

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Nivan Roberto Ferreira Júnior

Conexões e Transporte Paralelo: Uma Abordagem Computacional

Recife

2010

Nivan Roberto Ferreira Júnior

Conexões e Transporte Paralelo: Uma Abordagem
Computacional¹

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da
Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Orientador: Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada

Recife

2010

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Ferreira Júnior, Nivan Roberto

**Conexões e transporte paralelo: uma abordagem computacional / Nivan Roberto Ferreira Júnior. - Recife: O Autor, 2010.
45 p.**

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Geometria diferencial. I. Título.

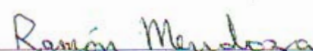
516.36

CDD (22. ed.)

MEI2010 – 076

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:



Ramón Orestes Mendoza Almeida, UFPE

Orientador



Sôstenes Luiz Soares Lins, UFPE



Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia, UFPB

CONEXÕES E TRANSPORTE PARALELO: ABORDAGEM COMPUTACIONAL.

Por

Nivan Roberto Ferreira Júnior

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410 .
RECIFE – BRASIL

Maio – 2010

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pela vida, pela família que tenho, pelas pessoas que encontrei e por ter me conduzido por um longo caminho até aqui. Gostaria de agradecer a minha família, meu pai Nivan, minha mãe Fátima e meu irmão Marcelo, por ter me transformado no que sou hoje. Pelo apoio que me foi concedido durante toda minha vida e, particularmente, durante esses 4 longos (e prazerosos) anos em que fui estudante da UFPE. Considero que, até o presente momento da minha vida, este período em que fui aluno do Centro de Informática e do Departamento de Matemática foi o período de maior avanço acadêmico em toda minha vida, no qual muito aprendi, conheci muitas pessoas interessantes e muitas oportunidades surgiram. Por isto, agradeço:

Ao professor Francisco Brito por ter me trazido ao DMat e me ajudado em muitos momentos.

Ao professor Miguel Loayza, meu orientador de iniciação científica, pela paciência nas valiosas horas de discussões que tivemos, que muito contribuíram para o meu aprendizado.

Ao professor Ramón Mendoza, meu orientador, por toda a ajuda que me deu para a realização deste trabalho e de muitos outros como a participação na OBM-NU e o incentivo para realização das disciplinas de mestrado no DMAT durante minha graduação.

À professora Jacqueline Rojas que com seu minucioso trabalho de revisão e esclarecimentos também forneceu grande ajuda para a realização deste trabalho.

Aos professores Lucas Ferreira, Eduardo Leandro, Sóstenes Lins e Aron Simis, pelo conhecimento transmitido.

A todos os colegas e funcionários que fazem parte do CIn, do DMat e da UFPE, pelo apoio em todos os momentos.

Aos idealizadores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), sem a qual, provavelmente, eu nunca entraria em contato com o DMAT e, portanto, não estaria onde estou hoje.

À Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos os conceitos de Conexão, Transporte Paralelo e Grupo de Holonomia. As conexões são definidas de forma algébrica. Um exemplo importante é a conexão de Levi-Civita. Demonstramos que o módulo das seções de um fibrado vetorial, admite uma conexão. A Conexão, determina o Transporte Paralelo ao longo de um caminho c . Se c é um caminho fechado, obtemos o grupo de Holonomia. Neste trabalho, há uma preocupação com os aspectos computacionais, assim, comentários sobre a implementação do cálculo dos conceitos apresentados em softwares de computação algébrica estão presentes em todo o texto.

Palavras-chave: Conexões; Fibrados Vetoriais; Transporte Paralelo; Grupos de Holonomia.

Abstract

In this Masters Thesis we study some important topics in the field of differential geometry: Connections, Parallel Transport and Holonomy Group. We give a purely algebraic definition of connection and afterwards we use this definition to study concrete geometric problems. We present examples of important geometric constructions, such as the Levi-Civita connection. We also give a proof of the existence of connections in vector bundles. A connection defined in a vector bundle determines a notion of parallelism that allow us to define the Parallel Transportation of vectors along a given curve c . We also study the holonomy group of a connection defined in a vector bundle: the set of Parallel Transportation Operators along closed curves. In this thesis, we are concerned with computational aspects of the previously defined concepts, thus throughout the text we will present comments on implementation of procedures to compute Connections and Parallel Transportation using computer algebra systems.

Key words: Connetions; Vector Bundles; Parallel Transport; Holonomy Group.

Introdução

A teoria das conexões teve suas raízes nos trabalhos do matemático e físico Elwin Bruno Christoffel, mas teve como seu início o desenvolvimento das idéias de Christoffel feito nos estudos de Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita, dentre os quais pode-se citar o famoso artigo [22] de 1900. Eles notaram que o conceito de conexão poderia ser utilizado para dar sentido à derivada direcional de um campo de vetores ao longo de uma curva (independente de coordenadas). Esta abordagem se mostrou muito poderosa, sendo usada para definir a noção de paralelismo de um campo de vetores sobre uma curva, o que permitiu a criação do transporte paralelo, que é um dos focos deste trabalho. Além disso, conexões permitem, por exemplo, considerar aceleração de curvas o que, por sua vez, possibilita definir geodésicas em variedades diferenciáveis. O primeiro capítulo deste trabalho trata sobre conexões. Inicialmente, apresentamos as definições básicas para o desenvolvimento da teoria. Posteriormente, definimos conexão de uma maneira puramente algébrica e, finalmente, em termos mais geométricos, estudamos o problema de existência de conexões em fibrados vetoriais. Damos vários exemplos, dentre eles a importante construção da conexão de Levi-Civita. O capítulo termina com uma descrição da implementação feita em [13] para o cálculo de conexões e um breve resumo histórico do desenvolvimento da teoria de conexões.

Como dito anteriormente, o transporte paralelo foi uma das primeiras aplicações da teoria de conexões (e é uma das mais importantes). Informalmente, o transporte paralelo

é uma maneira de deslocar a geometria local de uma variedade ao longo de uma curva, isto é, uma maneira de "conectar" as geometrias de pontos que podem ser ligados por uma curva diferenciável. Sua construção será dada, no capítulo 2, e, também neste capítulo, demonstramos as suas propriedades básicas. No final do capítulo 2, apresentamos rotinas implementadas, no MAPLE, para calcular o transporte paralelo.

No capítulo 3, definimos o grupo de holonomia de uma conexão. Este conceito foi introduzido por Élie Cartan, em 1923, para variedades Riemannianas, na teoria da Relatividade Geral. Também no capítulo 3, demonstramos algumas propriedades importantes do grupo de holonomia e apontamos a relação entre este e o grupo fundamental. O capítulo termina com um pequeno resumo histórico da teoria dos grupos de holonomia.

As teorias de conexões, transporte paralelo e grupos de holonomia, além de serem importantes para a matemática pura, também são bastante aplicadas como, por exemplo, em Computação Gráfica ([14]), Computação Quântica ([4]) e sobretudo em física como, por exemplo, nas áreas de mecânica quântica, relatividade geral e teoria das cordas ([2] e [9]).

Sumário

1	Conexões	10
1.1	Preliminares	10
1.2	Conexões	14
1.2.1	Exemplos de Conexões	15
1.2.2	Existência de Conexões em Fibrados Vetoriais	20
1.2.3	Implementação	25
1.2.4	Histórico	27
2	Transporte Paralelo	28
2.1	Construção do Transporte Paralelo	28
2.2	Propriedades do Transporte Paralelo	31
2.3	Implementação	35
3	Grupos de Holonomia	39
3.1	Grupo de Holonomia de uma Conexão	39
3.2	Histórico	42

Capítulo 1

Conexões

Neste capítulo, introduzimos o conceito de conexão. Utilizaremos aqui as notações, definições e resultados apresentados no capítulo 1 de [26] e em [20]. A seção 1.1 contém mais definições e fatos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Na seção 1.2, apresentamos a definição de conexão e descrevemos algumas de suas propriedades básicas, além disso, na subseção 1.2.2, demonstramos um teorema de existência de conexões em fibrados vetoriais. Na seção 1.2.3, damos um resumo da implementação do cálculo de conexões feita em [13]. Finalmente, na seção 1.2.4, apresentamos um resumo histórico do desenvolvimento da teoria das conexões.

1.1 Preliminares

Doravante, $\mathcal{A}$ denotará uma k -álgebra, onde k denota um corpo, que usalmente será $\mathbb{R}$. Reservamos as letras M, N, E, F para denotar variedades diferenciáveis segundo a definição de [27]. Os termos variedade, variedade diferenciável são usados como sinônimos. Assumiremos conhecimento da terminologia usual da teoria de variedades diferenciáveis (como, por exemplo, as usadas em [11], [20] e [27]).

Uma função entre duas diferenciáveis é dita diferenciável, se for infinitamente di-

ferenciável. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ entre duas variedades define duas aplicações f_* e f^* chamadas *pushforward* e *pullback*, respectivamente, ver [20].

Um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ será sempre denotado por E , quando a aplicação projeção e a base do fibrado estiverem claros pelo contexto.

Se A é uma matriz, para denotar a entrada da i -ésima linha e j -ésima coluna de A usamos a seguinte notação A_j^i , salvo menção contrária. Quando não houver risco de confusão, faremos uso da convenção de Einstein, i.e., omitiremos sinais de somatório.

Definição 1.1. *Seja $D \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ (onde, $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ denota operadores k -lineares de $\mathcal{A}$), diz-se que D é uma derivação, se D satisfaz:*

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b, \forall a, b \in \mathcal{A},$$

O conjunto das derivações de $\mathcal{A}$ será denotado por $Der(\mathcal{A})$.

Exemplo 1.1. A função identicamente nula é sempre uma derivação. Observa-se facilmente que o conjunto das derivações é fechado para as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação por um elemento da álgebra dada, definidas naturalmente. Logo $Der(\mathcal{A})$ é um espaço vetorial sobre k e um $\mathcal{A}$ -módulo.

Exemplo 1.2. Sabemos que o conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma $\mathbb{R}$ -álgebra, com as operações de soma e multiplicação usuais. Verifica-se, facilmente usando a definição, que as derivadas parciais $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ são derivações em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, as derivadas parciais formam uma base para o $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulo das derivações de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, por [16], podemos entender derivações como campos de vetores (nesta referência é demonstrado que estes dois conjuntos são isomorfos como $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulos e como álgebras de Lie). Como sabemos da teoria de variedades diferenciáveis, o conjunto dos campos de vetores em $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_{T\mathbb{R}^n}$, é um $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulo de posto finito igual a n e tem como uma base as derivadas parciais.

