



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria BKK e a Solução do Sexto Problema de Smale no Caso $N = 4$

Marcelo Pedro dos Santos

Recife, 18 de Dezembro 2009

Marcelo Pedro dos Santos

Teoria BKK e a Solução do Sexto Problema de Smale no Caso $N = 4$

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da
Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro

Recife, 18 de Dezembro de 2009

Santos, Marcelo Pedro dos
Teoria BKK e a solução do sexto problema de Smale no
caso $N = 4$ / Marcelo Pedro dos Santos. - Recife: O Autor, 2010.
97 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Matemática – Mecânica Celeste. 2. Mecânica celeste. I.
Título.

512.7

CDD (22. ed.)

MEI201 – 0120

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:



Eduardo Shirlippe Goes Leandro, UFPE

Orientador



Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE



Luis Fernando de Osório Mello, UNIFEI

**TEORIA BKK E A SOLUÇÃO DO SEXTO PROBLEMA
DE SMALE NO CASO $N=4$**

Por

Marcelo Pedro dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL*

Dezembro – 2009

À Deus e a minha família.

Agradecimentos

Primeiro gostaria de agradecer à Deus, por permitir que eu alcançasse esta vitória em minha vida, ao concretizar o sonho de obter o grau de mestre em Matemática.

Quando se obtém uma vitória desta, não se pode esquecer que a vitória não é só sua, mas também uma vitória de todos aqueles que lutaram com você, te ajudaram e acreditaram em você.

Sendo assim quero expressar aqui meus agradecimentos a minha família que sempre me apoiou, a minha mãe por sua força, e a minha namorada Bárbara sempre presente nos momentos mais difíceis.

Agradeço também aos meus amigos pela ajuda; à Adercalos pelas úteis observações na preparação da apresentação deste trabalho, à Lucas Rezende pela ajuda nos detalhes da digitação, à Crislene Paixão por fazer as figuras contidas neste trabalho e, à Zaqueu e Thiago Dias pelas úteis dicas de Geometria Álgebra, e em especial à Arlucio Viana, Halley Gomes, Renato Teixeira e Thiago Dias; pelo companheirismo durante as disciplinas que cursei.

Agradeço aos professores Francesco Russo, Lucas Ferreira, Francisco Brito, Fernando Cardoso, Pedro Hinojosa e Fagner Dias pelos conhecimentos transmitidos durante as disciplinas, agradeço também aos professores Sergio Santa Cruz e Cesar Castilho pelo incentivo e apoio que me deram para que eu ingressa-se no mestrado em Matemática, sinceramente sou muito grato por isso. Pelo incentivo apoio e amizade devo agradecer também a uma pessoa que foi muito importante nesta caminhada, o professor Severino Bezerra. Agradeço ao meu professor Francisco Expedito de Barros, “Guri”, pela amizade e incentivo em estudar Matemática.

Agradeço ao meu orientador Eduardo Leandro por sua paciência e presteza com que

me orientou, e pelos conhecimentos repassados durante as disciplinas e a orientação.

Agradeço a funcionária Tânia por sua preocupação, atenção e simpatia, durante todo o meu mestrado.

Enfim agradeço a todos que contribuíram para que este momento torna-se possível em minha vida.

Resumo

O problema de finitude para equilíbrios relativos de n -corpos foi proposto por J. Chazy e A. Wintner, e foi listado por Smale como problema 6 em sua lista de problemas matemáticos para este século. Este problema foi resolvido para o caso $n = 4$, por Richard Moeckel e Marshal Hampton, que obtiveram o seguinte resultado: *Se as massas são positivas, então existe somente um número finito de classes de equivalência dos equilíbrios relativos para o problema Newtoniano dos quatro corpos.*

Para obter esse resultado, foram usadas algumas idéias de geometria algébrica que fornecem critérios testáveis para determinar se o número de soluções de um dado sistema de equações polinomiais é finito. Tais critérios são de um tipo que podem ser testados computacionalmente com exatidão. Para isso é usada a teoria BKK, que relaciona equações polinomiais com polítopos de Newton e com um invariante geométrico dos polítopos chamado volume misto que dá um limite superior para o número de soluções do sistema.

Para equilíbrios relativos existem dois conjuntos de equações que são polinômios cujas variáveis são as distâncias mútuas entre os corpos e os coeficientes são as massas, essas equações são conhecidas como equações de Albouy-Chenciner e equações de Dziobek. A análise dessas equações através da teoria BKK leva ao resultado de finitude, usando o teorema de Bernstein obtêm-se que o número de equilíbrios relativos é no máximo 8472.

Palavras-Chave: Equilíbrio relativo, Equações de Albouy-Chenciner, Equações de Dziobek, Polítopos de Newton, Teorema de Bernstein, Finitude.

Abstract

The problem of finitude for relative equilibrium of n -body problem was proposed by J. Chazy and A. Wintner, and listed by Smale as problem 6 on his list of problems for this century. This problem was solved in the case $n=4$ by Richard Moeckel and Marshal Hampton, that obtained the follow result: If the masses are positive, then there are only a finite number of equivalence classes of relative equilibria for the Newtonian four-body problem.

In order to obtain this result, was used some ideas of algebraic geometry which give testable criteria for to determine if the number of solutions of a given system of polynomials equations is finite. These criteria are of an kind that can be computable with exactness. In order to this, is used BKK theory, which relate polynomials equations with Newton polytopes and an geometric invariant of the polytopes called mixed volume which gives a upper bound for the number of solutions of the system.

For relative equilibria there are two sets of equations that are polynomials which variables are the mutuals distances between the bodies and the coefficients are the masses, these equations are know as the Albouy-Chenciner equations and Dziobek equations. The analyze of that equations through BKK theory lead to the result of finitude, by using the Bernstein theorem to get that the number of solutions is at most 8472.

Keywords: Relative Equilibrium, Albouy-Chenciner equations, Dziobek equations, Newton Polytopes, Bernstein theorem, Finitude.

“Quando os problemas são muito grandes, os desafios tornam-se apaixonantes.”

(Dom Helder Câmara)

Sumário

Introdução	11
1 Finitude de Equilíbrios Relativos no Problema dos Quatro Corpos	13
1.1 Preliminares	13
1.2 Distâncias mútuas para equilíbrios relativos	17
1.2.1 As equações de Albouy-Chenciner	18
1.2.2 Equações de Dziobek	25
2 Séries de Puiseux e Sistemas de Equações Polinomiais	34
2.1 O Corpo das Séries De Puiseux	34
2.1.1 O Corpo das Séries de Potências Formais	34
2.1.2 O Corpo das Séries de Puiseux	36
2.2 Séries de Puiseux e Sistemas Polinomiais	37
3 Teoria BKK	48
3.1 Geometria dos Politopos	48
3.1.1 Soma de Minkowski	54
3.2 Politopos de Newton e o Teorema de Bernstein	57

3.3	Leques	61
4	Análise das Equações Reduzidas	64
4.1	O Problema Newtoniano de Quatro Corpos	65
4.2	Cálculo do Politopo Soma de Minkowski	66
4.2.1	Sistemas Reduzidos	70
4.3	Análise dos casos excepcionais	77
4.3.1	Faceta 22	77
4.3.2	Faceta 33	79
4.4	Limites Superiores e Limites Inferiores	80
4.4.1	Limite Inferior	80
4.4.2	Limite Superior	82
	Apêndice	86
	Bibliografia	93

Introdução

Suponha n partículas pontuais com massa $m_i > 0$ e posições $x_i \in \mathbb{R}^d$, se movendo de acordo com as leis do movimento de Newton

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde r_{ij} é a distância entre x_i e x_j .

Um equilíbrio relativo é uma solução da equação anterior em $\mathbb{R}^2$, da forma $x_i(t) = R(t)x_i(0)$ onde $R(t)$ é a rotação uniforme em torno de algum ponto $c \in \mathbb{R}^2$. Dois equilíbrios relativos são considerados equivalentes se um deles pode ser obtido do outro por uma rotação, translação ou dilatação do plano.

O problema da finitude do número de classes de equivalência de equilíbrios relativos de n -corpos é um importante problema da Mecânica Celeste que foi proposto por Chazy [8] e Wintner [52], entretanto mesmo depois de várias décadas o problema ainda não foi resolvido totalmente. Em 1998, Smale [49] relacionou este como o problema 6 em sua lista de problemas matemáticos para este século. Na formulação de Smale: “No problema dos n -corpos da mecânica celeste, é finito o número de equilíbrios relativos, para qualquer escolha de números reais positivos $m_1, \dots, m_n$ como massas?”

O objetivo deste trabalho é mostrar como esse problema foi resolvido no caso $n = 4$. Neste caso, existem no mínimo 32 classes de equilíbrios relativos e no máximo 8472 classes de equivalência. Para obter tais resultados foi usada a Teoria BKK. Os resultados desta teoria tem sido importante para resolver certas questões de finitude no campo da Mecânica Celeste. Por exemplo, em [38], é provado a conjectura de Saari para o caso de três corpos no plano usando Teoria BKK. Também, usando a Teoria BKK foi possível mostrar a finitude no problema planar restrito de 4-corpos [27].

O problema da finitude de equilíbrios relativos no caso de três corpos é bem conhecido. Existem cinco classes de equivalência de equilíbrios relativos. Dois são triângulos equiláteros descobertos por Lagrange [28] e os outros três são configurações colineares encontradas por Euler [15]. As soluções dos triângulos equiláteros de Lagrange se generalizam para tetraedros para o problema de quatro corpos e para símlices regulares de n -corpos em dimensão $n - 1$ [43]. Para o caso de configurações colineares, Moulton encontrou o número exato de equilíbrios relativos para o caso geral [39]. Existem ainda resultados de finitude para algumas famílias de configurações simétricas do tipo “kite” de $n + 2$ -corpos num espaço de dimensão n [22].

Para o caso de quatro corpos ainda não há uma classificação completa, contagens exatas são conhecidas apenas no caso de massas iguais [1], ou então onde se assume que algumas massas são suficientemente pequenas [50, 54], ou ainda no caso de duas massas não-nulas iguais [23]. No caso de 5-corpos, se massas negativas são permitidas, um *continuum* de equilíbrios relativos pode ocorrer [42].

No caso $n = 4$, existem dois conjuntos de equações polinomiais nas distâncias mútuas, cujos coeficientes são as massas. Através da teoria BKK, é possível mostrar que o sistema definido pelos dois conjuntos de equações possui um número finito de soluções com todas as variáveis não-nulas. Isto permite obter o resultado da finitude.

A sigla BKK se refere aos nomes de Bernstein, Khovansky e Kushnirenko. Um dos principais resultados nesta teoria é o teorema de Bernstein. A parte da teoria BKK usada neste trabalho pode ser delineada do seguinte modo: Alguns resultados da geometria algébrica permitem mostrar que o sistema de equações polinomiais com um número infinito de soluções possui uma solução representada por série de Puiseux. A substituição da série de Puiseux no sistema induz alguns “sistemas reduzidos” aos quais associamos polítopos inteiros, pela geometria desses polítopos é possível reduzir o número de sistemas reduzidos a um número finito. Para os sistemas reduzidos pode-se testar, usando computador, se existem soluções. Se todos os sistemas reduzidos não possuem solução, então o sistema original possui finitas soluções. Ainda mais, o teorema de Bernstein fornece um limite superior para o número de soluções, conhecido como limite BKK. Este limite permite dar uma cota superior de 8472 para o número de classes de equilíbrios relativos, a cota inferior de 32 é obtida listando-se os equilíbrios relativos já conhecidos.

Capítulo 1

Finitude de Equilíbrios Relativos no Problema dos Quatro Corpos

Neste capítulo o objetivo é delinear o problema, bem como, obter conjuntos de equações que o represente, para em capítulos posteriores limitar o número de soluções das equações e conseqüentemente o número de soluções do problema.

1.1 Preliminares

O problema Newtoniano dos n -corpos é o estudo da dinâmica de n -partículas pontuais com massas $m_i > 0$ e posições $x_i \in \mathbb{R}^d$, se movendo de acordo com as leis do movimento de Newton:

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.1)$$

onde r_{ij} é a distância entre x_i e x_j .

Um movimento de equilíbrio relativo é a solução de (1.1) em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$x_i(t) = R(t)x_i(0)$$

onde $R(t)$ é a rotação uniforme com velocidade $\nu \neq 0$ em torno de algum ponto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, ou seja é a uma solução do sistema que está contida em um plano. Tal solução é possível se, e somente

se, as posições iniciais $x_i(0)$ satisfazem as equações algébricas

$$\lambda(x_j - \mathbf{c}) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.2)$$

onde $\lambda = -\nu^2 < 0$.

É fácil ver que o centro de rotação, $\mathbf{c}$, deve ser o centro de massa. De fato, tomando a equação (1.2) e multiplicando ambos os membros por m_j obtemos

$$m_j \lambda(x_j - \mathbf{c}) = \sum_{i \neq j} \frac{m_j m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.3)$$

Daí somando em j temos

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda(x_j - \mathbf{c}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq j} \frac{m_j m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Observe que o lado direito se anula, pois na soma ao fazer variar os índices i e j aparecem termos opostos. Isto nos dá então:

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda(x_j - \mathbf{c}) = 0 \quad \implies \quad \lambda \sum_{j=1}^n m_j(x_j - \mathbf{c}) = 0,$$

como $\lambda = -\nu^2 < 0$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_j(x_j - \mathbf{c}) = 0 &\implies \sum_{j=1}^n m_j x_j - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{c} = 0 \\ \implies \sum_{j=1}^n m_j x_j = \left(\sum_{j=1}^n m_j\right) \mathbf{c} &\implies \mathbf{c} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j x_j}{\sum_{j=1}^n m_j}, \end{aligned}$$

e, portanto, $\mathbf{c}$ é o centro de massa.

A solução dessas equações é chamada uma configuração de equilíbrio relativo ou somente um equilíbrio relativo. Cada equilíbrio relativo realmente dá origem a uma família de movimentos elípticos periódicos variando de uma rotação circular rígida até o colapso homotético. Eles também são importantes no estudo da topologia de variedades integrais ([48], [7] e [34]). Mais geralmente, uma solução de (1.2) com $x_i \in \mathbb{R}^d$ é chamada uma *configuração central*. Um equilíbrio relativo é somente uma configuração central plana.

As equações (1.2) são invariantes por transformações de rotação, translação e dilatação no plano. De fato, se $X = (x_1 \dots x_n)$ é uma configuração de equilíbrio relativo, e se $\tilde{r}_{ij}$ são as novas distâncias depois da transformação, então temos os casos:

a) Seja T a dilatação por um fator $\alpha > 0$ a partir do centro de massa então temos:

$$T(x_i) = \mathbf{c} + \alpha(x_i - \mathbf{c}).$$

Veja que $T(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, isto é, o centro de massa não é alterado, vale

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{ij} &= \|T(x_i) - T(x_j)\| = \|\mathbf{c} + \alpha(x_i - \mathbf{c}) - (\mathbf{c} + \alpha(x_j - \mathbf{c}))\| \\ &= \|\alpha(x_i - x_j)\| = \alpha\|x_i - x_j\| = \alpha r_{ij}. \end{aligned}$$

e

$$T(x_j) - \mathbf{c} = \alpha(x_j - \mathbf{c}) \implies \frac{1}{\alpha}(T(x_j) - \mathbf{c}) = (x_j - \mathbf{c}),$$

segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \frac{m_i(T(x_i) - T(x_j))}{\tilde{r}_{ij}^3} &= \sum_{i \neq j} \frac{\alpha(x_i - x_j)}{(\alpha \tilde{r}_{ij})^3} = \\ \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} &= \frac{1}{\alpha^2} \lambda(x_j - \mathbf{c}) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha^3} (T(x_j) - \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Portanto a configuração é de equilíbrio relativo.

b) Seja S uma rotação ou translação. Sabemos que rotações e translações preservam distâncias, então vale:

$$\tilde{r}_{ij} = \|S(x_i) - S(x_j)\| = \|x_i - x_j\| = r_{ij},$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \lambda(S(x_j) - S(\mathbf{c})) &= S(\lambda(x_j - \mathbf{c})) = S\left(\sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}\right) \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{m_i(S(x_i) - S(x_j))}{r_{ij}^3} = \sum_{i \neq j} \frac{m_i(S(x_i) - S(x_j))}{\tilde{r}_{ij}^3}. \end{aligned}$$

Dois equilíbrios relativos são considerados equivalentes se eles estão relacionados por essas operações de simetria.

Os equilíbrios relativos do problema dos três corpos já são bem conhecidos. A menos de simetria, existem sempre exatamente cinco equilíbrios relativos. Dois deles são os triângulos equiláteros de Lagrange [28] e os outros três são as configurações colineares descobertas por Euler [15]. Para o caso colinear uma conta exata dos equilíbrios relativos de n -corpos foi encontrada por Moulton [39]. Existe um único equilíbrio relativo colinear para qualquer ordenação das massas em linha reta, então tomando em conta as rotações no plano existem $\frac{n!}{2}$ classes de equivalência de equilíbrios relativos colineares, numa linha o número de configurações seria $n!$, que são todas as permutações de posições em linha reta dos n -corpos, mas cada permutação na orientação oposta é obtida através da rotação de 180° e como as configurações irão ser contadas módulo rotação temos $\frac{n!}{2}$ equilíbrios. Elas podem ser pensadas como generalizando o equilíbrio relativo dos três corpos de Euler. As soluções de triângulos equiláteros de Lagrange também se generalizam para tetraedros para o “problema dos quatro corpos” [30] e para símlices regulares de n -corpos em dimensão $(n - 1)$ [43], embora neste caso sejam configurações centrais ao invés de equilíbrios relativos. Entretanto, já no problema dos quatro corpos, existe complexidade suficiente impedindo uma classificação completa dos equilíbrios relativos não-colineares. De fato, uma conta exata é conhecida apenas no caso onde as massas são iguais e para certos casos onde assume-se que algumas das massas são suficientemente pequenas ([1], [54] e [50]). Nosso objetivo é expor como foi demonstrado que o número de equilíbrios no problema dos 4-corpos é finito independente dos valores das massas.

O problema da finitude para equilíbrios relativos do problema de n -corpos foi proposto por Chazy [8] e Wintner [52] e foi listado por Smale como o problema 6 em sua lista de problemas para este século [49]. Nós iremos mostrar como este problema foi resolvido para $n = 4$. Mais concretamente nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

1.1 TEOREMA. *Se as massas são positivas, então existe somente um número finito de classes de equivalência dos equilíbrios relativos para o problema Newtoniano de quatro corpos.*

De fato, iremos mostrar que existem no mínimo 32 e no máximo 8472 tais classes de equivalência, incluindo as 12 classes onde os equilíbrios são colineares. A finitude do número de equilíbrios relativos já foi mostrada para escolhas genéricas das quatro massas (sem testes explícitos de generalidade) ([26], [35] e [37]). Limites superiores prévios, assumindo finitude, são muito maiores ([26], [35] e [31]). Provavelmente o limite alcançado neste trabalho ainda está longe de ser exato. Experimentos numéricos [47] sugerem que o número de equilíbrios

relativos está entre 32 e 50 (que é o número obtido no caso em que as massas são iguais) [1]. Um limite inferior de 32 pode ser obtido ao se observar que, em adição aos $\frac{4!}{2} = 12$ equilíbrios relativos colineares, existem sempre no mínimo 6 configuração convexas e 14 configurações com um corpo na região limitada pelos outros três. Se massas negativas são permitidas no problema de 5-corpos plano, um *continuum* de equilíbrios relativos pode existir [38]. Não é conhecido se isto é possível para $n = 4$.

Aqui está um esboço da prova da finitude. As equações podem ser expressas como polinômios nas seis distâncias mútuas r_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$ com coeficientes dependendo dos parâmetros m_i . Esta escolha de variáveis elimina as simetrias de rotação e translação e depois de normalizar a escala para eliminar as dilatações, o problema é mostrar que o sistema resultante de equações polinomiais tem uma quantidade finita de soluções tais que $r_{ij} \neq 0$ para todo i, j . Algumas idéias interessantes da geometria algébrica fornecem critérios testáveis para isto. Estes critérios são expressos em termos de polítopos de Newton associados a polinômios. Essencialmente o sistema original de equações é substituído por vários “sistemas reduzidos”, os quais são mais simples de analisar e permitem mostrar que não existem soluções com todas as variáveis não-nulas. Para encontrar todos os sistemas reduzidos e analisá-los, nós devemos recorrer a cálculos no computador. Entretanto, esses cálculos são de um tipo que podem ser realizados com exata precisão. Mais explicitamente, realizamos operações algébricas sobre os vetores inteiros determinados pelos expoentes dos monômios que possuem coeficiente não-nulo em cada polinômios com coeficientes inteiros e simbólicos, e necessitamos encontrar o fecho convexo de pontos na rede definida pelos inteiros.

Em [18] pode ser encontrado um livro de notas do programa *Mathematica* que dá mais detalhes sobre os cálculos. Um arquivo eletrônico contendo este livro de notas e detalhes de todos os outros cálculos necessários pode ser encontrado no *web site* do jornal *Inventiones Mathematicae*.

1.2 Distâncias mútuas para equilíbrios relativos

Nesta seção descrevemos como obter dois conjuntos de equações algébricas satisfeitas pelas distâncias mútuas r_{ij} de toda configuração de equilíbrio relativo. O primeiro conjunto,

devido a Albouy e Chenciner [3], já contém $\binom{n}{2}$ equações para as $\binom{n}{2}$ distâncias. Parece provável que essas equações já possuem um número finito de soluções com coordenadas não-nulas, mas não foi possível mostrar isso até o momento. Então é necessário juntar um segundo conjunto de equações, devido a Dziobek [13].

1.2.1 As equações de Albouy-Chenciner

Começamos com as equações cartesianas (1.2) para equações de configurações centrais de n pontos em $\mathbb{R}^d$. Tomamos (1.2) e fazemos $m = \sum_{j=1}^n m_j$, e daqui por diante assumiremos sempre que $m > 0$ a menos de menção explícita em contrário. Então, se fizermos $\lambda' = \frac{\lambda}{m}$, temos de (1.2) que para $1 \leq j \leq n$ vale

$$\begin{aligned}
\lambda(x_j - \mathbf{c}) &= \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \lambda(\mathbf{c} - x_j) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \lambda \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{j=1}^n m_i} \right) - \lambda x_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \frac{\lambda}{m} \left(\sum_{j=1}^n m_i x_i - x_j m \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \lambda' \sum_{i=1}^n m_i x_i - \lambda' x_j \sum_{i=1}^n m_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \sum_{i=1}^n \lambda' m_i (x_i - x_j) = 0.
\end{aligned}$$

Observe que para $i = j$ o termo na soma da direita é nulo então a equação anterior vale se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \frac{m_i(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \sum_{i \neq j} \lambda' m_i (x_i - x_j) = 0 &\iff \sum_{i \neq j} m_i \left(\frac{1}{r_{ij}^3} + \lambda' \right) (x_i - x_j) = 0 \\
&\iff \sum_{i \neq j} m_i S_{ij} (x_i - x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.4)
\end{aligned}$$

onde

$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} + \lambda', \text{ para } i \neq j \quad \text{e} \quad S_{ii} = 0. \quad (1.5)$$

Introduzimos uma matriz de configuração $X \in M_{d \times n}(\mathbb{R})$ cujas colunas são os vetores posição x_i , isto é,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Como $X \in M_{d \times n}(\mathbb{R})$, podemos ver X como representando uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^d$, onde n é o número de corpos, e $\mathbb{R}^d$ é o espaço físico onde os corpos estão localizados. Então (1.4) é equivalente a equação:

$$XA = 0, \quad (1.6)$$

onde A é a matriz $n \times n$ com entradas:

$$A_{ij} = m_i S_{ij} \quad \text{para } (i \neq j) \quad \text{e} \quad A_{jj} = - \sum_{i \neq j} A_{ij}. \quad (1.7)$$

Vejamos a equivalência entre (1.4) e (1.6). De (1.4) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i S_{ij}(x_i - x_j) = 0 &\iff \sum_{i \neq j} m_i S_{ij}(x_i - x_j) + m_j S_{jj}(x_j - x_j) = 0 \\ &\iff \sum_{i \neq j} m_i S_{ij}(x_i - x_j) = 0 \\ &\iff \sum_{i \neq j} A_{ij}(x_i - x_j) = 0. \end{aligned}$$

Tomando a p -ésima coordenada do vetor $\sum_{i \neq j} A_{ij}(x_i - x_j) = 0$, achamos

$$\sum_{i \neq j} A_{ij}(x_{ip} - x_{jp}) = 0, \quad 1 \leq p \leq d. \quad (1.8)$$

Seja $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})$, teremos que

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1d} & x_{2d} & \dots & x_{nd} \end{pmatrix}.$$

Então (1.4) é equivalente à (1.8), por outro lado (1.8) vale se, e somente se, $(XA)_{ij} = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, pois calculando o elemento $(XA)_{ij}$ da matriz XA obtemos

$$(XA)_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ki} A_{kj} = \sum_{k \neq j} x_{ki} A_{kj} + x_{ji} A_{jj} = \sum_{k \neq j} x_{ki} A_{kj} + x_{ji} \left(- \sum_{k \neq j} A_{kj} \right) = \sum_{i \neq j} A_{kj} (x_{ki} - x_{ji}) = 0.$$

Em resumo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i S_{ij}(x_i - x_j) = 0 &\iff \sum_{i \neq j} A_{ij}(x_{ip} - x_{jp}) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \\ &\iff (XA)_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \\ &\iff XA = 0. \end{aligned}$$

A idéia de Albouy e Chenciner é substituir X por alguma aplicação que é invariante por rotações e translações dos vetores posição $x_i \in \mathbb{R}^d$. Tal aplicação pode ser expressa em função das distâncias mútuas r_{ij} . A translação de todas as posições x_i por um vetor $u \in \mathbb{R}^d$ transforma X em $X + uL$, onde L é o vetor $1 \times n$ cujas componentes são todas 1. De fato, transladando todas as posições por um vetor $u \in \mathbb{R}^d$ obtemos a nova matriz de configuração $\begin{pmatrix} x_1 + u & \cdots & x_n + u \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Por outro lado, se } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ e } L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ uma matriz } 1 \times n \text{ obtemos} \\ u.L = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_d & u_d & \cdots & u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \cdots & u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos achar invariância por translação simplesmente restringindo a aplicação definida por X ao hiperplano $P = \{v \in \mathbb{R}^n : Lv = v_1 + \dots + v_n = 0\} = \text{Nuc}L$. As aplicações definidas por uma matriz de configuração neste hiperplano são iguais módulo translação. Estamos considerando agora aplicações de $X : P \rightarrow \mathbb{R}^d$ ao invés de aplicações $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Segue da definição que a soma das colunas de A são todas nulas. Com efeito a soma da j -ésima coluna de A é $\sum_{i=1}^n A_{ij} = \sum_{i \neq j} A_{ij} + A_{jj} = 0$.

$$\text{Tomando } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ temos}$$

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}v_j \end{pmatrix}.$$

Agora queremos verificar que $Av \in P$. Com efeito, somando as coordenadas de Av obtemos $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij})v_j = \sum_{j=1}^n 0.v_j = 0$. Segue que $A : \mathbb{R}^n \rightarrow P$ e se restringe a $A : P \rightarrow P$. Então XA em (1.6) pode ser vista como uma aplicação linear de P em $\mathbb{R}^d$.

