\frac{\partial \cos\varphi}{\partial \rho} e_1 + \cos\varphi \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} e_1 \right] - \cos\theta. \left[\frac{\partial \text{sen}\varphi}{\partial \rho} e_2 + \text{sen}\varphi \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} e_2 \right] + \text{sen}\theta.\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} .e_3 = \\
&= -\cos\theta.\cos\varphi \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} e_1 - \cos\theta.\text{sen}\varphi \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} e_2 + \text{sen}\theta.\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} .e_3 = \\
&= -\cos\theta.\cos\varphi \nabla'_{\text{sen}\theta.\cos\varphi e_1 + \text{sen}\theta.\text{sen}\varphi e_2 + \cos\theta e_3} e_1 - \cos\theta.\text{sen}\varphi \nabla'_{\text{sen}\theta.\cos\varphi e_1 + \text{sen}\theta.\text{sen}\varphi e_2 + \cos\theta e_3} e_2 + \\
&\quad \text{sen}\theta.\nabla'_{\text{sen}\theta.\cos\varphi e_1 + \text{sen}\theta.\text{sen}\varphi e_2 + \cos\theta e_3} .e_3 = \\
&= -\cos\theta.\text{sen}\theta \cos^2\varphi.\nabla'_{e_1} e_1 - \cos\theta.\text{sen}\theta \cos\varphi.\text{sen}\varphi \nabla'_{e_2} e_1 - \cos^2\theta.\cos\varphi.\nabla'_{e_3} e_1 \\
&\quad -\cos\theta.\text{sen}\theta \cos\varphi.\text{sen}\varphi \nabla'_{e_1} e_2 - \cos\theta.\text{sen}\theta.\text{sen}^2\varphi \nabla'_{e_2} e_2 - \cos^2\theta.\text{sen}\varphi.\nabla'_{e_3} e_2 \\
&\quad \text{sen}^2\theta \cos\varphi.\nabla'_{e_1} e_3 + \text{sen}^2\theta.\text{sen}\varphi \nabla'_{e_2} e_3 + \cos\theta.\text{sen}\theta.\nabla'_{e_3} e_3
\end{aligned}$$

Temos que:

$$\nabla'_{e_1} e_1 = \Gamma_{11}^1 e_1 + \Gamma_{11}^2 e_2 + \Gamma_{11}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_1} e_2 = \Gamma_{12}^1 e_1 + \Gamma_{12}^2 e_2 + \Gamma_{12}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_1} e_3 = \Gamma_{13}^1 e_1 + \Gamma_{13}^2 e_2 + \Gamma_{13}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_2} e_1 = \Gamma_{21}^1 e_1 + \Gamma_{21}^2 e_2 + \Gamma_{21}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_2} e_2 = \Gamma_{22}^1 e_1 + \Gamma_{22}^2 e_2 + \Gamma_{22}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_2} e_3 = \Gamma_{23}^1 e_1 + \Gamma_{23}^2 e_2 + \Gamma_{23}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_3} e_1 = \Gamma_{31}^1 e_1 + \Gamma_{31}^2 e_2 + \Gamma_{31}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_3} e_2 = \Gamma_{32}^1 e_1 + \Gamma_{32}^2 e_2 + \Gamma_{32}^3 e_3$$

$$\nabla'_{e_3} e_3 = \Gamma_{33}^1 e_1 + \Gamma_{33}^2 e_2 + \Gamma_{33}^3 e_3$$

Em \mathbb{H}^3 (Modelo do Semi-Espaço), tem-se que:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{\rho \cdot \cos\theta}, \quad \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{\rho \cdot \cos\theta}.$$

Portanto,

$$\nabla'_{e_1} e_1 = \frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} e_3$$

$$\nabla'_{e_1} e_2 = 0$$

$$\nabla'_{e_1} e_3 = -\frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} \cdot e_1$$

$$\nabla'_{e_2} e_1 = 0$$

$$\nabla'_{e_2} e_2 = \frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} \cdot e_3$$

$$\nabla'_{e_2} e_3 = -\frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} \cdot e_2$$

$$\nabla'_{e_3} e_1 = -\frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} \cdot e_1$$

$$\nabla'_{e_3} e_2 = -\frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} \cdot e_2$$

$$\nabla'_{e_3} e_3 = -\frac{1}{\rho \cdot \cos\theta} \cdot e_3$$

Daí:

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} N = -\cos^2\theta.\cos\varphi e_1 - \cos^2\theta.\sen\varphi e_2 + \cos\theta.\sen\theta e_3 - \cos\theta.\sen\theta.\cos^2\varphi.e_3 - \sen^2\theta.\cos\varphi.e_1 - \cos\theta.\sen\theta.\sen^2\varphi.e_3 - \sen^2\theta.\sen\varphi.e_2 + \cos^2\theta.\cos\varphi.e_1 + \cos^2\theta.\sen\varphi.e_2 - \cos\theta.\sen\theta.e_3$$

Portanto,

$$-\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} N = \sen\theta(\cos\varphi.\sen\theta, \sen\theta.\sen\varphi, \cos\theta) = \sen\theta.\frac{\partial}{\partial \rho}$$

Por um cálculo análogo podemos concluir que:

$$-\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \rho}} N = \frac{1}{\sen\theta}.\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Assim, as curvaturas principais do Cone no espaço hiperbólico, são:

$$k_1 = \sen\theta, \quad k_2 = \frac{1}{\sen\theta}.$$

onde θ é o ângulo entre o eixo z e as geratrizes.

Logo, pela proposição 2.2.12, a menos de isometria de \mathbb{H}^3 , a imersão f está determinada.

O cone é completo. De fato, basta perceber que o cone é $f^{-1}(0)$, onde f é a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - tg^2\beta.z^2$, com $z > 0$ e β o ângulo euclideo entre o eixo z e as arestas laterais do cone (note que o cone é determinado por β). Portanto, o cone é fechado em \mathbb{H}^3 e pela proposição 2.2.15 podemos afirmar que também é completo.

Note que para o caso de uma superfície completa qualquer M , temos que se i é uma imersão de M em \mathbb{H}^3 , então $i(M)$ é o cone a menos de isometria. Pois, pelo teorema de Cartan podemos passar ao recobrimento universal de \mathbb{R}^2 e este pela discussão acima é um cone em \mathbb{H}^3 . Assim, sendo M completa, temos que $i(M)$ é fechado, por regularidade é aberto, sendo o cone conexo temos a validade da nossa afirmação.

Portanto, provamos:

Teorema 4.6.4 (Volkov e Vladmirova, Sasaki) *Uma superfície completa em \mathbb{H}^3 com curvatura $K_{ext} = 1$ ou é uma horosfera ou um conjunto de pontos equidistantes de uma geodésica. Pois, uma isometria de \mathbb{H}^3 leva o eixo vertical em uma geodésica γ e o cone nos pontos equidistantes de γ .*

4.7 $K_{ext} = 0$

As superfícies desenvolvíveis ($K_{ext} \equiv 0$, regradas) têm um papel de destaque na geometria diferencial clássica. Por exemplo, no capítulo 1 obtvemos uma caracterização para superfícies desenvolvíveis completas em \mathbb{R}^3 .

Em [12] tem-se uma resposta quase idêntica que para o \mathbb{R}^3 para a pergunta seguinte pergunta. Quais são os tipos de superfícies desenvolvíveis em \mathbb{H}^3 ?:

Teorema 4.7.1 *As superfícies desenvolvíveis de \mathbb{H}^3 consistem de porções de Cones, Superfícies tangentes e cilindros geodésicos.*

Já em [13] temos uma caracterização das superfícies flats de \mathbb{H}^3 :

Teorema 4.7.2 *Superfícies flats no espaço hiperbólico, necessariamente, são desenvolvíveis.*

Em 1969, Portnoy [12] provou que as superfícies completas flats de \mathbb{H}^3 são porções de cilindros geodésicos e Cones.

Cilindros Geodésicos em \mathbb{H}^3 são por definição superfícies obtidas ao "translarmos" paralelamente (no sentido de que os vetores tangentes formarem um campo de vetores paralelos) uma geodésica ao longo de uma curva fixa.

E os cones são superfícies obtidas como união de Geodésicas convergindo a um ponto em comum. Por exemplo, um hemisfério.

Num trabalho bem mais atual [6], publicado em 2010, o japonês Atsufumi Honda conseguiu introduzir uma fórmula de representação das superfícies desenvolvíveis de \mathbb{H}^3 em termos das curvas null, causal. Esta terminologia vem da Cosmologia, tendo a ver com o papel dos Cones da teoria da relatividade geral. Para ser mais preciso, uma curva no espaço hiperbólico (no modelo do hiperbolóide) é dita null se o seu vetor tangente tem sempre "norma" nula, ou seja, $V.V = 0$. É causal, se a "norma" de cada vetor tangente a curva é positiva.