Exemplo 1.3. Agora será apresentado um exemplo de uma $\mathbb{R}$ -álgebra que não possui derivações não nulas. Seja $C(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$ -álgebra das funções contínuas definidas na reta e tomando valores reais. Funções constantes, com valor c , serão denotadas por $\hat{c}$. Seja $\partial \in Der(C(\mathbb{R}))$. Vamos mostrar que $\partial(f) = 0, \forall f \in C(\mathbb{R})$. Verifica-se facilmente que

para todo $c \in \mathbb{R}$, tem-se $\partial(\hat{c}) = 0$. Além disso, verifica-se que se $p \in \mathbb{R}$ é tal que $f(p) = 0$, então $\partial(f)(p) = 0$. De fato, seja $g \in C(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = (g(x))^3$ (obviamente $f(p) = 0 \leftrightarrow g(p) = 0$). Tem-se ainda:

$$\partial(f) = \partial(g^3) = 3g^2\partial(g).$$

Logo, se $f(p) = 0$, então $\partial(f)(p) = 3(g(p))^2\partial(g)(p) = 0$. Com as observações feitas, concluímos que:

$$\partial(f)(p) = \partial(f - \widehat{f(p)})(p) = 0, \forall p \in \mathbb{R}.$$

Concluí-se que $\partial = 0$.

Observação 1.1. Esta definição de derivação não é a mais geral possível. Para considerações mais gerais ver o capítulo 16 de [12]. No entanto, a definição que apresentamos é mais simples e será suficiente para o que se segue.

O conjunto $Der(\mathcal{A})$, é bastante rico em estrutura, no sentido de que, quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa (o que suporemos daqui em diante), além de ser um espaço vetorial e um $\mathcal{A}$ -módulo, também é uma álgebra de Lie, segundo a seguinte definição.

Definição 1.2. *Seja k um corpo. Um conjunto $\mathcal{L}$ é uma k -álgebra de Lie, se é um k -espaço vetorial no qual está definido um operador bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ (chamado colchete de Lie) que satisfaz:*

$$(i) [X, Y] = -[Y, X], \forall X, Y \in \mathcal{L} \text{ (anti-simetria)}$$

$$(ii) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathcal{L} \text{ (identidade de Jacobi)}$$

Exemplo 1.4. Em qualquer espaço vetorial V pode ser definido um colchete de Lie, basta definir $[v, w] = 0, \forall v, w \in V$ e, assim, V se torna uma álgebra de Lie. Além disso, para qualquer k -espaço vetorial V , o conjunto $\mathcal{L}(V)$ (operadores lineares de V) também pode ser munido de o colchete de Lie definido por $[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$. Com esse colchete, $\mathcal{L}(V)$ é uma k -álgebra de Lie. Observa-se que para uma k -álgebra $\mathcal{A}$, $Der(\mathcal{A})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ definindo como colchete de Lie a restrição a $Der(\mathcal{A}) \times Der(\mathcal{A})$ do colchete definido acima, temos que $Der(\mathcal{A})$ é também uma k -álgebra de Lie, desde que $[D_1, D_2] \in Der(\mathcal{A})$.

Há uma maneira natural de associar a um grupo de Lie uma álgebra de Lie de acordo com as seguintes definições:

Definição 1.3. *Seja G um grupo de Lie e denote por $L_g : G \rightarrow G$ a aplicação de multiplicação a esquerda de G , i.e., $L_g(\tilde{g}) = g\tilde{g}$. Um campo de vetores X definido em G é dito invariante a esquerda, se $(L_g)_*X = X, \forall g \in G$. A igualdade anterior deve ser entendida da seguinte maneira*

$$(L_g)_*X_{\tilde{g}} = X_{g\tilde{g}}, \forall g, \tilde{g} \in G.$$

Denotaremos por $\mathfrak{g}$ o conjunto dos campos de vetores de um grupo de Lie G invariantes a esquerda. Note que $\mathfrak{g}$ forma um espaço vetorial.

Definição 1.4. *Seja G um grupo de Lie. Pode-se definir em $\mathfrak{g}$ um colchete de Lie dado por:*

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

onde $p \in G$ e $f \in C^\infty(G)$. Verifica-se que esta aplicação está bem definida e que satisfaz as propriedades do colchete de Lie. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada a álgebra de Lie do grupo de Lie G e é denotada por $\text{Lie}(G)$.

Para mais propriedades, exemplos e consequências, recomenda-se a leitura do capítulo 15 de [20].

Definição 1.5. *Seja M uma variedade diferenciável. Um fibrado vetorial real N -dimensional sobre M é uma variedade diferenciável E , juntamente com uma aplicação sobrejetiva $\pi : E \rightarrow M$, tais que:*

- (i) *Para cada $p \in M$, o conjunto $E_p := \pi^{-1}(p)$, chamado de fibra sobre o ponto p , está munido de uma estrutura de espaço vetorial real.*
- (ii) *Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^N$ tal que, se $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^N \rightarrow U$ é a projeção na primeira variável, temos $\pi_1 \circ \Phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$. Além disso, a restrição de Φ a E_p é um isomorfismo de espaços vetoriais entre E_p e $\{p\} \times \mathbb{R}^N$.*

A variedade E é chamada de espaço total do fibrado, M é a base do fibrado e π é a projeção do fibrado. Cada difeomorfismo Φ é chamado uma trivialização local do fibrado. Se existir uma trivialização local sobre toda a variedade M , então o fibrado é dito trivial.

Definição 1.6. Uma seção de um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ é uma função $s : M \rightarrow E$ tal que $s \in C^\infty(M, E)$ e $\pi \circ s = 1_M$. Denotamos o conjunto de todas as seções de E por Γ_E .

Há uma maneira de induzir novos fibrados vetoriais, a partir de um já existente e de uma função diferenciável. Para tanto, sejam $\pi_E : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e $f : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Considere o conjunto $f^*E = \{(n, e) \in N \times E \mid f(n) = \pi_E(e)\}$. Definimos as aplicações $\hat{f}$ e π_{f^*E} da seguinte maneira: $\hat{f} : f^*E \rightarrow E$ por $\hat{f}(n, e) = e$, π_{f^*E} é a restrição da projeção na primeira variável, definida em $N \times E$, para f^*E . Desta forma, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ \pi_{f^*E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Seja $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ uma coleção de trivializações do fibrado E tal que U_α cobrem M . Construimos uma coleção (V_α, Ψ_α) de trivializações do fibrado f^*E da seguinte maneira: $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ e $\Psi_\alpha : (\pi_{f^*E})^{-1}(V_\alpha) \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^N$ tal que $\Psi_\alpha(n, e) = (n, \Phi_\alpha(e))$. Com essas trivializações, f^*E é um fibrado vetorial sobre N , chamado *pullback* de E pela aplicação f , ou ainda, o fibrado vetorial induzido por f . Se s é uma seção do fibrado E , a aplicação $(f^*s)(n) = (n, s(f(n)))$ é uma seção do fibrado f^*E . Mais ainda, se $\{E_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, N\}$ é um referencial do fibrado E , podemos obter um referencial $\{f^*E_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, N\}$ do fibrado f^*E da seguinte forma: $(f^*E_\alpha)(n) = (n, E_\alpha(f(n)))$.

1.2 Conexões

Nesta seção, introduziremos o importante conceito de conexão. Inicialmente, seguiremos uma abordagem algébrica e depois utilizaremos a maquinária desenvolvida para estudar problemas geométricos.

Definição 1.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$ -álgebra e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$ -módulo. Uma aplicação*

$$\begin{aligned}\nabla : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (X, s) &\mapsto \nabla(X, s) \equiv \nabla_X s\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) ∇ é $\mathcal{A}$ -linear, na primeira variável, i.e., $\nabla_{X+fY}s = \nabla_X s + f\nabla_Y s$
- (ii) ∇ é $\mathbb{R}$ -linear na segunda variável, i.e., $\nabla_X(s_1 + \lambda s_2) = \nabla_X(s_1) + \lambda \nabla_X(s_2)$
- (iii) $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$ (Regra de Leibniz generalizada)

$\forall f \in \mathcal{A}, \forall X, Y \in \text{Der}(\mathcal{A}), \forall s, s_1, s_2 \in \mathcal{M}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, será dita uma conexão em $\mathcal{M}$.

Observação 1.2. Do ponto de vista algébrico, existe uma definição mais geral de conexão do que a apresentada acima. De fato, podemos definir uma conexão da seguinte forma:

Definição 1.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$ -álgebra e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$ -módulo. Uma conexão é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1 \otimes \mathcal{M} \quad (1.1)$$

onde $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ denota o módulo de diferenciais de Kähler de $\mathcal{A}$ e ∇ satisfaz

$$\nabla(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha \nabla s \quad (1.2)$$

onde d é a derivada universal.

1.2.1 Exemplos de Conexões

Como primeiro, observamos a existência de conexões em módulos livres.

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$ -módulo livre. Então $\mathcal{M}$ admite uma conexão.*

Demonstração. Seja $\{E_\phi | \phi \in I\}$ uma base de $\mathcal{M}$, onde I é um conjunto de índices. Definimos $\nabla : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ da seguinte forma: Se $s \in \mathcal{M}$ é tal que $s = \sum_{i=1}^n s^i E_{\phi_i}$,

então $\nabla_X(s) = \sum_{i=1}^n X(s^i)E_{\phi_i}$. A verificação de que ∇ é uma conexão é imediata. De fato, no exemplo 2.1 de [26] é feita a demonstração para o caso de $\mathcal{M}$ ser livre de posto finito. Para o caso de dimensão infinita procede-se da mesma forma, tendo o cuidado de “completar com zeros as coordenadas distintas” de dois elementos do módulo $\mathcal{M}$. Também é possível generalizar a Afirmação 1 de [26] no caso em que $\mathcal{M}$ é livre, ou seja, se $\omega_\phi \in \text{Hom}(\text{Der}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$, com $\phi \in I$, são escolhidos arbitrariamente, então pode-se obter uma conexão definindo $\nabla_X(E_\phi) = \omega_\phi(X)$. Neste caso, se $s = \sum_{i=1}^n s^{\phi_i} E_{\phi_i}$, então $\nabla_X(s) = \sum_{i=1}^n X(s^{\phi_i})E_{\phi_i} + s^{\phi_i}\omega_{\phi_i}(X)$ define uma conexão em $\mathcal{M}$. $\square$

No caso de uma conexão ∇ definida em um módulo livre de posto finito N , podemos associar à ∇ uma matriz de formas diferenciais (elementos de $(\text{Der}(\mathcal{A}))^*$) ω , chamada forma conexão, definida da seguinte forma: Seja $\{E_1, \dots, E_N\}$ uma base de $\mathcal{M}$, então $\nabla_X E_\alpha = \sum_\beta \omega_\alpha^\beta(X) E_\beta$ (ver, por exemplo, capítulo 2 de [26]).

