



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática

**APLICAÇÃO DA GEOMETRIA ALGÉBRICA  
À FINITUDE DAS CONFIGURAÇÕES  
CENTRAIS DE DZIOBEK**

Thiago Dias Oliveira Silva

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife  
20 de Julho de 2009

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Thiago Dias Oliveira Silva

**APLICAÇÃO DA GEOMETRIA ALGÉBRICA À FINITUDE DAS  
CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE DZIOBEK**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em  
Matemática do Departamento de Matemática da Univer-  
sidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Eduardo Shirlippe Goes Leandro*

Recife  
20 de Julho de 2009

**Silva, Thiago Dias Oliveira**

**Aplicação da geometria algébrica à finitude das configurações centrais de Dziobek / Thiago Dias Oliveira Silva.**

**- Recife: O Autor, 2010.**

**viii, 37 folhas**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.**

**Inclui bibliografia.**

**1. Mecânica Celeste. I. Título.**

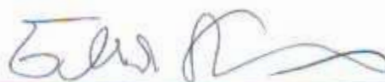
**521**

**CDD (22. ed.)**

**MEI201 – 0121**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:



*Eduardo Shirlippe Góes Leandro, UFPE*

**Orientador**



*Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE*



*Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia, UFPB*

**APLICAÇÃO DA GEOMETRIA ALGÉBRICA À  
FINITUDE DAS CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE DZIOBEK**

*Por*

*Thiago Dias Oliveira Silva*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410*  
RECIFE – BRASIL

Julho – 2009

*Ao meu pai, por tudo!*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu pai pelo exemplo, a minha mãe pelo amor sem tamanho, a Manaíra por ser o motor da minha vida, a Eduardo pelo trabalho, amizade e atenção, aos amigos por estarem ao meu lado, a todos os professores que tive pelos ensinamentos, ao departamento de matemática por tornar isto possível e ao CNPQ pelo suporte financeiro.

## RESUMO

Em 1998 Smale propôs o seguinte problema aos matemáticos deste século:

“Considere o problema de  $n$  corpos. Para uma escolha real positiva das massas dos corpos, é finito o número de classes de configurações centrais módulo simetrias e homotetias correspondentes?”

O objetivo deste trabalho é demonstrar que para uma escolha “genérica” das massas, o número de classes de configurações centrais de Dziobek é finito. Esta é a resposta ao problema de Smale neste caso particular. Para tanto obtemos uma formulação algébrica que nos permite definir uma variedade quasi-projetiva que contém todos os pontos projetivos que provem de configurações centrais de Dziobek. A observação crucial é que todos os pontos projetivos desta variedade quasi-projetiva que provem de uma configuração central de Dziobek estão nas fibras de uma aplicação regular bastante especial. Mostrando que para nossa escolha das massas obtemos que as fibras desta aplicação regular são finitas, obtemos o resultado.

**Palavras-chave:** Configurações Centrais, Mecânica Celeste, Geometria Algébrica.

## ABSTRACT

At 1998 Smale proposed the following problem for mathematical this century:

“ Consider the problem of  $n$  bodies. To choose a real positive masses of bodies, is the finite number of classes of central configurations module symmetries and corresponding homotheties?”

The aim of this paper is to show that for a “ generic” choice of the masses, the number of classes of Dziobek configurations is finite. This is the answer to the problem of Smale this particular case. For this we get an algebraic formulation that allows us to define a quasi-projective variety that contains all projective points stemming from Dziobek configurations. The crucial observation is that all points of this projective quasi-projective variety that comes from a Dziobek configuration are the fibers of a regular application rather special. Showing that for our choice of masses we obtain that the fibers of this regular application are finite, we obtain the result.

**Keywords:** Central Configurations, Celestial Mechanics, Algebraic Geometry.

# SUMÁRIO

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Capítulo 1—Introdução</b>                                               | 3  |
| <b>Capítulo 2—Configurações de Dziobek</b>                                 | 6  |
| 2.1 Geometria das configurações . . . . .                                  | 6  |
| 2.2 As equações para configurações de Dziobek . . . . .                    | 12 |
| <b>Capítulo 3—Alguns Fatos da Álgebra Comutativa</b>                       | 15 |
| 3.1 Teoremas de Hilbert . . . . .                                          | 15 |
| 3.2 Extensões de homomorfismos . . . . .                                   | 16 |
| 3.3 Teorema dos Zeros de Hilbert . . . . .                                 | 18 |
| 3.4 Resultantes . . . . .                                                  | 20 |
| <b>Capítulo 4—Alguns Fatos da Geometria Algébrica</b>                      | 21 |
| 4.1 O Espaço Projetivo . . . . .                                           | 21 |
| 4.2 Topologia de Zariski . . . . .                                         | 23 |
| 4.3 Variedades quasi-projetivas . . . . .                                  | 24 |
| <b>Capítulo 5—Finitude Genérica para Configurações Centrais de Dziobek</b> | 29 |
| 5.1 A variedade das configurações de Dziobek . . . . .                     | 29 |
| 5.2 As massas correspondentes e finitude genérica . . . . .                | 32 |

# APRESENTAÇÃO

O objetivo deste trabalho é demonstrar que escolhida uma massa “genérica”, o número de classes de configurações centrais de Dziobek módulo simetrias e homotetias é finito.

No capítulo 1, através de considerações acerca da geometria das configurações centrais, formulamos um critério para decidir quando uma configuração é de Dziobek em termos do determinante de Cayley-Menger, que é uma equação polinomial homogênea cujas variáveis são as distâncias mútuas. Trabalhar com as distâncias mútuas é mais conveniente porque elas determinam as configurações centrais a menos de simetrias. Em seguida, obtemos uma formulação algébrica para as equações das configurações centrais de Dziobek. Mais precisamente, obtemos um conjunto de equações polinomiais cujos zeros contêm todas as configurações centrais. Assim podemos reduzir o problema da finitude das configurações centrais de Dziobek a estudar zeros de equações polinomiais. Neste contexto, vamos recorrer a resultados da geometria algébrica complexa.

Caminhando neste sentido, no capítulo 2, estudamos as demonstrações do Teorema da base de Hilbert e do Teorema dos zeros de Hilbert, que são importantes para a geometria algébrica porque permitem o entendimento da relação entre zeros de sistemas de equações polinomiais e ideais radicais. Expomos alguns fatos sobre a resultante de dois polinômios que utilizamos para eliminar variáveis de um sistema de equações polinomiais.

No capítulo 3, expomos fatos da geometria algébrica aplicados no capítulo seguinte. Trabalhamos no espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}^n$ , porque assim eliminamos a preocupação com as homotetias em nosso estudo. Definimos variedades projetivas e quasi-projetivas no espaço projetivo, que são os objetos mais importantes em nosso estudo. Definimos e trabalhamos somente com a topologia de Zariski porque é mais conveniente para os nossos propósitos. Estudamos aplicações regulares e dominantes entre variedades quasi-projetivas, bem como o tamanho das fibras destas aplicações, porque vamos reduzir o problema da finitude das configurações centrais de Dziobek ao estudo da dimensão das fibras de uma aplicação bastante especial. Para tanto vamos introduzir o conceito de dimensão de uma variedade quasi-projetiva. O resultado central deste capítulo decorre do teorema da dimensão das fibras sendo utilizado fortemente no cálculo da dimensão das particulares variedades quasi-projetivas definidas a seguir.

No capítulo 4, a luz do que foi visto nos capítulos 2 e 3, definimos uma variedade quasi-projetiva  $\Gamma \in \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$  através da formulação algébrica obtida no capítulo 1 e do determinante de Cayley-Menger. A observação crucial é que todos os pontos projetivos de  $\Gamma$  que provêm de uma configuração central estão nas fibras da projeção de

$\Gamma$  em  $\mathbb{P}^{n-1}$ , que em nosso estudo corresponderá ao espaço das massas. Demonstramos que existe uma variedade projetiva  $B$  tal que fora de  $B$  as fibras da projeção de  $\Gamma$  em  $\mathbb{P}^{n-1}$  são finitas. Disto segue a finitude genérica das configurações de Dziobek. Usando a teoria de Thom e Milnor sobre a homologia das variedades algébricas, obtemos adicionalmente que o número de configurações centrais de Dziobek admite uma cota superior que não depende de  $n$ .

As referências [1], [3], [10], [11] e [18] foram retiradas das notas do minicurso Configurações Centrais em Mecânica Celeste que podem ser encontradas no endereço <http://www.dmat.ufpe.br/~eduardo/minicurso-cc-verao2005.pdf>.

## CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

Consideremos  $n$  corpos cujas massas são dadas por  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$  e  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  suas respectivas posições. Seja  $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$  a distância entre o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo corpo.

**Definição 1.1.** O vetor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$  é chamado configuração. Dizemos que uma configuração  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$  é não singular se  $\|x_i - x_j\| = r_{ij} \neq 0$  para  $i \neq j$ , caso contrário, dizemos que a configuração é singular.

Usando as leis de Newton para o movimento e a lei dos inversos dos quadrados para a atração gravitacional, a equação de segunda ordem para o  $i$ -ésimo corpo é dada por

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

onde  $\ddot{x}_i$  denota o vetor aceleração do  $i$ -ésimo corpo e  $U(x)$  é o potencial Newtoniano dado por

$$U(x) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Para que as equações diferenciais estejam bem definidas, nós vamos supor que a configuração  $x$  é não-singular.

Os vetores  $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$  geram um subespaço afim de  $\mathbb{R}^d$  que, a priori, não precisa ser o próprio espaço  $\mathbb{R}^d$ . Por exemplo se  $n = d$ , coloque  $n - 1$  massas iguais nos vértices de um  $(n - 2)$ -simplexo regular e uma massa arbitrária em seu baricentro. Os vetores posições das massas geram um espaço de dimensão  $n - 2 = d - 2$ .

**Definição 1.2.** A dimensão de uma configuração  $x$  é a dimensão do menor subespaço afim de  $\mathbb{R}^d$  que contém os pontos  $x_i$ . **Notação:**  $\delta(x)$ .

Configurações com  $\delta(x) = 1, 2$  ou  $3$ , são chamadas de colinear, planar e espacial, respectivamente.

**Definição 1.3.** Sejam

$$M = m_1 + \dots + m_n, \quad c = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n), \text{ com } M \neq 0, \quad (1.2)$$

a massa total e o centro de massa dos corpos. A configuração  $x$  é chamada de configuração central se os vetores aceleração dos corpos satisfazem

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3} + \lambda (x_i - c) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

para alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  não-nula.

**Proposição 1.1.** *Se  $x$  é uma configuração central então:*

1. *Se  $A \in E(n)$  então  $A(x)$  é configuração central, onde  $E(n)$  denota o grupo euclidiano  $n$  dimensional.*
2. *Se  $k$  é uma homotetia em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  então  $k.x$  ainda é uma configuração central.*

**Demonstração.**

1. Se  $A \in E(n)$  então existem  $T$  isometria e  $b \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A(v) = T(v) + b \forall v \in \mathbb{R}^n$ . Para  $i = 1, \dots, n$  temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \frac{m_j(A(x_j) - A(x_i))}{r_{ij}^3} + \lambda(A(x_i) - \frac{1}{M}(m_1 A(x_1) + \dots + m_n A(x_n))) &= \\ \sum_{i \neq j} \frac{m_j(T(x_j) - T(x_i))}{r_{ij}^3} + \lambda(T(x_i) - \frac{1}{M}(m_1 T(x_1) + \dots + m_n T(x_n))) & \end{aligned}$$

Aplicando  $T^{-1}$  acima obtemos o primeiro membro da equação (1.3). Portanto  $A(x)$  é configuração central.

2. Sejam  $k \neq 0$  e  $x$  configuração central. Temos que

$$\sum_{i \neq j} \frac{m_j(kx_j - kx_i)}{|k|^3 r_{ij}^3} + \frac{\lambda}{|k|^3}(kx_i - kc) = 0, i = 1, \dots, n,$$

portanto  $kx$  é configuração central com  $\lambda = \frac{\lambda}{|k|^3}$ .

■

A contagem das soluções das equações (1.3) é um problema fundamental em Mecânica Celeste. Entre os principais motivos estão estes:

- As únicas soluções explícitas conhecidas do problema de  $n$  corpos são órbitas homográficas tendo como condição inicial uma configuração central.
- Em 1907 Sundman ([20]) mostrou que a configuração formada por corpos cujas órbitas iniciam ou terminam em colisão total tende ao conjunto das configuração central.
- Todas as mudanças de topologia nas variedades integrais  $I_{h,l}$ , correspondentes a energia  $H = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\dot{q}_i\|^2 + U$  e momento angular  $L = \sum_i m_i q_i \times \dot{q}_i$  constante, provem de configurações centrais ([1], [3], [11] e [18]).

Pela proposição 1.1, devemos contar as classes de soluções de (1.3), módulo simetrias de rotação em  $\mathbb{R}^d$  em torno do ponto  $c$ , translações em  $\mathbb{R}^d$ , e homotetias em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . A seguir, citamos alguns resultados gerais a cerca de contagem de configurações centrais. Existem alguns resultados para casos particulares que não foram citados.