4.8 Classificação de Superfícies de Revolução com $0 < K_{ext} < 1$

Para este caso será feita a classificação das Superfícies de Revolução.

Para isto iremos estabelecer a relação entre a distância hiperbólica r e a distância euclídeana d de um ponto ao eixo z . Daí, iremos expressar a métrica de uma superfície de revolução em termos da distância r .

A figura 4.3 guiará nosso raciocínio. Nesta o ponto P é o ponto do eixo z que dista r unidade do de um ponto B qualquer sobre \mathbb{H}^3 . Como já observamos antes, a geodésica minimizante conectando esses dois pontos P e B é um arco de uma semi-círcunferência, digamos de raio R , centrado em $\partial\mathbb{H}^3$.

Seja α o ângulo entre OP e OB . Na seção 4.6 vimos que $r = \ln \left| \frac{\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} \right|$. Assim, se considerarmos dois pontos quaisquer A e B em \mathbb{H}^3 a uma mesma altura h , ou seja a uma mesma distância do plano $x_3 = 0$, temos que $d'(A, B) = 2.r$. Para se convencer disto basta considerar que os dois pontos A e B sejam simétricos com relação ao eixo z , como ilustra a figura 4.3. Assim, a distância hiperbólica entre os pontos B e H é $|BH| = d$.

De $r = \ln \left| \frac{\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} \right|$, obtemos $\frac{\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} = e^r$. Daí,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1} = \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} = \operatorname{tgh}r.$$

Portanto,

$$d = R.\operatorname{sen}\alpha = R.\operatorname{tgh}r$$

Considere a superfície M de revolução obtida ao girarmos a curva parametrizada pelo comprimento de arco $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, dada por $\psi(s) = (d(s), 0, h(s))$, em torno de uma geodésica. No caso de \mathbb{H}^3 essa geodésica é um "eixo vertical". Admitamos sem perda de generalidade que este seja o eixo z .

Parametrizemos M da forma natural, $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que

$$\phi(\alpha, s) = (d(s)\cos\alpha, d(s)\operatorname{sen}\alpha, h(s))$$

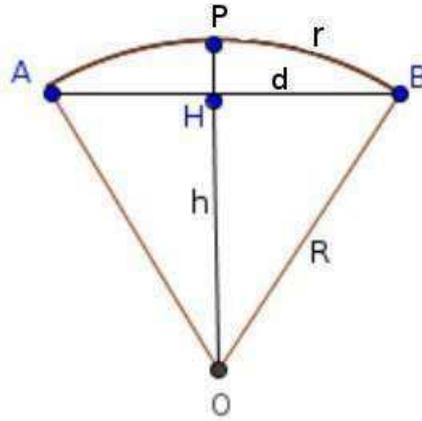


Figura 4.3: Comparação entre as distâncias

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = (-d(s)\text{sen}\alpha, d(s)\text{cos}\alpha, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = (d'(s)\text{cos}\alpha, d'(s)\text{sen}\alpha, h'(s))$$

Então os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\rangle = \left(\frac{d(s)}{h(s)} \right)^2 \quad (2)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = \frac{d'^2(s)(\text{cos}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + h'^2(s)}{h(s)^2} = \frac{d'^2(s) + h'^2(s)}{h(s)^2} = 1 \text{ (pois } \psi \text{ é p.c.a.)}.$$

Seja agora um ponto qualquer obtido após rotacionarmos a curva ψ em torno do eixo OZ . Temos que este ponto dista $d(s)$ euclidenamente desse eixo.

Usando a mesma idéia vista acima, temos:

$$tg\theta_0 = \frac{h(s)}{d(s)}$$

Usando a conclusão (1), obtemos

$$csch^2 r(s) = ctgh^2 r(s) - 1 = sec^2 \theta_0 - 1 = tg^2 \theta_0 = \left(\frac{h(s)}{d(s)} \right)^2$$

De (2) concluímos que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\rangle = senh^2 r(s)$$

Portanto, a primeira forma fundamental da superfície é:

$$I = senh^2 r(s) d\alpha \otimes d\alpha + 1.ds \otimes ds$$

Note que uma parametrização para esta superfície em termos da distância hiperbólica $r(s)$ seria:

$$\phi(\alpha, s) = d(s)(\cos\alpha, \sin\alpha, cschr(s))$$

A curvatura intrínseca desta superfície é dada por

$$\begin{aligned} K_{int} &= -\frac{1}{2\sqrt{E.G}} \cdot \left[\left(\frac{E_s}{\sqrt{E.G}} \right)_s + \left(\frac{G_\theta}{\sqrt{E.G}} \right)_\theta \right] = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot \left[\left(\frac{E_s}{\sqrt{E}} \right)_s \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E}} (\sqrt{E})_{ss} = -\frac{1}{senhr(s)} (senhr(s))_{ss} = -\frac{1}{senhr(s)} \cdot \frac{d^2 senhr(s)}{ds^2} \end{aligned}$$