Se ∇^i , com $i = 1, \dots, k$, são conexões definidas em um $\mathcal{A}$ -módulo $\mathcal{M}$ e λ_i são números reais tais que $\sum_i \lambda_i = 1$, então segue facilmente, da definição de conexão, que a aplicação $\nabla : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $\nabla_X s = \sum_i \lambda_i \nabla_X^i s$ é também uma conexão.

Além disso, se a imagem de uma conexão $\nabla : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ estiver contida em um submódulo $\mathcal{M}'$, então a aplicação $\nabla' : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$ dada por $\nabla'_X(s) = \nabla_X(s)$ define uma conexão em $\mathcal{M}'$.

Se Λ é um conjunto de índices e $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma coleção de $\mathcal{A}$ -módulos tal que em cada $\mathcal{M}_i$ está definida uma conexão $\nabla^i : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_i$, então podemos definir, de maneira natural, uma conexão ∇ no produto direto desses módulos, $\prod_{i \in \Lambda} \mathcal{M}_i$ (ver capítulo 2 de [3]), da seguinte forma:

$$(\nabla_X s)_i = \nabla_X^i s_i.$$

A mesma construção anterior pode ser empregada para construir uma conexão na soma direta de uma coleção de módulos.

No seguinte exemplo verificamos a existência de módulos que não admitem conexões.

Exemplo 1.5. Seja $\mathcal{A}$ a $\mathbb{R}$ -álgebra $\frac{\mathbb{R}[x, y]}{\langle xy \rangle}$, onde $\langle xy \rangle$ denota o ideal gerado pelo polinômio $p(x, y) = xy$. Em $\mathcal{A}$ cada classe de equivalência $[p]$ admite um único representante da forma $p_{pr}(x, y) = p_0 + xp_1(x) + yp_2(y)$, onde $p_0 \in \mathbb{R}$. Tal representante será chamado de protótipo da classe. Doravante, cada classe de equivalência será representada pelo seu protótipo, ou seja, escreveremos p_{pr} para denotar $[p]$. Definimos as aplicações $D_1, D_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ por $D_1(p) = x\partial_x(p)$ e $D_2(p) = y\partial_y(p)$. Obviamente, D_1 e D_2 são derivações em $\mathcal{A}$ não triviais já que $D_1(x) = x$ e $D_2(y) = y$. Além disso, yD_1 e xD_2 são ambas a derivação trivial. Seja Ω o $\mathcal{A}$ -módulo $\frac{\mathcal{A} \times \mathcal{A}}{((y, x))}$. Neste módulo as operações são definidas naturalmente, componente a componente. É imediato que Ω admite como geradores $\{\delta^1, \delta^2\}$, onde $\delta^1 = [(1, 0)]$ e $\delta^2 = [(0, 1)]$ e que este conjunto não é uma base já que

$$[y]\delta^1 + [x]\delta^2 = [(0, 0)] \quad (\dagger)$$

. Vamos mostrar que Ω não admite conexões. Suponha por absurdo, que exista uma conexão $\nabla : Der(\mathcal{A}) \times \Omega \rightarrow \Omega$. Temos que existem $c, d, C, D \in \mathcal{A}$ tais que

$$(*) \nabla_{D_2}(\delta^1) = c\delta^1 + d\delta^2 \quad e \quad (**) \nabla_{D_2}(\delta^2) = C\delta^1 + D\delta^2.$$

De $(*)$, temos que:

$$0 = \nabla_{xD_2}(\delta^1) = x\nabla_{D_2}(\delta^1) = x(c\delta^1 + d\delta^2) = xc\delta^1 + xd\delta^2.$$

Do fato do termo mais à direita da sequência de igualdades acima ser nulo, concluímos que existe $\mu \in \mathcal{A}$ tal que

$$(i) \quad xc = y\mu$$

$$(ii) \quad xd = x\mu$$

De (i) e (ii), concluímos que $c_0 = 0$, $c_1(x) = 0$ e $d_0 = 0$.

Similarmente, usando $(**)$, concluímos que:

$$0 = \nabla_{xD_2}(\delta^2) = x\nabla_{D_2}(\delta^2) = x(C\delta^1 + D\delta^2) = xC\delta^1 + xD\delta^2.$$

Como feito acima, concluímos que $C_0 = 0$, $C_1(x) = 0$ e $D_0 = 0$.

Agora usemos a relação $(\dagger)$. Temos:

$$0 = \nabla_{D_2}(y\delta^1 + x\delta^2) = y\delta^1 + y\nabla_{D_2}(\delta^1) + x\nabla_{D_2}(\delta^2) = (y + yc + xC)\delta^1 + (yd + xD)\delta^2$$

Novamente, concluimos que existe $\mu \in \mathcal{A}$ tal que

$$(i) \quad yd + xD = x\mu$$

$$(ii) \quad y + yc + xC = y\mu$$

De (i), concluimos que $\mu_0 = 0$. Usando este fato, de (ii), concluimos que $c_0 = -1$, o que nos dá uma contradição. Logo, o módulo Ω não admite conexões.

□

Uma construção importante na geometria Riemanniana é a conexão de Levi-Civita. Daremos uma generalização algébrica desta construção, que será apresentada brevemente aqui, com o objetivo de dar exemplos importantes de conexões em $Der(\mathcal{A})$, associadas à métricas. Não faremos demonstrações, por serem estas bastante conhecidas. Elas podem ser encontradas em [26], [11] e [21].

Definição 1.9. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$ -álgebra. Uma métrica g é uma aplicação bilinear*

$$g : Der(\mathcal{A}) \times Der(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

que satisfaz a seguinte propriedade: A função

$$\begin{aligned} \psi : Der(\mathcal{A}) &\longrightarrow (Der(\mathcal{A}))^* \\ X &\longrightarrow \psi(X) = g(*, X) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Deve ser notado que esta definição inclui as métricas Riemannianas e as métricas Lorentzianas.

Definição 1.10. *Seja ∇ uma conexão definida em um $\mathcal{A}$ -módulo $\mathcal{M}$, a aplicação*

$$\begin{aligned}\tau^\nabla : \text{Der}(\mathcal{A}) \times \text{Der}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \text{Der}(\mathcal{A}) \\ (X, Y) &\longrightarrow \tau^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\end{aligned}$$

é chamada a torção da conexão ∇ .

Dizemos que a conexão ∇ é simétrica se $\forall X, Y \in \text{Der}(\mathcal{A})$ tivermos que a torção $\tau^\nabla \equiv 0$, ou seja,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (1.3)$$

Definição 1.11. *Dizemos que a conexão em $\text{Der}(\mathcal{A})$, ∇ , é compatível com a métrica g se $\forall X, Y, Z \in \text{Der}(\mathcal{A})$ tivermos*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (1.4)$$

Teorema 1.1. (Levi-Civita) *Dada uma métrica g , existe uma única conexão denotada por $\nabla^g \in \text{Con}(\text{Der}(\mathcal{A}))$ que possui as seguintes propriedades:*

- (i) ∇^g é simétrica
- (ii) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, $\forall X, Y, Z \in \text{Der}(\mathcal{A})$.

Dessa forma, em uma $\mathbb{R}$ -álgebra $\mathcal{A}$, onde está definida uma métrica, de acordo com a definição 1.9, é sempre possível falar na conexão de Levi-Civita no sentido do teorema 1.1. Em particular, em uma variedade Riemanniana sempre é possível falar da conexão de Levi-Civita definida nos campos de vetores daquela variedade.

Definição 1.12. *Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$ -módulo, no qual está definido uma métrica g (de acordo com a definição 1.9). Um subconjunto $\{x_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ de $\mathcal{M}$, com Λ um conjunto de índices, é dito ortonormal, se $g(x_\alpha, x_\beta) = \delta_\beta^\alpha$, onde δ denota o delta de Kronecker.*

Proposição 1.2. *Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$ -módulo livre de posto finito N , no qual está definido uma métrica g . Suponha que existe uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_N\}$ de $\mathcal{M}$. Se ∇ é uma conexão em $\mathcal{M}$ compatível com g , então a forma conexão de ∇ referente a base $\{E_1, \dots, E_N\}$ é anti-simétrica.*

Demonstração. Como ∇ é compatível com g , substituindo $Y = E_j$ e $Z = E_k$ na definição de compatibilidade, temos:

$$0 = X(g(E_j, E_k)) = g(\nabla_X E_j, E_k) + g(E_j, \nabla_X E_k) = \sum_l \omega_j^l(X)g(E_l, E_k) + \sum_l \omega_k^l(X)g(E_l, E_j) = \omega_j^k(X) + \omega_k^j(X)$$

□

Nossa gama de exemplos de conexões será aumentada nas próximas seções, nas quais demonstraremos que conexões existem em fibrados vetoriais e que no caso em que os $\mathcal{A}$ -módulos $Der(\mathcal{A})$ e $\mathcal{M}$ são livres de posto finito, o conjunto das conexões está em bijeção com o conjunto das matrizes de 1-formas diferenciais. Como última observação citamos a proposição 2.2 de [26], na qual é provado o fato de que o conjunto das conexões em um $\mathcal{A}$ -módulo $\mathcal{M}$ é um espaço afim sobre o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das formas $\mathcal{A}$ -bilineares, $Bil(Der(\mathcal{A}) \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$. Portanto, uma vez demonstrada a existência de uma conexão, obtêm-se muitas outras de forma natural.

1.2.2 Existência de Conexões em Fibrados Vetoriais

Nesta seção, demonstraremos um teorema de existência de conexões em fibrados vetoriais. Conexões podem ser estudadas em fibrados mais gerais, mas estes não serão considerados aqui. Para um estudo aprofundado de conexões em fibrados mais gerais, recomendamos a leitura do capítulo 2 de [19].

O lema seguinte é um resultado de grande importância que será usado na demonstração da proposição 1.3.

Lema 1.1. *(Existência de Partições da Unidade) Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M . Existe uma partição da unidade enumerável, i.e., um conjunto $\{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ com $\text{supp}\phi_i$ compacto para cada i . Caso não se exija suportes compactos, pode-se concluir que existe uma partição da unidade $\{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ (i.e., $\text{supp}\phi_\alpha \subset U_\alpha$) com uma quantidade no máximo enumerável de ϕ_α não identicamente nulos.*

Demonstração. Ver página 11 de [27]. □

O conjunto $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em uma variedade M é uma $\mathbb{R}$ -álgebra com as operações de soma, produto e multiplicação por escalar usuais. O conjunto $Der(C^\infty(M))$ (que é isomorfo como álgebra de Lie e como $C^\infty(M)$ -módulo ao conjunto dos campos de vetores de M , por [16]) é um $C^\infty(M)$ -módulo, também com as operações usuais ([20]). Além disso, se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial definimos uma estrutura de $C^\infty(M)$ -módulo no conjunto Γ_E , de maneira semelhante à estrutura do conjunto dos campos de vetores. Assim, faz sentido o seguinte resultado:

Proposição 1.3. *Seja $\pi : E \rightarrow U$ um fibrado vetorial. Existe uma conexão $\nabla : \Gamma_{TU} \times \Gamma_E \rightarrow \Gamma_E$.*

Em primeiro lugar, fazemos a hipótese de que o fibrado é trivial, i.e., ele é da forma $E = U \times V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita N . Seja $\{v_1, \dots, v_N\}$ uma base de V . Para α , definimos $E_\alpha \in \Gamma_E$ por $E_\alpha(p) = (p, v_\alpha)$.

