

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – UFPE  
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS – CFCH  
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO “STRICTO-SENSU” EM PSICOLOGIA  
COGNITIVA**

**JORGE COSTA DO NASCIMENTO**

**O CONCEITO DE LIMITE EM CÁLCULO: OBSTÁCULOS E  
DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM NO CONTEXTO DO ENSINO  
SUPERIOR DE MATEMÁTICA**

**RECIFE – PE**

**2003**

**JORGE COSTA DO NASCIMENTO**

**O CONCEITO DE LIMITE EM CÁLCULO: OBSTÁCULOS E  
DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM NO CONTEXTO DO ENSINO  
SUPERIOR DE MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Doutor em Psicologia.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva  
Orientador: Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão

Recife  
2003

**AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.**

**Nascimento, Jorge Costa do**

**O conceito de limite em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática / Jorge Costa do Nascimento. – Recife: O Autor, 2003.**

**337 folhas : il., fig., gráf., quadro.**

**Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Psicologia Cognitiva, 2008.**

**Inclui: bibliografia, anexos e apêndice.**

**1. Psicologia Cognitiva. 2. Psicologia da aprendizagem. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Cálculo diferencial. 5. Matemática(superior). I. Título.**

**159.9  
150**

**CDU (2. ed.)  
CDD (22. ed.)**

**UFPE  
BCFCH2009/01**

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Jorge Costa do Nascimento

O Conceito de Limite em Cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Doutor.

Área de Concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovado em: 28 de novembro de 2003

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão  
Instituição: U.F.PE

Assinatura:

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain  
Instituição: U.F.PE

Assinatura:

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima  
Instituição: U.F.PE

Assinatura:

Profa. Dra. Alina Galvão Spinillo  
Instituição: U.F.PE

Assinatura:

Prof. Dr. Luciano Rogério de Lemos Meira  
Instituição: U.F.PE

Assinatura:



*A minha mãe*

**Marina Costa do Nascimento**

Que também sonhou com esse  
momento e que vibrava tanto quanto eu.

*Saudades!*

**Alba, Eluá e Arnaldo,**

*Minha Família*

Companheiros incansáveis e inseparáveis de peleja. Que vêm me acompanhando nessas jornadas, desde 1994, passo a passo, unissonantes, sem reclamar, sempre com sorrisos, e incentivos, são mais Quixote do que eu.

## **AGRADECIMENTOS**

Em 1997 quando escrevi os agradecimentos na minha dissertação de mestrado em matemática, coloquei que aquele trabalho havia sido fruto de um esforço coletivo.

Hoje essa minha convicção se torna cada vez mais forte (é claro que não imaginava aquela dissertação como não penso também nesta Tese como sendo uma ITAIPU, “esforço coletivo de brasileiros e paraguaios”) e, realmente, posso dizer que como aquele trabalho, este também, apesar de ter sido escrito por mim, foi socialmente construído. Socialmente construído por um lastro teórico suportado nos diversos autores consultados e lidos. Socialmente construído quando se é somada a participação dos funcionários administrativos, técnico-administrativos, professores e estudantes da UFPE e da UESB; (órgãos de fomento e outros).

**A CAPES**, pela bolsa que me foi concedida no período de agosto de 1997 a agosto de 2001, sem a qual não sustentaria a minha permanência no programa da UFPE.

### **Da UFPE:**

Ao corpo docente (Professor Antonio Roazzi, Professora Alina Spinillo, Professora Glória Carvalho, Professor Jorge Falcão, Professor Luciano Meira, Professora Maria Lyra, Professora Maria das Graças Bompastor e Professora Selma Leitão), corpo administrativo (Elaine Marques, Vera Amélia, Vera Ferraz, João Paulo, particularmente a Ivo Vanderley), e corpo discente do Programa de Pós-graduação em Psicologia.

Aos Professores: Professor MS Joaquim Souza e Professor Dr. Joaquim Tavares, do Departamento de Matemática da UFPE, pela oportunidade que me deram de poder assistir as suas aulas e conversar com seus alunos; Professor Dr. Cláudio Vidal, pela leitura e sugestões à minha tese e ao emérito Professor Doutor Paulo Figueiredo, pelos conselhos, considerações e opiniões emitidas, além da oportunidade de conhecê-lo e de poder estreitar os laços de amizade.

Aos funcionários da Biblioteca de Matemática do CCEN, em particular a Jane (Chefe da Biblioteca), que sempre facilitaram para mim o trabalho de consulta bibliográfica.

Aos dez estudantes da área II que participaram como colaboradores nesta tese, pois sem eles ela não aconteceria.

### **Da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB):**

UESB – Jequié: funcionários e estagiários do CSI, pela paciência que sempre tiveram e pela presteza no atendimento das minhas solicitações; estagiários do LABIEM, Lucicléa e Moisés; a colega e amiga Maria da Glória do Espírito Santos Filha, pela presteza em scanar os textos escritos dos estudantes pesquisados; aos colegas de Departamento, que compreenderam o meu momento e procuraram me proporcionar todas as condições possíveis para conclusão deste trabalho: em especial ao velho amigo Edson Cardos dos Reis e seu filho Cauã; a Claudia Ribeiro, Coordenadora do CCM; Inês Freire, Vice-Coordenadora do CCM; e Valeria Rosa;

A Guadalupe Licon e sua família – Arivaldo, Carla e Diana.

Aos parentes e a todos que direta e/ou indiretamente deram e dão toda uma sustentação (logística, emocional) para o desenvolvimento desses trabalhos.

Durante o percurso, você vai construindo, ampliando e consolidando vínculos, construindo e consolidando amizades, tornando a sua família cada vez maior. Uma família construída sobre outras bases, ligada por uma corrente com elos afetivos, fortes e inquebrantáveis e que perdurarão por um tempo quiçá ilimitado.

E a este universo, em plena expansão, incorporou-se o Professor Dr. **Luciano Rogério Lemos Meira**, meu primeiro orientador-pesquisador competente, pessoa eclética-, a quem sou profundamente grato-que mesmo sem saber quem eu era, apostou em mim, despontando como um farol, iluminando o caminho deste navegante, um tanto perdido entre os vagalhões da vaga sísmica do meu pensamento. Pois, naquele momento em que conversamos e que ele pacientemente me ouvia, encontrava-me quase a deriva, em um mar de dúvidas quanto ao meu percurso acadêmico. Aquele, “sim, vamos ver, faça umas disciplinas aqui no programa, este semestre, para você poder sentir se é realmente isso o que você quer”, mudou a minha vida.

O meu orientador, Professor Dr. **Jorge Tarcísio da Rocha Falcão**, pesquisador de notório saber, que também acreditou em mim, compartilhando pacientemente os momentos de construção desta tese, com a sua leitura cuidadosa e crítica, com sugestões e questionamentos valiosos, e com conversas e orientações recheadas de respeito e carinho.

Todo um Universo visível passou a tomar corpo sendo incorporados a ele, Pablo; José Aguiar (Zito); Sílvio Campelo; Ricardo Pinho; Valéria Borba; Anália Keila, Ana Augusta, Jitka, Bianca e Ana Coelho (essas ultimas, colegas de turma); ao caçula do grupo, o colega Dênio e ao parceiro de muitas horas Lafayette B. Melo e as colegas Flávia Peres e Fernanda Wanderley, esses últimos sempre se dispondo a ler o que eu escrevia com críticas necessárias, questionamentos importantes e sugestões imprescindíveis. Sem contar as horas de prosa que eram muito produtivas e de uma riqueza inenarrável.

Aos amigos Pablo e Zito, os mais antigos habitantes deste universo, que mesmo estando, alguns deles fisicamente separados por alguns quilômetros, sempre fluíam boas conversas, por e-mail e/ou telefonemas. Existia sempre a preocupação com o trabalho e o bem estar do outro, a preocupação de manter efervescente a amizade.

Meu pai, Jorge Nascimento, e os irmãos Nascimento: César, Mosa e Nereida. Cada um ao seu tempo e lugar, me incentivando e dando força.

A Antonio de Pádua Miranda Torres e Avalty Vilela que por mais que eu os agradeça, toda minha gratidão não retratará a dimensão do que sinto. Sem jamais esquecer de Amanda Benemérita Vilela Torres, um nome tão grande quanto é essa jovem que, na flor da juventude, consegue reunir uma maturidade e altruísmo tão grandes.

A Aguinaldo Alves Vilela e Antonio Emanuel Alves Vilela, que estiveram sempre presentes.

Rosimary Barros e família (Cacá, Matheus e Petra), por todo apoio dado a mim e a meus filhos, a todos nós.

E a todos àqueles que mesmo não tendo citado os seus nomes não significa que os tenha esquecido. Não os cito, simplesmente, por que aqui não caberiam todos os seus nomes.



## RESUMO

NASCIMENTO, J. C. do. **O conceito de limite em cálculo:** obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. 2003. 341 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2003.

O presente trabalho de tese de doutorado oferece subsídios no sentido de mostrar que as dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de noções referentes a *limites*, no âmbito do ensino superior de matemática (disciplina de cálculo), não estão associadas apenas à organização e elaboração dos conteúdos curriculares nesse nível de ensino, mas têm relação com outros aspectos. A análise de protocolos de resolução de problemas por estudantes de nível superior evidenciou três aspectos adicionais e interligados: (1) ausência ou a fragilidade do conhecimento de determinados conteúdos do ensino médio que são básicos para a disciplina referida; (2) inadequação de alguns dos modelos de representação que são usados pelos estudantes; (3) complexidade do campo conceitual abrangido pela noção matemática de limite, demandando integração com conceitos geométricos e a disponibilidade de uma metáfora conceitual adequada para a abordagem da referida noção. O presente trabalho de tese traz subsídios para a avaliação da importância de tais aspectos, de forma a contribuir para uma melhor clarificação dos obstáculos ao ensino e aprendizagem do conteúdo em tela, e propor encaminhamentos eficazes para a evolução de propostas didáticas para a sua abordagem.

**Palavras-chave:** Campo Conceitual de Limite. Cálculo Diferencial. Matemática no Ensino Superior.

## ABSTRACT

NASCIMENTO, J. C. do. **The limite concept at cálculo:** obstacles and difficulties of learning at the mathematics undergraduate level context. 2003. 341 f. Thesis (Doctoral) – Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2003.

The research work developed in this doctorate thesis offers empirical elements in order to show that difficulties inherent to the process of teaching and learning the mathematical notion of *limit*, at undergraduate level, cannot be limited to aspects related to pedagogical management of curricular topics. Protocol analysis of problem-solving protocols showed that these difficulties are related to three more important and interconnected aspects: (1) lack (or conceptual fragility) of previous mathematical notions, upon which mathematical notion of limit need to be built; (2) inadequacy of some of the most common representational models used by the students when they are dealing with limits; (3) finally, the complexity of the conceptual field of limit, which claims for integration with geometrical concepts, and also the availability of a functional conceptual metaphor. The present thesis offers empirical data in order to evaluate the isolated and coordinated importance of these aspects, in order to derive some valuable pedagogical consequences for the improvement of mathematical education at undergraduate level.

**Key words:** Conceptual Field of Limit. Differential Calculus. Mathematics Education at Undergraduate Level.

## SUMÁRIO

|                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>APRESENTAÇÃO</b> .....                                                                            | 14 |
| <b>CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO</b> .....                                                                  | 17 |
| 1.1. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA.....                                                                      | 17 |
| 1.2. JUSTIFICATIVA.....                                                                              | 27 |
| 1.3. OBJETIVOS .....                                                                                 | 28 |
| <b>CAPÍTULO 2: ABORDAGEM PSICOLÓGICA DA CONCEPTUALIZAÇÃO</b> .....                                   | 30 |
| 2.1. CONSIDERAÇÕES ACERCA DO CONCEITO COMO CONSTRUTO<br>TEÓRICO EM PSICOLOGIA COGNITIVA .....        | 30 |
| 2.2. CONCEPTUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA .....                                                            | 38 |
| 2.3. CAMPO CONCEITUAL DE LIMITE .....                                                                | 51 |
| 2.3.1. Breve introdução à história do cálculo .....                                                  | 52 |
| 2.3.1.1. O conceito de limite na antiguidade: considerações acerca de<br>número, área e volume ..... | 53 |
| 2.3.1.1.1. Geometria Egípcia e Babilônia.....                                                        | 53 |
| 2.3.1.1.2. A Geometria Grega.....                                                                    | 54 |
| 2.3.1.1.3. Área e o Método de Exaustão.....                                                          | 59 |
| 2.3.1.1.4. Volumes de Cones e Pirâmides.....                                                         | 60 |
| 2.3.1.1.5. Arquimedes.....                                                                           | 64 |
| 2.3.1.2. Alguns séculos após os Gregos ao Cálculo moderno.....                                       | 68 |
| 2.3.1.3. Newton e Leibniz e os Fundamentos do Cálculo moderno.....                                   | 69 |
| 2.3.2. Elementos do Campo Conceitual: Limite de função .....                                         | 72 |
| 2.3.3. Principais Obstáculos referidos na Literatura .....                                           | 86 |
| 2.3.4. Dificuldades relacionadas ao ensino de cálculo:<br>pesquisas disponíveis.....                 | 92 |

### **CAPÍTULO 3: OBJETIVOS E MÉTODOS**

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1. OBJETIVO GERAL.....                                       | 101 |
| 3.2. PROCEDIMENTO .....                                        | 102 |
| 3.3. AS OBSERVAÇÕES EM SALA DE AULA.....                       | 104 |
| 3.4. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS REFERENTES À NOÇÃO DE LIMITE ..... | 107 |

### **CAPÍTULO 4: RESULTADOS.....116**

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 4.1 QUESTÕES E DADOS COLETADOS..... | 117 |
|-------------------------------------|-----|

### **CAPÍTULO 5: DISCUSSÃO .....**

285

### **CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO .....**

298

### **BIBLIOGRAFIA.....**

307

### **APÊNDICES.....**

315

### **ANEXOS .....**

331

## APRESENTAÇÃO

Para uma melhor sistematização das idéias e resultados discutidos neste trabalho de tese propôs-se uma distribuição em cinco capítulos. No Capítulo Um denominado de Introdução apresenta-se o problema que motivou a realização desse trabalho, bem como os objetivos estabelecidos, iniciando-se já aqui o exame das bases conceituais envolvidas na compreensão de limites, bem como de Cálculo Diferencial e Integral. O Capítulo Dois fornece subsídios para uma abordagem psicológica da conceptualização, discutindo três aspectos julgados fundamentais: a) uma abordagem mais geral a cerca do conceito enquanto construto teórico na Psicologia Cognitiva; b) especificidades do conceito em matemática; c) interesse da noção teórica de *campo conceitual*, tal qual proposta por Gérard Vergnaud (VERGNAUD, 1990), para a abordagem do conceito matemático de *limite*, discussão que procuramos enriquecer com levantamento do desenvolvimento histórico desse conceito, bem como com um levantamento dos trabalhos disponíveis na literatura acerca do tema em tela. O Capítulo Três refere-se à metodologia aplicada no desenvolvimento da pesquisa especificando o grupo de sujeitos-alunos, colaboradores que participaram dela, bem como os instrumentos e técnicas utilizados para obtenção dos resultados. No Capítulo Quatro aparecem os resultados propriamente ditos com a análise do conjunto de dados gerados na pesquisa, pelos seus participantes, que desembocaram no Capítulo Cinco no qual fazemos a discussão geral dos resultados encontrados nos dados gerados pelos sujeitos nas

sessões de resolução de problemas. No Capítulo Seis procuramos sistematizar conclusivamente as reflexões feitas sobre esses dados gerados, de forma a poder encaminhar respostas às nossas questões básicas de pesquisa, que foram: (1) Que tipo de construção conceitual é produzida pelo estudante de cálculo? (2) Quais as construções básicas dos alunos nas questões propostas relativas a limites? (3) Que obstáculos poderiam ser apontados no processo de construção conceitual realizado pelos alunos?

## **CAPÍTULO 1**

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

What's one and one one and one one and one one and one one and one one and one?

I don't know," – said Alice. "I lost count  
She can't do addition, – said the Red Queen.

- **Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*.**

Aqui e em qualquer outro contexto, nós jamais obteremos a melhor perspectiva das coisas se nós não as observarmos desenvolvendo-se a partir do início...

- **Aristóteles, *Política*.**

### 1.1. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo será abordado o problema que motivou este trabalho de tese e o porquê da necessidade de discuti-lo, os objetivos que se pretende alcançar culminando com a apresentação do plano de tese.

A minha convivência com o *cálculo diferencial e integral* vem desde 1980, quando aluno da disciplina de Cálculo I, durante a graduação no curso de Matemática na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Naquela época, era costume se fazer os chamados *provões* - provas que eram realizadas em um único dia, em horário pré-estipulado - em algumas unidades da UFBA, nas quais eram distribuídos os alunos dos cursos da área I (equivalente à área II, na Universidade Federal de Pernambuco - UFPE), que cursavam a disciplina Cálculo I. Essas provas eram formuladas por uma equipe de professores - que mudava a cada semestre -



pertencente ao Departamento de Matemática daquela Universidade. E, em geral, alguns poucos professores responsáveis por turmas da referida disciplina, no semestre em curso, que também faziam parte desta equipe.

Esse cenário contribuía, também, para um índice de reprovação considerável dos alunos matriculados na disciplina. Uma tentativa de remediação de tal situação, vigente até 1978, tornou obrigatório aos alunos da área um da UFBA, aprovados no vestibular e que haviam obtido média menor que sete em matemática, cursarem uma disciplina denominada de Matemática Zero, no seu semestre de ingresso. Nesta disciplina se fazia uma revisão dos conteúdos programáticos do segundo grau, numa tentativa de minorar as dificuldades que os alunos enfrentavam em Cálculo. Noutra tentativa mais recente de alterar esse quadro, ficou estabelecido pelo Departamento de Matemática daquela universidade que cada professor ficaria responsável pela elaboração e aplicação das suas provas. Dessa forma, apostava-se em resolver (ou pelo menos atenuar) os problemas das reprovações. Tais iniciativas, contudo, mostraram-se ineficazes: o problema permanecia e as reprovações continuavam.

Alguns anos depois, a partir de 1988, voltei a conviver com o problema da reprovação em Cálculo, agora na condição de docente da Faculdade de Formação de Professores de Jequié, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, onde fui igualmente responsável pelas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II.

Comecei então a perceber que o fenômeno da reprovação em cálculo não estava associado apenas à organização e elaboração dos conteúdos; a um programa de disciplina sobrecarregado; à estrutura das avaliações; ou à “falta de base” dos estudantes que chegavam a Universidade; cada vez mais me convencia que tais problemas tinham relação com o processo de aprendizagem das disciplinas

em questão. Esta trajetória contribuiu, assim, para delimitar um problema a ser investigado, no contexto do programa de doutorado em Psicologia da UFPE.

O contexto de investigação foi à área II desta Universidade, a disciplina escolhida Cálculo Diferencial e Integral I – código MA 026 - oferecida aos cursos da referida área, o tema a ser investigado a construção de significado do conceito de *Limite de função*, considerado como um conceito fundamental do cálculo (BARON, 1985/1974) – o primeiro ensinado em Cálculo I – importante na construção dos significados de outros conceitos em cálculo, como por exemplo, os de *derivada*, *integral* e *continuidade*, e no estudo da *análise real* (BOYER, 1949/1959; EDWARDS, 1979; RUSSEL, 1981; BARON, 1974/1985; BOYER & MERZBACH, 1989/1968; CORNU, 1991; WILLIAMS, 1991).

A primeira preocupação residiu em verificar se o fenômeno ligado à reprovação ocorria com uma incidência alta nos cursos da área aludida. Para isso recorreremos à verificação dos dados estatísticos das notas de Cálculo Diferencial e Integral I da referida área, que estavam disponíveis na UFPE.

Conseguimos ter acesso aos dados do período de 1997 a 1999 e pudemos observar que em todos esses anos existiam casos de reprovação que chegavam a cem por cento da turma, como foi o caso, por exemplo, de Química/Bacharelado e Física/Licenciatura no segundo semestre de 1997.

Os reprovados são separados em duas classes, a dos reprovados (por média) e a dos reprovados por falta. Assim como os aprovados são classificados em aprovados por média e os aprovados (aqueles que são aprovados após o exame final). Juntando-se as reprovações e as reprovações por falta, o índice total de reprovação nos cursos da área II, em cálculo Diferencial e Integral I, chega a atingir, em alguns casos, mais de cinquenta e cinco por cento (>55%) dos alunos, ficando o

índice total de aprovados com menos de quarenta e cinco por cento ( $< 45\%$ ), como aconteceu no primeiro semestre de 1999, (PROACAD/UFPE, 1999). No entanto, há matérias em que o índice total de aproveitamento no mesmo período chega a mais de setenta por cento ( $>70\%$ ) como é o caso de Física Geral 4 (PROACAD/UFPE, 1999).

É possível observar que ainda é bastante significativo, o índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, conforme se depreende da leitura de tais índices (PROACAD/UFPE, 1999).

A área II da UFPE abrange dezoito cursos de graduação, conforme resumido no quadro 1 abaixo.

| <b>Centro</b> | <b>Curso</b>                | <b>Vagas</b> | <b>1ª Entrada</b> | <b>2ª Entrada</b> |
|---------------|-----------------------------|--------------|-------------------|-------------------|
| CTG           | Engenharia Cartográfica     | 30           | 30                | -                 |
| CTG           | Engenharia Civil            | 120          | 60                | 60                |
| CTG           | Eng. Elétrica/Eletrônica    | 80           | 40                | 40                |
| CTG           | Eng. Elétrica/Eletrotécnica | 100          | 50                | 50                |
| CTG           | Engenharia Mecânica         | 80           | 40                | 40                |
| CTG           | Engenharia de Minas         | 40           | 20                | 20                |
| CTG           | Engenharia de Produção      | 40           | 40                | -                 |
| CTG           | Engenharia Química          | 90           | 45                | 45                |
| CTG           | Geologia                    | 25           | 25                | -                 |
| CTG           | Química Industrial          | 40           | -                 | 40                |
| CCEN          | Física/Licenciatura         | 30           | -                 | 30                |
| CCEN          | Física/Bacharelado          | 30           | 30                | -                 |
| CCEN          | Matemática / licenciatura   | 40           | -                 | 40                |
| CCEN          | Matemática/Bacharelado      | 30           | 30                | -                 |
| CCEN          | Estatística                 | 30           | 30                | -                 |
| CCEN          | Química/Licenciatura        | 30           | -                 | 30                |
| CCEN          | Química/Bacharelado         | 20           | 20                | -                 |
| CIn           | Ciência da Computação       | 100          | 50                | 50                |
|               | <b>TOTAL</b>                | <b>955</b>   | <b>510</b>        | <b>445</b>        |

**Quadro 1:** Distribuição dos cursos da área II de acordo com o Centro, e total de vagas por ano e por período.

Esses cursos recebem anualmente 955 estudantes (510 no primeiro semestre e 445 no segundo semestre), que entram através de concurso vestibular, e são distribuídos conforme reproduzido acima.

Os estudantes desses cursos, na sua maioria, lidam com quatro

disciplinas de cálculo (Calculo Diferencial e Integral I, II, III, IV) ao longo do curso, como obrigatórias do ciclo geral de formação acadêmica, oferecidas em quatro semestres consecutivos, cada um deles com 60 horas, perfazendo uma carga horária total de 240 horas. No caso específico da primeira de tais disciplinas, Cálculo Diferencial e Integral I, que é oferecida no primeiro período, são recobertos cinco conteúdos básicos: (1) *Limites e Continuidade*, em que é apresentada a definição de limite; limites laterais; propriedades operatórias dos limites; Teorema do Confronto e Teorema do Valor Intermediário e; definição de função contínua; (2) *Derivadas*, em que se aborda a questão da existência da derivada; regras de derivação; derivadas de funções trigonométricas; derivadas de funções compostas, implícitas e inversas; (3) *Estudo da variação das funções*, abrangendo o Teorema do Valor Médio; intervalos de crescimento e decrescimento; concavidade e pontos de inflexão de uma função; (4) *Integrais*, abordando-se a primitiva de uma função; integral definida; o Teorema Fundamental do Cálculo; o cálculo de áreas e (5) *Os métodos de substituição e por partes*, dentre alguns dos métodos utilizados para se determinar a primitiva de uma função.

Um dos objetivos de ser colocado o Cálculo Diferencial e Integral I nos cursos da área II, conforme Lachini (2001) é que o ensino-aprendizagem desta matéria estabeleça condições para o estudante poder utilizar as idéias ali contidas como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas.

O conteúdo a ser ensinado (como vimos acima) pelo professor constará basicamente de um número de teoremas (alguns dos quais já foram citados), a serem provados em aulas expositivas, ministradas durante os semestres letivos, utilizando-se de um amplo formalismo com aplicações desses teoremas a tópicos em matemática e em outras situações, como citado por Lachini (2001).

É exigido desse estudante: a aprendizagem de um conceito formalizado, substanciado com propriedades, teoremas e definições; a aquisição de uma atitude matemática própria dos matemáticos profissionais; atitude e natureza investigativa; a construção de novos objetos mentais compatíveis com o novo conhecimento científico, envolvendo intuição e abstração de propriedades específicas e sua aplicabilidade a qualquer tipo de objeto, abstrato ou não.

De certo, o que se sabe é que durante esse ciclo geral nas 240 horas de Cálculo Diferencial e Integral, os estudantes da área II convivem com o conceito de limite e com a metáfora do infinito, explicitamente abordado no Cálculo Diferencial e Integral I nas duas primeiras Unidades, e implicitamente nos outros Cálculos.

Retomando ainda a discussão sobre os índices de reprovação em Cálculo I ressalte-se que os setores competentes desta Universidade não ficaram omissos em relação a esta questão – já que este problema vem ocorrendo há alguns anos –, tanto que em 1992 o Professor Armando José Pessoa Cavalcanti, do Departamento de Matemática, Coordenador da Área II (na época), coordenou um evento chamado *Curso de Pré-Cálculo*, com carga horária de quarenta e cinco horas, realizado no período de dezessete de fevereiro a treze de março daquele ano, e permanece até os dias atuais (*sic*), trazendo por justificativa:

Dotar os Alunos recentemente aprovados no Concurso Vestibular para esta UFPE/Área-II de uma base mais sólida em seus conhecimentos de Matemática, de modo a acompanhar mais eficientemente os cursos de Cálculo I, Geometria Analítica e Física I. Também despertar e incentivar vocações para essa nova fase acadêmica e, em particular, a Iniciação Científica.

Por objetivo geral:

Suprir possíveis deficiências de base visando dar uma melhor formação ao aluno recém-aprovado no vestibular e, sobretudo, para que ele possa acompanhar de forma satisfatória os cursos de Cálculo I, Geometria Analítica e Física I, melhorando os índices de aprovação vigentes nessas disciplinas.

E, por objetivo específico:

Fazer com que o aluno tenha um bom domínio das técnicas utilizadas para resolver equações e inequações (polinomiais, trigonométricas, etc.), inseridas num contexto mais amplo, digamos, estudando funções polinomiais, racionais, trigonométricas e inversas.

Como atividades propostas a serem desenvolvidas

Aulas teóricas/práticas via quadro e giz com professor responsável mais aulas de reforço com alunos assistentes. Serão mantidas atividades extra-classe visando motivar os alunos e despertar neles interesse pela matemática.

Os métodos e técnicas empregadas para o desenvolvimento do referido curso constavam de “Aulas expositivas (via quadro negro) e aulas práticas com resolução de exercícios”.

No referido curso ocorria o processo de avaliação da aprendizagem dos conteúdos e essa se dava levando em consideração: “Frequência mínima de 75% da carga horária total + testes diários com Alunos assistentes + testes semanais com professor responsável”.

O Conteúdo Programático era distribuído conforme mostra a tabela abaixo

| <b>ASSUNTOS/UNIDADES/DIDÁTICAS/MÓDULOS</b>                                                           | <b>CARGA HORÁRIA</b> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1ª Unidade: Funções polinomiais. Equações Algébricas. Inequações. Frações Parciais.                  | 15 horas             |
| 2ª Unidade: Funções Trigonométricas. Definições e gráficos. Identidades Trigonométricas. Inequações. | 15 horas             |
| 3ª Unidade: Funções Inversas e Aplicações.                                                           | 15 horas             |

**Quadro 2:** Conteúdo programático com a respectiva carga horária do curso de pré-cálculo.

O objetivo principal dessa pesquisa não é esmiuçar a fundo as razões índices de aprovação/reprovação dos estudantes de cursos da área II, na disciplina referida. O que se pretende é investigar os elementos que se constituem em obstáculos à construção dos conceitos em Cálculo Diferencial e Integral, especificamente o conceito de Limite.

Nesse aspecto, diversas questões poderão ser presumidas como responsáveis por causar obstáculos na aprendizagem dos conteúdos de Cálculo, por parte do estudante. Podem-se citar algumas: (1) A ausência ou a fragilidade do conhecimento de alguns conteúdos do ensino médio que são básicos para a disciplina referida; (2) Ensino carregado de formalismo com ênfase nos aspectos sintáticos e no uso de algoritmos (ALIBERT & THOMAS, 1991) que exigem do estudante um padrão de provas rigorosas; (3) Programa de disciplina muito denso exigindo do estudante pouco tempo para absorver conceitos formais e abstratos (ROBERT & SCHWARZENBERGER, 1991); (4) A presença de crenças culturais (conhecimento centrado no professor; o professor é o especialista do conhecimento; o cálculo é uma matéria difícil; o cálculo é complexo); e normativas (o ensino de cálculo é para formar inteligências e instrumentalizar os futuros profissionais; ensino pautado no tripé, definição, teorema, demonstração); (5) O uso de metáforas em conceitos e propriedades, como por exemplo, a metáfora do conceito de infinito (LAKOFF & NÚÑEZ, 2000; MONTEIRO, 2003); (6) A construção dos significados dos Conceitos de Limite de Função.

As metáforas são mecanismos cognitivos que pertencem ao domínio do pensamento e por isso são partes essenciais do pensamento matemático. Quando o pensamento matemático faz uso da metáfora conceitual, apóia-se em processos cognitivos que nos permiti raciocinar sobre um tipo de coisa, geralmente mais “familiar”, em alusão à outra, mais formal e menos corriqueira, possibilitando a compreensão de novos conceitos em termos de conceitos prévios familiares. Um exemplo disso é a assimilação dos números da série numérica a pontos sobre uma linha, conforme discutido por Lakoff e Núñez (2000). Outro exemplo é a noção de vizinhança de um número  $x$  (muito usada em Cálculo) como sendo todos os

números  $(x - \delta, x + \delta)$ , no qual  $\delta$  é um número que será muito pequeno, tão pequeno quanto se queira.

Tendo em vista os aspectos acima ressaltados, o caminho escolhido nessa pesquisa foi à investigação do processo de conceptualização referente à noção básica de limite, em termos notadamente de elucidação de conceitos-chave participantes deste *campo conceitual* (VERGNAUD, 1990), de forma a se avançar na compreensão dos obstáculos e dificuldades didáticas inerentes ao ensino-aprendizagem de tal conteúdo.

O exame da literatura disponível acerca do ensino e aprendizagem de cálculo evidenciou certa diversidade de ênfases: (1) O interesse sobre o desenvolvimento da percepção, de estudantes de graduação em química, sobre os conteúdos de Integração através do uso de programas de computador (KENT & STEVENSON, 1999); (2) O uso de modelos teóricos para o estudo de limite, com o intuito de provocar nos estudantes mudanças nos modelos que eles constroem sobre o tema (WILLIAMS, 1991); (3) O interesse na elucidação dos obstáculos epistemológicos relacionados ao conteúdo de limite (SIERPINSKA, 1985 e 1987); (4) A emergência de conflitos cognitivos gerados pela diferença entre o conceito formal, de limite e de continuidade, e o conceito imagem. Conceito este que corresponde a toda estrutura cognitiva na mente do indivíduo que está associado com um dado conceito, (TALL & VINNER, 1981); (5) A comparação do entendimento sobre limite de alunos submetidos a dois tipos de currículos de matemática, um currículo denominado Curso de Cálculo Tradicional (TRAD) e o outro denominado curso tecnológico, de Calculus & Mathematica (C & M) (MEEL, 1998); (6) Estudo realizado com estudantes universitários franceses, que irão especializar-se posteriormente em matemática, física ou química, do processo de aquisição da noção de convergência



de séries numéricas que fazem parte de um campo conceitual essencial dos fundamentos da análise matemática, campo compreendendo os conceitos relativos às funções numéricas, a convergência e os limites (ROBERT, 1982); (7) O interesse em investigar o processo de aprendizagem de cálculo, de estudantes de cursos de Engenharia de uma universidade brasileira, observando-se as concepções e estratégias de aprendizagem matemática utilizadas ao lidarem com questões de cálculo integral (FROTA, 2002); (8) Verificar os principais obstáculos que aparecem na transição do Cálculo para a Análise Real, entre estudantes de matemática de uma universidade brasileira (PINTO, 2001); (9) O olhar sobre a sala de aula como espaço onde se estabelecem as relações entre professor e aluno, sujeitos do fazer pedagógico, e lugar em que chegam diversas formas de capital social (LACHINI, 2001).

Tomando-se por referência algumas dessas pesquisas, já mencionadas acima e outras que serão citadas à medida que prosseguirmos, o que se pretendeu neste estudo foi olhar, no contexto do processo de aprendizagem, dos alunos, a diáde construção de significados dos conceitos de limite de função, em cálculo - construção do conhecimento em cálculo. Ou seja, buscou-se verificar em que aspecto obstáculos de natureza epistemológica e/ou psicológica que apreçam no processo de construção dos conceitos de limite de função, do estudante - sujeito epistêmico -, impossibilitava (ou não) o processo de construção de significados do conceito de Limite em Cálculo.

Daí pretendeu-se observar algumas turmas de Cálculo do primeiro período, de cursos de tecnologia e geologia, da área II da UFPE, durante o segundo semestre letivo de 2001, com o propósito de posteriormente verificar os significados de expressões ou palavras que aparecem nos argumentos dos estudantes

investigados, tanto do ponto de vista da sua produção oral como da sua produção escrita, que influenciam na formação do conceito de limite, ou seja, verificar qual a natureza dos obstáculos que aparecem no seu conteúdo teórico.

Para a melhor compreensão de como os alunos aprendem o conteúdo referenciado, é preciso apreender como se dá o processo de aprendizagem do conceito de limite, construído individualmente por eles, no processo de resolução de problemas.

## **1.2. JUSTIFICATIVA**

A importância desta pesquisa reside no fato que, encontrando-se a(s) possíveis causa(s) que inviabiliza(m) (ou que provoca(m) dificuldade(s) em) o processo de aprendizagem dos conceitos de limite em Cálculo, por parte dos estudantes pesquisados, refletir e propor medidas que possibilitem minorar os efeitos desse(s) fator(es) que trazem prejuízos ao processo de aprendizagem.