- Em 1767 Euler mostrou que existe uma configuração central para cada ordenamento de três massas arbitrárias contidas numa reta. De fato esta é uma configuração de Dziobek [5].
- Em 1772 Lagrange mostrou que quando  $n = 3$ , a única configuração central com  $\delta(x) = n - 1 = 2$  é o triângulo equilátero para qualquer escolha das massas. Um resultado análogo vale para todo  $n$  [8]. Por exemplo, se  $n = 4$  a única configuração central de dimensão  $n - 1 = 3$  é o tetraedro regular, para qualquer escolha das massas [10].
- Em 1910 Moulton provou que para uma escolha do vetor das massas  $m = (m_1, \dots, m_n)$  e uma ordenação fixada dos corpos ao longo de uma linha existe uma única configuração central (a menos de homotetias e translações) [14]. Depois disto as configurações colineares passaram a se chamar configurações de Moulton.
- Em 1995 Albouy mostrou que todas as configurações centrais de 4 corpos de massas iguais são simétricas e que existem exatamente quatro possibilidades no plano: A configuração colinear, o quadrado, o triângulo equilátero centrado e um triângulo isósceles, com um dos corpos no eixo de simetria [2].
- Em 2006 Marshall Hampton e Richard Moeckel provaram que quando  $n = 4$ , o número de configurações é finito, e mais ainda, é um número entre 32 e 8472 [6].

Para dimensões maiores não existem resultados gerais como esses. Quando  $\delta(x) = 2$ , temos o caso mais interessante de todos, porque configurações centrais planares nos dão órbitas periódicas fisicamente realistas. Para  $n = 4$ , Otto Dziobek [4] formulou as configurações planares em termos das distâncias mútuas  $r_{ij}$  e obteve equações algébricas caracterizando essas configurações centrais. Quando consideramos  $n \geq 4$  a generalização natural deste problema não é o problema planar, e sim o caso  $\delta(x) = n - 2$ .

**Definição 1.4.** *Uma configuração central é de Dziobek se  $\delta(x) = n - 2$ .*

Em 1998 Smale [17] propôs o seguinte problema aos matemáticos deste século:

“Considere o problema de  $n$  corpos. Para uma escolha real positiva das massas  $m_1, \dots, m_n$ , dos corpos, é finito o número de classes de configurações centrais correspondentes?”

No problema de 5 corpos, se uma das massas for negativa, G. Roberts [15] mostrou que existem infinitas classes de configurações centrais de Dziobek.

Nosso objetivo será mostrar que, para uma escolha “genérica” das massas reais positivas, o número de configurações centrais de Dziobek é finito. Esta é uma resposta para o problema de Smale, neste caso particular.

## CAPÍTULO 2

# CONFIGURAÇÕES DE DZIOBEK

Neste capítulo apresentamos alguns fatos sobre a geometria das configurações de  $n$  pontos  $x_i \in \mathbb{R}^d$  e equações algébricas que caracterizam as configurações de Dziobek.

### 2.1 GEOMETRIA DAS CONFIGURAÇÕES

Seja  $x = (x_1, \dots, x_n)$  com  $x_i \in \mathbb{R}^d$ . Em  $\mathbb{R}^d$  temos no máximo  $d$  vetores linearmente independentes. Logo a dimensão de uma configuração  $x$  de  $n$  pontos sempre satisfaz  $0 \leq \delta(x) \leq n - 1$ . Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que  $d = n - 1$ .

Nós associaremos à configuração  $x$  uma matriz  $n \times n$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

e denotaremos o seu determinante por  $w(x)$ ; para o determinante de uma matriz introduzimos a notação  $|X|$ . Como o número máximo de colunas linearmente independentes é precisamente o posto de  $X$ , e  $k$  vetores linearmente independentes geram um espaço afim de dimensão  $k - 1$ , obtemos a seguinte expressão:

$$\delta(x) = \text{posto}(X) - 1.$$

Em particular,  $\delta(x) = n - 1$  se, e somente se,  $w(x) \neq 0$ . Isto também segue de  $w(x)$  ser o volume do paralelepípedo gerado por  $x$ .

Temos  $\delta(x) \leq n - 2$  se, e só se existe vetor  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  não-nulo no núcleo de  $X$ , isto é,

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \dots + \Delta_n &= 0, \\ \Delta_1 x_1 + \dots + \Delta_n x_n &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Desde que  $\delta(x) = n - 2$  se, e somente se a dimensão do núcleo é 1, neste caso, obtemos adicionalmente que  $\Delta$  é único a menos de multiplicação por constante.

Se  $\delta(x) = n - 2$  podemos assumir sem perda de generalidade que  $x_i \in \mathbb{R}^{n-2}$ . Neste caso, existe uma boa fórmula para um vetor pertencente ao núcleo.

Consideremos a matriz  $X$  novamente. Agora trata-se de uma matriz  $(n - 1) \times n$ . Adicionamos à matriz  $X$  ao longo da parte mais baixa, uma linha composta de zeros para obter uma nova matriz  $n \times n$   $\tilde{X}$  (estamos vendo os  $x_i$  como vetores de  $\mathbb{R}^{n-1}$  com a última coordenada nula):

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja  $\hat{x}_k = (x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$  a configuração de  $n - 1$  corpos obtida da configuração  $x$  desconsiderando-se o  $k$ -ésimo corpo, e seja  $\hat{X}_k$  a matrix  $(n - 1) \times (n - 1)$  associada a esta configuração (é obtida de  $X$  retirando-se a  $k$ -ésima coluna):

$$\hat{X}_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & 1 & x_{k-1} & x_{k+1} & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Temos que, a menos de uma mudança de sinal, as quantidades  $\Delta_k = (-1)^{k+1} |\hat{X}_k|$  são os cofatores das entradas nulas da última linha de  $X$ . Consideremos a matrix  $Y_0$  obtida da matrix  $X$  adicionando uma linha de entradas todas iguais a 1 ao longo da parte mais baixa:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-2)1} & \dots & x_{(n-2)n} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim  $|Y_0| = 0$ , pois  $Y_0$  possui duas linhas iguais. Consideremos ainda as matrizes:

$$Y_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-2)1} & \dots & x_{(n-2)n} \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n - 2.$$

Note que  $|Y_k| = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 2$ , pois  $Y_k$  possui duas linhas iguais. Calculando os determinantes de  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-2}$  usando os cofatores com relação a última linha, obtemos que  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  pertence ao núcleo de  $\tilde{X}$ .

Como interpretação geométrica, observe que  $\omega(\hat{x}_k) = |\hat{X}_k|$  nos dá o volume orientado do paralelepípedo varrido pelos  $\hat{x}_k$ 's. Mais ainda, temos  $\delta(x) = n - 2$  se, e somente se, um destes determinantes é não-nulo. Segue agora uma relação que será importante posteriormente. Trata-se de uma maneira de escrever  $\omega(\hat{x}_k)$  como um  $n - 2$  produto exterior (lembrando que estamos no espaço  $\mathbb{R}^{n-2}$ ):

**Lema 2.1.** *Seja  $\wedge$  o produto exterior no espaço  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Temos*

$$\tau(j, k)(x_1 - x_j) \wedge \dots \wedge (x_n - x_j) = \omega(\hat{x}_k)e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-2}$$

onde os fatores  $(x_k - x_j)$  e  $(x_j - x_j)$  foram omitidos no primeiro membro,  $j$  é um índice arbitrário com  $j \neq k$ , os  $e_i$ 's formam a base canônica de  $\mathbb{R}^{n-2}$  e

$$\tau(j, k) = \begin{cases} (-1)^j, & \text{se } k < j, \\ (-1)^{j+1}, & \text{se } k > j. \end{cases}$$

**Demonstração.** Considere a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{n-2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-2} \\ e_i &\longmapsto x_i - x_j \end{aligned}$$

A matriz de  $T$  é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} x_1 - x_j & \dots & x_{j-1} - x_j & x_{j+1} - x_j & \dots & x_{k-1} - x_j & x_{k+1} - x_j & \dots & x_n - x_j \end{pmatrix}$$

se  $j < k$ , ou

$$T = \begin{pmatrix} x_1 - x_j & \dots & x_{k-1} - x_j & x_{k+1} - x_j & \dots & x_{j-1} - x_j & x_{j+1} - x_j & \dots & x_n - x_j \end{pmatrix}$$

se  $j > k$ .

Temos que:

$$|T| e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-2} = (x_1 - x_j) \wedge \dots \wedge (x_n - x_j). \quad (2.2)$$

**Afirmação:**  $|T| = \begin{cases} (-1)^j \omega(\hat{x}_k), & \text{se } k < j, \\ (-1)^{j+1} \omega(\hat{x}_k), & \text{se } k > j. \end{cases}$  Considere a matriz  $\hat{X}_k$  e subtraia a  $j$ -ésima coluna das demais obtendo a seguinte matriz:

$$\hat{X}_k^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 - x_j & \dots & x_{j-1} - x_j & x_j & x_{j+1} - x_j & \dots & x_n - x_j \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$|\hat{X}_k^{(j)}| = |\hat{X}_k| = w(\hat{x}_k) \quad (2.3)$$

pois subtrair uma coluna de outra não altera o determinante.

Expandindo o determinante de  $\hat{X}_k^{(j)}$  pela primeira linha obtemos que

$$|\hat{X}_k^{(j)}| = \begin{cases} (-1)^j |T|, & \text{se } k < j, \\ (-1)^{j+1} |T|, & \text{se } k > j. \end{cases}$$

Portanto, de (2.3) e da relação acima segue que  $w(\hat{x}_k) = \tau |T|$ . Substituindo em (2.2), temos:

$$\tau \omega(\hat{x}_k) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-2} = (x_1 - x_j) \wedge \dots \wedge (x_n - x_j).$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por  $\tau$ , obtemos a relação desejada. ■

Agora vamos reformular o critério de dimensão em termos das distâncias mútuas  $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ , ou melhor, dos seus quadrados  $s_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$ . Quando trabalhamos com estas quantidades, nós consideramos as  $p = \frac{n(n-1)}{2}$  distâncias com  $1 \leq i < j \leq n$  como variáveis independentes. Seja  $s \in \mathbb{R}^p$  o vetor com componentes  $s_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ .

Temos que  $s_{ij} = \|x_i - x_j\|^2 = \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle = \|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle + \|x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2x_i \cdot x_j + \|x_j\|^2$ .

Usando isto e as equações (2.1), nós temos:

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \Delta_j = \|x_i\|^2 \sum_{j=1}^n \Delta_j - 2x_i \cdot \sum_{j=1}^n \Delta_j x_j + \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \Delta_j = \sum_{j=1}^n \|x_j^2\| \Delta_j := -\Delta_0. \quad (2.4)$$

Claramente, o resultado independe de  $i$ . Portanto, vamos denotá-lo por  $-\Delta_0$ .

**Definição 2.1.** Definimos a matriz de Cayley-Menger por:

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ 1 & s_{13} & 0 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_{1n} & s_{2n} & s_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo o determinante de Cayley-Menger o número  $F(s) = |A(s)|$ . Denotaremos por  $F_{ij}$  o cofator de elemento na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna de  $F(s)$ .

**Exemplo 1:** Considere uma configuração  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Seja  $\hat{x}_i$  a configuração obtida de  $x$  retirando-se o  $i$ -ésimo corpo. O determinante de Cayley-Menger associado a  $\hat{x}_i$  é  $F_{ii}$ .

A definição 2.1 é importante, pois podemos expressar a dimensão de uma configuração  $x$  em termos de  $F$  e seus cofatores, como veremos nos dois próximos resultados.

**Proposição 2.1.** Seja  $x$  a configuração de  $n$  corpos e seja  $F$  o determinante de Cayley-Menger associado. Então  $\delta(x) \leq n - 2$  se, e somente se,  $F(s) = 0$ .

**Demonstração.** Suponha, sem perda de generalidade, que  $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Se  $\delta(x) \leq n - 2$ , (2.1) tem uma solução não-trivial  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ , logo algum  $\Delta_i$  é não nulo. Definindo  $-\Delta_0$  como em (2.4), temos que  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$  é um elemento não-trivial do núcleo de  $A(s)$ . Portanto segue que  $F(s) = |A(s)| = 0$ .

Por outro lado, se  $F(s) = 0$  a equação  $A(s)\Delta = 0$  tem uma solução não trivial  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ . Para estes  $\Delta_i$ 's,  $1 \leq i \leq n$ , a soma (2.4) é igual a  $-\Delta_0$  e também  $\sum_{j=1}^n \Delta_j = 0$ . Tome

$$\alpha = 2 \sum_{j=1}^n \Delta_j x_j \quad \text{e} \quad \beta = \Delta_0 + \sum_{j=1}^n \Delta_j \|x_j\|^2, \quad (2.5)$$

e considere a equação

$$\alpha \cdot y = \beta. \quad (2.6)$$

Substituindo diretamente  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , em (2.6) obtemos de (2.4) que os  $x_i$ 's satisfazem a equação (2.6).

Se  $\alpha = 0$  então a equação (2.1) é satisfeita e  $\delta(x) \leq n - 2$  como desejado.

Se  $\alpha \neq 0$ , considere  $U$  o espaço normal a  $\alpha$  e note que todas as soluções de (2.6) podem ser escritas na forma  $x = x_1 + U$ , e que todo ponto desta forma é solução da

equação (2.6). Além disso este conjunto de pontos é um hiperplano  $H$  não-trivial, pois  $x_1, \dots, x_n \in H$  e  $\alpha \in H$ . Visto que a dimensão de um hiperplano não-trivial contido em  $\mathbb{R}^{n-1}$  é igual à  $n-2$ ,  $\delta(x) \leq n-2$  como desejado. ■

O próximo resultado fornece critérios para decidir quando uma configuração é de Dziobek.

**Proposição 2.2.** *Se  $F = 0$ , as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $\delta(x) = n-2$ ;
2. No mínimo dois cofatores principais  $F_{ii}$  são não-nulos;
3.  $\text{posto}(A) = n$ .