Afirmção 1. $\theta = \{E_1, \dots, E_N\}$ é uma base do C_U^∞ -módulo livre Γ_E de posto N .

Demonstração. De fato, seja $s \in \Gamma_E$. Temos $s(p) = (p, \vec{s}(p))$, com $\vec{s} \in C^\infty(U, V)$. Além disso, $\vec{s}(p) = \sum_{\lambda=1}^N s^\lambda(p) E_\lambda(p)$, $\forall p \in U$, com $s^\lambda \in C_U^\infty$. Assim, θ gera Γ_E . Este conjunto é obviamente linearmente independente. □

Deste modo, podemos utilizar a proposição 1.1, para definir uma conexão $\nabla : Der(C_U^\infty) \times \Gamma_E \rightarrow \Gamma_E$. Com efeito, basta definir ∇ do seguinte modo

$$\nabla_X \left(\sum_{\lambda=1}^N s^\lambda E_\lambda \right) = \sum_{\lambda=1}^N X(s^\lambda) E_\lambda.$$

No caso geral, escolhemos um atlas $\{(U_\alpha, c_\alpha)\}_\alpha$ tal que as vizinhanças coordenadas satisfazem a definição de fibrado (no sentido de que $\{(U_\alpha, c_\alpha)\}_\alpha$ é uma trivialização de E) e que exista uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Isto é possível, pela maximalidade do atlas tomado na variedade (basta tomar interseções sempre que necessário). Para cada uma das vizinhanças coordenadas U_α , existe uma conexão $\nabla^\alpha :$

$Der(C_{U_\alpha}^\infty) \times \Gamma_{U_\alpha} \rightarrow \Gamma_{U_\alpha}$, pela primeira parte da demonstração. Usando as aplicações partições da unidade ϕ_α , estendemos cada ∇^α para $\phi_\alpha \nabla^\alpha : Der(C_{U_\alpha}^\infty) \times \Gamma_{U_\alpha} \rightarrow \Gamma_E$. Define-se então uma aplicação $\nabla : Der(C_U^\infty) \times \Gamma_E \rightarrow \Gamma_E$, dada por

$$(\nabla_X(s))(p) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p)$$

Uma observação importante é que, pela definição de partição da unidade, para cada ponto p , esta soma é finita, portanto não há problemas de convergência. Essa aplicação é uma candidata natural para conexão. Para verificar que ela realmente satisfaz a definição 1.7 procede-se da seguinte maneira:

(i)

$$\begin{aligned} (\nabla_{X+Y}(s))(p) &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{(X+Y)|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}+Y|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = \\ &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) + \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{Y|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = (\nabla_X(s) + \nabla_Y(s))(p). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (\nabla_{fX}(s))(p) &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{(fX)|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{f|_{U_\alpha}X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = \\ &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(f|_{U_\alpha} \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = f(p) \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = (f \nabla_X(s))(p). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} (\nabla_X(s_1+s_2))(p) &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s_1+s_2|_{U_\alpha}))(p) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s_1|_{U_\alpha}+s_2|_{U_\alpha}))(p) \\ &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s_1|_{U_\alpha}))(p) + \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s_2|_{U_\alpha}))(p) = (\nabla_X s_1 + \nabla_X s_2)(p). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (\nabla_X(fs))(p) &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha((fs)|_{U_\alpha}))(p) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(\nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(f|_{U_\alpha}s|_{U_\alpha}))(p) \\ &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(X|_{U_\alpha}(f|_{U_\alpha})s|_{U_\alpha} + f|_{U_\alpha} \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) \\ &= \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(X(f)s|_{U_\alpha})(p) + \sum_{\alpha} \phi_\alpha(p)(f|_{U_\alpha} \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha(s|_{U_\alpha}))(p) = (X(f)s + f \nabla_X(s))(p). \end{aligned}$$

A demonstr  o anterior faz uso de uma técnica bastante utilizada em variedades diferenciáveis: realizar constru  es localmente e estendê-las por meio do uso de parti  es da unidade. Esta abordagem também pode ser utilizada para demonstrar que qualquer variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana (ver capítulo 1 de [11]).

Exemplo 1.6. Considerando o fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$, a proposi  o anterior (e a proposi  o 1.1) nos d   uma maneira de construir uma conexão explicitamente, pois esse fibrado    trivial. De fato, seguindo a constru  o dada na demonstra  o da proposi  o 1.3, conseguimos um exemplo de uma conexão definida no fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$. Tomando como base do $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulo das se  es do fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$, os campos coordenados derivadas parciais $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, onde $\partial_i(p) = (p, e_i)$ com e_i sendo o i -ésimo vetor da base can  nica de $\mathbb{R}^n$, uma se  o desse fibrado, torna-se uma fun  o $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que as n primeiras fun  es formam a identidade de $\mathbb{R}^n$. Definimos:

$$\nabla_X(s^1, \dots, s^n) = (X(s^1), \dots, X(s^n))$$

Esta conexão    chamada de a conexão Euclidiana, pois, como veremos na se  o 1.2.3, está    a conexão de Levi-Civita associada    métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

No caso de conexões definidas em fibrados vetoriais, como também    comum em constru  es definidas em variedades diferenciáveis, pode-se notar que conexões têm um caráter local, no sentido de que o valor de $\nabla_X(s)$ em um ponto $p \in M$ depende somente do valor de X e de s em uma vizinhança (arbitr  riamente pequena) de p (ver lemas 4.1 e 4.2 de [21]). Pode-se tornar essa observa  o mais precisa, de acordo com a seguinte proposi  o:

Proposi  o 1.4. *Sejam M uma variedade diferenciável, $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e uma conexão ∇ definida no fibrado E . São válidas as seguintes afirma  es:*

- (i) *Sejam $X, \tilde{X}$ campos de vetores tais que $X_p = \tilde{X}_p$, então $\nabla_X(s)|_p = \nabla_{\tilde{X}}(s)|_p, \forall p \in M$.*
- (ii) *Sejam s e $\tilde{s}$ se  es de E , tais que $s_p = \tilde{s}_p$, para algum $p \in M$. Além disso, suponha que existe um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ ao redor de p tal que, se*

$$s = \sum_{\alpha} s^{\alpha} E_{\alpha} \text{ e } \tilde{s} = \sum_{\alpha} \tilde{s}^{\alpha} E_{\alpha} \text{ tem-se } \partial_i(s^{\alpha})|_p = \frac{\partial s^{\alpha}}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial \tilde{s}^{\alpha}}{\partial x^i}(p) = \partial_i(\tilde{s}^{\alpha})|_p, \text{ com}$$

$$i = 1, \dots, n, \text{ então } \nabla_X(s)|_p = \nabla_X(\tilde{s})|_p.$$

Demonstração. (i) Pela linearidade de ∇ na primeira variável, é suficiente provar que $\nabla_X(s)|_p = 0$, se $X_p = 0$. Utilizamos o lema 4.1 de [21], que afirma que o valor $\nabla_X(s)|_p$ depende do valor de X em uma vizinhança do ponto p . Assim, tomando uma vizinhança coordenada (U, ϕ) de p podemos, localmente, escrever $X = X^i \partial_i$, onde $\{\partial_i | i = 1, \dots, n\}$ são os campos de vetores coordenados associados à carta ϕ . Como $X_p = 0$, concluímos que $X_p^i = 0$. Temos:

$$\nabla_X(s)|_p = \nabla_{X^i \partial_i}(s)|_p = X^i(p) \nabla_{\partial_i}(s)|_p = 0$$

(ii) Novamente, pelo lema de 4.1 [21], temos que o valor de $\nabla_X(s)|_p$ depende do valor de s em uma vizinhança do ponto p . Temos:

$$\nabla_X(s)|_p = \nabla_X(s^\alpha E_\alpha)|_p = X_p(s^\alpha) E_\alpha|_p + s_p^\alpha \nabla_X(E_\alpha)|_p = X_p(\tilde{s}^\alpha) E_\alpha|_p + \tilde{s}_p^\alpha \nabla_X(E_\alpha)|_p = \nabla_X(\tilde{s})|_p$$

a terceira igualdade é válida, pois

$$X_p(s^\alpha) = X^i(p) \partial_p(s^\alpha) = X^i(p) \partial_p(\tilde{s}^\alpha) = X_p(\tilde{s}^\alpha)$$

□

Pela proposição anterior, o valor de $\nabla_X(s)$ em um ponto p , depende do valor de X_p . Assim, como é usual escreveremos $\nabla_{X_p}(s)$ para denotar $\nabla_X(s)|_p$.

Concluimos esta seção com um breve comentário sobre a construção do *pullback* de uma conexão. Esta construção permite definir o transporte paralelo como veremos no próximo capítulo. Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial, no qual está definida uma conexão ∇ , e uma aplicação diferenciável $f : N \rightarrow M$. Localmente, conseguimos definir a forma conexão ω da conexão ∇ , fixando um referencial local do fibrado E , isto é, em um aberto U de M fixamos uma base $\{E_1, \dots, E_N\}$ do fibrado Γ_U . Como explicado no final do capítulo anterior, $\{\gamma^* E_1, \dots, \gamma^* E_N\}$ forma uma base de $\Gamma_{\gamma^* f^{-1}(U)}$. Definimos em $f^{-1}(U)$ uma conexão da seguinte maneira

$$(f^* \nabla)_X(s) = (f^* \nabla)_X(s^\alpha (f^* E_\alpha)) = X(s^\alpha) (f^* E_\alpha) + s^\alpha (f^* \omega_\alpha^\beta)(X).$$

Verifica-se que, escolhendo um outro aberto $\tilde{U}$ (que intercepta U), no qual está definido um referencial $\{\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_N\}$ e a forma conexão de ∇ é $\tilde{\omega}$, existe uma única conexão definida em $U \cup \tilde{U}$, cuja restrição para U (resp. $\tilde{U}$) tem forma conexão ω (resp. $\tilde{\omega}$). Dessa forma, podemos definir uma conexão em todo o fibrado $f^* E$, para mais detalhes ver [5].