Estudos realizados sobre o ensino-aprendizagem em cálculo (TALL & SHLOMMO, 1981; TALL & VINNER, 1981; SIERPINSKA, 1987; WILLIAMS, 1991; BITTENCOURT, 1998; MEEL, 1998; KENT & STEVENSON, 1999) têm contribuído para mostrar diversos aspectos de natureza cognitiva que estão envolvidos no desenvolvimento do conceito do conteúdo aqui tratado e como esses aspectos têm (ou não) contribuído no processo de aprendizagem desse conteúdo dos cursos da área de ciências exatas – da sua importância inclusive no processo de aprendizagem de outros campos conceituais, como por exemplo: derivadas e integrais, como de outras áreas como a de Análise matemática.

Nesse sentido, esse estudo poderá trazer contribuições para o processo

de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, à medida que abre possibilidades para aprofundar a compreensão acerca das dificuldades relacionadas à aprendizagem da noção de *limite*, com desdobramentos possíveis para os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral.

### 1.3. OBJETIVOS

Na proposição deste trabalho, tinha-se a compreensão de que a questão referente à aprendizagem do conteúdo de *Limite* em *Cálculo* e, por assim dizer, a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral, não é apenas de ordem didática ou normativa. Há algo mais, de uma outra ordem – aspectos subjetivos - que fogem à percepção dos pesquisadores quando estes se detêm apenas nos aspectos estritamente pedagógicos (didáticos, históricos e epistemológicos) e normativos. Há, também, elementos subjetivos inconscientes (que não serão discutidos aqui) que transcendem essa dimensão consciente, isto é, do conhecimento enquanto efeito estritamente da inteligência.

Elegeram-se assim como foco principal para investigação os aspectos pedagógicos (incluindo-se os psicológicos e os culturais) e normativos envolvidos na aprendizagem de limites. Procuramos explorar a fundo a presença desses aspectos, nos discursos e protocolos de resolução de problemas de um grupo de alunos de Cálculo que selecionamos para estudo.

## **CAPÍTULO 2**

## **CAPÍTULO 2**

### **ABORDAGEM PSICOLÓGICA DA CONCEPTUALIZAÇÃO**

Este capítulo está dividido em três seções e quatro subseções percorridas a partir de considerações acerca do conceito como construto teórico em psicologia cognitiva, quando discutimos e apresentamos reflexões à cerca da importância do conceito na construção do conhecimento. Ao passarmos para a discussão do papel da conceptualização em Matemática essa discussão volta-se para o papel das contribuições sócio-culturais no desenvolvimento conceitual em matemática em conjunção com os invariantes operatórios, a articulação interconceitual, e o sistema de representação nessa construção do conceitual. Afunilamos em seguida a discussão para o conteúdo matemático *Limite de Funções Reais a uma variável real*, buscando delimitá-lo como um campo conceitual.

#### **2.1. CONSIDERAÇÕES ACERCA DO CONCEITO COMO CONSTRUTO TEÓRICO EM PSICOLOGIA COGNITIVA**

O desenvolvimento dos conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar (VYGOTSKY, Pensamento e Linguagem)

Normalmente, quando se está investigando um objeto cognoscível, o que se pretende é encontrar um processo que permita a previsão, a descrição e a

classificação deste objeto seja ele concreto ou abstrato; universal ou individual; próximo ou distante; que tenha significado geral; e que possa ser comunicado. Nesse processo, o **conceito** é um instrumento fundamentalmente importante.

Sendo assim, ao se investigar acerca do conceito na construção do conhecimento, torna-se necessário examinar os seguintes aspectos: (1). O princípio da invariância que, do ponto de vista psicológico, constitui-se numa espécie de a priori funcional do pensamento numa interação entre os fatores internos de desenvolvimento e as condições externas da experiência, (PIAGET, 1975); (2). A teoria dos campos conceituais, que nos permite analisar a conexão dos conceitos a invariantes operatórios e a relação entre estes invariantes implícitos e os conceitos como conhecimentos explícitos nas condutas do sujeito em situações, (VERGNAUD, 1997); (3) A inferência mental cuja abrangência específica está localizada entre os aspectos definidores da estrutura matemática de um modelo e as suas relações sistêmicas (DA ROCHA FALCÃO, 1996).

O que é importante observar é que cada uma dessas alternativas conceituais apontadas no parágrafo anterior remete à idéia da *generalidade* do conceito. Tal generalidade pode ser referida a uma classe de abrangência específica, onde podem ser reunidos objetos diversos, porém compartilhando características que os unem sob uma tal classe, a qual por sua vez pode tornar-se membro de outra classe mais abrangente, até alcançar uma classe que a tudo abarca, conforme proposto inicialmente por Aristóteles, discutido em Cassirer (1977). Tal perspectiva taxonômico-hierárquica da conceptualização baseia-se no estabelecimento de uma grande divisão taxonômica, a qual, por sua vez, firma-se no reconhecimento da existência de relações de parentesco entre os elementos constituintes de uma mesma categoria.

Essa classificação permiti reunir tais elementos em conjuntos, os quais por sua vez se organizam em níveis hierárquicos, como se pode depreender do exame do modelo de organização zoológica, por exemplo: Espécie/(SubEspécie) ↔ Gênero/(SubGênero) ↔ Família/(SubFamília) ↔ Ordem/(SubOrdem) ↔ Classe/(SubClasse) ↔ Divisão/(SubDivisão) ↔ Reino, que são as principais categorias em sucessão ascendente quanto à abrangência.

Vejamos o que se quer dizer por generalidade, tomando-se, por exemplo, as figuras geométricas planas, e em particular as figuras fechadas convexas, destacando-se os polígonos e, mais especificamente os quadriláteros.

Observando-se a árvore conceptual apresentada no diagrama 1 abaixo, pode-se ter uma idéia de complexidade conceptual; e de como a diversificação e a ordenação têm relação com a identificação, a classificação e a nomenclatura dos polígonos. A identificação consistindo em se fazer à indicação nominativa da figura plana após ser verificada sua equivalência com outra figura conhecida ou previamente denominada, sendo feita tal identificação ao nível de espécie ou mesmo de variedade. Já a classificação trata de agrupá-las e ordená-las em categorias segundo características afins e/ou propriedades. Finalmente a nomenclatura designa os polígonos aos grupos ou às categorias em que estão organizados.

O princípio é o de facilitar a compreensão conceptual do objeto nas suas características, devido às suas propriedades específicas, ganhando-se abrangência (e, portanto perdendo-se especificidade do conceito) ao realizarem-se movimentos ascendentes ou descendentes na árvore conceptual taxonômica.

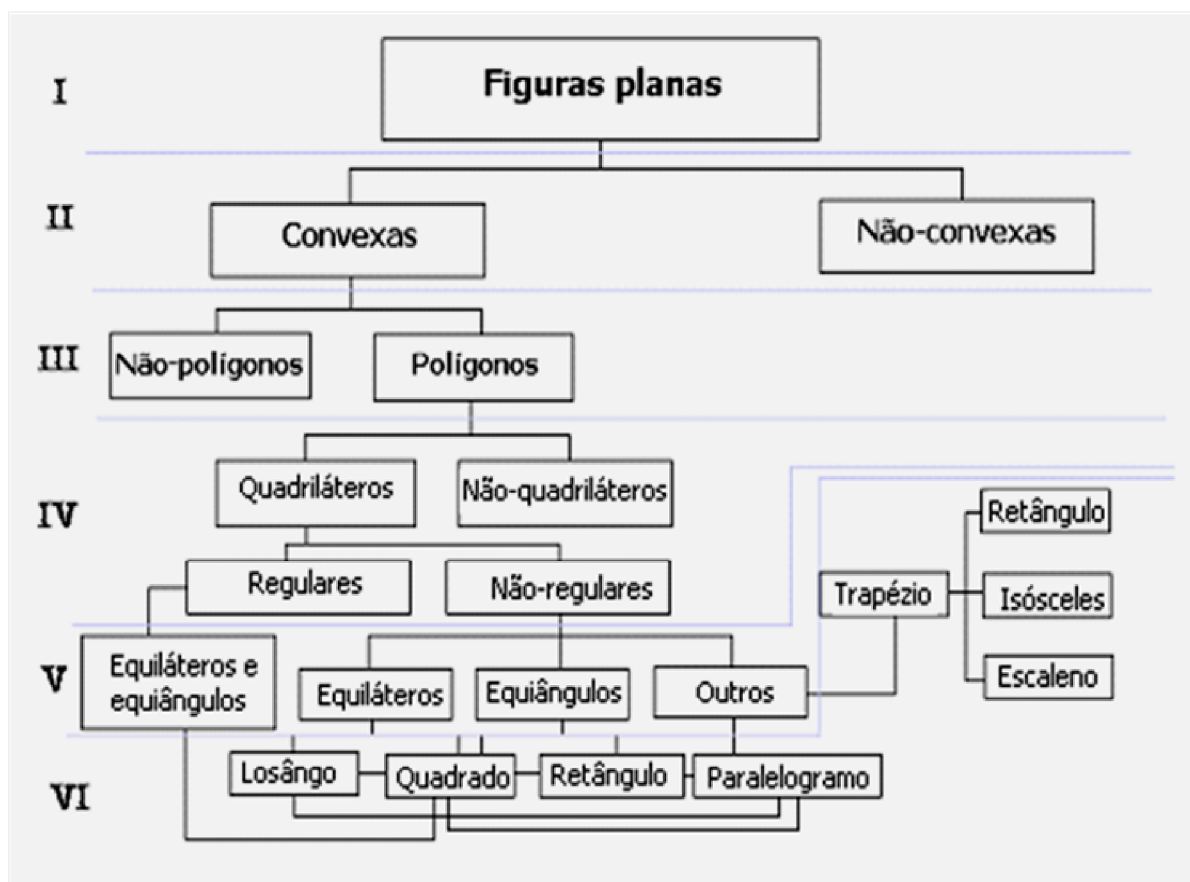


**Diagrama 1.:** Modelo conceitual taxonômico das figuras planas, baseado em categorias hierárquicas.

No modelo acima - no nível seis -, os quadriláteros são modelizados segundo propriedades consideradas cruciais - os elementos constitutivos: lados paralelos congruentes ou não; ângulos congruentes ou não; bases; diagonais e a relação entre estes elementos, isto é, têm-se todas as propriedades descritoras do quadrilátero. As relações entre as qualidades – lados paralelos congruentes, por exemplo -, dos objetos, de acordo com Piaget (1975, p.33), desembocarão num sistema de classificação, e esta classificação por sua vez determinará sucessões de inclusões hierárquicas que venham a implicar nas lógicas das classes e das relações simétricas, por exemplo, a classe dos paralelogramos implica em quadriláteros com lados paralelos congruentes e ângulos opostos aos lados paralelos também congruentes.



Ter os quatro lados congruentes implica uma outra classe, a dos losangos, que contém a classe dos quadrados, que estarão hierarquicamente incluídas na dos paralelogramos.

Tomemos por exemplo o trapézio. O que se pode afirmar acerca desse quadrilátero quando nos referimos aos lados: que tem dois lados paralelos que formam as bases - um lado denominado de base maior e outro de base menor – e dois lados não paralelos. Com relação aos lados não paralelos o trapézio pode ser: isósceles - os lados, não paralelos, têm a mesma medida -; escaleno - os lados não paralelos possuem medidas diferentes - e; retângulo - um dos lados não paralelo forma ângulos retos com as bases -. Dadas às propriedades ressaltadas, do quadrilátero em questão, pode-se falar então em trapézio isósceles, trapézio escaleno e em trapézio retângulo, respectivamente. Portanto, tem-se a liberdade de se referir ao quadrilátero em estudo pelas propriedades que lhes caracteriza, ou pela denominação dada a este, sem correr o risco de hesitação na identificação deste, quando falado. Isto por que, cada quadrilátero guarda uma relação direta com suas propriedades e, estas são consideradas propriedades definidoras do quadrilátero.

Ascendendo na árvore conceitual, indo para uma posição imediatamente superior, nível cinco, ainda encontramos alguns “galhos” interconectados. Esta é uma categoria formada pela reunião de determinadas espécies de quadriláteros, cujo relacionamento não se baseia somente nos caracteres relacionados à forma, mas também em particularidades de outra natureza, como as ligadas, por exemplo, à medida dos lados e/ou dos ângulos. Em geral o gênero, na árvore conceitual zoológica, não se apresenta constituído por uma só espécie. Aqui, neste nível do presente modelo, surgem os quadriláteros: eqüiângulos (ângulos congruentes); eqüiláteros (lados congruentes); e os que não atendem a nenhuma dessas duas

características. Tem-se aí um grau de generalidade conceitual maior que o do nível anterior (nível seis). Continuemos com o exemplo do trapézio, ele é um quadrilátero não regular, o que assegura que ele não é equilátero e nem equiângulo. No entanto, quando se fala de “trapézio” não se tem assegurado a qual tipo de trapézio está se fazendo alusão, ou seja, perdemos as características específicas, por exemplo, referentes aos lados não paralelos (isósceles ou escaleno).

Quando nos referimos a outros quadriláteros, que não o trapézio, teremos propriedades que são comuns a mais de um quadrilátero e que não permitirá uma identificação precisa desse, se nos referirmos à classe. Por exemplo, o quadrado é um retângulo por que tem todas as propriedades do retângulo, ou seja, os quatro ângulos retos e, portanto congruentes (equiângulo) e lados paralelos congruentes. E, por possuir, os lados paralelos congruentes e necessariamente ângulos opostos congruentes, é um paralelogramo. Portanto um quadrado é um retângulo e é um paralelogramo.

Subindo mais ainda na árvore, alcançamos o nível quatro – família. Esse nível conceitual é mais geral, baseado em referência exclusiva aos lados, ângulos e vértices.

Passando ao nível três a generalidade conceitual é ainda mais geral em relação ao nível 4, já que polígono é qualquer figura plana convexa com número de lados maior que ou igual a três, e, portanto, se enquadram nessa categoria também os quadriláteros (regulares e não regulares), e dentre os não regulares os trapézios.

Finalmente ao se alcançar o topo da pirâmide (nível um) alcança-se o último nível geral de abstração conceitual da presente categorização, chegando-se ao que Cassirer denomina de “super conceito” (CASSIRER, 1977). De fato, figura plana é qualquer figura bidimensional convexa ou não abarcando todas as

possibilidades descritas nos níveis anteriores.

No contexto de uma classificação conceitual taxionômica hierárquica, pode-se, segundo Cassirer (1977), passar do nível mais baixo de especificação de um objeto àquele próximo do mais alto nível e vice-versa. Esse movimento de ascensão à generalidade e descida à especificidade permite a exploração de vários níveis de formulação de um conceito, de acordo com o contexto de utilização do mesmo.

Essa forma de distribuição abstrata em que se organizam os conceitos num movimento ascendente da base ao topo, e no sentido inverso, Cassirer atribuiu originariamente a Aristóteles, tendo denominado tal perspectiva aristotélica acerca da conceptualização de “*pirâmide ou árvore conceitual*”.

Cassirer ressalta ser essencial compreender que, nesse movimento ascendente e descendente ao longo da árvore conceitual, um conceito de nível superior não acrescenta inteligibilidade a outro conceito de nível inferior. Isso marca uma diferença fundamental em relação à perspectiva *modelizadora* da conceptualização: quando um modelo A passa a ser considerado mais abrangente que um modelo B, ele ressignifica B, que agora passa a ser um submodelo de A<sup>1</sup>. Assim, enquanto a perspectiva taxionômica diz respeito à busca de índices fenomênicos que descrevam níveis de classificação, a perspectiva relacional-modelizadora propõe modelos explicativos, não necessariamente fundados em tais índices, e sim em sistemas de explicação.

De acordo com a classificação hierárquica tradicional um objeto que aparece posicionado em um ramo da árvore taxionômica não pode ser reencontrado em um outro ramo distinto, da árvore. Já que a única possibilidade de encontro é

---

<sup>1</sup>É este o caso, por exemplo, da mudança de status, enquanto sistema explicativo, do paradigma newtoniano em face do paradigma relativístico-einsteiniano, do qual o primeiro passou a ser um caso particular.

ascendendo no nível de classificação na árvore de forma que elementos distintos só se reúnem num conceito maior de abrangência. Isto significa que, se tomarmos, por exemplo, um quadrado e um paralelogramo, um quadrado que é um quadrilátero regular – por ser equilátero e equiângulo, isto é, possui respectivamente lados congruentes e ângulos congruentes - somente poderia se “encontrar” com o paralelogramo na família dos quadriláteros, já que eles pertencem a gêneros e a subfamílias diferentes. Todavia, na prática, não é isso que acontece, visto que o quadrado por ter lados paralelos congruentes e, conseqüentemente, ângulos opostos congruentes é considerado também um paralelogramo. Enquanto paralelogramo pode ser igualmente considerado como membro da subfamília dos quadriláteros não regulares. Nestas condições um quadrado é um quadrilátero regular e um paralelogramo simultaneamente, o que contradiz a classificação taxionômica tradicional. Tal raciocínio mostra que a classificação conceitual hierárquica, tal qual proposta inicialmente e por Aristóteles tem limitações quando se trata de modelos complexos de interfiliação conceitual em matemática.

Podemos, portanto concluir que a maneira de representar um conceito varia, dependendo das nossas experiências anteriores, interesses e competências pré-conceituais, ou seja, *o nosso conhecimento é personalizado; é posto em nossos termos* (DAVID CARRAHER, 1988, em CARRAHER, SCHLIEMANN, CARRAHER, 1988, p.20). Por isso mesmo tem-se consciência de que a finalidade da educação não é o ensino de sistemas de classificação. Mas, qualquer que seja a orientação escolhida, o importante é que o aluno, enquanto sujeito epistêmico, agente do conhecimento, posicione-se na tentativa de apropriar-se das características de um objeto, aproximando-se ao máximo da sua estrutura global, quando este objeto for colocado em confronto com a sua experiência prévia, considerando a distância

cognitiva que esse sujeito guarda em relação a esse objeto.

Quando formamos o conceito de um objeto, segundo a perspectiva taxionômica aristotélica acima discutida, isolamos as propriedades comuns que são encontradas em outros objetos da mesma classe.

Contudo, a construção de conceitos não consiste simplesmente em selecionar, a partir de uma pluralidade de objetos postos diante de nós, as propriedades comuns a uma classe de objetos, enquanto negligenciamos o resto.

## 2.2. CONCEPTUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

A matemática como uma expressão da mente humana reflete a atitude a razão contemplativa, e o desejo por perfeição estética. Seus elementos básicos são lógica e intuição, análise e construção, generalidade e individualidade. No entanto diferentes tradições podem enfatizar diferentes aspectos, é somente a interação destas forças opostas e o grande esforço para suas sínteses que constituem a vida, utilidade, e supremo valor de ciência matemática. (COURANT & ROBBINS, **What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods**).

A Matemática não é, como muitos pensam, um sistema de conclusões retirados de definições e postulados, consistentemente criados ao bel prazer do matemático. O que ela, como qualquer outra ciência, busca é a eficácia dos modelos propostos e a consciência interna demonstrável entre premissas e deduções, tendo na intuição, na indução inferencial e na construção lógico-dedutiva suas forças motrizes e seus elementos de invenção construtiva.

Os antigos egípcios e babilônios construíram um corpo de conhecimentos matemáticos a partir das observações da natureza, embora esses conhecimentos tenham sido muito utilizados na resolução de problemas de outra espécie. Os gregos por sua vez, através de Tales, introduziram o sistema dedutivo bastante utilizado pelos primeiros Pitagóricos e por Platão que notaram que suas conclusões

obtidas por dedução concordavam em muitos aspectos com os resultados das suas observações e inferências indutivas. Embora para os primeiros a Matemática fosse revestida de religiosidade – perceptível no dito “Tudo é número” (BOYER, 1959; EDWARDS, 1979; BOYER, 1989) e na concepção desta como realidade eterna provindo da natureza e do universo – este se constituiu em uma ciência abstrata a partir destes. Pitágoras estabelece a relação proporcional entre o som e o comprimento da corda; classifica os números em pares e ímpares a partir das suas características e relações associando aos primeiros a forma geométrica retangular e aos últimos a quadrada, segundo o qual, *os ímpares são o princípio do Mesmo e os pares, do Outro*, (Cf. ABRÃO, 1999, p. 29).

Com Aristóteles e Euclides o padrão científico da Matemática vai se ampliando, o primeiro mostra que através da lógica se pode alcançar ao menos uma representação consistente do fenômeno e o segundo idealiza um padrão de relações dedutivas derivadas de postulados consistentes com os resultados da indução a partir de observações derivadas na interpretação da natureza.

Durante a idade média (séculos IX a XVII), observam-se alguns desenvolvimentos marcantes na história da matemática, com especial destaque para o uso da álgebra adotada dos árabes e amplamente desenvolvida na Itália no início do século XIII. Tal período histórico caracterizou-se igualmente pela disputa entre duas expectativas conceituais a visão Escolástica – caracterizada, sobretudo pela busca de relação entre a fé e a razão, representada pela perspectiva teológica cristã, para a qual o universo é bem organizado e simplesmente inteligível, e, no século XIV a posição referente à mudança da visão qualitativa de movimento e variação por o estudo quantitativo, conjuntamente com o restabelecimento do interesse na visão Platônica, o que produziu nos séculos XV e XVI uma renovação

da convicção de que a matemática era de alguma maneira independente do conhecimento empírico e intuitivo, o que marcou bastante as idéias de Kepler, Galileu e Leonardo da Vinci.

A concepção da Matemática como a base da arquitetura do universo foi sendo modificada e por volta dos séculos XVI e XVII ocorrem na ciência natural mudanças decorrentes do surgimento do método experimental da qual são adeptos e precursores Descartes e Boole. Já no século XVII a atenção se volta para a ênfase à aplicação do cálculo na resolução de problemas matemáticos e científicos sendo instaurado no século XIX a busca por uma atitude mais crítica e para encontrar fundamentos que satisfizessem a concepções envolvidas na nova análise do infinito.

O rigor matemático é revivido - isto porque, ao longo do século XVII a procura por resultados novos gerou uma maior concentração em métodos de descoberta, aderindo-se aos métodos diretos e intuitivos, que ocuparam lugar central, na resolução desses problemas, provocando um abandono temporário da estrutura clássica da demonstração dos gregos, principalmente as demonstrações de Arquimedes. O citado método permaneceu no século XVIII, aparecendo inclusive nos trabalhos de Newton e Leibniz – e próximo ao final do século XIX, como resultado da tendência aritmética na análise matemática ou “aritimetização da análise” (com a definição de quantidade como um número real e, não mais, como um conceito geométrico) que se tornou o estudo e manipulação de fórmulas influência do cálculo leibniziano – em que as fórmulas eram manipuladas independente de figuras e de interpretação geométrica -, e dos trabalhos de Cauchy e Weierstrass, dentre outros, descobriu-se que o conceito de infinito transcendia toda a intuição e análise e podia ser introduzido em matemática sem prejudicar a consistência lógica do assunto, (BARON & BOSS, 1985).

A aplicação do estudo da geometria analítica no século XVII e a representação sistemática da quantidade variável juntamente com a livre utilização do infinitésimo e a aplicação de conceitos numéricos tornaram possível o desenvolvimento dos algoritmos de Newton e Leibniz, que constituem a base para o cálculo. Todos os acontecimentos ocorridos ao longo dos séculos – desde os gregos até o século XIX –, as mudanças de paradigmas filosóficos; os descobrimentos; o desenvolvimento do comércio e das relações comerciais; a imprensa de Gutenberg; a revolução industrial; as grandes invenções; o Princípio da inércia de Galileu; a Mecânica Clássica de Newton; a Relatividade de Einstein; a Mecânica Quântica; a Mecânica Ondulatória de Louis de Broglie; a Física das Matrizes de Heisenberg; a Mecânica de Dirac; e outras contribuíram para o desenvolvimento e evolução da Matemática. Resultado direto, como diz Bachelard (1999), da evolução do fecundo espírito científico do ser humano. Mas, todo esse curso evolucionário da matemática resulta de todo um processo de aprendizagem, transmissão e evolução cultural cumulativa criando uma grande e poderosa rede cultural que vai ocupando lugar em um tempo histórico, resultado do trabalho não de um único indivíduo, mas de indivíduos ou grupo de indivíduos.

De acordo com Cassirer (1977), a filosofia contemporânea adquiriu situação nova em seu esforço de aproximar-se pouco a pouco no panorama de análise da linguagem e dos fundamentos da matemática escapando do seu procedimento por meio de conceitos para um procedimento por meio da construção de conceitos e dos fundamentos do saber teórico.

Essa manifestação surgiu com mais clareza na reformulação que esta filosofia contemporânea promoveu nas teses centrais da lógica formal. Uma vez que a teoria do conceito preconizada pela lógica tradicional não estava sendo capaz de



responder, com algum sucesso, aos problemas que conduziam à teoria dos fundamentos da matemática, ou seja, as questões que se estavam colocando não giravam em torno do que a filosofia podia contribuir para a matemática, mas que fossem “*conhecidas às partes mais científicas dos princípios da Matemática*”, (RUSSEL, 1981). Pois, a matemática enquanto ciência propunha questões para as quais a formalização lógica tradicional, definida, inicialmente, por Aristóteles como “*ciência da demonstração e do saber demonstrativo*” (ABBAGNANO, 1998). Só para se ter uma idéia do passo dado para essa reformulação foi, de acordo com Bertrand Russel, a natureza do infinito e da continuidade, que pertenceu durante muito tempo atrás à Filosofia, hoje, passou a pertencer à Matemática (RUSSEL, 1981). Ainda de acordo com Nicola Abbagnano, essas concepções perduram até a Idade Média, quando, a partir do século XIII, define-se na lógica medieval duas correntes, uma fiel à tradição realista, de tendência ontológica, a *via antiqua*, e a *via moderna* que desenvolve uma lógica em que os termos do discurso são considerados independentemente de qualquer hipótese metafísica sobre a existência real ou não de seu objeto.

Essas tendências perduraram até o início da Idade Moderna quando se começou a difundir a convicção de que os universais pertenciam mais à metafísica e à gnosilogia. Nos séculos XIV e XV a lógica passa por duas tendências, uma vê o objeto da lógica, para uns fatos mentais, e a segunda que assumia a posição de que a lógica não se trataria propriamente de atos mentais, mas de formas estruturais dirigidas intencionalmente para a constituição de conteúdos semânticos.

No século XVI diminui o interesse da lógica pelas estruturas formais do discurso dedutivo e cresce o interesse em favor de uma concepção pragmática e metodológica da ciência. A partir do início do século XVII ocorre uma reforma radical

promovida por Francis Bacon tentando conceber a lógica exclusivamente como metodologia científica. O desinteresse pelo formalismo lógico e o interesse por problemas gnosiológicos, psicológicos e metodológicos de uma lógica *utens* acentuaram-se durante os séculos XVII, XVIII e XIX (na Idade Moderna), tanto que a lógica passa a figurar em disciplinas filosóficas, ensinadas na escola. Até que no final do século XIX e início do século XX a lógica matemática é criada, tendo como seus precursores Frege, Peano e Russel e passa a ser constituída por duas disciplinas fundamentais: o cálculo proposicional e o cálculo das funções proposicionais.

A linguagem matemática tinha dois objetivos, o primeiro era constituir a disciplina matemática fundamental (defendida por Frege e por Russel), na qual todas as demais matemáticas seriam ramificações mais ou menos complexas, mas sempre com o mesmo material conceitual. E o segundo objetivo (defendido por Peano e desenvolvido posteriormente por Hilbert) era, constituir métodos de formulação rigorosa e de controle lógico das disciplinas matemáticas propriamente ditas (a axiomatização da matemática, a idéia de Hilbert era construir uma estrutura, tendo por base axiomas que seriam centrais, e a partir daí se construiria, segundo ele, todo edifício da matemática). Assim a lógica foi cindida em lógica formal analítica e lógica matemática que diferem, de acordo com o tipo de interesse teórico, na investigação lógica (ABBAGNANO, 1998).

E baseado-nos nesse procedimento da construção do conhecimento por meio da construção de conceitos e dos fundamentos do saber teórico que assumimos a postura de afirmar que o conceito matemático é a ferramenta utilizada quando o que se pretende é conhecer, prever, descrever, classificar, construir significado, de maneira que se possa comunicar e designar um objeto matemático.

Este conceito tem suas raízes calcadas na origem histórica do surgimento das civilizações, chinesa, egípcia, hindu e mesopotâmia (EDWARD, 1979, p.1), tendo evoluído ao longo desses cinco mil anos, de maneira que a Matemática se eleva da categoria de técnica utilizada para resolução de problemas de agrimensura à de ciência pura, abrangendo um conhecimento que continua em constante evolução.

Em geral, quando um matemático escreve a definição de um conceito ou quando descreve um objeto matemático, procura ser preciso e não redundante. Pois, o que o matemático pretende na sua atitude é tentar criar modelos os mais eficazes possíveis tanto do mundo físico como de mundos virtuais, com propriedades e regras procedurais pré-definidas contidas no objeto em estudo. Sendo assim não pode haver dúvidas quando se vai tratar de um objeto específico, pois todas as propriedades de um conceito do objeto em questão derivam da sua definição. Deste ponto de vista, Cassirer (1977) afirma que, os conceitos da ciência matemática exata encontram-se sobre o mesmo plano que os conceitos das ciências descritivas na ordem e na classificação dos dados.

Já, os psicólogos, principalmente os que lidam com a pesquisa em educação matemática, alertam para a diferença que há entre a definição matemática de um objeto e a definição psicológica de um conceito. Isto porquê, a nível psicológico, dependendo de nossas experiências anteriores, tem-se diferentes maneiras de olhar um conceito matemático. Assim, temos que os representantes dessas duas áreas de conhecimento vêem o objeto de diferentes maneiras, os psicólogos estendem-se nas teorias psicológicas para pensar o processo do domínio do conhecimento do ponto de vista mais complexo, e o matemático vai buscar nas idéias o processo criativo do pensamento (TALL, 1991).

Com base nesse princípio, Vergnaud (1997, p.5) reforça que esses

psicólogos, tentam entender como as diferentes representações lingüísticas e símbolos (o significante,  $R$ ), e os diferentes tipos de situações e competências (a referência  $S$ ) podem formar os conceitos matemáticos de maneira diversa. Ou seja, procuram observar dentro das aplicações dos conceitos, explicações e inferências de propriedades, feitas pelo indivíduo, e o conceito matemático de base que está associado àquele conceito. Dito de outra maneira procura observar se permanecem relações de semelhanças entre conceitos, se elementos se conservam e como se conservam (os significados,  $I$ ).

De acordo com Piaget, a conservação de alguma coisa é do ponto de vista psicológico, uma espécie de a priori funcional do pensamento (PIAGET, 1975, p.24). Levando-se em conta que, a conservação funciona como uma espécie de elo de ligação entre fatores internos de amadurecimento e as condições externas da experiência. Reforçando assim o princípio, segundo Vergnaud (1997), de que para esses psicólogos a definição psicológica de um conceito não pode se restringir à definição matemática deste, ou num sentido mais amplo que a definição psicológica de um conceito não pode ser reduzida à sua definição científica.

Porém, não se pode ignorar o grande papel desempenhado pelas palavras e símbolos no reconhecimento e na seleção dos objetos matemáticos, que contribuem na definição compreensiva de um conceito, na identificação de suas propriedades (os invariantes matemáticos) e de suas relações e; na elaboração progressiva de concepções diferenciadas explícitas.

O que remete a afirmar que um conceito não se aplica somente a uma situação, mas a diversas situações que dão significados a esse conceito (CARRAHER, 1988) e, por isso, mesmo o uso de um conceito requer alguma forma de representação seja para o uso próprio do sujeito ou para que este sujeito possa

se comunicar com outros. Nesse processo de comunicação, um conceito matemático pode aparecer representado de muitas formas, como por exemplo, através de gráficos, equações, ou através da linguagem natural. De maneira que, qualquer que seja a forma utilizada para representá-lo, ela sempre será somente uma das maneiras possíveis de representar um mesmo conceito. O que permite, de uma maneira clara, capturar os diferentes aspectos do conceito.

Pode-se dizer então, na perspectiva de Dreyfus que, representar um conceito é gerar casos, criar exemplos, produzir amostras e imagens dele. No entanto, essa descrição não é suficiente para especificar se o que foi gerado é simbólico ou mental, nem indicar o que a expressão “gerar” significa em termos dos processos pelos quais a representação mental herda a sua existência e nem como ela se desenvolve (DREYFUS, 1991).

Sob esse aspecto, uma representação simbólica, ao ser externada, é escrita ou falada, normalmente com o objetivo de comunicar o conceito mais facilmente. Já uma representação mental refere-se a esquemas internos ou as bases teóricas de referencia que uma pessoa utiliza para interagir com o mundo externo. Os símbolos sevem para influenciar na formação do conhecimento implícito de uma pessoa e envolvem relações entre signos e significados, e o significado para ser explicitado em termos de símbolos tem que estar associado com a idéia antes do símbolo para que essa idéia possa ser de algum uso (DREYFUS, 1991).

Tomando-se as perspectivas acima de Carraher e Dreyfus, com relação à representação de um conceito, podemos dizer então que uma mesma pessoa apreende em sua mente, simultaneamente, representações mentais variadas de um conceito. De fato, segundo Dreyfus, na mente de alguém pode existir uma simples representação de um conceito como, coexistirem competindo, diversas

representações mentais desse mesmo conceito que pode(m) ser resgatada(s) para responder a situações matemáticas diferentes.

Entretanto, estas diferentes representações podem também estabelecer conflitos, que podem ser favoráveis à medida que elas se complementam e se integram em uma simples representação daquele conceito, (DREYFUS, 1991). Ou, desfavoráveis quando se convertem em obstáculos, porque uma vez ancorados na mente do sujeito esses conceitos podem não ser mais satisfatórios ou adequados para resolver um novo problema (BACHELARD, 1938/1999). E, estes obstáculos podem ser de natureza cognitiva, surgindo a medida que o indivíduo empreende esforços para juntar idéias que contestam e contradizem o seu conhecimento vigente (TALL, 1991).

A matemática enquanto ciência pura ou aplicada; ou área de conhecimento; ou matéria; ou disciplina; ou componente curricular, no currículo da escola utiliza um sistema de símbolos para representar um objeto e/ou um fenômeno, para classificar e para comunicar, entre outras coisas. Através da representação, ações e comentários podem ser interiorizados, comunicados sem precisar de palavras; invariantes podem ser expressos e reconhecidos; teoremas e propriedades colocados em ação sem serem explicitamente enunciados.

Nesse sentido, Vergnaud admite que a representação é elemento decisivo no ensino-aprendizagem em matemática porque além da importância, do caráter universal, da sintaxe e da semântica que tem o seu sistema simbólico a matemática desempenha um papel fundamental na conceptualização do mundo real e emprega amplamente homomorfismos na redução de estruturas, (VERNAUD, 1987a).