**Demonstração.** Suponha que  $F = 0$ .

1.  $\Rightarrow$  2. Se  $\delta(x) = n-2$  então para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  os vetores  $x_i - x_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $i \neq j$ , geram um espaço vetorial de dimensão  $n-2$ .

Desta maneira podemos encontrar dois vetores  $x_{i_1}$  e  $x_{i_2}$  tais que  $\delta(\hat{x}_{i_k}) = n-2$ ,  $k = 1, 2$ . Desde que  $\delta(\hat{x}_{i_k}) = (n-1) - 1 > (n-1) - 2$  pela proposição anterior agora aplicada a uma configuração com  $n-1$  corpos, concluímos que o determinante de Cayley-Menger associado à configuração  $\hat{x}_{i_k}$  é  $F_{i_k i_k} \neq 0$ ,  $k = 1, 2$ . Portanto pelo menos dois cofatores principais não se anulam.

2.  $\Rightarrow$  3. Suponha agora que pelo menos dois cofatores principais não se anulam. Portanto  $\text{posto}(A) \geq n$ . Como por hipótese  $F = 0$  segue que  $\text{posto}(A) \leq n$ . Disto segue 3.

3.  $\Rightarrow$  1. Se 3. vale então a dimensão do núcleo é 1, logo as soluções são únicas a menos de multiplicação por constante. Por argumento mencionado anteriormente, qualquer linha da matriz dos cofatores  $(F_{i1}, \dots, F_{i(n+1)})$  é vetor do núcleo. Como  $\Delta = (\Delta_0, \dots, \Delta_n)$  também é vetor do núcleo temos que  $b_i \Delta = (F_{i1}, \dots, F_{i(n+1)})$ , e  $b_j \Delta = (F_{j1}, \dots, F_{j(n+1)})$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ . Portanto para todo  $i, k, j, l \in \{1, \dots, n+1\}$  temos:

$$F_{ik} F_{jl} = b_i b_j \Delta_{k-1} \Delta_{l-1} = F_{jk} F_{il}. \quad (2.7)$$

Em particular nós temos  $F_{ii} F_{jj} = F_{ij}^2$ . Por hipótese temos que  $\text{posto}(A) = n$ , logo para algum  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$  vale  $F_{ij} \neq 0$ . Então, pela proposição anterior,  $\delta(\hat{x}_i) = n-2$ , o que nos dá que  $\delta(x) \geq n-2$ . Como  $F = 0$ , pela proposição anterior temos  $\delta(x) \leq n-2$ , portanto obtemos 1. ■

As duas proposições anteriores nos dão critérios a respeito da dimensão de uma configuração que dependem do determinante de Cayley-Menger. Uma questão natural é se existem representações convenientes para os cofatores desta matriz. O próximo resultado nós dá resposta satisfatória a esta questão.

**Proposição 2.3.** *Sejam  $A(s)$  e  $F(s)$  a matriz e o determinante de Cayley-Menger com  $s_{ij}$  números complexos arbitrários. Suponha que  $F(s) = 0$ , com ao menos um dos cofatores  $F_{ij} \neq 0$ . Então, se  $\Delta = (\Delta_0, \dots, \Delta_n)$  é uma solução não-trivial de  $A(s)\Delta = 0$ , existe uma única constante  $k$  não-nula tal que*

$$F_{ij} = k\Delta_{i-1}\Delta_{j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.8)$$

Mais ainda, pelo menos dois  $\Delta_i$ 's são não nulos para  $1 \leq i \leq n$ .

**Demonstração.** Segue imediatamente da hipótese que  $\text{posto}(A(s)) = n$ . Mais ainda o vetor  $\Delta$  é único, a menos de multiplicação por constante. Pelo que observamos na prova da Proposição 2.2, cada coluna da matriz dos cofatores é proporcional a  $\Delta$  e pertence ao núcleo de  $A(s)$ . Em outras palavras  $F_{ij} = k_i\Delta_{j-1}$ . Como  $A(s)$  é matriz simétrica,  $F_{ij} = F_{ji} = k_j\Delta_{i-1}$ . Consideremos  $i_0, j_0$  tal que  $F_{i_0j_0} \neq 0$ . Temos

$$k_{i_0}\Delta_{j_0-1} = k_{j_0}\Delta_{i_0-1} \neq 0 \quad (2.9)$$

o que acarreta em  $k_{i_0}, \Delta_{j_0-1}, k_{j_0}, \Delta_{i_0-1} \neq 0$ . Fixemos o  $i_0$  e façamos variar o  $j$ . Dividindo por  $\Delta_{i_0-1}$  em (2.9) concluímos que  $k\Delta_{j-1} = k_j$  onde  $k = \frac{k_{i_0}}{\Delta_{i_0-1}}$  para todo  $j \in 1, \dots, n+1$ . Logo

$$F_{ij} = k_i\Delta_{j-1} = k\Delta_{i-1}\Delta_{j-1}. \quad (2.10)$$

Note que, como  $k$  é o quociente de dois números não-nulos,  $k$  é não-nulo. Visto que a soma dos  $\Delta_j$ 's se anula, temos que pelo menos dois  $\Delta_j$ 's são não-nulos para  $1 \leq j \leq n$ . Por hipótese existe  $F_{ij} \neq 0$ . Pela equação (2.10) temos que  $k \neq 0$ ,  $\Delta_{j-1} \neq 0$ ,  $\Delta_{i-1} \neq 0$ . Portanto o resultado segue. ■

**Exemplo 2:** Se  $n = 2$  temos

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} \\ 1 & s_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $F(s) = 2s_{12}$ .

**Exemplo 3:** Se  $n=3$  temos:

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} \\ 1 & s_{12} & 0 & s_{13} \\ 1 & s_{13} & s_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Façamos  $s_{ij} = r_{ij}^2$ . Podemos calcular  $A(s)$  de maneira mais simples subtraindo a segunda coluna da terceira e quarta colunas, obtendo uma matriz  $B(s)$ . Expandindo o determinante de  $B(s)$  obtemos:

$$F(s) = |B(s)| = (r_{12} - r_{13} - r_{23})(r_{13} - r_{12} - r_{23})(r_{23} - r_{12} - r_{13})(r_{23} + r_{12} + r_{13}).$$

Escrevendo  $p = \frac{1}{2}(r_{23} + r_{12} + r_{13})$  segue que

$$F(s) = -16 \left( \sqrt{p(p - r_{12})(p - r_{13})(p - r_{23})} \right)^2,$$

onde  $\sqrt{p(p - r_{12})(p - r_{13})(p - r_{23})}$  é a fórmula de Herão para cálculo da área de um triângulo conhecidos seus lados. Assim podemos ver o determinante de Cayley-Menger como uma generalização desta formula clássica para tetraedros de dimensão superior.

## 2.2 AS EQUAÇÕES PARA CONFIGURAÇÕES DE DZIOBEK

Nesta seção, obteremos equações para as configurações centrais com  $\delta(x) = n - 2$  em termos das distâncias mútuas. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que estamos no espaço  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Tome

$$\lambda = \frac{M}{r_0^3} \quad (2.11)$$

na equação (1.3), onde  $M = \sum_{j=1}^n m_j$ , é a massa total e  $r_0$  é uma nova constante. Desta maneira, substituindo  $c = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j x_j$ , em (1.3) obtemos:

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^3} - \left[ \frac{\sum_{j=1}^n m_j x_i - \sum_{j=1}^n m_j x_j}{r_0^3} \right] = 0. \quad (2.12)$$

Colocando os  $m_j$ 's em evidência na segunda parcela de (2.12), temos que:

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^3} - \sum_{j \neq i} m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_0^3} = 0. \quad (2.13)$$

Fazendo

$$S_{ij} = r_{ij}^{-3} - r_0^{-3}, \quad i \neq j, \quad (2.14)$$

e colocando-o em evidência, obtemos as seguintes equações:

$$\sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (x_i - x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Esta equação será mais conveniente para nossos propósitos pois é homogênea nas variáveis  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e  $r_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Seja  $v_{ikl} = (x_1 - x_i) \wedge \dots \wedge (x_n - x_i)$  um produto exterior  $(n - 3)$ -dimensional, onde os termos  $(x_i - x_i)$ ,  $(x_k - x_i)$ ,  $(x_l - x_i)$  foram omitidos. Considere agora  $\sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (x_i -$

$x_j) \wedge v_{ikl} = 0$ . Usando a distributividade do produto exterior e o fato de  $w \wedge w = 0$ , sendo  $w$  um vetor, segue que:

$$\begin{aligned} m_k S_{ik}(x_k - x_i) \wedge (x_1 - x_i) \wedge \dots \wedge (x_n - x_i) = \\ -m_l S_{il}(x_l - x_i) \wedge (x_1 - x_i) \wedge \dots \wedge (x_n - x_i). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Usando a anticomutatividade do produto exterior, a definição dos  $\Delta_k$ 's, e o lema 2.1 obtem-se a seguinte relação:

$$m_k S_{ik} \Delta_l = m_l S_{il} \Delta_k \quad (2.17)$$

Para  $\delta(x) < n - 2$  a equação acima é trivial, pois os  $\Delta_k$ 's são todos nulos. Portanto a equação (2.17) nos dá menos informação que a equação (2.15).

Seja  $S \in \mathbb{R}^p$ , o vetor de entradas  $S_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $p = \frac{n(n-1)}{2}$ . O próximo resultado nos dá uma parametrização dos vetores  $S$ , valendo para configurações de Dziobek.

**Proposição 2.4.** *Seja  $x$  uma configuração central com massas não-nulas e  $\delta(x) = n - 2$ , e seja  $S_{ij}$  como em (2.14). Então existem números reais  $z_1, \dots, z_n$  e  $k \neq 0$  tais que:*

$$S_{ij} = k z_i z_j. \quad (2.18)$$

Mais ainda, ao menos dois dos  $z_i$ 's são não-nulos.

**Demonstração.** Uma vez que as massas são não-nulas, nós podemos definir

$$z_i = \frac{\Delta_i}{m_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Podemos escrever a equação (2.17) como:

$$S_{ik} z_l = S_{il} z_k. \quad (2.20)$$

Se  $\delta(x) = n - 2$  existe  $l_0$  tal que  $\Delta_{l_0}$  é não-nulo e isto implica que  $z_{l_0}$  é não-nulo. Substituindo  $l$  por  $l_0$  em (2.20) e dividindo ambos os membros desta equação por  $z_{l_0} \neq 0$ , temos:

$$S_{ij} = \frac{S_{il_0} z_j}{z_{l_0}}. \quad (2.21)$$

Fazendo o  $i$  e o  $j$  variarem e definindo as constantes:

$$k_i = \frac{S_{il_0}}{z_{l_0}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.22)$$

obtemos  $S_{ij} = k_i z_j$  para  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Por simetria dos  $S_{ij}$ 's temos  $k_i z_j = k_j z_i$ . Isto implica que a matriz

$$\begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

tem posto 1. Portanto existe um único  $k$  tal que  $k z_i = k_i$ . Para ver que  $k \neq 0$  note que, caso contrário, nós teríamos  $S_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ . Pela definição dos  $S_{ij}$ 's, teríamos

que todas as distâncias mútuas  $r_{ij}$  são iguais. Mas então teríamos que a configuração  $x$  seria o simplexo regular  $(n - 1)$ -dimensional, que tem dimensão  $n - 1$ . Logo algum  $S_{ij}$  é não-nulo, e daí, pela forma da equação (2.18), ao menos dois dos  $z_i$ 's são não-nulos. ■

Da equação (2.18) segue imediatamente que os vetores  $S$  provenientes de uma configuração de Dziobek satisfazem as equações:

$$S_{ik}S_{jl} = S_{il}S_{jk}, \quad (2.23)$$

onde  $i, j, k, l$  são índices distintos,  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ . Entretanto estas equações são mais fracas que a equação (2.18). Por exemplo, para  $n = 4$  seja  $S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0$  e  $S_{14} = S_{24} = S_{34} = 1$ . Então  $S$  satisfaz (2.23), mas não satisfaz (2.18). Por esta razão é preferível trabalhar com as variáveis  $z_i$ ,  $1, \dots, n$  no lugar das variáveis  $S_{ij}$ .

## CAPÍTULO 3

# ALGUNS FATOS DA ÁLGEBRA COMUTATIVA

Neste capítulo estaremos interessados em resultados que servem de embasamento teórico às aplicações da geometria algébrica a serem feitas no capítulo 4.

### 3.1 TEOREMAS DE HILBERT

O teorema da base de Hilbert juntamente com o teorema dos zeros de Hilbert permitem a construção da exata relação entre conjuntos algébricos e ideais radicais. Os anéis que consideramos são comutativos com identidade multiplicativa 1. Iniciaremos por algumas definições.

**Definição 3.1.** *Dado um anel  $A$ , um subconjunto  $I \subseteq A$  é um ideal se:*

1.  $0 \in I$ ,
2.  $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$ ,
3.  $a \in I, b \in A \Rightarrow ab \in I$ .

**Definição 3.2.** *Um subconjunto  $C \subset I$  é um conjunto de geradores de  $I$  se todo elemento  $a \in I$  se escreve na forma  $a = a_1c_1 + \dots + a_nc_n$  para certos  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $c_1, \dots, c_n \in C$ .*

**Notação:**  $I = (C)$ . Quando  $C$  é finito, escrevemos  $I = (C) = (c_1, \dots, c_n)$  e dizemos que  $I$  é finitamente gerado.