1.2.3 Implementação

Nesta seção daremos uma descrição da implementação do cálculo de conexões feita em [13]. Esta implementação foi feita utilizando o Maple 12. Para fim de implementação, consideraremos uma conexão ∇ definida em um fibrado vetorial N -dimensional

$\pi : E \rightarrow M$, tal que exista um sistema de coordenadas global em M . Deste modo pode-se calcular conexões localmente. A proposição 1.4 nos permite concluir que esta hipótese não restringe a utilidade desta implementação, já que sempre pode-se tomar coordenadas em torno do ponto de interesse e calcular utilizando-se as propriedades usuais de conexão.

Com a hipótese de existência de um referencial global, é possível fixar bases $\partial = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ e $\Delta = \{E_1, \dots, E_N\}$ para os $C^\infty(M)$ -módulos, $Der(C^\infty(M))$ e Γ_E , respectivamente. Assim, cada $X \in Der(C^\infty(M))$ pode ser composto com o inverso do sistema de coordenadas e, desse modo, representado por n funções em $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, onde m é a dimensão da variedade M . De forma análoga, compondo com o inverso do sistema de coordenadas e usando as trivializações do fibrado, pode-se representar cada seção de E por N funções em $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Dessa forma, podemos restringir nosso tratamento ao $\mathbb{R}^n$ e considerar ∂_i como a i -ésima derivada parcial. Temos agora todas os requisitos para implementar o cálculo de conexões. Nas bases fixadas, se D é uma derivação e s é uma seção do fibrado E tal que $s = s^\alpha E_\alpha$, o cálculo de conexões é dado pela seguinte expressão:

$$[\nabla_D(s)]_\alpha = \begin{pmatrix} D(s^1) \\ D(s^2) \\ \vdots \\ D(s^N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^1(D) & \omega_2^1(D) & \omega_3^1(D) & \dots & \omega_N^1(D) \\ \omega_1^2(D) & \omega_2^2(D) & \omega_3^2(D) & \dots & \omega_N^2(D) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^N(D) & \omega_2^N(D) & \omega_3^N(D) & \dots & \omega_N^N(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ \vdots \\ s^N \end{pmatrix}$$

O procedimento que realiza o cálculo de uma conexão ∇ dada em uma derivação D e um elemento s do módulo Γ_E é *calcularConexao*. Ele toma como entradas a matriz de 1-formas diferenciais que representa a conexão nas bases fixadas, o vetor coordenadas de uma derivação D na base dada pelas derivadas parciais e o vetor coordenadas de uma seção s . O uso desse procedimento é exemplificado a seguir:

```

> zeta:= Matrix([x1*x2, x1*x1]):
> t:=calcularConexao(([[ [x1 + x2, x1],[x1*3, x1+ x2]], [[x1,
> sin(x2)], [x1, x2]] ]), [x2*2 + x1, x2], zeta):
> map(simplify, t);

```

$$\begin{bmatrix} 2x^2 + 2x_1x_2 + 5x_1^2x_2^2 + 8x_1^3x_2 + 2x_1x_2^3 + 3x_1^4 \\ x_1(4x_2 + 2x_1 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 + x_2^2\sin(x_2) + x_1^3) \end{bmatrix}$$

Nesta implementação há o procedimento *LeviCivitaMatriz*, utilizado para calcular a matriz de 1-formas da conexão de Levi-Civita, a partir de uma métrica g dada. Com as hipóteses sobre o sistema de coordenadas global, é possível associar uma matriz G à métrica da seguinte forma: $G_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Os próximos exemplos demonstram o uso deste procedimento.

Exemplo 1.7. No exemplo 1.6, citamos que a conexão lá definida era conhecida como conexão Euclidiana devido ao fato de esta ser a conexão de Levi-Civita da métrica Euclidiana. Verificaremos esse fato para $\mathbb{R}^2$ utilizando o procedimento *LeviCivitaMatriz*. A matriz associada à métrica Euclidiana é a matriz identidade em todo ponto do $\mathbb{R}^2$, desse modo:

```

> b:=leviCivitaMatriz([[1,0],[0,1]]);

```

$$b := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.8. Resolveremos o item (a) do exercício 8 do segundo capítulo de [11]. O exercício consiste em encontrar a matriz da conexão de Levi-Civita da métrica de Lobatchevski em $\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}; y > 0\}$. Tal métrica é dada pela matriz $g_{2 \times 2}$ tal que $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$ e $g_{12} = g_{21} = 0$. Utilizando a rotina *leviCivitaMatriz*, obtemos:

```

> b:= leviCivitaMatriz([[1/x2^2,0],[0,1/x2^2]]);

```

$$b := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2} \\ \frac{1}{x_2} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

1.2.4 Histórico

Os primórdios da geometria diferencial surgiram com Gauss (30 de Abril de 1777 - 23 de Fevereiro de 1855). O príncipe dos matemáticos introduziu diversos conceitos geométricos importantes (como, por exemplo, a curvatura de Gauss), quando tentava solucionar o problema de medir a extensão territorial de um reino, que lhe foi proposto pelo rei de seu país. Os conceitos introduzidos por Gauss, foram generalizados por muitos matemáticos, destacando-se entre eles Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 de Setembro de 1826 - 20 de Junho de 1866). Este grande matemático foi o fundador da chamada Geometria Riemanniana, de onde surgiram os objetos matemáticos que são o foco deste trabalho: Conexões e Curvatura. O conceito de conexão surgiu dos trabalhos de Elwin Bruno Christoffel (10 de novembro de 1829 - 15 de março de 1900) com a criação da chamada conexão de Christoffel. Posteriormente, as conexões foram estudadas por Gregorio Ricci-Curbastro (12 de janeiro 1853 - 6 de agosto 1925) e seu estudante Tullio Levi-Civita (29 de março de 1873 - 29 de dezembro de 1941). Este último foi de fundamental importância para o desenvolvimento de conexões, demonstrando a existência da conexão de Levi-Civita e o importante processo de transporte paralelo (que consiste em uma generalização de translações paralelas no plano). Além disso, Levi-Civita explorou a relação entre o transporte paralelo e a curvatura para desenvolver a noção moderna de holonomia. Contribuições mais recentes são devidas a Élie Cartan (9 de abril 1869 – 6 de maio 1951), Jean- Louis Koszul (nascido em 3 de janeiro 1921) e Charles Ehresmann (19 de abril de 1905 – 22 de setembro de 1979). Cartan generalizou as idéias de conexões, criando a conexão de Cartan, para estudar problemas geométricos do programa Erlangen de Felix Klein. Além disso, ele aplicou as idéias de dinâmica de Gaston Darboux para generalizar a noção de transporte paralelo para a sua classe de conexões. Em 1950, Koszul publicou o seu trabalho intitulado *Homologie et cohomologie des algebres de Lie*, no qual dá a definição do que viria a ser chamado a conexão de Koszul, uma linguagem algébrica para falar de conexões que traduzia as noções de derivada covariante e transporte paralelo para o mundo algébrico. Por esta razão, esta definição foi amplamente adotada pela comunidade de geometria diferencial.

Em [28], os autores fazem um retrospecto histórico do conceito de conexão sob o ponto de vista da física, com raízes históricas bem mais antigas do que às matemáticas citadas acima.

Capítulo 2

Transporte Paralelo

Este capítulo aborda o tema principal desta dissertação: o Transporte Paralelo. Este constitui uma aplicação muito importante do conceito de conexões, apresentado no capítulo anterior. Seguiremos aqui a filosofia até agora empregada: generalizar os conceitos clássicos de forma algébrica e desenvolver métodos para fazer computações com os mesmos e depois instanciar tais modelos em situações concretas. O transporte paralelo generaliza para variedades arbitrárias a noção intuitiva de deslocamento com velocidade uniforme. A noção intuitiva de tal movimento pode ser obtida considerando o caso do $\mathbb{R}^n$, no qual (por motivos que devem ficar claros mais adiante) mover-se de um ponto a outro é simplesmente manter o mesmo vetor velocidade. O fato deste movimento ser simples de descrever no caso do $\mathbb{R}^n$ deve-se a relativa simplicidade da métrica Euclidiana.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 2.1 damos a construção do operador de transporte paralelo para fibrados vetoriais. Já na seção 2.2, fazemos comentários sobre suas principais propriedades. Na última seção do capítulo, a seção 2.3, apresentamos uma implementação no MAPLE do cálculo do transporte paralelo.

2.1 Construção do Transporte Paralelo

Nesta seção vamos contruir o operador de transporte paralelo. Para tanto, sejam M uma variedade diferenciável e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\gamma(0) = p$.

Sejam ainda $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e $\nabla : \text{Der}(C^\infty(M)) \times \Gamma_E \rightarrow \Gamma_E$ uma conexão. Inicialmente, faremos ainda as hipóteses de que existe um sistema global de coordenadas em M , dado pela carta c e esta determina os campos de vetores $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, e que E é um fibrado vetorial trivial, i.e., é da forma $M \times \mathbb{R}^n$ e, portanto, pode-se escolher uma base $\theta = \{E_1, \dots, E_N\}$ para o $C^\infty(M)$ -módulo Γ_E , como na demonstração da proposição 1.3.

Definição 2.1. Dizemos que uma seção s do fibrado γ^*E é paralela à curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ em $t \in [0, 1]$, se $((\gamma^*\nabla)_{\partial}s)(t) = (t, 0)$, onde ∂ denota a derivação usual da reta. A seção s é dita paralela à curva γ , se é paralela à γ em t , $\forall t \in [0, 1]$.

Queremos mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. Dada a curva γ e um vetor $v \in E_{\gamma(0)}$, existe uma única seção, s do fibrado γ^*E , paralela à curva γ tal que $s(0) = (0, v)$.