De fato, as representações desempenham uma função muito importante

em matemática, principalmente na matemática moderna “*cujos símbolos são absolutamente indispensáveis*” (DREYFUS, 1991). Além disso “*o pensamento matemático é desenvolvido usando objetos mentais*” (HAREL & KAPUT, 1991). Isto é, funções, vetores (com duas, três ou n-coordenadas), espaços vetoriais, matrizes, permutações, tudo é tratado mentalmente como um objeto.

Uma representação mental em matemática, para ser formada, vai depender do sistema de representação utilizado. Para isto, podem ser utilizados, materiais concretos, artefatos materialmente desenvolvidos, funções, gráficos, fórmulas algébricas, diagramas, tabelas e outros modelos, pois, esses sistemas concretos de representação ajudam a criar as bases para essa representação mental, em matemática.

Ao falarmos em modelos referimo-nos a construção de uma estrutura ou de uma teoria matemática que possa incorporar as características essenciais do objeto, do processo ou do sistema que está para ser descrito. Do ponto de vista de Dreyfus, um modelo matemático tem um status de representação de uma situação e como tal pode ser usado para estudar o comportamento do objeto ou processo modelado, isto conduz a uma conexão entre um modelo e uma representação mental de maneira que a representação do objeto a ser representado é a estrutura matemática, e o modelo é a estrutura mental. Desta forma a representação mental está relacionada ao modelo matemático como o modelo matemático está relacionado ao sistema físico. No qual, cada um é uma interpretação parcial do outro e cada um reflete algumas propriedades do outro.

Todos esses elementos aqui mencionados – no que se referem ao conjunto de circunstâncias que permitam comprovar a utilidade e significado do conceito ( $S$ ), e às suas formas de representações ( $R$ ) - nos possibilitam percorrer

caminhos que nos ajuda entender como o conceito matemático se desenvolve no sujeito dentro e fora da escola. Contudo Vergnaud (1987, p.6) vai mais adiante propondo que além desses dois componentes já citados é imprescindível a identificação dos invariantes operacionais (*I*) que são utilizados pelos indivíduos no desenvolvimento de conceitos. Por isso ele considera um conceito (*C*) como um terno ordenado (ou 3-upla) destes três conjuntos, os dois conjuntos já citados – das situações que dão sentido ao conceito e o conjunto das formas lingüísticas e não lingüísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento e a terceira coordenada é o conjunto dos invariantes operatórios, representado pela letra *I*, no qual repousam a operacionalidade dos esquemas.

Os invariantes operatórios ocorrem numa tentativa de identificar através do uso de palavras, símbolos, propriedades e relações se o sujeito transpõe os conceitos acumulados, de uma seleção de objetos matemáticos, que sejam relevantes para outros objetos de mesma natureza ou não.

Dito de outra forma, os invariantes operatórios referem-se, fundamentalmente, às regras, relações e propriedades que o sujeito abstrai de uma situação ou de uma classe de situações e/ou de conceitos acumulados de um objeto ou de uma seleção de objetos, e que ele transpõe para outros objetos de mesma natureza ou não desde que sejam relevantes e pertinentes à situação. Sendo estes os elementos que podem ser utilizados pelo sujeito ao ocupar-se das situações de uso, significado e representação dos conceitos. Assim, o conceito é simbolicamente representado, com esses três elementos, pela relação  $C = (S, I, R)$ .

Nessa tentativa de identificar através do uso de palavras, símbolos, propriedades, regras e relações aparecem os invariantes relacionais (teoremas em



ação, conhecimentos em ação), os invariantes operatórios (simetria, translação, rotação, propriedades, regras, categorias classificatórias, descritores, grandezas, esquemas), os invariantes cognitivos (esquemas, representações). As situações juntamente com os invariantes são, segundo Vergnaud (1987b), elementos comuns aos esquemas e aos conceitos. No entanto, as representações simbólicas são mais peculiares ao conceito que os esquemas, neste sentido um conceito estará necessariamente explícito e associado aos significantes lingüísticos ou simbólicos.

A indissociabilidade entre invariantes, esquemas inferências regras e antecipações, apoiadas nas representações (implícitas ou explícitas) do real permitem as ações do sujeito sobre um objeto. Os invariantes permitem aos esquemas encontrar, nas situações encontradas, as condições para o seu funcionamento. Por sua vez, são as inferências que permitem aos esquemas levarem em conta os valores das variáveis de situação, de se adaptarem às situações nova, e de calcular regras e antecipações. Esta ultima, ao seu tempo, exprimem a funcionalidade dos esquemas, locais ou terminais. Todos esses elementos associados estabelecem as seqüências de ações do sujeito (VERGANUD, 1987b)

Para autor em questão, o conceito no curso do processo do conhecimento pode transformar-se em uma ferramenta para resolver problemas práticos ou teóricos e, ao ser posto em funcionamento como ferramenta de uso social pode suscitar novos problemas que darão surgimento a novas ferramentas e assim sucessivamente.

Assim sendo, na tentativa de compreender o que se passa no processo de compreensão e estabelecimento do conceito de um objeto matemático pelo estudante de cálculo é que se pensou nas seguintes perguntas: **(1)** Que tipo de

construção conceitual é produzida pelo estudante de cálculo? (2) Quais as construções básicas dos alunos nas questões propostas relativas a limites? (3) Que obstáculos poderiam ser apontados no processo de construção conceitual realizado pelos alunos?

### 2.3. CAMPO CONCEITUAL DE LIMITE

Segundo Bernard Cornu, o conceito matemático de limite é uma noção que é particularmente difícil e típica do tipo de pensamento necessário à matemática avançada. É um conceito que guarda posição central em análise matemática como fundamento de aproximação, de continuidade, e do cálculo diferencial e integral. Uma das maiores dificuldades para se ensinar o conceito de limite reside não somente na sua riqueza e complexidade, mas na dimensão de que os aspectos cognitivos não podem ser gerados apenas da definição matemática. Porque, a definição de um limite é uma coisa, enquanto que adquirir a sua concepção fundamental é outra, mesmo por que, a palavra limite pode ter significados diferentes para pessoas diferentes, (CORNU, 1991).

Se olharmos para o limite de função, na definição da sua noção, lidamos com a álgebra do seu conceito operando com uma estrutura aditiva (limite da adição e da subtração, ou como normalmente se usa limite da soma e da diferença); com uma sua estrutura multiplicativa (limite de um produto e de um quociente); com a composição de funções. Veremos nas seções a seguir a evolução histórica do conceito de limite de função, na abordagem da **História do Cálculo** e uma proposta de enquadre teórico do **Limite de Função** como **Campo Conceitual**, e algumas pesquisas consultadas que retratavam **Dificuldades relacionadas ao ensino de**

## limites em Cálculo.

### 2.3.1. Breve introdução à história do cálculo

O estudo da história de um conceito é de grande utilidade, principalmente, quando se quer inteirar-se do desenvolvimento desse conceito e das dificuldades inerentes a esse desenvolvimento e que podem indicar a presença de obstáculos. Veremos, mais adiante, que diversos fatos figuraram e marcaram na história do desenvolvimento do conceito de limite. De acordo com Cornu (1991), a noção de limite foi introduzida para resolver três principais tipos de dificuldades: a primeira delas voltada a problemas geométricos como, cálculo de área; considerações de natureza geométrica ligada a comprimento e problemas ligados ao processo do cálculo de área por “exaustão”. A segunda, diz respeito a problemas da soma e razão de convergência de uma série. E, a terceira, ligados a problemas de diferenciação, vinculados às relações entre duas quantidades que simultaneamente tendem a zero.

Assim sendo, nesta seção apresentaremos alguns subsídios para compreensão da gênese da história do conceito de limite. Como esse conceito surgiu intuitivamente entre os gregos nos trabalhos de Platão, Arquimedes, Eudoxo, Pitágoras, Euclides, Thales e tantos outros. O desenvolvimento dos conceitos da matemática e da própria matemática. A sistematização de conceitos e propriedades e, a axiomatização proposta por Euclides, nos Elementos. Dos conceitos de limites presentes nos trabalhos de Cavalieri e outros, até serem apropriados, desenvolvidos e aperfeiçoados por Fermat, Newton, Leibniz, e tantos outros matemáticos no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Este percurso será brevemente

apresentado a seguir.

### **2.3.1.1. O conceito de limite na antiguidade: considerações acerca de número, área e volume.**

Procurar-se-á fazer uma varredura das contribuições dadas desde os Egípcios, Babilônios, Gregos para os conceitos intuitivos de infinitésimo e limites que foram amplamente utilizados na resolução inclusive de problemas cotidianos e que mais tarde serviram de inspiração para o desenvolvimento de diversas teorias inclusive a de limites no Cálculo Diferencial e Integral.

#### **2.3.1.1.1. Geometria Egípcia e Babilônia**

De acordo com Edwards “A origem histórica do que se chama hoje em dia de conceito matemático – aquele que trata de número, grandeza e forma - pode ser traçado do surgimento de civilizações nos vales férteis dos rios da China, Egito, Índia e Mesopotâmia” (EDWARDS, 1979, p.1).

As investigações geométricas realizadas pelos gregos foram à base para o desenvolvimento de grande parte dos conceitos da matemática moderna (incluindo o cálculo), considerando-se geralmente que a geometria teve a sua origem no Egito.

Com a descoberta do Papius de Rhind, cuja origem é estimada em 1650 a.C., pode-se encontrar, nele registrado, uma lista de aproximadamente 20 problemas com as respectivas soluções, versando sobre áreas de campos e volumes de celeiros. No entanto com a decifração dos blocos de argila, com escrita cuneiforme da época Babilônia antiga, da dinastia Hammurabi (1800 – 1600 a.c.), a

matemática Babilônia revelou-se mais avançada que a Egípcia. De fato, os Babilônios eram hábeis nas soluções de problemas algébricos envolvendo equações quadráticas ou pares de equações, ou duas equações lineares em duas incógnitas ou uma linear e uma equação quadrática. Eles calculavam respostas numéricas precisas usando um sistema de numeração posicional sexagesimal.

Do ponto de vista da geometria, os Babilônios calculavam corretamente as áreas de triângulos e trapezóides, e os volumes de cilindros e prismas (como a área da base vezes à altura). Da mesma forma que do ponto de vista empírico, pelo menos um milênio antes de Pitágoras, já tinham familiaridade com o tão conhecido teorema de Pitágoras, inclusive com aplicação em problemas.

Pode-se dizer que Egípcios e Babilônios adquiriram uma cumulação significativa de fatos geométricos elementares que eles usavam para resolver problemas numéricos particulares. Nos textos encontrados não existe nenhuma afirmação explícita de regras gerais ou métodos de procedimentos, além do que não existe nenhuma distinção entre resultados exatos e resultados aproximados. Não existe também indicação sobre provas lógicas ou derivações nos seus procedimentos nem uma abstração ou generalização necessárias para elaboração de um sistema dedutivo. Embora para determinar o volume de uma pirâmide de base quadrada requeressem o uso, pode-se dizer, de infinitésimo ou considerações de limites.

#### **2.3.1.1.2. A Geometria Grega**

Os gregos assimilaram as tradições Babilônia e Egípcia de números e geometria, e contribuíram para a matemática com as proposições “explicitamente

dedutivas e consciente mente lógica” conforme Edwards (1979, p.5).

A história da matemática grega, segundo Edwards (1979), começa no século VI antes de Cristo com Thales e Pitágoras. Atribui-se ao primeiro a prova dos seguintes teoremas: 1) O diâmetro de um círculo divide-o em duas partes iguais; 2) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; 3) Os ângulos verticais formados pela intersecção de duas retas são iguais; 4) O teorema da congruência ângulo-lado-ângulo para triângulos. Além da prova do denominado “Teorema de Tales” que diz que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto, fato este que era conhecido dos babilônios que já utilizavam este resultado um milênio antes de Tales.

Um ângulo é dito inscrito em uma circunferência quando tem o seu vértice sobre a circunferência e os lados são formados por cordas (que é um segmento de reta que une dois pontos de uma circunferência). Se este ângulo está inscrito em um semicírculo (que é a metade do círculo), os seus lados (as duas cordas) passam pelas extremidades do diâmetro (a maior corda) do círculo. O que queremos dizer é o seguinte: considere o círculo de centro  $O$  e passando por três pontos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Tomemos então o ângulo  $\widehat{AOB}$  com vértice no ponto  $O$ ; centro do círculo, e  $A$  e  $B$  os extremos do diâmetro do círculo, sobre a circunferência, e  $C$  o outro ponto da circunferência, vértice do ângulo  $\widehat{ACB}$ , inscrito nesta circunferência. O arco de círculo  $\widehat{AOB}$ , correspondendo ao ângulo  $\widehat{AOB}$ , será a metade do círculo, assim sendo tem medida 180 graus. Como o ângulo  $\widehat{ACB}$  está inscrito no semicírculo ele tem a metade da medida do arco correspondente  $\widehat{ACB}$  que tem a mesma medida do arco cujo ângulo central é  $\widehat{AOB}$ , isto é, o ângulo  $\widehat{ACB}$  tem medida igual a 90 graus, assim sendo é um ângulo reto.

Thales foi o primeiro ser humano a quem foi atribuído à prova de

afirmações específicas em matemática. Já Pitágoras, que veio após Thales, transformou a matemática em uma forma livre de educação - pois dava aulas ou realizava conferências falando de matemática para o público em geral. Este matemático grego a examinou a partir dos seus princípios e empenhou-se a estudar as proposições, sem representação concreta, pelo pensamento lógico. Estabeleceu uma sociedade secreta com aspectos místicos que continuou mesmo após a sua morte. Contudo, os Pitagóricos - como eram denominados os seguidores de Pitágoras - eram ativamente engajados nas atividades de aprendizagem, incluindo matemática (que originalmente significa “aquilo que é aprendido” [tradução nossa]).

“Tudo é número” é citado como o lema da escola pitagórica. Os gregos usavam a palavra número para significar um número inteiro positivo “qualquer”. Na matemática teórica grega uma fração ( $a/b$ ) não era vista como um número, mas como uma relação ou razão  $a:b$  entre os números  $a$  e  $b$ .

Partindo desse conceito construíram o de proporcionalidade segundo o qual duas razões eram ditas proporcionais,  $a:b = c:d$ , se  $a$  é a mesma parte de  $b$  ou múltiplo de  $b$  como  $c$  é de  $d$ . E mais, associou aos números  $a, b, c, d$  inteiros  $p, q, m, n$  tais que  $a = mp, b = mq, c = np, d = nq$  e assim sendo  $a/b$  e  $c/d$  são múltiplos de  $p/q$ .

Esta visão discreta também foi aplicada a grandezas geométricas - comprimentos, áreas e volumes -, configurando-se a crença, dos primeiros Pitagóricos, na comensurabilidade de dois segmentos de reta quaisquer.

Os primeiros indícios do conceito de limite aparecem em um relato do século VI depois de Cristo feito por Aristotélico Simplicio sobre Hipócrates de Chios (que não é o físico Hipócrates de Cos), o qual provou que a razão das áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados dos seus diâmetros (ou raios). Ele deduziu o

citado resultado inscrevendo nos dois círculos polígonos regulares semelhantes, e então “exaurindo” as áreas dos círculos aumentando indefinidamente o número dos lados dos polígonos. Uma vez que, em cada etapa, a razão das áreas dos dois polígonos inscritos é igual à razão dos quadrados dos raios dos dois círculos, pareceria resultar “no limite” que o mesmo é verdade das áreas dos círculos.

Na resolução deste problema utiliza-se um raciocínio de limite infinito, e segundo Edwards (1979, p.7) “provavelmente, Hipócrates não tinha o conceito de limite suficiente para “resolver” esse argumento essencialmente infinitesimal”.

O problema de encontrar um quadrado com área precisamente igual à área de um círculo dado – conhecido como quadratura do círculo – foi um dos três problemas clássicos da antiguidade, juntamente com a duplicação de um círculo e a trissecção de um ângulo. Embora pareça que a área de um círculo possa ser arbitrariamente aproximada pela área de um polígono regular inscrito com muitos lados, a área do círculo não é precisamente igual à área de qualquer polígono regular inscrito. Este é um exemplo de problema, envolvendo uma distinção entre cálculo exato e cálculo aproximado, diferente de qualquer problema considerado pelos Babilônios e Egípcios.

Semelhante ao princípio de exaustão de Hipócrates foi o princípio utilizado por Demócrito (460 a.C. – 370 a.C.) – de acordo com Arquimedes em seu tratado O Método – para descobrir que o volume de uma pirâmide (ou cone) é um terço de um prisma (ou cilindro) com a mesma base e altura ( $V = \frac{1}{3} A \cdot h$ , sendo  $A$  a área da base do prisma e  $h$  a altura do prisma), mas também sem prová-lo rigorosamente. No seu princípio Demócrito supõe um sólido sendo composta por secções paralelas a sua base. O que se pode concluir dessa idéia é que dois sólidos compostos de secções paralelas iguais a distâncias iguais de suas bases deverão



ter volumes iguais. De acordo com o princípio de Demócrito um cone circular pode ser exaurido com pirâmides sobre polígonos regulares inscritos em sua base circular. Parece resultar “no limite” que o volume do cone será um terço do cilindro com a mesma base e a mesma altura.

Quem mais explorou o princípio da exaustão – o qual atualmente leva o seu nome – foi Cavalieri no início do século XVII.

Do final do século V a.C. até em torno da metade do século VI a.C. estes argumentos da plausibilidade infinitesimal foram transformados em provas rigorosas por Eudoxo de Cnidos (Eudoxo), um estudante da Academia de Platão em Atenas, considerado o maior matemático do século IV a.C., que resolveu os problemas surgidos nos fundamentos da geometria relacionados às razões das grandezas geométricas. O que ele fez foi formular a própria definição de proporcionalidade de razões de grandezas geométricas. Ao contrário dos gregos que, a partir da descoberta dos incomensuráveis, usavam o princípio da proporcionalidade.

A sua definição de proporcionalidade para razões geométricas é simplesmente uma maneira necessariamente precisa de dizer o que se evidencia no caso das razões de números proporcionais.

Define razões  $a:b$  e  $c:d$ , de grandezas geométricas  $a, b, c$  e  $d$  (que podem ser comprimentos ou áreas ou volumes), para serem proporcionais,  $a:b = c:d$ , contanto que, dados quaisquer dois inteiros positivos  $m$  e  $n$ , segue que ou:  $n \cdot a > m \cdot b$  ‘*implica*’  $n \cdot c > m \cdot d$ , ou  $n \cdot a = m \cdot b$  ‘*implica*’  $n \cdot c = m \cdot d$ , ou  $n \cdot a < m \cdot b$  ‘*implica*’  $n \cdot c < m \cdot d$ .

Com esta definição o campo dos números racionais  $m/n$  é separado em dois conjuntos disjuntos aquele para o qual  $m:n < a:b$ , ou aquele para o qual  $m:n > a:b$ . Ou seja, o que Eudoxo obtém é a separação dos números racionais em

dois subconjuntos disjuntos. Isto é, se denominarmos, respectivamente, o primeiro dos subconjuntos acima por  $L$  e o segundo por  $U$ , tem-se que todo elemento de  $L$  é menor que todo elemento de  $U$ .

Richard Dedekind, no começo do século XIX, definiu um corte semelhante ao dos racionais, proposto por Eudoxo, seguindo alguns dos seus passos, para o sistema de números reais. Tal sistema passou a ser denominado de “corte de Dedekind”.

Na seção anterior vimos a influencia e as contribuições da geometria grega no estabelecimento de vários resultados importantes para o desenvolvimento da matemática e um deles é o princípio da exaustão, o qual veremos alguns resultados mais diretos na subseção a seguir.

### 2.3.1.1.3. Área e o Método de Exaustão

Foi adotado pelos gregos no campo intuitivo que figuras curvilíneas simples, tais como círculos ou elipses, têm áreas que são grandezas geométricas do mesmo tipo que áreas de figuras poligonais, e essas áreas desfrutam das seguintes propriedades:

- (i) Se  $S$  está contida em  $T$ , então  $a(S) \leq a(T)$   
(Monotonicidade).
- (ii) Se  $R$  é a união das figuras não sobrepostas  $S$  e  $T$ , então  
 $a(R) = a(S) + a(T)$ .

Assim, eles tentaram determinar a área  $a(S)$  de uma figura curvilínea  $S$  dada, por meio de uma sequência  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , de polígonos que preenchem ou “exaurem”  $S$ , analogamente à sequência de polígonos regulares de Hipócrates

inscritos em um círculo. O chamado método da exaustão foi inventado aparentemente por Eudoxo, para proporcionar uma alternativa rigorosa para um inexplicado limite de  $a(P_n)$  com  $n \rightarrow \infty$ . Toda a clareza lógica apresentada no método da exaustão dá-se em decorrência do virtual “horror do infinito” que os gregos demonstravam.

O princípio de Exaustão de Eudoxo diz que

Duas grandezas diferentes colocadas em ordem, se a partir da maior houver subtraído uma grandeza maior do que sua metade, e a partir dessa que é deixada uma grandeza maior que sua metade, e se este processo for repetido continuamente, haverá deixado alguma grandeza que será menor que a menor grandeza estabelecida (BOYER, 1959; EDWARDS JR, 1979).

O que foi afirmado acima pode ser escrito da seguinte maneira, tomada uma seqüência de grandezas  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ , se  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  estas grandezas são tais que  $M_1 < \frac{1}{2}M_0, M_2 < \frac{1}{2}M_1, \dots, M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$ , então  $M_n < \varepsilon$  para algum  $n$ .

O ponto crucial em qualquer prova, pelo princípio da exaustão, consiste em mostrar que a área da diferença entre a figura  $S$  e o polígono  $P_n$ ,  $a(S - P_n)$ , pode ser tornada tão pequena quanto desejada escolhendo-se  $n$  suficientemente grande.

#### 2.3.1.1.4. Volumes de Cones e Pirâmides

De acordo com Arquimedes os resultados que descrevem os volumes de um cone circular ou de uma pirâmide triangular e representados pela relação

$v(P) = \frac{1}{3} A \cdot h$  (já mencionada anteriormente), foram estabelecidos por Demócrito,

porém foram provados por Eudoxo. A letra  $P$  na relação acima representa uma pirâmide (ou um cone),  $A$  representa a área da sua base e  $h$  a sua altura.

O cálculo do volume de uma pirâmide – que é tratado por Euclides no livro XII dos *Elementos* – é baseado na dissecção de uma pirâmide arbitrária com base triangular em dois prismas e duas pirâmides congruentes, semelhantes à pirâmide dada. O fato decisivo dessa dissecção é que a soma dos volumes dos dois prismas é maior que a metade do volume da pirâmide original,  $P$ .

O que se obtém quando se realiza esta dissecção é que a altura de cada uma das duas pirâmides tem a metade da altura ( $\frac{1}{2} \cdot h$ ) da pirâmide  $P$  e área da base um quarto da área ( $\frac{1}{4} \cdot A$ ) da base de  $P$ . Sendo assim cada prisma resultante da dissecção tem volume igual a um oitavo do volume de  $P$  ( $\frac{1}{8} \cdot A \cdot h$ ). Conseqüentemente o resultado da soma dos volumes dos dois prismas é

$$\sum_{i=1}^2 v(P_i) = \frac{1}{4} \cdot A \cdot h^2.$$

Agora dissecando as duas pirâmides (semelhantes) da mesma maneira que foi feita com a pirâmide  $P$ , em duas pirâmides e dois prismas menores. Têm-se, seguindo o raciocínio anterior, que a soma dos volumes dos quatro prismas resultantes de cada uma das pirâmides dissecadas (como foi mencionado) é maior que a metade da soma dos volumes destas pirâmides. Isto porque essas duas últimas pirâmides têm ambas área igual a  $A/4$  e altura  $h/2$ , da nova pirâmide dissecada. Segue-se – usando uma notação mais simplificada com somatório – que a soma dos volumes dos quatro prismas menores é

$$\sum_{i=1}^4 v(P_i) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{A \cdot h}{4^2}^3.$$

---

<sup>2</sup> Notação pessoal

<sup>3</sup> Notação pessoal

Assim, após  $n$ -passos desse tipo, obtém-se uma  $n$ -dissecção da pirâmide original. No  $k$ -ésimo passo têm-se  $2^k$  pirâmides pequenas subdivididas, e, portanto  $2^k$  pares de prismas menores. Cada uma desses  $2^k$  pequenas pirâmides têm altura  $h/2^k$  e área da base  $A/4^k$ , deste modo a soma dos volumes dos  $2^k$  pares de prismas menores é:

$$\sum_{i=1}^k v(P_i) = 2^k \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{4^k} \cdot \frac{h}{2^k} = \frac{A \cdot h}{4^{k+1}}.$$

Finalmente, se  $P$  representa a união de todos os prismas obtidos em todos os passos dessa  $n$ -dissecção, segue-se que:

$$v(P) = A \cdot h \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n+1}} \right).$$

A soma entre parênteses na relação acima é uma série geométrica de razão  $\frac{1}{4}$ , cujo termo geral é representado por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ . Esta série geométrica tem soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3},$$

tomando-se um  $\varepsilon > 0$ , vê-se que

$$v(P) - A \cdot h \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n+1}} \right) < \varepsilon,$$

Se  $n$  é suficientemente grande. Segue-se que o volume da pirâmide é

$$v(P) = \frac{A \cdot h}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{A \cdot h}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h.$$

Embora os gregos soubessem somar uma progressão geométrica finita, eles usavam os argumentos da redução ao absurdo para evitar a soma formal de uma série infinita.

No caso do volume de um cone circular, Euclides na proposição 10,

também, do seu livro XII dos Elementos, usa pirâmides inscritas para exauri-lo e assim então estabelecer que a fórmula do volume para cones é também,

$$v(C) = \frac{1}{3} A \cdot h.$$

Na prova toma-se um cone  $C$  de vértice  $O$ , de base um círculo  $C$ , e altura  $h$ . Toma-se uma seqüência de polígonos regulares  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  inscritos, previamente usados para exaurir o círculo, com  $P_n$  tendo  $2^{n+2}$  lados. Se  $C_n$  denota a pirâmide com vértice  $O$  e base  $P_n$ , então  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  é uma seqüência de pirâmides inscritas no cone  $C$ , e  $v(C_n) = \frac{1}{3} \cdot A(P_n) \cdot h$ , no qual  $h$  é a altura de  $C$ .

Unindo todos os polígonos envolvidos com o vértice  $O$ , pode-se provar que se  $M_n = v(C) - v(C_n)$  então  $M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} M_n$ .

Implica do princípio de Eudoxo que, dado  $\varepsilon > 0$   $M_n = v(C) - v(C_n) < \varepsilon$ , se  $n$  é suficientemente grande.

Também, seguindo o mesmo princípio, se  $Q$  é um cilindro com base  $C$  e altura  $h$ , e  $Q_n$  é o prisma inscrito com base  $P_n$  e mesma altura, então  $v(Q) - v(Q_n) < \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande. E daí tem-se que o volume do cone,

$$v(C) = \frac{1}{3} v(Q) = \frac{1}{3} A \cdot h.$$

Pois se não o fosse ter-se-ia,  $v(C) < \frac{1}{3} v(Q)$  ou  $v(C) > \frac{1}{3} v(Q)$ .

O princípio de Eudoxo é aplicado em muitas das provas dos cinco resultados básicos do livro XII dos Elementos de Euclides. Cada um dos teoremas compara as áreas ou volumes de dois conjuntos  $A$  e  $B$  que são ou

1. Dois círculos,
2. Dois cilindros com a mesma altura,

3. Duas pirâmides com a mesma altura,
4. Um cone com um cilindro com a mesma altura, ou
5. Duas esferas.

O primeiro passo em cada prova é a construção de duas seqüências de polígonos ou figuras poliédricas,  $\{P_n\}_1^\infty$ , inscritas em A e  $\{Q_n\}_1^\infty$ , inscritas em B, tais que  $v(Q_n) = k v(P_n)$  para todo n.

Aplica-se o princípio de Eudoxo para mostrar, através desta construção que dado  $\varepsilon > 0$ ,  $v(A) - v(P_n) < \varepsilon$  e  $v(B) - v(Q_n) < \varepsilon$  se n é suficientemente grande.

Em termos do conceito moderno de limite completaria-se a prova simplesmente denotando que:  $v(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} k v(P_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} v(P_n)$  como  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(P_n) = v(A)$ , tem-se então que  $v(B) = k v(A)$ .

Os Gregos essencialmente evitavam este uso explícito de limites completando a prova por meio do duplo argumento da redução ao absurdo

Uma prova indireta logicamente completa que é obtida sem referência explícita aos limites. O mistério que os gregos juntaram ao infinito e, em particular, ao que se chama conceito de limite, é absorvido no princípio de Eudoxo. Nesta relação, Aristóteles observou que os matemáticos não fazem uso das grandezas infinitamente grandes ou pequenas, mas contentam-se com grandezas que podem ser tornadas tão grandes ou tão pequenas quanto lhes agrade.

### 2.3.1.1.5. Arquimedes

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) foi o maior matemático da antiguidade, e 22 séculos não diminuíram o brilho ou importância do seu trabalho.

Outros matemáticos de potencial e criatividade comparáveis não foram vistos antes de Newton no século XVII, nenhum com igual clareza e elegância de pensamento matemático antes de Gauss no século XIX.

Ele foi famoso no seu tempo por suas invenções mecânicas – a chamada hélice Arquimediana para bombear água; alavanca e roldanas (“dê-me um lugar para apoiar e posso mover a terra”); um planetário que reproduziam os movimentos de corpos celestes com tal precisão como mostrar eclipses do sol e da lua; máquinas de guerra que aterrorizaram soldados Romanos no cerco de Siracusa, do qual resultou a sua morte. Para o próprio Arquimedes essas invenções eram apenas “diversões da geometria em jogos”, e as obras que ele deixou são dedicadas totalmente a investigações matemáticas.

Arquimedes escreveu trabalhos que envolveram cálculos de área, comprimento e volume, tais como: 1) A medida de um Círculo; 2) A quadratura da Parábola; 3) Sobre a esfera e o cilindro – determinou o volume e a área da superfície de uma esfera; 4) Sobre espirais – a espiral arquimediana; 5) Sobre conóides e esferóides (sólidos de revolução) determinou a área de uma elipse; 6) Sobre o método, referindo-se ao método da descoberta. Para o primeiro dos cinco casos Arquimedes desenvolve o método da exaustão de Eudoxo com notável precisão modificando o método ao considerar não somente polígonos inscritos, mas também circunscrevendo a figura – denominado por “método de compressão” –, aplicando-o a uma série de problemas que hoje são aplicações típicas do cálculo integral, e que serviu como ponto de partida para o desenvolvimento do cálculo moderno. O tratado de número 6, que era desconhecido até sua descoberta em 1906, descreve o método heurístico infinitesimal pelo qual Arquimedes descobriu muito dos seus resultados.



Os matemáticos Gregos não representavam as grandezas geométricas em termos de números reais. Conseqüentemente, a fim de especificar a área de uma figura dada representada geometricamente como o produto de dois fatores lineares, os geômetras Gregos tinham de introduzir uma figura plana com área igual àquela da figura dada. A geometria grega era essencialmente estática e por isso mesmo quando da definição de curvas no plano o faziam em termos de condição de lugar ou como intersecção de superfícies dadas em posições fixas. Como exemplos para o primeiro caso, definiam o círculo como o lugar dos pontos que se encontram eqüidistantes de um ponto fixo dado. E no segundo caso, definiam uma seção cônica como a intersecção de um plano e um cone. Esse caráter geométrico estático também se estendia ao estudo dos conceitos de movimento, como no caso dos movimentos retilíneo e circular uniforme. E assim todo e qualquer movimento só podia ser analisado em termos desses dois. Nesse sentido, Arquimedes dizia que a área da superfície de um cilindro circular reto – excluindo suas bases –, é igual à área do círculo cujo raio é a média proporcional entre a altura do cilindro e o diâmetro de sua base.

As construções geométricas de Arquimedes preservam características que são importantes para compreender o desenvolvimento histórico do cálculo. Por exemplo, na determinação da medida da área do círculo ele utiliza o método de compressão, estendendo o método de exaustão anterior, que usava a união indefinida de triângulos isósceles inscritos no círculo com o centro como vértice comum. Ao invés disso, ele emprega polígonos inscritos e circunscritos. A área do círculo é então “comprimida” entre as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos que se aproximam rigorosamente do círculo.

Para poder encontrar a aproximação para  $\pi$ , Arquimedes começou com

hexágonos regulares inscritos no círculo e circunscritos sobre o círculo de raio um. E dobrando sucessivamente o número de lados ele obteve pares de polígonos regulares inscritos e circunscritos com lados 12, 24, 48, e 96, e calculou seus perímetros para encontrar limites superiores e inferiores para  $\pi$ , ou seja, estabeleceu que  $\pi$  é um número tal que  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ .

A conhecida espiral de Arquimedes foi definida, pelo seu criador, utilizando o princípio de movimento definido pelos gregos, isto é, como uma composição dos movimentos linear uniforme e circular uniforme. Na definição da espiral ele diz que, para obtê-la, devem se fixar uma das extremidades de uma reta em um plano e fazê-la girar a uma razão constante de maneira que um ponto sobre esta reta ao se deslocar ao longo dela com velocidade radial uniforme, a partir da extremidade fixa, descreverá uma espiral neste plano.

Euclides definiu uma tangente a um círculo como a linha que toca o círculo em um único ponto e esta definição foi estendida pelos geômetras Gregos para aplicar a outras curvas. Também se atribui aos geômetras Gregos antigos uma definição de tangente a uma curva como a linha que toca a curva e tal que nenhuma outra linha reta pode ser interposta entre a curva e ela.

Arquimedes determinou tangente a espiral; calculou a área da região compreendida entre a espiral e o segmento de reta determinado pelos pontos inicial e final após uma volta; bem como a área de um setor da espiral. Para a determinação da tangente à espiral empregou um método de um ponto de vista mais geral usando representação cinemática. O seu método de determinação da tangente à espiral pode ser caracterizado como o uso do cálculo diferencial, uma vez que ele usava intuitivamente o conceito de função e a idéia numérica de um limite, pois ele

determinou a tangente a espiral por meio de um paralelogramo de velocidades composto por dois movimentos resultantes; um com um movimento radial do ponto fixo até a espiral e o outro em uma direção perpendicular ao primeiro.

Assim como a área da espiral e do setor espiral determinou entre outras coisas os volumes de seguimentos de conóides e cunhas cilíndricas e os centros de gravidade do semicírculo, de segmentos parabólicos, e de segmentos de uma esfera e um parabolóide usando o método heurístico que expressa de uma forma geral o cálculo integral.