**Definição 3.3.** *Um anel  $A$  é noetheriano se todo ideal  $I \subseteq A$  é finitamente gerado.*

**Teorema 3.1.** [O teorema da base de Hilbert, 1890] *Se  $A$  é noetheriano, então  $A[x]$  é noetheriano.*

**Demonstração.** Suponha  $A[x]$  não-noetheriano. Então existe ideal  $J \subset A[x]$  que não é finitamente gerado. Seja  $f_1 \in J$  de menor grau possível. Seja  $f_2 \in J \setminus (f_1)$  de menor grau possível. De modo indutivo seja  $f_k \in J \setminus (f_1, \dots, f_{k-1})$  de menor grau possível.

Denotemos por  $a_k$  o coeficiente dominante de  $f_k$ , e por  $n_k$  o grau de  $f_k$ . Isto é  $f_k = a_kx^{n_k} + a_{n_k-1}x^{n_k-1} \dots + a_{k0}$ .

Consideremos a cadeia de ideais  $a_1 \subset (a_1, a_2) \subset \dots$ , onde  $(a_i) \subset A$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Afirmando que esta cadeia não estabiliza. De fato supondo o contrário, digamos  $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_{k+1}) = \dots$  Então temos que  $a_{k+1} = \sum_{i=1}^k b_i a_i$ .

Definindo  $g = f_{k+1} - \sum_{i=1}^k b_i x^{n_{k+1}-n_i} f_i \in J$ . Temos:

1.  $gr(g) < gr(f_{k+1})$ , onde  $gr$  denota a função grau definida em  $A[x]$ ;
2.  $g \in J \setminus (f_1, \dots, f_k)$ , pois se  $g \in (f_1, \dots, f_k)$ , teríamos  $f_{k+1} = g + \sum_{i=1}^k b_i x^{n_{k+1}-n_i} f_i \in (f_1, \dots, f_k)$ .

Pela escolha de  $f_{k+1}$  isto é uma contradição. Logo a cadeia  $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \dots$  não estabiliza. Portanto o ideal de  $A \cup_{k=1}^{\infty} (a_1, \dots, a_k)$  não é finitamente gerado, o que contradiz a hipótese de ser  $A$  noetheriano. ■

**Corolário 3.1.** *Se  $k$  é corpo  $k[x_1, \dots, x_n]$  é noetheriano.*

**Demonstração.** Procederemos por indução.

$n = 1 : k[x_1]$  é domínio de ideais principais, logo é noetheriano. Suponha agora que o resultado vale para  $n = k - 1$ . Sendo  $k[x_1, \dots, x_{k-1}]$  noetheriano, pelo teorema 3.1, temos que  $k[x_1, \dots, x_k] = (k[x_1, \dots, x_{k-1}])[x_k]$  é noetheriano. ■

## 3.2 EXTENSÕES DE HOMOMORFISMOS

Como veremos, a demonstração do teorema dos zeros de Hilbert depende, em certa altura, da existência de uma extensão de um homomorfismo  $\sigma : k \rightarrow k^a$  a uma álgebra finitamente gerada sobre  $k$ , onde  $k^a$  denota o fecho algébrico de  $k$ . Portanto, voltaremos nosso interesse para o problema de estender um homomorfismo  $\sigma : k \rightarrow k^a$  a certos tipos de extensões do corpo  $k$ . Denotaremos por  $\mathbb{K}$ , um corpo algebricamente fechado.

**Teorema 3.2.** *Seja  $k$  um corpo,  $E$  uma extensão algébrica de  $k$ , e  $\sigma : k \rightarrow \mathbb{K}$  um homomorfismo injetivo de  $k$  em  $\mathbb{K}$  algebricamente fechado. Então existe um homomorfismo injetivo de  $E$  em  $\mathbb{K}$  que estende  $\sigma$ . Se  $E$  é algebricamente fechado e  $\mathbb{K}$  é algébrico sobre  $\sigma(k)$ , então tal extensão de  $\sigma$  é um isomorfismo.*

**Demonstração.** Seja  $S$  o conjunto dos pares  $(F, \tau)$ , onde  $F$  é subcorpo de  $E$  contendo  $k$ , e  $\tau$  é uma extensão de  $\sigma$  a um homomorfismo injetivo de  $F$  em  $\mathbb{K}$ . Se  $(F, \tau)$  e  $(F', \tau')$  são tais pares, escrevemos  $(F, \tau) \leq (F', \tau')$  se  $F \subset F'$  e  $\tau'|_F = \tau$ . Temos que  $S \neq \emptyset$  pois  $(k, \sigma)$  está em  $S$ . Dada uma família totalmente ordenada  $\{(F_i, \tau_i)\}$ , fazendo  $F = \cup F_i$  e  $\tau = \tau_i$  em cada  $F_i$ , obtemos uma cota superior para tal família. Usando o lema de Zorn obtemos um elemento maximal de  $S$ ,  $(L, \lambda)$ . Se existe elemento  $\alpha \in E \setminus L$ , podemos estender  $\lambda$  para  $L(\alpha)$ , contradizendo a maximalidade de  $(L, \lambda)$ . Portanto  $L = E$  como queríamos. Se  $E$  é algebricamente fechado e  $L$  é algébrico sobre  $\sigma(k)$  então  $\sigma(E)$  é algebricamente fechado e  $L$  é algébrico sobre  $\sigma(E)$ , daí segue que  $L = \sigma(E)$ . ■

**Observação:** Deste resultado segue que o fecho algébrico é único a menos de isomorfismo.

**Definição 3.4.** *Um ideal  $P \subset A$  é primo se  $ab \in P$  implica em  $a \in P$  ou  $b \in P$ . Um ideal  $M \subseteq A$  é maximal se  $M \subset I$ , com  $I$  ideal de  $A$  então  $M = I$  ou  $A = I$ .*

**Observação:** Se  $\phi : A \rightarrow B$  é homomorfismo de anéis então

1.  $\phi(A)$  é domínio se, e somente se, o núcleo de  $\phi$  é ideal primo;
2.  $\phi(A)$  é corpo se, e somente se, o núcleo de  $\phi$  é ideal maximal.

**Definição 3.5.** Um anel  $\mathfrak{o}$  é local se possui apenas um ideal máximo  $\mathfrak{m}$ . **Notação:**  $(\mathfrak{o}, \mathfrak{m})$

Estendemos  $\sigma$  quando a extensão de corpos era algébrica, vamos agora estender  $\sigma$  quando a extensão de corpos é inteira. Primeiro consideremos o caso onde  $A$  é anel local.

**Proposição 3.1.** Seja  $(\mathfrak{o}, \mathfrak{m})$  um anel local, e  $\mathfrak{o} \subset B$  uma extensão inteira. Seja  $\sigma : \mathfrak{o} \rightarrow \mathbb{K}$ , um homomorfismo, com  $\mathbb{K}$  algebricamente fechado. Então  $\sigma$  se estende a um homomorfismo de  $B$  em  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** O núcleo de  $\sigma$  é um ideal maximal que tem que ser  $\mathfrak{m}$ . Pela propriedade do levantamento para extensões inteiras, existe um ideal maximal  $M$  de  $B$ , tal que  $M \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}$ , e  $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$  é isomorfo a o subcorpo  $\sigma(\mathfrak{o}) \subset L$ . Podemos encontrar um isomorfismo  $\tau$  entre  $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$  e  $\sigma(\mathfrak{o})$  tal que a composição da projeção de  $\mathfrak{o}$  em  $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$  composta com  $\tau$  é  $\sigma$ . Podemos estender o isomorfismo entre  $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$  e  $\sigma(\mathfrak{o})$  a  $B/M$ , de modo que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B/M \\ \uparrow & & \searrow \\ \mathfrak{o} & \longrightarrow & D \longrightarrow L \end{array}$$

e deste modo obtemos um homomorfismo de  $B$  em  $L$  que estende  $\sigma$ . ■

Vamos usar o caso local para atacar o caso geral para extensões inteiras.

**Proposição 3.2.** Seja  $A \subset B$  uma extensão inteira de anéis. Seja  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{K}$ , um homomorfismo, com  $\mathbb{K}$  algebricamente fechado. Então  $\sigma$  se estende a um homomorfismo de  $B$  em  $L$

**Demonstração.** A imagem de  $\sigma$  é um domínio portanto o seu núcleo é um ideal primo  $P$ . Considere o conjunto multiplicativo  $S = A \setminus P$ . Podemos considerar os anéis de fração  $S^{-1}A$  e  $S^{-1}B$ . Assim temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & S^{-1}B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & S^{-1}A = A_P \end{array}$$

Desde que  $S^{-1}A \subset S^{-1}B$  é extensão inteira e  $S^{-1}A$  é local, podemos reduzir nosso problema ao caso local demonstrado acima. ■

**Teorema 3.3.** Seja  $k$  um corpo, e seja  $k[x_1, \dots, x_n] = k[x]$  uma álgebra finitamente gerada sobre  $k$ . Seja  $\sigma : k \rightarrow \mathbb{K}$  um homomorfismo injetivo de  $k$  em um corpo algebricamente fechado  $\mathbb{K}$ . Então existe uma extensão de  $\sigma$  a um homomorfismo de  $k[x]$  em  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** Seja  $\mathfrak{m}$  um ideal maximal de  $k[x]$ . Seja  $\sigma : k[x] \rightarrow k[x]/\mathfrak{m}$ . Então  $\sigma(k)[\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)]$  é um corpo, e portanto, uma extensão de  $\sigma(k)$ . Desta observação segue que podemos reduzir ao caso de  $k[x_1, \dots, x_n]$  corpo, porque aplicando  $\phi \circ \sigma^{-1}$  a  $\sigma(k)$ , podemos estender esta aplicação para um homomorfismo de  $\sigma(k)[\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)]$  em  $\mathbb{K}$ . Compondo este homomorfismo com  $\sigma$  obtemos a extensão de  $k$  requerida.

Temos então que  $k[x]$  é extensão de  $k$ . Se esta extensão é algébrica, pelo teorema 3.2 o resultado segue. Caso contrário, sejam  $t_1, \dots, t_r$ ,  $r \geq 1$  base de transcendência de  $k$ . Sem perda de generalidade podemos assumir que  $\phi$  é a identidade de  $k$ . Cada elemento  $x_1, \dots, x_n$  é algébrico sobre  $k(t_1, \dots, t_r)$ . Se nós multiplicarmos os polinômios mínimos de  $x_i$  em  $k(t)[X]$ , pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores dos coeficientes destes polinômios, obtemos polinômios não-nulos em  $k[t][X]$ . Sejam  $a_1, \dots, a_n$  os coeficientes líderes destes polinômios, e seja  $a(t)$  o produto

$$a(t) = a_1 \dots a_n.$$

Desde que  $a(t) \neq 0$ , existem elementos  $t'_1, \dots, t'_r \in k^a$  tais que  $a(t') \neq 0$ , e portanto,  $a_i(t') \neq 0$  para todo  $i$ . Cada  $x_i$  é integral sobre o anel

$$A = k \left[ t_1, \dots, t_r, \frac{1}{a_i(t)}, \dots, \frac{1}{a_r(t)} \right].$$

Considere o homomorfismo  $\phi : k[t_1, \dots, t_r] \rightarrow k^a$  tal que  $\phi$  é a identidade de  $k$ , e  $\phi(t_j) = t'_j$ . Seja  $P$  o núcleo deste homomorfismo. Note que  $P$  é ideal primo pois todo subanel de um corpo é domínio. Note ainda que  $a(t) \notin P$ . Como todo elemento de  $P$  é invertível em  $k^a$  pela propriedade universal dos anéis de frações, nosso homomorfismo  $\phi$  se estende unicamente para  $k[t]_P$ . Pela proposição 3.2,  $\phi$  se estende para um homomorfismo  $\phi : k[t]_P[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k^a$ , pois cada  $x_i$  é inteiro sobre  $A \subset k[t]_P$ . Uma vez que podemos obter homomorfismo injetivo de  $k[t][x_1, \dots, x_n]$  em  $k[t]_P[x_1, \dots, x_n]$  e de  $k^a$  em  $\mathbb{K}$ , o resultado segue. ■

**Corolário 3.2.** *Seja  $k$  um corpo e  $k[x_1, \dots, x_n]$  álgebra finitamente gerada sobre  $k$ . Se  $k[x]$  é corpo, então  $k[x]$  é algébrico sobre  $k$ .*

**Demonstração.** De fato, a inclusão  $k \hookrightarrow k^a$  induz um homomorfismo entre  $k[x]$  e um subcorpo de  $k^a$  que é algébrico sobre  $k$ . ■

### 3.3 TEOREMA DOS ZEROS DE HILBERT

**Definição 3.6.** *Seja  $S$  um conjunto de polinômios no anel de polinômios  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Seja  $L$  uma extensão de  $k$ . Um zero de  $S$  em  $L$  é uma  $n$ -upla de elementos  $(c_1, \dots, c_n)$  de  $L$  tal que*

$$f(c_1, \dots, c_n) = 0 \text{ para todo } f \in S.$$

O próximo resultado nos dá uma condição para que um conjunto de polinômios tenha zero comum.