Procuramos então uma seção $s \in \Gamma_{\gamma^*E}$ tal que $((\gamma^*\nabla)_{\partial}s)(\gamma(t)) = (t, 0)$ e que $s(0) = (0, v)$. Fixado t , temos:

$$\begin{aligned} (\gamma^*\nabla)_{\partial}s &= (\gamma^*\nabla)_{\partial}\left(\sum_{\alpha} s^{\alpha}(\gamma^*E_{\alpha})\right) = \sum_{\alpha} \partial(s^{\alpha})(\gamma^*E_{\alpha}) + \sum_{\beta} s^{\beta}(\gamma^*\nabla)_{\partial}(\gamma^*E_{\beta}) = \\ &= \sum_{\alpha} \partial(s^{\alpha})(\gamma^*E_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} s^{\beta}(\gamma^*\omega_{\beta}^{\alpha})(\partial)(\gamma^*E_{\alpha}) \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Temos que a primeira parte do somatório $(\dagger)$ avaliada em t resulta em:

$$\left(\sum_{\alpha} \partial(s^{\alpha})(\gamma^*E_{\alpha})\right)(t) = \left(t, \sum_{\alpha} \partial_t(s^{\alpha})E_{\alpha}|_{\gamma(t)}\right)$$

Temos que a segunda parte do somatório $(\dagger)$ avaliada em t é:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} s^{\beta}(\gamma^*\omega_{\beta}^{\alpha})(\partial)(\gamma^*E_{\alpha})\right)(t) &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} s^{\beta}(t)\omega_{\beta}^{\alpha}|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))(t, E_{\alpha}|_{\gamma(t)}) = \\ &= \left(t, \sum_{\alpha} \sum_{\beta} s^{\beta}(t)\omega_{\beta}^{\alpha}|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))E_{\alpha}|_{\gamma(t)}\right) \end{aligned}$$

Utilizando os dois resultados anteriores, obtem-se que o somatório $(\dagger)$ avaliado no ponto t é:

$$((\gamma^* \nabla)_{\partial} s)(t) = (t, \sum_{\alpha} \partial_t(s^{\alpha}) E_{\alpha}|_{\gamma(t)} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} s^{\beta}(t) \omega_{\beta}^{\alpha}|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) E_{\alpha}|_{\gamma(t)})$$

Denotando $c \circ \gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$, obtemos que $\dot{\gamma}(t) = \sum_i \gamma^{i'}(t) \partial_i|_t$ e, portanto,

$$((\gamma^* \nabla)_{\partial} s)(t) = (t, \sum_{\alpha} [\partial_t(s^{\alpha}) + \sum_{\beta} \sum_i \gamma^{i'}(t) s^{\beta}(t) \omega_{\beta}^{\alpha}(\partial_i)|_{\gamma(t)}] E_{\alpha}|_{\gamma(t)})$$

Escrevendo ainda $\psi = (s^1, \dots, s^N)$ e a função A_{γ} , que toma valores nas matrizes quadradas de ordem N com entradas reais $(A_{\gamma})_{\beta}^{\alpha}(t) = \sum_i \gamma^{i'}(t) \omega_{\beta}^{\alpha}(\partial_i)|_{\gamma(t)}$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\psi'(t) + A_{\gamma}(t)\psi(t) = 0. \quad (\ddagger)$$

Como o objetivo é transportar paralelamente o vetor v , procura-se a solução do sistema acima com o dado inicial $\psi(0) = v \in \mathbb{R}^N$. Esse sistema pode ser sempre resolvido e de forma única, portanto, obtemos uma (única) solução $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisfaz a equação anterior.

Definição 2.2. *O operador de transporte paralelo associado a uma curva γ e a uma conexão ∇ é definido por:*

$$P_{\gamma}^{\nabla}(v, t) = \sum_{\alpha} \psi^{\alpha}(t) E_{\alpha}(\gamma(t)).$$

Usualmente, estaremos interessados no transporte paralelo de um vetor $v \in E_{\gamma(0)}$ para a fibra $E_{\gamma(1)}$.

Deve ser notado que na construção do *pullback* de um fibrado vetorial, esboçada no final da seção 1.1, o *pullback* é realizado através de uma função $f : N \rightarrow M$, onde N é uma variedade diferenciável. No caso do transporte paralelo, devemos fazer o *pullback* do fibrado E através de uma extensão da curva γ a um intervalo aberto ligeiramente maior que I , e restringir a solução para I posteriormente.

2.2 Propriedades do Transporte Paralelo

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades importantes do transporte paralelo. Se γ e σ são duas curvas definidas no intervalo $I = [0, 1]$ tais que $\gamma(0) = \sigma(1)$, usamos a notação $\gamma \bullet \sigma$ para denotar a curva $\gamma \bullet \sigma(t) = \sigma(2t)$, se $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\gamma \bullet \sigma(t) = \gamma(2t-1)$, se $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Proposição 2.1. *Utilizando a mesma notação da seção 2.1, temos:*

- (a) $P_\gamma^\nabla : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ é linear. De fato, P_γ^∇ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $E_{\gamma(0)}$ e $E_{\gamma(1)}$.
- (b) Se σ é uma outra curva tal que $\sigma(0) = \gamma(1)$ e a curva composta $\gamma \bullet \sigma \in C^\infty([0, 1], M)$, tem-se que $P_{\gamma \bullet \sigma}^\nabla = P_\gamma^\nabla \circ P_\sigma^\nabla$.
- (c) P_γ^∇ independe da parametrização da curva γ , isto é, se $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma bijeção diferenciável estritamente crescente tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$, tem-se $P_{\gamma \circ \phi}^\nabla = P_\gamma^\nabla$.

Demonstração. (a) Basta observar que o sistema $(\ddagger)$ é linear e homogêneo, logo o conjunto de soluções forma um espaço vetorial. Pela unicidade da solução para cada dado inicial, tem-se P_γ^∇ é linear. Para demonstrar que ele é um isomorfismo, basta verificar a injetividade (já que os espaços vetoriais têm a mesma dimensão finita). Assim, seja $e \in \text{Ker}(P_\gamma^\nabla)$. Verifica-se facilmente que a solução do sistema $(\ddagger)$ com dado inicial e , também é solução do sistema

$$\psi'(t) + A_{\gamma(1-t)}(t)\psi(t) = 0$$

com dado inicial $0 \in E_{\gamma(1)}$. Por unicidade, tal solução deve ser constante igual a 0. Logo, $e = 0$.

(b) Verifica-se diretamente das equações e utilizando unicidade.

(c) Basta observar que se ψ é solução do sistema $(\ddagger)$ com dado inicial e , então $\psi \circ \phi$ é solução do sistema:

$$\psi'(t) + A_{\gamma \circ \phi}(t)\psi(t) = 0$$

com o mesmo dado inicial.

□

Faz-se a observação de que se γ é uma curva em M , não necessariamente contida em uma vizinhança coordenada U_α de M , pode-se realizar o transporte paralelo entre os extremos de γ utilizando repetidamente a construção anterior, já que é possível cobrir $\gamma([0, 1])$ com um número finito de vizinhanças coordenadas. Explicitamente, as vizinhanças coordenadas de um atlas de M , induzem uma cobertura aberta do intervalo $[0, 1]$. Se λ é o número de Lebesgue dessa cobertura, divide-se o intervalo $[0, 1]$ em um número finito de subintervalos de comprimento menor do que λ . Pela definição do número de Lebesgue, tem-se que cada um dos intervalos da subdivisão de $[0, 1]$, logo sua imagem está contida em alguma vizinhança coordenada e, portanto, pode-se realizar em cada intervalo da subdivisão o transporte paralelo como descrito anteriormente. Além disso, verifica-se facilmente que as propriedades apresentadas na proposição 2.1 permanecem válidas neste caso. Observa-se também que é possível estender ainda mais a noção de transporte paralelo, no sentido de que é possível definir a operação de transporte paralelo em curvas que não são diferenciáveis, toma-se a restrição mais fraca de que a curva tem que ser contínua e diferenciável por partes, segundo a seguinte definição:

Definição 2.3. *Uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é dita diferenciável por partes, se existe uma partição $\{t_0, \dots, t_n\}$ do intervalo $[a, b]$, tal que $t_0 = a$ e $t_n = b$ e $\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é diferenciável.*

No caso de uma curva diferenciável por partes, procede-se de maneira natural definindo

$$P_\gamma^\nabla = P_{\gamma_{n-1}}^\nabla \circ \dots \circ P_{\gamma_0}^\nabla$$

Há, em um certo sentido, uma equivalência entre as noções de conexão e transporte paralelo, isto é, munir um fibrado vetorial de uma conexão é equivalente a muni-lo com uma correspondência entre curvas e operadores de transporte paralelo. A construção anterior demonstra como realizar um caminho desta equivalência: Conexão $\Rightarrow$ Transporte Paralelo. Para o caminho inverso, recomenda-se a leitura de [18].

Exemplo 2.1. Vamos calcular o transporte paralelo no caso do fibrado tangente da reta real. Para tanto, usamos uma conexão $\nabla : \text{Der}(C^\infty(\mathbb{R})) \times \text{Der}(C^\infty(\mathbb{R})) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(\mathbb{R}))$. Fixemos como base $\alpha = \{\partial\}$ de $\text{Der}(C^\infty(\mathbb{R}))$, onde ∂ representa a derivada usual de $\mathbb{R}$.

Seja $\delta = \{\partial^*\}$ a base dual de α . Seja $[\nabla]_\alpha = [\Gamma]$ a matriz da conexão ∇ na base α . Seja ainda $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva diferenciável. Procuramos então um campo de vetores $V = \tilde{V}\partial$, cuja derivada covariante seja nula. Temos:

$$\tilde{V}'(t) + \gamma'(t)(\Gamma \circ \gamma)(t)\tilde{V}(t) = 0.$$

Que tem como solução:

$$\psi(t) = \tilde{V}(0)e^{-\int_0^t \gamma'(k)(\Gamma \circ \gamma)(k)dk}.$$

Exemplo 2.2. Com a conexão do exemplo 1.6, o processo de transportar paralelamente um vetor de $\mathbb{R}^n$ é, simplesmente, o que usualmente se entende por mover um vetor. Para ver isso, nota-se que para esta conexão, as 1-formas diferenciais ω_β^α são nulas e, portanto, as soluções do sistema $(\ddagger)$ devem ser constantes. Assim, por exemplo, o transporte paralelo de um vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ com ponto base em $(1, 1)$ para o ponto $(1, 2)$ ao longo da curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\gamma(t) = (1, 1 + t)$ tem como resultado o vetor $v = (v_1, v_2)$ com ponto base em $(1, 2)$.

Exemplo 2.3. Considere agora o subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$. No exemplo 3.1 de [26], o autor demonstra que $Der(C^\infty(H^+))$ é um $C^\infty(H^+)$ -módulo livre de posto 2 e que os campos derivadas parciais $\{\partial_x, \partial_y\}$ formam uma base desse módulo. Ainda neste exemplo, uma conexão $\nabla : Der(C^\infty(H^+)) \times Der(C^\infty(H^+)) \rightarrow Der(C^\infty(H^+))$ foi definida. Com relação a base definida pelos campos derivadas parciais a matriz dessa conexão é:

$$\begin{pmatrix} 2dx & dx \\ 0 & dy \end{pmatrix}.$$

Para constatar em um exemplo como a conexão influencia no transporte paralelo, calculemos o transporte paralelo de um vetor $v = (v_1, v_2)$ com ponto base $(1, 1)$ em H^+ com essa conexão. Neste caso, o sistema $(\ddagger)$ é simplesmente:

$$\begin{pmatrix} \psi^{1'}(t) \\ \psi^{2'}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com dado inicial $(\psi^1(0), \psi^2(0)) = (v_1, v_2)$. Neste caso, $P_\gamma^\nabla(e) = (v_1, \frac{v_2}{e})$, onde e denota o número de Euler.

Uma demonstração visual do transporte paralelo na esfera S^2 pode ser encontrada em [25].