Invariância por rotação é obtida passando-se a matrizes de Gram. Para qualquer matriz de configuração X , a matriz de Gram $G = X^T X$ é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são os produtos internos euclidianos $\langle x_i, x_j \rangle$. G é invariante por rotação. Com efeito, observe que como a rotação preserva produto interno então depois do sistema rotacionado os vetores x_i se transformam em Rx_i , se G_R é a matriz de Gram do sistema rotacionado, então $G_R = [\langle Rx_i, Rx_j \rangle] = [\langle x_i, x_j \rangle] = G$. Para manter invariância por translação, podemos ver G como

representando a forma bilinear simétrica $\beta(v, w) = v^t G w$ sobre P . Então se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ e $w =$

$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, então $\beta(v, w) = v^t G w = \sum_{i,j} v_i G_{ij} w_j$. A forma bilinear β sobre P determina e é

determinada pelas distâncias mútuas r_{ij} . Para ver isto, note que para quaisquer constantes, adicionando o vetor $k_i L$ a i -ésima linha de G e o vetor $k_j L^t$ a j -ésima coluna produz uma nova matriz representando β . De fato, a nova matriz $\tilde{G}$ depois de somada as linhas e colunas será dada por $\tilde{G} = \begin{pmatrix} g_{ij} + k_i + k_j \end{pmatrix}$. Se v e $w \in P$, temos que $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ e $\sum_{j=1}^n w_j = 0$ então segue que

$$\begin{aligned} v^t \tilde{G} w &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i (g_{ij} + k_i + k_j) w_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i g_{ij} w_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i (k_i + k_j) w_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i g_{ij} w_j + \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n v_i k_i w_j + \sum_{i=1}^n v_i k_j w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i g_{ij} w_j + \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n v_i k_i w_j + w_j k_j \sum_{i=1}^n v_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i g_{ij} w_j + \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n v_i k_i w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i g_{ij} w_j + (\sum_{j=1}^n w_j) (\sum_{i=1}^n v_i k_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i g_{ij} w_j = v^t G w, \end{aligned}$$

e, portanto, é uma nova matriz representando β . Se escolhermos a constante $k_i = -\frac{1}{2} \|x_i\|^2$, então a forma bilinear simétrica β é representada por uma matriz B , cujas entradas são

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \langle x_i, x_j \rangle - \frac{1}{2} \|x_i\|^2 - \frac{1}{2} \|x_j\|^2 = -\frac{1}{2} (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle) \\ &= -\frac{1}{2} \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle^2 = -\frac{1}{2} \|x_i - x_j\|^2 = -\frac{1}{2} r_{ij}^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Em (1.6) nós temos $XA = 0$, multiplicando ambos os membros de (1.6) por X^t obtemos que $X^t(XA) = 0 \Rightarrow X^tXA = 0 \Rightarrow GA = 0$. A matriz GA pode ser vista como representando uma forma bilinear (em geral não simétrica) sobre P . Neste caso, podemos substituir G por B . De fato, sejam $\beta, \tilde{\beta}$ as formas bilineares definidas por GA e BA sobre P respectivamente, e como antes façamos $k_i - \frac{1}{2}\|x_i\|^2$, então se $B = [b_{ij}]$ e $G = [g_{ij}]$ temos que $b_{ij} = g_{ij} + k_i + k_j$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(v, w) &= v^t B A w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i (BA)_{ij} w_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i (\sum_{p=1}^n b_{ip} a_{pj}) w_j = \sum_{i,j,p=1}^n v_i b_{ip} a_{pj} w_j \\ &= \sum_{i,j,p=1}^n v_i (g_{ip} + k_i + k_p) a_{pj} w_j \\ &= \sum_{i,j,p=1}^n v_i g_{ip} a_{pj} w_j + \sum_{i,j,p=1}^n v_i (k_i + k_j) a_{pj} w_j\end{aligned}$$

Mostremos que $\sum_{i,j,p=1}^n v_i (k_i + k_j) a_{pj} w_j = 0$. De fato lembremos que $\sum_{i=1}^n v_i = 0$, $\sum_{j=1}^n w_j = 0$ e $\sum_{p=1}^n a_{pj} = 0$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,p=1}^n v_i (k_i + k_p) a_{pj} w_j &= \sum_{i,j,p=1}^n v_i k_i a_{pj} w_j + \sum_{i,j,p=1}^n v_i k_p a_{pj} w_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n v_i k_i w_j (\sum_{p=1}^n a_{pj}) + \sum_{j,p=1}^n k_p a_{pj} w_j (\sum_{i=1}^n v_i) = 0.\end{aligned}$$

E portanto, segue que

$$\tilde{\beta}(v, w) = \sum_{i,j,p=1}^n v_i g_{ip} a_{pj} w_j = \sum_{i,j=1}^n v_i \left(\sum_{p=1}^n g_{ip} a_{pj} \right) w_j = \sum_{i,j=1}^n v_i (GA)_{ij} w_j = \beta(v, w),$$

então é permitido trocar G por B .

Sabemos que o espaço $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes pode ser decomposto como soma direta de matrizes simétricas e anti-simétricas. Como $GA = 0$ substituindo G por B temos $BA = 0$, então a parte simétrica de BA é também nula, isto é,

$$\frac{(BA) + (BA)^t}{2} = 0 \Rightarrow (BA) + (BA)^t = 0 \Rightarrow BA + A^t B^t = 0,$$

mas segue da definição que B é simétrica, assim encontramos

$$BA + A^t B = 0, \tag{1.10}$$

que são chamadas as **equações de Albouy-Chenciner** para configurações centrais.

Essas equações são matriciais, encontraremos a partir delas equações polinomiais as quais, por comodidade, também chamaremos equações de Albouy-Chenciner.

Sejam e_i os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ e defina $e_{ij} = e_i - e_j$. Então (1.10) é equivalente às equações

$$e_{ij}^t(BA + A^tB)e_{ij} = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (1.11)$$

Para ver isto, seja $\gamma(v, w) = v^t C w$ a forma bilinear simétrica sobre P associada á matriz

$$C = BA + A^tB.$$

Veja que, como C define uma forma bilinear sobre o espaço P de dimensão $n - 1$, então é equivalente (sobre P) a uma matriz de ordem $n - 1$. Então (1.11) significa que $\gamma(e_{ij}, e_{ij}) = 0$ para $1 \leq i < j \leq n$.

Para mostrar que $\gamma = 0$ é suficiente provar que γ se anula sobre a base e_{1i} , $2 \leq i \leq n$ de P . Primeiro vejamos que os vetores e_{1i} , $2 \leq i \leq n$, formam realmente uma base para P . Veja que eles pertencem a P , já que a soma de suas coordenadas é nula. Temos que

$$\sum_{j=2}^n a_j e_{1j} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=2}^n a_j, -a_2, -a_3, \dots, -a_n \right) = (0, \dots, 0) \Rightarrow a_j = 0, \forall j = 2, \dots, n,$$

portanto os vetores são linearmente independentes. Agora veja que

$$e_{ij} = e_i - e_j = e_1 - e_j - (e_1 - e_i) = e_{1j} - e_{1i}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \gamma(e_{ij}, e_{ij}) &= \gamma(e_{1j} - e_{1i}, e_{1j} - e_{1i}) = \gamma(e_{1j}, e_{1j}) - 2\gamma(e_{1i}, e_{1j}) + \gamma(e_{1i}, e_{1i}) \Rightarrow \\ 2\gamma(e_{1i}, e_{1j}) &= \gamma(e_{1j}, e_{1j}) + \gamma(e_{1i}, e_{1i}) - \gamma(e_{ij}, e_{ij}). \end{aligned}$$

Segue então pelas equações em (1.11) que o segundo termo se anula, logo $2\gamma(e_{1i}, e_{1j}) = 0$ para $1 \leq i < j < n$ e se γ se anula em uma base de P , é portanto nulo em P .

Vejamos que para $1 \leq i < j \leq n$, vale $0 = \gamma(e_{ij}, e_{ij}) = [c_{ii} - 2c_{ij} + c_{jj}]$, onde $C = BA + A^tB$. O sistema em (1.11) contém $\binom{n}{2}$ equações nas $\binom{n}{2}$ distâncias mútuas r_{ij} . Reciprocamente é possível mostrar que se as variáveis r_{ij} são distâncias mútuas de alguma configuração em algum espaço $\mathbb{R}^d$ e elas satisfazem as equações acima, então a configuração é central [3]. É notável que as equações por si mesmas sejam independentes da dimensão d do espaço físico onde os corpos estão situados, então elas determinam as configurações centrais em todas as dimensões de uma vez.

Para encontrar as equações explicitamente, provemos que $\gamma(e_{ij}, e_{ij}) = 2e_{ij}^t B A e_{ij}$. Por comodidade, chamemos $BA = D$, então $D^t = A^t B^t$, mas sendo B simétrica temos $D^t = A^t B$. Seja $D = [d_{ij}]$, então $e_{ij}^t D e_{ij}$ é uma matriz 1×1 e então temos que $e_{ij}^t D e_{ij} = (e_{ij}^t D e_{ij})^t = e_{ij}^t D^t e_{ij}$, e, portanto, segue que

$$\gamma(e_{ij}, e_{ij}) = e_{ij}^t (BA + A^t B) e_{ij} = e_{ij}^t (D + D^t) e_{ij} = e_{ij}^t D e_{ij} + e_{ij}^t D^t e_{ij} = 2e_{ij}^t D e_{ij} = 2e_{ij}^t B A e_{ij},$$

como queríamos. Agora note que

$$\gamma(e_{ij}, e_{ij}) = 2e_{ij}^t B A e_{ij} = 2 \left((BA)_{ii} - (BA)_{ji} - (BA)_{ij} + (BA)_{jj} \right),$$

onde $(BA)_{ij}$ denota as entradas da matriz BA . Lembremos que $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{kj}$ usando (1.7) e de (1.9) segue que $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{kj} = \sum_{k \neq j} -\frac{1}{2} r_{ik}^2 m_k S_{kj} - \frac{1}{2} r_{ij}^2 (-\sum_{k \neq j} A_{kj})$, temos então

$$\begin{aligned} 2((BA)_{ii} + (BA)_{jj} - (BA)_{ij} - (BA)_{ji}) &= 0 \implies \\ 2[\sum_{k=1}^n B_{ik} A_{ki} + \sum_{k=1}^n B_{jk} A_{kj} - \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{kj} - \sum_{k=1}^n B_{jk} A_{ki}] &= 0 \implies \\ 2[\sum_{k=1}^n (B_{ik} A_{ki} + B_{jk} A_{kj} - B_{ik} A_{kj} - B_{jk} A_{ki})] &= 0 \implies \\ 2[\sum_{k=1}^n A_{kj} (B_{jk} - B_{ik}) + A_{ki} (B_{ik} - B_{jk})] &= 0 \implies \\ 2[\sum_{k \neq j, i}^n (m_k S_{kj} (-\frac{1}{2} r_{jk}^2 + \frac{1}{2} r_{ik}^2) + m_k S_{ki} (-\frac{1}{2} r_{ik}^2 + \frac{1}{2} r_{jk}^2) \\ + A_{jj} (-\frac{1}{2} r_{jj}^2 + \frac{1}{2} r_{ij}^2) + A_{ji} (-\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{1}{2} r_{jj}^2) + A_{ij} (-\frac{1}{2} r_{ji}^2 + \frac{1}{2} r_{ii}^2) + A_{ii} (-\frac{1}{2} r_{ii}^2 + \frac{1}{2} r_{ji}^2)] &= 0 \implies \\ 2[\sum_{k \neq j, i}^n (m_k S_{kj} (-\frac{1}{2} r_{jk}^2 + \frac{1}{2} r_{ik}^2) + m_k S_{ki} (-\frac{1}{2} r_{ik}^2 + \frac{1}{2} r_{jk}^2)) \\ + (-\sum_{k \neq j} A_{kj}) (-\frac{1}{2} r_{jj}^2 + \frac{1}{2} r_{ij}^2) + A_{ji} (-\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{1}{2} r_{jj}^2) + A_{ij} (-\frac{1}{2} r_{ji}^2 + \frac{1}{2} r_{ii}^2) + \\ + (-\sum_{k \neq i} A_{ki}) (-\frac{1}{2} r_{ii}^2 + \frac{1}{2} r_{ji}^2)] &= 0. \end{aligned}$$

Agora lembre que $S_{ii} = S_{jj} = 0$, logo podemos adicionar os termos $\frac{1}{2} m_i S_{ii} (r_{ii}^2 - r_{ji}^2)$ e $\frac{1}{2} m_j S_{jj} (r_{ij}^2 - r_{jj}^2)$ sem alterar as somas. Podemos ainda substituir $A_{ij} = m_i S_{ij}$, e então reagrupando de uma maneira conveniente obtemos

$$\begin{aligned} 2[\frac{1}{2} \sum_{k \neq i} m_k S_{kj} (r_{ik}^2 - r_{jk}^2) + \frac{1}{2} m_i S_{ij} (r_{ii}^2 - r_{ji}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} m_k S_{ki} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2) - r_{ik}^2 + \frac{1}{2} m_j S_{ji} (r_{jj}^2 - r_{ij}^2)] + \\ (-\sum_{k \neq j} A_{kj}) (-\frac{1}{2} r_{jj}^2 + \frac{1}{2} r_{ij}^2) + (-\sum_{k \neq i} A_{ki}) (-\frac{1}{2} r_{ii}^2 + \frac{1}{2} r_{ji}^2) &= 0. \end{aligned}$$

Agora note que como $r_{jj} = 0$ e $r_{ii} = 0$ e então a soma acima se torna

$$2\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n m_k [S_{kj} (r_{ik}^2 - r_{jk}^2) + S_{ki} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2)] - \left(\sum_{k \neq j} A_{kj} + \sum_{k \neq i} A_{ki} \right) (r_{ij}^2) \right\} = 0$$

Lembrando novamente que $m_j S_{jj} = 0$ e $m_i S_{ii} = 0$ podemos adicionar $-\frac{1}{2}m_j S_{jj} r_{ji}^2$ e $-\frac{1}{2}m_i S_{ii} r_{ji}^2$ a soma acima para obter

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k [S_{kj}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2) + S_{ki}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2)] - \sum_{k=1}^n m_k S_{kj} r_{ij}^2 - \sum_{k=1}^n m_k S_{ki} r_{ij}^2 &= 0 \\ \sum_{k=1}^n m_k [S_{kj}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2) + S_{ki}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2)] &= 0 \implies \\ \sum_{k=1}^n m_k [S_{ki}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) + S_{kj}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2)] &= 0 \text{ para } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Estas equações são as que irão ser usadas por nós, antes já tínhamos chamado um conjunto de equações de Albouy-Chenciner e delas deduzimos essas, por simplicidade, as chamaremos também elas de **equações de Albouy-Chenciner**. E daqui por diante quando citarmos as equações de Albouy-Chenciner estaremos nos referindo a este último conjunto.

Neste ponto nós podemos normalizar as equações para eliminar a simetria de dilatação. De fato, se nós colocamos todas as distâncias em uma outra escala através da substituição $\tilde{r}_{ij} = cr_{ij}$ onde $c \neq 0$ é uma constante, e se além disso pomos $\tilde{\lambda} = c^{-3}\lambda'$ obtemos uma outra solução. Com efeito, após as substituições teremos que $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} + \tilde{\lambda} = \frac{1}{(cr_{ij})^3} + \frac{\lambda'}{c^3} = \frac{1}{c^3}S_{ij}$ e $\tilde{r}_{ij} = cr_{ij}$ então temos

$$\sum_{k=1}^n m_k [\tilde{S}_{ki}(\tilde{r}_{jk}^2 - \tilde{r}_{ik}^2 - \tilde{r}_{ij}^2) + \tilde{S}_{kj}(\tilde{r}_{ik}^2 - \tilde{r}_{jk}^2 - \tilde{r}_{ij}^2)] = 0 \quad (1.13)$$

já que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n m_k [\tilde{S}_{ki}(\tilde{r}_{jk}^2 - \tilde{r}_{ik}^2 - \tilde{r}_{ij}^2) + \tilde{S}_{kj}(\tilde{r}_{ik}^2 - \tilde{r}_{jk}^2 - \tilde{r}_{ij}^2)] \\ &= \sum_{k=1}^n m_k [\frac{1}{c^3}S_{ki}((cr_{jk})^2 - (cr_{ik})^2 - (cr_{ij})^2) + \frac{1}{c^3}S_{kj}((cr_{ik})^2 - (cr_{jk})^2 - (cr_{ij})^2)] \\ &= \frac{c^2}{c^3} \sum_{k=1}^n m_k [S_{ki}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) + S_{kj}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos novamente uma solução do sistema para $\tilde{r}_{ij}$ e $\tilde{\lambda}$ podemos então escolher um c convenientemente de modo que encontremos a normalização $\lambda' = -1$. Ou seja, teremos $S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1$.

1.2.2 Equações de Dziobek

Para uma configuração central planar de $n = 4$ corpos, existe um outro conjunto de equações que irão ser úteis para conseguirmos limitar o número de equilíbrios relativos. Elas são conhecidas como as equações de Dziobek. Sendo $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ uma configuração,

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ os $n - 1$ vetores $x_j - x_k$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, geram um subespaço afim de $\mathbb{R}^d$.

1.2 DEFINIÇÃO. *A dimensão de uma configuração X é a dimensão do menor subespaço afim de $\mathbb{R}^d$ que contém os vetores x_i , isto é, é a dimensão do menor subespaço afim gerado pelos $n - 1$ vetores $x_j - x_k$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$.*

Usaremos a notação $\delta(X)$ para denotar a dimensão deste espaço afim.

Temos, portanto, que $0 \leq \delta(X) \leq n - 1$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $d = n - 1$. De fato, se $d > n - 1$, estaremos nos restringindo a um espaço afim em $\mathbb{R}^d$ que tem dimensão $n - 1$ o mesmo é, portanto, isomorfo a um espaço afim de dimensão $n - 1$ em $\mathbb{R}^{n-1}$. Se $d < n - 1$ a configuração de n vetores tem no máximo d vetores linearmente independentes, e, assim, gera um espaço afim de dimensão no máximo $d - 1 < n - 1$, e podemos identificar canonicamente este espaço $\mathbb{R}^d \approx \mathbb{R}^d \times \{0 \in \mathbb{R}^{(n-1)-d}\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Configurações com $\delta(X) = 1, 2$ ou 3 , são chamadas de colinear, planar e espacial, respectivamente.

1.3 DEFINIÇÃO. *Uma configuração de Dziobek é uma configuração de n partículas, com massas não-nulas, tal que existe um vetor não-nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 0 & (1.I) \\ \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \dots + \Delta_n x_n = 0 & (1.II) \end{cases} \quad (1.14)$$

(onde $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ é a posição da partícula de massa m_i) e tal que para algum par $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$R_{ij} = \|x_i - x_j\|^{-3} = \xi + \eta d_i d_j$$

para $i \neq j$, com

$$d_k = \frac{\Delta_k}{m_k} \quad (2).$$

Vejamos um fato interessante a respeito da dimensão de uma configuração de Dziobek.

1.4 PROPOSIÇÃO. *Uma configuração de Dziobek de n -partículas tem dimensão no máximo $n - 2$.*

Demonstração: Associaremos a uma configuração X a matriz $n \times n$ dada por

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

onde $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ está sendo visto como um vetor coluna. Como o número máximo de colunas linearmente independentes é precisamente o posto de X , e k vetores linearmente independentes geram um espaço afim de dimensão $k - 1$, obtemos a seguinte expressão: $\delta(X) = \text{Posto}(X) - 1$. Temos que $\delta(X) \leq n - 2$ se, e só se, $\text{posto}(X) \leq n - 1$ o que acontece se, e somente se existe, um vetor $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ não-nulo no núcleo de X e daí segue que

$$X\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n &= 0, \\ \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \dots + \Delta_n x_n &= 0. \end{cases}$$

Logo uma configuração que satisfaz as equações (1.I) e (1.II) tem dimensão no máximo $n - 2$ e o resultado segue. ■

Além disso, observe na demonstração anterior que para uma configuração de dimensão $n - 2$ o núcleo de X tem dimensão 1. Logo o vetor

$$\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$$

é único a menos de multiplicação por constante. Existe ainda uma interpretação geométrica das coordenadas do vetor Δ , no caso em que a configuração é de dimensão $n - 2$. Como a configuração é de dimensão $n - 2$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que os vetores $x_i \in \mathbb{R}^{n-2}$. Seja $\hat{X}_k$ a matriz obtida de X , retirando-se a k -ésima coluna de X (ou seja, a matriz que representaria a configuração onde o k -ésimo corpo foi excluído). Defina $\tilde{\Delta}_k = (-1)^{k+1} \text{Det} \hat{X}_k$, sabemos que a menos de um fator $(n - 2)!$ $\text{Det} \hat{X}$ é o volume $(n - 2)$ -dimensional orientado do paralelepípedo gerado pelos x_i , $i \neq k$.

Provemos que $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \dots, \tilde{\Delta}_n)$ pertence ao núcleo de X . Defina as matrizes

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-2)1} & \cdots & x_{(n-2)n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-2)1} & \cdots & x_{(n-2)n} \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix},$$

para $k = 1, 2, \dots, n - 2$. Essas matrizes tem determinante nulo pois possuem duas linhas iguais. Perceba que ao excluir a k -ésima coluna e a última linha de Y_k , obtemos $\hat{X}_k$. Então, calculando o determinante de Y_0 pela última linha obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \text{Det}(Y_0) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \text{Det}(X) = (-1)^{n-1} [\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \text{Det}(\hat{X}_k)] = (-1)^{n-1} [\sum_{k=1}^n \tilde{\Delta}_k] = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \tilde{\Delta}_k = 0 \quad (1.I) \end{aligned}$$

Para k satisfazendo $1 \leq k \leq n-2$, expandindo o determinante de Y_k pela última linha obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = \text{Det}(Y_k) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} x_{kj} \text{Det}(\hat{X}_j) = (-1)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_{kj} (-1)^{j+1} \right) \text{Det}(\hat{X}_j) = (-1)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_{kj} \tilde{\Delta}_j \right) \\ &\implies \sum_{j=1}^n x_{kj} \tilde{\Delta}_j = 0 \quad \forall \quad 1 \leq k \leq n-2 \implies \sum_{j=1}^n x_j \tilde{\Delta}_j = 0. \quad (1.II) \end{aligned}$$

Então, $\tilde{\Delta}$ satisfaz (1.I) e (1.II) e assim pertence ao núcleo de X . Portanto, podemos considerar que $\Delta = \tilde{\Delta}$. Ou seja, $\Delta_k = (-1)^{k+1} \text{Det}(\hat{X}_k)$. No caso particular que estamos interessados, $n = 4$, $\text{Det}(\hat{X}_k)$ vai representar a área orientada do triângulo que não contém x_k como vértice (a menos do fator $(n-2)! = 2!$). Neste caso, um fato importante vai ser útil. Numa configuração não-colinear de quatro corpos as áreas dos quatro triângulos determinados pelos quatro corpos são não-nulas. Para concluir isto precisamos do seguinte resultado.

1.5 TEOREMA (Teorema da Mediatriz). *Sejam x_i e x_j dois pontos de uma configuração central plana com massas positivas. A reta $\overline{x_i x_j}$ (por convenção a reta horizontal) e a reta mediatriz do segmento $\overline{x_i x_j}$ (por convenção a reta vertical) dividem o plano em quatro quadrantes. Os outros pontos não podem todos pertencer a união do primeiro e terceiro quadrantes, similarmemente eles não podem todos pertencer a união do segundo e quarto quadrantes.*

Demonstração: De (1.4) temos

$$\sum_{i=1}^n m_i S_{ij}(x_i - x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Isto implica que $\sum_{k=1}^n m_k S_{jk}(x_k - x_j) = 0$ e $\sum_{k=1}^n m_k S_{ik}(x_k - x_i) = 0$. Subtraindo as equações obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k S_{ik}(x_k - x_i) - \sum_{k=1}^n m_k S_{ik}(x_k - x_i) &= 0 \implies \\ m_j S_{ij}(x_j - x_i) + \sum_{k \neq j} m_k S_{ik}(x_k - x_i) - m_i S_{ji}(x_i - x_j) - \sum_{k \neq i} m_k S_{jk}(x_k - x_j) &= 0 \implies . \\ (m_j + m_i) S_{ij}(x_j - x_i) + \sum_{k \neq j, i} m_k [S_{ik}(x_k - x_i) - S_{jk}(x_k - x_j)] &= 0 \end{aligned}$$

Defina $\Lambda_{ijk} = (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k)$. O bivetor Λ_{ijk} é a área orientada do triângulo de vértices x_i, x_j, x_k . Consideramos $\Lambda_{ijk} > 0$ se, e somente se, os três corpos aparecem na configuração no sentido anti-horário. Logo, tomando o produto exterior da equação anterior com $(x_i - x_j)$, nós obtemos:

$$(m_j + m_i) S_{ij}(x_j - x_i) \wedge (x_i - x_j) + \sum_{k \neq j, i} m_k [S_{ik}(x_k - x_i) \wedge (x_i - x_j) - S_{jk}(x_k - x_j) \wedge (x_i - x_j)] = 0.$$

Usando a anti-comutatividade do produto exterior temos

$$\sum_{k \neq j, i} m_k [S_{ik}(x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k) - S_{jk}(x_k - x_j) \wedge (x_i - x_j)] = 0$$

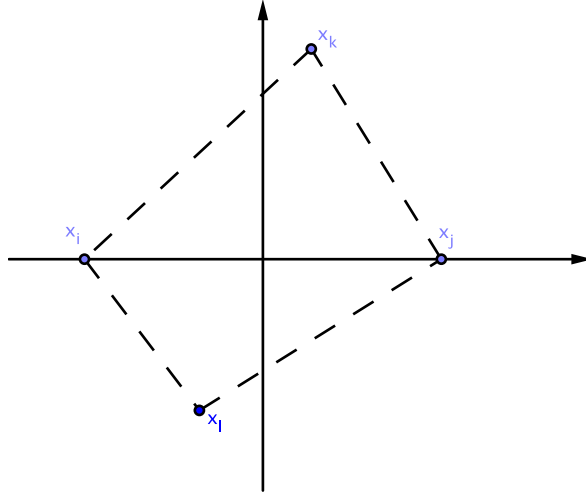
Agora note que

$$\begin{aligned} (x_k - x_j) \wedge (x_i - x_j) &= x_k \wedge x_i - x_k \wedge x_j - x_j \wedge x_i \\ &= -x_i \wedge x_k - x_j \wedge x_i + x_j \wedge x_k \cdot \\ &= (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k) = \Lambda_{ijk} \end{aligned}$$

donde segue que

$$\sum_{k \neq j, i} m_k [S_{ik} - S_{jk}] \Lambda_{ijk} = 0.$$

Agora suponha por contradição que todos os corpos estão na união da região superior direita com a inferior esquerda. Se x_k está na região superior direita então os três corpos de índices i, j, k aparecem na configuração no sentido anti-horário (veja a figura), logo $\Lambda_{ijk} > 0$. Vejamos ainda que x_k está mais próximo de x_j , do que de x_i , já que está na mesma região determinada pela reta bissectora que x_j está, segue $r_{jk} < r_{ik}$, logo $S_{jk} > S_{ik}$ e daí $(S_{ik} - S_{jk}) < 0$. Segue que $(S_{ik} - S_{jk})\Lambda_{ijk} < 0$.