### **2.3.1.2. Alguns séculos após os Gregos ao Cálculo moderno**

Com a queda do Império Romano do Ocidente no século V d.C. a Europa Ocidental entrou em um período durante o qual as realizações científicas do passado passaram a serem lembradas muito vagamente. E por muitos séculos após a queda do Império Romano o legado Grego ficou reduzido ao Império Romano do Oriente, onde foi preservado, mas dificilmente floresceu. Outro duro golpe foi dado em 529 d.C. com o fechamento das escolas Gregas de filosofia e da Academia de Platão em Atenas, pelo Imperador Justiniano. Com a queda em mãos dos Mulçumanos Árabes do principal centro de aprendizagem Grega em Alexandria, por volta de 641 d.C., a produção científica grega foi rapidamente absorvida por eles, e durante os séculos IX e X, os trabalhos de Euclides, Arquimedes, Apolônio, e Ptolomeu foram traduzidos, juntamente com os elementos Indianos e Babilônios, para o Árabe e divulgados em todo o sul do Mediterrâneo, da Pérsia e Síria no leste, para a Espanha e Marrocos no oeste, e finalmente transmitido para toda Europa Ocidental.

Com a retomada do império Árabe no século XI os clássicos gregos em árabe tornaram-se acessíveis aos Cristãos da Europa Ocidental e foram traduzidos para o latim durante os séculos XII e XIII. E assim as traduções em latim trouxeram a antiga sabedoria para uma Europa mais dinâmica com o florescimento de novas universidades tornando mais acessíveis à absorção e a assimilação os trabalhos dos matemáticos Gregos, as especulações da escolástica sobre movimento, variabilidade, e o infinito, junto com a álgebra simbólica e a geometria analítica da Renascença, formaram o rico cabedal que alimentou o desenvolvimento da matemática infinitesimal do século XVII.

Os Hindus se interessaram mais pelos aspectos aritméticos e computacionais da matemática. Proporcionaram um grande avanço a álgebra com os estudos das raízes irracionais das equações quadráticas como também no desenvolvimento do conceito do número negativo absoluto. A generalização do sistema numérico e a conseqüente libertação da aritmética da representação geométrica tornaram-se essenciais ao desenvolvimento dos conceitos do cálculo.

### **2.3.1.3. Newton e Leibniz e os Fundamentos do Cálculo moderno**

A palavra *Calculus* quer dizer a maneira de calcular com certas quantidades que, neste caso, serão os *infinitésimos* (BARON, 1985). Por infinitésimo entenda-se o arbitrariamente pequeno.

O desenvolvimento dos conceitos do cálculo moderno é usualmente creditado a Isaac Newton (o primeiro dos matemáticos modernos), que enunciou o Teorema Fundamental do Cálculo que consiste do seguinte argumento: se uma

função  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui derivada integrável, então  $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$ , usou séries infinitas e, virtualmente, criou a Astronomia e a Física como ciências matemáticas e a Gottfried Wilhelm Leibniz (também, um dos primeiros matemáticos modernos e, professor dos Bernoulli), que trabalhando paralelamente a Newton, enunciou também o Teorema Fundamental do Cálculo (introduzindo, inclusive, uma nova linguagem simbólica), cujas idéias e métodos não tinham sido publicados até cerca de vinte anos após a morte de Pierre de Fermat<sup>4</sup>. Entretanto, se o Cálculo Diferencial for considerado como a matemática de determinar máximos e mínimos de funções e desenhar tangentes a curvas, então foi Fermat quem desenvolveu a teoria dessa área, já no ano de 1629, mais de uma década antes que Newton ou Leibniz tivesse nascido.

Contudo, ambas as formas de apresentar o Cálculo, tanto de Newton quanto de Leibniz, foram sujeitas a mudanças antes que tivessem a semelhança com o cálculo moderno. Este Cálculo teve seus fundamentos firmemente fixados somente no século XIX, após muitas controvérsias e tentativas de solução no século XVIII. E a solução constituiu-se de três aspectos: (1) considerar as variáveis como funções de uma variável independente; (2) introduzir a função derivada como um conceito fundamental do cálculo, e: (3) usar um conceito de limite bem explícito na definição da função derivada. Desta forma, as quantidades variáveis do cálculo de 1700 foram substituídas por funções; as fluxões e diferenciais foram substituídas pela função derivada e a falta de clareza com relação às infinitesimais e razões últimas foi eliminada através do conceito de limite.

Dentre os muitos defensores do uso de limite, para fundamentar as bases

---

<sup>4</sup> Considerado como aquele que verdadeiramente desenvolveu a teoria da Geometria Analítica, calculou e usou derivadas e integrais, desenvolveu a moderna Teoria dos Números e probabilidade (SIMMONS, 1987).

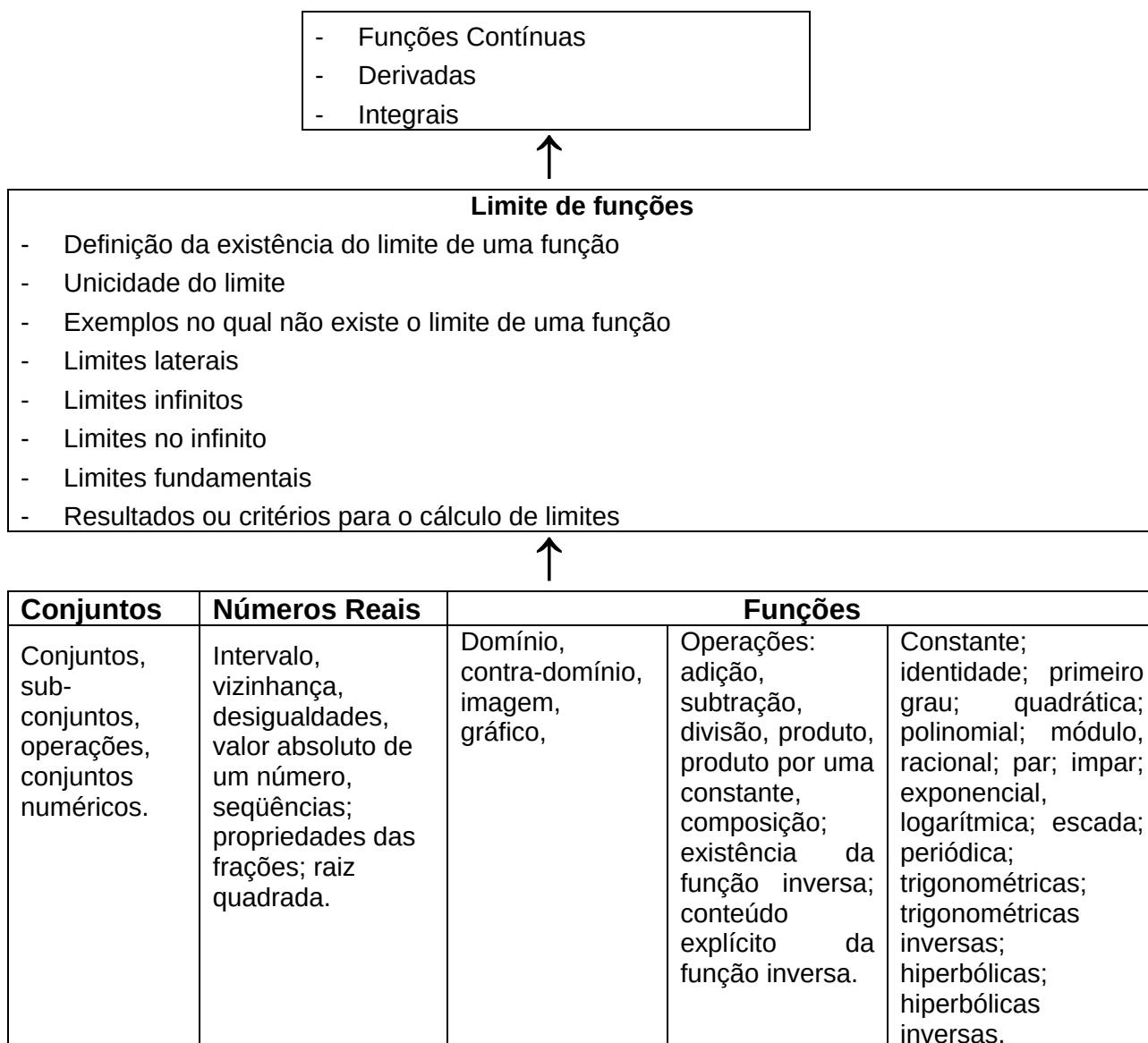
do Cálculo, estava o matemático, cientista e filósofo francês Jean Lê Rond d'Alembert, salientando o fato de que no cálculo se opera com os limites das razões de diferenças finitas de quantidades variáveis inter-relacionadas. Ou seja, pode se estabelecer uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de tal maneira que, à medida que uma das quantidades variar a outra quantidade a ela associada também variará. De tal modo que a variação entre as diferenças dessas quantidades relacionadas pode ser controlada.

O conceito de limite foi, durante cerca de mais de meio século após d'Alembert, apenas uma das muitas maneiras de tentar acertar os fundamentos do Cálculo. Tanto que, hoje, em matemática moderna, não falamos do limite de uma variável, mas sim sobre o limite do valor de uma função, quando a variável independente tende a um valor dado.

Observa-se que o conceito de limite, em Matemática, tem uma amplitude muito maior do que se imagina. Todo o Cálculo Diferencial e Integral, na verdade, praticamente tudo em Matemática Superior, tem relação com o limite.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que faz parte da grade curricular de alguns cursos das áreas de Ciências Exatas e Naturais (Química, Física, Matemática, Estatística, Geologia), Tecnologia (Engenharias, Arquitetura, Informática, Cartografia), Ciências Sociais Aplicadas (Economia, Administração, Ciências Contábeis) e Biomédicas (nos cursos de Biologia e Farmácia Bioquímica), em Universidades no Brasil e no Exterior, sendo o conceito de limite o que primeiro se ensina nos cursos de Cálculo. Em face disso, na seção seguinte se procura refletir sobre o campo conceitual de limite, de forma a oferecer subsídios à compreensão do processo de construção de significado do mesmo, bem como os eventuais obstáculos a tal processo.

### 2.3.2. Elementos do Campo Conceitual: Limite de função



**Quadro 3:** Proposta de campo conceitual de *limite*.

Na figura acima se procura delinear uma proposta de campo conceitual para o limite de funções reais a uma variável real, como já falamos no parágrafo final da introdução deste capítulo, observando as ligações e associações existentes entre os vários conceitos e conteúdos que estão indicados na base da figura acima. Por isso, os agrupamos em três campos (Conjuntos, Números e Funções) os conteúdos que servirão como pré-requisitos necessários ao desenvolvimento do estudo de

limites de funções, uma vez que, por exemplo, o limite de uma função, como veremos mais adiante nesta sessão, é verificado num intervalo próximo a ponto de convergência, isto é, na vizinhança do ponto. Apresentaremos mais abaixo um exemplo de algumas conexões que se faz entre os elementos que estão na base conceitual do referido enquadre teórico e a muitas representações conceituais destes elementos.

O conceito de função é abstrato e normalmente se trabalha com ele em matemática superior. Os gráficos e as representações algébricas são algumas das representações utilizadas para representá-la.

Ao se trabalhar com uma função quadrática, por exemplo, (estabeleçamos  $x$  como variável independente), podemos conhecer a sua fórmula algébrica (sua representação algébrica); considerar o seu domínio; o contradomínio; a sua imagem; os valores da função: os zeros dela (valores de  $x$  para os quais a função se anula que representam, também, a intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas, o eixo  $x$ ) e os seus pontos extremos (o vértice da função); intervalos de definição; o seu gráfico. Pode-se estabelecer uma relação entre todos esses elementos e as duas representações, por exemplo, construir o gráfico da função quadrática dada, conhecidos os zeros, o vértice, o domínio e o conjunto imagem ou, inversamente, dado o gráfico da função determinar a posição do vértice e dos zeros, o domínio e o conjunto imagem.

A referida função pode ser algebricamente representada das seguintes maneiras (tomaremos a função quadrática na forma geral):

$$(1) \quad \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c, \text{ ou} \end{array}$$

$$(2) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}, \text{ ou}$$



$$(3) \ y = ax^2 + bx + c, \ a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}$$

No nível intermediário estão os principais conceitos que são abordados no estudo de limite de funções. E no topo da figura outros campos conceituais para os quais o campo conceitual de limites de função real a uma variável real, torna-se pré-requisito: (1) o das funções contínuas reais de uma variável real - quando a noção de função contínua - tema central em Topologia e que tem fatos e conceitos essenciais à Análise (LIMA, 1976) - é reduzida ao conceito de limite de função (quando este limite existe). Estuda-se em funções contínuas, a continuidade de funções em intervalos: a continuidade em conjuntos (os conjuntos compactos) e a não continuidade de funções ou a descontinuidade de funções para um ou mais valores da variável independente; (2) o das derivadas de funções reais de uma variável real. Os significados: (2.1) analítico (de número real, quando a derivada existe); (2.2) geométrico (de coeficiente angular ou inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto procurado) e (2.3) físico como velocidade ou como aceleração instantânea. As derivadas laterais, a existência da derivada, a relação entre derivada e continuidade de uma função, derivada da adição e subtração de funções (estrutura aditiva); derivada da multiplicação e divisão de funções (estrutura multiplicativa); derivada de funções compostas e de outras operações envolvendo funções, e; (3) o da integral de funções reais a uma variável real, no qual se estabelece filiação semelhante às das derivadas de funções.

A noção de limite pode ser formulada através do uso de seqüência de números reais, por seqüência de funções ou por uma função real de uma variável real. A seguir nos referiremos aos três casos, contudo o nosso foco de observação se pautará no último deles, ou seja, o limite de uma função real a uma variável real.

Uma seqüência de números reais é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no

conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais e tomando valores no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. O valor que é representado por  $x_n$  é chamado o termo de ordem  $n$  ou,  $n$ -ésimo termo da seqüência. Aqui a variável em jogo é o número natural  $n$ .

Assim sendo, dada uma seqüência numérica  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$  de números reais, a qual denominaremos por  $(x_n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se estabelecer que essa seqüência  $(x_n)$  dada se aproxime de um número real fixo, aqui denominado por  $a$ , e estabelecer ainda que quanto maior for o valor de  $n$  mais os termos  $x_n$  tornem-se e se mantenham próximos de  $a$ . Ou seja, intuitivamente, dizer que o número real  $a$  é limite da seqüência  $(x_n)$ , significa afirmar que cada vez que for atribuído ao índice  $n$  valores inteiros e positivos muito grandes, os termos  $(x_n)$  tornar-se-ão e se manterão tão próximos de  $a$  quanto se deseje. De outra maneira, colocando-se um pouco mais de precisão, a idéia é estipular um “erro” por meio de um número real positivo, fixo, que denominaremos por  $\varepsilon > 0$ , e daí, encontrar um número natural ao qual atribuiremos um índice,  $n_0$ , tal que, todos os termos  $(x_n)$  da seqüência que tenham índice  $n$  maior do que  $n_0$  serão os valores da seqüência que estarão mais próximos de  $a$  com erro inferior a  $\varepsilon$ . O índice  $n_0$  deverá estar associado a  $\varepsilon$ , de maneira que para valores cada vez maiores de  $n_0$  obtenhamos  $(x_n)$  cada vez mais próxima de  $a$ .

Nessas condições pode-se estabelecer em linguagem simbólica que, “ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ”, com isto se quer dizer (por definição) que, para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $n_0$  tal que, toda vez que ao número natural  $n$  forem atribuídos valores de forma que ele se torne cada vez maior que o número natural fixo  $n_0$  ( $n > n_0$ ), teremos que o maior termo da seqüência com aquele valor  $n$  estará cada vez mais próximo do número real fixo  $a$ , isto é, a distância entre o maior valor

da seqüência e o número real fixo  $a$ , que pode ser determinada pela diferença entre eles é menor do que o erro  $\varepsilon > 0$ , que pode ser reescrito em linguagem simbólica por “ $|x_n - a| < \varepsilon$ ”.

Ao se afirmar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  significa dizer então, que qualquer intervalo de números reais de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$ , o qual representamos por  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , contém todos os termos  $x_n$  da seqüência, com exceção no máximo de um número finito de índices  $n$ .

Assim sendo, se é dado um intervalo de números reais com centro no ponto  $a$  (número real), e cuja distância de qualquer ponto  $a$  seja menor que o raio  $\varepsilon > 0$  (erro), cuja representação é  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , e como o limite dessa seqüência é  $a$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ), fora do intervalo dado e representado por  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  só poderão estar, no máximo, um número finito de termos, por exemplo os termos que podemos denominar com os índices  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

Isto significa dizer que, se qualquer intervalo de centro no ponto fixo  $a$ ,  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , contém todos os termos  $x_n$  da seqüência de pontos  $(x_n)$ , salvo talvez para um número finito de termos de índices  $n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , desta seqüência, (onde  $n$  é um número natural), então a seqüência de pontos  $x_n$  tem limite e este limite é o número real fixado  $a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Quando o limite de uma seqüência de pontos  $x_n$  é um número real fixo  $a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , diz-se que essa seqüência  $(x_n)$  *converge* para  $a$ , ou *tende* para  $a$  e escreve-se  $x_n \rightarrow a$  (se lê, a seqüência de pontos  $x_n$  tende para  $a$ ). Analogamente diz-se que uma seqüência de números reais  $(x_n)$  *não converge* para um número real  $a$

$(x_n \rightarrow a)$  quando, existe um número real qualquer  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , que satisfaz a condição: para todo número natural  $n_0$ , existe um número natural  $n$ ,  $n > n_0$ , tal que,  $|x_n - a| \geq \varepsilon$ .

Em outras palavras, dados os números reais  $a$  e  $r$ , tomemos um intervalo com centro em  $a$  e raio  $r$ ,  $0 < r \leq \infty$ . Se escolhermos  $r$  o maior possível tal que  $|x - a| > r$ , diremos que a série  $(x_n)$  não converge.

Assim, se uma seqüência  $(x_n)$  possui como limite um número real  $a$ , ela chama-se *convergente*. Do contrário, ela será *divergente*.

Dentre as seqüências divergentes, existe um tipo que se comporta com alguma regularidade, aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grande positivamente ou arbitrariamente grande negativamente. Ou seja, temos os denominados limites infinitos.

A partir desses conceitos e da definição formal de limite (de seqüências convergentes ou não), são obtidos resultados importantes, que são enunciados em teoremas e corolários. Como por exemplo, o Teorema da Unicidade do limite que garante: se o limite de uma seqüência existe, então é único (o que significa dizer que uma mesma seqüência não poderá ter limites diferentes). E os teoremas que verificam como se comportam os limites de seqüências relativamente às operações de adição, multiplicação, divisão e às desigualdades, que estabelecem a partir de certas condições quando é possível realizar as operações citadas acima.

É importante salientar que a noção de infinito é central para o conceito de números reais e de limites. Com respeito a números reais, podem-se fazer associações entre esses números e a noção de um limite de uma seqüência infinita, onde o limite é um número real. Intrinsecamente tem-se, a metáfora, que o limite é um ponto fixo sobre a reta numerada. Ou seja, tem-se a metáfora que os números

reais são pontos sobre uma reta. E a idéia do uso de limites surgiu da necessidade de se realizar somas infinitas, assim sendo é de se esperar que algumas dessas somas possam ser realizadas (ou seja, convirjam) e outras não, já que nem toda seqüência possui limite (LAKOFF & NÚÑEZ, 2000; LIMA, 1978). Veja o exemplo 1 (Apêndice 3).

Observe que na determinação da soma da série do exemplo citado existe uma metáfora envolvida que é de ordem cinemática, o que sempre acontece quando utilizamos a idéia de limite (visto que, literalmente, nada se move “aproximando-se” de algo). Na verdade, os valores de cada termo de uma seqüência estão fixados, uma vez que os valores não sofrem mudança, os termos não podem literalmente “aproximarem-se”. E, portanto, o infinito não é algo que se possa obter “próximo a”, (LAKOFF & NÚÑEZ, 2000). O uso dos quantificadores *para cada* ( $\forall$ ) e *existe* ( $\exists$ ) contribui para a atribuição de um caráter estático para essa aproximação da seqüência  $(x_n)$  do número fixo  $a$ .

A outra noção, sob uma forma mais geral, é uma formulação canônica que considera seqüências de funções reais. Isto é, funções  $f_n: X \rightarrow \mathfrak{R}$  cuja correspondência associa a cada número natural  $n \in \mathbb{N}$  uma função  $f_n$ , definida em  $X \subset \mathfrak{R}$ , um subconjunto dos números reais  $\mathfrak{R}$ . Como no caso anterior aqui também a variável em jogo é o número natural  $n$ .

Diz-se que a seqüência de funções  $f_n: X \rightarrow \mathfrak{R}$  converge para a função  $f: X \rightarrow \mathfrak{R}$  quando, para cada  $x \in X$ , a seqüência de números  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$  converge para o número  $f(x)$ . Ou seja, para todo  $x \in X$  fixado, tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Pode-se exprimir essa situação dizendo que “ $f_n$  converge para  $f$  em  $X \subset \mathfrak{R}$ ”, ou seja, de uma maneira mais resumida  $f_n \rightarrow f$  em

$X \subset \mathfrak{R}$ .

A terceira e última abordagem que faremos é a de limite de uma função real a uma variável real, objeto da nossa investigação. O que se pode dizer é que uma convergência para uma função estabelecida por  $f : X \rightarrow \mathfrak{R}$ , significa que, a função determinada por  $f$  associa univocamente a elementos do domínio  $X \subset \mathfrak{R}$  um único elemento do contradomínio  $\mathfrak{R}$ , de maneira que fixados dois números reais  $a$  e  $b$ ,  $a$  pertencente ao subconjunto  $X \subset \mathfrak{R}$ , e  $b$  pertencente a  $\mathfrak{R}$ , se pode estabelecer o seguinte enunciado: “ $f(x)$  tende a se aproximar de  $b$  quando  $x$  se torne suficientemente próximo de  $a$ ”, que pode ser entendida da maneira seguinte: *quando a variável independente  $x$  se aproxima indefinidamente do valor  $a$  (mas, não é  $a$ ), então a função  $f(x)$  (na variável independente  $x$ ) se aproxima indefinidamente do valor  $b$ .*

Este enunciado acima, de uma maneira mais formal, pode ser assim escrito:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad (1)$$

para significar o seguinte: que de maneira semelhante ao referido para limite de seqüências, se for tomado para cada número real variável  $f(x)$  pertencente ao contra-domínio  $\mathfrak{R}$ , uma distância estabelecida arbitrariamente por um número real  $\varepsilon > 0$ , numa vizinhança do número real fixo  $b$  desse contra-domínio, já estabelecido, pode-se encontrar uma distância arbitrária, um número real denominado por  $\delta > 0$ , na vizinhança do número real fixo  $a$ , de maneira que se tenha a distância de  $f(x)$  até  $b$  estritamente menor que  $\varepsilon$  (desde que  $x \in X$ ) sempre que a distância de  $x$  até  $a$  for estritamente menor que  $\delta$ .

Isto pode ser dito da seguinte maneira:  $|f(x) - b| < \varepsilon$  sempre que  $x \in X$  e  $0 < |x - a| < \delta$ , que simbolicamente pode ser enunciado da forma seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \quad (2)$$

Note que, o fato de  $0 < |x - a| < \delta$  quer dizer que  $x$  percorre todos os valores que estão na vizinhança do número real fixado  $a$  e diferente de  $a$ . Isto é,  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  e  $x$  é diferente de  $a$ , onde  $a$  é um ponto de acumulação<sup>5</sup> do conjunto  $X$ . Bem, isto quer dizer que ao considerarmos o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , não se exige que  $a$  pertença ao domínio da função  $f$ . Porém, pode-se ter  $a \in X$  e, neste caso,  $a$  é então um elemento do fecho<sup>6</sup> de  $X$ , contudo ao considerar-se o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , nada se pode dizer a respeito do valor  $f(a)$ .

Como um exemplo dessa definição de ponto de acumulação pode-se citar o conjunto  $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ , onde  $n$  é um número natural, isto é,  $n \in \mathbb{N}$ .

Observemos que os elementos do conjunto diminuem à medida que o número natural aumenta e, neste caso esses elementos vão ficando cada vez mais próximos de zero, sem, contudo atingir o zero. Assim sendo temos que zero é um ponto de acumulação de  $X$ , contudo o zero não é um elemento desse conjunto, ou seja,  $0 \notin X$ . E, se representarmos cada elemento do conjunto dado,  $X$ , por um elemento  $x_n$  da sequência dos  $(x_n)$ , onde  $n$  é um número natural, ou seja,

<sup>5</sup> **Ponto de acumulação de um conjunto**  $X$ : um número real  $a$  ser ponto de acumulação de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , significa dizer que todo intervalo aberto com centro em  $a$ ,  $(a - \delta, a + \delta)$ , contém algum ponto  $x \in X$  diferente de  $a$ , ou seja  $\forall \delta > 0 \exists x \in X$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ .

<sup>6</sup> O fecho de  $X$  é o conjunto  $\overline{X}$  formado pelos pontos aderentes a  $X$ , isto é, pontos que são limites de uma sequência de pontos de  $X$ . Ou ainda, acrescentando-se a esse conjunto  $X$  os seus pontos de acumulação.

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots, x_n = \frac{1}{n}, x_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \dots$  teremos que o limite dos  $x_n$  é zero, em outras palavras,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

De modo análogo podemos definir um conjunto  $X$  que não tenha ponto de acumulação, basta tomar a seqüência  $(a, a, a, \dots)$ , neste caso o conjunto dos pontos de acumulação é vazio.

Contudo se o número  $a$  dado não é um ponto de acumulação do conjunto  $X$ , ele é dito um ponto isolado de  $X$ . O que significa dizer que existe um intervalo, com centro em  $a$ , tal que  $a$  é o único elemento que pertence ao conjunto  $X$  e ao intervalo. Por exemplo, 0 é um ponto isolado do conjunto  $Z$  dos números inteiros relativos. Fato esse que ocorre com todo número inteiro  $a$ , isto é, qualquer que seja o número inteiro  $a$ ,  $a \in Z$  ele é um ponto isolado do conjunto dos números inteiros,  $Z$ . Que também pode ser dito da seguinte maneira, todo  $a \in Z$  é um ponto isolado de  $Z$ .

Retornando ao limite de funções, pode-se dizer que, de modo análogo, ao que se refere aos limites de seqüências, também existem teoremas que estabelecem diversas propriedades de limite de funções, a saber, Unicidade do limite (garantia de que o limite de uma função quando existe é único), operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com limites de funções, dentre outros, sem esquecer de fazer referência aos limites no infinito, limites infinitos e expressões indeterminadas.

Apresentaremos dois exemplos que ilustrarão os casos de limites infinitos e no infinito (exemplos 2 e 3, Anexo III). Novamente nestes exemplos encontram-se presentes à metáfora do infinito.



*Limite no infinito:*

Diz-se que uma função real  $f$ , a uma variável real  $x$ , tem limite no infinito e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (3)$$

com  $X \subset \mathfrak{R}$ , domínio da função  $f$  é ilimitado superiormente (por exemplo,  $X = [0, +\infty)$ ). De maneira análoga para o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ .

O que é chamado especificamente de limite no infinito ( $x \rightarrow \infty$ ) decorre da consideração que se faz do processo contínuo da sucessão de valores que crescem ou que diminuem ilimitadamente e, que vão sendo atribuídos à variável independente  $x$ , na determinação do limite da função que está sendo considerada, (ver exemplo 2, Anexo III). Os limites no infinito (para  $x$  tendendo para mais infinito ou a menos infinito) são, de certo modo, limites laterais (limite à esquerda e limite à direita respectivamente). O limite de uma seqüência é um caso de limite no infinito.

*Limite infinito:*

Diz-se que uma função real  $f$ , a uma variável real  $x$ , tem limite infinito e escreve-se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (-\infty) \quad (4)$$

com  $X \subset \mathfrak{R}$ , domínio da função  $f$ ,  $a \in X'$ .

Diferentemente do que foi visto no exemplo anterior, os chamados limites infinitos decorrem da consideração que se faz do processo contínuo da sucessão de valores que a função  $f(x)$  vai obtendo, e que crescem ou diminuem ilimitadamente à medida que a variável independente  $x$  vai assumindo valores cada vez mais próximos a um número real fixo  $a$ , na determinação do limite da função que está sendo considerada (ver exemplo 3, Anexo III).

Diante das reflexões feitas até agora sobre limites, é importante abordar mais dois aspectos constitutivos dessa noção. Os limites laterais (limite à direita e limite à esquerda) e as funções contínuas.

Em relação aos dois primeiros os que se pode dizer é que ao se verificar o limite de uma função se está verificando os limites laterais. Usando a notação adequada temos:

1. Considere  $a$  ponto de acumulação à direita do domínio  $X$  da função  $f : X \rightarrow \mathfrak{R}$  (isto é, quando todo intervalo  $[a, a + \varepsilon)$  contém algum ponto de  $X$  diferente de  $a$ ), se o número real  $b$  é o limite à direita de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  temos:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ .

2. De maneira análoga, considerado  $a$  ponto de acumulação à esquerda do domínio da função  $f : X \rightarrow \mathfrak{R}$ , assim temos:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ .

E, se o limite da função existe é porque os limites laterais existem e esses por sua vez coincidem. Reciprocamente, se os limites laterais de uma função existem e coincidem então esse tal limite será o limite da função. Que pode ser representado por:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Com relação ao último aspecto, ou seja, a continuidade da função só faz sentido falar se a função  $f$  é contínua no ponto  $a$  quando  $a \in X$ . E, ao contrário do que foi abordado em parágrafo anterior pode-se dizer algo a respeito de  $f(a)$ . Ou seja,  $a \in X$  um ponto de acumulação de  $X$ . Então  $f : X \rightarrow \mathfrak{R}$  é contínua no ponto  $a$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Com isto exprimi-se fundamentalmente a noção de função contínua através do limite.

Para finalizar esta seção, queremos mostrar a definição de derivada de

uma função real observando a relação entre esta e a noção de limite.

### 3. Derivada num ponto

Um outro tipo de limite, mais sofisticado, é a derivada de uma função real  $f$  em um ponto  $a$  do domínio dessa função, que será definida como segue.

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$  (isto é,  $a$  é um ponto de acumulação de  $X$  pertencente a  $X$ )<sup>7</sup>.

Diremos que  $f$  é derivável no ponto  $a$  quando existir e for finito o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (5)$$

no caso afirmativo, este limite é denotado por  $f'(a)$  e chama-se a derivada de  $f$  no ponto  $a$ .

Se tomarmos  $h = x - a$ , ou  $x = a + h$  podemos (re)escrever a derivada de  $f$  no ponto  $a \in X \cap X'$ , por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (6)$$

Daremos agora um exemplo de como pode ser calculada a derivada de uma função utilizando a definição dada.

Exemplo 3:

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (uma função real a valores reais) dada por  $f(x) = x^2$ . Determine a derivada da função dada, no ponto  $a = 2$ , usando a expressão (6), a definição equivalente para derivada.

Solução:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(a + h)^2 - (a)^2}{h},$$

observe que o binômio que se encontra no numerador da expressão é dado pela

---

<sup>7</sup>  $X'$ , que às vezes é chamado o derivado de  $X$ , é o conjunto dos pontos de acumulação de  $X$ .

diferença de dois quadrados. Portanto, podemos reescrevê-la da seguinte maneira,

$$(a + h)^2 - a^2 = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = 2ah + h^2.$$

Substituindo-a na expressão acima e realizando as simplificações necessárias, tem-se.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2a + h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a \quad (7)$$

Logo,  $f'(2) = 4$  é a derivada procurada.

Encontramos o limite, substituindo  $h = 0$  no penúltimo termo da direita da relação (7) estabelecida acima. E mais ainda, podemos apresentar a derivada da função dada na sua forma geral, bastando para isso, substituir o número real  $a$  na relação (7) pela variável  $x$ , obtendo-se então  $f'(x) = 2x$ .

Se pensarmos na função dada neste exemplo, como a equação que determina a posição de um móvel que se desloca no espaço em função do tempo, a derivada  $f'(x) = 2x$  representará a velocidade deste móvel e o seu valor  $f'(2) = 4$  a sua velocidade instantânea, isto é, a velocidade quando o móvel se encontra no instante  $x = 2$ .

Estes conceitos, propriedades e exemplos focados acima são alguns dos elementos que são tratados, ao longo de um semestre letivo, num curso de Cálculo I, por exemplo, exigindo-se do estudante um nível elevado de compreensão desses conteúdos e memorização de regras, além de um conjunto de conteúdos básicos e experiências que devem, segundo se estima, fazer parte do seu arcabouço teórico-prático. O desenvolvimento de tais competências cognitivas nem sempre acontece e, o confronto com o novo, muitas vezes, leva ao surgimento de obstáculos que, para muitos alunos, tornam-se quase que intransponíveis, transformando-se em fantasmas durante o seu percurso acadêmico. A sessão seguinte aborda alguns

desses obstáculos.

### **2.3.3. Principais Obstáculos referidos na Literatura**

Quando nos referirmos a **conceito**, inclusive do ponto de vista pedagógico, precisamos levar em conta que a flexibilidade representacional é fundamental, pois, um conceito tem mais sentido justamente no momento que ele muda de sentido, conforme Bachelard (1974). Então, é justamente nesse momento da mudança que o conhecimento atinge plenamente o patamar da conceitualização.

Esse estado de mudança e de retificação deveria criar mais possibilidades para o aluno compreender melhor o objeto de estudo e, conseqüentemente, pudesse passar de um pensamento mais elementar para um mais complexo. Essa passagem seria tanto mais possível quanto fosse dinâmico o processo de pensamento, com disponibilidade para se modificar tanto na sua forma quanto no seu conteúdo. Como assegura Bachelard (1974), o pensamento se modifica em sua forma, se ele se modifica em seu objeto.

Porém, este estado permanente de transformações a que estão submetidos tanto o conceito quanto o pensamento, muitas vezes não é compreendido pelo sujeito enquanto agente do conhecimento, implicando muitas vezes em problemas para aprendizagem, com o surgimento de obstáculos que se interpõem entre o conhecimento e a superação de dificuldades.

Pode-se dizer que obstáculo é uma restrição à atividade do sujeito, que pode ser atribuído ao conhecimento dito primeiro (anterior, já disponível) desse sujeito. Tal obstáculo é geralmente de natureza inconsciente, o que impede que o conhecimento anterior (desse sujeito) seja criticado. Isso dificulta que o sujeito

promova as rupturas necessárias que lhe facilitem a aprendizagem.

Este conhecimento, de acordo com Duroux (1983, citado em Bittencourt, 1998), resiste às contradições apresentadas e, freqüentemente, volta a se manifestar.