O exemplo 2.1 sugere uma importante propriedade do transporte paralelo. Nota-se nesse exemplo que o transporte paralelo preserva a orientação do vetor, no sentido que, se o vetor inicial for positivo, o final também será. Esse fato pode ser generalizado para variedades de dimensões arbitrárias, segundo a

Proposição 2.2. *Sejam E, M e ∇ como na construção do transporte paralelo, feita anteriormente. Sejam U um aberto de M e $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ base de Γ_U . Para cada $p \in U$, fixamos em E_p a orientação dada pela base $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$. Então, para qualquer curva $\gamma : I \rightarrow U$, o operador de transporte paralelo $P_\gamma^\nabla : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ preserva a orientação, ou seja, a matriz de mudança de base, da base dada por $P_\gamma^\nabla(E_i|_{\gamma(0)})$ para a base $E_i|_{\gamma(1)}$, tem determinante positivo.*

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos $\psi_i = (\psi_i^1, \dots, \psi_i^N)$ a solução do sistema $(\ddagger)$ com dado inicial $E_i^\alpha|_{\gamma(0)} = e_i$ (base canônica de $\mathbb{R}^N$). Definimos a aplicação $P : [0, 1] \rightarrow M_{N \times N}(\mathbb{R})$ dada por

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} \psi_1^1(t) & \psi_2^1(t) & \psi_3^1(t) & \dots & \psi_N^1(t) \\ \psi_1^2(t) & \psi_2^2(t) & \psi_3^2(t) & \dots & \psi_N^2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^N(t) & \psi_2^N(t) & \psi_3^N(t) & \dots & \psi_N^N(t) \end{pmatrix}$$

A aplicação P é contínua, já que cada ψ_j^i é contínua e a função determinante também é contínua. Além disso, $P(0) = 1$ e $P(t) \neq 0$, pois o transporte paralelo é um isomorfismo. Logo, pelo teorema do valor intermediário, $P(1) > 0$. Note que $P(1)$ é o determinante da matriz de mudança de base, o que implica o resultado.

□

2.3 Implementação

O foco desta seção são os aspectos computacionais do transporte paralelo. Utilizamos a implementação feita em [13], discutida brevemente nas seções anteriores. Para efeito de programação, nos restringiremos ao caso de que a curva está inteiramente contida em uma vizinhança coordenada da variedade. Isto não limita em nada o uso, como sugere claramente a extensão do transporte paralelo para curvas que não satisfazem esta condição, feita na seção anterior. A seção 2.1 deixa de forma bastante explícita um procedimento para calcular o transporte paralelo. Assim, dada uma conexão $\nabla = [\omega_\beta^\alpha]$ e uma curva γ , devemos resolver o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}^1(t) \\ \dot{\psi}^2(t) \\ \dots \\ \dot{\psi}^N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (A_\gamma)_1^1(t) & (A_\gamma)_2^1(t) & (A_\gamma)_3^1(t) & \dots & (A_\gamma)_N^1(t) \\ (A_\gamma)_1^2(t) & (A_\gamma)_2^2(t) & (A_\gamma)_3^2(t) & \dots & (A_\gamma)_N^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_\gamma)_1^N(t) & (A_\gamma)_2^N(t) & (A_\gamma)_3^N(t) & \dots & (A_\gamma)_N^N(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi^1(t) \\ \psi^2(t) \\ \dots \\ \psi^N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $(A_\gamma)_\beta^\alpha(t) = \sum_i \gamma^{i'}(t) \omega_\beta^\alpha(\partial_i|_{\gamma(t)})$. Primeiramente, implementamos um algoritmo para o cálculo de uma posição da matriz A_γ , este será chamado de *calcularMatrizTP*. Ele tem como entradas a curva γ , linha e coluna da entrada a ser calculada, a forma conexão e a variável da parametrização. Sua implementação é dada a seguir:

```
> calcularMatrizTPEntrada := proc(curva, linha, coluna, conexao,
> variavelP)
> local result,temp,i, con;
> result := 0;
> for i from 1 to dimDer do
> con := subs( variaveis[i]=curva[i], b );
> od;
> for i from 1 to dimSec do
> temp:= calcular1FormaDerivacao(conexao[linha,coluna],
> transpose(Matrix(Vector(dimDer,shape=unit[i]))));
```

```

> result := result + temp*diff(curva[i],variavelP);
> od;
> return result;

```

A seguir usaremos esse procedimento como subrotina do procedimento *calcularMatrizTP* que toma como entrada a curva γ , a forma conexão e a variável da parametrização e retorna toda a matriz A_γ . Sua implementação consiste apenas em calcular cada entrada da matriz e é dada a seguir:

```

> calcularMatrizTP := proc(curvaSigma, conexao, variavelP)
> local i,j,k,matriz,temp;

> matriz := Array(1..dimDer,1..dimDer);
> for i from 1 to dimDer do

>   for j from 1 to dimDer do
>     matriz[i,j] :=

>       calcularMatrizTPEntrada(curvaSigma,i,j,conexao,variavelP);

>   od;
> od;
> return matriz;
> end:

```

Para montar o sistema de EDO's criamos o procedimento *montarSistema* que toma como entrada a curva γ , a forma conexão e a variável da parametrização e retorna um conjunto, cujos elementos são as equações que fazem parte do sistema. A implementação deste procedimento é a seguinte:

```

> montarSistemaTP := proc(curvaSigma, conexao, variavelP)
> local unknownVec, unknownVecD, i, alpha, system, temp, retorno;
> unknownVec := Matrix(dimSec, 1);
> unknownVecD := Matrix(dimSec, 1);
> system := {};
> for i from 1 to dimDer do
> unknownVec[i, 1] := funcoes[i](s);
> unknownVecD[i, 1] := diff(funcoes[i](s), s);
> od;
> temp := MatrixAdd(unknownVecD,
> MatrixMatrixMultiply(Matrix(calcularMatrizTP([sin(s), cos(s)], b,
> s)), unknownVec));
> for i from 1 to dimSec do
> temp[i, 1] := temp[i, 1] = 0;
> od;
> for i from 1 to dimSec do
> system := system union {temp[i, 1]};
> od;

```

Exemplificamos o uso deste último procedimento construindo o sistema para o transporte paralelo no plano de Poincaré, com a conexão de Levi-Civita da métrica de Lobachevsky (ver exemplo 1.8) através da curva $s \mapsto (2 + \sin(s), 2 + \cos(s))$. Obtemos o seguinte sistema:

```

> sistema := montarSistemaTP([2+sin(s), 2+cos(s)], b, s);

```

$$sistema := \{f_2' + f_1 + \frac{\sin(s)f_2}{\cos(s)} = 0, f_1' + \frac{\sin(s)f_1}{\cos(s)} - f_2 = 0\}$$

Finalmente, utilizamos o mecanismo de solução de sistemas de EDO's do MAPLE para calcular a solução do sistema. Para tanto, precisamos apenas do seguinte co-

mando:

```
> sol := dsolve(sistema,s);
```

Obtemos a seguinte solução:

$$sol := \{f1 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_1\cos(2s) + \frac{1}{2}C_2\sin(2s),$$

$$f2 = -\frac{1}{2}C_1\sin(2s) + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_2\cos(2s)\}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Capítulo 3

Grupos de Holonomia

Neste capítulo definiremos o grupo de holonomia associado a uma conexão. Este grupo é definido através do transporte paralelo de vetores em curvas fechadas. Novamente, nos restringiremos a conexões definidas em fibrados vetoriais, embora qualquer tipo de conexão definida em outros tipos de fibrados gera uma aplicação de transporte paralelo e este, por sua vez, gera uma noção de holonomia. Para considerações sobre holonomia em outros tipos de fibrados, ver [19].

Todas as curvas γ , utilizadas neste capítulo, estão definidas no intervalo $I = [0, 1]$. Além disso, usaremos a notação γ^{-1} para denotar a curva $t \in I \mapsto \gamma(1 - t)$.

3.1 Grupo de Holonomia de uma Conexão

Pode-se definir uma estrutura de grupo no conjunto dos operadores de transporte paralelo de uma conexão associados às curvas fechadas em um ponto fixo. Isto é de que trata a

Proposição 3.1. *Seja ∇ uma conexão, como na proposição 2.1. São válidas:*

- (a) *Para cada $p \in M$, o conjunto $H_p(\nabla, M) = \{P_\gamma^\nabla | \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$ é um grupo com a operação de composição de funções. Este grupo é chamado de grupo de holonomia*

da conexão ∇ . Quando não houver possibilidade de confusão, omite-se a variedade da notação, ou seja, escreve-se $H_p(\nabla)$, ao invés de $H_p(\nabla, M)$.

(b) Se γ é uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, tem-se:

$$H_q(\nabla) = P_\gamma^\nabla H_p(\nabla) (P_\gamma^\nabla)^{-1} = \{P_\gamma^\nabla \circ P_\psi^\nabla \circ (P_\gamma^\nabla)^{-1} | \psi \text{ é um laço com ponto base } p\}.$$

(c) Para cada $p \in M$, o conjunto $H_p^0(\nabla) = \{P_\gamma^\nabla \in H_p(\nabla) | \gamma \text{ é contrátil}\}$ é um subgrupo normal do grupo de holonomia, chamado grupo de holonomia restrita da conexão ∇ .

Demonstração. (a) Da proposição 2.1, conclui-se ainda que, para cada $p \in M$, o conjunto $H_p(\nabla) = \{P_\gamma^\nabla | \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$ é um grupo com a operação de composição de funções. De fato, se $\gamma(t) = p, \forall t \in [0, 1]$, tem-se que $P_\gamma^\nabla(e) = Id_{E_p}$, pois neste caso a função A_γ é identicamente nula e, portanto, a solução do sistema $(\ddagger)$ deve ser constante, ou alternativamente, $P_\gamma^\nabla = P_{\gamma \bullet \gamma}^\nabla = P_\gamma^\nabla \circ P_\gamma^\nabla$, pela parte (c) da proposição 2.1. Além disso, vê-se facilmente da definição do transporte paralelo que $P_{\gamma^{-1}}^\nabla = (P_\gamma^\nabla)^{-1}$.