Por outro lado, se x_l está na região inferior esquerda, então os três índices $\{i, j, l\}$ aparecem no sentido horário e temos $\Lambda_{ijl} < 0$. Mas, x_l está mais próximo de x_i do que de x_j , donde $r_{il} < r_{jl} \Rightarrow S_{il} > S_{jl} \Rightarrow S_{il} - S_{jl} > 0$, portanto $(S_{il} - S_{jl})\Lambda_{ijl} < 0$. Logo, na soma $\sum_{k \neq j, i} m_k (S_{ik} - S_{jk})\Lambda_{ijk}$, todos os termos têm o mesmo sinal e, portanto, a soma não pode ser nula. Contradição ! ■

Agora podemos concluir a afirmação que havíamos feito de que as áreas dos quatro triângulos determinados pelos quatro corpos são não-nulas. Suponha que a área do triângulo determinado por três dos quatro corpos é nula. Sem perda de generalidade podemos assumir que é o triângulo determinado pelos corpos x_1, x_2 e x_3 . Então, estes corpos tem que estar alinhados, como estamos supondo que a configuração não é colinear, então temos esses três corpos ao longo de uma reta que não contém x_4 . Seja R essa reta e sejam R_{12} a mediatriz do segmento $\overline{x_1x_2}$, e seja R_{23} a mediatriz do segmento $\overline{x_2x_3}$. Aplicando o teorema da mediatriz aos corpos x_1 e x_2 concluimos que x_4 tem que estar sobre R ou R_{12} já que não pode estar nos quadrantes determinados por essas regiões. Por igual motivo x_4 tem que estar sobre R ou R_{23} . Como R_{12} e R_{23} são disjuntos, concluimos que x_4 deve pertencer a R , e portanto a configuração é colinear. Contradição !

Então segue que as áreas são não-nulas. Como $\Delta_k = (-1)^{k+1} \text{Det}(\hat{X})$, concluimos que $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, 4$. Isto é importante para obtermos as equações em (2.3). Agora apresentamos uma propriedade das configurações de Dziobek.

1.6 PROPOSIÇÃO. *Toda configuração de Dziobek é uma configuração central.*

Demonstração: Seja $R_{ij} = \xi + \eta d_i d_j$ como na definição 2, vale para $i \neq j$ vale $\xi = R_{ij} - \eta d_i d_j$. Então, fixado i temos

$$\begin{aligned}
 m\xi(x_i - \mathbf{c}) &= m\xi x_i - \xi \sum_{j=1}^n m_j x_j = \xi(\sum_{j=1}^n m_j x_i - \sum_{j=1}^n m_j x_j) \\
 &= \xi[\sum_{j=1}^n m_j(x_i - x_j)] = [\sum_{j \neq i}^n \xi m_j(x_i - x_j)] \\
 &= \sum_{j \neq i}^n m_j(R_{ij} - \eta d_i d_j)(x_i - x_j) = \sum_{j \neq i}^n m_j(R_{ij})(x_i - x_j) - \eta \sum_{j \neq i}^n m_j(d_i d_j)(x_i - x_j) \\
 &= \sum_{j \neq i}^n m_j R_{ij}(x_i - x_j) - \eta \sum_{j=1}^n m_j(d_i d_j)(x_i - x_j) \\
 &= \sum_{j \neq i}^n m_j R_{ij}(x_i - x_j) - \eta \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\Delta_i}{m_i}\right) \left(\frac{\Delta_j}{m_j}\right) (x_i - x_j) \\
 &= \sum_{j \neq i}^n m_j R_{ij}(x_i - x_j) - \eta \frac{\Delta_i}{m_i} \sum_{j=1}^n \Delta_j (x_i - x_j) = \\
 &= \sum_{j \neq i}^n m_j R_{ij}(x_i - x_j) - \eta \frac{\Delta_i}{m_i} [(\sum_{j=1}^n \Delta_j) x_i - \sum_{j=1}^n \Delta_j x_j] \\
 &= \sum_{j \neq i}^n m_j R_{ij}(x_i - x_j) = \sum_{j \neq i}^n m_j \frac{(x_j - x_i)}{\|x_i - x_j\|^3} = \sum_{j \neq i}^n m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^3}.
 \end{aligned}$$

E portanto, obtemos que a configuração é central com $\lambda = -m\xi$. ■

Como vamos tratar de configurações planas de 4 corpos, então nos será útil a seguinte

1.7 PROPOSIÇÃO. *Suponha que temos uma configuração de n -corpos com massas positivas. Então qualquer configuração central de dimensão $n - 2$ é uma configuração de Dziobek.*

Demonstração: Vimos na demonstração da Proposição 1.4, que para uma configuração de dimensão $n - 2$ existe um único vetor $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ a menos de multiplicação por constante para o qual vale,

$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n &= 0, & (1.I) \\ \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \dots + \Delta_n x_n &= 0. & (1.II) \end{cases}$$

Novamente, pelo fato da dimensão ser $n - 2$, para qualquer i a única relação, a menos de multiplicação por escalar, entre os $x_k - x_i$, para $1 \leq k \leq n$ é $\sum_{k=1}^n \Delta_k (x_k - x_i) = 0$, de fato os vetores $x_k - x_i$ são $n - 1$ vetores não-nulos que geram um espaço afim de dimensão $n - 2$, então existe uma única relação linear (a menos de multiplicação por constante) entre eles. Mas, lembremos que a equação (1.4), nos dá

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ki} (x_k - x_i) = 0$$

e, portanto, temos outra relação linear entre os vetores diferença $x_k - x_i$. Então segue que nas duas relações os coeficientes correspondentes são múltiplos uns dos outros. Assim $m_k S_{ik} = \mu_i \Delta_k$ para algum $\mu_i \in \mathbb{R}$, e $\forall 1 \leq k \leq n$. Por simetria dos S_{ij} , vale $m_i S_{ik} = \mu_k \Delta_i$. Segue que

$$m_i m_k S_{ik} = m_k m_i S_{ki} \Rightarrow m_i \mu_i \Delta_k = m_k \mu_k \Delta_i \Rightarrow \mu_i \frac{\Delta_k}{m_k} = \mu_k \frac{\Delta_i}{m_i} \Rightarrow \mu_i d_k = \mu_k d_i$$

para todos os índices i, k . Se olharmos para a matriz $2 \times n$

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ d_1 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

vemos que todos os seus subdeterminantes de ordem 2 são nulos. Segue que seu posto é no máximo 1. Agora veja que existe ao menos um $d_i = \frac{\Delta_i}{m_i}$ que é não-nulo (na verdade no caso que nós interessa $n = 4$ e $d = 2$ são todos não-nulos), e assim obtemos que o posto de J é exatamente 1. Existe, então, um único μ tal que $\mu_i = \mu d_i$ para $1 \leq i \leq n$. E isto nos dá que

$$\begin{aligned} m_k S_{ik} &= \mu d_i \Delta_k \Rightarrow S_{ik} = \mu d_i \frac{\Delta_k}{m_k} \Rightarrow \\ S_{ik} &= \mu d_i d_k \Rightarrow \frac{1}{r_{ij}^3} + \lambda' = \mu d_i d_k \Rightarrow \\ \frac{1}{r_{ij}^3} &= -\lambda' + \mu d_i d_k \Rightarrow ||x_i - x_j||^{-3} = -\lambda' + \mu d_i d_k \end{aligned}$$

Então tome o par $(\xi, \eta) = (-\lambda', \mu)$. Obtemos que a configuração é de Dziobek. ■

Agora obteremos algumas equações que usaremos posteriormente. Primeiro, observe que como obtivemos para $i \neq j$ $S_{ij} = \mu d_i d_j$, então

$$S_{ij} = \mu \frac{\Delta_i}{m_i} \frac{\Delta_j}{m_j} \Rightarrow m_j S_{ij} = \mu \frac{\Delta_i}{m_i} \Delta_j.$$

Portanto, obtemos

$$m_k S_{ik} \Delta_l = \mu \frac{\Delta_i}{m_i} \Delta_k \Delta_l = \mu \frac{\Delta_i}{m_i} \Delta_l \Delta_k = m_l S_{il} \Delta_k.$$

Se $i \neq k$ e $i \neq l$ e se $k = l$ a igualdade é trivial. Podemos, portanto, considerar apenas

$$m_k S_{ik} \Delta_l = m_l S_{il} \Delta_k,$$

onde i, k, l são três índices distintos. Ainda usando que $S_{ij} = \mu d_i d_j$, para $i \neq j$ obtemos que se i, j, k, l são quatro índices distintos

$$S_{ik} S_{jl} = \mu d_i d_k \mu d_j d_l = \mu d_i d_l \mu d_j d_k = S_{il} S_{jk}.$$

Enfim chegamos à

$$S_{ik} S_{jl} = S_{il} S_{jk} \quad (1.15)$$

Essas irão ser chamadas as **equações de Dziobek**. A maior parte do nosso esforço será destinado às equações de Albouy-Chenciner e às equações de Dziobek descritas acima, no entanto, um outro conjunto de equações irá ser necessário para estabelecer um limite superior para o número de equilíbrios relativos.

Se $X = (x_1, \dots, x_n)$ é uma configuração de dimensão $n - 2$, tome $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n &= 0. & (1.I) \\ \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \dots + \Delta_n x_n &= 0. & (1.II) \end{cases}$$

Seja $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$, então segue que

$$r_{ij}^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle = \|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle + \|x_j\|^2.$$

Usando isto e as equações (1.I) e (1.II), temos

$$\sum_{j=1}^n r_{ij}^2 \Delta_j = \|x_i\|^2 \sum_{j=1}^n \Delta_j - 2\langle x_i, \sum_{j=1}^n \Delta_j x_j \rangle + \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \Delta_j = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \Delta_j.$$

Como se pode ver o resultado independe do índice i , portanto definiremos

$$\Delta_0 := - \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 \Delta_j.$$

Veja que como os Δ_i são determinados por (1.I) e (1.II), a menos de multiplicação por constante, segue da definição de Δ_0 que ele também é determinado a menos de multiplicação por constante. Observemos ainda que para uma configuração de dimensão $n - 2$, temos para $i \neq j$,

$$S_{ij} = \mu d_i d_j \Rightarrow S_{ij} = \mu \frac{\Delta_i}{m_i} \frac{\Delta_j}{m_j} \Rightarrow m_i m_j S_{ij} = \mu \Delta_i \Delta_j.$$

Para o caso $n = 4$ se definimos novas variáveis z_i e k tais que $m_i z_i = \sqrt{\mu} \Delta_i$ e $k = \sqrt{\mu} \Delta_0$ então obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} f_0 = \sum_{j=1}^n m_j z_j = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu} \Delta_j = \sqrt{\mu} \sum_{j=1}^n \Delta_j = 0, \\ f_i = \sum_{j=1}^n m_j z_j r_{ij}^2 + k = \sum_{j=1}^n \sqrt{\mu} \Delta_j r_{ij}^2 + \sqrt{\mu} \Delta_0 = \sqrt{\mu} (\Delta_0 + \sum_{j=1}^n \Delta_j r_{ij}^2) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

para $i = 1, \dots, 4$. Além disso $S_{ij} = \sqrt{\mu} \frac{\Delta_i}{m_i} \sqrt{\mu} \frac{\Delta_j}{m_j} = z_i z_j$ para $i \neq j$. Observe ainda que z_i é não-nulo para todo i , pois Δ_i é não-nulo. Temos, então, o sistema de 11 equações em 10 incógnitas

$$\begin{cases} f_0 = \sum_{j=1}^n m_j z_j = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu} \Delta_j = \sqrt{\mu} \sum_{j=1}^n \Delta_j = 0, \\ f_i = \sum_{j=1}^n m_j z_j r_{ij}^2 + k = \sum_{j=1}^n \sqrt{\mu} \Delta_j r_{ij}^2 + \sqrt{\mu} \Delta_0 = \sqrt{\mu} (\Delta_0 + \sum_{j=1}^n \Delta_j r_{ij}^2) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ S_{ij} = z_i z_j \quad 1 \leq i < j \leq 4, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde as variáveis são $(r, z) = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Capítulo 2

Séries de Puiseux e Sistemas de Equações Polinomiais

Neste capítulo o objetivo é dar critérios teóricos que permitem obter critérios testáveis para garantir que sistemas polinomiais como os de Albouy-Chenciner e Dziobek por exemplo, além disso os testes podem ser realizados no computador.

2.1 O Corpo das Séries De Puiseux

2.1.1 O Corpo das Séries de Potências Formais

2.1 DEFINIÇÃO. *Seja D um domínio, considere as somas infinitas do tipo $S(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + \dots$, onde os $a_i \in D$, $i \in \mathbb{N}$, são os coeficientes e t é uma variável. Os elementos da forma de $S(t)$ são chamados séries de potências formais sobre D .*

Essas séries podem ser somadas e multiplicadas do mesmo modo como fazemos para polinômios e, portanto irão constituir um domínio $D[t]'$. Se $D[t]$ são os polinômios com coeficientes em D , então $D[t] \subseteq D[t]'$, pois polinômios são as séries com somente um número finito de coeficientes não-nulos.

2.2 PROPOSIÇÃO. *$S(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + \dots$ é um elemento inversível em $D[t]'$ se, e somente se, a_0 é um elemento inversível em D .*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Se a_0 é um elemento inversível em D , então definimos, $b_0, b_1, \dots, b_n$ pelas expressões

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 &= 0 \end{aligned}$$

então $(a_0 + a_1 t + \dots)(b_0 + b_1 t + \dots) = 1$ (*).

($\Rightarrow$) Reciprocamente se $S(t)$ é um elemento inversível em $D[t]'$ então vale uma equação da forma (*) e, então, $a_0 b_0 = 1$ e a_0 é um elemento inversível.

2.3 PROPOSIÇÃO. Se K é um corpo, qualquer elemento do corpo de frações $K(t)'$ de $K[t]'$ pode ser escrito na forma

$$\frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots}{t^h}$$

onde $h \geq 0$.

Demonstração: Seja

$$f = \frac{b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n + \dots}{c_0 + c_1 t + \dots} \in K(t)',$$

e seja h o menor inteiro para o qual $c_h \neq 0$. Como K é um corpo, c_h é um elemento inversível, então $c_h + c_{h+1}t + c_{h+2}t^2 + \dots$ tem um inverso $d_0 + d_1 t + \dots$. Então segue que

$$f = \frac{(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n + \dots)(d_0 + d_1 t + \dots)}{t^h(c_h + c_{h+1}t + \dots)(d_0 + d_1 t + \dots)} = \frac{a_0 + a_1 t + \dots}{t^h}$$

E temos o resultado. ■

Podemos escrever $f = t^{-h}(a_0 + a_1 t + \dots) = a_0 t^{-h} + a_1 t^{-h+1} + \dots$, então a proposição anterior é importante porque nos diz que os elementos de $K(t)$ podem ser escritos como séries de potências formais com um número finito de termos com expoentes negativos. Elas podem ser adicionadas e multiplicadas como elementos de $K[t]'$. Todo elemento não-nulo de $K(t)'$ pode ser expresso unicamente da forma $f = t^n(a_0 + a_1 t + \dots)$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $a_0 \neq 0$. Diremos que o número n é a ordem de f , ou seja, a ordem é o menor expoente da variável. Se indicarmos a ordem de f por $O(f)$ nós temos as seguintes propriedades:

(i) $O(fg) = O(f) + O(g)$

(ii) $O(f + g) \leq \min[O(f), O(g)]$ e $O(f - g) \leq \min[O(f), O(g)]$.

2.1.2 O Corpo das Séries de Puiseux

O conceito de corpo das séries de potências fracionárias ou séries de Puiseux é uma extensão do conceito de séries de potências formais. Ao invés de usarmos o símbolo t , usamos o símbolo $t^{\frac{1}{n}}$. Introduzimos uma relação entre esses símbolos $t^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \dots$, definindo

$$t^{\frac{1}{1}} = t, \quad (t^{\frac{1}{rn}})^r = t^{\frac{1}{n}}, \quad t^{\frac{m}{n}} = (t^{\frac{1}{n}})^m.$$

Disto vai seguir que

$$(t^{\frac{1}{rn}})^{rm} = ((t^{\frac{1}{rn}})^r)^m.$$

Segue então a relação $(t^{\frac{1}{rn}})^r = t^{\frac{1}{n}}$ e, portanto através dessa identificação podemos considerar $K(t^{\frac{1}{n}})' \subseteq K(t^{\frac{1}{rn}})'$. Considere a união de todos esses corpos $K(t^{\frac{1}{n}})'$, $n = 1, 2, \dots$, ou seja $K(t)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(t^{\frac{1}{n}})'$. Se $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ são dois elementos de $K(t)^*$ então para algum n e para algum m , $\tilde{x} \in K(t^{\frac{1}{n}})'$, e $\tilde{y} \in K(t^{\frac{1}{m}})'$ e, portanto, $\tilde{x}, \tilde{y} \in K(t^{\frac{1}{mn}})'$. Sendo $K(t^{\frac{1}{mn}})'$ um corpo, então, a soma $\tilde{x} + \tilde{y}$, o produto $\tilde{x} \cdot \tilde{y}$ e o quociente $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ no caso em que $\tilde{y} \neq 0$ estão definidos e pertencem a $K(t^{\frac{1}{mn}})'$ e, portanto, a $K(t)^*$. Segue que $K(t)^*$ é um corpo. Como antes, a ordem da série é definida como o menor expoente da variável, a diferença é que agora a ordem pode ser uma fração. As séries de potências fracionárias assim definidas são chamadas **Séries de Puiseux**.

No nosso caso, tomaremos o corpo base $K = \mathbb{C}$. Neste caso, chamaremos de séries de Puiseux complexas, ou apenas, séries de Puiseux. É possível mostrar que o conjunto das Séries de Puiseux Complexas convergentes em alguma vizinhança de um ponto $\alpha \in \mathbb{C}$, formam um corpo, e mais, que esse corpo é algebricamente fechado (para uma demonstração consulte [29] (p. 103) ou Picard citado por [51] p. 102). Em nossas considerações, estaremos interessados no caso em que $\alpha = 0$, isto é, nas séries de Puiseux complexas convergentes em uma vizinhança da origem. Denotaremos o corpo formado por estas séries por $\mathcal{P}(t)$, ou simplesmente por $\mathcal{P}$. Como estamos considerando séries com expoentes possivelmente negativos, excluimos o ponto $t = 0 \in \mathbb{C}$.

2.2 Séries de Puiseux e Sistemas Polinomiais

Em matemática é frequente o aparecimento de sistemas de equações polinomiais, por isso o estudo das soluções de tais sistemas é muito importante. Na década 1970, Bernstein publicou [5], no qual estuda o problema de resolver um sistema de n equações em n variáveis. Trabalhos relacionados de Khovansky e Kushnirenko surgiram também nesta década. Um dos resultados destes trabalhos fornece um limite superior para o número de soluções em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ de um sistema de equações polinomiais com coeficientes arbitrários.

2.4 DEFINIÇÃO. Dizemos que o conjunto $\mathbf{T} := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ é o toro algébrico.

O limite mencionado é conhecido na literatura como limite BKK. Mais geralmente a teoria resultante destes trabalhos e de trabalhos posteriores é chamada **Teoria BKK**. Os resultados desta teoria também se aplicam no caso em que o número de equações difere do número de incógnitas. E a parte desta teoria que será importante para este trabalho é que ela fornece critérios para decidir se um sistema de equações polinomiais com coeficientes arbitrários tem um número finito de soluções.

Considere um sistema de m equações polinomiais em n variáveis complexas

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \in S_i} c_k x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

onde $k = (k_1, \dots, k_n) \in S_i$, $S_i \subset \mathbb{Z}^n$, S_i é um conjunto finito. Estamos interessados em soluções deste sistema tais que $x_i \neq 0$ para todo i . Isto é, queremos soluções tais que $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n = \mathbf{T}$, como $x_i \neq 0$ para todo i , faz sentido permitir que alguns dos expoentes k_i sejam negativos. Isto é, as funções f_i são polinômios de Laurent, mais especificamente $f_i \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

No entanto, ao se permitir que alguns expoentes sejam negativos não estamos acrescentando novas soluções no sistema. De fato, como as variáveis estão no toro algébrico, podemos sempre multiplicar cada equação $f_i(X) = 0$, pelo máximo divisor comum de seus monômios para obter uma equação que é equivalente a outra, em outras palavras, podemos retirar os denominadores das equações do sistema sem alterar as soluções.

Exemplo 2.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^{-3}y + 2xy^{-1} + 3x + 1 = 0, \\ f_2(x, y) = x^{-5}y^{-2} + 4x^{-3}y + 3xy = 0. \end{cases}$$

O máximo divisor comum dos monômios de f_1 é x^3y e para f_2 é x^5y^2 . Multiplicando obtemos então o novo sistema

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x, y) = y^2 + 2x^4 + 3x^4y + x^3y = 0, \\ \tilde{f}_2(x, y) = 1 + 4y^2 + 3x^4y^2 = 0, \end{cases}$$

que não possui termos com expoentes negativos e possui as mesmas soluções que o sistema anterior.

2.5 Observação. *A próxima proposição contém vários conceitos de geometria algébrica cujas definições e propriedades se encontram no apêndice.*

2.6 PROPOSIÇÃO. *Suponha que um sistema de m equações polinomiais $f_i(X) = 0$ como em 2.1 define uma variedade infinita $V \subset \mathbf{T}$. Então existe um vetor racional não-nulo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, um ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{T}$, e séries de Puiseux $x_j(t) = a_j t^{\alpha_j} + \dots$, $j = 1, \dots, n$ convergentes em alguma vizinhança perfurada U de $t = 0$ tais que $f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0$ em U , $i = 1, \dots, m$. Além do mais, se a projeção de V sobre o eixo x_l é dominante, então existe uma tal série-solução com $x_l(t) = t$ e uma outra com $x_l(t) = t^{-1}$.*

Demonstração: Seja $\mathbf{S} \subset \mathbb{C}^n$ a variedade algébrica afim definida pelo conjunto de equações do sistema (2.1), então $V = S \cap \mathbf{T}$, agora note que o complementar de $\mathbf{T}$, é a variedade algébrica afim definida pela equação $h_i(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n = 0$. Segue que o complementar de $\mathbf{T}$ é um fechado na topologia de Zariski, assim $\mathbf{T}$ é aberto. Logo, $V = S \cap T$ é um aberto de S na topologia induzida em S . Assim, V é uma variedade quasi-projetiva. Como por hipótese V é uma variedade infinita, então existe ao menos um eixo coordenado x_l , tal que a projeção sobre x_l , $\pi_l(V)$ é um conjunto infinito, pois caso contrário existiria apenas um conjunto finito de possibilidades para as coordenadas de V e o próprio V seria finito. Segue então que $\pi_l(V)$ é infinito, pela proposição (4.25) que pode ser encontrada no apêndice temos que $\pi_l(V)$ possui complementar finito. Então $\pi_l(V)$ é denso em $\mathbb{C}$ na topologia clássica. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $l = n$, pois se não fosse o caso, poderíamos fazer uma mudança de coordenadas. Vamos por $x_n(t) = t$ ou $x_n(t) = \frac{1}{t}$, (no caso em que $x_n(t) = \frac{1}{t}$, como estamos interessados apenas em $x_n \in \pi_n(V)$ e como $V \in T$ faz sentido por $x_n(t) = \frac{1}{t}$).

Agora definamos $F_j(x_1, \dots, x_{n-1}) = f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(t))$, veja que ao substituírmos $x_n(t)$ em cada equação em (2.1) obtemos um polinômio nas variáveis $x_1, \dots, x_{n-1}$ cujos coeficientes são polinômios de Laurent. Mas, polinômios de Laurent são elementos de $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}$, já que são séries de Puiseux complexas convergentes numa vizinhança perfurada de $t = 0$. Assim, podemos tirar os denominadores dos $F_j(x_1, \dots, x_n)$ sem introduzir novas soluções. Logo os F_j 's se tornam elementos de $\mathcal{P}[x_1, \dots, x_{n-1}]$, o anel de polinômios nas variáveis $x_1, \dots, x_{n-1}$ com coeficientes em $\mathcal{P}$. O sistema de equações, $F_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ define uma variedade afim no espaço $\mathcal{P}^{n-1}$. Seja W essa variedade.

Vamos mostrar que W possui ao menos um ponto com todas as coordenadas não-nulas, introduzimos uma outra variável x_0 , e uma outra equação

$$F_0(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} - 1 = 0.$$

Seja $\widetilde{W} \subset \mathcal{P}^n$, a variedade definida pelo conjunto de equações $F_0 = F_1 = \dots = F_m = 0$. Mostremos que $\widetilde{W}$ é não-vazia.

Se $\widetilde{W}$ é vazio então como $\mathcal{P}$ é algébricamente fechado, pelo corolário do teorema de Nullstellensatz no apêndice(4.27) podemos concluir que vale uma equação da forma

$$F_0 G_0 + F_1 G_1 + \dots + F_m G_m = 1, \quad (2.2)$$

onde $F_0, G_0, \dots, F_m, G_m$ são elementos de $\mathcal{P}[x_0, \dots, x_{n-1}]$.

Observemos que cada coeficiente de cada polinômio F_i ou G_i , $i = 0, \dots, m$ é uma série de Puiseux convergente numa vizinhança perfurada de $0 \in \mathbb{C}$. Ainda mais, existe um número finito de polinômios e, portanto, um número finito de coeficientes nesses polinômios, por conseguinte um número finito de vizinhanças de convergência dos coeficientes. Denotemos a coleção dessas vizinhanças $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$, onde L é um conjunto finito de índices. Veja que para cada $\alpha \in L$, $B_\alpha = A_\alpha \cup \{0\}$ ainda é uma vizinhança de 0, pois A_α é uma vizinhança perfurada de 0. Então $\bigcap_{\alpha \in L} B_\alpha$ é uma vizinhança de 0 e é não vazia pois contém o 0. Ainda mais, como $\{0\}$ é fechado então $\{0\} \subsetneq \bigcap_{\alpha \in L} B_\alpha$.