Dos obstáculos de natureza cognitiva que podem surgir no processo de ensino aprendizagem, tomando por base a perspectiva de Brousseau (1976, citado em Bittencourt, 1998) e a de Cornu (1991), podem ser citados prioritariamente os seguintes: 1) **didáticos**, decorrentes de situações didáticas, por exemplo, da apresentação dos conteúdos a nível escolar, ou da natureza do ensino; 2) **psicológicos**, em virtude das convicções e do desenvolvimento cognitivo do indivíduo; 3) **culturais**, em virtude dos modelos culturais interiorizados, relativos ao modo de viver e de pensar cultivados pelo sujeito, tanto no aspecto formal (regras e valores), quanto no informal (regras de comportamento, crenças, hábitos); 4) **históricos**, que se origina, do processo de desenvolvimento histórico do conceito no decurso do tempo cronológico e finalmente; 5) **epistemológicos**, decorrentes, por exemplo, das soluções adaptadas a um determinado contexto e que pode induzir a soluções falsas fora desse contexto, permitindo, dessa forma, um impedimento à análise das condições e dos critérios que podem: obstruir o conhecimento científico de uma determinada ciência. No caso específico da Matemática, os obstáculos epistemológicos ocorrem por causa da natureza dos próprios conceitos matemáticos (Cf. CORNU, 1991).

Obstáculos epistemológicos *“são lentidões e conflitos que aparecem no próprio ato de conhecer”*, estando associada à experiência primeira, aquela que é colocada antes e acima da crítica e por isso mesmo se incrusta no conhecimento não questionado – no sentido que esse conceito primeiro constitui-se na experiência

do sujeito e ainda não mudou, ou seja, a outras experiências (se houve) ainda não retificou a primeira hipótese possibilitando que as considerações iniciais permaneçam sem mudança, sendo aplicadas de forma generalizada à outras situações – daí sua noção pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática educacional (BACHELARD, 1999).

Alguns desses obstáculos surgem em virtude de nossas convicções ou pela maneira que encaramos o caráter dinâmico (ou não) do conhecimento e/ou pela estabilidade de um conceito. Isso porque existe, da nossa parte, uma crença de que há conhecimentos que são imutáveis. Surge daí, conforme aponta Bachelard (1974), a crença na permanência das formas racionais, na estrutura pela acumulação, o que faz com que se atribua uma importância funcional (ou seja, no que concerne às funções que esta crença desempenha na formação do pensamento científico) à massa dos conhecimentos prévios e resistentes à mudança, de maneira que se deixa de levar em conta a objetivação, as retificações e as extensões, que são as verdadeiras molas do pensamento científico.

Nessas perspectivas Bachelard (1999) estabelece uma classificação dos obstáculos epistemológicos de acordo com a forma como estes podem surgir no processo do desenvolvimento do pensamento científico, dos quais consideraremos aqueles mais relevantes para a presente discussão: (1) **Obstáculo Substancialista**, aquele constituído por intuições dispersas e até opostas, com ligações a uma substância ou a um substantivo, atribuindo à substância qualidades diversas tanto de natureza superficial como profunda tanto a qualidade manifesta como a qualidade oculta; (2) **Obstáculo Verbal**, que está ligado aos atos de natureza verbal, relativos à falsa explicação obtida com a ajuda de uma palavra explicativa, na estranha inversão que pretende desenvolver o pensamento geral ao analisar um conceito, em

vez de inserir um conceito particular numa síntese racional.

Diversas pesquisas têm identificado obstáculos em Matemática, tanto no processo histórico quanto em situações de aprendizagem, evidenciando em ambos os casos um processo descontínuo de construção do conhecimento.

Potencialmente a importância dessa preocupação com o histórico têm sido de grande relevância e tem, segundo Bittencourt (1998), se mostrado fundamental na análise epistemológica dos conhecimentos envolvidos, compreendendo um obstáculo como um conhecimento com determinado domínio de validade e significado social.

Certamente, o conhecimento e a compreensão do processo histórico de desenvolvimento do conceito desde a sua origem, ou seja, conhecer a gênese do conceito, possibilita a compreensão da causa do obstáculo e cria condições para que se possa estabelecer um confronto do obstáculo histórico com os existentes na aprendizagem. Isso não significa dizer que toda dificuldade histórica deva necessariamente representar um obstáculo na aprendizagem.

O certo é que não podemos nos esquivar de reconhecer a presença de obstáculos no processo de aprendizagem, todavia o que importa é podermos de algum modo, diante da presença destes, procurar de fato distingui-los, compilá-los, examinar suas relações e causas e buscar superá-los, numa perspectiva de amenizar os seus efeitos no processo de construção de significados.

De modo geral o ensino de matemática, culturalmente, segundo estabelecido por Sierpinska (1987), percorre três níveis: o *formal* (consistindo de regras e valores); o *informal* (com regras de comportamento e de raciocínio) e o *técnico* (com o conhecimento explícito). Voltando-se agora para o ensino dos conteúdos de limite, podem-se percorrer estes três níveis, atentando para a



classificação estabelecida por Sierpinska (1987), que atribui às noções de *conhecimento científico, infinito, função e número real* a origem das principais fontes de obstáculos epistemológicos.

Dos obstáculos epistemológicos relativos ao conteúdo de limite tem-se:

- *Obstáculos heurísticos, relativos à falta de rigor matemático*, porém caracterizável como processo fundado sobre intuições que levam as descobertas, graças ao raciocínio baseado em uma indução incompleta; tal tipo de obstáculo subdivide-se em: *heurístico estático* (intuições desprovidas da idéia de movimento, podendo-se incluir aqui o uso de algoritmos, símbolos, regras, tabelas, gráficos ou outros objetos formais da matemática utilizados para executar tarefas), que foi subdividido em: heurísticos estáticos geométrico, heurísticos estáticos numéricos; e o heurístico cinético (intuições vinculadas com a idéia de movimento, pode-se ter gráficos, imagens mentais, diagramas ou outros elementos utilizados para resolver tarefas que permitam a idéia de movimento), estes subdivididos em: heurístico cinético geométrico e heurístico cinético numérico.

- *Obstáculos com relação ao rigor matemático* (relativo ao uso de um rigor excessivo ou falso) que por sua vez, foram classificados em obstáculos de Eudoxo (não se refere à operação matemática, mas sim a um rigoroso método de provar certas relações entre quantidades) e de Fermat (é uma operação matemática que consiste em atribuir valores numéricos às variáveis e omitir valores ínfimos em relação a outros).

Quando é deflagrado o processo de superação dos obstáculos, conforme aponta Sierpinska (1987), o sujeito começa a se colocar acima das suas convicções. E, justamente, nesse momento, procura analisar de fora, os métodos que utilizou para resolver os problemas, a fim de saber das possíveis hipóteses contrárias, e daí

reformular as hipóteses que ele admitiu implicitamente como verdadeiras, até então. Na compreensão do processo de superação de obstáculos, a mudança de atitude e de opinião será benéfica. Porém, a situação didática em suas duas dimensões – cognitiva e social – deve também favorecer a estes estudantes. Todavia, segundo entende Sierpinska (1987), se a presença de um obstáculo epistemológico em um estudante está ligada a uma convicção de algum tipo, a superação deste obstáculo não consiste em este sujeito substituir esta convicção por uma convicção oposta.

O que se espera na realidade é que as superações dos obstáculos dêem aos estudantes condições para que possa desenvolver o seu talento e natureza investigativa elementos primordiais para, alimentar o espírito científico e a adquirir uma atitude matemática.

É possível perceber mais do que simples formalismos nas atividades matemáticas ou dos matemáticos, ou seja,

[...] basta que não façamos abstração indevidamente da psicologia do matemático. Isto permitirá perceber que há na atividade matemática mais do que uma organização formal de esquemas e que toda idéia pura tem contrapartida de uma aplicação psicológica, de um exemplo que faz as vezes de realidade. E, meditando sobre o trabalho matemático, percebe-se que ele sempre provém de uma extensão de um conhecimento tomado do real e que, na própria matemática, a realidade se manifesta em sua função essencial: fazer pensar. (BACHELARD, 1974).

Portanto o que se precisa é aguçar o olhar e agudizar o escutar a ponto de se estabelecer à relação aluno-aprendizagem-aluno.

Desse modo, pretende-se verificar na produção dos alunos pesquisados quais os conceitos de limite de função que eles têm corporificado e de que maneira isso pode contribuir (ou não) na estruturação e formação deste conceito de limite e na resolução de problemas aplicados deflagrando (ou não) o processo de superação dos obstáculos.

### **2.3.4. Dificuldades relacionadas ao ensino de cálculo: pesquisas disponíveis**

Nessa seção serão mostradas algumas pesquisas que retratam a natureza das dificuldades enfrentadas pelos alunos que têm o Cálculo como disciplina básica na sua formação acadêmica, bem como algumas propostas de mudança no enfoque da disciplina que possibilitariam a redução dessas dificuldades. Além disso, serão apresentados às limitações dessas propostas na tentativa de detectar os fatores responsáveis por tais dificuldades.

Há pelo menos vinte anos, muitos pesquisadores vêm se preocupando com a questão da aprendizagem de estudantes universitários no ensino de Cálculo (ver dentre outros, MEEL (1998), SIERPINSKA (1985 e 1987), TALL & VINNER (1981), CORNU, (1991), HAREL & KAPUT, (1991) e WILLIAMS (1991); e aqui no Brasil, FROTA, (2001 e 2002); LACHINI, (2001); PINTO (2001) e SAD, (1998), que nos seus estudos abordam desde o problema da compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral e aplicação desses conceitos à análise matemática até o problema da repetência e de obstáculos epistemológicos, nos cursos que oferecem esta disciplina, em Cálculo I, como pré-requisito, a partir do primeiro período).

Nos estudos realizados, tendo como participantes estudantes dos cursos de Cálculo, os resultados encontrados foram: que os estudantes não conseguiam formar conceitos, fazer associações, inter-relacionar conteúdos e contextualizar, empreendendo ações que os levasse a resolver problemas (do tipo padrão e problemas aplicados), embora tivessem habilidades em aplicar regras, propriedades e, até mesmo, demonstrar e enunciar teoremas e proposições.

O que aconteceu, ao longo desses anos, diante desse cenário, foi o surgimento de propostas de novas abordagens pedagógicas e de currículos que se

esforçavam em considerar mais detidamente o aluno. Uma dessas novas propostas incluía o uso de programas de computador especializados para o ensino do Cálculo (Maple, Derive, Theorist e Mathematica são exemplos de tais programas). A partir daí, surgiram os denominados *cursos tecnológicos* que fundamentavam sua estrutura organizativa e seus programas de ensino em aplicações práticas, utilizando softwares como os acima referidos.

Pensava-se, com isso, resolver os graves problemas de aprendizagem identificados nos cursos de Cálculo tradicionais, inclusive, o problema da repetência e evasão. Dessa forma, esses softwares possibilitariam ao aluno uma maior interação com os conteúdos do Cálculo e, conseqüentemente, esses estudantes passariam a ser sujeito da aprendizagem, ficando o professor como coadjuvante no processo ensino-aprendizagem, no qual assumiria a posição de facilitador, trocando informações e debatendo com o estudante à medida que dúvidas e/ou novas questões fossem surgindo.

No entanto, o que se pôde observar através dos estudos de Meel (1998), na tentativa de entender o que estava acontecendo com os estudantes que tinham a sua formação associada a um dos dois currículos: tradicional (TRAD)<sup>8</sup> e de Calculus & Mathematica (C & M)<sup>9</sup>, foi que alguns dos velhos problemas ligados à aprendizagem perduravam, ou seja, os estudantes não mostravam mudanças importantes com relação a formar conceitos, fazer associações, inter-relacionar conteúdos e contextualizar, aplicando os conhecimentos adquiridos nos cursos de Cálculo para a resolução de problemas.

---

<sup>8</sup> Currículo Tradicional (TRAD), que toma por base o ensino através da fixação de regras e propriedades, no uso do lápis e papel e, onde o professor figura como condutor de dogmas e árbitro da verdade.

<sup>9</sup> Currículo Calculus & Mathematica (C & M), no qual os alunos fazem uso de recursos tecnológicos, e que tomam por base o ensino nas aplicações práticas, utilizando softwares educativos, como por exemplo: Maple, Derive, Theorist e Mathematica.

Embora os estudantes do currículo C & M (diferentemente dos estudantes do currículo TRAD) conseguissem empreender ações que os levavam a resolver problemas aplicados, apresentavam em contrapartida dificuldades em aplicar regras, propriedades e teoremas na resolução desses problemas, e até mesmo, associar a presença desses teoremas e proposições nas soluções empregadas (que era no que pretensamente residia à força dos estudantes do currículo TRAD).

A conclusão de Meel foi que os estudantes de ambos os currículos

[...] concebem os conceitos de limite e diferenciação de maneira que não captam toda sua essência. Contudo com relação à integração os estudantes de ambos currículos pareceram mostrar entendimentos compatíveis com a compreensão da definição formal de integração. Assim, a luz da performance dos estudantes em relação aos vários instrumentos, os estudantes de nenhum dos currículos superou os estudantes do outro. (MEEL, 1998, p. 196)

Nessa mesma linha de raciocínio, o estudo de Williams (1991) pautou-se em associar ao ensino teórico/prático de Cálculo (especificamente, o de limite) a utilização de modelos teóricos.

A idéia básica era que, utilizando modelos teóricos, os estudantes pudessem lançar mão das imagens formadas em decorrência dos mesmos para realizar mudanças nos seus próprios modelos de representação, de modo a refletir um conceito mais formal do Cálculo, ou seja, reconhecer as propriedades globais dos objetos matemáticos.

A preocupação em verificar a funcionalidade do uso de modelos teóricos para o entendimento de conceitos em Cálculo levou o referido pesquisador a investigar, em duas fases, estudantes das classes de segundo semestre do curso de Cálculo de uma grande universidade do meio oeste dos Estados Unidos.

O seu estudo documenta o entendimento do conceito de limite e os fatores que afetam mudanças neste entendimento por parte dos estudantes

investigados. O estudo se baseou em confrontar os estudantes com modelos alternativos e com problemas não regulares de limite. Segundo este autor,

[...] Esse método para estimular mudanças cognitivas requer que a concepção sobre limite dos estudantes seja mais ou menos bem definida, coerente, e estática no sentido de ser usada como uma ferramenta que faz sentido. Isto é, para ser chamado propriamente de modelos de limite, os estudantes devem ter no seu conceito alguma habilidade em fazer conjecturas e poder servir como uma base para distinguir alternativas verdadeiras das falsas. (WILLIAMS, 1991, p. 220)

Os problemas, de acordo com Williams (1991), eram destinados a encorajar os estudantes a fazer mudanças em seus próprios modelos para refletir uma concepção mais formal de limite. E o objetivo do estudo, segundo ele, era produzir conflitos cognitivos na idéia que os estudantes tinham sobre limite. Quando, por exemplo, investigaram-se mudanças no conceito de aproximação, verificou que nenhuma mudança real ocorreu na dinâmica da visão de limite por parte dos estudantes pesquisados. Williams fez isso, procurando mostrar que colocando um numero finito de pontos em uma função nem sempre se obtinha uma correta idéia sobre o valor do limite obtido através dessa função.

O que se pretendia com isso, segundo ele, era encorajar os estudantes às mudanças cognitivas que ocorrem quando se estabelece um conflito cognitivo. Entretanto, viu-se que: “[...] de fato, alguns conflitos cognitivos ocorreram, porém o que não ocorreu foi uma mudança cognitiva real” (WILLIAMS, 1991, p.229)

Na sua avaliação, dois aspectos foram definitivos para isso: um deles se baseava nas crenças que os estudantes investigados tinham acerca de limite, que era sustentado por um modelo mental de limite que interferia com a criação e com o propósito de conflito cognitivo; o outro correspondia ao da simplicidade, ou seja, esses estudantes freqüentemente optavam por uma visão mais simples de limite, sem levar em consideração se era a mais correta. O que eles levavam em conta era

a facilidade e a praticidade de um modelo de limite, que na visão deles era mais importante que a formalidade matemática (WILLIAMS, 1991).

E a conclusão a que tal teórico chegou foi que o valor atribuído pelos estudantes (que participaram da pesquisa) a existência de uma verdade matemática, à praticidade e à simplicidade dos modelos de limite, às exigências diárias das aulas de Cálculo, as suas experiências anteriores de gráficos de funções, e a confiança deles, antes de qualquer consideração, em uma existência de gráficos, contribuem para uma visão distorcida (desses estudantes) tornando difícil para eles a compreensão da necessidade de uma definição mais formal de limite (WILLIAMS, 1991).

Quem trabalhou numa perspectiva similar acerca do estabelecimento de conflitos mentais para estimular mudanças cognitivas foi Sierpinska (1987). Todavia, seu enfoque enfatizou à relação entre conflito mental e obstáculo epistemológico. Segundo seu ponto de vista, para se superar um obstáculo é necessário que ocorra um conflito mental e, neste sentido, as situações didáticas nas suas duas dimensões – cognitiva e social – devem promover condições que favoreçam a superação de obstáculos pelos estudantes.

Entretanto, com relação às experiências anteriores ou à presença de convicções de qualquer tipo por parte do estudante que pudessem se tornar obstáculos para estes, conclui que:

[...] se a presença de um obstáculo epistemológico em um estudante está vinculado com uma convicção de algum tipo então superação desse obstáculo não consiste em substituir essa convicção por uma convicção oposta. (SIERPINSKA, 1987, p. 374)

Devido aos fracassos momentâneos, decorrentes da utilização dos modelos teóricos como auxiliar na compreensão matemática dos conteúdos de Cálculo buscou-se alternativa para encorajar os alunos às mudanças cognitivas, a

utilização de modelos físicos. Numa expectativa que, a partir desses, os estudantes pudessem reconhecer as propriedades globais dos objetos matemáticos.

Pensava-se que, com a introdução dos modelos físicos como mecanismos instrucionais para o ensino de Cálculo, se buscaria um acesso crescente do aluno ao conhecimento matemático, além de colocá-lo sempre à frente de situações desafiadoras, objetivando favorecer a utilização por parte do aluno de conhecimentos matemáticos adquiridos para resolver tais situações.

Muito embora os autores cujos trabalhos nos reportaremos para falar sobre modelos físicos não tenham dirigido os seus trabalhos para o ensino superior, achamos que a discussão desses trabalhos permitir-nos-ia uma reflexão sobre o tema. Em alguns estudos feitos sobre o tema (como por exemplo, FUSON, 1986; GREENO, 1988), sugeriu-se que as manipulações de materiais concretos ou de referentes físicos de símbolos ajudassem a despertar a atenção dos aprendizes durante a aprendizagem matemática, criando condições para que o sujeito pudesse melhor refletir sobre o(s) objeto(s) matemático(s) estudado(s), aumentando a eficiência cognitiva e a performance matemática.

Em contrapartida, Meira (1998) voltou o seu olhar para questões referentes à apropriação desses materiais instrucionais pelos aprendizes nas atividades, assim como sobre as características desses aparatos físicos enquanto instrumentos que favoreçam a construção do conhecimento, desenvolvimento de atividades e práticas na sala de aula de matemática. Nessa perspectiva, duas perguntas relativas à transparência do material concreto serviram como diretriz para a sua investigação: a primeira, referindo-se à relação entre a noção de transparência, enquanto acesso ao conhecimento matemático e atividade do aprendiz e o contexto de utilização do material concreto; e, a segunda, se existia



uma relação entre a transparência e as características do material concreto.

O exame dessas questões o conduziu a resultados opostos ao que se esperava, quanto à eficácia do uso de materiais concretos como esquema de apoio à aprendizagem. Pois, no seu modo de ver, estes modelos ou instrumentos físicos só se tornariam eficientes, relevantes e transparentes, à medida que estes sofressem transformações nas mãos daqueles que os utilizam nas atividades específicas relacionadas ao conteúdo que se está trabalhando (MEIRA, 1998).

Tudo isso conduziu a seguinte reflexão sobre o processo de compreensão dos conteúdos da matemática ou mesmo de compreensão matemática: que o processo de compreensão matemática passa pela aquisição de certos hábitos (atenção; socialização; estudo sistemático; pensar, selecionar, processar, interpretar, conjecturar), habilidades (capacidade de abstrair; capacidade para comparar e diferenciar; controle deliberado; capacidade de construir/reconstruir) e competências em saber relacionar, associar, simplificar, estabelecer heurísticas de modo a aprender a aplicá-las consciente e deliberadamente. De maneira que essas habilidades, hábitos e competências postas em contato com o já conhecido e/ou o novo, estabeleça uma relação de continuidade e/ou de ruptura, contribuindo para que a aprendizagem ocorra.

Nesse sentido, as mudanças cognitivas começariam a ocorrer quando o indivíduo incorporasse o processo de compreensão matemática. Embora este processo de compreensão ocorra de maneira uniforme, porém não linear, é um fenômeno recursivo, uma vez que o ato de pensar, independente da forma e do processo interno, move-se entre níveis de sofisticação, e cada nível de compreensão está contido em níveis sucessivos (PIRIE & KIEREEM, 1989).

Mas, para chegar a este nível de compreensão, o estudante lança mão de

muitos recursos, que não são simplesmente regras isoladas ou exemplos memorizados, são, além de tudo, conjuntos de experiências que este traz para a situação detalhada de instruções, expectativas e maneiras de falar (NEMIROVSKY, 1998).

Neste trabalho, a preocupação está voltada mais precisamente para as questões que permeiam o ensino-aprendizagem do conceito de limite, que, como já foi dito, é o primeiro conceito com o qual o aluno é confrontado num curso de Cálculo Diferencial e Integral. Desta forma, adentrar-se-á, especificamente, na próxima seção, no conceito de limite.



# CAPÍTULO 3

## OBJETIVOS E MÉTODOS

### 3.1. OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho foi reexaminar as bases conceituais envolvidas na compreensão da noção de *limite*, contribuindo para a discussão acerca das dificuldades representadas por diferentes tipos de obstáculos à aprendizagem de tal conteúdo no âmbito do ensino de matemática em nível superior, especificamente nas disciplinas de Cálculo.

Neste trabalho, foi proposta uma perspectiva de análise qualitativa dos protocolos de resolução de problemas produzidos pelos alunos participantes da pesquisa. Nesse sentido, buscou-se analisar interpretativamente os procedimentos de resolução expressos nos protocolos, complementando-se tal análise com transcrições de material gravado durante as sessões de resolução de problemas.

Foram analisados os protocolos dos estudantes, levando-se em conta a sua natureza assimétrica (uma vez que, os conhecimentos desenvolvidos com relação ao conceito estudado, entre os vários participantes são diferentes) e, a ambigüidade inerente à linguagem, e as peculiaridades do campo conceitual de limite, buscando-se, com isso, entender como se dá o processo de compreensão dos conteúdos de limite por esses estudantes e, como se processa a aprendizagem deste conteúdo.

### 3.2. PROCEDIMENTO

O processo de investigação se deu em duas etapas: 1. Observações em sala de aula, videografadas; 2. Sessões individuais de resolução de problemas com questões específicas sobre limite (ver Apêndice 1, com a transcrição do conjunto de problemas utilizados, bem como discussão dos referidos problemas mais adiante, na sessão 3.2.2.), com gravação em áudio dos diálogos entre pesquisador e sujeito.

Os alunos escolhidos como sujeito para a presente pesquisa foram estudantes da Área II do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Pernambuco. Tal escolha deveu-se ao fato dos cursos, da área em tela, possuírem, na grande maioria, em suas grades curriculares, até quatro disciplinas de Cálculo, como acontece, por exemplo, com os cursos de Engenharia. Participaram da presente pesquisa dez estudantes, nove do sexo masculino e uma do sexo feminino, sendo sete do curso de Engenharia de Minas, dois do curso de Geologia e um do curso de Engenharia Eletrônica (o quadro 4 abaixo resume o perfil de constituição do grupo de sujeitos participantes da pesquisa).

| PERFIL             |                          |                  |             |                    |                   |                          |                        |
|--------------------|--------------------------|------------------|-------------|--------------------|-------------------|--------------------------|------------------------|
| Curso de Graduação | Características Sujeitos | Nota exercício 1 | Média final | Resultado final    | Origem geográfica | Curso prévio nível médio | Sist. Ensino de origem |
| Eng. de Minas      | 1                        | 1,0              | 0,33        | Reprovado          | Capital           | Técnico                  | Público                |
|                    | 2                        | 10,0             | 8,0         | Aprovado por média | Capital           | Científico               | Privado                |
|                    | 3                        | 3,5              | 1,17        | Reprovado          | Interior          | Científico               | Privado                |
|                    | 4                        | 6,0              | 5,5         | Aprovado           | Capital           | Científico               | Privado                |
|                    | 5                        | 8,0              | 6,05        | Aprovado           | Interior          | Técnico                  | Público                |
|                    | 6                        | 5,0              | 7,67        | Aprovado por média | Capital           | Científico               | Privado                |
|                    | 7                        | 6,0              | 8,58        | Aprovado por média | Capital           | Científico               | Privado                |
| Geologia           | 8                        | 7,5              | 7,43        | Aprovado por média | Interior          | Científico               | Público                |
|                    | 9                        | 6,0              | 5,66        | Aprovado           | Capital           | Científico               | Público                |
| Eng. Eletrônica    | 10                       | 6,5              | 7,0         | Aprovado por média | Capital           | Científico               | Privado                |

**Quadro 4:** Perfil de Constituição do Grupo de Sujeitos Participantes da Pesquisa

Considerando-se o rendimento escolar do grupo de alunos-sujeitos, pode-se dizer que eles apresentaram um rendimento que poderia ser classificado como bom, visto que dos dez alunos somente dois foram reprovados<sup>10</sup> (segundo depoimento destes dois alunos, a reprovação na disciplina em questão deveu-se a abandono após o resultado do primeiro exercício). Dos outros oito alunos aprovados, cinco passaram por média sendo que dois deles com médias 8,0 e 8,58 respectivamente (ver quadro 4 acima).

Para a definição do grupo no qual seriam feitas as observações em sala de aula, e posterior escolha dos sujeitos participantes da pesquisa, foi estabelecido um contato prévio com professores da disciplina em questão. A turma em que ocorreu a observação das aulas, e escolha dos sujeitos que participaram da pesquisa, foi aquela em que o professor permitiu as observações em classe.

A expectativa era de que a turma selecionada para as observações fosse constituída por alunos de um mesmo curso, pois achávamos que o fato da seleção dos participantes recair sobre estudantes de um mesmo curso facilitaria a análise das estratégias usadas por estes participantes na resolução dos problemas propostos. Contudo a classe que foi escolhida para observação foi heterogênea quanto aos cursos de origem de seus alunos, oriundos de três cursos diferentes: Engenharia de Minas; Geologia e Engenharia de Produção. Mas, essa heterogeneidade nos ofereceu em contra partida a oportunidade de fazer uma análise mais abrangente<sup>11</sup> com relação a alguns cursos da Área II, uma vez que se tinha um grupo de estudantes de origem variada quanto ao curso de origem.

---

<sup>10</sup> A média global de aprovação das turmas de Cálculo I, da Área 2 no semestre 2001/2, é aproximadamente 5,76, já a média de aprovação (no mesmo período) dos dez estudantes que participaram da pesquisa é 5,73. Portanto, comparando os dois rendimentos podemos dizer que o grupo pesquisado tem um rendimento que pode ser considerado como bom.

<sup>11</sup> Não se pretende aqui atribuir caráter representativo, no sentido estatístico, ao grupo de sujeitos observado, tendo em vista o baixo efetivo do mesmo e a ausência de qualquer procedimento de controle na constituição da amostra. A abrangência aludida não permite portanto qualquer inferência generalizadora, no sentido de uma análise inferencial de dados.

Para a etapa das Sessões de Resolução de Problemas, os alunos escolhidos foram aqueles que aceitaram o convite para participação nesta etapa de trabalho, pois entendíamos que esse era o melhor critério para o estabelecimento dos sujeitos participantes da pesquisa. Dos 87 (oitenta e sete) alunos da turma, apenas 14 (quatorze) se apresentaram como voluntários e somente 10 (dez) compareceram às sessões.

### **3.3. AS OBSERVAÇÕES EM SALA DE AULA**

As observações em sala de aula foram gravadas em fita cassete (as primeiras aulas) e videografadas (as demais aulas), tendo servido como pano de fundo para se estabelecer um contato com os alunos e uma relação mais próxima com estes. Adicionalmente, tal atividade possibilitou a observação do discurso de professor e de alunos no contexto da sala de aula, no processo de construção de significados dos conteúdos de limite no Cálculo Diferencial e integral. Ou seja, o discurso enquanto o lugar onde ocorria a ação, ou parte da ação da aprendizagem, ou ainda, o discurso enquanto lugar que servia para criar a realidade da percepção e a atmosfera da construção do conhecimento. Este tipo de dado não foi diretamente incorporado às análises reportadas no próximo capítulo, mas serviu de subsídio à atividade de análise interpretativa dos protocolos.

Ao contrário do que se pensa, o uso do gravador e da câmera não alteraram decisivamente a dinâmica corrente da sala de aula, ratificando o que diz Roschelle (1991), uma vez que, as perturbações oriundas da presença de artefatos de registro tendem a diminuir muito rapidamente, passando a prevalecer a dinâmica própria do contexto social observado. Assim, embora de início se tivesse observado

comportamentos dos alunos do tipo ficar olhando para a câmera, esconder o rosto ou mesmo brincar com o colega do lado referindo-se a câmera, e do professor, revelando em alguns momentos preocupação com a postura e com o timbre de voz tais comportamentos tenderam a desaparecer ao longo das seções de filmagens das aulas.

Com relação ao processo de registro videográfico, por exemplo, um fato interessante ocorreu na terceira aula observada, quando se deu a primeira filmagem. Os alunos daquela classe em particular me viam, no começo, como mais um estudante da Área II como eles, isso porquê na classe não havia apenas estudantes na faixa etária de 18 a 23 anos, havia estudantes mais velhos. Essa digressão servirá para que seja compreendido o fato ocorrido que se começou a relatar.

Ao final da aula alguns alunos aproximaram-se (do observador-pesquisador), curiosos sobre a nossa presença ali, e com uma câmera. Fazendo perguntas do tipo: “Você é estudante de Engenharia?” “Qual o curso que você está fazendo aqui?” “Você está repetindo essa cadeira?” “Você está fazendo algum tipo de trabalho para a Reitoria da Universidade?”. Ao que aproveitamos para explicar o que se estava fazendo e porquê da nossa presença ali na classe. Porém, dois alunos permaneceram mais tempo conversando, enquanto o material de filmagem ia sendo guardado, revelaram algumas histórias que circularam entre os estudantes da classe e até mesmo entre alunos de outras turmas, a respeito da nossa presença.

Uma delas era de que estava ali um estudante que já havia sido reprovado naquela disciplina mais de uma vez e estava gravando as aulas para depois poder estudar em casa, sozinho, e poder anotar melhor os detalhes. A outra era de que tendo um filho que era estudante de engenharia e estando ele matriculado naquela turma e, por se encontrava muito doente e não poder assistir a



aulas o pai dispôs-se a faltar ao trabalho e estava ali gravando as aulas para que o filho tivesse condições de assisti-las em casa depois. Ou seja, num mesmo momento passava-se de aluno super interessado em aprender a disciplina a pai dedicado. E, a terceira, era que estávamos ali fazendo uma pesquisa para a Reitoria da universidade com o intuito de verificar porquê estava ocorrendo tanta reprovação em Cálculo I. Das especulações feitas, pelo menos, a terceira era a que mais se aproximava da situação real.

Tudo o que foi exposto nos parágrafos acima reforça os argumentos apresentados por Roschelle (1991) quanto à presença da câmera na sala de aula, que ficou servindo como elemento de aproximação entre sujeito e pesquisador. A nossa presença foi muita bem recebida e absorvida por eles (estudantes e professor), tendo muito rapidamente perdido o caráter de “novidade” perturbadora.

Conforme já aludido acima, as observações videografadas em sala de aula e as seções de resolução de problemas: produções registradas em papel (elemento suporte utilizado) por os estudantes participantes da pesquisa e gravadas em fita cassete ajudaram-nos a compreender as bases sociais e convencionais dos discursos que criavam (ou não) as possibilidades para a aprendizagem do conceito de limite do Cálculo Diferencial. Isto porque, segundo afirma Edwards (1998), havia a possibilidade de tomar como foco o modo como o conhecimento estava sendo construído (em sala de aula) a partir dos detalhes da fala dos seus participantes (professor e alunos), e levado em consideração os seus aspectos epistêmicos e psicológicos. Ou seja, quais eram os recursos explicativos construídos e utilizados por esses participantes, em interação, na delimitação e orientação do seu discurso durante a condução do processo de construção e de elaboração do conhecimento.

Em geral, o discurso produzido por qualquer um dos participantes de uma

sala de aula, como o discurso do professor, por exemplo, está impregnado pelo discurso de outros (dos seus colegas de cátedra, daqueles que foram responsáveis pela sua formação acadêmica) ou pelo discurso presente nos livros. Poder-se-á dizer que, o discurso que é produzido pelo professor, nesse aspecto, é resultante das multivozes passadas e presentes ao longo das interações sociais e leituras de textos que vão sendo assimiladas, e que passam a moldar-se e constituir-se na fala desse sujeito.

Nesse sentido, esse sujeito utiliza no seu discurso categorias que podem, de acordo com seu status dentro de um contexto específico, garantir-lhe autoridade para atribuir (ou não) validade ao discurso do outro. Esta autoridade instituída, dentro de um princípio sócio-epistemológico, pode ser entendida como o **princípio de autoridade**, ou seja, este indivíduo tendo por base o status adquirido, a partir do seu conhecimento e ou da sua experiência, ou ainda relativo a sua posição dentro do grupo do qual participa, investe-se do poder de atribuir (ou não) validade epistêmica ou status epistêmico ao discurso, ou a intervenção do(s) outro(s) membro(s) do grupo.

### **3.4. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS REFERENTES À NOÇÃO DE LIMITE**

Nesta etapa, durante o processo de investigação da construção de significados pelos estudantes, foi utilizado o método da resolução de problemas, utilizando-se o gravador e as produções escritas como instrumentos para registrar as respostas, na perspectiva de poder identificar na(s) heurística(s) empregada(s) na resolução dos problemas propostos e/ou nas regras utilizadas, como o conceito de

limite era construído por cada um deles. Dessa forma buscou-se observar a sistemática de aplicação de regras e de estratégias utilizadas pelos alunos-sujeitos ao longo dos problemas propostos, analisando-se os procedimentos que eram utilizados para resolver cada problema. Como em relação ao uso da filmadora, o mesmo fato, também, pode ser constatado com relação ao uso do gravador de fita cassete, durante as seções de resolução de problemas. A maior dificuldade relatada pelos participantes era de coordenar o uso da linguagem escrita e da oralizada, concomitantemente, ou seja, eles diziam que não conseguiam escrever e ir explicando ao mesmo tempo em voz alta o que estavam fazendo. E, por isso mesmo, alguns preferiam primeiro fazer o comentário em voz alta e depois escrever a resposta.