(b) Temos $P_\gamma^\nabla H_p(\nabla) (P_\gamma^\nabla)^{-1} \subseteq H_q(\nabla)$, já que para todo laço ψ com ponto base em p , tem-se

$$P_\gamma^\nabla \circ P_\psi^\nabla \circ (P_\gamma^\nabla)^{-1} = P_{(\gamma \bullet \psi) \bullet \gamma^{-1}}^\nabla$$

e $(\gamma \bullet \psi) \bullet \gamma^{-1}$ é um laço de ponto base q . Similarmente, se P_σ^∇ , onde σ é um laço com base em q , conclui-se que $\gamma^{-1} \bullet \sigma \bullet \gamma$ é um laço em p e, portanto,

$$(P_\gamma^\nabla)^{-1} \circ P_\sigma^\nabla \circ P_\gamma^\nabla = P_{\gamma^{-1} \bullet \sigma \bullet \gamma}^\nabla \in H_p(\nabla), \text{ de onde segue o resultado.}$$

(c) Afirmamos que $H_p^0(\nabla)$ é não vazio. Com efeito, se γ_0 é o laço constante em $p \in M$, tem-se $P_{\gamma_0}^\nabla = Id_{E_{\gamma(0)}} \in H_p^0(\nabla)$. Além disso, se γ e ψ são dois laços contráteis com ponto base p , tem-se $P_\gamma^\nabla \circ (P_\psi^\nabla)^{-1} = P_{\gamma \bullet \psi(1-t)}^\nabla$. Como cada um dos laços γ e ψ é contrátil $\gamma \bullet \psi(1-t)$ também o é (para leitura sobre a teoria sobre o grupo fundamental utilizada aqui, recomendamos a leitura de seção 1.1 de [15]). Aqui deve-se notar que admite-se o transporte paralelo em curvas diferenciáveis por partes, como comentado na seção anterior. Seja agora γ um laço contrátil com base no ponto p e ψ um outro laço também com ponto base em p . Para concluir que $H_p^0(\nabla)$ é um subgrupo normal, basta observar que:

$$P_\psi^\nabla P_\gamma^\nabla (P_\psi^\nabla)^{-1} = P_\psi^\nabla P_\gamma^\nabla P_{\psi^{-1}}^\nabla = P_{\psi \bullet \gamma \bullet \psi^{-1}}^\nabla$$

Como γ é contrátil, $\psi \bullet \gamma \bullet \psi^{-1}$, também o é, o que conclui a demonstração.

□

Da parte (a) da proposição anterior, conclui-se que $H_p(\nabla, M)$ é um subgrupo de $GL(E_p)$, de fato, fixando uma base em E_p , $H_p(\nabla, M)$ pode ser considerado um subgrupo de $GL(N, \mathbb{R})$, onde N é o posto do fibrado. Note que desta forma, o grupo de holonomia fica definido, como um subgrupo de $GL(N, \mathbb{R})$, a menos de conjugação (mudança de base). Além disso, é imediato que, em geral $H_p(\nabla, M) \subsetneq GL(E_p)$, pois em $\mathbb{R}^n$ com a conexão Euclidiana o grupo de holonomia é trivial. O cálculo do grupo de holonomia de uma variedade munida de uma conexão é, em geral, um problema não trivial.

Da parte (b) da proposição anterior, conclui-se que, em uma variedade diferenciável conexa M , pode-se definir o grupo de holonomia da variedade $H_M(\nabla)$ como o grupo de holonomia em qualquer ponto. Com efeito, pela parte (b), todos os grupos de holonomias são isomorfos e assim, o grupo de holonomia de M fica definido a menos de isomorfismo.

Proposição 3.2. *Sejam N uma variedade diferenciável, e $\pi' : F \rightarrow N$ um fibrado vetorial sobre N e $\tilde{\nabla}$ uma conexão definida no fibrado vetorial F . Seja ainda $f : M \rightarrow N$ uma função diferenciável. Para cada $p \in M$, definimos a aplicação $f_{\#} : H_p(\nabla, M) \rightarrow H_{f(p)}(\tilde{\nabla}, N)$ como $f_{\#}(P_{\gamma}^{\nabla}) = P_{f \circ \gamma}^{\tilde{\nabla}}$. Definida desse modo, $f_{\#}$ é um homomorfismo de grupos. Além disso, se f é um difeomorfismo, $f_{\#}$ é um isomorfismo.*

Demonstração.

$$f_{\#}(P_{\gamma}^{\nabla} \circ P_{\sigma}^{\nabla}) = f_{\#}(P_{\gamma \bullet \sigma}^{\nabla}) = P_{f \circ (\gamma \bullet \sigma)}^{\tilde{\nabla}} = P_{(f \circ \gamma) \bullet (f \circ \sigma)}^{\tilde{\nabla}} = f_{\#}(P_{\gamma}^{\nabla}) \circ f_{\#}(P_{\sigma}^{\nabla}).$$

Obviamente, $(f^{-1})_{\#} = (f_{\#})^{-1}$. Com efeito, se O for uma variedade diferenciável, $g : N \rightarrow O$ for uma aplicação diferenciável e $\pi'' : G \rightarrow O$ for um fibrado vetorial sobre O , no qual está definida uma conexão ∇' , temos que:

$$(g \circ f)_{\#}(P_{\gamma}^{\nabla}) = P_{(g \circ f) \circ \gamma}^{\nabla'} = P_{g \circ (f \circ \gamma)}^{\nabla'} = g_{\#}(P_{f \circ \gamma}^{\tilde{\nabla}}) = (g_{\#} \circ f_{\#})(P_{\gamma}^{\nabla}).$$

□

Deve-se notar a semelhança entre as propriedades do grupo fundamental e as propriedades do grupo de holonomia apresentadas na proposição 3.1. Para tentar tornar

mais clara a relação entre o grupo fundamental e a holonomia, notamos que há um homomorfismo sobrejetor $\phi : \pi_1(M, p) \rightarrow \frac{H_p(\nabla)}{H_p^0(\nabla)}$, definida, de maneira natural, como $\phi([\gamma]) = P_\gamma^\nabla H_p^0(\nabla)$. De fato, ϕ é um homomorfismo já que

$$\phi([\gamma] \cdot [\sigma]) = \phi([\gamma \bullet \sigma]) = [P_{\gamma \bullet \sigma}^\nabla] = [P_\gamma^\nabla \circ P_\sigma^\nabla] = [P_\gamma^\nabla] \cdot [P_\sigma^\nabla].$$

Na definição desta aplicação, está sendo usado o fato de que para qualquer curva γ contínua definida em um intervalo compacto da reta e tomando valores em uma variedade diferenciável M , existe uma curva diferenciável por partes σ homotópica a curva dada, tal que $\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\gamma(1) = \sigma(1)$. Isto implica, em particular, o fato de que se M for simplesmente conexo, então $H_p(\nabla) = H_p^0(\nabla)$ é trivial.

3.2 Histórico

A primeira definição de Grupo de Holonomia foi dada por Élie Cartan, na esperança de que, pelo menos em alguns casos especiais, ele pudesse servir para classificar variedades Riemannianas, semelhante ao que é feito com o grupo fundamental em espaços topológicos. Os grupos de holonomia foram bastante importantes nas descobertas de Cartan, que os utilizou para classificar espaços simétricos (conceito também introduzido por Cartan), em 1925. Para mais detalhes sobre este trabalho de Cartan, ver seção 10.70 de [6]. Os grupos de holonomia não receberam muita atenção da comunidade científica no início de sua história, de fato eles foram quase praticamente esquecidos entre a definição dada por Cartan e a década de 1950. Nesta década apareceram alguns resultados importantes nos trabalhos de Ambrose (ver nota biográfica em [24]) e Singer ([1]) e Berger ([8]). Ambrose e Singer relacionaram a holonomia de uma conexão em um fibrado principal e a forma curvatura ([26]) da mesma conexão. Recentemente, o seu estudo foi impulsionado por aplicações à física teórica (ver, por exemplo, [2], [4] e [9]).

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrose, W.; Singer, I. M., *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. 75: 428-443, 1953
- [2] Aros, R.; Martínez, C.; Troncoso, R.; Zanelli, J., *Supersymmetry of gravitational ground states*, J. High Energy Phys., 2002
- [3] Atiyah. M.; Macdonald. I.G., *Introducion al Álgebra Comutativa*, Revertés, S.A., 1972
- [4] Bakke, K.; Furtado, C. ; Sergeenkov, S., *Holonomic quantum computation associated with a defect structure of conical graphene*, Europhysics Letters (Print), v. 87, p. 30002, 2009
- [5] Ballmann, W., *Vector Bundles and Connections*, Web. 13 May 2010. <<http://www.math.uni-bonn.de/people/hwblmnn/archiv/concurvb.ps>>
- [6] Besse, A. L., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987
- [7] Berger, M., *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2002
- [8] Berger, M., *Sur les groupes d'holonomie des variétés a connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France 83: 279-330, 1953
- [9] Carvalho, A. M. M. ; Furtado, C. ; Moraes, F., *Global Properties of the Black Cigar Spacetime*, The Journal of High Energy Physics (Online), v. 06, p. 029, 2004
- [10] Connes, A., *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and motives* , 2009
- [11] Do Carmo, M., *Geometria Riemanniana*, IMPA, 1979

- [12] Eisenbud, D., *Commutative álgebra*, Springer-Verlag, 1995
- [13] Ferreira Júnior, N. R., *Implementação de rotinas para o Cálculo de Conexões e Curvatura*, Trabalho de Graduação, CIn-UFPE, 2009
- [14] Hanson, A. J. ; and Ma, H., *Parallel Transport Approach to Curve Framing*. Tech. Indiana University. Web. 11 May 2010. <<ftp://ftp.cs.indiana.edu/pub/techreports/TR425.pdf>>
- [15] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
- [16] Henrique, M. L., *Derivações e Campos de Vetores*, Dissertação de Mestrado, DMat-UFPE, 2001
- [17] Joyce, D. D., *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2007
- [18] Knebelman, M. S., *Spaces of relative parallelism*, Annals of Mathematics 2 **53**: 387–399, 1951
- [19] Kobayashi, S.; Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, volume I. interscience, New York, 1963
- [20] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York 2003
- [21] Lee, John M., *Riemannian Manifolds: an Introduction to Curvature*, New York: Springer, 1997
- [22] Levi-Civita, T.; Ricci, G., *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. B 54: 125-201, 1900
- [23] Rojas, J., *O Funcional de Yang-Mills* , Dissertação de Mestrado, DMat-UFPE, 1990
- [24] Singer, I. M.; Wu., H., *A Tribute to Warren Ambrose*, Ams Notices Apr. 1996: 425-27. Web. 27 Apr. 2010. <<http://www.ams.org/notices/199604/comm-ambrose.pdf>>
- [25] Sullivan, J. M., *Spherical Geometry Demo*, Computer software. Spherical Geometry Demo. University of Illinois. Web. 5 May 2010. <<http://torus.math.uiuc.edu/jms/java/dragosphere/>>

- [26] Teixeira, R., *Conexões e Curvaturas: Uma Abordagem Algébrica*, Dissertação de Mestrado, DMat-UFPE, 2009
- [27] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag 1983
- [28] Wu, A. C. T. ; Yang, C. N., *Evolution of the Concept of the Vector Potential in the Description of Fundamental Interactions*, Int. J. Mod. Phys. A 21, (3235-3277), 2006