Logo se tomarmos $\widetilde{U} = \bigcap_{\alpha \in L} B_\alpha \setminus \{0\}$, então $\widetilde{U}$ é uma vizinhança perfurada de 0. Como $\pi_n(V)$ é denso em $\mathbb{C}$ (na topologia clássica) então tomando $x_n(t) \in \widetilde{U} \cap \pi_n(V)$, temos que existe $x_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n-1$ com $x_i \neq 0$ tal que $f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(t)) = 0$, para $j = 1, \dots, m$ o que torna $F_1 = \dots = F_m = 0$. Então, tomando $x_0 = (x_1 \dots x_{n-1})^{-1}$ obtemos também $F_0 = 0$. Substituindo em (2.2) obtemos uma contradição. Logo, $\widetilde{W}$ é não-vazia, em particular existe

um ponto em $W \subset \mathcal{P}^{n-1}$ com todas as coordenadas não-nulas, a saber o vetor formado pelas últimas $n - 1$ coordenadas de algum vetor de $\widetilde{W}$. As coordenadas desse ponto de W são as séries de Puiseux $x_i(t) = a_i t^{\alpha_i} + \dots$, $i = 1, \dots, n - 1$ não-nulas requeridas. A interseção de suas vizinhanças de convergência será U . E o resultado está demonstrado. ■

2.7 Observação. *Pela proposição anterior observemos ainda que $x_i(t)$ é uma série de Puiseux complexa convergente numa vizinhança da origem, em particular é contínua, se $\pi_i(V)$ é um conjunto finito, então $x_i(t)$ só assume um número finito de valores, concluímos que $x_i(t)$ é constante.*

Se α_i é a ordem da série de Puiseux $x_i(t)$, então diremos que o vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a ordem do vetor de séries de Puiseux $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. A proposição anterior nós dá um critério para determinar se V é finito, expresso pelo seguinte:

2.8 COROLÁRIO. *Se para todo vetor racional não-nulo α não existem séries de Puiseux solução de (2.1) de ordem α , então V é finito.*

O corolário nos será útil, no entanto analisar todos os vetores racionais $\alpha \in \mathbb{R}^n$ como possíveis ordens pode ser impossível. Seria então, útil se pudéssemos reduzir o conjunto de vetores ordem que necessitam ser analisados. No entanto, para conseguir isto precisamos dos resultados que seguem.

2.9 PROPOSIÇÃO. *Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ então existe uma matriz $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ com determinante igual a 1, tal que a matriz $R = QA$ é triangular superior.*

Demonstração: Se A é uma matriz 1×1 , não há nada a demonstrar. Suponha primeiro que

A é uma matriz 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com a, b, c , e $d \in \mathbb{Z}$. Considere então os dois casos:

a) Se a e c são primos entre si então existem α e β tais que $\alpha a + \beta c = 1$. Considere a matriz

$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ c & -a \end{pmatrix}$ Então $\text{Det}Q = 1$ e vale

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha a - \beta c & -\alpha b - \beta d \\ 0 & cb - ad \end{pmatrix}$$

e temos o resultado.

b) Se a e c não são primos entre si, então existem a' e c' inteiros tais que $a = mdc(a, c)a'$

e $c = \text{mdc}(a, c)c'$ com a' e c' primos entre si, com isto obtemos $a' = \frac{a}{\text{mdc}(a, c)}$ e $c' = \frac{c}{\text{mdc}(a, c)}$. Considere, então, α e β tais que $\alpha a' + \beta c' = 1$, e seja Q a matriz $Q = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ c' & -a' \end{pmatrix}$. Então

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ c' & -a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha a - \beta c & -\alpha b - \beta d \\ 0 & c'b - a'd \end{pmatrix}$$

e ainda $\text{Det}Q = 1$. Novamente temos o resultado.

Agora considere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

uma matriz $n \times n$. Considere a matriz $\tilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ tal que $\tilde{Q}_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é trian-

gular superior e seja $Q_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \mathbf{0}_{2 \times (n-2)} \\ \gamma & \delta & \\ \mathbf{0}_{(n-2) \times 2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$, então $\det Q_1 = 1$ e vale

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agora considere $\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ a matriz tal que $\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ é triangular superior e seja

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}_{(3 \times n-3)} \\ \gamma & 0 & \delta & \\ \mathbf{0}_{(n-3) \times 3} & I_{n-3} \end{pmatrix},$$

então $\text{Det}Q_2 = 1$ e vale

$$Q_2 \cdot (Q_1 A) = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \cdots & a''_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & \\ 0 & a'_{32} & & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Procedendo assim, produzimos uma matriz cujos elementos da primeira coluna são nulos, exceto o primeiro e $\text{Det}(Q_{n-1} \dots Q_1) = \text{Det}(Q_{n-1}) \dots \text{Det}(Q_1) = 1$. Agora, para produzir zeros abaixo do segundo elemento da segunda coluna, multiplicamos sucessivamente por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha & \beta & \mathbf{0}_{3 \times (n-3)} \\ 0 & \delta & \gamma & \\ \mathbf{0}_{(n-3) \times 3} & I_{n-3} & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \gamma \\ \mathbf{0}_{(n-4) \times 4} & & I_{n-4} & \end{pmatrix}, \dots,$$

Reiterando esse processo obtemos uma matriz triangular superior. Se Q é a matriz produto de todas as matrizes usadas na iteração então $\text{Det}Q = 1$ e Q é a matriz requerida. ■

A proposição anterior nos ajudará na demonstração da próxima, a qual por sua vez nos permitirá fazer mudanças de variáveis no toro algébrico.

2.10 PROPOSIÇÃO. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} \dots x_n^{c_{1n}} & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{c_{n1}} x_2^{c_{n2}} \dots x_n^{c_{nn}} & = & y_n \end{cases}$$

onde $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\forall i, j$ e $y_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então o número de soluções é $|\text{Det}(C)|$, onde $C = [c_{ij}]$.

2.11 Observação. Para fazer $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ estamos considerando que as variáveis estão em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Antes de demonstrarmos o resultado será útil ilustrar com um exemplo. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} = y_1, \\ x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}} = y_2. \end{cases}$$

Seja $Q = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ a matriz de determinante 1, tal que $QC = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$ é triangular superior. Então,

$$\begin{cases} x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} = y_1, \\ x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}} = y_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}})^{u_{11}} (x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}})^{u_{12}} = y_1^{u_{11}} y_2^{u_{12}}, \\ (x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}})^{u_{21}} (x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}})^{u_{22}} = y_1^{u_{21}} y_2^{u_{22}}. \end{cases}$$

O segundo sistema é obtido do primeiro por meio de substituição. Para provar que podemos obter o primeiro sistema do segundo, façamos

$$a = x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}}, \quad b = x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}}.$$

Então, o segundo sistema nos dá

$$\begin{cases} a^{u_{11}} b^{u_{12}} = y_1^{u_{11}} y_2^{u_{12}} & (I) \\ a^{u_{21}} b^{u_{22}} = y_1^{u_{21}} y_2^{u_{22}} & (II) \end{cases}.$$

Como $\text{Det } Q = 1$, então $u_{11}u_{22} = 1 + u_{21}u_{12}$. Elevando (I) a u_{22} obtemos

$$a^{u_{11}u_{22}} b^{u_{12}u_{22}} = y_1^{u_{11}u_{22}} y_2^{u_{12}u_{22}} \Rightarrow a a^{u_{21}u_{12}} b^{u_{12}u_{22}} = y_1 y_1^{u_{21}u_{12}} y_2^{u_{12}u_{22}} (*).$$

Agora, elevando (II) a u_{12} obtemos

$$a^{u_{21}u_{12}} b^{u_{22}u_{12}} = y_1^{u_{21}u_{12}} y_2^{u_{22}u_{12}}.$$

Logo, substituindo em (*) obtemos $a = y_1$ e daí substituindo em (I) obtemos $b = y_2$. E, portanto, temos a recíproca.

Mas, o segundo sistema nos dá

$$\begin{cases} x_1^{r_1} x_2^{r_3} = y_1^{u_{11}} y_2^{u_{12}} = z_1 \\ x_2^{r_2} = y_1^{u_{21}} y_2^{u_{22}} = z_2. \end{cases}$$

Esse último sistema possui $|r_2||r_1|$ soluções. Mas $|r_2||r_1| = \text{Det}(QC) = \text{Det}Q \cdot \text{Det}C = \text{Det}(C)$. Assim obtemos o resultado no caso de uma matriz 2×2 . A demonstração da proposição é apenas uma generalização deste argumento.

Demonstração: Se Q é a matriz tal que

$$QC = T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

é triangular superior, então o sistema original é equivalente a

$$\begin{cases} x_1^{r_{11}} x_2^{r_{12}} \dots x_n^{r_{1n}} = z_1, \\ x_2^{r_{22}} \dots x_n^{r_{2n}} = z_2, \\ \vdots \\ x_n^{r_{nn}} = z_n. \end{cases}$$

Como $\text{Det}(Q) = 1$ então $\text{Det}(T) = \text{Det}(Q) \cdot \text{Det}(C) = \text{Det}(C)$. Como o sistema acima tem $|r_{11}| |r_{22}| \dots |r_{nn}| = |\text{Det}(T)| = |\text{Det}(C)|$ soluções, o resultado está demonstrado. ■

A proposição anterior nos diz que se $C = [c_{ij}]$ é uma matriz tal que $|\text{Det}C| = 1$, então o sistema tem única solução. Mais ainda, seja D a matriz inversa de C , sabemos que D também é uma matriz com entradas inteiras já que $D = \frac{1}{\det(C)} \text{Adj}(C)$, onde $\text{Adj}(C)$ denota a adjunta clássica de C , isto é, a transposta da matriz de cofatores, cada cofator é um número inteiro, e temos $D = \pm \text{Adj}(C)$. Então, $DC = I$, ou seja, $DC = [\delta_{ij}]$ (δ de Kronecker). E como $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik} c_{kj}$.

Considere $x_i = y_1^{d_{1i}} \dots y_n^{d_{ni}}$, então

$$x_1^{c_{1i}} \dots x_n^{c_{ni}} = (y_1^{d_{11}} \dots y_n^{d_{n1}})^{c_{1i}} \dots (y_1^{d_{1n}} \dots y_n^{d_{nn}})^{c_{ni}} = y_1^{\delta_{1i}} \dots y_n^{\delta_{ni}} = y_i,$$

ou seja, $X = (x_1, \dots, x_n)$ é solução do sistema, e pela proposição anterior é a única. Em particular, podemos definir um isomorfismo no toro algébrico pondo

$$f_C : T \rightarrow T$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$$

onde $y_i = x_1^{c_{1i}} \dots x_n^{c_{ni}}$. Estaremos interessados em f_C pois ela vai definir uma mudança de variáveis em $\mathbf{T}$. É útil as vezes denotar $y = x^C$ e $x = y^D$. Mais um fato sobre matrizes que será de utilidade é a proposição que segue

2.12 PROPOSIÇÃO. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementos de um anel de ideais principais $\mathcal{B}$, com máximo divisor comum d_n . Então existe uma matriz de determinante d_n tendo $a_1, a_2, \dots, a_n$ como sua primeira linha.*

Para uma demonstração ver [32] (p.31). Se os números $a_1, a_2, \dots, a_n$ não tem fator comum, ou seja, se $d_n = 1$, então existe uma matriz A de determinante 1 cuja primeira linha

é $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Então, A^t também tem determinante 1, e tem $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ como primeira coluna. Sabemos que trocar colunas não altera o módulo do determinante, então trocando a primeira e a última coluna de A^t obtemos uma matriz tal que o módulo de seu determinante é 1, e tem $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ em sua n -ésima coluna. Estávamos interessados em um critério para reduzir a quantidade de vetores racionais α que precisaremos analisar como possíveis ordens de séries de Puiseux soluções do sistema (2.1) como dados pela Proposição (2.6). Estamos agora em posição de mostrar que podemos restringir os vetores ordem α a um semi-espço em $\mathbb{R}^n$.

2.13 PROPOSIÇÃO. *Seja $\mathcal{H}$ o semi-espço $\langle c, \alpha \rangle \geq 0$, onde $c = (c_1, \dots, c_n)$ é um vetor inteiro arbitrário não-nulo. Se o sistema (2.1) não tem séries de Puiseux solução de ordem α para todo $\alpha \in \mathcal{H}$ então ele tem uma quantidade finita de soluções em $\mathbf{T}$.*

Demonstração: Mostremos a contrapositiva, isto é, se o sistema tem uma quantidade infinita de soluções em T , então dado $c = (c_1, \dots, c_n)$ um vetor inteiro, existe uma série de Puiseux solução de ordem α , com α satisfazendo $\langle c, \alpha \rangle \geq 0$. No caso de infinitas soluções podemos aplicar a Proposição (2.6). Primeiro consideremos o caso onde $C = (0, \dots, 0, 1) = e_n$, isto é, o n -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Considere a projeção do conjunto solução sobre o eixo x_n , ela é infinita ou não. Se é infinita, então pela Proposição (2.6), existem séries de Puiseux solução da forma $x_j(t) = a_j t^{\alpha_j} + \dots$ para $1 < j \leq n-1$, e $x_n(t) = t$, que resolvem as equações, então o vetor expoente $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ satisfaz $\langle c, \alpha \rangle = 1 > 0$. Por outro lado se a projeção sobre o eixo x_n é finita, então pela observação após a proposição (2.6), então $x_n(t) = a_n$, e o vetor expoente $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ satisfaz $\langle c, \alpha \rangle = 0$. Em qualquer caso obtemos $\langle c, \alpha \rangle \geq 0$.

Para completar a prova, iremos reduzir o caso geral ao caso já considerado por um truque que também pode ser encontrado no artigo do Bernstein. Dado o vetor $C = (c_1, \dots, c_n)$ sem perda de generalidade, podemos supor que c_i 's não tem fatores comuns, (pois caso tivessem dividiríamos o vetor pelos fatores comuns, obtendo um vetor inteiro que define o mesmo semi-espço). Segue, então, que existe uma matriz $C = [c_{ij}]$ de entradas inteiras e com determinante de módulo 1, tal que $C = (c_1, \dots, c_n)$ é sua última coluna. Defina novas variáveis $y_i = x_1^{c_{1i}} x_2^{c_{2i}} \dots x_n^{c_{ni}}$, então se $D = C^{-1}$ temos $x_i = y_1^{d_{1i}} \dots y_n^{d_{ni}}$. Assim um monômio $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ se transforma em $(y_1^{d_{11}} \dots y_n^{d_{n1}})^{k_1} \dots (y_1^{d_{1n}} \dots y_n^{d_{nn}})^{k_n} = y_1^{\sum_{p=1}^n k_p d_{1p}} \dots y_n^{\sum_{p=1}^n k_p d_{np}}$.

Veja que $\sum_p k_p d_{ip}$ é a i -sima coordenada do vetor kD onde $k = (k_1, \dots, k_n)$ e D é a

matriz $D = [d_{ij}]$, resumindo $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ se transforma em $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_n^{l_n}$ onde $L = kD$ com $l = (l_1, \dots, l_n)$. Seja $g_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, m$ a equação obtida de $f_i(x_1, \dots, x_n)$ depois da substituição. Então, o sistema

$$\begin{cases} g_1(y) = 0, \\ \vdots \\ g_m(y) = 0, \end{cases}$$

também tem uma quantidade infinita de soluções em T . Se $y(t) = (b_1 t^{\beta_1} + \dots, \dots, b_n t^{\beta_n} + \dots)$ é uma série de Puiseux de ordem β , então $x_i(t) = (y_1(t))^{d_{1i}} \dots (y_n(t))^{d_{ni}} = \tilde{b} t^{\sum_k \beta_k d_{ki}} + \dots$, e $x(t)$ vai ser uma série de Puiseux solução de ordem α , onde $\alpha = \beta D \Rightarrow \alpha C = \beta$. Pelo primeiro caso como $g_1(y) = \dots = g_m(y) = 0$ tem uma quantidade infinita de soluções, então existe uma série de Puiseux solução de ordem β , $y(t)$, satisfazendo $\langle \beta, e_n \rangle \geq 0$. Então, $x(t) = y(t)^D$ é uma série de Puiseux solução de $f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$ de ordem α , com $\alpha C = \beta$. Pela construção da matriz C temos que $\langle \alpha, (c_1, \dots, c_n) \rangle = \alpha [c_1 \dots c_n]^t = \alpha (C \cdot e_n^t) = (\alpha C) e_n^t = \beta \cdot e_n^t = \langle \beta, e_n \rangle \geq 0$. E o resultado está demonstrado. ■

Para que as proposições anteriores sejam úteis devemos ter um meio de mostrar que uma série de Puiseux solução de uma determinada ordem não existe. Suponhamos que $x(t)$ é uma série de Puiseux de ordem α , então substituindo $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ nas equações se $x_i(t) = a_j t^{\alpha_j} + \dots$ obteremos um sistema o qual chamaremos de sistema reduzido, se formos levar em conta o coeficiente do termo de menor grau ele tem que ser nulo. Isto é, como $x(t)$ é solução de ordem α , então se $\mu_i = \min_{l \in S_i} \langle \alpha, l \rangle$, então μ_i vai ser o menor expoente da variável t ao substituir $x(t)$ em f_i e temos que ter o coeficiente nulo, ou seja,

$$f_{i\alpha}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{k \in S_i \\ \langle \alpha, k \rangle = \mu_i}} c_k a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} = 0, \quad (2.3)$$

para $i = 1, \dots, m$. Chamaremos esse último sistema de **sistema reduzido**. As observações anteriores nos permitem então enunciar a seguinte:

2.14 PROPOSIÇÃO. *Seja α um vetor racional não-nulo. Se o sistema reduzido (2.3) não tem solução em $\mathbf{T}$, então não existe série de Puiseux solução de sistema (2.1) de ordem α .*

Essa proposição é um ponto chave no trabalho, pois é através dela que podemos demonstrar o resultado de finitude, mostrando computacionalmente que nenhum sistema reduzido tem

solução. Em nossas considerações posteriores será possível dar uma interpretação geométrica a essa equação (2.3). Mas, antes precisamos de outros conceitos apresentados no próximo capítulo.

Capítulo 3

Teoria BKK

3.1 Geometria dos Politopos

Neste capítulo o objetivo é esboçar um pouco da teoria BKK e das definições e conceitos que envolvem os polítopos, bem como o Teorema de Bernstein.

3.1 DEFINIÇÃO. *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se contém todo segmento de reta que liga dois de seus pontos, isto é, se $x, y \in C$, então o segmento de reta ligando x e y é tal que $[x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\} \subset C$.*

Por exemplo, $\mathbb{R}^n$ é convexo. Então quando um conjunto não é convexo, podemos sempre encontrar um conjunto convexo que o contenha. Isto nos leva a próxima definição.

3.2 DEFINIÇÃO. *O fecho convexo de um conjunto C é o menor (com respeito a inclusão) conjunto convexo que contém C . Usaremos a notação $\text{Conv}(C)$ para denotar o fecho convexo do conjunto C .*

Segue facilmente da definição que uma interseção arbitrária (não-vazia) de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo. Deste fato, e da definição anterior segue que $\text{Conv}(C)$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém C .

3.3 DEFINIÇÃO. *Combinações lineares de elementos de C da forma $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$, onde $a_i \in C$, $i = 1, \dots, m$ e $\lambda_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, são chamadas combinações lineares convexas.*

A nomenclatura é justificada pela proposição que segue.

3.4 PROPOSIÇÃO. *Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\text{Conv}(C) = \{\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_m c_m, c_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}.$$

Demonstração: Seja $C' = \{\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_m c_m, c_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$. É obvio que $C \subset C'$. Agora vejamos que C' é convexo, se $x, y \in C'$, então $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ e $y = \sum_{j=1}^p \mu_j y_j$, $\sum_{j=1}^p \mu_j = 1$ e $x_i, y_j \in C$. Segue, então, que $\forall t \in [0, 1]$

$$tx + (1-t)y = t \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right) + (1-t) \left(\sum_{j=1}^p \mu_j y_j \right)$$

e temos $t\lambda_i \geq 0$, $(1-t)\mu_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m \lambda_i t + \sum_{j=1}^p (1-t)\mu_j = t + 1 - t = 1$ segue que $\text{Conv}(C) \subset C'$.

Agora mostremos que se C é convexo. Faremos indução no número de termos da combinação convexa. Se $m = 2$, não há nada a provar. Agora suponha que $m \geq 2$, e que combinações convexas de m elementos de C estão em C , e seja dada a combinação $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i c_i$, com $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. Assim $m \geq 2$ concluímos que ao menos um λ_i é estritamente menor que 1, por simplicidade suponhamos que é λ_{m+1} , segue que $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} + \dots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} = 1$ e $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}} \geq 0$. Pela hipótese de indução $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i \in C$, logo $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i + \lambda_{m+1} c_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1})z + \lambda_{m+1} c_{m+1} \in C$ pois C é convexo. Segue que $C' \subset C$ e, portanto, que $C' = C$. Agora observe que $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$. Como C' é convexo e contém C , obtemos

$$C \subset \text{Conv}(C) \subset C' \Rightarrow C' \subset \text{Conv}(C)' \subset (C')' = C',$$

mas $\text{Conv}(C) = \text{Conv}(C)'$. Logo $C' \subset \text{Conv}(C) \subset C'$ e segue a igualdade. ■

3.5 DEFINIÇÃO. *Um polítopo é o fecho convexo de um conjunto finito em $\mathbb{R}^n$. Se o conjunto finito é $C = \{c_1, \dots, c_r\} \subset \mathbb{R}^n$ então o polítopo correspondente pode ser expresso como $\text{Conv}(C) = \{\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r, c_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1\}$.*

Em dimensão menor ou igual a 3, os polítopos são objetos familiares da geometria. Por exemplo, um polítopo em $\mathbb{R}^3$ é um ponto, um segmento de reta, um polígono convexo contido em um plano, ou um poliedro.

3.6 DEFINIÇÃO. *Seja $P \in \mathbb{R}^n$ um polítopo, então a dimensão de P é a dimensão do menor subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ que contém P , a qual denotaremos por $\dim(P)$.*

Para nós, os polítopos mais importantes serão os polítopos que são fechos convexos de um conjunto de pontos com coordenadas inteiras. Eles são chamados **polítopos inteiros**. Então um polítopo inteiro P é um conjunto da forma $\text{Conv}(P)$ onde $P \subset \mathbb{Z}^n$, com P um conjunto finito. Um exemplo de polítopo inteiro que serão de especial importância é quando o conjunto P consiste de todos os expoentes que aparecem em um polinômio. Mais adiante veremos isto em detalhes.

Faces de um Politopo

Se olharmos um polítopo tridimensional de $\mathbb{R}^3$, o mesmo tem subconjuntos particulares que chamamos vértices que são ‘pontos extremos’ do polítopo, arestas que são segmentos de reta ligando dois vértices, e faces que são polígonos contidos em um plano. Veja que esses conjuntos mencionados acima tem dimensões 0, 1 e 2 respectivamente. Na teoria geral chamaremos esses conjuntos de faces k -dimensionais, onde k é a dimensão correspondente. Iremos formalizar esses conceitos.

Sabemos da álgebra linear que um hiperplano afim $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ é um espaço $(n - 1)$ -dimensional definido por $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle = a\}$ onde $a \in \mathbb{R}$ e u é um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^n$. Definimos os semi-espacos $\mathcal{H}_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle \geq a\}$ e $\mathcal{H}_- := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle \leq a\}$.

3.7 DEFINIÇÃO. *Um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ se chama hiperplano de apoio de um conjunto fechado e convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ se $K \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ e $K \subset \mathcal{H}_-$ ou $K \subset \mathcal{H}_+$. Neste caso também dizemos que $\mathcal{H}_-$ e (ou) $\mathcal{H}_+$ é um semi-espaço de apoio.*

De agora em diante, por conveniência, suporemos que sempre que $\mathcal{H}$ é um hiperplano de apoio de K então $K \subset \mathcal{H}_-$, no entanto, mais adiante, veremos que podemos equivalentemente supor sempre que $K \subset \mathcal{H}_+$.

3.8 DEFINIÇÃO. *Seja $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle = a\}$ um hiperplano de apoio do conjunto K então o vetor u se chama vetor externo normal de K e o vetor $(-u)$ se chama vetor interno normal de K .*

3.9 DEFINIÇÃO. *Seja K um conjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$. A função $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h_K(u) = \max_{y \in K} \langle y, u \rangle$ se chama função suporte de K . (Observe que como K é compacto e $\langle \cdot, u \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então h_k está bem definido).*

3.10 LEMA. *Seja K um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$.*

- a) *Para todo $u \neq 0$, $H_K(u) = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle = h_K(u)\}$ é um hiperplano de apoio de K .*
- b) *Todo hiperplano de apoio de K pode ser escrito como no item anterior.*

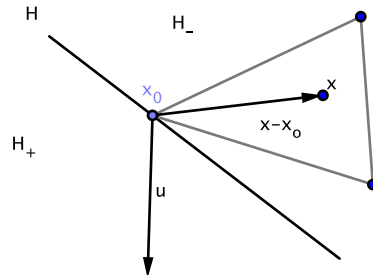
Demonstração: a) K é compacto e a função $\langle \cdot, u \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, portanto, existe $x_0 \in K$ tal que $\langle x_0, u \rangle = h_K(u) = \max_{x \in K} \langle x, u \rangle$, ou seja, $K \cap H_K(u) \neq \emptyset$ e também temos $\langle y, u \rangle \leq \langle x_0, u \rangle$, $\forall y \in K$, ou seja $K \subset H_K(u)_-$.

b) Seja $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle = a\}$ um hiperplano de apoio de K , tome $x_0 \in K$ tal que $\langle x_0, u \rangle = a$ (tal x_0 existe pela definição de hiperplano de apoio). Então, como $K \subset \mathcal{H}_-$, temos $\forall x \in K \quad \langle x, u \rangle \leq \langle x_0, u \rangle = a$, ou seja $a = \max_{x \in K} \langle x, u \rangle = h_K(u)$. ■

3.11 Observação. *Seja $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, u \rangle = a\}$ um hiperplano de apoio para K , então temos que $K \subset \mathcal{H}_-$, isto é, $\forall y \in K$, $\langle y, u \rangle \leq a$ então $a = \max_{y \in K} \langle y, u \rangle$. Seja $\tilde{\mathcal{H}} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, -u \rangle = -a\}$ então claramente $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Porém $\langle y, u \rangle \leq a \Rightarrow \langle y, -u \rangle \geq -a \forall y \in K$. Logo $K \subset \tilde{\mathcal{H}}_+$ e $-a = \min_{y \in K} \langle y, -u \rangle$. O vetor u continua sendo chamado vetor externo normal a K e o vetor $-u$ é o vetor interno normal. Segue então que as maneiras de escolher o semi-espaco onde o conjunto está são equivalentes. Há uma razão natural para chamar u de vetor externo normal. Seja $x_0 \in K$ tal que $\langle x_0, u \rangle = a$. Então, se $x \in K$,*

$$\langle x - x_0, u \rangle \geq \langle x, u \rangle - \langle x_0, u \rangle = \langle x, u \rangle - a \leq 0.$$

Portanto concluímos que o ângulo entre $x - x_0$ e u é obtuso, ou seja u aponta no sentido de $\mathcal{H}_+$, ou seja, no sentido exterior ao conjunto.



Uma observação importante e que será usada posteriormente é que os vértices do polítopo, são pontos que minimizam o produto interno com o vetor interno normal.

3.12 DEFINIÇÃO. *Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de apoio de um polítopo P de dimensão n . Dizemos que F é uma face de P , se $F = P \cap \mathcal{H}$.*

Note que F é um conjunto convexo, pois é interseção de dois convexos. Em particular, veremos que se $P = \text{Conv}(C)$, então F é o fecho convexo dos pontos de C que estão sobre $\mathcal{H}$. Portanto, F também é um polítopo. Do lema anterior deduzimos que para todo vetor não-nulo $u \in \mathbb{R}^n$ o conjunto $F_P(u) = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_p(u)\}$ é uma face de P .