Sendo $0 < K_{ext} < 1$, tem-se que $-1 < K_{int} < 0$. Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$, com $0 < c < 1$, tal que :

$$(3) \quad -c^2 = -\frac{1}{\operatorname{senhr}(s)} \cdot \frac{d^2 \operatorname{senhr}(s)}{ds^2}$$

Ou seja, temos a EDO linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2 \operatorname{senhr}(s)}{ds^2} = c^2 \cdot \operatorname{senhr}(s)$$

Lembrando que a solução geral da EDO $y''(s) - c^2 y(s) = 0$, com $c \in \mathbb{R}$ constante, pode ser dada da forma:

$$y(s) = \lambda_1 \cosh(cs) + \lambda_2 \sinh(cs), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{ constantes.} \quad (4.3)$$

Em outros termos

$$y(s) = m_1 e^{cs} + m_2 e^{-cs}, m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \text{ constantes.} \quad (4.4)$$

No caso da EDO 4.3, teremos:

$$\operatorname{senhr}(s) = \lambda_1 \cosh(cs) + \lambda_2 \sinh(cs), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes.} \quad (4.5)$$

Ou

$$\operatorname{senhr}(s) = m_1 e^{cs} + m_2 e^{-cs}, m_1, m_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes.}$$

Em suma podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.8.1 *Seja S uma superfície de revolução completa de curvatura constante $-1 < K_{int} < 0$ imersa em \mathbb{H}^3 . Então, uma parametrização de $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ para S é dada por*

$$\psi(\alpha, s) = d(s) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{cschr}(s)) \quad (4.6)$$

com $\operatorname{senhr}(s)$ obedecendo:

$$\operatorname{senhr}(s) = \lambda_1 \cosh(\sqrt{-K_{int}}s) + \lambda_2 \sinh(\sqrt{-K_{int}}s), \quad (4.7)$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{senhr}(s) = m_1 e^{cs} + m_2 e^{-cs}, m_1, m_2 \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

É claro que existem várias superfícies possíveis de acordo com a escolha de par de números λ_1, λ_2 ou o par de números m_1, m_2 .

Faremos algumas escolhas para ilustrar alguns exemplos.

I) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$:

Neste caso, teremos uma superfície parametrizada da forma:

$$\phi(\alpha, s) = d(s)(\cos\alpha, \sin\alpha, \operatorname{sech}(cs))$$

II) $m_1 = 1, m_2 = 0$:

Neste caso, teremos uma superfície parametrizada da forma:

$$\phi(\alpha, s) = d(s)(\cos\alpha, \sin\alpha, e^{-cs})$$

Vejam agora o caso $r = 0$. Nesses pontos necessariamente $h' = 0$.

Derivando a equação 4.5, obtemos

$$r' \cdot \operatorname{cosh}r = c(\lambda_1 \operatorname{senh}(cs) + \lambda_2 \operatorname{cosh}(cs)), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{ constantes.} \quad (4.9)$$

Supomos que para $s_0, r(s_0) = 0$.

Sabemos que $x = z \cdot \operatorname{senhr}$, $(x')^2 + (z')^2 = z^2$.

Portanto,

$$\operatorname{cosh}^2 r \cdot (z')^2 + (r')^2 \cdot \operatorname{cosh}^2 r \cdot z^2 + 2 \cdot z \cdot z' \cdot r' \cdot \operatorname{senhr} \cdot \operatorname{cosh}r = z^2$$

Ou seja

$$\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + 2 \cdot r' \cdot \operatorname{tgh}r \left(\frac{z'}{z}\right) + \left((r')^2 - \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 r}\right) = 0$$

Daí, obtemos

$$\frac{z'}{z} = \frac{-r' \cdot \operatorname{senhr}(s) \pm \sqrt{1 - (r')^2}}{\operatorname{cosh}r(s)} \quad (4)$$

Se $r(s_0) = 0$ e $z'(s_0) = 0$, temos $(r'(s_0))^2 = 1$.