**Teorema 3.4.** *Seja  $I$  um ideal em  $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ . Então  $I = k[x]$  ou  $I$  tem zero em  $k^a$ .*

**Demonstração.** Suponha  $I \neq k[x]$ . Então  $I$  está contido em algum ideal maximal  $\mathfrak{m}$  e  $k[x]/\mathfrak{m}$  é uma extensão de  $k$  finitamente gerada pelas classes de  $x_1, \dots, x_n \bmod \mathfrak{m}$ . Pelo corolário 3.2, esta é uma extensão algébrica de  $k$ , que pode ser imersa no fecho algébrico  $k^a$ . O homomorfismo obtido compondo a projeção  $\phi : k[x] \rightarrow k[x]/\mathfrak{m}$  com a imersão obtida acima obtemos o zero de  $\mathfrak{m}$  desejado. ■

**Teorema 3.5.** *[Hilbert Nullstellensatz] Seja  $I$  um ideal de  $k[x]$ . Seja  $f$  um polinômio em  $k[x]$  tal que  $f(c) = 0$  para todo zero  $(c) = (c_1, \dots, c_n)$  de  $I$  em  $k^a$ . Então existe um inteiro  $m > 0$  tal que  $f^m \in I$ .*

**Demonstração.** O resultado é trivial para  $f = 0$ , portanto nós podemos tomar  $f \neq 0$ . Nós vamos usar o truque de Rabinowitsch que consiste em introduzir uma nova variável  $y$ , e considerar o ideal  $I'$  de  $k[x, y]$ , gerado por  $I$  e  $1 - yf$ . Afirmamos que este ideal não possui zeros. De fato todo zero de  $I'$  é zero de  $f$ , mas isto implicaria que  $0 = 1$ , absurdo! Logo  $I' = k[x, y]$  pelo teorema anterior. Portanto existem polinômios  $g_i \in k[x, y]$   $i = 0, \dots, n$  e  $h_j \in I$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tais que

$$1 = g_0(1 - yf) + g_1h_1 + \dots + g_nh_n$$

Passando o quociente por  $\langle 1 - yf \rangle$  obtemos:

$$\bar{1} = \overline{g_1h_1} + \dots + \overline{g_nh_n}$$

Utilizando o fato que  $k[x]_f \cong k[x, y]/\langle 1 - yf \rangle$ , temos que:

$$\frac{1}{1} = \frac{\alpha_1}{h_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{h_n} = \frac{\frac{\beta_1}{h_1} + \dots + \frac{\beta_n}{h_n}}{f^M}$$

onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in k[x]$ ,  $m$  é o grau máximo de  $y$  nos polinômios  $g_i$ . Multiplicando tudo por  $f^m$  obtemos

$$f^m = \frac{\beta_1}{h_1} + \dots + \frac{\beta_n}{h_n}.$$

Deste modo, concluímos a prova. ■

### 3.4 RESULTANTES

As resultantes nos fornecem um critério para decidir quando dois polinômios  $f$  e  $g \in \mathbb{C}[x]$  possuem raiz em comum. Uma aplicação importante da resultante é permitir a eliminação de variáveis de sistemas de equações polinomiais em  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Definição 3.7.** Sejam  $f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$  e  $g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$  dois polinômios em  $\mathbb{C}[x]$ . A matriz  $(m+n) \times (m+n)$

$$Syl(f, g) = \begin{vmatrix} f_n & & & g_m & & & \\ f_{n-1} & f_n & & g_{m-1} & g_m & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & f_n & g_1 & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & f_{n-1} & g_0 & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & g_0 & \\ f_0 & \vdots & & & & & g_m \\ \vdots & f_0 & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & f_0 & & & g_0 \end{vmatrix}$$

é a matriz de Sylvester de  $f$  e  $g$ , onde os espaços em branco são preenchidos por zero. A resultante de  $f$  e  $g$ , denotado por  $Res_{n,m}(f, g)$  é o determinante da matriz de Sylvester.

A seguir enunciamos dois resultados que utilizamos para eliminar variáveis em um sistema de equações polinomiais. Demonstrações destes resultados podem ser encontrados em [9].

**Proposição 3.3.** Sejam  $f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$  e  $g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$  dois polinômios em  $\mathbb{C}[x]$  de graus  $\geq 1$  tais que  $f_n, g_m \neq 0$ . As seguintes condições são equivalentes:

1.  $Res(f, g) = 0$ ;
2. Existem polinômios  $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[x]$  de graus menores que  $n$  e  $m$ , respectivamente, tais que  $A(x)g(x) = B(x)f(x)$ ;
3.  $f$  e  $g$  tem um fator comum não constante em  $\mathbb{C}$ .

**Proposição 3.4.** Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  e  $\beta_1, \dots, \beta_m$  as raízes de  $f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$  e  $g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$ , respectivamente. Então o resultante é dado por:

$$Res(f, g) = f_n^m g_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

## CAPÍTULO 4

# ALGUNS FATOS DA GEOMETRIA ALGÉBRICA

### 4.1 O ESPAÇO PROJETIVO

Neste capítulo estudaremos propriedades das variedades quasi-projetivas que serão aplicadas ao problema da finitude de configurações centrais de Dziobek. Nossa principal referência é o capítulo I de [16].

Seja  $\mathbb{K}$  corpo, e  $\mathbb{K}^n$  o conjunto dos pontos  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\mathbb{K}^n$  é denominado espaço afim  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{K}$ .

Defina em  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  a seguinte relação de equivalência:

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \sim (b_1, \dots, b_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tal que } a_i = \lambda b_i, \\ i \in \{1, \dots, n+1\}$$

**Definição 4.1.** O espaço projetivo  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{K}$  é dado por:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = (\mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim. \quad (4.1)$$

Geometricamente cada elemento  $[a] = \{\lambda(a_1, \dots, a_{n+1}) : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  pode ser identificado com uma reta que passa pela origem  $(0, \dots, 0)$ . Denotemos  $[a] = (a_1 : \dots : a_{n+1})$ .

Se  $a_{n+1} \neq 0$  temos que  $[a] = (a_1 : \dots : a_{n+1}) = (\frac{a_1}{a_{n+1}} : \dots : \frac{a_n}{a_{n+1}} : 1)$

Se  $a_{n+1} = 0$ , temos que  $[a] = (a_1 : \dots : a_n : 0)$  com  $a_1, \dots, a_n$  definido a menos de multiplicação por constante.

Assim podemos representar  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  da seguinte maneira:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \{a_{n+1} = 1\} \cup \{a_{n+1} = 0\}, \quad (4.2)$$

onde  $\{a_{n+1} = 1\}$  está em bijeção com o espaço afim  $\mathbb{K}^n$  e  $\{a_{n+1} = 0\}$  está em bijeção com  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ .

Daremos agora algumas definições:

**Definição 4.2.** Consideremos o anel  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . Dizemos que um polinômio  $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  se anula no ponto  $[a] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  se  $f(b) = 0$ ,  $\forall b \in [a]$ . **Notação:**  $f([a]) = 0$ .

**Definição 4.3.** Uma variedade projetiva é um subconjunto de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  da forma

$$V = \{[a] : p_j([a]) = 0, \forall j \in J\}$$

onde  $\{P_j\}_{j \in J}$  é um subconjunto de  $k[x_0, \dots, x_n]$ .

Estamos interessados no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Denotaremos o espaço projetivo  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{C}$  por  $\mathbb{P}^n$ .

**Lema 4.1.** *Seja  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  um subconjunto. O conjunto  $I_V$  dos polinômios  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  que se anulam em todos os pontos  $[x] \in V$  formam um ideal de  $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ .*

**Demonstração.** Note que o polinômio nulo pertence a  $I_V$ . Considere  $g_1, g_2 \in I_V$ . Temos então que para  $[x] \in V$ ,  $g_i([x]) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Portanto  $g_1([x]) + g_2([x]) = 0$ . Logo,  $g_1 + g_2 \in I_V$ .

Por outro lado, se  $g \in I_V$ ,  $[x] \in V$ . Se  $\alpha(x) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , temos então que  $\alpha([x])g([x]) = 0$ .

Portanto  $I_V$  é um ideal de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , como queríamos provar. ■

**Proposição 4.1.** *O ideal  $I_V$ , como acima, é homogêneo, isto é, cada elemento  $f \in I_V$  é combinação finita de polinômios homogêneos que estão em  $I_V$ .*

**Demonstração.** Seja  $f \in I_V$ . Podemos escrever

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_r, \quad (4.3)$$

onde  $f_i$  é polinômio homogêneo de grau  $i$ , para  $i = 0, 1, \dots, r$ . Para todo  $[a] \in V$  temos que  $f([a]) = 0$ , isto é,  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$  para todo  $\lambda \neq 0$ , sendo  $(a_0, \dots, a_n)$  um representante para a classe  $[a]$  arbitrário. Assim avaliando em (4.3), em  $\lambda a_0, \dots, \lambda a_n$ , obtemos:

$$0 = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = f = f_0(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) + \dots + \lambda^r f_r(a_0, \dots, a_n). \quad (4.4)$$

Portanto  $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ , para  $i = 0, 1, \dots, r$ . Como este argumento independe dos representantes para a classe,  $f_i([(a_0, \dots, a_n)]) = 0 \forall i = 1, \dots, n$ . Logo  $f_i \in I_V \forall i = 1, \dots, n$ , e portanto  $I_V$  é homogêneo. ■

Portanto uma variedade projetiva fechada pode ser dada por um sistema de equações homogêneas. Logo a definição de variedade projetiva pode ser reescrita como

$$V = \{[a] : f_{j_1}([a]) = 0, \dots, f_{j_r}([a]) = 0, j \in J\} = \{[a] \in \mathbb{P}^n | f([a]) = 0 \forall f \in S \text{ homogêneo}\},$$

onde  $S$  é um subconjunto de  $K[x_0, \dots, x_n]$ .

Dado um ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  podemos definir o conjunto

$$V(I) = \{[a] : f([a]) = 0, \forall f \in I\},$$

que é uma variedade projetiva em  $\mathbb{P}^n$ .

**Lema 4.2.** *Seja  $V$  uma variedade projetiva (como na definição 4.3) dada por  $V = \{[a] \in \mathbb{P}^n | f([a]) = 0 \forall f \in S\}$ . Então  $V = V(<\delta>)$  onde  $<\delta>$  é o ideal gerado por  $S$ .*

Logo podemos supor que o sistema de equações homogêneas é determinado pelos geradores de um ideal.

## 4.2 TOPOLOGIA DE ZARISKI

Iniciaremos esta seção relembrando as principais operações com ideais: .

**Definição 4.4.** *Sejam  $I, J$  ideais de  $A$ . Então:*

1. *O ideal  $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$  é chamado de ideal soma de  $I$  e  $J$ .*
2. *O ideal  $IJ = \{ab : a \in I, b \in J\}$  é chamado de ideal produto de  $I$  e  $J$ .*
3. *O ideal  $\sqrt{I} = \{a \in A : a^n \in I, \text{ para algum inteiro } n > 0\}$  é chamado de radical do ideal  $I$ .*

**Definição 4.5.** *Um ideal  $I \subset A$  é radical se  $I = \sqrt{I}$ .*

Deixamos para o leitor a tarefa de verificar que  $\sqrt{I}$  é de fato um ideal.

**Observação:** As operações de soma arbitrária, a interseção finita e radical preserva a homogeneidade dos ideais envolvidos. Não faremos menção explícita, mas o próximo resultado depende disto.

Vimos na seção anterior que dado um ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  podemos associá-lo a uma variedade projetiva  $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

**Lema 4.3.** *Sejam  $I_1$  e  $I_2$  ideais de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  e  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in J}$  uma família de ideais de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$*

1.  $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \supseteq V(I_1)$
2.  $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$
3.  $\cap_{\alpha \in J} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha \in J} I_\alpha)$
4.  $V(I) = V(\sqrt{I})$
5.  $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2} \Leftrightarrow V(I_1) = V(I_2)$

**Demonstração.**

1. Se  $[a] \in V(I_2)$  então  $f([a]) = 0 \forall f \in I_2$ . Em particular,  $f([a]) = 0, \forall f \in I_1$ . Logo,  $[a] \in V(I_1)$ .
2. Segue de 1. que  $V(I_1) \cup V(I_2) \subset V(I_1 \cap I_2)$ : Se  $[a] \in V(I_1) \cup V(I_2)$ , podemos supor que  $[a] \in V(I_1)$ . Como  $I_1 \cap I_2 \subset I_1$ , pelo item 1.  $V(I_1) \subset V(I_1 \cap I_2)$ , portanto,  $[a] \in V(I_1 \cap I_2)$ .  
 $V(I_1 \cap I_2) \subset V(I_1 I_2)$ : Desde que  $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$ , aplicando o item 1, obtemos o desejado.  
 $V(I_1 I_2) \subset V(I_1) \cup V(I_2)$ : Suponha por contradição que existe  $[a] \in \mathbb{P}^n$  tal que  $[a] \in V(I_1 I_2) \setminus (V(I_1) \cup V(I_2))$ . Portanto existem  $f \in I_1$  e  $g \in I_2$  tais que  $f([a]) \neq 0$  e  $g([a]) \neq 0$ . Logo,  $fg([a]) \neq 0$ . Temos uma contradição, pois  $fg \in I_1 I_2$ .
3.  $\subset$ :  $[a] \in \cap_{\alpha \in J} V(I_\alpha) \Rightarrow f([a]) = 0 \forall f \in I_\alpha, \forall \alpha \in J \Rightarrow f([a]) = 0 \forall f \in \sum_{\alpha \in J} I_\alpha \Rightarrow [a] \in V(\sum_{\alpha \in J} I_\alpha)$ .  
 $\supset$ : Temos  $I_\alpha \subset \sum_{\alpha \in J} I_\alpha \forall \alpha \in J$ . Pelo item 1,  $V(\sum_{\alpha \in J} I_\alpha) \subset V(I_\alpha)$ . Logo,  $V(\sum_{\alpha \in J} I_\alpha) \subset \cap_{\alpha \in J} V(I_\alpha)$ .
4. Segue diretamente do item 1. do lema que  $V(\sqrt{I}) \subseteq V(I)$  e da definição de radical que  $V(I) \subseteq V(\sqrt{I})$ .