3.13 DEFINIÇÃO. *Dizemos que $F_P(u) = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_p(u)\}$ é a face determinada por u ou a face induzida por u .*

3.14 PROPOSIÇÃO. *Sejam F_0 e F_1 faces de um polítopo P tal que $F_0 \subset F_1$. Então F_0 é uma face de F_1 .*

Demonstração: Suponhamos que $F_0 = P \cap \mathcal{H}_0$, onde $\mathcal{H}_0$ é um hiperplano de apoio de P , temos portanto que $F_1 \cap \mathcal{H}_0 \subset P \cap \mathcal{H}_0 = F_0 \subset F_1 \cap \mathcal{H}_0 \Rightarrow F_0 = F_1 \cap \mathcal{H}_0$ e daí F_0 é uma face de F_1 . ■

3.15 TEOREMA. *Todo polítopo tem uma quantidade finita de faces. Mais ainda, estas faces são também polítopos.*

Demonstração: Seja $P = \text{Conv}(x_1, \dots, x_r)$ um polítopo, $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq a\}$ um hiperplano de apoio de P e seja $F = P \cap H$ a face de P associada de modo que $P \subset H_-$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_1, \dots, x_s$ são pontos de H e que $x_{s+1}, \dots, x_r$ são pontos pertencentes a $\text{int}H_-$ onde $\text{int}H_-$ é o conjunto dos pontos interiores a H_- . Logo,

$$\langle x, u \rangle = a, \quad \forall j = 1, \dots, s;$$

$$\langle x, u \rangle < a \quad \forall j = s+1, \dots, r.$$

Se $x \in P$, então $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r$ com $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ e $\lambda_j \geq 0$. Definamos $b_j = a - \langle x_j, u \rangle$, para $j = s+1, \dots, r$, então $b_j > 0$. Temos

$$\langle x, u \rangle = \sum_{j=1}^r \lambda_j \langle x_j, u \rangle = \sum_{j=1}^s \lambda_j \langle x_j, u \rangle + \sum_{j=s+1}^r \lambda_j \langle x_j, u \rangle = \sum_{j=1}^s \lambda_j a + \sum_{j=s+1}^r \lambda_j (a - b_j) = a - \sum_{j=s+1}^r \lambda_j b_j \leq a.$$

Temos que $x \in H \Leftrightarrow \sum_{j=s+1}^r \lambda_j b_j = 0 \Leftrightarrow \lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \dots = \lambda_r = 0$ já que $b_j \geq 0$ e $\lambda_j \geq 0, \forall j = s+1, \dots, r$. Da equivalência acima deduzimos que se $x \in F$, então x é uma

combinação linear convexa de $x_1, \dots, x_s$, ou seja, $\mathcal{H} \cap P = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_s\})$, logo $F = H \cap P$ é um polítopo. Em particular, como o conjunto das partes de $\{x_1, \dots, x_r\}$ é finito, o número de fechos convexos de subconjuntos de $\{x_1, \dots, x_r\}$ é também finito e portanto, o polítopo tem um número finito de faces já que cada face é o fecho convexo de um subconjunto de $\{x_1, \dots, x_r\}$. ■

Pelo teorema anterior faz sentido definir a dimensão das faces de um polítopo.

3.16 DEFINIÇÃO. *A dimensão de uma face de um polítopo é a dimensão do menor espaço afim que contém essa face. As faces de dimensão zero são chamadas vértices do polítopo, e denotamos o conjunto de vértices de um polítopo P por $\text{Vert}(P)$. Chamamos as faces de dimensão 1 de arestas e se o polítopo tem dimensão n chamamos as faces de dimensão $n - 1$ de facetas.*

Observe também que no caso polítopo $P \in \mathbb{R}^n$ de dimensão n , o vetor que induz uma faceta do polítopo é único (a menos de multiplicação por constante). De fato, a faceta está contida no hiperplano e tem a mesma dimensão que ele, logo o vetor normal à faceta, e portanto ao plano é único. Aqui é importante notar que se consideramos o conjunto $K \subset \mathcal{H}_+$, então os pontos do conjunto que estão sobre uma determinada face são os pontos do polítopo que minimizam o produto interno com o vetor normal interno.

3.17 DEFINIÇÃO. *O número de faces k -dimensionais de um polítopo P é denotado por $f_k(P)$, $k = 0, \dots, n - 1$. Definimos o f -vetor de P (representado por $f(P)$) como*

$$f(P) := (f_0(P), \dots, f_{n-1}(P)).$$

3.18 DEFINIÇÃO. *Um conjunto poliedral é a interseção de uma quantidade finita de semi-espacos em $\mathbb{R}^n$.*

3.19 TEOREMA. *Um subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ é um polítopo se, e somente se, é um conjunto poliedral limitado.*

Para uma demonstração veja [16] (p. 30), ver também [44] (p. 96 e 97).

Se conhecemos as faces de um polítopo, então conhecemos também seus hiperplanos de apoio. Combinando os dois teoremas anteriores, vemos que um polítopo é a interseção de seus hiperplanos apoio e, portanto, determinamos o polítopo a partir de suas faces. Podemos

ainda recuperar o polítopo a partir de suas faces de dimensão $\mathbf{0}$, ou seja, se conhecermos seus vértices, então determinamos o polítopo. Este resultado é expresso pelo teorema que segue.

3.20 TEOREMA. (*Teorema de Krein-Milman*) Cada polítopo é o fecho convexo de seus vértices, isto é, $P = \text{Conv}(\text{Vert}(P))$.

Para uma demonstração ver também [16] (p. 30).

3.1.1 Soma de Minkowski

A estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ induz operações entre polítopos. É uma construção que tem especial importância é a soma entre dois polítopos. Vejamos a definição.

3.21 DEFINIÇÃO. Sejam $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n$ polítopos, então a soma de Minkowski de P_1 e P_2 , representada como $P_1 + P_2$, é o conjunto

$$P_1 + P_2 := \{x + y, x \in P_1, y \in P_2\}.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então definimos $\lambda P_1 = \{\lambda x, x \in P_1\}$.

Em particular, segue diretamente da definição que a soma de Minkowski é associativa e comutativa. É fácil mostrar que λP_1 é um polítopo.

3.22 TEOREMA. Se P_1 e P_2 são polítopos então $P = P_1 + P_2$ é um polítopo. Mais ainda, se P_1 e P_2 são polítopos inteiros então $P = P_1 + P_2$ é um polítopo inteiro.

Demonstração: De fato, suponha que $P_1 = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$ e $P_2 = \text{Conv}(\{y_1, \dots, y_k\})$, então seja

$$P = P_1 + P_2 = \text{Conv}(\{x_i + y_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(r,k)}).$$

Se $z \in P$, então $z = x + y$ com $x \in P_1$ e $y \in P_2$, logo $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i$ e $y = \sum_{j=1}^k \beta_j y_j$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e $\sum_{j=1}^k \beta_j = 1$.

Defina $\gamma_{ij} = \alpha_i \beta_j$. Então temos $\gamma_{ij} = \alpha_i \beta_j \geq 0$ e $\sum_{i,j} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_j =$

$\sum_{j=1}^k \beta_j (\sum_{i=1}^r \alpha_i) = \sum_{j=1}^k \beta_j = 1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \gamma_{ij}(x_i + y_j) &= \sum_{i,j} \gamma_{ij}x_i + \sum_{i,j} \gamma_{ij}y_j \\ &= \left(\sum_j \beta_j \right) \left(\sum_i \alpha_i x_i \right) + \left(\sum_i \alpha_i \right) \left(\sum_j \beta_j y_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^k \beta_j y_j = x + y = z. \end{aligned}$$

Ou seja, $z \in \text{Conv} \left(\{x_i + y_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(r,k)} \right)$.

Por outro lado, temos $\{x_i + y_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(r,k)} \subset P_1 + P_2$. Mas, P é convexo, pois se $z_1, z_2 \in P_1 + P_2$, então $z_1 = a_1 + b_1$ e $z_2 = a_2 + b_2$, com $a_1, a_2 \in P_1$ e $b_1, b_2 \in P_2$. Logo $\forall t \in [0, 1]$,

$$tz_1 + (1-t)z_2 = t(x_1 + y_1) + (1-t)(x_2 + y_2) = tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2.$$

Como P_1 e P_2 são convexos, $tx_1 + (1-t)x_2 \in P_1$ e $ty_1 + (1-t)y_2 \in P_2$, $\forall t \in [0, 1]$. Disto segue que $\text{Conv} \left(\{x_i + y_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(r,k)} \right) \subset \text{Conv}(P_1 + P_2) = P_1 + P_2 \subset \text{Conv} \left(\{x_i + y_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(r,k)} \right)$ e, portanto, a proposição está demonstrada. ■

Em particular, veja que a proposição nos fornece um método de calcular efetivamente a soma de Minkowski de dois polítopos. Basta somar seus vértices e então tomar o fecho convexo.

3.23 PROPOSIÇÃO. *Sejam $P_1, \dots, P_r$ polítopos em $\mathbb{R}^n$ e seja $P = P_1 + P_2 + \dots + P_r$ a sua soma de Minkowski. Então toda face P' de P pode ser expressa como uma soma de Minkowski*

$$P' = P'_1 + \dots + P'_r,$$

onde P'_i é uma face de P_i .

Demonstração: Sem perda de generalidade suponhamos que $r = 2$ (o caso geral é análogo). Seja $F_{P_1+P_2}(u)$ a face de $P_1 + P_2$ induzida pelo vetor u mostremos que $F_{P_1+P_2}(u) = F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u)$. De fato, $F_{P_1+P_2}(u) = \mathcal{H}_{P_1+P_2}(u) \cap (P_1 + P_2) = \{x \in P_1 + P_2 \mid \langle x, u \rangle = h_{P_1+P_2}(u)\}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} h_{P_1+P_2}(u) &= \max_{y \in P_1+P_2} \langle y, u \rangle = \max_{y_1 \in P_1} \langle y_1, u \rangle + \max_{y_2 \in P_2} \langle y_2, u \rangle \\ &= h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Logo, $F_{P_1+P_2}(u) = \{x \in P_1 + P_2 \mid \langle x, u \rangle = h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u)\}$. Mas,

$$\begin{aligned} F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u) &= (\mathcal{H}_{P_1}(u) \cap P_1) + (\mathcal{H}_{P_2}(u) \cap P_2) \\ &= \{x_1 \in P_1 \mid \langle x_1, u \rangle = h_{P_1}(u)\} + \{x_2 \in P_2 \mid \langle x_2, u \rangle = h_{P_2}(u)\} \\ &= \{x_1 + x_2, x_1 \in P_1 \text{ e } \langle x_1, u \rangle = h_{P_1}(u), x_2 \in P_2 \text{ e } \langle x_2, u \rangle = h_{P_2}(u)\}. \end{aligned}$$

Logo segue que $F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u) \subset F_{P_1+P_2}(u)$. Agora, se $x \in F_{P_1+P_2}(u)$ então $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in P_1$ e $x_2 \in P_2$ temos então

$$h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u) = h_{P_1+P_2}(u) = \langle x, u \rangle = \langle x_1, u \rangle + \langle x_2, u \rangle \leq h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u).$$

Como $\langle x_1, u \rangle \leq h_{P_1}(u)$ e $\langle x_2, u \rangle \leq h_{P_2}(u)$ obtemos, $\langle x_1, u \rangle = h_{P_1}(u)$ e $\langle x_2, u \rangle = h_{P_2}(u)$, logo $x \in F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u)$, e portanto

$$F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u) = F_{P_1+P_2}(u).$$

■

Na verdade, o resultado que obtivemos no teorema anterior é mais forte que o enunciado, pois a demonstração nos diz que cada face do polítopo soma de Minkowski induzida pelo vetor não-nulo u é soma das respectivas faces induzidas por u em cada somando.

Como cada polítopo é um conjunto compacto podemos medir seu volume.

3.24 DEFINIÇÃO. *Seja $Vol_n()$ o volume n -dimensional dos conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$, então $Vol_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r)$ é o volume da soma de Minkowski $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$*

3.25 PROPOSIÇÃO. *Considere qualquer coleção $P_1, \dots, P_r$ de polítopos em $\mathbb{R}^n$, e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ números reais não-negativos. Então, $Vol_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r)$ é uma função polinomial de grau n nos λ_i .*

Para uma demonstração ver [11] (p. 321) ou [16] (p. 116). No caso de n polítopos em $\mathbb{R}^n$, um invariante geométrico ganha um papel crucial pelo fato de estar relacionado com o teorema de principal importância para nós, a saber o teorema de Bernstein.

3.26 DEFINIÇÃO. *O volume misto n -dimensional de uma coleção de polítopos $P_1, \dots, P_n$ denotado por $MV_n(P_1, \dots, P_n)$ é o coeficiente do monômio $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ em $Vol_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)$.*

A seguir damos algumas das propriedades do volume misto.

3.27 TEOREMA. *a) O volume misto $MV_n(P_1, \dots, P_n)$ é invariante se os P_i 's são substituídos por suas imagens por transformações que preservam volume (por exemplo a translação).*

b) $MV_n(P_1, \dots, P_n)$ é simétrico e linear em cada variável.

c) $MV_n(P_1, \dots, P_n) \geq 0$. Além do mais $MV_n(P_1, \dots, P_n) = 0$ se um dos P_i tem dimensão zero (isto é, se P_i consiste de um único ponto), e $MV_n(P_1, \dots, P_n) > 0$ se todos os P_i tem dimensão n .

d) O volume misto de qualquer coleção de polítopos pode ser calculado como

$$MV_n(P_1, \dots, P_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=k}} Vol_n \left(\sum_{i \in I} P_i \right)$$

onde $\sum_{i \in I} P_i$ é a soma de Minkowski dos polítopos.

Para uma demonstração ver [11] (p. 323).

3.2 Polítopos de Newton e o Teorema de Bernstein

Existe uma conexão entre polítopos inteiros e polinômios. Seja $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, isto é, f é um polinômio de Laurent com coeficientes em $\mathbb{C}$. Representamos f do seguinte modo

$$f(X) = \sum_{k \in S} c_k X^k,$$

onde $k = (k_1, \dots, k_n) \in S$, S é um conjunto finito contido em $\mathbb{Z}^n$, para o qual vale $k \in S_i \Rightarrow c_k \neq 0$. A expressão X^k significa $X^k := x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. O conjunto S é chamado o suporte de f .

Veja que seguem imediatamente da definição de X^k as seguintes propriedades:

a) $X^\alpha \cdot X^\beta = X^{\alpha+\beta},$

b) $X^\alpha \cdot X^{-\alpha} = X^0 = 1.$

3.28 DEFINIÇÃO. *Seja f um polinômio de Laurent. O polítopo de Newton de f é o fecho convexo do suporte de f . Usaremos a notação $NP(f)$ para denotar o polítopo de Newton de f . Temos $NP(f) = \text{Conv}(S)$.*

Veja que, se f é um polinômio de Laurent, então em particular $NP(f)$ é um polítopo inteiro. Um fato importante e que será de utilidade em nosso trabalho é que para encontrar o polítopo de Newton de um polinômio f , não importa realmente o valor dos coeficientes, mas apenas quais coeficientes são não-nulos. Por exemplo, considere o polinômio

$$f = axy + bx^2 + cy^5 + d,$$

com $a, b, c, d \neq 0$. Então, $NP(f) = \text{Conv}((1, 1)(2, 0)(0, 5)(0, 0))$.

Segue facilmente a seguinte propriedade $NP(X^\alpha f) = \alpha + NP(f)$. Em particular multiplicar um polinômio não altera o volume de seu polítopo de Newton. Mais ainda, vale o seguinte resultado

$$NP(f.g) = NP(f) + NP(g),$$

onde a soma no segundo membro é a soma de Minkowski dos polítopos de Newton correspondentes (esta propriedade segue da Proposição 3.22). Então a soma de Minkowski de polítopos de Newton reflete a operação algébrica de multiplicar os polinômios correspondentes. Agora suponha que nós fixamos conjuntos finitos $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_l \subset \mathbb{Z}^n$. Para cada $\mathcal{A}_i$, podemos associar um conjunto $L(\mathcal{A}_i)$ de polinômios de Laurent

$$f_i = \sum_{k \in \mathcal{A}_i} c_{i,k} X^k.$$

3.29 DEFINIÇÃO. *Uma propriedade é dita valer genericamente para os polinômios de Laurent $(f_1, \dots, f_l) \in L(\mathcal{A}_1) \times \dots \times L(\mathcal{A}_l)$ se existe um polinômio não-nulo nos coeficientes dos f_i tal que a propriedade vale para todos $f_1, \dots, f_l$ para os quais o polinômio é não-nulo.*

O resultado que segue é de suma importância na obtenção de um limite superior para o número de equilíbrios relativos.

3.30 TEOREMA. (Teorema de Bernstein) *Dados polinômios de Laurent $f_1, \dots, f_n$ sobre $\mathbb{C}$ em n variáveis com uma quantidade finita de zeros comuns em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, seja $P_i = NP(f_i)$ o polítopo de Newton de f_i em $\mathbb{R}^n$. Então o número de zeros comuns dos f_i em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ é limitado superiormente pelo volume misto $MV_n(P_1, \dots, P_n)$. Além do mais, para escolhas genéricas dos coeficientes dos f_i , o número de soluções comuns é exatamente $MV_n(P_1, \dots, P_n)$.*

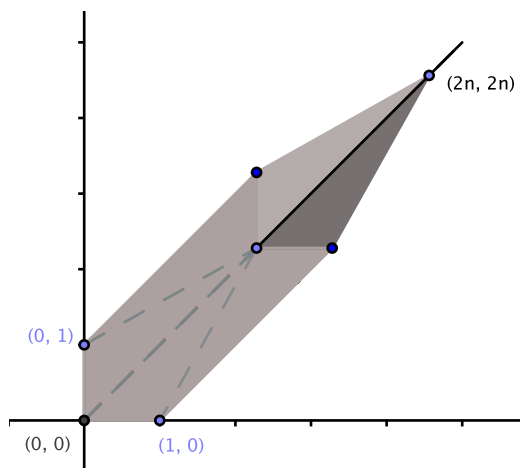
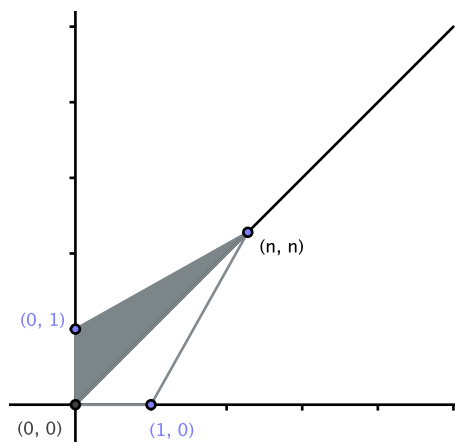
Para uma demonstração ver [11] (p. 331). O teorema de Bernstein é um resultado melhor que o teorema de Bézout ([11], p. 91) que afirma que se temos um sistema de equações

$f_1 = \dots = f_n = 0$, onde f_i tem grau d_i , então o número de soluções do sistema contando as multiplicidades é no máximo $d_1 \dots d_n$. Veja uma ilustração abaixo

Exemplo 3.1. 1: Considere o sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 1 + x + x^n y^n = 0 \\ f_2(x, y) = 1 + y + x^n y^n = 0 \end{cases}$$

Então $NP(f_1) = \text{Conv}(\{(0, 0), (1, 0), (n, n)\})$ e $NP(f_2) = \text{Conv}(\{(0, 0), (0, 1), (n, n)\})$, as figuras mostram o polítopo e sua soma de Minkowski.



Pelo teorema (3.27) letra d), para dois polítopos o volume misto se reduz a

$$\begin{aligned} MV_2(P_1, P_2) &= \sum_{k=1}^2 (-1)^{2-k} \sum_{\substack{I \subset \{1,2\} \\ \#I=k}} Vol_2(\sum_{i \in I} P_i) = \\ &= (-1)^1 (Vol_2(P_1) + Vol_2(P_2)) + (-1)^2 Vol_2(P_1 + P_2) = Vol_2(P_1 + P_2) - Vol_2(P_1) - Vol_2(P_2). \end{aligned}$$

Neste caso a diferença acima se reduz às áreas dos dois paralelogramos. Cada paralelogramo tem área n e então o volume misto é $2n$. Para podermos aplicar o teorema de Bernstein temos primeiro que verificar se o sistema possui um número finito de soluções no toro algébrico.

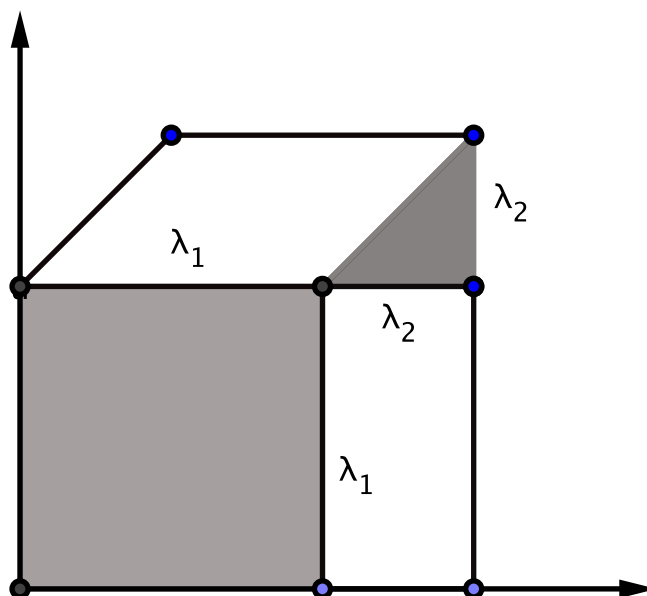
Tomando a diferença entre as duas equações, obtemos $0 = f_1 - f_2 = x - y \Rightarrow x = y$. Substituindo em f_1 , obtemos $1 + x + x^{2n} = 0$, que sabemos ter um número finito de soluções e ainda mais que são todas não-nulas. Pelo teorema de Bernstein, o número de soluções do sistema é no máximo $2n$. Só para efeito de comparação, o teorema de Bézout nos fornece um limite superior de $(2n)^2$. Então, por exemplo, para $n = 10$, o limite superior do teorema Bézout é 400 soluções enquanto o limite superior de Bernstein é de 20 soluções.

Exemplo 3.2. Considere a equação polinomial $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n = 0$, com $a_0, a_n \neq 0$. Então $NP(f) = \text{Conv}(\{0, n\}) = [0, n]$, o volume misto é, portanto, igual ao volume unidimensional $V_1 = n$. O teorema de Bernstein prevê que o polinômio possui no máximo n soluções não-nulas, como já sabíamos do Teorema Fundamental da Álgebra. Ainda, se $a_0 = 0$, seja a_k o coeficiente de menor índice para o qual $a_k \neq 0$. Então $NP(f) = \text{Conv}(\{k, m\}) = [k, m]$, logo $MV_1 = m - k$, é o número máximo de soluções não-nulas do sistema.

Exemplo 3.3. Considere o sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 1 + xy = 0, \\ f_2(x, y) = 1 + x + y + xy = 0. \end{cases}$$

Tomando a diferença $0 = f_2 - f_1 = x + y \Rightarrow x = -y$. Substituindo em f_1 , obtemos $1 - x^2 = 0$, logo as soluções são $\{(1, -1), (-1, 1)\}$. Portanto o sistema possui um número finito de soluções no toro algébrico $\mathbf{T}$. Temos $NP(f_1) = \text{Conv}(\{(0, 0), (1, 1)\})$ e $NP(f_2) = \text{Conv}(\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\})$. Na figura abaixo é mostrado o polítopo $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.



Veja que o volume 2-dimensional de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ é dado por $V_2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2$. Como esperavamos $V_2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$ é uma função polinomial homogênea de grau 2 nas variáveis λ_1, λ_2 . Aqui podemos obter o volume misto diretamente de sua definição, $MV_2(P_1, P_2) = 2$. Pelo teorema de Bernstein, o número máximo de soluções do sistema no toro algébrico é 2.

Em geral é muito difícil calcular o volume misto de uma coleção de polítopos diretamente da definição. Entretanto, existem programas computacionais como **Mixvol** que realizam o cálculo aplicando outros métodos.

3.3 Leques

3.31 DEFINIÇÃO. Um cone $C \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto com a propriedade de que, se C contém um conjunto finito de vetores $\{v_1, \dots, v_r\}$, então C contém também todas as combinações lineares da forma $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$ com $\lambda_i \geq 0$.

Segue diretamente da definição que todo cone é um conjunto convexo, já que se x e y pertencem a um cone, então $tx + (1-t)y$ também pertence, $\forall t \in [0, 1]$. Em particular, todo cone contém $\mathbf{0}$. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ cada quadrante é um cone. Note também que $\mathbb{R}^n$ é um cone, também $\{\mathbf{0}\}$ é um cone e a interseção cones sempre contém $\mathbf{0}$. Segue facilmente da definição de cone que uma interseção arbitrária de uma família de cones é ainda um cone (note também que a interseção é não-vazia, pois contém ao menos o $\mathbf{0}$). Isto nos leva à seguinte definição.

3.32 DEFINIÇÃO. Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto arbitrário não-vazio. Então, o cone de Y , representado por $\text{Cone}(Y)$, é a interseção de todos os cones que contêm Y .

3.33 Observação. Note que sempre existe ao menos um cone contendo Y , a saber o $\mathbb{R}^n$.

Similarmente ao caso para fechos convexos, pode-se mostrar que

$$\text{Cone}(Y) = \{\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k, y_i \in Y, \lambda_i \geq 0, \forall i\}$$

3.34 DEFINIÇÃO. Quando podemos tomar um conjunto finito $\{y_1, \dots, y_k\} \subset Y$ tal que $\text{Cone}(Y) = \{\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k, y_i \in Y, \lambda_i \geq 0\}$ então o cone é dito ser **finitamente gerado**, e os vetores $y_1, \dots, y_k$ são chamados geradores.

Vale então o seguinte resultado

3.35 PROPOSIÇÃO. *Um cone $C \subset \mathbb{R}^n$ é finitamente gerado se, e somente, se é uma interseção finita de semi-espacos*

Para uma demonstração veja [56] (p.30). Os cones finitamente gerados são chamados então **cones poliedrais**. Faces de cones são definidas do mesmo modo como para polítopos.

3.36 DEFINIÇÃO. *Um leque em $\mathbb{R}^n$ é uma família $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de cones poliedrais não-vazios com as duas seguintes propriedades:*

- (i) *Toda face não-vazia de um cone em $\mathcal{F}$ é também um cone em $\mathcal{F}$;*
- (ii) *A interseção de quaisquer dois cones em $\mathcal{F}$ é uma face de ambos. O leque é dito ser completo se $\bigcup_{i=1}^k C_i = \mathbb{R}^n$. O leque é dito ser pontuado se $\{0\}$ é um cone de $\mathcal{F}$ (e então é uma face de todo cone em $\mathcal{F}$).*

Uma construção que se mostrará importante para nós, é o leque normal de um polítopo, que a grosso modo é o conjunto dos funcionais lineares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que se maximizam sobre uma face dada. Vejamos isto mais formalmente. Denotaremos por $(\mathbb{R}^n)^*$ o dual de $\mathbb{R}^n$.