Iremos supor que $r'(s_0) = +1$. O caso $r'(s_0) = -1$ é obtido revertendo-se a orientação da curva perfil, gerando a mesma superfície.

De 4.5 e 4.9, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \cosh(cs_0) + \lambda_2 \cdot \sinh(cs_0) &= 0 \\ c \cdot (\lambda_1 \cdot \sinh(cs_0) + \lambda_2 \cdot \cosh(cs_0)) &= 1.\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{\sinh(cs_0)}{c} \\ \lambda_2 &= \frac{\cosh(cs_0)}{c}\end{aligned}$$

A menos de uma mudança de translação no parâmetro (escolha de ponto inicial), podemos supor que $s_0 = 0$, obtendo

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{c}\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}\sinh r &= \frac{\sinh(cs)}{c} \\ r' &= \frac{\cosh(cs)}{\cosh r} > 0\end{aligned}$$

Da equação (4) sendo $z_0 = z(s_0)$, obtemos

$$z = \frac{z_0}{\cosh r(s)} \cdot e^{\pm \int \frac{\sqrt{1 - (r')^2}}{\cosh r} ds}$$

Calculemos a integral $\pm \int \frac{\sqrt{1 - (r')^2}}{\cosh r} ds$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (r')^2} &= \frac{1 - c^2}{c} \cdot \frac{|\sinh(cs)|}{\sqrt{1 + \frac{\sinh^2(cs)}{c^2}}} = \\ &= \begin{cases} \sqrt{1 - c^2} \cdot \frac{\sinh(cs)}{c^2 + \sinh^2(cs)}, & s > 0 \\ -\sqrt{1 - c^2} \cdot \frac{\sinh(cs)}{c^2 + \sinh^2(cs)}, & s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\cosh r = \sqrt{1 + \frac{\sinh^2(cs)}{c^2}}$$

Vejamos a integral $\sqrt{1 - c^2} \cdot \int \frac{\sinh(cs)}{c^2 + \sinh^2(cs)} ds$. Fazendo $u = \cosh(cs)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - c^2} \int \frac{du}{c^2 + u^2 - 1} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u - \sqrt{1 - c^2}} - \frac{1}{u + \sqrt{1 - c^2}} \right) du = \\ \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{u - \sqrt{1 - c^2}}{u + \sqrt{1 - c^2}} \right) &= \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{\cosh(cs) - \sqrt{1 - c^2}}{\cosh(cs) + \sqrt{1 - c^2}} \right). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{cases} z_1 = \frac{cz_0}{\sqrt{c^2 + \sinh^2(cs)}} \cdot \sqrt{\frac{(\cosh(cs) - \sqrt{1 - c^2}) \cdot (1 + \sqrt{1 - c^2})}{(\cosh(cs) + \sqrt{1 - c^2}) \cdot (1 - \sqrt{1 - c^2})}} \\ z_2 = \frac{cz_0}{\sqrt{c^2 + \sinh^2(cs)}} \cdot \sqrt{\frac{(\cosh(cs) + \sqrt{1 - c^2}) \cdot (1 - \sqrt{1 - c^2})}{(\cosh(cs) - \sqrt{1 - c^2}) \cdot (1 + \sqrt{1 - c^2})}} \end{cases}$$

são as duas superfícies obtidas.

Observação 4.8.1 *As coordenadas x e y ficam determinadas por*

$$x = \cos\alpha \cdot \frac{\sinh(cs)}{c} z, \quad y = \sin\alpha \cdot \frac{\sinh(cs)}{c} z$$

As expressões para z podem ser simplificadas:

$$z_1 = cz_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{1 - \sqrt{1 - c^2}}} \cdot \frac{1}{\cosh(cs) + \sqrt{1 - c^2}}$$

$$z_2 = cz_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{1 + \sqrt{1 - c^2}}} \cdot \frac{1}{\cosh(cs) - \sqrt{1 - c^2}}$$

Note que $z \leq z_0$ em ambos os casos.

Analisemo o caso z_1 . A partir de $x^2 + y^2 = \frac{\sinh^2(cs)}{c^2} z^2$, obtemos

$$x^2 + y^2 = (z_0 - z)(z + A), \text{ onde } A = z_0 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c} \right)^2 < z_0$$

Daí

$$x^2 + y^2 \left(z - \frac{z_0 - A}{2} \right)^2 = \left(\frac{z_0 + A}{2} \right)^2.$$

Ou seja, temos uma calota esférica centrada em $(0, 0, \frac{z_0 - A}{2})$ de raio $\frac{z_0 + A}{2}$.