5.  $\Rightarrow$ : Se  $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$  então pelo item 4. do lema temos  $V(I_1) = V(I_2)$ .  
 $\Leftarrow$ : Se  $V(I_1) = V(I_2)$  pelo teorema 3.5 obtemos que  $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$

■

Portanto, segue das propriedades 2 e 3 do lema acima que podemos definir uma topologia em  $\mathbb{P}^n$  cuja família de fechados são as variedades projetivas. Esta topologia é chamada de Topologia de Zariski em  $\mathbb{P}^n$ .

**Definição 4.6.** Um aberto de Zariski é o complemento de uma variedade projetiva em  $\mathbb{P}^n$ .

Os abertos de Zariski são considerados conjuntos “grandes” pois são abertos e densos na topologia usual de  $\mathbb{P}^n$ .

**Definição 4.7.** Dizemos que uma propriedade é genérica, ou vale em quase toda parte, se vale em um aberto de Zariski.

### 4.3 VARIEDADES QUASI-PROJETIVAS

O objeto de estudo desta seção será o mais útil para resolver o nosso problema porque ele nós permitirá excluir as configurações singulares (ver definição 1.1 da introdução).

**Definição 4.8.** Uma variedade quasi-projetiva é um conjunto da forma  $V = X \setminus Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são variedade projetivas.

Note que, equivalentemente,  $V$  é um aberto relativo de uma variedade projetiva na topologia de Zariski-induzida.

**Definição 4.9.** Um subconjunto de uma variedade quasi-projetiva  $W \subset V$  é uma subvariedade se, e somente se, é um subconjunto fechado. Dizemos que uma variedade quasi-projetiva  $V$  é irredutível se não puder ser escrita na forma  $V = A \cup B$  onde  $A$  e  $B$  são subvariedades projetivas próprias.

As variedades quasi-projetivas irredutíveis são importantes porque nos permitem representar uma variedade quasi-projetiva arbitrária de uma maneira bastante conveniente.

**Definição 4.10.** Seja  $V$  uma variedade quasi-projetiva em  $\mathbb{P}^n$ . Dizemos que  $V$  admite uma decomposição em subvariedades irredutíveis ou simplesmente, decomposição em irredutíveis se  $V$  pode ser escrito na forma  $V = \cup_{i=1}^n V_i$ , onde cada  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  é uma subvariedade quasi-projetiva irredutível de  $V$  maximal.

**Proposição 4.2.** Se  $V$  é uma variedade quasi-projetiva então  $V$  admite decomposição em componentes irredutíveis.

**Demonstração.** Seja  $(\mathcal{V}, \supset)$  um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão. assuma que  $\mathcal{V}$  a família de todas as variedades quasi-projetivas que não podem ser representadas como acima é não-vazia.

Dada uma cadeia  $V_1(I_1) \supset V_2(I_2) \supset \dots \supset V_n(I_n) \supset \dots$ , de  $\mathcal{V}$  temos pelo lema 4.3

item 5. uma cadeia de ideais  $\sqrt{I_1} \subset \sqrt{I_2} \subset \dots \subset \sqrt{I_n} \subset \dots$ . Como o anel de polinômios  $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  é noetheriano, esta cadeia estabiliza em algum  $n_0$ , portanto, a nossa cadeia de variedades também estabiliza em  $n_0$ . Logo temos que uma cota superior para a cadeia em  $\mathcal{F}$  é  $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = V_{n_0}$ . Assim, pelo lema de Zorn,  $\mathcal{F}$  tem um elemento maximal  $W$ . Como  $W$  não é irreduzível, pode ser escrito como  $W = A \cup B$  onde  $A, B$  são subvariedades projetivas próprias. Pela ordenação parcial fixada e pela escolha de  $W$  segue que  $A$  e  $B$  possuem representação como união finita de irreduzíveis, logo  $V$  também possui uma tal representação. Assim chegamos a uma contradição. ■

**Definição 4.11.** *Uma decomposição em componentes irreduzíveis  $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ , onde cada  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de uma variedade quasi-projetiva  $V \subset \mathbb{P}^n$  é dita irredundante se  $V_i \not\subset V_j$  para  $i \neq j$ .*

**Teorema 4.1.** *Toda variedade quasi-projetiva  $V \subset \mathbb{P}^n$  admite uma única decomposição irredundante.*

**Demonstração.** Existência: Dada uma variedade quasi-projetiva  $V \subset \mathbb{P}^n$ , se considerarmos uma decomposição em irreduzíveis  $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ . Se  $V_{i_0}$  é subvariedade própria irreduzível de  $V$  tal que  $V_{i_0} \subset V_{j_0}$ , para alguma subvariedade  $V_{j_0}$  da decomposição podemos descartar  $V_{i_0}$  desta decomposição. Repetindo este processo um número finito de vezes obtemos uma representação  $V = \bigcup V_i$  tal que  $V_i \not\subset V_j$  para  $i \neq j$ . Unicidade: Seja  $X = \bigcup_i X_i = \bigcup_j Y_j$  duas representações irredundantes. Então  $X_i = X_i \cap X = X_i \cap (\bigcup_j Y_j) = \bigcup_j (X_i \cap Y_j)$ . Esta é uma decomposição em irreduzíveis para  $X_i$  portanto existe índice  $j_0$ , tal que  $X_i = X_i \cap Y_{j_0}$ . Daí  $X_i \subset Y_{j_0}$ . Analogamente concluímos que existe índice  $i_0$  tal que  $X_i \subset Y_{j_0} \subset X_{i_0}$ . Consequentemente  $X_i = X_{i_0}$ . Portanto  $Y_{j_0} = X_i$  ■

Podemos definir variedades quasi-projetivas no espaço produto:

**Definição 4.12.** *Uma subvariedade  $V \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  é um conjunto da forma*

$$V = \{([z], [w]) : p_i(z, w) = 0, i \in I\},$$

onde  $p_i(z, w) = p(z_0, \dots, z_n, w_0, \dots, w_m)$  são separadamente homogêneos nas variáveis  $z$  e  $w$ , com graus de homogeneidade possivelmente diferentes.

Podemos generalizar esta definição para produtos de espaços projetivos arbitrários.

**Definição 4.13.** *O fecho de uma variedade quasi-projetiva  $V$  é a menor variedade projetiva (com respeito a inclusão) que contém  $V$ .*

Definiremos agora um tipo de aplicação entre variedades quasi-projetivas que são muito importante no que segue:

**Definição 4.14.** *Sejam  $V \subset \mathbb{P}^n$  e  $W \subset \mathbb{P}^k$  variedades quasi-projetivas. Uma aplicação  $f : V \rightarrow W$  é regular em um ponto  $[z] \in V$  se existe um aberto de Zariski  $U_{[z]}$  de  $[z]$  tal que  $f$  é dada por:*

$$(f_0(w_0, \dots, w_n), \dots, f_k(w_0, \dots, w_k)) \forall [w] = [w_0, \dots, w_n] \in U_{[z]}.$$

onde a família  $\{f_i\}_{i=0}^k$  é formada por polinômios homogêneos de mesmo grau que não se anulam simultaneamente em  $[w] \in U_{[z]}$ .

Por exemplo a projeção  $\pi_1 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  é uma aplicação regular pois é dada por polinômios nem todos nulos, devido a homogeneidade das coordenadas.

**Proposição 4.3.** *Aplicações regulares são contínuas na topologia de Zariski.*

Para uma demonstração deste fato, ver [16]

Outro conceito importante no que segue é o de aplicação regular dominante. O nome é devido ao fato de a dimensão de  $X$  “dominar” a dimensão de  $Y$  se existir uma tal aplicação de  $X$  em  $Y$ .

**Definição 4.15.** *Uma aplicação regular  $f : V \rightarrow W$  é dita dominante se  $f(V)$  não está contida em nenhuma subvariedade própria de  $W$ . Equivalentemente,  $\overline{f(V)} = \overline{W}$ .*

O próximo resultado será importante mais adiante, para uma demonstração, ver [16]:

**Teorema 4.2.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é um mapa regular dominante então  $f(X)$  contém algum aberto de Zariski  $W_0$  não-trivial.*

Note que  $V_0 = f^{-1}(W_0)$  é variedade quasi-projetiva pela continuidade de  $f$ . Portanto, podemos definir uma aplicação regular sobrejetiva  $f' : V_0 \rightarrow W_0$  obtemos um mapa sobrejetivo de variedades quasi-projetivas.

**Lema 4.4.** *Se  $f : V \rightarrow W$  é dominante e  $V$  é irredutível, então  $W$  é irredutível.*

**Demonstração.** De fato, seja  $W = W_1 \cup W_2$  uma decomposição em subvariedades próprias. Por continuidade e pelo fato de  $f$  ser dominante  $V = f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2)$  é uma decomposição de subvariedades próprias para  $V$ , contrariando a hipótese de  $V$  ser irredutível. ■

**Definição 4.16.** *A dimensão de uma  $V$  variedade quasi-projetiva irredutível em  $\mathbb{C}^n$  denotada por  $\dim(V)$  pode ser definida como:*

1.  $\dim(V)$  é o grau de transcendência do corpo das funções racionais em  $V$ .
2.  $\dim(V) = d$  se  $d$  é o menor inteiro tal que todo subespaço linear de  $L \subset \mathbb{P}^n$  de dimensão  $n-d-1$  que não está inteiramente contido em alguma componente irredutível de  $V$  é disjunto de  $V$ .
3.  $\dim(V) = d$ , quando existe um aberto de Zariski em  $V$  tal que para todo ponto neste aberto,  $V$  é definido localmente (na Topologia de Zariski) por  $n-d$  polinômios com diferenciais independentes.

Estas definições bem como suas equivalências podem ser encontradas em [7] e [16].

**Definição 4.17.** *Se  $V$  é uma variedade quasi-projetiva redutível, então a dimensão de  $V$  é definida como o máximo da dimensão de suas componentes irredutíveis.*

A seguir enunciaremos alguns fatos acerca da dimensão de uma variedade quasi-projetiva. Para uma demonstração destes fatos, consultar [16].

1. Uma variedade quasi-projetiva  $V$  tem dimensão 0 se, e somente se,  $V$  é um conjunto finito não-vazio.
2. Se  $V' \subset V$  é uma subvariedade própria de uma variedade irredutível  $V$  então  $\dim(V') < \dim(V)$ .
3. A dimensão de uma variedade quasi-projetiva  $V$  é igual a dimensão do seu fecho.
4. Se  $W \subset V$  é um aberto de Zariski então  $\dim(W) = \dim(V)$ .

Para demonstrar o resultado central desta seção, utilizaremos as duas próximas proposições, cujas demonstrações também podem ser encontradas em [16]:

**Proposição 4.4.** *Se  $f : V \rightarrow W$  é uma aplicação regular sobrejetiva entre variedades quasi-projetivas, então  $\dim(V) \geq \dim(W)$ . Mais ainda, toda componente irredutível de toda fibra  $f^{-1}([z])$  tem dimensão pelo menos  $\dim V - \dim W$ , com a igualdade valendo em algum aberto de Zariski não-trivial.*

**Proposição 4.5.** *Seja  $f : V \rightarrow W$  uma aplicação regular entre variedades quasi-projetivas. Então:*

1. *Se  $f$  é dominante então  $\dim(V) \geq \dim(W)$ .*
2. *Se toda fibra  $f^{-1}([w])$ ,  $[w] \in W$  tem dimensão pelo menos  $d$ , então  $\dim(V) \leq \dim(W) + d$ .*
3. *Se  $W$  é irredutível e  $\dim(V) \leq \dim(W)$  então quase toda fibra é finita.*

**Demonstração.**

1. Escolha uma componente irredutível  $W_j \subset W$  de dimensão máxima. Desde que  $f$  é dominante, existe alguma componente irredutível  $V_i \subset V$  tal que  $f : V_i \rightarrow W_j$  é dominante. Portanto, de acordo com o teorema [?] existem subconjuntos abertos de Zariski  $V_{i_0} \subset V_i$  e  $W_{j_0} \subset W_j$ , que tem a mesma dimensão de  $V_i$  e  $W_j$  respectivamente e  $f : V_{i_0} \rightarrow W_{j_0}$  é aplicação sobrejetiva. Portanto pela proposição 4.4 temos:

$$\dim(V) \geq \dim(V_i) \geq \dim(W_j) \geq \dim(W).$$

2. Tome qualquer componente irredutível  $V_i$  de  $V$ . A aplicação  $f : V \rightarrow \overline{f(V)}$  é dominante, portanto existe componente irredutível  $W_j \subset W$  tal que  $f : V_i \rightarrow W_j$  é dominante. Podemos restringir a aplicação  $f$  se necessário, a subconjuntos zariski abertos  $V_{i_0} \subset V_i$  e  $W_{j_0} \subset W_j$  tais que  $f$  é sobrejetiva. Pelo proposição anterior, concluímos que  $\dim(V_i) - \dim(W_j) \leq d$ .
3. Para demonstrar isto, é suficiente considerar a restrição de  $f$  às componentes irredutíveis  $V_i$  de  $V$ . Se  $f : V_i \rightarrow W$  não é dominante então o resultado é trivial por que quase toda fibra é finita, já que é vazia. Se  $f : V_i \rightarrow W$  é dominante então, pelo item 1., temos que  $\dim(V_i) \geq \dim(W)$ . Uma vez que, por hipótese,  $\dim(V_i) \leq \dim(W)$  temos  $\dim(V_i) = \dim(W)$ . Restringindo a uma aplicação sobrejetiva  $f : V_{i_0} \rightarrow W_{j_0}$  entre subconjuntos abertos de Zariski, temos pela proposição anterior, que existe um aberto de Zariski tal que a dimensão de  $f^{-1}([z])$

é igual a  $\dim(V_{i_0}) - \dim(W_{j_0}) = \dim(V_i) - \dim(W) = 0$ . Portanto, quase toda fibra tem dimensão zero, logo é um conjunto finito.