3.37 DEFINIÇÃO. *Seja P um polítopo. Para toda face de P definimos*

$\mathcal{N}_F := \{f \in (\mathbb{R}^n)^* | F \subset \{x \in P | f(x) = \max_{y \in P} f(y)\}\}$. *Então, o leque normal de P será definido como $\mathcal{N}(P) := \{\mathcal{N}_F | F \text{ é face de } P\}$.*

Vamos identificar $(\mathbb{R}^n)^*$ com $\mathbb{R}^n$ através do seguinte isomorfismo

$$L : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$L(f) = (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Para todo $v \in \mathbb{R}^n$, temos $f(v) = \langle L(f), v \rangle$. Através dessa identificação, $\mathcal{N}_F$ se torna

$$\mathcal{N}_F = \{u \in \mathbb{R}^n | F \subset \{x \in P | \langle x, u \rangle = h_k(u)\}\},$$

ou seja, $\mathcal{N}_F$ é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ que induzem a face F no polítopo P . O lema (3.10) nos diz então que $\mathcal{N}(P)$ é um leque completo em $\mathbb{R}^n$.

3.38 DEFINIÇÃO. *Se $\mathcal{F}$ é um leque em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{G}$ é um leque em $\mathbb{R}^m$, então nós definimos o leque soma direta*

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} := \{C \times C' | C \in \mathcal{F}, C' \in \mathcal{G}\},$$

se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são leques em $\mathbb{R}^n$, definimos seu refinamento comum como $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} := \{C \cap C', C \in \mathcal{F}, C' \in \mathcal{G}\}$.

É possível verificar que $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ são ainda leques. Um resultado que será de fundamental importância para nós é o seguinte:

3.39 TEOREMA. *O leque normal de uma soma de Minkowski é o refinamento comum de seus leques normais:*

$$\mathcal{N}(P + P') = \mathcal{N}(P) \wedge \mathcal{N}(P')$$

.

Para uma demonstração ver [56] (p.198).

Veja que dado um polítopo P , o leque normal de P é completo e assim, $\mathcal{N}(P)$ fornece uma forma de subdividir $\mathbb{R}^n$ em cones, de modo que para cada cone da subdivisão todos os vetores que estão neste cone induzem a mesma face do polítopo. Ainda mais, todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ que induzem a face F pertencem ao cone correspondente. No caso de dois (ou mais) polítopos, o refinamento comum dos leques normais fornece uma maneira de subdividir $\mathbb{R}^n$ em cones de forma que para cada cone do leque os vetores deste cone induzem a mesma face em cada polítopo.

Capítulo 4

Análise das Equações Reduzidas

Neste capítulo, nosso objetivo é usar todos os conceitos que foram apresentados anteriormente para demonstrar o seguinte teorema

4.1 TEOREMA. *Se as massas são positivas, então existe somente um número finito de classes de equivalência dos equilíbrios relativos para o problema Newtoniano dos quatro corpos.*

Este teorema é o resultado de principal importância para nós e neste capítulo é descrito como foi realizada sua demonstração usando a teoria BKK. Para isto lembremos como foi definido um sistema reduzido.

4.2 DEFINIÇÃO. *Considere um sistema polinomial como em (2.1) com infinitas soluções no toro algébrico $\mathbf{T}$, e seja $X(t)$ uma solução série de Puiseux de ordem α , como na Proposição 2.6, o sistema reduzido induzido por α é*

$$f_{i\alpha}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{k \in S_i \\ \langle \alpha, k \rangle = \mu_i}} c_k a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m.$$

A equação $\langle \alpha, k \rangle = \mu_i$ que determina quais termos de f_i aparecem na equação reduzida tem a seguinte interpretação geométrica: Seja P_i o polítopo de Newton de f_i , isto é o fecho convexo do suporte de $\mathcal{S}_i$. Então $\langle \alpha, k \rangle = \mu_i$ define um hiperplano suportante de P_i para o qual α é um vetor interno normal. O hiperplano define uma face do polítopo de Newton e o vetor expoente k que aparece nas equações reduzidas são os vértices de P_i que estão sobre esta face.

4.1 O Problema Newtoniano de Quatro Corpos

Neste capítulo, usaremos a teoria BKK para explicar como foi conseguido um limite superior para o número de equilíbrios relativos. O limite inferior é obtido basicamente enumerando os equilíbrios relativos conhecidos. Existem seis distâncias mútuas r_{ij} , e as seis equações de Albouy-Chenciner são funções racionais nessas variáveis. As equações de Dziobek também são funções racionais nessas variáveis. Como estamos procurando por soluções com $r_{ij} \neq 0$, podemos multiplicar as equações pelos mdc's para obter equações polinomiais.

Para as equações de Dziobek (1.15), o caso $n = 4$ nos dá as seguintes equações:

$$S_{12}S_{34} = S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23}.$$

De fato, tínhamos $S_{ik}S_{jl} = S_{il}S_{jk}$ com i, j, k, l quatro índices distintos.

Observe que as outras equações são obtidas dessas pois, se considerarmos as permutações dos quatro índices temos $4!$ elementos da forma $S_{ik}S_{jl}$, no entanto permutando os dois primeiros índices obtemos o mesmo elemento (isto é, permutar i com k não altera o produto). Da mesma maneira, permutando os dois últimos índices não altera o produto. E também, considerando permutações que trocam os dois primeiros índices pelos dois últimos, não obtemos um novo elemento, pois $S_{ik}S_{jl} = S_{jl}S_{ik}$. Disto segue que o número de elementos distintos da forma $S_{ik}S_{jl}$ é $\frac{4!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3$ e consequentemente podemos considerar apenas as três igualdades acima, todas as demais sendo obtidas dessas.

No entanto, no decorrer do trabalho é útil obter um sistema que é simétrico sob permutações dos quatro índices. Assim, ao invés de considerarmos o sistema acima, podemos ver as três equações como

$$\begin{cases} S_{12}S_{34} - S_{13}S_{24} = 0, \\ S_{12}S_{34} - S_{14}S_{23} = 0, \\ S_{13}S_{24} - S_{14}S_{23} = 0. \end{cases}$$

Veja que as equações são simétricas com respeito a permutação dos índices. (Observação: Duas equações seriam suficientes, a terceira equação poderia ser obtida das duas primeiras, entretanto três equações apresentam vantagens do ponto de vista computacional!).

Se fizermos a substituição $S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1$ e multiplicarmos pelo mdc obteremos:

$$\begin{aligned} r_{14}^3 r_{23}^3 - r_{12}^3 r_{34}^3 - r_{12}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 + r_{12}^3 r_{14}^3 r_{34}^3 + r_{12}^3 r_{23}^3 r_{34}^3 - r_{14}^3 r_{23}^3 r_{34}^3 &= 0, \\ r_{13}^3 r_{24}^3 - r_{12}^3 r_{34}^3 - r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 + r_{12}^3 r_{13}^3 r_{34}^3 + r_{12}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 - r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 &= 0, \\ r_{14}^3 r_{23}^3 - r_{13}^3 r_{24}^3 - r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 + r_{13}^3 r_{14}^3 r_{24}^3 + r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Essas são as equações de Dziobek que irão ser usadas no trabalho. As equações de Albouy-Chenciner são um pouco mais complicadas, pois cada equação possui muitos termos. Escrevamos uma delas só para ilustrar:

$$\begin{aligned} -m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 + m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^5 r_{23}^3 - m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^2 - m_3 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{24}^3 + \\ m_3 r_{12} r_{13}^5 r_{14}^3 r_{24}^3 - m_3 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^2 r_{24}^3 - m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^2 r_{23}^3 r_{24}^3 - \\ m_3 r_{12}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - m_3 r_{12} r_{13}^2 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - 2m_1 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - 2m_2 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + \\ 2m_1 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + 2m_2 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + 2m_3 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + \\ 2m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + m_3 r_{12} r_{14}^3 r_{23}^5 r_{24}^3 + m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^5 = 0 \end{aligned}$$

Segundo Hampton e Moeckel (em [18]), parece provável que as seis equações de Albouy-Chenciner já determinam um número finito de soluções. No entanto, não foi possível demonstrar isso utilizando a teoria BKK. Do ponto de vista computacional, sua inclusão acarreta vantagens e desvantagens. O polítopo soma de Minkowski tem mais faces e, portanto, existem mais sistemas reduzidos para analisar. Mas, os sistemas reduzidos são mais simples. Muitos deles são triviais e os que não são triviais são ao menos tratáveis.

4.2 Cálculo do Politopo Soma de Minkowski

Lembremos que a substituição de uma série de Puiseux solução de ordem α num sistema nos leva a um sistema, que denominamos de sistema reduzido e expressamos por

$$f_{i\alpha}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{k \in S_i \\ \langle \alpha, k \rangle = \mu_i}} c_k a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Um passo importante do método é calcular explicitamente, a soma de Minkowski dos polítopos das equações de nosso sistema, pois, através dele é que obtemos um modo de analisar os sistemas

reduzidos.

Consideremos o sistema formado pelas equações de Dziobek e as equações de Albouy-Chenciner, esse sistema possui seis variáveis, $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})$, portanto, o polítopo de cada equação é um polítopo em $\mathbb{R}^6$. O polítopo soma de Minkowski $P \subset \mathbb{R}^6$ dos nove polítopos de Newton das equações do sistema é muito complicado, uma abordagem direta dos cálculos e que funciona bem em exemplos simples é simplesmente somar os vértices dos somandos e então encontrar um conjunto minimal de vértices e facetas. Existem programas que realizam estes cálculos como **Porta 1.3.2** [9] ou **Lrs**[4], como provamos o polítopo soma de Minkowski é o fecho convexo das somas dos vértices dos somandos.

Entretanto neste caso não foi possível calcular diretamente o polítopo pois devido a sua complexidade os programas não puderam dar uma resposta. A idéia então foi explorar a simetria (através da permutação entre as variáveis), para reduzir os cálculos a um tamanho que os programas pudessem manusear. Vejamos um esboço de como isso foi feito.

O grupo de permutação S_4 age sobre os índices de m_i e r_{ij} ($r_{ij} = r_{ji}$). Sob esta ação as nove equações de nosso sistema irão ser permutadas. De fato, as seis equações de Albouy-Chenciner são permutadas entre elas mesmas como são as três equações de Dziobek.

Por exemplo, se ordenarmos nossas seis variáveis $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})$, e considerarmos a permutação que troca o 3 por 4, então o vetor anterior é transformado em $r = (r_{12}, r_{14}, r_{13}, r_{24}, r_{23}, r_{34})$, isto é, a permutação troca o segundo e o terceiro eixos e também troca o quarto e o quinto eixos. Veja que como $S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1$ e uma permutação dos índices apenas permuta as variáveis a ação do grupo de permutação sobre as equações do sistema (4.1) apenas permuta as equações entre elas mesmas. Vamos analisar a ação de uma permutação sobre as equações de Albouy-Chenciner,

$$\sum_{k=1}^n m_k [S_{ki}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) + S_{kj}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2)] = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Como k é uma variável muda, a permutação agindo no índice k não altera a equação. Temos que considerar apenas a ação nos índices i e j . Então fica fácil perceber que a permutação apenas troca as equações entre si, mais explicitamente, se o par (i, j) determina uma equação de Albouy-Chenciner e σ é uma permutação entre os índices $\{1, 2, 3, 4\}$ então par $(\sigma(i), \sigma(j))$ também determina outra equação de Albouy-Chenciner.

De fato, a substituição dos índices por suas respectivas permutações dá

$$\sum_{\sigma(k)=1}^n m_{\sigma(k)} [S_{\sigma(k)\sigma(i)}(r_{\sigma(j)\sigma(k)}^2 - r_{\sigma(i)\sigma(k)}^2 - r_{\sigma(i)\sigma(j)}^2) + S_{\sigma(k)\sigma(j)}(r_{\sigma(i)\sigma(k)}^2 - r_{\sigma(j)\sigma(k)}^2 - r_{\sigma(i)\sigma(j)}^2)] = 0$$

$$\implies \sum_{k=1}^n m_k [S_{k\sigma(i)}(r_{\sigma(j)k}^2 - r_{\sigma(i)k}^2 - r_{\sigma(i)\sigma(j)}^2) + S_{k\sigma(j)}(r_{\sigma(i)k}^2 - r_{\sigma(j)k}^2 - r_{\sigma(i)\sigma(j)}^2)] = 0,$$

ou seja, a equação de Albouy-Chenciner determinada pelo par $(\sigma(i), \sigma(j))$. O fato de permutarmos os índices e obtermos as mesmas equações, nos diz que podemos trocar variáveis entre si e ainda assim obter o mesmo polítopo, ou seja, o polítopo soma de Minkowski é simétrico com relação aos eixos, não só ele mas também os polítopos P_1 e P_2 definidos abaixo.

Seja P_1 a soma de Minkowski do polítopo de Newton das equações de Albouy-Chenciner e P_2 o polítopo de Newton soma para as equações de Dziobek.

É possível calcular P_1 e P_2 diretamente usando o *software* **Porta**. A ação do grupo S_4 sobre os índices induz ações que envolvem a geometria dos polítopos P_1 e P_2 e P . O procedimento adotado foi usar essas somas parciais junto com a simetria para encontrar $P = P_1 + P_2$. Primeiro foi construída uma lista de possíveis vetores internos normais para as facetas de P pois sabemos que toda face de P é a soma de Minkowski, de uma face de P_1 e uma face de P_2 . Em particular, algumas facetas de P podem ser encontradas tomando a soma de uma faceta de um dos P_i com um vértice do outro. Então para esta faceta obtida assim, podemos usar como vetor interno normal o vetor interno normal da faceta usado para contruí-la. Então na possível lista de vetores internos normais para as facetas de P , adiciona-se os vetores internos normais das facetas de P_1 e P_2 .

Um fato importante aqui, que segue da demonstração da Proposição 3.23, é que precisamos somar apenas facetas e vértices que são induzidas por um mesmo vetor. No entanto, este procedimento não esgota todas as facetas, pois existem facetas vindas de somas de faces de menor dimensão de P_1 e P_2 . Escrevamos $F_i = g_i + h_i$, onde g_i é uma face s -dimensional de P_1 , e h_i é uma face t -dimensional de P_2 . Para encontrar todos os possíveis vetores normais das novas facetas é suficiente calcular a soma das faces com $1 \leq s \leq 4$, $1 \leq t \leq 4$ e $s + t = 5$. Os g_i e os h_i podem ser encontrados calculando as faces inteiras de P_1 e P_2 . Os f -vetores para P_1 e P_2 são $(2881, 12942, 22504, 18657, 7178, 964)$ e $(54, 210, 357, 312, 135, 24)$, respectivamente.

Uma vez que a faceta F_i esteja em mãos, é elementar calcular seu normal (De fato, lembremos que os normais para as facetas são unicamente determinados a menos de multiplicação

por escalar). A simetria de P_1 e P_2 pode ser explorada, calculando apenas somas onde cada g_i é um representante de cada órbita da ação da simetria. Em outras palavras já que sabemos como a simetria age, tendo calculado um representante de uma órbita consideramos suas imagens pela ação da simetria para calcular as demais facetas induzidas pelas outras faces desta órbita. Isto também significa que não precisa-se realmente calcular todas as faces de P_1 .

Um fato observado foi que existem muito poucas faces de P_1 que tem estabilizadores não-triviais. Neste caso, o estabilizador de uma face é um conjunto das permutações que fixam a face. Então, existem poucas faces que são fixadas por alguma permutação além da identidade, isto é, existem poucas faces que não são simétricas com alguma outra, então essa simetria permite reduzir bastante a complexidade computacional. No entanto, este procedimento adotado fornece uma grande lista de possíveis vetores normais a facetas e a maioria deles são “falsos” (ou seja, não são vetores normais a uma faceta do polítopo soma).

Tendo o normal conhecemos a faceta e, então, podemos encontrar os vértices do polítopo que estão sobre esta faceta e fazendo isto para todas as facetas encontramos o polítopo. Lembremos que os vértices são pontos que minimizam o produto interno com o vetor normal interno. Chamaremos o polítopo soma, obtido adicionando esses “falsos” normais de soma “bruta” de Minkowski. Para cada candidato a normal, os vértices desta soma “bruta” de Minkowski que minimizam o produto interno com o normal foram encontrados.

Esta soma “bruta” de Minkowski, calculada tomando todas as possíveis somas de vértices de P_1 e P_2 tem 134784 pontos. O fato que a dimensão do conjunto de vértices minimizantes para uma faceta verdadeira tem que ser 5, permitiu eliminar muitos normais falsos. Foram obtidas então 973 facetas vindo de facetas de P_1 e P_2 , e mais 2007 vindo de combinações de faces de menor dimensão como descrita acima então o polítopo P tem 2980 facetas. Os vértices de P são os pontos extremos entre os 134784 pontos encontrados acima, isto é, aqueles pontos que não estão no fecho convexo dos outros pontos na lista.

Para encontrar esses pontos foi usado o seguinte procedimento. Primeiro foram contru-
 idas outras somas brutas assimétricas escrevendo $P = P'_1 + P'_2$ onde P'_1 é a soma de Minkowski de sete dos nove polítopos e P'_2 é a soma dos outros dois. Como o polítopo P é simétrico, qualquer ponto desta soma “bruta” para o qual uma órbita completa de S_4 não está contido na soma não pode ser um vértice verdadeiro. Decompondo P de vários modos diferentes e intersectando

a lista resultante, foi encontrado um conjunto muito menor de vértices candidatos. Eliminando qualquer desses candidatos que não é ponto de interseção de seis diferentes facetas reduzimos a lista a 13836 pontos. Alguns deles ainda não são vértices verdadeiros porque os normais a essas facetas incidentes não geram $\mathbb{R}^6$ (Veja que o normal junto com o conjunto dos vértices minimizantes da faceta deve gerar o $\mathbb{R}^6$). Removendo esses pontos redundantes produziu-se uma lista de 12828 vértices.

A lista final de vértices e normais foi verificada do seguinte modo. Cada um dos 2980 normais a facetas α determina uma desigualdade $\langle \alpha, k \rangle \geq \mu$, onde μ é o valor mínimo de $\langle \alpha, k \rangle$ sobre a grande lista de 134784 pontos. Por outro lado, um cálculo com o *software* **Porta** mostrou que o fecho convexo da menor lista é realmente o polítopo P e que as desigualdades definem P . Como verificação final, o programa **Lrs** foi usado para transformar o polítopo P entre uma representação por vértices e uma representação por facetas. Começando da lista de 12828 vértices o programa produziu uma lista de 2980 desigualdades para as facetas e vice-versa. Isto encerra então o cálculo do polítopo soma de Minkowski.

4.2.1 Sistemas Reduzidos

O polítopo P calculado na última seção tem 2980 facetas e 12828 vértices. O próximo passo de nosso procedimento é analisá-los sistemas reduzidos correspondentes as várias faces de P . As faces mais simples de analisar são aquelas para as quais uma ou mais equações consistem de um único termo. Como o único termo em questão é um dos termos das equações originais de nosso sistema, podemos garantir que todos os possíveis sistemas reduzidos triviais irão ter soluções não-nulas, somente se o coeficiente do monômio correspondente for nulo, entretanto todos os coeficientes do sistema são não-nulos (lembre que para o suporte de uma função exigimos que $k \in S_i \Rightarrow C_k \neq 0$). No nosso caso, para as equações de Dziobek e Albouy-Chenciner supor que os coeficientes são não-nulos significa supor que as massas satisfazem $m_i \neq 0, m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \neq 0$ e $m_i + m_j \neq 0$ para dois índices distintos $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, o que é verdadeiro no caso de massas positivas.

A análise começa pelas facetas. Usando o *software* *Mathematica* [53] foi encontrado que exceto 53 das 2980 facetas, todas as outras levam a sistemas reduzidos triviais de equações e, portanto, os outros sistemas reduzidos podem ser abandonados. As desigualdades que definem

faces que determinam sistemas reduzidos não triviais podem ser vistas na tabela abaixo:

- | | |
|--|--|
| 1. $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 \geq 90$ | 28. $-k_1 - k_2 - k_3 \geq -63$ |
| 2. $2k_1 + 2k_2 + 2k_4 - k_5 - k_6 \geq 28$ | 29. $-k_4 - k_5 - k_6 \geq -69$ |
| 3. $2k_1 + 2k_2 - k_3 + 2k_4 - k_6 \geq 28$ | 30. $-k_2 - k_3 - k_6 \geq -69$ |
| 4. $2k_1 + 2k_2 - k_3 + 2k_4 - k_5 \geq 28$ | 31. $-k_1 - k_3 - k_5 \geq -69$ |
| 5. $2k_1 + 2k_3 - k_4 + 2k_5 - k_6 \geq 28$ | 32. $-k_1 - k_2 - k_4 \geq -69$ |
| 6. $2k_1 - k_2 + 2k_3 + 2k_5 - k_6 \geq 28$ | 33. $-k_2 - k_3 - k_4 - k_5 \geq -81$ |
| 7. $2k_1 - k_2 + 2k_3 - k_4 + 2k_5 \geq 28$ | 34. $-k_1 - k_3 - k_4 - k_6 \geq -81$ |
| 8. $2k_2 + 2k_3 - k_4 - k_5 + 2k_6 \geq 28$ | 35. $-k_1 - k_2 - k_5 - k_6 \geq -81$ |
| 9. $-k_2 - k_3 + 2k_4 + 2k_5 + 2k_6 \geq 28$ | 36. $-2k_3 - 3k_5 - 3k_6 \geq -170$ |
| 10. $-k_1 + 2k_2 + 2k_3 - k_5 + 2k_6 \geq 28$ | 37. $-3k_3 - 2k_5 - 3k_6 \geq -170$ |
| 11. $-k_1 + 2k_2 + 2k_3 - k_4 + 2k_6 \geq 28$ | 38. $-3k_3 - 3k_5 - 2k_6 \geq -170$ |
| 12. $-k_1 - k_3 + 2k_4 + 2k_5 + 2k_6 \geq 28$ | 39. $-2k_2 - 3k_4 - 3k_6 \geq -170$ |
| 13. $-k_1 - k_2 + 2k_4 + 2k_5 + 2k_6 \geq 28$ | 40. $-3k_2 - 2k_4 - 3k_6 \geq -170$ |
| 14. $k_1 + k_2 + k_4 \geq 36$ | 41. $-3k_2 - 3k_4 - 2k_6 \geq -170$ |
| 15. $k_1 + k_3 + k_5 \geq 36$ | 42. $-2k_1 - 3k_4 - 3k_5 \geq -170$ |
| 16. $k_2 + k_3 + k_6 \geq 36$ | 43. $-2k_1 - 3k_2 - 3k_3 \geq -170$ |
| 17. $k_4 + k_5 + k_6 \geq 36$ | 44. $-3k_1 - 2k_4 - 3k_5 \geq -170$ |
| 18. $k_1 + k_2 + k_3 \geq 30$ | 45. $-3k_1 - 3k_4 - 2k_5 \geq -170$ |
| 19. $k_1 + k_4 + k_5 \geq 30$ | 46. $-3k_1 - 2k_2 - 3k_3 \geq -170$ |
| 20. $k_2 + k_4 + k_6 \geq 30$ | 47. $-3k_1 - 3k_2 - 2k_3 \geq -170$ |
| 21. $k_3 + k_5 + k_6 \geq 30$ | 48. $-2k_2 - 3k_3 - 3k_4 - 2k_5 \geq -208$ |
| 22. $-k_3 - k_4 \geq -50$ | 49. $-3k_2 - 2k_3 - 2k_4 - 3k_5 \geq -208$ |
| 23. $-k_2 - k_5 \geq -50$ | 50. $-2k_1 - 3k_3 - 3k_4 - 2k_6 \geq -208$ |
| 24. $-k_1 - k_6 \geq -50$ | 51. $-2k_1 - 3k_2 - 3k_5 - 2k_6 \geq -208$ |
| 25. $-k_3 - k_5 - k_6 \geq -63$ | 52. $-3k_1 - 2k_3 - 2k_4 - 3k_6 \geq -208$ |
| 26. $-k_2 - k_4 - k_6 \geq -63$ | 53. $-3k_1 - 2k_2 - 2k_5 - 3k_6 \geq -208$ |
| 27. $-k_1 - k_4 - k_5 \geq -63$ | |

Cada uma dessas desigualdades corresponde a uma faceta de P com normal interno α dado pelos coeficientes $(k_1, \dots, k_6)$ (a bem da verdade a igualdade $\langle \alpha, k \rangle = \mu$ define o hiperplano suportante que determina a face, por simplicidade diremos que a desigualdade define a face). Por exemplo, a desigualdade 22 representa uma faceta que tem um normal interno dado por $\alpha = (0, 0, -1, -1, 0, 0)$.

A proposição (2.13) garante que podíamos restringir a análise dos vetores que induziam um sistema reduzido em apenas um semi-espço $\langle c, \alpha \rangle \geq 0$. Então, escolhamos o vetor $c = (-1, -1, -1, -1, -1, -1)$, isto é, vamos restringir a análise para facetas correspondentes às desigualdades 22 – 53. A análise é feita do seguinte modo, por exemplo para a desigualdade 22, obtemos as equações reduzidas correspondentes por selecionar de cada um dos nove polinômios de nosso sistema, aqueles monômios cujos vetores expoentes minimizam $\langle \alpha, k \rangle = -k_3 - k_4$, entre todos monômios em f_i . Depois de cancelar os fatores que são potências das variáveis r_{ij} , o resultado é o seguinte sistema de nove equações reduzidas $f_{i\alpha}$:

$$\begin{aligned} m_4 r_{13}^3 r_{14}^2 + m_3 r_{23}^2 r_{24}^3 &= m_4 r_{12}^3 r_{14}^2 + m_2 r_{23}^2 r_{34}^3 = 0, \\ m_3 r_{12}^3 r_{23}^2 + m_1 r_{14}^2 r_{34}^3 &= m_2 r_{13}^3 r_{23}^2 + m_1 r_{14}^2 r_{24}^3 = 0, \\ m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 + m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{34}^3 + m_1 r_{12}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 + m_1 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 - 2m r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 &= 0, \\ m_3 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 + m_2 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{34}^3 + m_3 r_{12}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 + m_2 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 - 2m r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 &= 0, \\ r_{13}^3 r_{24}^3 - r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 - r_{12}^3 r_{34}^3 + r_{12}^3 r_{13}^3 r_{34}^3 + r_{12}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 - r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 &= 0, \\ r_{12}^3 + r_{34}^3 - 1 = r_{13}^3 + r_{24}^3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Os sistemas de equações reduzidas tem uma certa homogeneidade. Neste caso, os monômios que aparecem em cada equação tem vetores expoentes $k = (k_1, \dots, k_6)$ com o mesmo valor de $-k_3 - k_4$. Nos outros sistemas reduzidos também existe uma homogeneidade deste tipo. Neste caso da faceta 22 temos que se $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \in \mathbf{T}$ é qualquer solução, então para qualquer $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, obtemos uma outra solução da forma $r = (r_{12}, r_{13}, s^{-1}r_{14}, s^{-1}r_{23}, r_{24}, r_{34})$. Em geral, para equações reduzidas $f_{i\alpha}$ pode-se reescalonar as soluções através da seguinte normalização $(s^{\alpha_1}r_{12}, s^{\alpha_2}r_{13}, s^{\alpha_3}r_{14}, s^{\alpha_4}r_{23}, s^{\alpha_5}r_{24}, s^{\alpha_6}r_{34})$. Isto será usado para obter a seguinte condição sobre a solução

$$r_{12}r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}r_{34} = 1. \quad (4.2)$$

A substituição de $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})$ por $(s^{\alpha_1}r_{12}, s^{\alpha_2}r_{13}, s^{\alpha_3}r_{14}, s^{\alpha_4}r_{23}, s^{\alpha_5}r_{24}, s^{\alpha_6}r_{34})$ muda o produto dos r_{ij} por um fator de s^α , onde $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_6$, aqui vamos exigir que $\alpha \neq 0$

e $r_{ij} \neq 0$, assim podemos reescalonar para fazer o produto igual a 1, para isto basta tomar

$$s = \left(\frac{1}{r_{12}r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}r_{34}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Depois de juntar a condição de normalização (4.2) o sistema reduzido tem dez equações.