Conclusão: Obtemos calotas esféricas já previstas na seção 4.3.2.

O caso z_2 é análogo. Neste caso $A = z_0 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c} \right)^2 > z_0$.

4.9 Teorema Principal

Pelo o que foi visto no decorrer deste capítulo podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.9.1 Segundo o valor da curvatura intrínseca as possibilidades para uma superfície completa imersa em \mathbb{H}^3 são:

Não existe, caso $K_{int} < -1$.

São formadas por porções de Cones e Cilindros Geodésicos, caso $K_{int} \equiv -1$.

Para superfícies de rotação, temos uma família de exemplos dada pela equação 4.7 (ou pela equação 4.8), além das calotas esféricas(hiperesferas), caso $-1 < K_{int} < 0$.

Horosferas ou Superfícies equidistantes de uma geodésica(a menos de isometrias), caso $K_{int} = 0$.

Esferas Geodésicas, caso $K_{int} > 0$.

A figura seguinte resume o teorema acima:

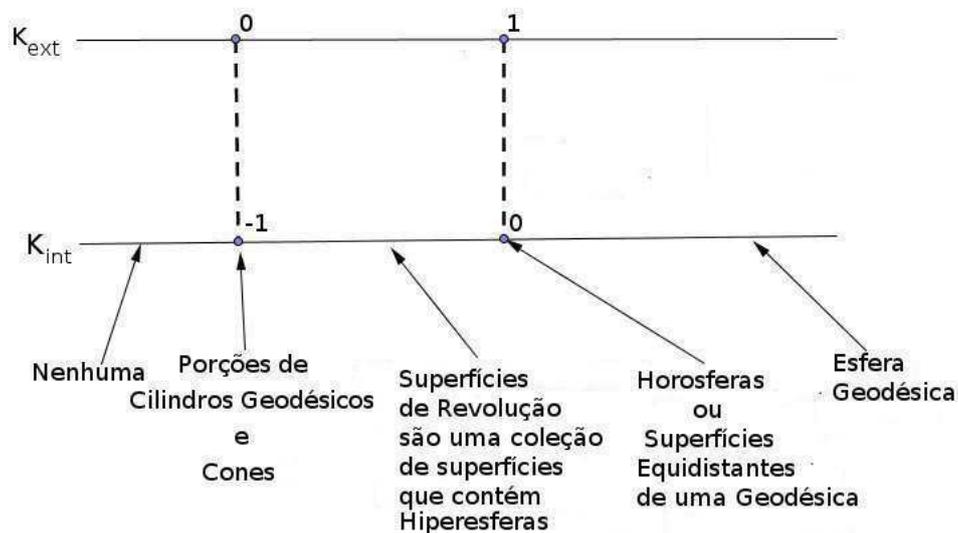


Figura 4.4: Classificação em \mathbb{H}^3

Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L.V., *An Introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 2.ed. New York: McGraw-Will(1966).
- [2] ARAÚJO, P.V., *Geometria Diferencial*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1ª edição (2004).
- [3] CARMO, M., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Projeto Euclides, IMPA, 2ª edição (2005).
- [4] CARMO, M., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 4ª edição (2008).
- [5] Gálvez, J.A.; Martínez, A.; Milán, F. *Flat surfaces in the hyperbolic 3-space*, Math. Ann. 316, 419-435 (2000).
- [6] HONDA, A. *Isometric Immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, eprint arXiv:1009.3994, (2010).
- [7] LIMA, E.L., *Álgebra Linear*, Projeto Euclides, IMPA, 7ª edição (2006).
- [8] LEE, J., *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2000).
- [9] LIMA, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, 4ª edição (2007).
- [10] LIMA, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição (2006).
- [11] MASSEY, W. S., *Surfaces of Gaussian Curvature Zero in Euclidean 3-Space*, Tohoku Mathematical Journal(2) Vol. 14, Number 1 (1962), 73-79.
- [12] PORTNOY, E. *Developable Surfaces in Hyperbolic Space*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.57, Number 1, (1975).

- [13] ROZENFELD, B. A. *Neeuklidovi Prostranstva*, Moscow, (1969).
- [14] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.I, Brandeis University, (1970). Reeditada por Publish or Perish, Inc.
- [15] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.II, Brandeis University, (1970). Reeditada por Publish or Perish, Inc.
- [16] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.III, Brandeis University, (1970). Reeditada por Publish or Perish, Inc.
- [17] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.IV, Brandeis University, (1970). Reeditada por Publish or Perish, Inc.