■

## CAPÍTULO 5

# FINITUDE GENÉRICA PARA CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE DZIOBEK

### 5.1 A VARIEDADE DAS CONFIGURAÇÕES DE DZIOBEK

Seja  $p = \frac{n(n+1)}{2}$ . Seja  $r \in \mathbb{C}^{p+1}$ , o vetor com componentes  $r_0$  e  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Seja  $[r] \in \mathbb{P}^p$  a classe de equivalência dos pontos com coordenadas homogêneas  $r$ . Vamos supor que as variáveis  $z_i$  definidas na proposição 2.4 são complexas e vamos introduzir uma variável adicional  $z_0$ . Então nós temos  $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{P}^n$  e  $[z] \in \mathbb{P}^n$ . No segundo capítulo, obtivemos equações algébricas satisfeitas pelas configurações centrais de Dziobek nas variáveis  $r_{ij}$  e  $z_i$ . Também obtivemos um critério para decidir se uma configuração é de Dziobek em termos do determinante de Cayley-Menger. Nesta seção nós vamos utilizar estas equações para definir uma variedade quasi-projetiva que contém todas as configurações de Dziobek e vamos calcular sua dimensão.

Dado um vetor  $r$  que provem de uma configuração central de Dziobek, as equações (2.14) e (2.18) implicam que as seguintes equações tem uma solução não-nula  $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} r_{ij}^{-3} - r_0^{-3} &= z_i z_j, \\ r_0^{-3} &= z_0^2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde o fator  $k$  proveniente da equação (2.18) foi absorvido fazendo uma mudança de variáveis e foi incluída uma nova equação definindo  $z_0$ . Nós vamos usar essas equações juntamente com o determinante de Cayley-Menger para definir uma variedade em  $\mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n$ . A dificuldade encontrada para fazer isto é que as equações (5.1) não são polinômios homogêneos. Para superá-la, vamos definir o conjunto singular

$$\Sigma = \{([r], [z]) \in \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n : z_0 r_0 \prod_{i < j} r_{ij} = 0\}.$$

No complemento de  $\Sigma$ , os zeros de (5.1) estão contidos nos zeros das equações:

$$z_0^2(r_0^3 - r_{ij}^3) = r_{ij}^3 z_i z_j, \tag{5.2}$$

$1 \leq i < j \leq n$ , que são separadamente homogêneas em  $r$  e  $z$ . Podemos definir uma variedade quasi-projetiva,  $V$ , que contém todas as configurações de Dziobek:

$$V = \{([r], [z]) \in \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \setminus \Sigma : F(r_{ij}^2) = 0 \text{ e (5.2) valem}\}.$$

Nós vamos trabalhar também com subvariedades obtidas fazendo alguns dos  $z_i = 0$ . Seja

$$V_k = \{([r], [z]) \in V : z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}. \tag{5.3}$$

O seguinte lema será importante na demonstração do resultado principal desta seção:

**Lema 5.1.** *Sejam  $\omega_{ij} \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq i < j \leq n$ , raízes terceiras da unidade. Então*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 2\omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1n} \\ 1 & 2\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \dots & \omega_{2n} \\ 1 & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 & \dots & \omega_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{1n} & \omega_{2n} & \omega_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Demonstração.** O determinante pode ser expandido em somas de monômio nos  $\omega_{ij}$  com coeficientes inteiros. Cada monômio é igual a um múltiplo inteiro de 1,  $\omega$  e  $\omega^2$ , onde  $\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Mais ainda o determinante é da forma  $\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são inteiros tais que  $\alpha + \beta + \gamma$  independem da particular escolha dos  $\omega_{ij}$ . Uma expressão deste tipo se anula se, e somente se, é múltiplo inteiro do polinômio mínimo de  $\omega$ ,  $1 + \omega + \omega^2$ , isto é, se, e somente se,  $\alpha = \beta = \gamma$ . Uma condição necessária para isto é que  $\alpha + \beta + \gamma$  seja divisível por 3. Por outro lado,  $\alpha + \beta + \gamma$  é o valor do determinante quando  $\omega_{ij} = 1$ ,  $\forall 0 \leq i < j \leq n$ , e este é  $(-1)^{n-1}$ . Portanto o determinante acima não pode se anular. ■

O resultado a seguir é um lema técnico que será utilizado na demonstração do próximo teorema. Sua demonstração pode ser encontrada em [16].

**Lema 5.2.** *Se uma variedade projetiva  $V$  é definida por um único polinômio não trivial então todas as componentes irredutíveis de  $V$  tem dimensão  $n - 1$*

O próximo resultado será importante para provar o teorema da finitude genérica mais tarde.

**Teorema 5.1.** *A variedade  $V$  tem dimensão  $n - 1$ . Mais geralmente,  $\dim(V_k) = k - 1$ ,  $k \geq 2$ .*

**Demonstração.** Considere a projeção  $\pi_2 : \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  e note que  $[z] \in \pi_2(V)$  se, e somente se, as equações (5.2) tem solução  $r \in \mathbb{C}^{p+1}$ , com todas as entradas não-nulas e  $F(r_{ij}) = 0$ . Então

$$g_{ij} = (z_i z_j + z_0^2) r_{ij}^3 - 1 = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Nós vamos usar estas equações para eliminar as variáveis  $r_{ij}$  do determinante de Cayley-Menger. Considere  $F$  e  $g_{12}$  como dois polinômios na variável  $r_{12}$ , com todas as outras variáveis vistas como parâmetros. Seja  $G$  a resultante desses dois polinômios com respeito a  $r_{12}$ . A resultante é um polinômio nas variáveis  $(z_i z_j + z_0^2)$  e  $r_{ij}$  diferentes de  $r_{12}$ . Pela proposição 3.3 certo valor dos parâmetros existe  $r_{12}$  anulando  $F$  e  $g_{12}$  então para esse valor dos parâmetros tem-se  $G = 0$ . Reciprocamente, se  $G = 0$  para um certo valor dos parâmetros e  $z_1 z_2 + z_0^2 \neq 0$ , pela proposição 3.4 existe um conjunto finito não vazio de valores de  $r_{12}$  tais que  $F = 0$  e  $g_{12} = 0$  ambos valem. Depois tomamos a resultante entre  $G$  e  $g_{13}$ , assim eliminamos a variável  $r_{13}$ . Continuamos eliminando os  $r_{ij}$  deste modo. Após um número finito de passos obtemos um polinômio  $H(z)$  com a seguinte propriedade: dado um valor de  $z$ , se existe  $r_{ij}$  satisfazendo  $F = 0$  e todas as equações

$g_{ij}$ , então  $H(z) = 0$ . Reciprocamente, se  $z$  é uma solução de  $H(z) = 0$ , tal que todas as quantidades  $z_i z_j + z_0^2 \neq 0$ , então existe um conjunto não-vazio de valores de  $r_{ij}$  tais que  $F = 0$  e todas as equações  $g_{ij} = 0$  são satisfeitas. Pela proposição 3.4  $H(z)$  é um polinômio homogêneo. Vamos usa-lo para definir uma variedade projetiva:

$$W' = \{[z] \in \mathbb{P}^n : H(z) = 0\}.$$

As proposições 3.3 e 3.4 implicam que  $\pi_2(V) \subset W'$ . Para caracterizar a imagem, devemos observar que a única obstrução para encontrar solução  $r_{ij}$  dado  $z$  é valer uma das equações  $z_i z_j + z_0^2 = 0$ . Também, se  $z_0 = 0$ , não é possível resolver para  $r_0$ . Definimos um polinômio homogêneo

$$K(z) = z_0 \prod_{i < j} (z_i z_j + z_0^2).$$

e uma variedade projetiva

$$B = \{[z] \in \mathbb{P}^n : K(z) = 0\}.$$

Portanto  $\pi_2(V) = W' \setminus B$ . Note que algumas das componentes irredutíveis de  $W'$  podem estar inteiramente contidas em  $B$ . Nós vamos ignorar estas componentes e vamos denotar por  $W$  a união de todas as outras componentes de  $W'$ . Seja  $W = W(\sqrt{I})$ . Considere  $W = W(\sqrt{I}) = W(\sqrt{I_1}) \cup \dots \cup W(\sqrt{I_n})$  uma decomposição em irredutíveis para  $W = W(\sqrt{I})$ .

**Afirmção 1.**  $W = \overline{\pi_2(V)}$ .

De fato, se  $\overline{\pi_2(V)} = \widetilde{W} \subset W$  e  $\widetilde{W} = \widetilde{W}(\sqrt{J})$  e então  $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ . Por outro lado, temos que  $W(\sqrt{I_j}) \cap B$  é subvariedade própria de  $W(\sqrt{I_j})$  para todo  $j$ . Portanto existe  $c_j \in W(\sqrt{I_j}) \cap \widetilde{W}$  para todo  $j$ . Se  $f \in \sqrt{J}$  então  $f(c_j) = 0$  para todo  $j$ . Pelo teorema 3.5 segue que existe  $l_j$  tal que  $f^{l_j} \in \sqrt{I_j}$ . Isto implica que, para  $l = \max\{l_1, \dots, l_n\}$  temos  $f^l \in \sqrt{I_1} \cap \dots \cap \sqrt{I_n} = \sqrt{I}$ . Portanto  $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ . Disto segue que  $\overline{\pi_2(V)} = \widetilde{W} = W$ , como queríamos.

**Afirmção 2.**  $H(z)$  é polinômio não-trivial.

Precisamos mostrar que, para algum  $z$  tal que as quantidades  $z_i z_j + z_0^2$  são todas não-nulas, e as equações  $F = 0$  e  $g_{ij} = 0$  não têm solução. Visto que  $H(z)$  é a resultante destas equações, nós vamos ter  $H(z) \neq 0$ . Tome  $z_0 = 1$ , e  $z_i = 0$ ,  $3 \leq i < n$ . Então para  $3 \leq i, j \leq n$  nós temos  $z_i z_j + z_0^2 = 1$  e as equações  $g_{ij} = 0$  reduzem-se a  $r_{ij}^3 = 1$ . Portanto  $s_{ij} = r_{ij}^2$  são raízes terceiras da unidade. Por outro lado, se nós escolhermos  $z_1, z_2$  tais que  $z_1 z_2 + z_0^2 = 1/\sqrt{8}$ , então  $r_{12}^3 = \sqrt{8}$  e  $s_{12} = 2$ , que é duas vezes uma raiz terceira da unidade. Portanto o determinante de Cayley-Menger é exatamente como no lema 5.1, logo  $F(r_{ij}^2) \neq 0$ . Disto segue a afirmação.

Nos concentremos na aplicação  $\pi_2 : V \rightarrow W$ . Desde que toda fibra  $\pi_2^{-1}([z])$  é finita temos que  $\dim(V) \leq \dim(W)$ . Por outro lado pela Afirmção 1 temos que  $\pi_2 : V \rightarrow W$

é dominante  $\dim(V) \geq \dim(W)$ , portanto  $\dim(V) = \dim(W)$ .

Pela afirmação 2, a variedade  $W'$  é definida por uma única equação polinomial não-trivial  $H(z) = 0$ , em  $\mathbb{P}^n$ . Portanto, pelo lema 5.2, segue que toda componente irredutível de  $W'$  tem dimensão  $n - 1$ . Logo,  $n - 1 = \dim(W) = \dim(V)$ .

Utilizando argumento análogo para a projeção  $\pi_2 : V_k \subset \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  demonstramos que  $\dim(V_k) = k - 1$ . ■

## 5.2 AS MASSAS CORRESPONDENTES E FINITUDE GENÉRICA

Nesta seção nós vamos provar que para uma escolha genérica das massas, o número de configurações centrais de Dziobek é finito. Na última seção nós estudamos a variedade das configurações de Dziobek usando as variáveis  $[r] \in \mathbb{P}^p$ ,  $[z] \in \mathbb{P}^n$ . Considere  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{C}^n$ , o vetor das massas e  $[m] \in \mathbb{P}^{n-1}$  suas coordenadas homogêneas. As equações (2.17) nos dão uma relação entre as massas  $m_1, \dots, m_n$  e as variáveis  $S_{ij}, \Delta_i$ . Multiplicando essas equações por  $\Delta_j$  e usando as equações (2.8), (2.14) e (5.1) nós encontramos:

$$m_k z_i z_k F_{jl} = m_l z_i z_l F_{jk}, \quad (5.4)$$

onde  $i, k, l \in \{1, \dots, n\}$  e são distintos e  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Calculando os cofatores do determinante de Cayley-Menger  $F_{ij}$  pela definição obtemos que eles são polinômios homogêneos em  $r$ . As equações (5.4) são homogêneas separadamente em  $r, z, m$  e nós vamos usa-las para definir uma variedade quasi-projetiva em  $\mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{([r], [z], [m]) \in (\mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \setminus \Sigma) \times \mathbb{P}^{n-1} : F(r_{ij}^2) = 0 \text{ e (5.2), (5.4) valem}\} \\ &= \{([r], [z], [m]) \in V \times \mathbb{P}^{n-1} : (5.4) \text{ valem}\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Decomponha  $\Gamma$  em componentes irredutíveis  $\Gamma_\alpha$ . Nesta seção nós vamos denotar por  $f \equiv 0$  uma função que se anula identicamente nas componentes  $\Gamma_\alpha$  e  $f \not\equiv 0$  caso contrário. Um primeiro problema que surge é caracterizar quais componentes de  $\Gamma$  contêm configurações de Dziobek. Podemos fazer isso em termos das variáveis  $z_i, F_{ij}$  e  $m_i$ .