A busca dos participantes para a etapa de resolução de problemas se deu após a primeira avaliação feita pelo professor da disciplina, a qual abordou questões sobre limites (ver Anexo 1). Com isso a intenção era: 1. Estimar o nível de preocupação do docente, durante o processo de avaliação do conteúdo discutido em classe, com relação à compreensão dos conceitos sobre limite, exigido dos seus alunos; 2. Verificar o padrão das questões formuladas e o que era exigido do aluno, elementos do tipo: conhecimento de teoremas e propriedades sobre limites de função; a determinação do limite de uma função; verificação da existência do limite de uma função, dentre outros.

O processo de determinação dos participantes para esta etapa da resolução de problemas se deu, tomando-se por base convite feito à participação voluntária para participar da pesquisa.

As notas obtidas pelos alunos na disciplina foram utilizadas para se ter um parâmetro para verificar o rendimento desse aluno em relação ao grupo que

estava inserido, em relação aos demais alunos do seu curso, e aos demais estudantes de outros cursos da mesma Área.

Na seção de resolução de problemas o que se pretendia era verificar a sua compreensão dos problemas apresentados durante o processo de investigação. Ou seja, ter a compreensão da real construção dos significados dos conteúdos de limites. Os problemas propostos, por sua vez, exploravam os mesmos aspectos conceituais daqueles apresentados pelo professor na avaliação do primeiro exercício, conforme é discutido mais adiante, ao se comentarem tais problemas.

Nessa fase de proposição e resolução de problemas fez-se uso de três blocos de formulários: um formulário com perguntas referentes à identificação do estudante, origem, escola que freqüentou no ensino médio, sobre a família, se possui vínculo empregatício e sobre a disciplina Cálculo I (ver Apêndice 2); e o último formulário com as perguntas a serem respondidas na sessão de Resolução de Problemas (ver Apêndice 1).

No formulário com dados de entrevista buscou-se obter informações que nos auxiliasse a enriquecer, de forma biográfico-contextual, análises referentes às competências e dificuldades na sessão de resolução de problemas. Tais informações biográficas, conforme se depreende do exame do guia de questões (Apêndice 2), diziam respeito basicamente ao tipo de escola freqüentada durante o ensino médio (rede pública ou privada); ao tipo de curso de nível médio que freqüentou (científico, técnico ou magistério); ao local onde cursou o ensino médio, (capital ou interior). Em tal questionário buscava-se igualmente obter subsídios acerca de aspectos do tipo discutido na análise crítica do projeto de proposição e oferta da disciplina de Pré-cálculo, relacionados as *possíveis deficiências de base*, relacionadas por sua vez a ausência ou fragilidade do conhecimento de alguns

conteúdos do ensino médio que são considerados básicos para a disciplina referida; ou relacionados ao caráter abstrato dos seus conteúdos e à linguagem simbólica muito densa, que exigem do estudante, por exemplo, familiaridade com significados geométricos e o uso de metáforas conceituais, que são indispensáveis à atitude de pensar e entender o significado de proposições e exemplos e imaginar caminhos para determinar soluções de exercícios.

Já o terceiro formulário (Apêndice 1) referente aos problemas propostos, pode ser dividido em três blocos. O que se pretendeu ao determinar as questões constantes em cada bloco foi verificar: (1) A construção do significado do conceito de limites pelo aluno ao longo do curso, no transcurso do programa da disciplina; (2) Se este aluno consegue construir relações entre os tipos de limites de funções, aprendidos; (3) Se consegue perceber quando ocorre a existência ou não de limites, e; (4) Se consegue resolver os problemas de limite de função.

Com relação aos problemas propostos em cada um dos três blocos o que se pode dizer é que eles foram sugeridos para que pudessem proporcionar uma melhor compreensão acerca do processo de construção de significados para o conceito de limite.

No primeiro bloco aparecem duas perguntas, sendo a primeira formulada de forma indireta, com a intenção de obter do aluno respondente o seu conceito de limite. Pretendia-se com a pergunta a seguir identificar como operava mentalmente o estudante-respondente, como ele organizava cognitivamente os eventos por ele conhecido, ou seja, de que forma mobilizava os seus esquemas existentes na possibilidade de externar o conceito solicitado.

- **Bloco 1, Pergunta 1:** Se um colega lhe perguntasse o que é limite de uma função o que você responderia para ele?

A estratégia de usar uma terceira pessoa se justifica enquanto tentativa para motivar o respondente a elaborar o conceito. Visto que no momento em que escreve (ou fala) o conceito de limite de uma função para uma terceira pessoa, um interlocutor fictício (que não é ele nem o seu interlocutor imediato, o pesquisador), esse respondente se esmera para garantir a esse interlocutor fictício a melhor versão do que seja esse limite.

A segunda questão foi pensada com a perspectiva de confrontar o conceito elaborado pelo respondente na questão anterior com a sua compreensão do que é o limite de uma função, isto é, se havia coerência entre o conceito que ele tem sobre limite e o que ele escreveu.

Com a atividade proposta na pergunta abaixo, pretendeu-se verificar a compreensão do conceito dado, pelo respondente, na questão anterior. Permitindo-lhe, a partir das reflexões, análises e construções que iria realizar, flexibilidade e mobilidade na compreensão daquele conceito que estava em desenvolvimento.

**- Bloco 1, Pergunta 2:** Crie um problema em que se possa utilizar o limite de uma função que, ilustre o seu conceito de limite. Indique de que maneira você resolveria este problema.

Essa pretensão é ratificada no momento em que lhe é solicitado elaborar um problema de limite de função para um outro e depois se colocar na posição desse outro para resolver. A idéia subjacente é: se você compreende, você elabora e você resolve.

No segundo bloco a terceira questão é composta de quatro itens que sugerem a verificação da existência e concomitante determinação dos limites de funções.

**- Bloco 2, Pergunta 3:** Verifique se existe o limite abaixo. Em caso

afirmativo calcule esse limite.

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x > -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

d. Seja  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ , Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Nos três primeiros itens (**a**, **b** e **c**), em que o aluno deverá verificar a existência ou não dos limites e calculá-los em caso afirmativo, aparece o que podemos chamar de problemas padrão. O primeiro desses limites de função (letra a) implica na determinação do limite de uma função contínua, uma função polinomial do terceiro grau e que por isso mesmo tem um limite definido para  $x$  igual a 2, conforme é solicitado, e é dezessete.

O segundo limite de função (letra b) é determinado por uma função que é descontínua em  $x$  igual a 1 e que por isso mesmo possibilita o surgimento do chamado limite infinito. Limite este que se estabelece na possibilidade da variável independente  $x$  convergir para um valor que é o ponto de descontinuidade da função, em outras palavras, a variável independente converge para um valor no qual a função racional estabelecida tem o seu denominador convergindo para zero e o numerador para um número diferente de zero. Isto é, no caso do item citado, à medida que a variável  $x$  converge para um, na vizinhança, à sua esquerda, a função dada cresce (ou decresce) indefinidamente no sentido negativo do eixo  $y$  (das ordenadas) e na vizinhança oposta, à direita de um, cresce também indefinidamente só que no sentido positivo do eixo das ordenadas, ou seja, quando  $x$  converge para um por uma sequência de números positivos maiores do que 1. Nesse caso temos

os limites laterais infinitos e particularmente o limite não existe, pois são diferentes, por um lado menos infinito e por outro mais infinito.

No terceiro item (letra c) é apresentada uma função determinada por mais de uma sentença, em que o aluno tem de verificar a existência do limite da função, como no problema anterior, verificar o limite para seqüências numéricas para as quais  $x$  converge à esquerda e à direita do número real  $-1$ , porém desta vez com funções diferentes para cada uma das vizinhanças de  $-1$ , a primeira é uma função do primeiro grau e, portanto contínua em  $-1$ , e, logo o seu limite à direita de  $-1$  é um e a segunda função que estabelece o limite á esquerda de  $-1$  é uma função racional que assume valor  $-2$  para uma seqüência de valores de  $x$  à esquerda de  $-1$ . Assim como os limites laterais, à esquerda e à direita de  $-1$  existem, porém são diferentes, os limites da função  $f(x)$  não existe quando  $x$  tende a  $(-1)$ .

Na última questão desse bloco propõe-se a quebra de uma lógica didática que permeia, em geral, este tipo de questão, que aparece na forma de mais de uma sentença. Já que a função  $f(x)$  determinada por as duas sentenças que aparecem é uma função contínua possui uma estrutura parecida com a do item precedente (letra c), porém com solução bem diferente da encontrada no item anterior, pois nesta situação o limite existe e é um. Mas, que o aluno para estabelecer a solução precisará fazer uma abordagem similar à do item anterior.

O bloco três é composto de seis conceitos de limites e, o que se pede é que o aluno respondente posicione-se em relação a conceitos que teriam sido dados, por alunos da área II, sobre limite de função. Pretende-se aqui que ele organize, amplie e/ou modifique qualitativamente a sua percepção conceitual de limite de uma função.

**- Bloco 3, Pergunta 4:** As informações abaixo foram dadas por alunos da



Área II, quando solicitados que dessem um conceito de limite. Gostaria, se possível, que você se posicionasse, tecendo comentários sobre cada uma dessas respostas.

**a:** Um limite descreve para onde uma função  $f(x)$  se move quando a variável  $x$  se move em direção a um certo ponto.

**b:** Um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar.

**c:** Um limite é um número do qual os valores  $y$  de uma função  $y = f(x)$  podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de  $x$ .

**d:** um limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima, mas nunca alcança.

**e:** Um limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar.

**f:** Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado.

Solicita-se que ele opine, corrija, propondo inclusive, se for o caso, um conceito diferente do conceito em análise. Dos seis conceitos informais de limite de uma função real a uma variável real, que aparecem, apenas dois estão mais próximos do que seria a definição formal de limite, alternativas **c** e **e**.

O que se pretendeu verificar aqui foi à disponibilidade dos sujeitos em, ao defrontar-se com esses seis conceitos de limite, estabelecer como verdadeiro algum(ns) conceitos que seja(m) similar(es) ao(s) seu(s) ou se vai optar por conceito(s) com significado(s) distinto(s) do(s) seu(s). Ainda, nesta etapa os problemas propostos confrontam o aluno com as várias idéias (formais e informais) sobre limites e, a intenção é avaliar também que tipos de crenças os estudantes mantêm sobre este tema.

O capítulo seguinte figura com a análise das produções dos alunos-sujeitos pesquisados para os problemas acima comentados.



## **CAPÍTULO 4**

### **RESULTADOS**

Neste capítulo são analisadas as respostas dos sujeitos às doze questões apresentadas durante as sessões de resolução de problemas. Para cada questão será mostrado um quadro com três colunas comportando a seguinte configuração: na primeira coluna da esquerda o código que foi atribuído ao aluno, na segunda coluna, do centro, a resposta de cada aluno à questão formulada e na terceira e última coluna análise da resposta de cada aluno, para a respectiva questão respondida. Ao final de cada sessão analisada aparecerá um quadro-resumo onde estarão listadas as categorias criadas a partir da análise das respostas desses alunos a cada questão feita. A intenção é de que através desse quadro resumo tenhamos um panorama geral do conceito de limite de cada aluno.

## 4.1 QUESTÕES E DADOS COLETADOS

**Questão 1:** Se um colega lhe perguntasse o que é limite de uma função o que você responderia para ele?

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Ham, o que eu entendo de   1: limite é que... é mais ou menos, é aonde ele vai se chegar,  2: é o ponto que ele, que um, como é o caso, uma função sei lá melhor se aproxima.   Bom,  3: o limite de uma função para mim é o máximo valor onde determinada função consegue chegar, ou seja, nunca irá ultrapassar essa marca.  </p> <p><b>Texto escrito proposto pelo aluno:</b> O limite de uma função para mim é o máximo valor onde determinada ação consegue chegar, ou seja, nunca irá ultrapassar essa marca.</p> | <p>O aluno confere três conceitos para limite: no conceito 1 atribui um caráter dinâmico, embora não faça referência a quem ou o que vai chegar. Nos dois últimos, embora refira-se a limite de função, em 2 o faz com uma visão informal do limite como uma aproximação e em 3 com uma visão, também informal, do limite como uma fronteira.</p> |

O limite de uma função para mim é o máximo valor onde determinada ação consegue chegar, ou seja, nunca irá ultrapassar essa marca.

**Figura 1:** Texto escrito pelo aluno AI1 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b>    1: Limite de uma função, no meu ponto de vista [inaudível] (...). Eu sei que a derivada é a área de um gráfico, né! Então esse limite seria exatamente o extremo desse gráfico que me daria os pontos de extremidade do</p> | <p>O aluno em questão apresenta nove propostas para limite. A versão 8, a penúltima, embora tenha sido apresentada de forma incompleta e até irônica pelo aluno, é a que, caso fosse completada, mais se aproximaria da definição formal de limite. A proposta 1 é uma tentativa</p> |

gráfico||. Seria um método... para encontrar ...os...[inaudível]. (...) Pôxa! Parecia tão fácil. Deu um branco agora. || **2:** Seria o momento para encontrar... Eu só acho um resultado no limite..., para atingir um valor provável..., um resultado... quando... atribuo... um valor... para  $h$ ... na fórmula... limite quando  $h$  tendendo a  $x$  é igual a uma função, uma função de  $x$ ... quando, ... quando  $h$  tende a  $x$  é uma função de  $(x + h)$ , ... menos a função de  $x$  ... sobre  $h$  ... que é o resultado ... que me dá... ser sempre a área, a área... nesse ponto vai ser... os pontos... os pontos... da função... usa... os pontos da função no gráfico... quando... eu vou... determinando... os valores pra  $x$ ...||. É, eu acho que eu dizia. ... E aí se um colega se me perguntasse o que é o limite de uma função, o que é que eu escreveria para ele? || **3:** Seria um método para encontrar ... os resultados quando eu atribuo um valor para  $h$ . Eu vou repetir, a mesma coisa!...Para  $h$  na fórmula limite quando  $h$  tende a  $x$ , em função de  $x$ . Eta rapaz! é quando  $h$  tende a zero... que eu acho um valor||, Ih! agora eu já sei. Posso fazer de novo? Lembrei agora, tudo agora! || **4:** Limite é o ponto ... de ... que indica... [inaudível] que indica ... uma ...uma variação..., este ponto... mostra... que a partir dele há uma mudança... no sentido... que eu possa atribuir números que se aproximam dele..., quanto mais se aproximam tende a outro, passam dele tende a outro||, boto isso também...[inaudível]. (...) || **5:** Limite é o

de apresentar o limite de uma função como os pontos de extremidade do gráfico dessa função cuja derivada representaria a área delimitada pelo gráfico dessa função. O limite aparece como um ponto extremo, podendo ser seu ponto de máximo ou de mínimo. Em **2** o limite aparece como um valor provável a ser atingido, abordando, inclusive, o aspecto da unicidade desse limite. Entretanto este sujeito acha que para atingir esse valor provável é necessário que se atribua um valor, denominado de  $h$ . Aprece então a necessidade de introduzir uma função como ferramenta para avaliar limite e, nesse momento é citada (com imprecisão) a relação que estabelece a derivada de uma função  $f(x)$  no ponto  $h$  (imprecisão porque  $h$  não tende a  $x$  e sim a zero), reforçando a imprecisão conceitual quando afirma que é obtida a área no ponto, quando na verdade o limite no ponto, dito extremo, representa a inclinação da reta tangente sendo, portanto o limite das inclinações das retas secantes que passam pelos pontos do gráfico,  $(x, f(x))$  e o ponto referido quando  $h$  tende a zero. Ao retomar a questão atribui, em **3**, uma nova versão ao conceito de limite como um método para encontrar resultados quando se atribui um valor a  $h$ , valor esse que na sua compreensão é uma função de  $x$ , implicando no limite como uma aproximação. Até que percebe a imprecisão cometida na definição do limite e faz a correção. A percepção do erro suscita um prenúncio de um entendimento do conceito de limite, contudo não é o que acontece, permanecendo no conceito **4** a caracterização do limite como aproximação, composto com

ponto que indica o ponto onde há uma variação no gráfico, estes pontos mostram que a partir dele... há uma mudança no..., no sentido do gráfico.... Quanto mais valor eu vou atribuindo próximo dele [inaudível]|| .... Pode demorar assim ou tá muito demorado? (...) É porque eu sei o conceito... eu sei o conceito mas não tô sabendo me expressar. Vou tentar te explicar e depois eu continuo. (...) Deixe eu ler então. || 6: Eu sei que limite é um ponto que qualquer número que atribuímos próximo dele, quanto mais próximo nós chegamos desse número encontrado no gráfico dá uma noção, aí a partir desse ponto se eu chegar depois dele me daria uma outra noção. E, baseado no primeiro, é um ponto de uma fração desse meu gráfico. Podia ser um número extremo, podia ser um número de desencontro, poderia de ligação||. || 7: É tipo em física mesmo, quando você tem uma... a força elástica ou, de atrito cinético e estático. Então ele vem, vem, vem, tudo indica que quando chega no máximo dele ele cai. Aí quer dizer que aquele ponto ali onde ele caiu seria exatamente o limite da força de atrito que vai pra a cinética. Da estática pra a cinética. Atrito estático e atrito cinético. Então eu sei que o limite é isso, exatamente aquele ponto ali, que há uma modificação||. Agora como explicar, eu sei que usa essa formulazinha aqui. Hum! Agora em cálculo eu não sei onde eu encontro isso, eu encontro na função que eu sei que, por exemplo... em

uma dinâmica de variação e mudança. Em 5 há a necessidade de sustentar a compreensão sobre o conceito de limite no uso do gráfico como representação e como meio de explicá-lo. Assim, estabelece o limite como o ponto em que ocorre variação no gráfico inclusive com uma mudança de sentido no gráfico à medida que se aproxima do limite atribuindo valores. No entanto permanece uma insegurança com relação ao conceito de limite, tanto que postula um novo conceito – o de número 6 –, no qual o limite figura como um ponto no gráfico cuja aproximação deste é feita por números cada vez mais próximos e que dependendo de como se aproxime desse limite obter-se-á noções, comportamentos e valores diferentes para esse ponto limite. Aparece nessa representação sobre limite conceitos confusos de: lateralidade do limite; descontinuidade e continuidade de uma função; e de pontos de máximo e de mínimo de uma função. A tentativa de explicar e compreender o conceito de limite continua – com o conceito 7, limite como o ponto onde ocorre uma modificação –, utilizado-se, para esse fim, os conceitos de força de atrito estático e atrito cinético. Há uma necessidade do aluno utilizar, o que ele denomina, algo prático para compreender o conceito, isto é, há uma busca pela concretização do conceito para que se torne inteligível. Nessa tentativa de compreensão é então anunciado o último conceito (o de número nove) em que novamente o limite aparece como uma mudança. Uma mudança no gráfico quando se passa desse ponto limite. Embora permaneça a insistência com relação à mudança no gráfico,

física[inaudível] física é prático dá pra ver o que acontece. || 8: Agora em cálculo vou explicar o que, matematicamente um númerosinho, diminuizinho... eh matematicamente! eh limite! é um ponto [inaudível]||.... || 9: Limite é um ponto onde acontece... uma mudança .... Quando passamos ... limite é um ponto onde acontece uma mudança no gráfico quando passamos desse ponto.|| ... Pronto.

**Texto escrito proposto pelo aluno:** Seria um método para encontrar as (os pontos que) um resultado quando atribui um valor para h da fórmula  $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

que o resultado me dá os pontos da função no gráfico quando eu vou atribuindo valores para x.

- lim[ite] é ponto que indica o ponto onde está uma variação no gráfico este ponto mostra que a partir dele a um mudança no sentido do gráfico.

- \* limite é um ponto onde acontece uma mudança no gráfico quando passamos deste ponto.

diferentemente do que ocorre em 7, neste último aparece implícito o conceito de ponto de inflexão – ponto no qual o gráfico da função muda de sinal, na sua vizinhança.

Seria um método para encontrar os (os pontos que) um resultado quando atribui um valor para h da fórmula  $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  que o resultado me dá os pontos da função no gráfico quando eu vou atribuindo valores para x.

→ lim é ponto que indica o ponto onde está uma variação no gráfico este ponto mostra que a partir dele a um mudança no sentido do gráfico.

\* limite é um ponto onde acontece uma mudança no gráfico quando passamos deste ponto.

**Figura 2:** Texto escrito pelo aluno AI2 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>Produção oral do aluno;    1:</b> Eu vou tentar explicar dando um exemplo, né. Um exemplo que acho todo mundo conhece que é da geometria o ponto adimensional. O ponto adimensional é uma representação gráfica de um. É a mais simples se eu não me engano da geometria, só que ele é considerado um objeto adimensional porque eu posso imagina-lo do tamanho de um ponto que eu faça com uma caneta ou lápis no papel e uma outra pessoa pode julgar um ponto como se estivesse observando a terra a uma distância muito grande. É um referencial. Então, o limite é quando você pega, por exemplo, você pega uma reta do plano cartesiano, por exemplo, ela tem o, a sua divisão em unidades de menos infinito a mais infinito e você querendo chegar a um determinado valor. Vamos dizer ao centro desta reta do plano cartesiano, considerar sendo zero o ponto central. Então, eu posso imaginar estando na marca menos um e do lado positivo mais um. Então, a medida que eu vou me aproximando do zero eu posso ir diminuindo, imaginando diminuindo os pontos que formam esta reta. E como o ponto é adimensional eu posso cada vez chegando mais próximo desse valor zero sem nunca alcançá-lo. Eu posso chegar aqui num valor 0,5; depois 0,25; depois 0,125; depois 0,00001. Então, eu posso imaginar sempre me aproximando do</p> | <p>O aluno utiliza muitas caracterizações e metáforas para descrever o limite. Utiliza as metáforas do ponto adimensional, da reta, do infinito do plano cartesiano e do zero como ponto central da reta, como representações para estabelecer a noção de limite. Esta reta passa a ser estendida numa divisão de unidades de menos infinito a mais infinito na qual o zero figura como o centro dessa reta, que está contida no plano cartesiano, e como o ponto limite. Estabelece o intervalo de menos um a um, com zero no centro e vai utilizando intuitivamente o conceito formal de limite de uma seqüência – no qual um número real <math>a</math> é limite de uma seqüência se cada vez que diminui a distancia ao número real <math>a</math> os termos da seqüência vão se tornando e se mantendo cada vez mais próxima de <math>a</math> –. Como também as concepções de limite agindo por aproximação e de limite como inalcançável. No primeiro caso, do limite por aproximação, utiliza uma seqüência numérica de valores maiores que zero tendendo a zero, de maneira que essa aproximação só é possível, segundo sua concepção, porque o ponto é adimensional. Mas o fato do ponto ser adimensional não garante que este seja alcançado no limite por uma seqüência numérica. E embora diga que possa imaginar o ponto zero tão menor quanto queira, na verdade está se referindo a tornar as seqüências tão próximas de zero quanto se deseje. O que se tem de fato é que o aluno mantém a crença no limite como inalcançável.</p> |



valor zero só que nunca eu chego ao ponto zero. Porque, o ponto zero eu posso imaginar ele quão menor eu queira. Então, eh, eh, pra mim limite é justamente mais ou menos esta definição de você imaginar um determinado ponto, determinado valor mais que nunca será alcançado. Você pode chegar mais próximo imaginável mas nunca alcançá-lo. Minha definição que eu penso de limite é isso aí|||. Creio que é assim, não estou bem lembrado não.

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

Tomando como exemplo o ponto que na geometria é uma representação gráfica adimensional. Quão menor possa imaginar se tamanho, e considerando que uma reta é formada por infinitos pontos (susse) sucessivos. Posso considerar o eixo dos x e (ao) aproximando do valor zero, tanto pela esquerda quanta pela direita, poderei assumir valores cada vez mais próximo do zero, porém nunca (alcans) alcançando o valor exato do zero.

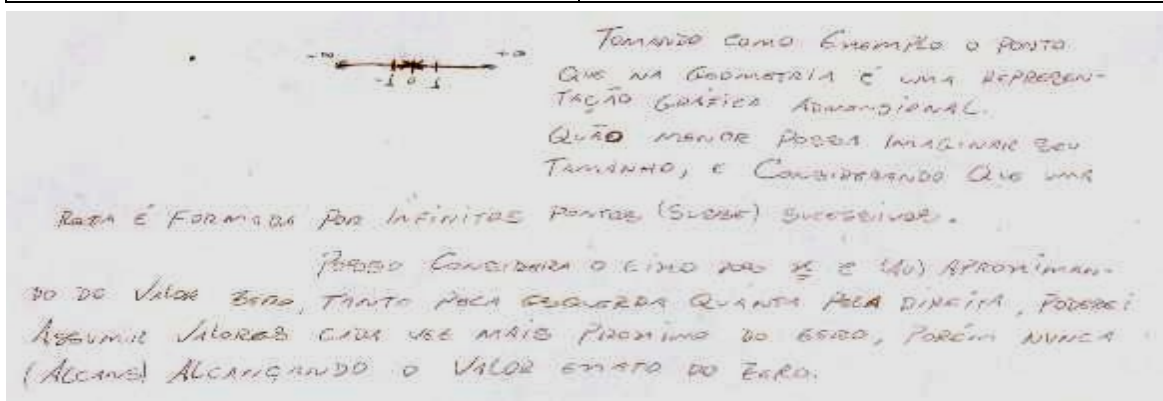
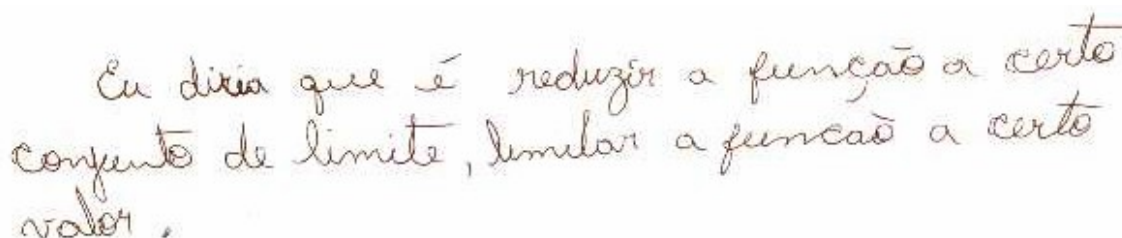


**Figura 3:** Texto escrito pelo aluno AI3 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Diante do impasse. Se perguntar    1: o que é o limite de uma função. Eu acho que é, eu diria que, reduzir a função a certo conjunto de limite, eu não, ia dizer que é limitar a função ... a função a um certo valor.   Eu acho que é isso. Só isso?</p> <p><b>Texto escrito proposto pelo aluno:</b> Eu diria que é reduzir a função a certo conjunto de limite, limitar a função a certo valor.</p> | <p>O modelo estabelecido é o de que o limite da função pode ser reduzido a certo conjunto de limite e limitar a função a um certo valor. Neste caso se estabeleceria um conjunto de limites que essa função poderia assumir e esses limites iriam aparecendo de acordo com as condições estabelecidas à variável independente, digamos <math>x</math>. Com isso não se teria o limite porém limites da função.</p> |



Eu diria que é reduzir a função a certo conjunto de limite, limitar a função a certo valor.

**Figura 4:** Texto escrito pelo aluno AI4 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Bem, começando né, eu escreveria que,    1: limite é quando uma variável, variável <math>x</math> pertencente aos reais. É... deixa ver. Quando uma variável <math>x</math> pertencente aos reais tende a um número positivo. Caso isso ocorra, caso isso ocorra, para todo número <math>\epsilon</math> existe um número positivo, para todo, existe positivo, eu não lembro como é esta letrinha mais é essa aqui mais ou menos. Então, aí podemos dizer que temos, que temos, xis menos <math>a</math> em módulo menor que <math>\epsilon</math> e podemos ver que a função xis menos <math>L</math> [letra ele] em</p> | <p>O aluno apresenta rigorosamente como conceito de limite – embora trocando os raios das vizinhanças de <math>x</math> e de <math>f(x)</math>, respectivamente em torno de <math>a</math> e de <math>L</math> –, a definição formal de limite de uma função. O nome da letrinha a que se refere é delta, <math>\delta</math>, e ela representa o raio da vizinhança em torno do ponto <math>a</math>. Rigorosamente o módulo de <math>x</math> menos <math>a</math>, que representa a distância de <math>x</math> ao <math>a</math> é menor do que delta e o módulo de <math>f(x)</math> menos <math>L</math>, que representa a distância de <math>f(x)</math> a <math>L</math> é menor do que <math>\epsilon</math>, uma vez que a vizinhança em torno do limite <math>L</math> é <math>\epsilon</math>.</p> |

módulo é menor que essa letrinha que eu chamei aqui, pronto acho que é mais ou menos isso||. (...) Eu tentei fazer e me enrolei um pouquinho.

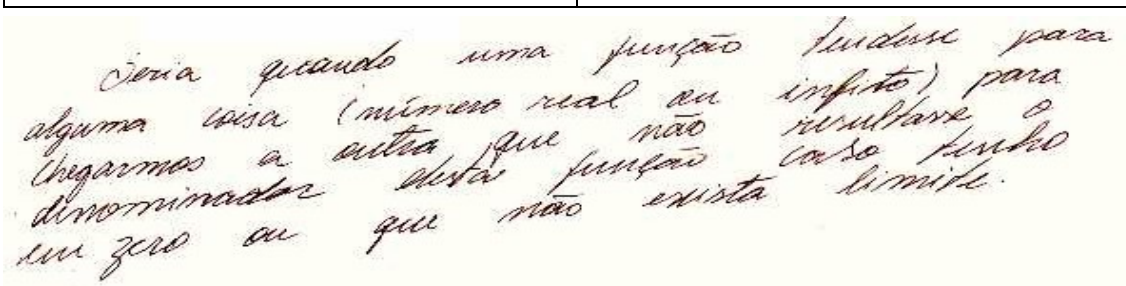
**Texto escrito proposto pelo aluno:** É quando uma variável  $x \in \mathbb{R}$  tende a número positivo. Caso isso ocorra para todo número  $\varepsilon$ , existe um número positivo  $\delta$ .  
Temo[s]  $|x - a| < \varepsilon \rightarrow |f(x) - L| < \delta$ .

É QUANDO UMA VARIÁVEL  $x \in \mathbb{R}$  TENDE A NÚMERO POSITIVO. CASO ISSO OCORRA PARA TODO NÚMERO  $\varepsilon$ , EXISTE UM NÚMERO POSITIVO  $\delta$ . TEMO  $|x - a| < \varepsilon \rightarrow |f(x) - L| < \delta$ .

**Figura 5:** Texto escrito pelo aluno A15 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Certo. Eu vou explicar para depois escrever. Eu, limite na realidade, se eu fosse explicar para ele eu não saberia definir. Porque nem todos os professores explicam a introdução, a definição de limite. Quer dizer o professor que eu tive de Cálculo I não me definiu o que era limite, a idéia que eu tenho talvez seja até errada, aí eu tentarei explicar da forma que eu entendi não da forma que me foi passada. É, explicaria se um colega me perguntasse o que é limite de uma função, eu escreveria que seria,    1: o limite seria quando uma função tendesse para alguma coisa, isso pode ser número real ou infinito mesmo, pra chegarmos a outra que não, eh ... não resultasse o denominador desta função caso tenha um zero, ou que ela não</p> | <p>As duas versões apresentadas como conceito de limite são similares, sendo que na primeira versão é a versão oral e a segunda é a repetição, oral, do que foi escrito. Nestas versões reconhece-se a possibilidade do infinito como limite quando é admitido que a função “tendesse para alguma coisa, isso pode ser um número real ou infinito mesmo”, ou da não existência do limite até na possibilidade “para chegarmos a outra que não (...) exista o limite”. Nos trechos aparecem: um modelo de função – uma função racional em que no ponto dado o denominador tende a zero–, reforçada por a afirmação “não resultasse o denominador desta função caso tenha um zero”; e de não existência do limite respaldada na justificativa “ou que não exista limite”. Neste fato da não existência do limite, ainda que não esteja clara na conceituação, mantendo-se o modelo de função</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>exista, ou que não exista o limite.      <b>2:</b> Seria quando uma função tendesse para alguma coisa (número real ou infinito) para chegarmos a outra que não resultasse o denominador desta função caso tenha um zero ou que não exista limite.  </p> <p><b>Texto escrito proposto pelo aluno:</b></p> <p>Seria quando uma função tendesse para alguma coisa (número real ou infinito) para chegarmos a outra que não resultasse o denominador desta função caso tenha um zero ou que não exista limite</p> | <p>racional, a não existência do limite está atrelada a condição de lateralidade do limite. O que significa dizer que, o limite de uma função existe se e somente se os limites laterais existem e são iguais. Pode-se dizer, apesar das superposições conceituais, que se parafraseia considerações que estão mais próximas das propriedades e definição formais de limite de uma função.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



Seria quando uma função tendesse para alguma coisa (número real ou infinito) para chegarmos a outra que não resultasse o denominador desta função caso tenha um zero ou que não exista limite.