Essas equações geram um ideal no anel de polinômios com variáveis r_{ij} e m_i . Se este ideal contém polinômios cujas variáveis são apenas as massas, então esses polinômios dão condições necessárias sobre as massas para a existência dos valores $r_{ij} \in \mathbb{C}$ tornarem as equações válidas. Em particular, se esses polinômios são não-nulos para uma dada escolha de m_i , então para aquele m_i as equações reduzidas não tem soluções $r \in T$. De fato, veja que se $P(m_1, m_2, m_3, m_4)$ é da forma $f_1g_1 + \dots + f_{10}g_{10}$, onde $f_1, \dots, f_{10}$ são os polinômios do sistema reduzido acima e $g_1, \dots, g_{10}$ são polinômios nas distâncias mútuas e nas massas, então se $f_1, \dots, f_{10}$ são nulos então $P(m_1, m_2, m_3, m_4)$ deve ser nulo. Tais polinômios nas massas podem ser encontrados calculando a base de Groebner para o ideal com uma escolha apropriada da ordenação monomial.

Os cálculos da base de Groebner foram realizados usando *Mathematica* e checados usando *Macaulay 2* [19]. Por exemplo, para as equações induzidas pela faceta 22, o polinômio $P(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1m_4 - m_2m_3$ está no ideal. Então, se este polinômio é não-nulo, o sistema reduzido não tem soluções em $\mathbf{T}$ como queríamos. Segue da simetria que as desigualdades 23 e 24 nos levam a polinômios similares nas massas da forma $m_im_j - m_km_l$ com os índices permutados.

Quando escrevemos tais massas polinomiais os índices i, j, k, l irão sempre representar elementos distintos de $\{1, 2, 3, 4\}$. Infelizmente esses polinômios podem se anular para massas positivas e então o vetor α permanece como uma possível ordem de uma série de Puiseux solução para tais massas.

Além dos sistemas reduzidos vindo de facetas não-triviais na tabela, temos que estudar os sistemas reduzidos vindo de faces de menor dimensão da soma de Minkowski. Essas faces podem ser construídas por intersectar duas ou mais facetas incidentes de P (chamamos de facetas incidentes as facetas que tem interseção não vazia). Se um conjunto de facetas são incidentes, então a face obtida por intersectá-las pode ser definida por uma desigualdade da forma $\langle \alpha, k \rangle \geq \mu$, onde α é qualquer normal interno a uma das faces incidentes. A escolha do normal interno não é única. Mas as equações reduzidas são independentes de qual normal

é usado. Foi usado para normal interno a uma dessas faces a soma dos normais das facetas incidentes.

Os termos que aparecem nesses polinômios reduzidos $f_{i\alpha}$ são sempre um subconjunto de termos que estão presentes nos polinômios reduzidos das facetas correspondentes, de fato, os termos que aparecem são correspondentes aos vértices das subfaces da faceta e, portanto, também vértices das facetas (lembre que a demonstração de que toda face de um polítopo é também um polítopo mostra que os vértices das faces são, em particular, vértices do polítopo, claro que é inteiramente análogo para o caso de faces e subfaces). Então segue que se uma certa faceta é trivial (algumas equações se reduzem a um único termo), então todas as subfaces desta faceta também são triviais.

Assim em nosso estudo das faces necessitamos somente considerar interseções das 53 facetas não-triviais. Então, qualquer face não trivial pode ser descrita por uma dada lista de índices 1 – 53, descrevendo as facetas cuja interseção geraram uma face dada.

Foi usada a simetria de permutação extensivamente para diminuir o número de sistemas reduzidos que necessitam ser analisados. A ação do grupo de permutação S_4 sobre as variáveis m_i e r_{ij} induz uma ação sobre o conjunto de faces do polítopo, (a saber, alterna as faces que são simétricas pela mudança de eixos induzidas pela permutação). Está claro que necessita-se somente checar uma face representante de cada órbita de S_4 . Foi escolhido o representante cuja lista de índices das facetas interseção que o geram é minimal com respeito a ordem lexicográfica. Chamamos tal lista de índices de um representante minimal para a sua órbita.

Vejamos como podemos calcular o representante minimal indutivamente pela dimensão. Primeiro construa uma lista L_1 de facetas representativas minimais, escolhendo de cada órbita de S_4 a faceta de menor índice. Agora suponha que as listas $L_1, \dots, L_k$ já foram construídas, onde L_k é uma lista de k -tuplas $I = (i_1, \dots, i_k)$, com $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, de representantes minimais para as faces não triviais que são definidas por intersectar k facetas incidentes. Então, L_{k+1} pode ser construída considerando todas as possíveis extensões de k -tuplas $I \in L_k$ para $(k+1)$ -tuplas $I' = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$ com $i_{k+1} > i_k$, e então eliminando aquelas extensões que descrevem facetas não incidentes, aquelas que levam a sistemas reduzidos triviais e aquelas que não são minimais em suas órbitas. Para ver isto, note que se $I' \in L_{k+1}$ então a k -tupla I , obtida de I' por tirar a última coordenada deve representar k -facetas incidentes que determinam um

sistema reduzido não-trivial.

Também necessitamos ver que I é um representante minimal sua órbita. Se não fosse, então existe alguma k -tupla $J = g(I) = (j_1, \dots, j_k)$ com $g \in S_4$ (Aqui $g(I)$ representa a face imagem da face I pela ação da permutação sobre os índices dos eixos) e $J < I$ na ordem lexicográfica, em outras palavras, existe uma permutação que leva a k -tupla em sua representante minimal. Seja $J' = (j'_1, \dots, j'_{k+1})$ a $k+1$ -tupla obtida da k -tupla J junto com $g(i_{k+1}) = j'_{k+1}$, inserido em sua ordem adequada.

AFIRMAÇÃO 1. *Não importa onde este novo índice $g(i_{k+1})$ é inserido, iremos ter $(j'_1, \dots, j'_k) \leq J < I$.*

De fato, para a ordem lexicográfica temos $(i_1, \dots, i_{k+1}) < (j_1, \dots, j_{k+1}) \Leftrightarrow$ para algum n , $i_n < j_n$ e $\forall m < n$, $i_m = j_m$.

- a) Se $g(i_{k+1}) > j_n$, então continuamos tendo $j'_n < i_n$ e $\forall m < n$, $j'_m = i_m$, pois a inserção de $g(i_{k+1})$ na k -tupla $(j_1, \dots, j_k)$ se dá depois do índice m consequentemente $(j'_1, \dots, j'_k) \leq J < I$.
- b) Se $g(i_{k+1}) < j_m$, então iremos ter $g(i_{k+1}) < j_l$, para algum $l \leq m$, mas daí $j'_n \leq j_n = i_n$, $\forall n \leq m$ e, portanto, $(j'_1, \dots, j'_k) \leq J < I$.
- c) Se $g(i_{k+1}) = j_m$, então iremos ter $j'_{k+1} = g(i_{k+1}) = j_m < i_m$ e, para $l < m$, temos $j'_l = j_l = i_l$ donde segue novamente que $(j'_1, \dots, j'_k) \leq J < I$.

Mas, $(j'_1, \dots, j'_k) \leq J < I \Rightarrow J' < I'$ o que é uma contradição pois o I' é minimal em sua órbita.

Pode-se ainda diminuir a lista usando a exigência de que cada face que devemos analisar tenha um vetor normal α no semi-espço que escolhemos $\langle c, \alpha \rangle \geq 0$. Agora, se uma face é obtida por intersectar duas ou mais facetas cujos todos os internos normais satisfazem $\langle c, \alpha \rangle < 0$, então todo vetor normal α irá também satisfazer a desigualdade, pois os vetores normais para as faces são combinações convexas dos normais das facetas que o definem. Portanto, pode-se eliminar da lista todas as faces obtidas por intersectar somente facetas com índices entre 1 e 21. Depois de usar a simetria e a condição do semi-espço, somente as faces determinadas pelas seguintes

lista de desigualdades tem que ser analisadas

$$\begin{aligned} & \{22\} \quad \{25\} \quad \{29\} \quad \{33\} \quad \{36\} \quad \{48\} \\ & \{2, 25\} \quad \{2, 36\} \quad \{14, 25\} \quad \{14, 36\} \quad \{18, 29\} \quad \{22, 48\} \\ & \{25, 36\} \quad \{33, 48\} \quad \{2, 14, 25\} \quad \{2, 14, 36\} \\ & \{2, 25, 36\} \quad \{14, 25, 36\} \quad \{2, 14, 25, 36\}. \end{aligned}$$

Em qualquer outra combinação de desigualdades foram encontradas umas das seguintes propriedades:

- Ou as facetas não são incidentes no polítopo (interseção vazia);
- Ou elas são incidentes mas determinam um sistema reduzido trivial;
- Ou então elas podem ser obtidas de uma combinação da lista usando simetria.

Para cada um desses sistemas reduzidos correspondentes, foi juntada a condição de normalização (4.2) e usado o método da base de Groebner, para encontrar polinômios nas massas que estão contidos no ideal resultante. Os ideais dos sistemas reduzidos induzidos pelas faces

$$\{25\}, \{29\}, \{36\}, \{48\}, \{2, 36\}, \{18, 29\}, \{22, 48\}, \{25, 36\}, \{33, 48\},$$

contém um dos polinômios m_i , $m_i + m_j$ ou m_j que já sabemos serem não-nulos. Os ideais

$$\{2, 25\}, \{14, 25\}, \{14, 36\}, \{2, 14, 25\}, \{2, 14, 36\}, \{2, 25, 36\}, \{14, 25, 36\}, \{2, 14, 25, 36\}$$

contém somas das três massas $m_i + m_j + m_k$. Isto deixa somente as facetas 22 e 33. Como foi citado acima, os ideais da faceta 22 e suas contrapartes simétricas contém polinômios da forma $m_i m_j - m_k m_l$. O ideal da faceta 33 é mais complicado. Ele contém um polinômio da forma $(m_i + m_j)^2 (m_k + m_l)^2 (m_i^3 + m_j^3)(m_k^3 + m_l^3)Q$ onde Q representa a expressão

$$Q = (m_i^3 - m_j^3)^2 (m_k^3 - m_l^3)^2 + 4m_i^3 m_j^3 (m_k^3 - m_l^3)^2 + 4m_k^3 m_l^3 (m_i^3 - m_j^3)^2. \quad (4.3)$$

Este polinômio também zera para algumas massas positivas (faça por exemplo $m_i = m_j$ e $m_k = m_l$) e então o correspondente vetor α é ainda uma possível ordem para uma solução de Puiseux.

Neste ponto, a análise dos sistemas reduzidos mostra que se $m_i \neq 0$, $m_i + m_j \neq 0$ e $m_i + m_j + m_k \neq 0$, e $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \neq 0$, então quase todos os possíveis vetores α no

semi-espço $\langle c, u \rangle \geq 0$ são excluídos como possíveis ordens de uma série de Puiseux solução de nosso sistema.

As únicas possibilidades remanescentes são os múltiplos racionais positivos dos vetores $\alpha_{22} = (0, 0, -1, -1, 0, 0)$ e $\alpha_{33} = (0, -1, -1, -1, -1, 0)$ e seus análogos simétricos (isto é, os vetores normais às faces na órbita desses vetores). O objetivo agora é mostrar que essas ordens também são impossíveis.

4.3 Análise dos casos excepcionais

Assumindo que $m_i > 0$, o objetivo é mostrar que não existem séries de Puiseux solução de nosso sistema de nove equações cuja ordem α é um múltiplo positivo de $\alpha_{22} = (0, 0, -1, -1, 0, 0)$ e $\alpha_{33} = (0, -1, -1, -1, -1, 0)$, isto irá completar a prova do Teorema 4.1, e além do mais, de posse deste resultado poderemos aplicar o Teorema de Bernstein para efetivamente encontrar uma cota superior para o número de equilíbrios relativos.

Se as massas são escolhidas tal que os polinômios correspondentes nas massas se anulam, então podemos encontrar soluções das equações reduzidas em $\mathbf{T}$. Mas, as equações reduzidas apresentam apenas os coeficientes dos termos líderes, então essas soluções representam apenas os termos líderes de uma possível série solução. Se realmente existe tal série solução, ela deve possuir valores consistentes para os termos de mais alta ordem, entretanto, veremos que isto não ocorre.

4.3.1 Faceta 22

A faceta 22 deu origem a um sistema reduzido cujas equações geram um ideal que contém o seguinte polinômio nas massas $P(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 m_4 - m_2 m_3$. Vamos assumir que $m_1 m_4 = m_2 m_3$ e que $m_i > 0$. Podemos observar diretamente que as equações são homogêneas nas massas e, então, podemos dividir o vetor (m_1, m_2, m_3, m_4) para obter $m'_4 = 1$. Em outras palavras, podemos assumir que $m_4 = 1$.

Desejamos analisar as possíveis séries de Puiseux que começam com um múltiplo racional positivo do vetor expoente $\alpha_{22} = (0, 0, -1, -1, 0, 0)$. Primeiro lembremos que nos-

sas variáveis são ordenadas como $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})$. Pela Proposição 2.6 se a tal série existe e é não constante então, a projeção da variedade V definida pelas equações sobre os eixos r_{14} e r_{23} não consiste apenas de um conjunto finito e, portanto, é dominante. Veja que se a projeção da variedade sobre esses eixos fosse finita, então, as séries de Puiseux correspondentes a essas coordenadas seriam constantes, e daí o vetor ordem teria um 0 na posição de r_{14} e/ou r_{23} . Entretanto, soluções com tais possíveis ordens já foram excluídas.

Como a projeção sobre os eixos é dominante, novamente pela Proposição 2.6, existirá uma série de Puiseux solução com $r_{14}(t) = \frac{1}{t}$, como desejamos que o vetor expoente seja exatamente α_{22} (os demais vetores ordem forma excluídos com exceção de α_{33} que analisaremos posteriormente). Então o termo líder da série de Puiseux $r_{23}(t)$ também é de grau -1 , enquanto todas as outras séries começam na ordem 0.

Agora, façamos a substituição $r = (x_{12}, x_{13}, \frac{1}{t}, \frac{x_{23}}{t}, x_{24}, x_{34})$. Fazemos a substituição no sistema das equações de Dziobek e Albouy-Chenciner e tiramos os denominadores, então obtemos um sistema de nove equações polinomiais $F(t, X) = 0$ em cinco incógnitas $X = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34})$ com coeficientes que são polinômios em t . Então podemos expandir o sistema como

$$F(t, X) = F_0(X) + F_1(X)t + F_2(X)t^2 + \dots = 0.$$

Podemos ver então $F(t, X)$ como uma função $F : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^9$. Por análise direta das equações dá pra mostrar também que $F_1(X) = 0$. Agora, veja que se $(r_{12}(t), r_{13}(t), r_{14}(t), r_{23}(t), r_{24}(t), r_{34}(t))$ é uma série de Puiseux solução do sistema Albouy-Chenciner-Dziobek de ordem α_{22} , então a substituição $(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \rightarrow (x_{12}, x_{13}, \frac{1}{t}, \frac{x_{23}}{t}, x_{24}, x_{34})$ permite que escrevamos cada x_{ij} como uma série de Puiseux de ordem 0 com $X = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34})$ sendo uma solução do novo sistema. Portanto a equação $F_0(x(0)) = 0$ é equivalente ao sistema reduzido de equações para o vetor α_{22} . Com isto é possível determinar (ainda que não unicamente) os termos constantes de $x_{ij}(t)$. Eles são

$$x_{12}^3(0) = \frac{m_2}{1 + m_2}, \quad x_{34}^3(0) = \frac{1}{1 + m_2}, \quad x_{13}^3(0) = \frac{m_3}{1 + m_3}, \quad x_{24}^3(0) = \frac{1}{1 + m_3}, \quad x_{23}(0) = \pm i.$$

Usando o *software Mathematica*, não é difícil mostrar que o posto de DF_0 no ponto $X(0)$ é 5. Note que $F(0, X) = F_0(X)$, além do mais as funções coordenadas de F são funções polinomiais e, portanto, analíticas. Pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança de 0 tal que X se escreve como função de t e $F(t, X(t)) = 0$, para todo t nesta vizinhança. Além do mais

como a função $F(t, X)$ é analítica o Teorema da Função Implícita garante ainda que a função $X(t)$ é analítica e, então, podemos escrever $X(t)$ como uma série de potências (Ver [12] p.277). Como a expansão de F continua até a ordem 2, temos

$$x_{ij}(t) = x_{ij}(0) + u_{ij}t^2 + v_{ij}t^3 + \dots$$

Podemos truncar a série na potência em t^3 pois isso é suficiente para nossos propósitos.

A substituição de $x_{ij}(t)$ em F leva a um sistema de equações lineares para $u = (u_{12}, \dots, u_{34})$ e $v = (v_{12}, \dots, v_{34})$. E, então, pode-se mostrar que as equações para u são consistentes e determinam u unicamente. Entretanto, as equações para v são inconsistentes, e, portanto, não pode existir série de Puiseux solução do sistema de ordem $\alpha_{22} = (0, 0, -1, -1, 0, 0)$. Lembre ainda que todos os múltiplos racionais desse vetor induzem o mesmo sistema reduzido e, portanto, também não podem ser ordem de uma série de Puiseux solução.

4.3.2 Faceta 33

Lembremos que a análise da faceta 33 gera a equação (4.3)

$$(m_i + m_j)^2(m_k + m_l)^2(m_i^3 + m_j^3)(m_k^3 + m_l^3)Q$$

onde Q representa a expressão

$$Q = (m_i^3 - m_j^3)^2(m_k^3 - m_l^3)^2 + 4m_i^3m_j^3(m_k^3 - m_l^3)^2 + 4m_k^3m_l^3(m_i^3 - m_j^3)^2. \quad (4.4)$$

Esta equação se anula se, somente se, Q se anula.

Suponhamos que (4.3) se anula para massas positivas, um caso é por exemplo quando $m_1 = m_2$ e $m_3 = m_4$. Em geral, Q se anula quando $m_i = m_j$ e $m_k = m_l$. Queremos excluir séries de Puiseux cuja ordem é um múltiplo racional positivo do vetor $\alpha_{33} = (0, -1, -1, -1, -1, 0)$. Como foi feito para α_{22} , podemos assumir que a ordem é exatamente α_{33} e por $r_{13}(t) = \frac{1}{t}$. Então, como antes fazemos uma substituição $(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \rightarrow (x_{12}, \frac{1}{t}, \frac{x_{14}}{t}, \frac{x_{23}}{t}, \frac{x_{24}}{t}, x_{34})$ e isso nos fornece um sistema $F(t, X) = F_0(X) + F_1(X)t + F_2(X)t^2 + \dots = 0$, do qual queremos excluir soluções de Puiseux de ordem 0. As equações reduzidas para os termos líderes nos dá

$$x_{12}^3(0) = \frac{m_1}{1 + m_1}, x_{34}^3(0) = \frac{1}{1 + m_1}, x_{14}^3(0) = \pm i, x_{23}^3(0) = \mp i, \quad x_{24}(0) = -1.$$

Novamente, o posto de $DF_0(x(0))$ é 5. Então, pode-se mostrar que $F_1(x(0)) = 0$, então, mais uma vez, usando o Teorema da Função Implícita as possíveis soluções tomam a forma

$$x_{ij}(t) = x_{ij}(0) + u_{ij}t^2 + v_{ij}t^3 + \dots$$

Novamente encontramos que $u = (u_{12}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34})$ é unicamente determinado mas as equações que determinam $v = (v_{12}, v_{14}, v_{23}, v_{24}, v_{34})$ são inconsistentes. E, portanto, nenhum múltiplo racional positivo do vetor α_{33} pode ser ordem de uma série de Puiseux solução de nosso sistema. Isto completa a prova de que o sistema determinado pelas equações de Dziobek e Albouy-Chenciner possui um número finito de soluções no toro algébrico.

4.4 Limites Superiores e Limites Inferiores

4.4.1 Limite Inferior

Existem sempre exatamente 12 equilíbrios relativos colineares [39]. MacMillan e Bartky [33] provaram um resultado de existência de um equilíbrio relativo convexo para cada uma das 6 ordenações cíclicas distintas obtidas por rotação das 4 massas. O caso estritamente côncavo, onde uma partícula está contida no fecho convexo do triângulo formado pelos outros três pontos é mais complicado.

Em [17] é mostrado que se todas as 4 massas são diferentes, então existe no mínimo 16 equilíbrios relativos côncavos, dando um limite inferior de 34 para o número total de equilíbrios relativos (o limite inferior de 8 configurações côncavas estabelecido em [17] conta configurações refletidas como equivalentes). Esse resultado pode facilmente ser refinado para dar à seguinte proposição, cuja prova contém algumas informações geométricas adicionais sobre essas configurações.

4.3 PROPOSIÇÃO. *Existem sempre no mínimo 14 equilíbrios relativos côncavos no problema dos quatro-corpos. A menos que exatamente três das massas sejam iguais, existem no mínimo 16 equilíbrios relativos côncavos.*

Demonstração: A prova é baseada no principal resultado em [17] que pode ser formulado como segue. Primeiro introduzimos um modo de nomear uma configuração côncava das quatro

massas. Uma das massas está dentro do triângulo cujos vertices são os outros três,, chame-a de m_c . Para um triângulo escaleno, seus lados podem ser nomeados de acordo com o comprimento de modo único, L , I e S tal que $L > I > S$. Refletindo a configuração, se necessário, nós podemos sempre assumir que as arestas ocorrem em sentido anti-horário de acordo com a ordem L , I e S . Nomeamos as massas opostas as arestas L , I e S como m_L , m_I e m_S , respectivamente, então elas também vão estar em sentido anti-horário em torno do triângulo. Para um triângulo isocèles que não é equilátero, então ou L ou S irão ser unicamente determinado (de fato, dois lados tem o mesmo comprimento, o terceiro deve ter comprimento maior ou menor que os outros, e de acordo com o caso será chamado de L ou S). Os outros dois lados podem ser nomeados de maneira a encontrar o sentido anti-horário. Para o triângulo equilátero, escolha o nome dos lados de modo a encontrar o sentido anti-horário (Sabemos que este caso ocorre somente se $m_L = m_I = m_S$).

Com essas convenções; o principal resultado de [17] mostra que existe um equilíbrio relativo côncavo desta forma desde que

$$m_I \geq m_L \text{ e } m_I \geq m_S. \quad (4.5)$$

E é claro que a reflexão desta configuração irá ser um equilíbrio relativo que não pode ser obtido por outros por rotação com as massas m_L , m_I e m_S mantendo sentido horário.

Dadas quatro massas m_1 , m_2 , m_3 e m_4 , obtemos várias configurações côncavas diferentes assumindo que as massas nomeadas convenientemente da forma m_C , m_L , m_I e m_S . Assuma, sem perda de generalidade que $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4$. Então as 8 seguintes permutações irão satisfazer (4.5)

$$\begin{aligned} (m_C, m_I, m_L, m_S) = & (m_1, m_2, m_3, m_4) (m_2, m_1, m_3, m_4) (m_3, m_1, m_2, m_4) (m_4, m_1, m_2, m_3) \\ & (m_1, m_2, m_4, m_3) (m_2, m_1, m_4, m_3) (m_3, m_1, m_4, m_2) (m_4, m_1, m_3, m_2). \end{aligned}$$

No entanto, se nenhuma das três massas são iguais, é fácil ver que os 16 equilíbrios relativos determinados pelas 8 configurações e seus pares refletidos não são equivalentes sobre a nossa simetria rotacional. Primeiro, note que se duas configurações são equivalentes, então elas devem ter a mesma massa central e as massas sobre o triângulo devem estar em ordem cíclica. Para uma massa fixada m_C só existem duas permutações na lista acima e elas tem os vértices do

triângulo em ordem opostas. Finalmente, essas duas configurações não podem ser equivalentes a qualquer outra das reflexões. Para ver isso, note que como o triângulo não é equilátero, ao menos uma das arestas L ou S está unicamente determinada pela geometria (independente de nossa convenção de ordenação acima). Neste caso, as duas configurações equivalentes poderiam ter tido a mesma escolha para m_L ou m_S . Mas, as duas diferentes permutações da lista que tem o mesmo m_C , sempre diferem em ambos m_L e m_S .

Como Albouy [1] mostrou que existem 50 equilíbrios relativos quando todas as quatro massas são iguais, resta somente considerar o caso onde exatamente três das quatro massas são iguais. Se $m_1 = m_2 = m_3 > m_4$ então as seis permutações na tabela com $m_C \neq m_4$ ainda fornecem 12 equilíbrios relativos. Mas as outras duas configurações devem ser concebidas como triângulos equiláteros com m_4 no centro. Essas são equivalentes a alguma outra reflexão e nós obtemos 14 ao todo. O caso $m_1 > m_2 = m_3 = m_4$ é semelhante. ■

Um resultado complementar de Xia [55] dá uma prova relativamente simples de um limite inferior de 16 equilíbrios relativos côncavos. Se assumirmos a hipótese de que uma certa função IU^2 é não degenerada, de outro modo existem no mínimo 8. Aqui $U = \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^{-1}$ é o potencial e $I = m^{-1} \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2$ é o momento de inércia.

Para resumir, podemos dizer que existem no mínimo 32 equilíbrios relativos no problema dos quatro corpos, no entanto se exatamente três das massas são iguais e a função IU^2 é degenerada existem no mínimo 34 equilíbrios relativos.

4.4.2 Limite Superior

Mostramos que para massas positivas, as nove equações de Albouy-Chenciner e as equações de Dziobek tem uma quantidade finita de soluções $r = (r_{12}, \dots, r_{34})$ no toro algébrico complexo. Como o número de equações usado excede o número de incógnitas, não é possível aplicar diretamente o limite do volume misto da teoria BKK ao nosso sistema. Entretanto, nós iremos aplicar ele ao sistema de 10 equações e 10 incógnitas obtido em (1.17).