**Definição 5.1.** Chamamos  $\Gamma$  de uma componente de Dziobek se a seguintes condições são satisfeitas:

1. Pelo menos dois dos  $z_i \not\equiv 0$
2. Pelo menos dois cofatores principais  $F_{ii} \not\equiv 0, 1 \leq i < n$

O próximo lema afirma que as componentes  $\Gamma_\alpha$  de  $\Gamma$  que não são de Dziobek, se existirem, são irrelevantes para o problema da finitude de configurações centrais de Dziobek.

**Lema 5.3.** As componentes  $\Gamma_\alpha$  de  $\Gamma$  que não são de Dziobek não contêm configurações centrais de Dziobek.

**Demonstração.** De fato, suponha que  $\Gamma_\alpha$  contém algum ponto que provém de uma configuração central de dimensão  $n - 2$ . Então a proposição 2.2 garante que 1. vale, e a

proposição 2.4 garante que 2. vale. ■

O próximo resultado garante que se algum  $F_{ij}$  se anula identicamente em uma componente de Dziobek, então uma das variáveis  $m$  ou  $z$  também se anula.

**Proposição 5.1.** *Seja  $\Gamma_\alpha$  uma componente de Dziobek e suponha que  $F_{il} \equiv 0$  em  $\Gamma_\alpha$ , para algum par de índices com  $1 \leq i, l \leq n$ . Então  $m_i m_l z_i z_l \equiv 0$  em  $\Gamma_\alpha$ .*

**Demonstração.** Uma vez que  $F_{il} \equiv 0$ , deduzimos da equação (2.7) que  $F_{ik} F_{jl} \equiv 0$ . Se  $F_{ik} \not\equiv 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ , então, pelo teorema 3.5,  $F_{jl} \equiv 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Portanto ou todos os  $F_{ik} \equiv 0$ , ou todos os  $F_{jl} \equiv 0$ . Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $F_{jl} \equiv 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Sabemos que  $\Gamma_\alpha$  é uma componente de Dziobek, logo existem dois índices  $k$  tais que  $F_{kk} \not\equiv 0$ . Como  $F_{ll} \equiv 0$ , podemos tomar  $k \neq i, l$ . Fazendo  $j = k$  na equação (5.4), obtemos  $m_l z_i z_l F_{kk} \equiv 0$ . Logo  $m_i m_l z_i z_l \equiv 0$  em  $\Gamma_\alpha$  como queríamos demonstrar. ■

Logo consideraremos as projeções  $\pi_{12} : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n$  e  $\pi_3 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ .

**Definição 5.2.** *Uma componente  $\Gamma_\alpha$  é chamada de massa-dominante se  $\pi_3 : \Gamma_\alpha \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  é dominante.*

O próximo resultado será importante para provar o teorema da finitude genérica das configurações centrais de Dziobek para uma componente de  $\Gamma$  que não é massa-dominante.  $\mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$  denotará o espaço projetivo real  $(n-1)$ -dimensional.

**Lema 5.4.** *Se uma componente  $\Gamma_\alpha$  de  $\Gamma$  não é massa-dominante então,  $\pi_3(\Gamma_\alpha) \cap \mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$  está contida em alguma subvariedade própria de  $\mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$ .*

**Demonstração.** Como  $\pi_3(\Gamma_\alpha)$  está contida em alguma subvariedade própria de  $\mathbb{P}^{n-1}$ , podemos considerar  $f$  polinômio complexo não-nulo que se anula em  $\pi_3(\Gamma_\alpha)$ . Então as partes real e imaginária deste polinômio também se anulam identicamente em  $\pi_3(\Gamma_\alpha) \cap \mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$ . Elas também são polinômios não-nulos, porque polinômios que se anulam identicamente em  $\mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$  também se anulam identicamente em  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Disto segue o resultado. ■

**Definição 5.3.** *Dizemos que  $\Gamma_\alpha$  é não-degenerada se  $z_i \neq 0$  e  $F_{ij} \neq 0$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$*

**Lema 5.5.** *Se  $\Gamma_\alpha$  é não-degenerada, então existe subconjunto aberto de Zariski  $U_\alpha \subset \Gamma_\alpha$  tal que  $z_i \neq 0$  e  $F_{ij} \neq 0$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Demonstração.** Segue diretamente da continuidade das aplicações regulares na topologia de Zariski. ■

**Teorema 5.2.** *Toda componente de Dziobek massa-dominante  $\Gamma_\alpha$  tem dimensão  $n-1$ .*

**Demonstração.** Como  $\Gamma_\alpha$  é massa dominante, nós temos  $\dim(\Gamma_\alpha) \geq n - 1$ . Resta provar a desigualdade contrária. Suponha  $\Gamma_\alpha$  não-degenerada e considere a aplicação regular  $\pi_{12} : U_\alpha \rightarrow V$ , onde  $U_\alpha$  é como no lema acima. Todas as fibras  $\pi_{12}^{-1}([r], [z])$  são finitas pois as equações (5.4) determinam as massas a menos de multiplicação por constante. Logo  $\pi_{12}^{-1}([r], [z])$  é conjunto unitário. Pelo teorema 5.1  $\dim(V) = n - 1$ . Então segue da parte 2. da proposição 4.5 que  $\dim \Gamma_\alpha \geq n - 1$ . Suponha agora  $\Gamma_\alpha$  degenerada. A proposição 5.1 mostra que toda componente degenerada tem  $z_i \equiv 0$  para algum índice  $1 \leq i \leq n$ . Podemos supor sem perda de generalidade que existe algum índice  $2 \leq k \leq n$  tal que  $z_i \neq 0$  para  $1 \leq i \leq k$  e  $z_i \equiv 0$  para  $k + 1 \leq i \leq n$ . Devido a este fato e à massa-dominância, temos que  $m_i m_l z_i z_l \neq 0$  para  $1 \leq i, j \leq k$ . Portanto, para estes  $i, j$ ,  $F_{ij} \neq 0$ . Em um subconjunto aberto de Zariski  $U_\alpha$ , onde,  $z_i \neq 0$  e  $F_{ij} \neq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq k$  podemos resolver a equação (5.4), a menos de multiplicação por constante, unicamente para  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Temos ainda que todas as equações envolvendo as massas  $m_{k+1}, \dots, m_n$  são identicamente nulas, logo estas massas são arbitrárias. Considere a projeção  $\pi_{12} : U_\alpha \rightarrow V_k$ . Temos que os subespaços lineares de dimensão  $k + 2$   $L_i = \{([m]) \in \mathbb{P}^{n-1} : m_i = m_{k+1}, \dots, m_n = 0\}$  com  $i \leq k$  tem intersecção vazia com as fibras  $\pi^{-1}([z], [r])$ ,  $([z], [r]) \in V$  e são espaços com a maior dimensão possível com esta propriedade. Disto segue que todo espaço linear de dimensão  $k - 2$  que não está contido em alguma componente de  $\pi_{12}^{-1}([z], [r])$ ,  $([z], [r]) \in V$  tem intersecção vazia com  $\pi_{12}^{-1}([z], [r])$ ,  $([z], [r]) \in V$ . Portanto a dimensão das fibras é menor ou igual a  $n - k$ . Pelo teorema 5.1  $\dim(V_k)$  é  $n - 1$ , disto segue que  $\dim(\Gamma_\alpha) \leq n - 1 + n - k = n - 1$ , como queríamos mostrar. ■

**Definição 5.4.** Definimos por  $\Gamma_D \subset \Gamma$  a união de todas as componentes de Dziobek. Para uma massa fixada  $[m] \in \mathbb{P}^n$ , definimos  $\Gamma_D([m]) = \{([r], [z]) : ([r], [z], [m]) \in \Gamma_D\}$ .

O próximo resultado é nosso resultado principal a cerca de finitude genérica.

**Corolário 5.1.** Existe uma subvariedade própria do espaço das massas,  $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ , tal que se  $[m] \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus B$ , a fibra  $\Gamma_D([m])$  é finita.

**Demonstração.** É suficiente considerar cada componente irredutível  $\Gamma_\alpha$  de  $\Gamma_D$ . Se  $\Gamma_\alpha$  não é massa dominante, para  $[m] \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus \overline{\pi(\Gamma_\alpha)}$ , a parte da fibra  $\Gamma_D([m])$  que está em  $\Gamma_\alpha$  é vazia. Seja  $B$  a união dos  $\overline{\pi(\Gamma_\alpha)}$ 's onde  $\Gamma_\alpha$  não é componente massa dominante. Então, para  $[m] \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus B$ , a parte da fibra  $\Gamma_D([m])$  que está em  $\Gamma_\alpha$  é vazia.

Se  $\Gamma_\alpha$  é massa-dominante, então pelo teorema anterior, temos que  $\dim(\Gamma_\alpha) = n - 1$ . Desde que a projeção é um mapa regular, o teorema segue pela parte 3 da proposição 4.5. ■

Finalmente vamos mostrar a finitude genérica para configurações centrais reais, ou seja, fora de uma variedade projetiva  $B$  no espaço das massas existe um número finito de configurações centrais.

**Teorema 5.3.** Existe uma subvariedade própria do espaço das massas,  $B \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ , tal que se  $[m] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus B$ , então  $[m]$  admite somente um número finito de configurações

*centrais de dimensão  $\delta(x) = n - 2$  a menos de simetria. Mais ainda, para essas massas, o número de configurações admite uma cota superior que independe de  $[m]$ .*

**Demonstração.** Se  $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$  é a variedade do último teorema então, pelo lema 5.4,  $B \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$  é uma subvariedade própria de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$  e, pelo último corolário, temos o resultado para massas reais. Isto implica que para uma massa genérica  $[m]$  dada, temos um número finito de possibilidades para as distâncias mútuas  $r_{ij}$  de uma configuração de Dziobek, a menos de reescala. Desde que as distâncias mútuas determinam as configurações a menos de rotação e reflexão, a primeira parte do teorema está provada.

Para a segunda parte, vamos usar a teoria de Thom e Milnor sobre a homologia das variedades algébricas. Esta teoria nos fornece uma cota superior para o número de componentes conexas de qualquer variedade algébrica real que depende somente do número de variáveis e do grau das equações usadas para definir a variedade.

Escolha  $[m] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus B$ . As equações (5.2) e (5.4) são um conjunto de equações polinomiais para as distâncias mútuas,  $r_{ij}$ , e para o parâmetro  $r_0$ , cujos graus não dependem das massas escolhidas. A inclusão de variedades que não são de Dziobek pode fornecer soluções adicionais que não nos interessam, além das que encontramos acima. Mas cada uma das finitas soluções que encontramos determina sua própria componente do conjunto total das soluções. Como o número dessas componentes tem uma cota superior independente das massas, obtemos o desejado (ver [12] e [19]). ■

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Albouy, A., *Integral Manifolds of the N-body problem*, Invent. Math., Vol. 114, 1993.
- [2] Albouy, A., *Symétrie des configurations centrales de quatre corps*, C. R. Acad. Sci. Paris., Vol. 320, 1995.
- [3] Cabral, H., *On the integral Manifolds of the N-body problem*, Invent. Math., Vol. 20, 1973.
- [4] Dziobek, O., *Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems*, Astron. Nach., Vol. 152, 1900.
- [5] Euler, L., *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., Vol. 11, 1767.
- [6] Hampton, M., Moeckel, R., *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*, Invent. Math., Vol. 163, N.2, 2006.
- [7] Harris, J., *Algebraic Geometry, A First Course*, Springer-Verlag., Berlin, Heidelberg, New York., 1992.
- [8] Lagrange, J. L., *Essai sur le problème de trois corps*, OEuvres., Vol. 6, 1772.
- [9] Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley., 1965.
- [10] Lehmann-Filles., *Ueber zwei Fälle des Vierkörpersproblems*, Astron. Nach. Vol. 127, 1891.
- [11] McCord, C. K., Meyer, K. R., Wang, Q., *The integral manifold of the tree-body problem*, AMS, Providence, RI, 1998.
- [12] Milnor, J., *On the Betti numbers of real varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 15, 1964.
- [13] Moeckel, R., *Generic Finiteness for Dziobek Configurations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 353, 2001.
- [14] Moulton, F.R., *The straight line solutions of the problem of N bodies*, Ann. of Math. Vol. 2-12, 1910.
- [15] Roberts, G., *Spectral instability of relative equilibria in the planar n-body problem*, Nonlinearity, vol. 12, 1999.
- [16] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space*, Springer Verlag., Berlin, Heidelberg, New York., 1994.
- [17] Smale, S., *Mathematical problems for the next century*, Mathematical Intelligencer., Vol. 20, 1998.
- [18] Smale, S., *Topology and Mechanics, II, The planar n-body problem*, Invent. Math., Vol. 11, 1970.
- [19] Thom, R., *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles*, in *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press., 1965

- [20] Wintner, A., *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Math. Series 5, Princeton University Press, Princeton., 1941.