**Figura 6:** Texto escrito pelo aluno Al.6 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b>    <b>1:</b> Limite de uma função é quando você ... é complicado. Deixe ver é quando acontece com uma variável em relação a outra.   Pode pensar o que é realmente? (...)    <b>2:</b> Limite de uma função tem que ver pelo menos como função tendendo a que número, no caso a função pode, tendo um número, se ela não definir naquele número aí o limite daquela função é determinado por aquela expressão.   Limite, rapaz estou com vergonha de escrever. (...)    <b>3:</b> Limite de efe de xis, xis tendendo a xis, zero. Tem a ver com a derivada de uma função? (...) Se você tem</p> | <p>Consegui-se identificar o estabelecimento de cinco conceitos na tentativa de determinar um conceito de limite de função. Aparecem duas versões : a. O limite como um número ou expressão, <b>2 e 4</b>; b. O limite de uma função como conceito de derivada, <b>3 e 5</b>; c. O limite de uma função como inalcançável, <b>5</b>. Na primeira versão aparece uma tentativa frustrada de estabelecer o limite de uma função através de uma relação entre duas</p> |

a derivada de função é o quanto ela cresce em relação a um ponto de aceleração no nível de aceleração. No espaço, a derivada do espaço é a velocidade é o ... não estou me lembrando não, tá complicado assim definir limite. || || 4: Limite é ao que tende alguma coisa, né! (...) É porque é complicado você ficar raciocinando. É realmente é complicado. É porque sem um exemplo claro que, se você desse um exemplo assim tipo uma função, a função tendendo a um número qual seria o limite. (...) Você colocou lá, por exemplo, aquela equação de  $x$ is menos um,  $x$ is mais um,  $x$ is tendendo a zero, não  $x$ is tendendo a menos um. [inaudível]. Realmente caramba agora é que eu estou pensando como é que isso acontece, porque é que isso acontece. (...) É assim tipo, uma função espaço é definida como... por exemplo a gente olha no Cálculo II duas variáveis, mas eu ainda sou Cálculo I, aqui. || || 5: Aí você tem uma função de  $x$ is em  $y$ , aí tem um certo ponto que ela não é definida. Ela tangencia por exemplo aqui uma reta, ela tangencia só que nunca toca, aí você tem no caso, aí você tem essa função aqui  $x$ is dois menos um sobre  $x$ is mais um, e você nunca vai...aí porque efe de  $x$ is é mesma coisa que o  $y$ . O  $y$  você vai encontrar no mínimo e o efe de  $x$ is é só no máximo. É o  $y$  da função. (...) Aí você tem aqui a função tendendo a um número, só que ela nunca chega a esse número. Qual o limite dessa função, tendendo a esse número? Aí você está, nesse caso aqui vai ser menos dois,  $y$  vai ser igual a menos dois com  $x$ is tendendo a menos um. (...) Isso pra mim é algo muito interessante porque como é que você pode ter uma imagem de um conjunto de... engraçado... um ponto que não pertence a função. Aí eu acho

variáveis. Quando pede para pensar mais surge uma segunda versão na qual é possível perceber uma mudança conceitual, pois o limite já passa a figurar como um número para o qual a função tende. Contudo surge um obstáculo conceitual, em que não havendo a possibilidade do número ser o limite da função, este então será determinado pela expressão que define a função. A tentativa de superar o obstáculo anterior se dá ao buscar um novo conceito, o terceiro, de derivada de uma função associando-o ao conceito físico de aceleração e de velocidade. Porém o esforço foi frustrado pois não fica patente a relação entre limite, derivada e os conceitos de aceleração e velocidade, tanto isso é verdade que parte-se então para o estabelecimento de mais um conceito, o de número quatro, porém a possibilidade do estabelecimento conceitual atrela-se à necessidade da presença de uma função que sirva como modelo de representação. Pois, a exibição da função aponta para a representação gráfica desta e isso estabelece uma confiança na compreensão do fenômeno a partir da observação do gráfico. Ou seja, a capacidade de abstração ainda está limitada. Mesmo o gráfico da função e/ou a própria função não garantem a construção do significado do conceito de limite. O quinto conceito, que é apresentado,

bastante interessante só que até agora já tentei meditei muito sobre isso, já falei com outras pessoas inclusive sobre isso. Mas é meio interessante. Que, embora você não possa definir a função num ponto, você pode trabalhar com aquela função naquele ponto. Tendendo a um limite que teoricamente só matematicamente falando pode ser calculado. Porque isso aí é bem pessoal assim mesmo. (...) Deixe eu ver é a imagem de um ponto que não pertence a função. (...) É porque eu estou inventando, porque não existe não, você não pode dividir por zero. Não podia ser limite de xis dois menos um com xis tendendo a menos um também, nesse caso aqui seria zero. (...) Todos dois são limite só que um é um caso bem interessante, e o outro é mais comum, ou seja essa função aqui,  $y = f(x) = x^2 - 1 = 0$ , ou seja quando a função tende a um número, quando xis tende, no caso a menos um y tende a dois, tende a zero aliás, não é!!

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = \lim_{x \rightarrow -1} (-1-1) = -2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad f(x) = y$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 1 = 0 \quad y = -2 \quad x \rightarrow -1$$

$$y = f(x) = x^2 - 1 = 0$$

ratifica esta afirmação visto que o aluno exibe a função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ , para análise. Observando que o ponto  $x = -1$ , é um ponto de descontinuidade desta função, faz um esboço do seu gráfico e afirma que no ponto de descontinuidade referido tem uma reta que tangencia o gráfico embora ela não o toque. Na realidade a reta não toca o gráfico porque esta reta é uma assíntota ao gráfico. O fato de não haver uma melhor compreensão da diferença entre os conceitos de tangente e assíntota promove um obstáculo conceitual que obstrui a compreensão do fenômeno em evidência, emergindo afirmações incongruentes do tipo “y você vai encontrar no mínimo e o efe de xis é só no máximo”, quando antes havia afirmado que “(...) efe de xis é mesma coisa que o y”, como também a confiança de que o limite é inalcançável. Contudo, a insistência em que se observasse com mais cuidado a função exibida o levou a encontrar o limite da função “aqui vai ser menos dois, y vai ser igual a menos dois com xis tendendo a menos um.”. Este foi um fato importante pois provocou um conflito de ordem cognitiva no aluno, permitindo que pudesse repensar na sua atitude frente ao conceito de limite, “Isso pra mim é algo muito interessante porque como é que você pode ter uma imagem de um conjunto de... engraçado... um

ponto que não pertence a função. Aí eu acho bastante interessante só que até agora já tentei meditei muito sobre isso, já falei com outras pessoas inclusive sobre isso. Mas é meio interessante. Que, embora você não possa definir a função num ponto, você pode trabalhar com aquela função naquele ponto. Tendendo a um limite que teoricamente só matematicamente falando pode ser calculado.”. A mudança de atitude provocada pelo exemplo exibido, extraído de um dos exercícios apresentados para a resolução, o levou a refletir sobre o comportamento do limite como decorrência da função.

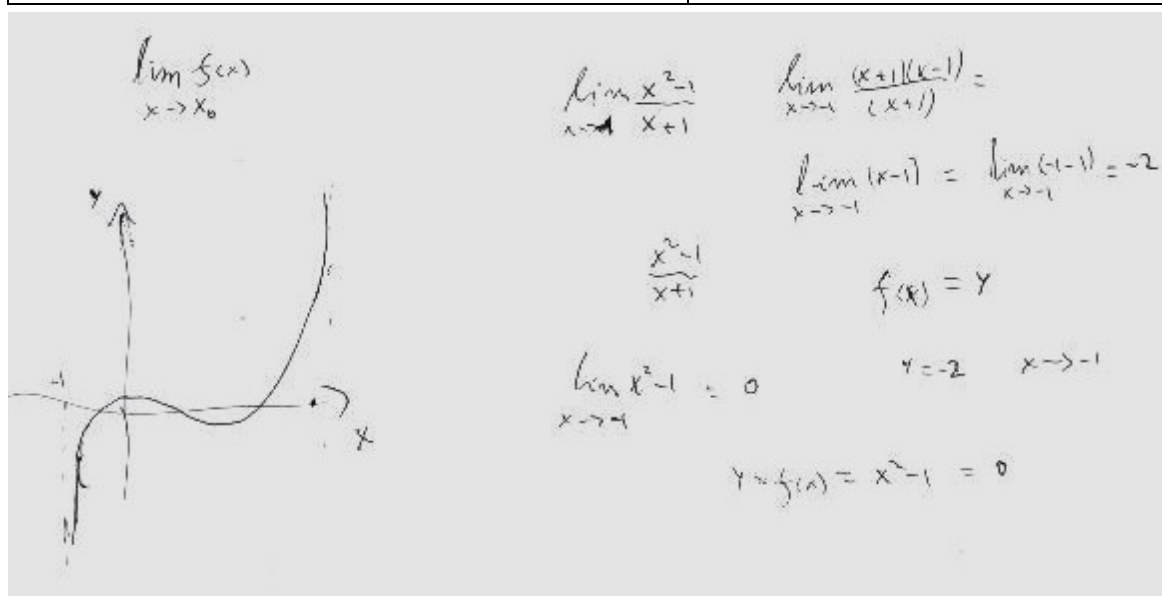


**Figura 7:** Texto escrito pelo aluno AI7 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> E o que é que eu escreveria para ele,    1: diria que o limite é exatamente quando a função né, ela tende para um ponto, para um ponto, não é? Se eu não me lembro é isso. Você</p> | <p>É possível identificar dois conceitos que tem conclusões similares, ou seja, obter o limite de uma função através de uma aproximação por seqüências numéricas. Aqui está uma presença forte da crença do limite como resultado de uma</p> |

vai jogando valores de  $x$  na função pra aquela função dá um valor limite. || Eu acho que é isso que eu faria. (...) Isso algebricamente né. Isso na prova. (...) || 2: Diria que é o limite quando você atribui valores (...)  $x$  na função e a função vai tender à um valor limite. ||

**Texto escrito proposto pelo aluno:** diria que é o limite quando você atribui valores a  $\{de\}$   $x$  na função e a função vai tender à um valor limite.

*diria que é o limite quando você atribui valores a  $\{de\}$   $x$  na função e a função vai tender à um valor limite.*

**Figura 8:** Texto escrito pelo aluno A18 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vamos ver,    1: limite de uma função é o valor da função que está sendo analisada quando ele tende a um determinado número.    (...)    2: É o valor que uma determinada função, a qual está sendo analisada, tende. Ah! Eu não posso esquecer esse tende, boto entre parênteses? (...) Quando ela tende a um outro certo número.   </p> <p><b>Texto escrito proposto pelo aluno:</b><br/>É o valor que uma determinada função, a qual está sendo analisada, (tende) quando ela tende a um outro certo número.</p> | <p>Apresentam-se dois conceitos similares que identificam-se no reconhecimento do limite como um valor para o qual a função analisada está tendendo. Ainda que confusa há uma tentativa de explicitar, de forma intuitiva, a definição formal de limite. A convergência entre o conceito e a definição não foi melhor sucedida porque há uma superposição nos papéis desempenhados pela variável independente <math>x</math> que tende a um elemento do domínio ou não da função observada e o seu limite. Ou seja, quem tende para um certo número é a variável independente. Essa incompreensão dos papéis desempenhados por <math>x</math>, enquanto variável independente, e pelo limite da função obstrui a compreensão do limite de uma função.</p> |



É o valor que uma determinada função,  
a qual está sendo analisada, (temo) quando ela  
temo a um outro certo número.

**Figura 9:** Texto escrito pelo aluno AI9 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É pra responder essa questão aqui, eu responderia para ele que o    1: limite de uma função seria o limite de efe de xis mais aga menos efe de xis sobre aga, mais na verdade é o resumo de uma coisa maior, que seria a, o mesmo que dizer que isso aqui, é a derivada de uma função, e essa derivada ela pode ser, se for derivada de um polinômio a gente pode escrever que: efe grande da função, efe de xis a derivada dele seria efe linha de xis. Que no caso de um polinômio simples seria efe de, efe linha de xis onde a função xis, eh! fosse mais ou menos dois xis ao quadrado. Seria a função xis ene menos um, e eu tentava depois explicar com outros exemplos a, a, de forma mais clara, né! Porque eu acho o que falta são explicações mais claras. Você diz é uma função, é o limite da função, é a derivada da função. Mas o que é a derivada da função, derivada da função você tem que saber calcular de forma mais, explanar de forma mais sucinta. Mas eu botaria basicamente isso, que era essa função.    2: Que seria o limite de efe de xis, xis mais aga menos efe de xis sobre aga e poderia dizer também que a função efe de xis é igual a efe linha de xis onde efe de xis sendo dois xis ao quadrado, dois xis ao</p> | <p>Identifica-se aqui três tentativas de formular o conceito de limite e, todas elas partem precisamente do conceito de derivada. Sendo a última delas uma afirmação da existência da derivada de uma função que para ser mais precisa deveria ser dita da seguinte forma: ao limite <math>f'(a)</math> chama-se a derivada da função no ponto <math>a</math>, determinado. Como o próprio aluno diz os conceitos em questão “na verdade é o resumo de uma coisa maior”. Apesar da tentativa de tomar exemplos para explicar o conceito de limite pela derivada há uma limitação nos exemplos pois as funções apresentadas são polinômios e portanto funções contínuas, e isso restringe a compreensão do conceito de limite à existência de funções contínuas, o que se transforma em um obstáculo conceitual, que tem por base a crença na existência do limite apenas de funções contínuas. Entretanto, observa-se que o aluno em questão tem uma compreensão diferenciada dos seus colegas no tocante a abordagem do conceito de limite.</p> |

quadrado, efe de xis seria xis elevado a ene menos um.|| E tentaria através de alguns exemplos mostrar de forma mais sucinta que não é tão difícil assim o escrito foi? || **3:** Obs.: o limite de uma função é a sua derivada no ponto determinado ou em pontos determinados.||

**Texto escrito pelo aluno:**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$F(x) = f'(x)$$

$$F(x) = 2x^2$$

$$F'(x) = x^{n-1}$$

Numa seg. Retomada

Obs: O limite de uma função é a sua derivada no ponto determinado. ou em pontos determinados.

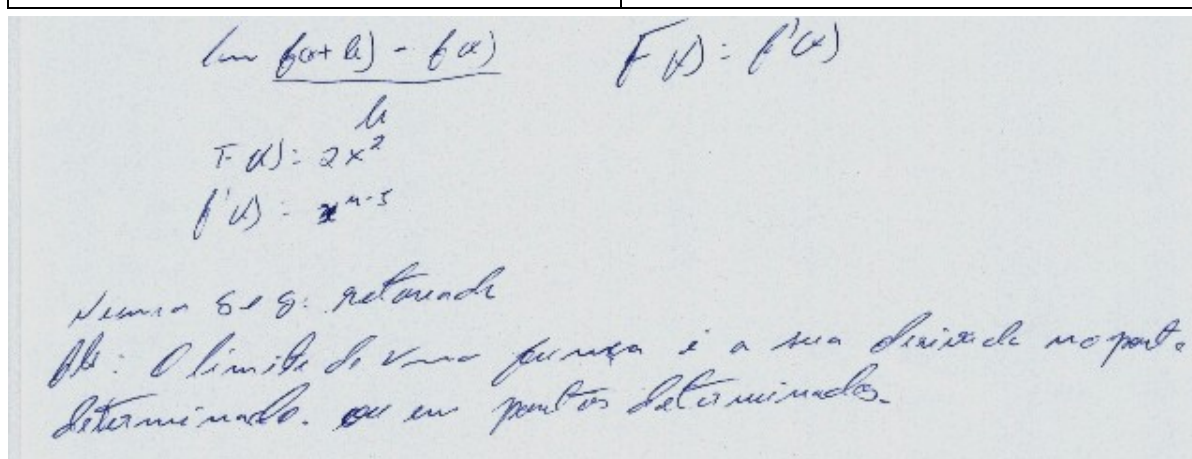


**Figura 10:** Texto escrito pelo aluno AI10 durante a sessão de resolução de problemas

A partir da classificação de respostas de cada sujeito para a questão 1, construiu-se um quadro-resumo (Quadro 5, abaixo) para toda a amostra, de forma a se dar ao leitor uma visão panorâmica da perspectiva conceitual dos estudantes-sujeito em relação à questão 1 (*Se um colega lhe perguntasse o que é limite de uma função o que você responderia para ele?*). Foram propostas em tal quadro seis categorias, criadas a partir das respostas dos dez alunos à referida questão.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                      | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                         | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira                                                                                                                                                |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor:                                                                               |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como tendência a um valor de referência                                                                                                                       |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e épsilon (distância de x ao ponto limite, e de f(x) ao valor limite, respectivamente) |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função                                                                                                                                     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo do perfil de resposta do grupo de sujeitos para a **Questão 1**, sobre conceptualização de limites.

A observação da síntese proporcionada pelo Quadro 5 acima possibilita verificar que, a exceção do sujeito ao qual foi atribuído código **5**, o aluno (AI5), cuja perspectiva é a que mais se aproxima da definição formal de limite, os demais apresentam perspectivas conceptuais que em geral promovem o aparecimento de obstáculos de natureza epistemológica, dificultando a compreensão do limite de uma função: se o aluno toma o limite como algo inatingível, terá dificuldades em compreender, por exemplo, o limite de uma função polinomial (que é uma função contínua) pois, nesse caso, o limite da função é atingido na própria função sempre, correspondendo a imagem da função naquele ponto, ou seja, se  $f(x)$  é uma função contínua o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

O mesmo ocorrendo se tivermos uma função limitada, por exemplo, a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  para cada  $x$  assumindo valores em  $\mathbb{R}$ , ou o mesmo que dizer,  $x$  assumindo valores nos números reais compreendidos no intervalo aberto  $(-\infty, +\infty)$ , tem o seu conjunto imagem com  $f(x)$  assumindo valores no intervalo  $(0, 1]$ , ou seja,  $f(x)$  está limitada entre 0 e 1.

Nessas condições o limite da função  $f(x)$  acima será ou zero ou 1. Portanto se o aluno conceber o limite como algo inatingível terá dificuldades para compreender esse fato.

Passamos em seguida à análise da questão 2.

**Questão 2:** Crie um problema em que se possa utilizar o limite de uma função que, ilustre o seu conceito de limite. Indique de que maneira você resolveria este problema.

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> (...) não é matemática não né? numérica não né? (...) eh! eu vou dar um exemplo de ... parecido com, o que eu escrevi no exemplo um, que é com ... o que eu entendo mais ou menos de limite, <b>[[Proposição]:</b> quando você quer pegar uma, um exemplo de uma, uma velocidade instantânea, naquele ponto, você pegava um intervalo de tempo muito, um intervalo de ... espaço muito pequeno por uma ... intervalo de tempo pequeno e com, utilizando eh, o conceito de limite que é um conceito básico você consegue achar a velocidade instantânea naquele ponto exato, não precisando passar pelos pontos anteriores ao que aconteceu antes. (...) quando eu penso nesse negócio de pegar um pedaço infinitamente pequeno de alguma coisa eu lembro logo de um gráfico que você pega um pedaço infinitamente pequeno dá uma reta que aproxima exatamente o lugar onde está o ... no caso mais simples a velocidade entendeu, do móvel (...) como aconteceu anteriormente naquele ponto a velocidade, naquele ponto com um pequeno intervalo de tempo, vamos pegar um</p> | <p>O aluno não elabora um problema, de acordo com o que é solicitado. O que faz, de fato, é tentar estabelecer uma conexão para o conceito de limite, e o fez partindo da derivada aplicada à determinação da velocidade instantânea de um certo móvel. É interessante observar o conceito de limite em ação quando na sua fala ao demarcar a relação entre espaço e tempo na determinação da velocidade, e de como “o conceito de limite é um conceito básico” para se “achar a velocidade instantânea”. Busca estabelecer uma relação entre as interpretações, geométrica e física da derivada – como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função espaço no ponto ao qual denomina de velocidade instantânea. Utiliza as propriedades de derivada na determinação da velocidade a partir das duas funções espaço que representam o movimento desse móvel. Contudo quando é solicitado a representar a velocidade desse móvel referida como <math>\frac{ds}{dt} = v</math>, respondeu que “agora eu tou esquecido mais ou menos do conceito de</p> |

pequeno intervalo de ... curto espaço de tempo, infinitamente pequeno, parece que também tem uma velocidade naquele ponto. Que é o princípio que usa alguns ... acredito alguns automóveis né, [inaudível] assim a velocidade de computadores.

(...) Posso usar o conceito de derivada? (...) Bom, derivada tem alguma coisa a ver com limite né! Uma parte pra lá do limite ... então, ... é aquele negócio você sabe se você derivar o, tem[po] ... a distância em função do tempo você consegue achar a velocidade. Você dá um exemplo de ... o espaço percorrido de um carro ... eh,  $s = s_0 + v \cdot t$ . ... A fórmula é essa, não sei se vou usar essa não. ... Eh, é exatamente isso  $s$  é a fórmula do espaço percorrido é  $s$  igual a ... no movimento uniforme  $s = s_0 + v \cdot t$ , se a gente derivar o espaço em função do tempo, o  $s_0$  é uma constante que sai fora. ... O, ... e o tempo, ... no caso vai um, a gente acha a velocidade. Quer algo mais matemático, ... vai ser com números?

(...) Não porque o exemplo que não está aqui não ... isso vale né, pra outras ... qualquer coisa de segundo grau. ...

$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ , derivando de novo isso aqui em função ... do tempo ... o  $s_0$  é constante cai fora, o  $t$  ... a derivada de  $t$  é um fica  $v_0$  ... mais  $t^2$  ... transforma em  $2t$  com o dois de baixo corta,  $at$ . Aquela famosa fórmula  $\frac{ds}{dt} = v$ , e  $v = v_0 + a \cdot t$ . Fórmula de variação no espaço||.

(...) Por limite? Usando limite? ... Eh, ... agora eu tou esquecido mais ou menos do conceito

limite. Limite é ... não sei o que, não sei o que sobre  $h$ , com esse  $h$  tendendo a zero ou então a qualquer ponto que eu escolher. (...) Agora não sei não."

Se retornarmos à questão na qual tenta elaborar um conceito de limite é possível perceber a sua insegurança para responder à solicitação feita. Esta sua insegurança decorre da profusão de idéias que tem sobre o conceito de limite apresentado, mas não demonstra confiança no conceito de limite que poderia atribuir sobre os demais conceitos, uma espécie de conceito final.

de limite. Limite é ... não sei o que, não sei o que sobre  $h$ , com esse  $h$  tendendo a zero ou então a qualquer ponto que eu escolher. (...) Agora não sei não.

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

Uma (utilização) utilização do conceito de limite clara é (v) (v) a velocidade instantânea de um certo móvel que com (a sua) um pequeno intervalo de espaço, um pedaço infinitamente pequeno, e um outro pedaço infinitamente pequeno de tempo nos daria (v) a velocidade instantânea naquele ponto sem precisar saber o que ocorreu anteriormente.

$$S = S_0 + v \cdot t$$

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a \cdot t$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

uma (utilização) utilização do conceito de limite clara é (v) (v) a velocidade instantânea de um certo móvel que com (a sua) um pequeno intervalo de espaço, um pedaço infinitamente pequeno, e um outro pedaço infinitamente pequeno de tempo nos daria (v) a velocidade instantânea naquele ponto sem precisar saber o que ocorreu anteriormente.

$$S = S_0 + v \cdot t$$

$$\frac{dS}{dt} = v$$

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$$

$$\frac{dS}{dt} = v_0 + a \cdot t$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

**Figura 11:** Texto escrito pelo aluno AI1 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Posso usar o [inaudível] ? (...) Ah! ... (...) Vou atacar o plano e vou ver se acho um problema de limite aqui. ... Eu tou tentando lembrar de um problema que resolvi sábado. Mas também não adianta se eu lembrar, né? (...) Vou fazer um problema matemático, tá! Eu vou fazer e depois posso fazer ele? (...) Por exemplo, aqui um bem simples [inaudível].... <b>[[Proposição]:</b> Sei que a função, uma função de <math>x</math> é igual a ... <math>y</math> está no gráfico de <math>x</math> e <math>y</math>. ... Se não contribuir [inaudível] um ponto para <math>x</math>... vou achar ... um ponto,... um ponto em... em <math>y</math>, ... usando [inaudível] ... fazemos a fórmula função de <math>x</math> igual ao limite quando <math>h</math> tende a zero da função de <math>x</math> mais <math>h</math> menos a função de <math>x</math> por <math>h</math> ... [(1). <math>f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}</math>] eu encontro esse ponto ... na função dada. Qual o limite quando <math>x</math> é igual a dois [(2). <math>\lim_{h \rightarrow 0} f(x)</math> quando <math>x = 2</math>] ... Boto que o <math>aga</math> é zero ... e que o limite de <math>efe</math> de dois mais <math>aga</math>, mais a função de dois sobre <math>aga</math> isso é igual ... [(3). <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = ?</math>] (...) até com coisa básica dessa eu esqueço. ... Que é que eu fazia? ... isso é que dá decorar fórmula e não decorar o assunto! Eu lembrei dessa fórmula mas não me lembrei do ... do básico de limite. ... É o caos. (...) Eu sei pela lógica aqui, se eu for usar a lógica, isso aqui daria zero. ... Eu sei lá dois, mais <math>h</math> menos dois. Vai dar dois menos dois ... zero. <math>aga</math> sobre <math>aga</math>, <math>aga</math> tendendo a zero daria zero ... por isso ele tem</p> | <p>De forma semelhante ao se observou para o primeiro aluno, este sujeito também evidencia dificuldades em elaborar um problema como é solicitado na questão. O que há é a tentativa do aluno em lembrar de um problema que ele havia resolvido. E nessa busca é apresentada como o limite de uma função de <math>x</math> a relação que estabelece a derivada de uma função em um ponto <math>x</math> qualquer, do plano.</p> <p>Considerando que tenha sido utilizada de forma apropriada a relação (1), todo o desenvolvimento da questão é realizado até a relação (3) como se a função <math>f(x)</math> tivesse sido representada, o que só acontece a partir da relação (5), se bem que entre (4) e (5) acontece a identificação do fato problema, quando da reflexão “Regra de função, talvez esteja faltando a função”. Até então essa não constatação gerava todo um conflito no aluno, apontando para um obstáculo que aparentava se tornar um impedimento para alcançar a conclusão. No entanto ao estabelecer a função <math>f(x)</math> o aluno em questão aplica o conceito de limite e afirma que o limite é quatro – como a função proposta em (5) é um polinômio, e portanto contínua, o limite é igual ao valor da função no ponto, que no exemplo é <math>x = 2</math>. E o mais interessante é que no final do penúltimo parágrafo da análise da resposta a sua “questão” é abordado implicitamente a continuidade “Então o limite tendendo a <math>aga</math> igual a zero só me fez provar que a função</p> |

uma regra que eu posso usar ... que vai dar um número inteiro sem eu precisar, ... o zero. ... Aí eu começo a usar derivada, [inaudível]. Cara tem que ter paciência, vice! Que se não ninguém [inaudível]. (...) É que eu me culpo por não saber uma coisa básica, tá entendendo! (...) Eh! Eu sei que tem uma regra aqui, que eu multiplicando, depois eu podia anu, anu, anular os aga, agora eu não to sabendo como identificar isso. ... Regra de função, talvez esteja faltando a função. Se eu fosse de cara eu cortava e daria errado. (...) Do valor de  $x$ . (...) Efe de  $x$ is é igual a  $\epsilon$  [4]  $f(x) = y$ . ... Que é exatamente o ponto de  $y$  que eu vou achar se eu fizer ... Oxente! eu perdi agora o conceito de, de, de, nem de limite, eu perdi o conceito de função. Porque se a função, eu sei que a função de  $x$ is ... eu tenho um valor ... quer dizer se meu ponto  $x$ is é dois [se  $x = 2$ ] a função de  $x$ is seria  $x$ is ao quadrado [(5)  $f(x) = x^2$ ] que aí daria quatro [ $f(2) = 2^2 = 4$ ], então limite seria quatro. (...) Ah! Correto, dois mais aga [ $2 + h$ ] ... Tá vendo que (dá um sorriso) ... (...) ... Menos dois ao quadrado ... sobre  $h$  [ $-(2)^2/h$ ]. Isso aqui dá quatro mais ... quatro aga mais aga ao quadrado menos quatro [ $4+4h+h^2-4$ ] ..., limite quando aga tende a zero, sobre aga [(6).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h}].$$

Isso aqui é igual, limite quando aga tende a zero, esse com esse corta [está cancelando o quatro com o menos quatro], quatro aga mais aga ao quadrado... sobre aga [restando a expressão (7).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h+h^2}{h}].$$

Que é a mesma coisa de limite do número  $x$ is é igual a esse número elevando ele ao quadrado". Tal abordagem, mesmo que não rigorosamente precisa, já poderia ser considerada como indício de mudança conceitual. Surge então uma expectativa de mudança cognitiva, a ponto de que propiciar uma desconstrução das concepções que trazia até então – desde a primeira questão até aquele momento – sobre o que compreendia como limite de uma função. Porém, o aluno parece esquecer o conceito de limite de função, passando a utilizar a expressão (1) para determinar o limite. Contudo, esta atitude está de acordo com o seu comportamento em relação ao estabelecimento do conceito de limite de uma função. A conclusão que “Então o limite tendendo a  $aga$  igual a zero só me fez provar que a função do número  $x$ is é igual a esse número elevando ele ao quadrado”. em decorrência da comparação dos resultados obtidos em (5) e (10) é fraca, pois a coincidência se deu em virtude da escolha do valor para  $x = 2$ . Já que os únicos valores de  $x$  para os quais  $f(x) = x^2$  é igual a  $f'(x) = 2x$  são  $x = 0$  e  $x = 2$ . Ou seja, a escolha da função  $f(x)$  e do valor de  $x$  o levaram a construir um falso conceito de limite de função. E mais, em nenhum momento foi percebido que o que estava sendo determinado pela expressão (1) era a derivada da função, no caso,  $f(x) = x^2$  no ponto escolhido  $x = 2$ .



quando  $h$  tende a zero de  $h$  vezes quatro mais  $h$  sobre  $h$  [colocou o  $h$  em evidência e a expressão ficou (8)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h}$ ], corto esse com esse [está utilizando o cancelamento do  $h$  do numerador com o  $h$  do denominador]. Corto um  $h$  com o  $h$  de baixo que é o mesmo  $h$  que multiplicou o quatro mais quatro  $h$ . É igual a limite quando  $h$  tende a zero de quatro mais  $h$  [a expressão fica então (9)  $\lim_{h \rightarrow 0} (4 + h)$ ].  $h$  tendendo a zero isso dá zero [o isso é o  $h$ ]. Com esse resultado limite quando  $h$  tende a zero é igual a quatro [(10)  $\lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$ ]. Então como isso provou, isso provou que o ponto  $y$ , o ponto em  $y$ , quando  $x$  é igual a dois é quatro [ $x = 2$  é 4] o que em função a menos que função de  $x$  igual a  $\epsilon$  [ $f(x) = y$ ] é igual a  $x$  ao quadrado [ $x^2$ ]. Então é igual a  $x$  ao quadrado, e se meu  $x$  é dois ao quadrado é igual a quatro,  $x$  ao quadrado é igual a 4 [ $x^2 = 4$ ]. Então o limite tendendo a  $h$  igual a zero só me fez provar que a função do número  $x$  é igual a esse número elevando ele ao quadrado||.

É isso aí [risos] impressionante, isso estava na minha cabeça e eu nem sabia que existia na, está parte esquerda ou direita do cérebro que eu acho que nem uso, estava esquecido.

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

$f(x) = y$  para um gráfico de  $X \times Y$  se eu atribuir um valor para  $x$  vou achar um ponto em  $y$  usando o limite através da fórmula  $f(x) =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  eu encontro esse ponto.

Qual o limite quando  $x = 2$ .

$$f(2)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4+h = 4$$

o ponto em  $y$  quando  $x = 2$  é 4 o que em função sabemos que  $f(x) = y = (x)^2$

$$(x)^2 = 4$$

$f(x) = y$  para um gráfico de  $x \times y$  se eu atribuir um  
valor para  $x$  vou obter um ponto em  $y$  usando o lim  
através da fórmula  $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  eu encontro esse  
ponto.  
Qual o lim quando  $x=2$ .  
 $f(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} =$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4+h = 4$   
o ponto em  $y$  quando  $x=2$  é 4 o que em função  
sabemos que  $f(x) = y = (x)^2$   
 $(x)^2 = 4$

Figura 12: Texto escrito pelo aluno AI2 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Não, tô só pensando num. Porque tem, ... meu pai tem um livro de física antigo Halliday ele tem um exemplo bom só que, acho que eu vou me complicar, no ... porque ele dá uma equaçõzinha, é assim. <b>[[Proposição]]:</b> O exemplo é o seguinte:</p> | <p>Como nos casos anteriores, a solicitação não foi rigorosamente atendida, porém foi apresentado um exemplo no qual o conceito de limite está sendo intuitivamente usado para resolvê-lo. E nessas condições a conclusão alcançada está de acordo com</p> |

um coelho tá a uma distância  $x$  de uma cenoura, então ele a cada, a cada distância  $x$  sobre dois da cenoura ele gasta um tempo vamos dizer  $t$  e ele vai se aproximando. Então a cada tempo  $t$  ele gasta o valor  $x$  sobre dois. Em  $t_1$  ele percorreu metade da distância;  $t_2$  ele vai percorrer metade da metade da distância,  $t_3$  e assim sucessivamente. Ou seja, ele sempre vai se aproximar da cenoura mais nunca ele vai alcançar realmente a cenoura. O tempo vai tender para infinito e a distância dele tem que estar a zero. O exemplo que eu tenho é mais ou menos esse||. E por sinal quando eu comecei a estudar eu não entendi. Por exemplo eu perguntei pro meu pai, ele disse não rapaz é assim, eu compreendi melhor. Posso colocar aqui né? (...) É eu posso usar esse problema tirado de um. (...) Ou eu teria que criar um. (...) Depois que eu comecei a escrever eu, eu. (...) Algumas coisas. (...) Eh, eu me lembro mais ou menos dele porque foi a partir daí que eu comecei realmente a compreender a parte de limite. Aí, eu coloco a resposta? (...) Aí eu vou colocar direto, o tempo tenderá para infinito pois a distância ele nunca alcançará a cenoura. Pronto.

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

Um coelho está a uma distância  $x$  de uma cenoura. Ele percorre uma distância  $x/2$  a cada  $(t)$  unidade de tempo  $t$ . Qual o tempo necessário para o coelho alcançar a cenoura?  
 Solução: O tempo tenderá para infinito, pois o coelho sempre irá percorre[r] a metade da (distância). Distância que o separa da cenoura.

o conceito que foi estabelecido pelo aluno, na primeira questão, para o limite de uma função. Ou seja, o limite como não alcançável.

Um Coelho está a uma distância  $x$  de uma Cenoura. Ele percorre uma distância  $\frac{x}{2}$  a cada (t) unidade de tempo  $t$ . Qual o tempo necessário para o Coelho alcançar a Cenoura?

Solução: O tempo tenderá para infinito, pois o Coelho sempre irá percorrer a metade da (distância) distância que o separa da Cenoura.

Figura 13: Texto escrito pelo aluno AI3 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Isso está mais difícil que a prova de cálculo. (...) não sei se está indo certo, mas eu diria assim, <b>[[[Proposição]]]</b> que um vendedor comprou certos produtos um xis e um ipsilon, um xis e um produto ipsilon, e ele queria vender para conseguir um maior, não espere ainda, ... Eu poderia fazer assim, ele comprou um certo produto e queria fazer, vende-lo, queria vender os produtos para que lhe renda um lucro tal]]. Poderia colocar um lucro <math>z \in</math> qualquer, é mais errado. (...) Era melhor ter colocado só com ipsilon porque isso aí vai ser duas variantes. Eu não me lembro de ter estudado limite com duas variáveis. (...) Só era riscar aqui o ipsilon. (...) <b>[[[Proposição final]]]</b>: Um vendedor comprou um certo produto xis e queria vender para que lhe rendesse um lucro <math>z \in</math>. Aí esse, daí eu poderia colocar que uma função de <math>z \in</math> em xis, agora esse xis eu colocaria efe de xis e acharia o limite de efe de xis quando xis tendesse a <math>z \in</math>]].</p> | <p>Aparece aqui a intenção em formular um problema, inclusive aplicada a uma situação cotidiana, em que se possa utilizar o conceito de limite. São apresentadas umas relações entre duas variáveis <math>z</math> e <math>x</math>: <math>z</math>, como variável dependente, representando lucro; como variável independente, representando um produto. E a função <math>f</math> representando a função lucro. Apesar de bem delineados os papéis de cada um dos elementos que compõem o problema não aparece o modelo que representa essa função lucro, e dessa forma se cria um impedimento para a segunda etapa da pergunta que é a resolução do problema. Mesmo assim é possível perceber na indicação feita sobre o problema “daí eu poderia colocar que uma função de <math>z \in</math> em xis, agora esse xis eu colocaria efe de xis [<math>z = f(x)</math>] e acharia o limite de efe de xis quando xis tendesse a <math>z \in</math>”, que ao referir-se a determinação do limite “acharia o limite de efe de xis quando xis tendesse a <math>z \in</math> [<math>\lim_{x \rightarrow z} f(x)</math>]”, aparece um erro conceitual no limite, pois o que se pretende saber no problema é o lucro <math>z</math> do comerciante quando o produto <math>x</math> possui um determinado</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Texto escrito proposto pelo aluno:</b></p> <p>Um vendedor comprou certo produtos um <math>x</math> e um <math>y</math> (e ele queria vender para conseguir o maior lucro) e ele queria vende-los para que lhe renda um lucro <math>z</math>.</p> <p>Um vendedor comprou certo produto <math>x</math> e queria vender par que lhe rendesse um lucro <math>z</math>.</p> <p><math>z = f(x)</math></p> <p>Resp : <math>\lim_{x \rightarrow z} f(x)</math></p> | <p>valor, o que permitiria que <math>x</math> tendesse, por exemplo, a um certo valor <math>b</math>, no conjunto dos valores do produto e não à variável dependente <math>z</math> que se encontra no conjunto dos lucros.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Um vendedor comprou certo produtos um  $x$  e  $y$  (e ele queria vender para conseguir o maior lucro) e ele queria vende-los para que lhe renda um lucro  $z$ .