Como observado antes, qualquer equilíbrio relativo determina uma solução de (1.17) com $r_{ij} \neq 0$ e $z_i \neq 0$. Entretanto, é possível que $k = 0$, o que nos impede de usar o limite

BKK, já que ele vale somente no caso em que não existem soluções nulas. Para superar esta dificuldade substituímos as equações $f_1 = \dots = f_4 = 0$ pelas diferenças $\begin{cases} f_1 - f_4 = 0 \\ f_2 - f_4 = 0 \\ f_3 - f_4 = 0 \end{cases}$ para obter um sistema de 10 equações para (r, z) . Então, o limite superior para o número de soluções complexas

$$(r, z) \in T^{10}((r, z) = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{23}, r_{34}, z_1, z_2, z_3, z_4))$$

dá um limite superior para o número de classes de equivalência de equilíbrios relativos. De fato, estamos interessados somente em soluções com r_{ij} reais e positivos.

O principal ponto é que existem duas soluções $(r, z) \in T^{10}$ do novo sistema para cada solução $r \in T^6$ das equações de Albouy-Chenciner e Dziobek. Para ver isto, suponha que nós temos uma solução (r, z) de nossas dez equações com $r_{ij} \neq 0$. Iremos mostrar que r satisfaz as nove equações de Albouy-Chenciner e Dziobek. Primeiro, as equações de Dziobek (1.15) seguem imediatamente das equações $S_{ij} = z_i z_j$. Agora iremos mostrar como encontrar a equação de Albouy-Chenciner com $(i, j) = (1, 2)$; as outras podem ser encontradas de um modo similar se pomos $(i, j) = (1, 2)$ em

$$\sum_{k=1}^n m_k [S_{ik}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) + S_{jk}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2)] = 0 \quad (4.6)$$

e substituindo S_{ij} por $z_i z_j$ obtemos

$$\sum_{k=1}^4 m_k [z_i z_j (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) + z_j z_k (r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2)] = 0 \Rightarrow \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & m_1 [z_1 z_2 (r_{21}^2 - r_{11}^2 - r_{12}^2) + z_2 z_1 (r_{11}^2 - r_{21}^2 - r_{12}^2)] + \\ & m_2 [z_1 z_2 (r_{22}^2 - r_{12}^2 - r_{12}^2) + z_2 z_2 (r_{12}^2 - r_{22}^2 - r_{12}^2)] + \\ & m_3 [z_1 z_3 (r_{23}^2 - r_{13}^2 - r_{12}^2) + z_2 z_3 (r_{13}^2 - r_{23}^2 - r_{12}^2)] + \\ & m_4 [z_1 z_4 (r_{24}^2 - r_{14}^2 - r_{12}^2) + z_2 z_4 (r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{12}^2)] = \\ & -2(m_1 + m_2)z_1 z_2 + m_3 z_1 z_3 (r_{23}^2 - r_{13}^2 - r_{12}^2) + m_3 z_2 z_3 (r_{13}^2 - r_{23}^2 - r_{12}^2) + \\ & m_4 z_1 z_4 (r_{24}^2 - r_{14}^2 - r_{12}^2) + m_4 z_2 z_4 (r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{12}^2) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& -(z_1 + z_2)r_{12}^2 f_0 + (z_2 - z_1)(m_2 z_2 r_{12}^2 - m_1 z_1 r_{12}^2 + m_3 z_3(r_{13}^2 - r_{23}^2)) + m_4 z_4(r_{14}^2 - r_{24}^2) = \\
& m_1(-z_1^2 r_{12}^2 - z_2 z_1 r_{12}^2 + z_1^2 r_{12}^2 - z_2 z_1 r_{12}^2) + m_2(-z_2 z_1 r_{12}^2 - z_2^2 r_{12}^2 + z_2^2 r_{12}^2 - z_2 z_1 r_{12}^2) \\
& + m_3(-z_3(z_1 + z_2)r_{12}^2 + z_3(z_2 - z_1)(r_{14}^2 - r_{24}^2)) + m_4(-z_4(z_1 + z_2)r_{12}^2 + (z_2 - z_1)z_4(r_{14}^2 - r_{24}^2)) = \\
& m_1(-2z_2 z_1 r_{12}^2) + m_2(-2z_2 z_1 r_{12}^2) + m_3 z_1 z_3(r_{23}^2 - r_{13}^2 - r_{12}^2) + m_3 z_2 z_3(r_{13}^2 - r_{23}^2 - r_{12}^2) \\
& + m_4 z_1 z_4(r_{24}^2 - r_{12}^2 - r_{14}^2) + m_4 z_2 z_4(r_{14}^2 - r_{12}^2 - r_{24}^2),
\end{aligned}$$

Ou seja, se temos (r, z) uma solução de (1.17), fazendo

$$-(z_1 + z_2)r_{12}^2 f_0 + (z_2 - z_1)(f_1 - f_2)$$

encontramos uma solução para a equação de Albouy-Chenciner com $(i, j) = (1, 2)$. As outras são obtidas de um modo similar, ou seja, nosso sistema de 10 equações de Albouy-Chenciner e Dziobek é obtido do sistema (1.17)

Agora iremos mostrar que dado qualquer $r \in T^6$, existe no máximo dois modos de encontrar $z \in T^4$, tal que $z_i z_j = S_{ij}$ vale. Como todos os z_i são não-nulos, devemos ter $S_{ij} \neq 0$. Então, as razões entre os z_i 's são unicamente determinadas por equações da forma $\frac{z_i}{z_j} = \frac{S_{ik}}{S_{jk}}$. Pondo $z_i = c\varsigma_i$, onde $\varsigma_i = \frac{z_i}{z_4}$, temos então $c^2 \varsigma_1 \varsigma_2 = S_{12}$ e logo $c^2 = \frac{S_{12}}{\varsigma_1 \varsigma_2}$ assim c fica determinado a menos de sinal. Mas, ς_i já é conhecido (pois, é razão entre os z_i 's), logo cada z_i é determinado a menos de sinal por $z_i = c\varsigma_i$. Escolhido o sinal de c , determinamos z_i . Existem portanto apenas duas maneiras de determinar z , uma referente a cada escolha do sinal de c . Se $m_i > 0$, mostramos que os sistema formado pelas equações de Albouy-Chenciner e Dziobek têm uma quantidade finita de soluções $r \in T^6$ e portanto nosso sistema de 10 equações tem uma quantidade finita de soluções em T^{10} . Então o teorema de Bernstein mostra que o número de soluções é limitado superiormente pelo volume misto dos polítopos de Newton P_i , $i = 1, \dots, 10$ dessas equações.

Usando o programa **Mixvol** encontramos que o volume misto é 25380 [14]. Isto limita o número de soluções complexas com todas as variáveis não-nulas. Entretanto, no máximo um terço dessas soluções podem ter valores reais para as distâncias mútuas r_{ij} . Para ver isto, note que se $(r, z) \in T^{10}$ é qualquer solução então $(\omega r, z)$ também é, onde ω é qualquer raiz terça da unidade. Isto segue do fato de que para cada monômio em cada equação de Albouy-Chenciner, a soma dos expoentes das variáveis r_{ij} é 9 ou 12 e ,portanto, obtemos o mesmo valor colocando r_{ij} ou ωr_{ij} . Ou seja para cada solução real encontramos mais duas

soluções complexas. Então existem no máximo $\frac{25380}{3} = 8460$ soluções reais (r, z) . Como existem exatamente 12 equilíbrios relativos colineares que não foram incluídos aqui, nosso limite superior para o número de equilíbrios relativos de quaisquer 4 massas positivas é 8472.

Apêndice

Conceitos Básicos e Teoremas da Geometria Algébrica

Nesta seção, discutiremos brevemente alguns resultados de geometria algébrica que nos serão úteis, enunciaremos também um resultado de álgebra comutativa, nomeado teorema de Hilbert Nullstellensatz, em sua versão fraca.

4.4 DEFINIÇÃO. *Seja K um corpo, e seja $f_1, \dots, f_s$ polinômios em $K[x_1, \dots, x_n]$. Então o conjunto $V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$ é a **variedade afim** definida por $f_1, \dots, f_s$.*

Então, uma variedade afim $V(f_1, \dots, f_s) \subset K^n$ é o conjunto de todas as soluções de um sistema de equações

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Seja K um corpo. Definimos uma relação de equivalência $\sim$ entre os pontos não-nulos de K^{n+1} pondo

$$(x'_0, \dots, x'_n) \sim (x_0, \dots, x_n)$$

se existe um elemento não-nulo $\lambda \in K$ tal que $(x'_0, \dots, x'_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$.

4.5 DEFINIÇÃO. *O espaço projetivo n -dimensional sobre um corpo K , denotado por $\mathbb{P}^n(K)$ é o conjunto das classes de equivalência definidas pela relação $\sim$ em $K^{n+1} \setminus \{0\}$. Então*

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim.$$

Os elementos de $\mathbb{P}^n(K)$ serão denotados por $[a]$, onde $a \in K^{n+1}$.

4.6 PROPOSIÇÃO. *Seja $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo de grau d . Se f se anula sobre um ponto $b \in [a]$, então f se anula sobre todos os pontos em $[a]$.*

Demonstração: Se $c \in [a]$, então $c = \lambda b$ com $\lambda \neq 0$, donde $f(c) = f(\lambda b) = \lambda^d f(b) = 0$. ■

Dizemos que $f([b]) = 0$, se $f(x) = 0, \forall x \in [b]$. Então, pela proposição anterior, se f é um polinômio homogêneo $V(f) = \{[b] \in \mathbb{P}_K^n; f([b]) = 0\}$ está bem definido. Mais geralmente temos:

4.7 DEFINIÇÃO. *Seja K um corpo e sejam $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos. Então o conjunto*

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{[a] \in \mathbb{P}^n(K) : f_i([a]) = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

é a variedade projetiva definida por $f_1, \dots, f_s$.

Vejamos agora um teorema que será útil para associarmos uma variedade a um ideal.

4.8 TEOREMA (Teorema da Base de Hilbert). *Seja K um corpo. Todo o ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ tem um conjunto finito de geradores. Isto é, $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ para alguns $g_1, \dots, g_s \in I$.*

Demonstração: Ver [10], (p. 74). ■

4.9 DEFINIÇÃO. *Seja $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então, denotaremos por $V(I)$ o conjunto*

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

4.10 PROPOSIÇÃO. *$V(I)$ é uma variedade afim. Em particular, se $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, então $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$.*

Demonstração: Ver [10], (p. 77). ■

4.11 DEFINIÇÃO. *Sejam I, J ideais de um anel A . Então,*

a) *O ideal $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ é chamado o ideal soma de I e J ,*

b) *O ideal $IJ = \{ab; a \in I, b \in J\}$ é chamado o ideal produto de I e J .*

Precisamos do seguinte lema para nossa próxima definição.

4.12 LEMA. *Sejam I_1 e I_2 ideais de $K[x_1, \dots, x_n]$ e $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de ideais em $K[x_1, \dots, x_n]$.*

- a) $I_1 \subset I_2 \Rightarrow V(I_2) \subset V(I_1)$,
- b) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$,
- c) $\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha)$.

Demonstração:

a) Se $[a] \in V(I_2)$, então $f([a]) = 0, \forall f \in I_2$. Em particular, $f([a]) = 0, f \in I_1$. Portanto, $[a] \in V(I_1)$.

b) Seja $[a] \in V(I_1) \cup V(I_2)$. Sem perda de generalidade, suponha $[a] \in V(I_1)$. Como $I_1 \cap I_2 \subset I_1$ pelo item a) temos $V(I_1) \subset V(I_1 \cap I_2)$, portanto $[a] \in V(I_1 \cap I_2)$. Ainda como $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$, novamente pelo item a) obtemos $V(I_1 \cap I_2) \subset V(I_1 I_2)$. Donde $[a] \in V(I_1 I_2)$, e segue a inclusão $V(I_1) \cup V(I_2) \subset V(I_1 I_2)$.

Agora, suponha por contradição que existe $[a] \in \mathbb{P}^n$ tal que $[a] \in V(I_1 I_2) \setminus (V(I_1) \cup V(I_2))$. Logo, existem $f \in I_1$ e $g \in I_2$ tais que $f([a]) \neq 0$ e $g([a]) \neq 0$. Portanto, temos que $fg([a]) \neq 0$, uma contradição pois $fg \in I_1 I_2$. Isto prova a inclusão $V(I_1 I_2) \subset V(I_1) \cap V(I_2)$ e portanto b).

c) Seja $[a] \in \bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$. Então, $f([a]) = 0, \forall f \in I_\alpha, \forall \alpha \in A$ e, portanto,

$$f([a]) = 0, \forall f \in V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha) \implies [a] \in V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha).$$

Como $I_\alpha \subset \sum_{\alpha \in A} I_\alpha, \forall \alpha \in A$, pelo item a), $V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha) \subset V(I_\alpha), \forall \alpha \in A$. Assim, $V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha) \subset$

$$\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha).$$

■

Portanto, pelo lema acima, podemos definir uma topologia em $\mathbb{P}^n(K)$, onde a família de fechados serão as variedades projetivas. Esta topologia é chamada topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$.

4.13 DEFINIÇÃO. Um aberto de Zariski é o complemento de uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^n(K)$.

4.14 DEFINIÇÃO. Uma variedade quasi-projetiva é um aberto relativo de uma variedade projetiva na topologia de Zariski induzida.

Note que, se V é uma variedade quasi-projetiva então $V = X \cap A$ onde X é uma variedade projetiva e A é um aberto, donde A^c é fechado, segue que $V = X \cap A = X \setminus A^c$, ou seja, as variedades quasi-projetivas são justamente os conjuntos que podem ser expressos como diferenças entre dois conjuntos fechados. Usaremos o termo variedade para denotar variedade afim ou variedade projetiva.

4.15 DEFINIÇÃO. O fecho de uma variedade quasi-projetiva V é a menor variedade projetiva, com respeito à inclusão, que contém V . Denotamos o fecho de V por $\overline{V}$.

4.16 DEFINIÇÃO. Uma variedade X é redutível, se existem subconjuntos fechados próprios $X_1, X_2 \subsetneq X$ tais que $X = X_1 \cup X_2$. Caso contrário, dizemos que V é irredutível.

4.17 TEOREMA. Seja V uma variedade. Então V pode ser escrito como uma união finita $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, onde cada V_i é uma variedade irredutível.

Demonstração: Ver [46] (p.34) ou [10] (p.200). ■

4.18 DEFINIÇÃO. Seja V uma variedade, tal que $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, onde cada V_i é um conjunto fechado irredutível. Se $V_i \not\subseteq V_j$ para todo $i \neq j$ então dizemos que tal representação é irredundante, e os V_i 's são as componentes irredutíveis de V .

4.19 TEOREMA. Seja V uma variedade. Então existe uma decomposição $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, além do mais essa decomposição é única.

Demonstração: Ver [46] (p. 34) ou [10] (p. 203). ■

4.20 DEFINIÇÃO. A dimensão de uma variedade quasi-projetiva irredutível $V \subset \mathbb{C}$, denotada por $\dim V$, é o número d , tal que existe um aberto de Zariski em V tal que para todo ponto nesse aberto, V é definida localmente (na topologia de Zariski) por $n - d$ polinômios com diferenciais independentes.

4.21 DEFINIÇÃO. *Se V é uma variedade quasi-projetiva redutível, definimos a dimensão de V como o máximo da dimensão de suas componentes irredutíveis.*

Pode-se mostrar que a dimensão de uma variedade quasi-projetiva satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Uma variedade quasi-projetiva V tem dimensão 0 se, e somente se, V é um conjunto finito não-vazio;
- b) Se $V' \subset V$ é uma subvariedade então vale $\dim V' \leq \dim V$. Para demonstração ver [46];
- c) Se $K = \mathbb{C}$, então $\dim \mathbb{C} = 1$.

4.22 DEFINIÇÃO. *Sejam $V \subset \mathbb{P}^n(K)$ e $W \subset \mathbb{P}^r(K)$. Uma aplicação $f : V \rightarrow W$ é regular em um ponto se é definida por polinômios homogêneos de mesmo grau, que não se anulam simultaneamente em $[z]$. A aplicação f é regular em um ponto $[z] \in V$, se existe uma vizinhança de $[z]$ (na topologia de Zariski) tal que nesta vizinhança f é definida por polinômios homogêneos de mesmo grau, que não se anulam simultaneamente nesta vizinhança, f será dita regular se for regular em todos os pontos de V .*

Em particular, a projeção $\pi : V \rightarrow K$ é uma aplicação regular pois é definida por um polinômio em uma variável.

4.23 DEFINIÇÃO. *Uma aplicação $f : V \rightarrow W$ entre variedades é dita dominante se $\overline{f(V)} = W$.*

4.24 TEOREMA. *Se $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação regular dominante, então $f(V)$ contém um aberto não trivial.*

Demonstração: Ver [46] (p. 63). ■

Agora demonstraremos uma proposição que será útil em nossos propósitos.

4.25 PROPOSIÇÃO. *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade quasi-projetiva. Então $\pi_i : V \rightarrow \mathbb{C}$, a projeção na i -ésima coordenada, é tal que $\pi_i(V)$ é um conjunto finito ou possui complementar finito.*

Demonstração: Como $\pi_i(V) \subset \mathbb{C}$, então $\overline{\pi_i(V)} \subset \mathbb{C}$, portanto $\dim \overline{\pi_i(V)} \leq \dim \mathbb{C} = 1$, assim temos que $\dim \overline{\pi_i(V)} = 0$ ou $\dim \overline{\pi_i(V)} = 1$. Se $\dim \overline{\pi_i(V)} = 0$, então V é um conjunto finito de pontos, e o resultado está demonstrado. No entanto, se $\dim \overline{\pi_i(V)} = 1$, então tome o sistema

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x) = 0, \end{cases}$$

que define $\overline{\pi_i(V)}$, em particular $\overline{\pi_i(V)}$ é infinito e, portanto, cada polinômio deve ter um número infinito de raízes, logo, pelo Teorema Fundamental da Álgebra os polinômios são identicamente nulos. Segue, então, que $\overline{\pi_i(V)} = \mathbb{C}$, e, portanto, π_i é dominante. Pelo teorema anterior existe um aberto de Zariski não trivial $U \subset \pi_i(V)$, mas então U^c é fechado e, portanto, é o conjunto solução de um sistema de equações

$$\begin{cases} g_1(x) = 0, \\ \vdots \\ g_k(x) = 0. \end{cases}$$

Note que U^c é finito, caso contrário, pelo mesmo argumento acima os g_i 's seriam triviais, logo $U^c = \mathbb{C}$, ou seja, $U = \emptyset$, uma contradição pois U é não trivial.

Mas, $U \subset \pi_i(V) \Rightarrow \pi_i(V)^c \subset U^c$ e, portanto, $\pi_i(V)^c$ é finito. ■

Terminaremos esta seção com um teorema de Álgebra Comutativa, que é usado no texto. Esse teorema será apresentado em sua versão fraca.

4.26 TEOREMA (Nullstellensatz). *Seja K um corpo algebricamente fechado e seja $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal satisfazendo $V(I) = \emptyset$. Então $I = K[x_1, \dots, x_n]$.*

Mais especificamente usaremos o seguinte corolário:

4.27 COROLÁRIO. *Seja $W \subset K^n$ uma variedade afim, onde K é um corpo algebricamente fechado, e suponha que W é definida pelo sistema de equações polinomiais*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

então $W = \emptyset$ se, e somente se, vale uma equação da forma $f_1g_1 + \dots + f_mg_m = 1$, onde $f_i, g_i \in K[x_1, \dots, x_n]$, $i = 1, \dots, m$.

Demonstração: Seja $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Se $W = V(I) = \emptyset$ então, pelo Nullstellensatz, $I = K[x_1, \dots, x_n]$ e, portanto, $1 \in I$. Logo, existem $g_1, \dots, g_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$f_1 g_1 + \dots + f_m g_m = 1,$$

Reciprocamente, se vale uma equação da forma $f_1 g_1 + \dots + f_m g_m = 1$ então $W = \emptyset$, pois se existisse $p \in W$, então como $f_i(p) = 0, \forall i$ teríamos

$$1 = f_1(p)g_1(p) + \dots + f_m(p)g_m(p) = 0,$$

uma contradição. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Albouy, A.: The symmetric central configurations of four equal masses. In: Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics, Contemp. Math. 198 (1996).
- [2] Albouy, A.: On a paper of Moeckel on Central Configurations. Regular and Chaotic Dynamics, V.8, N°2 (2003).
- [3] Albouy, A., Chenciner, A.: Le problème des n corps et les distances mutuelles. Invent. Math. 131, 151 - 184 (1998) .
- [4] Avis, D.: lrs-Version 4.1. <http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/C/lrs.html>.
- [5] Bernstein, D.N.: The number of roots of a system of equations. Funct. Anal. Appl. 9, 183 - 185 (1975) .
- [6] Bourel, Mathias. Ecuaciones polinomiales y polytopos: una aproximación al teorema de Bernstein. Trabalho Monográfico, Facultad de Ciencias, Universidad de la República Uruguay (2005).
- [7] Cabral, H.: On the integral manifolds of the n -body problem. Invent. Math. 20, 59 - 72 (1973).
- [8] Chazy, J.: Sur certaines trajectoires du problème des n corps. Bull. Astron. 35, 321 - 389 (1918).
- [9] Christof, T., Loebel, A.: PORTA: POlyhedron Representation Transformation Algorithm, Version 1.3.2. <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~iwr/comopt/soft/PORTA/readme.html>.
- [10] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Springer-Verlag (1997).

- [11] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Using Algebraic Geometry. Springer-Verlag (1998).
- [12] Dieudonné, J.: Eléments d'Analyse. Tome *I*, Fondements de l'Analyse Moderne. Chapitres *I* à *IX*, Gauthier-Villars, (1969).
- [13] Dziobek, O.: Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems. *Astron. Nachr.* 152, 33 - 46 (1900).
- [14] Emiris, I.: Mixvol. <http://www.inria.fr/saga/emiris>.
- [15] Euler, L.: De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 11, 144 - 151 (1767).
- [16] Ewald, Gunter.: Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry. *Grad. Texts Math.* 168. Springer-Verlag (1996).
- [17] Hampton, M.: Concave Central Configurations in the Four Body Problem. Thesis, University of Washington (2002).
- [18] Hampton, M.; Moeckel, R: Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Invent. Math.* 163. p289-312. (2006).
- [19] Grayson, D.R., Sullivan, M.E.: Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry and commutative algebra. <http://www.math.uic.edu/Macaulay2/>
- [20] Página eletrônica de Richard Moeckel <http://www.math.umn.edu/~rick>.
- [21] Huber, B., Sturmfels, B.: A polyhedral method for solving sparse polynomial systems. *Math. Comput.* 64, 1541 - 1555 (1995).
- [22] Leandro, E.: Finiteness and bifurcations of some symmetrical classes of central configurations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 167 , 147-177 (2003).
- [23] Leandro, E.: On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *J. Differential Equations* 226, 323-351 (2006).
- [24] Khovansky, A.G.: Newton polyhedra and toric varieties. *Funct. Anal. Appl.* 11, 289 - 296 (1977).

- [25] Kushnirenko, A.G.: Newton polytopes and the Bézout theorem. *Funct. Anal. Appl.* 10, 233 - 235 (1976).
- [26] Kuz'mina, R.P.: On an upper bound for the number of central configurations in the planar n -body problem. *Sov. Math. Dokl.* 18, 818-821 (1977).
- [27] Kulevich, J., Roberts, G., Smith, C.: *Finiteness in the Planar Restricted Four-Body Problem. Qualitative Theory of Dynamical Systems* (2009).
- [28] Lagrange, J.L.: *Essai sur le problème des trois corps. Ouvres*, vol. 6 (1772) .
- [29] Lefschetz, S.: *Algebraic Geometry*, Princeton: Princeton University Press (1953) .
- [30] Lehmann-Filhés, R.: Über zwei Fälle des Vielkörpersproblems. *Astron. Nachr.* 127, e 137-143 (1891).
- [31] Libre, J.: On the number of central configurations in the N -body problem. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 50, 89-96 (1991).
- [32] MacDuffee, C.C.: *Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Co. (1946).
- [33] MacMillan, W.D., Bartky, W.: Permanent configurations in the problem of four bodies. *Trans. Am. Math. Soc.* 34, 838-875 (1932).
- [34] McCord, C.K., Meyer, K.R., Wang, Q.: *The integral manifolds of the three body problem*. Providence, RI: Am. Math. Soc. (1998).
- [35] Moeckel, R.: Relative equilibria of the four-body problem. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* 5, 417-435 (1985).
- [36] Moeckel, R.: On central configurations. *Math. Z.* 205, 499 - 517 (1990).
- [37] Moeckel, R.: Generic Finiteness for Dziobek Configurations. *Trans. Am. Math. Soc.* 353, 4673-4686 (2001).
- [38] Moeckel, R.: A computer-assisted proof of Saari's conjecture for the planar three-body problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 , no. 8, 3105-3117 (2005).
- [39] Moulton, F.R.: The Straight Line Solutions of the Problem of n Bodies. *Ann. Math.* 12, 1-17 (1910).

- [40] Motzkin, T.S., Raiffa, H., Thompson, G.L., Thrall, R.M.: The double description method. *Ann. Math. Stud.* 28, 51 - 73 (1953).
- [41] Newton, I.: *Philosophi Naturalis Principia Mathematica*. London: Royal Society (1687).
- [42] Roberts, G.: A continuum of relative equilibria in the five-body problem. *Phys. D* 127, 141 - 145 (1999).
- [43] Saari, D.: On the Role and Properties of n -body Central Configurations. *Celest. Mech.* 21, 9-20 (1980).
- [44] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. *Encyclopedia of mathematics and its applications*; v. 44, Cambridge University Press (1993).
- [45] Schrijver, Alexander. *Theory of Linear and Integer programming*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. New York, John Wiley. (1998).
- [46] Shafarevich, I.R.: *Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space*. Springer-Verlag (1994).
- [47] Simó, C.: Relative equilibria in the four-body problem. *Celest. Mech.* 18, 165-184 (1978).
- [48] Smale, S.: Topology and Mechanics, II, The planar n -body problem. *Invent. Math.* 11, 45 - 64 (1970).
- [49] Smale, S.: Mathematical problems for the next century. *Math. Intell.* 20, 7 - 15 (1998).
- [50] Tien, F.: *Recursion Formulas of Central Configurations*. Thesis, University of Minnesota (1993).
- [51] Walker, R.: *Algebraic Curves*. New York: Dover Publications, Inc. (1962).
- [52] Wintner, A.: *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton Math. Series 5. Princeton, NJ: Princeton University Press (1941).
- [53] Wolfram, S.: *Mathematica*, version 5.0.1.0. Wolfram Research, Inc..
- [54] Xia, Z.: Central configurations with many small masses. *J. Differ. Equations* 91, 168-179 (1991).

- [55] Xia, Z.: Central configurations for the four-body and five-body problems. Preprint. Citado em [18].
- [56] Ziegler, G.: Lectures on Polytopes. Grad. Texts Math. 152. Springer-Verlag (1995).