Um vendedor comprou certo produto  $x$  e queria vender par que lhe rendesse um lucro  $z$ .

$z = f(x)$

Resp :  $\lim_{x \rightarrow z} f(x)$

**Figura 14:** Texto escrito pelo aluno A14 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Então deixe eu ver. Um limite deixe eu ver, lembrar alguma coisa assim. Deixe eu mudar alguma coisa aqui assim. Limite de <math>x</math> ao quadrado tendendo a que <math>x</math> ao quadrado, deixe eu me lembrar de limite ... <b>[[Proposição]:</b> Bem eu fiz um limite aqui de <math>x</math> tendendo a zero, de <math>x</math> ao quadrado mais um sobre <math>x</math> menos um <math>\left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \right]</math>. Vamos lá vou tentar desenvolver isso aqui não estou muito bem</p> | <p>A questão é dada, <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1}</math>, sem que seja feita nenhuma referência sobre o que se quer que se faça a partir da mesma. Mas, a estratégia de resolução utilizada é desnecessária para a função dada, pois como esta é contínua em zero e na sua vizinhança, o limite é o valor da função em <math>x</math> igual a zero. Porém, no momento em que estava procedendo a resolução o aluno percebeu que a estratégia não estava condizente com a</p> |

lembrado. É ... xis, é assim xis mais um multiplicando xis menos um sobre xis menos um, zero mais um igual a um. Acho que aqui. Eu sou não estou muito bem lembrado Jorge é que se esse sinalzinho acho que deve ser menos cara, eu realmente... (...) Eu posso fazer aqui mesmo no canto, né? (...) Pronto deixe-me ver aqui. Xis mais um, xis menos um, aí vem aqui xis ao quadrado menos xis mais xis menos um, É isso mesmo, seria xis menos um. (...) Tudo bem. Aí eu posso colocar aqui "reescrevendo" que você sabe né? (...) Dois pontos, ok. Eu botei aqui "reescrevendo" e coloquei ela aqui em baixo ok?

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 0 + 1 = 1$$

Reescrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 0 + 1 = 1$$

$$(x+1)(x-1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$$

função representada e realizou uma mudança

para  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , no qual aparece no numerador

a diferença de dois quadrados. Ainda assim, a estratégia utilizada foi desnecessária em virtude do valor de convergência da variável xis ser para zero, valor no qual a função em tela é contínua. Se xis tendesse a um ( $x \neq 1$ ), ponto de descontinuidade da função, aí sim a referida estratégia seria necessária, uma vez que far-se-ia necessário eliminar o fator de descontinuidade.

Embora tenha uma compreensão do limite de uma função – pode-se ratificar essa afirmação observando-se: a formulação do problema; as estratégias de resolução empregadas; pela autocorreção realizada; e pelo que foi respondido na questão número um – a compreensão sobre a continuidade de uma função ainda é insipiente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 0 + 1 = 1$$

REESCREVENDO:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 0 + 1 = \boxed{1}$$

$$(x+1)(x-1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$$

**Figura 15:** Texto escrito pelo aluno AI5 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                       |                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                  |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Bem, criar um problema, [[Proposição]: limite quando xis tende a zero de x dois menos um sobre xis</p> | <p>O aluno apresenta o referido limite, contudo na hora de resolver modifica o valor de convergência da variável xis de zero para um. Atribuindo esse novo valor que</p> |



menos um  $\left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right]$ .

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

representa um ponto de descontinuidade para a função. Utiliza a estratégia correta para se resolver esse tipo de problema e parece compreender o porque de usar tal procedimento, estando bem mais próximo da segunda versão do conceito de limite dada por ele.

**Figura 16:** Texto escrito pelo aluno A16 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Isso é um problema ? tem que utilizar o limite de uma função? Rapaz o problema seria por exemplo, ...o, ....a, construir alguma coisa,....na,....uma área determinada por uma função, mas você quer ... tem uma questão na prova de cálculo I que eu não consegui fazer, fala justamente sobre isso, que você tinha um recipiente, aí dá a área do recipiente que tem que ser no máximo ele dá lá o valor, dizendo que o recipiente cada parte dele custava um preço, aí você tinha que achar o menor custo possível. Aí dava no caso um preço em função da área, aí você achava o limite em relação a menor preço pelo custo da área. Aí eu poderia fazer um problema desse tipo. (...) Pode ser. (...) Eh! Por exemplo uma taxa de um produto r, eu lhe vendo conforme, eu gosto muito desse caso bem específico. Por exemplo y sendo o número de vendas, variando em função da, deixe eu fazer um graficosinho aqui assim.[ refletindo em voz baixa]. Eu sou muito enrolado mesmo para pensar assim. (...)</p> | <p>O problema é apresentado inicialmente muito vago, sem definição da função que se pretende determinar o limite, não são apresentadas as alternativas de valores de x para que se possa determinar o limite y. A partir de então aparece o comentário sobre uma possível solução para o problema. Essa formulação apresentada, como alternativa ao que está sendo solicitado na questão, aparece com uma das concepções apresentadas pelo estudante, na questão anterior quando lhe é solicitado o conceito de limite, correspondendo ao segundo conceito, sobre o que é limite de uma função, apresentado por ele.</p> |

Como é mesmo? (...) Eu quero determinar qual é o valor de y quando x tende a outro valor. Um valor que especifique no caso. (...) Determinar o valor de y quando x tende a um valor pré-determinado. E agora como é que eu faço? (...) Eu posso querer x tenda a zero por exemplo. (...) Por exemplo [risos] quando x. (...) Como resolveria? (...) [inaudível] Por exemplo se a função é, é definida nesse ponto a função é muito fácil, né você simplesmente coloca é no valor de x, no valor que eu escolhi e vem exatamente o valor de y. (...) É quando a função é definida.... Vamos pensar, isso é limite também? Eu acho que não? (...) Quando a função [balbuciando] [risos]. (...) A função será um. (...) Limite de y quando no caso y igual f de x, quando x tende a zero é igual a limite de x elevado a dois mais um, x tendendo a zero igual a um. Ah! Retado realmente eu era melhor que isso.

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

$$y = x^2 + 1$$

Determinar o valor de y quando x tende a um valor pré-determinado.

Por exemplo quando x tende a 0 y tende a 1.

quando a função é definida em x, y será 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1$$



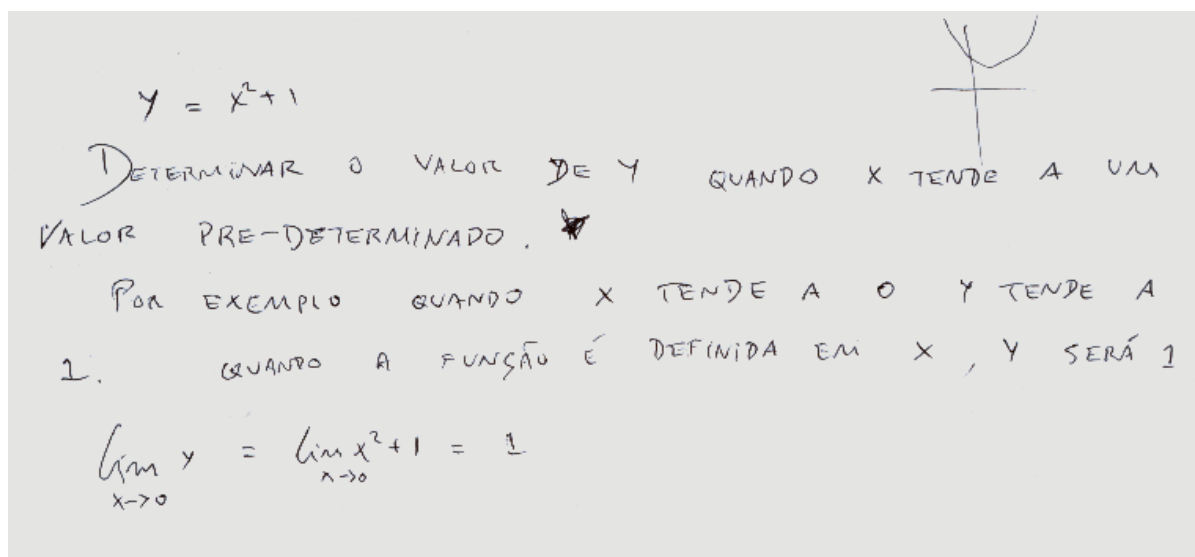


**Figura 17:** Texto escrito pelo aluno AI7 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Se você joga futebol, você indo pela esquerda ou pela direita você tenderia ao gol. Falou joga futebol, se você for pra esquerda tanto pra direita a tendência é ir pro gol. Tanto pela esquerda quanto pela direita. Acho que é um problema. (...) Uma questão. Tá. Então vamos lá. (...) Posso fazer gráfico também? (...) É porque eu achava que era um problema, porque problema eu achava mais. (...) Eu fiz assim se você estivesse jogando futebol, você indo tanto pela esquerda quanto pela direita você tenderia ao gol. A um valor limite. Assim eu dei. Eu nem sei se foi um problema certo aí, mas a questão é eu fazer o que, tá aqui o valor xis aqui, aqui é a função se você ver pela função, eu estou vendo função cálculo II, está aqui errei a bicha. Tanto negativa como xis positiva tenderia, eita... é isso aqui mesmo. (...) Vige Maria isso é bom demais.</p> | <p>O que aparece na elaboração não é a apresentação de um problema, muito menos um exemplo, mas um comentário sobre o conceito de limite utilizando como cenário um jogo de futebol. É feita uma representação icônica do exemplo proposto, (através de um gráfico, ver transcrição no protocolo anexo abaixo), sendo apresentado como alternativa para aplicação do conceito o limite quando <math>x \rightarrow 1</math> de uma função <math>f(x) = 2x + 1</math>. É determinado <math>f(1)</math>, isto é, qual a imagem de <math>x = 1</math> pela função <math>f(x)</math>, porém não é possível saber, pelo que está sendo apresentado no desenvolvimento da questão, se está havendo uma compreensão de que o limite quando <math>x \rightarrow 1</math> é igual a <math>f(1)</math> por ser a função contínua. No entanto a concepção apresentada na determinação do limite da função <math>f(x)</math> é a que aparece no estabelecimento da resposta à questão 1 sobre o conceito de limite.</p> |

**Texto escrito proposto pelo aluno:** Se voce estivesse jogando futebol, voce indo pela esquerda ou pela direita voce tenderia ao gol.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2x + 1$$

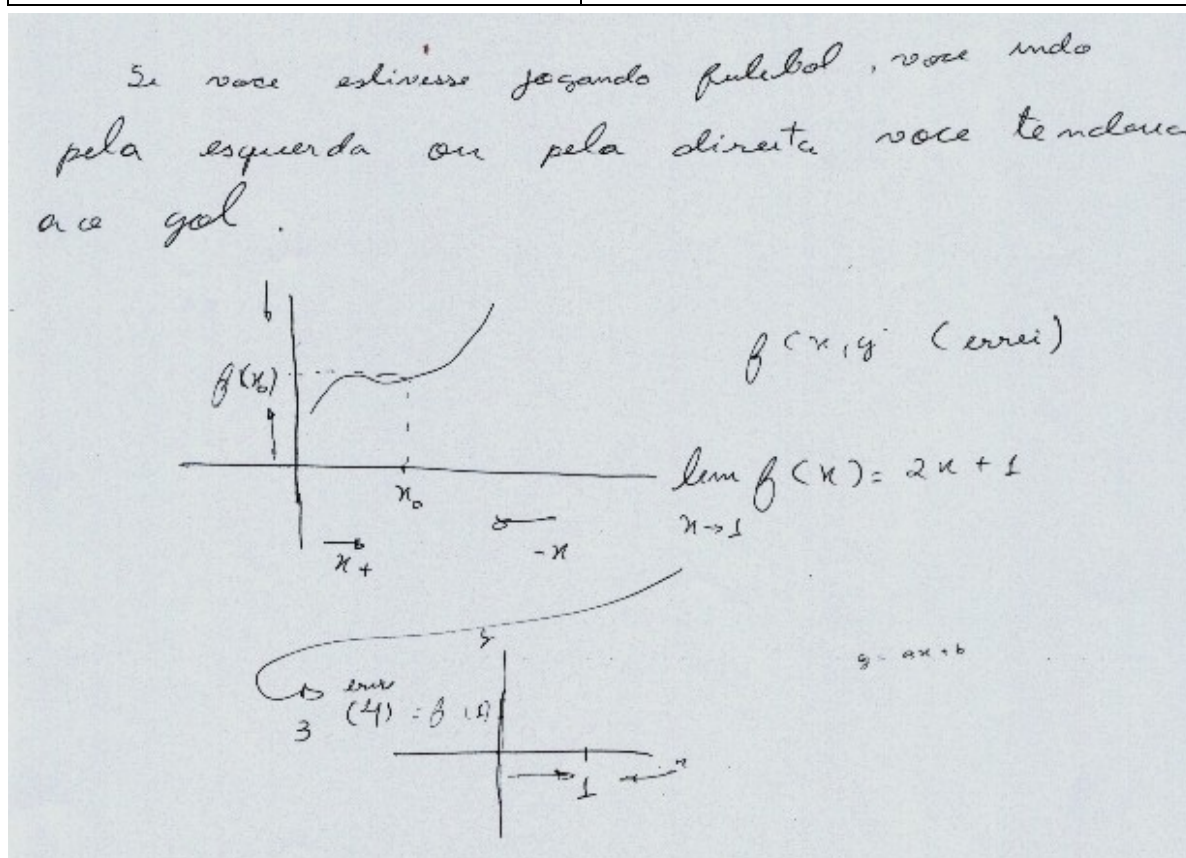


**Figura 18:** Texto escrito pelo aluno A18 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Quando ele fala aqui é exemplos práticos do dia a dia ou pode ser função tempo. (...) O limite de certa função de xis tendendo a dois, vezes xis. Está acontecendo determinada função. Limite de xis menos um dividido raiz de xis menos um. Resolvendo limite de xis tendendo a um. (...) Tendendo a um, limite de xis tendendo a um. Estou um pouco... preciso lembrar isso aqui, deixe só lembrar isso aqui vou ver agora. Raiz de xis, xis ao</p> | <p>Não há neste caso a formulação de um problema propriamente dito. O limite é apresentado como um exemplo e há todo empenho do estudante para a determinação do limite proposto. Contudo, embora não tenha respondido a questão de acordo com o que era pedido, ao se estabelecer um confronto entre a representação desta questão e a resposta a questão 1, é possível perceber que o que é feito está correspondendo ao seu conceito de limite.</p> |

quadrado menos um ao quadrado, né. Aquela formulazinha que eu queria a ao quadrado menos b ao quadrado é igual a mais b vezes a menos b. (...) Raiz de xis. (...) Seria um, um. (...) a ao quadrado menos b ao quadrado. Vai ficar a mais b com a menos b. (...) Raiz de xis? (...) Espera aí. Raiz de xis aqui... Vai ser raiz quadrada de xis. (...) Vai dar xis. (...) Mas aí não vai dar esse valor aqui, né. (...) Xis. (...) Mas eu estou fazendo isso porque no livro tem esse exemplo, sabe, eu não sei se eu esteou esquecendo. (...) É exata [corta] mas ... (...) Artur – Não. O que eu não lembro é se o raiz de xis é em baixo ou em cima que você utilizava isso aqui, tá entendendo. (...) Pra poder cortar. (...) Então no caso aqui já é ... Um. (...) No caso desenvolvendo isso aqui não é. Mas no caso não daria isso aqui! (...) Multiplicar em baixo em cima, né. (...) Raiz de xis mais um.

**Texto escrito proposto pelo aluno:**

Por exemplo  $\lim_{x \rightarrow (0) \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

por exemplo  $\lim_{x \rightarrow (0) \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Resolvendo:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1 = 2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$   
 $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$   
 $x-1$

**Figura 19:** Texto escrito pelo aluno AI9 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <p><b>Problema oral do aluno:</b> Se for para exemplificar melhor o meu conceito que eu botei na questão anterior. Eu pegaria um polinômio simples tipo efe de xis igual a xis ao quadrado mais três xis três mais dois xis e agora e tentar. Como eu estava dizendo na outra questão resolve-lo pela forma mais simples. Quero botar aqui como observação que o limite. Quero retomar aquela ... comparada, aqui numa segunda retomada que o limite de uma função, lei de uma função é a sua derivada num ponto determinado, ou a um ponto determinado. E pra resolver agora aquela questão eu me valeria dos meus argumentos da questão anterior, colocaria que função sendo xis ao quadrado mais três xis três mais dois xis, botaria aqui que efe linha seria a , a, o limite da função seria a derivada desse polinômio, que seria dois xis onde o limite aqui, como observação que efe de xis é igual a efe linha de xis, onde efe linha de xis seria, xis ene menos um e resolveria de forma mais fácil, mais claro. Xis dois mais dois, eu resolveria basicamente desse jeito assim. A não ser que fosse pedido resolve pela a , pelo acho que é, eu não sei como é o nome. conceito de limite eu acho que a palavra é essa. Que aí você é obrigado a fazer pela função de limite que seria, limite de efe de xis mais aga, menos efe de xis sobre aga função tende a zero, aí eu resolveria também desse jeito pegaria a função efe, quando a função efe de xis é essa daí. Xis ao quadrado menos três xis mais dois xis menos xis dois</p> | <p>Aqui também não é apresentado um problema, mas um exemplo de função polinomial do terceiro grau da qual tenta-se determinar o limite quando <math>h \rightarrow 0</math>. Mesmo tendo lido a questão a compreensão que tem é de exemplificar e o faz remetendo-se à questão anterior. Este comportamento fica bem claro no argumento utilizado “Se for para exemplificar melhor o meu conceito que eu botei na questão anterior”, daí em diante todo recurso utilizado segue esse rumo, apesar de que a solução apresentada para o problema não tem uma continuidade nem conclusão em virtude do procedimento de resolução equivocado que começou a ser utilizado. Se bem que procura estabelecer uma conexão com a primeira questão, quando lhe é pedido o conceito de limite, e remete-se o tempo todo a esta durante a sua fala. Portanto, o que é apresentado está coerente com a sua concepção de limite, ou seja, o limite na sua aplicação, como a derivada de uma função.</p> |

eita faltou o aga, mais aga, menos efe de xis que seria a função de novo sobre aga. E aqui eu ia resolvendo por matemática simples você resolve uma função, resolve a outra pega o limite dele quando aga tender a zero, e você consegue achar a derivada. Faria assim. Seria a forma mais fácil de exercita, apesar que seria o melhor exemplo botar uma função mais simples do tipo xis ao quadrado só. Porque a derivada de xis ao quadrado daria dois xis aí a derivada mais fácil de ser resolvido. Basicamente foi isso que o professor Mário fez quando. Professor Mário quando ele deu aula pra gente em cálculo I, o que ele fez basicamente com agente foi que ele conseguiu dar de forma mais fácil o que é mais difícil, que seria integral. Porque o professor explica que integral é o inverso da derivada, mas o inverso da derivada nem sempre é tão simples assim como eles comentam.

**Texto escrito apresentado pelo aluno:**

$$F(x) = x^2 + 3x^3 + 2x$$

Handwritten work showing the derivation of the derivative of  $F(x) = x^2 + 3x^3 + 2x$  using the limit definition. The student also includes a note about the derivative of  $x^{4-5}$ .

$$F(x) = x^2 + 3x^3 + 2x$$

$$f'(x) = 2x - 9x^2 - 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x^2 + 3x^3 + 2x + h) - f(x^2 + 3x^3 + 2x)}{h}$$

Obs:  $F(x) = f'(x)$   
 $f'(x) = x^{4-5}$

**Figura 20:** Texto escrito pelo aluno AI10 durante a sessão de resolução de problemas

Semelhantemente ao que foi feito para a questão 1, construiu-se para esta questão 2 um quadro-resumo (Quadro 6 abaixo) para toda a amostra de sujeitos, de forma a se dar ao leitor uma visão panorâmica dos encaminhamentos de proposição de problemas surgidos. Aqui igualmente emergiram da análise dos protocolos seis categorias, cuja distribuição pelos sujeitos obedeceu ao resumo abaixo:

| Encaminhamentos de proposição do problema                                                     | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                               | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Não formula um problema, apresenta o limite de uma função e a resolução.                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Não formula um problema, mas faz comentários sobre uso ou aplicação do conceito de limite. |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Não formula um problema, apenas fornece um exemplo.                                        |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Formula um problema, e apresenta uma solução.                                              |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Formula um problema, mas sem uma definição para a função e não apresenta solução.          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Formula um problema parcialmente e apresenta uma solução                                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 6:** Resumo do perfil de respostas do grupo de sujeitos para a **Questão 2**, sobre a conceptualização de limites.

Passamos em seguida à análise da questão 3.

**Questão 3:** Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite. a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3)$

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b></p> <p>Terceira Questão verifique se existe limite abaixo, em caso afirmativo, calcule este limite. O limite de dois xis três mais xis dois menos 3 com xis tendendo a dois. A primeira coisa que eu faço é substituir o 2, localizar e ver o que dá. Dá exatamente... existe o limite disso aí, olhando assim? ... Caso desse zero, correto! A gente tem que, dar um jeito nisso aí tirar o zero disso aqui. Foi o que eu aprendi. A gente</p> | <p>O procedimento especificado por este sujeito ("A primeira coisa que eu faço é substituir o 2, localizar e ver o que dá."), é representativo de atitude freqüente entre os alunos de cálculo quando lhes é solicitado a verificação da existência do limite de uma função. Não lhe(s) ocorre verificar se a função é ou não contínua ou mesmo verificar o equivalente, o domínio da função. Ao proceder como especificado corre-se o</p> |

diz que, que o limite de xis tendendo a dois ... dá dois vezes dois a terceira mais dois ao cu [cubo], a quarta menos três. O limite de xis tendendo a dois vai dar, dois a quarta. Dois vezes quatro oito e oito dezesseis. Dezesseis vezes dois, trinta e dois, sessenta e quatro. Sessenta e quatro menos três. O limite de xis dessa função vai dar, sessenta e um. Deixa eu recapitular aqui os cálculos ... opa! [inaudível] dois quatro. Quatro vezes dois oito. Oito vezes dois dezesseis... tem um erro aqui minha gente! ... limite de xis tendendo a dois... por partes, dois vezes quatro oito com oito dezesseis mais dois vezes dois quatro menos três, agora ... o limite disso aqui, xis tendendo a dois, vinte menos três dezessete. Olha que erro! Bom o limite existe, e o limite é 17, dessa função. (...) Porque eu substituo 2? Porque, ele tá dizendo que o xis tá tendendo a dois, o xis não é exatamente o 2 não. Pelo que eu entendo, de limite. É um número... ele tende a 2, ele é praticamente o dois. Se ele é praticamente o dois, a gente pode jogar... a gente joga o dois na, na, na equação, vou chamar de equação, do problema. Mas eu tenho, eu tenho isso, mais ou menos, ciente na cabeça que o xis não é exatamente um dois não. É um número bem próximo de dois que a gente pode dizer que é dois. Só com relação ao erro que eu cometi aqui...é que acontece muito da gente...principalmente eu em cálculo...em cálculo... errar uma besteira entendeu, não sei porque. (...) Não, foi um erro bobo, eu multipliquei, em vez do sinal de mais aqui botei menos, um vezes, aí deu dois a sexta...acontece muito isso, principalmente

risco de tomar uma atitude conflitante com a resposta encontrada, como aparece nesta afirmação: *“Caso desse zero, correto! A gente tem que, dar um jeito nisso aí, tirar o zero disso aqui”*. Esta afirmação indica que o aluno possui um modelo mental de limite de função do tipo racional, em que o denominador não pode ser zero, nessa condição, a “impossibilidade” de determinar o limite em decorrência da presença do zero deve ser eliminada. Este tipo de representação cria um obstáculo para esse aluno, impedindo em alguns casos que prossiga na determinação do limite da função. Apesar da afirmação anterior ele tem nos seus argumentos aspectos que nos permite avaliar que ele aplica o conceito de limite de uma função para determinar o que está correndo com a função analisada ao afirma que *“(...) o xis tou tendendo a dois, o xis não é exatamente o 2 não (...) Mas eu tenho, eu tenho isso, mais ou menos, ciente na cabeça que o xis não é exatamente um dois não. É um número bem próximo de dois que a gente pode dizer que é dois.”*.

em cálculo. Não sei por que! (...) Se a função existe, e é... 17...Quer que eu escreva o negocio de baixo que o xis vale 2.

**Texto escrito produzido pelo aluno**

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3) (= \lim_{x \rightarrow 2} (64 - 3) = 61)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (16 + 4 - 3) = \lim_{x \rightarrow 2} 17$$

O limite desta função existe e é 17 mais eu tenho em mente que quando o problema (tem) diz tender a 2 o valor não é exatamente o 2 e sim um número tão próximo que pode ser tomado como 2.Reformulando → OBS: —

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3) (= \lim_{x \rightarrow 2} (64 - 3) = 61)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (16 + 4 - 3) = \lim_{x \rightarrow 2} 17$$

O limite desta função existe e é 17.  
(e) mais eu tenho em mente que quando o problema (tem) diz tender a 2 o valor não é exatamente o 2 e sim um número tão próximo que pode ser tomado como 2.

Reformulando → OBS: —

**Figura 21:** Texto escrito pelo aluno AI1 durante sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Certo. Está certo.(...) Hum!! Vou tentar aplicar a mesma fórmula. Eu sei que o limite quando xis tende a 2 é igual a função de xis mais <i>h</i>, no caso aqui não seria <i>h</i> seria xis, aí complica. Porque eu usaria o <i>h</i> no caso quando não tem atribuição, mas aqui como já está definido não sei se posso usar a mesma fórmula de xis</p> | <p>Pode-se observar que este aluno tem a sua concepção de limite pautada no limite como derivada de uma função, conforme havíamos constatado na análise da sua resposta à questão um anterior (questão 1), e ratificada pelo seguinte argumento: “<i>Eu estou usando essa mesma fórmula porque eu acho que é a única de limite que eu</i></p> |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>mais <math>h</math>. se isso aqui representa o <math>h</math>, vamos lá. Mais <math>h</math> – a função de <math>x</math> sobre <math>h</math> é igual a limite. Eu estou usando essa mesma fórmula porque eu acho que é a única de limite que eu tenho na cabeça é essa aqui. Existem mais fórmulas de limite além dessa? (...) Sim, essa básica: limite sobre um número é igual a função...? (...) Essa fórmula representa o valor quando eu chego. Por exemplo, aqui meu <math>x</math> é igual a 2. Então no ponto 2 de <math>x</math>, eu vou achar um valor em <math>y</math>, da função. Essa fórmula representa justamente o valor desse ponto. O que eu acho é só um ponto. Com limite eu não consigo achar vários pontos, eu acho um ponto identificado no plano <math>y</math>. (...) Essa relação de função de <math>x</math> mais <math>h</math> sobre... (...) Hum! (...) Ah, correto! Quer dizer, eu posso atribuir esse valor de <math>x</math> diretamente na função de cima. ... Ai, meu Deus vamos ter calma, calma. (...) [Risos]. Mas é uma cobrança, uma barreira, um bloqueio, a gente fica... (...) É, eu tou cobrando de mim mesmo... Eu vou tentar das duas formas pra ver se realmente sai. Esse negócio de eu ter usado função de <math>x</math> mais <math>h</math> não dá certo porque eu não tenho nem <math>h</math> aí. Eu já tenho o valor exato pra <math>x</math>, então <math>h</math> é se eu não tivesse o valor, seria qualquer <math>h</math>. Mas, eu já tenho o valor pra <math>x</math>, ... eu posso atribuir. Agora não sei se eu atribuo aqui ou atribuo logo aqui. Vou tentar das duas formas tá certo? (...) Eu tou tentando achar uma lógica porque eu tou fazendo e não tou achando. Tento de várias formas pra ver se acho alguma lógica. Se eu tentar isso aqui. ... Vou tentar direto logo, parece mais fácil... limite quando <math>x</math> tende a</p> | <p><i>tenho na cabeça é essa aqui</i>". Ao limitar o conceito de limite de uma função, ao conceito de derivada, gera um impedimento para compreensão do conceito de limite, o que se reflete não somente na resolução de problemas de limite de função, conforme podemos ver na sua produção mostrada na <b>figura 22</b> abaixo, como também nos argumentos produzidos no seu discurso, ao lado. No processo de resolução por ele utilizado houve cinco tentativas para encontrar a resposta 17. Na linha dois, por exemplo, não utilizou em momento algum a definição de derivada, mas o limite de função contínua, no entanto houve uma indecisão quanto a veracidade da resposta em decorrência da não utilização, da sua parte, da definição conforme havia estabelecido, o que o levou a uma terceira tentativa de resolução utilizando a definição proposta, de derivada. Porém, mesmo que o processo de resolução se desse corretamente, o que não aconteceu, ainda assim a solução não convergiria para a resposta esperada 17, pois o que está sendo solicitado não é a derivada da função dada, no ponto 2. O aluno percebe que o processo que está sendo utilizado, em virtude do conceito que tem de limite, não condiz com o que está sendo pedido e diz: "<i>Essa relação de função de <math>x</math> mais <math>h</math> sobre...</i> (...) <i>Hum! (...) Ah, correto! Quer dizer, eu posso atribuir esse valor de <math>x</math> diretamente na função de cima.</i>". Todavia ainda continua indeciso, pois não consegue se libertar do conceito prévio de limite que possui, daí</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

dois é igual a dois vezes ... dois ao cubo mais dois ao quadrado menos três. [inaudível] depois eu te digo. Quando xis tende a dois... é igual a dois ao cubo oito, dois e oito dezesseis, mais quatro menos três ... é igual a limite quando xis tende a dois de dezessete. Não tem lógica, esse tá fora. ... Então se não tem mais com aqui, vamos tentar de outro. Limite de xis quando tende a dois... eu posso dizer então que é igual a ... função de xis ...que é esse número inteiro mais dois ... menos a função de xis, ... menos a função de xis sobre dois ... isso aqui é igual a [inaudível] dois xis ao cubo mais xis dois menos três, dá um polinômio oh! É espaçonave, nem me lembro como é que faz... mais dois ao quadrado ... menos ... dois mais três. Deve tá impressionado com tanta besteira! [riso].(...) Hã! (...) Ah! O besteira! (...) Eu tou avexado [inaudível] eta coisa errada. Viajou na maionese! Isso é igual ao limite... de xis quando xis tende a dois. A dois, ah pêra aí! ... não é tão complicado assim não ... se eu atribuir agora o valor de xis aqui ... acho que posso .... Aí caramba! [suspira, canta] vou ver se sai assim tá. É isso, limite quando xis tende a dois, igual a xis vez dois ao quadrado, ao cubo, que é igual a oito... ah! Vezes dois ao cubo. Mais dois ao quadrado menos três... mais dois ao quadrado menos dois vezes dois ao cubo mais xis dois mais três ... ao quadrado ... sobre aga tinha dois ... certo.... [suspira] isso é o que, duas vezes duas dezesseis. Isso é igual ... limite quando xis tende a dois ... limite quando xis tende a dois é igual duas vezes duas dezesseis, ou, duas

ficar tentando várias vezes resolver a questão, como retrata essa colocação: “*Eu tou tentando achar uma lógica porque eu tou fazendo e não tou achando. Tento de várias formas pra ver se acho alguma lógica*”. Somente na ultima tentativa é que foi determinadas a resposta esperada, e isto só ocorreu porque o conceito de limite para a função em questão foi utilizado corretamente.

vez oito dezesseis...mais quatro ... menos três  
... mais dois ... ao quadrado menos ...  
dezesseis. ... Isso aqui eu tou nervoso, minha  
letra fica toda horrível, você vai ter um  
trabalho pra traduzir isso aqui.(...) Tá certo...  
dezesseis mais quatro menos três ao  
quadrado sobre dois. Isso aqui é igual a, limite  
quando xis tender a dois, [inaudível] será que  
eu vou precisar mais disso aqui, precisa...  
limite quando xis tende a dois de vinte menos  
três dezessete ... Dezessete mais dois  
[assovia] ao quadrado menos, vinte menos  
três dezessete... dezessete ao quadrado  
sobre dois. Eu não sei se eu preciso repetir  
esse limite ainda... vou fazer uma expressão  
de ... já usei todo xis, não tem mais xis então  
não preciso mais do limite. Então eu posso  
dizer que isso aqui é igual a dezessete ao  
quadrado... mais duas vezes dois quatro ...  
quatro vezes dezessete, quatro vezes sete,  
quatorze vinte e oito, com quarenta sessenta  
e oito ... mais sessenta e oito, mais quatro,  
menos dezessete ao quadrado. Não quero  
nem saber quanto é dezessete ao quadrado,  
corto logo aqui... sobre dois. Isso aqui é igual  
a... setenta e dois sobre dois que é igual a  
trinta e seis. Então pronto limite quando xis  
tende a dois é igual a trinta e seis. Acabei. Eu  
nem acredito que acabei [sorri]! Eu nem  
acredito! Se eu já soubesse disso eu acho  
que eu teria tirado nota boa na prova. Se eu  
soubesse dessa vez, não sei nem se tá certo.  
Tá certo? Vê aí, você que tem uma noção.(...)  
Não me engane.(...) Não eu só quero que  
você me diga o resultado.(...) Ah, desculpe!  
(...) É, isso aqui é função de xis.(...) Certo.(...)

Ipslon é igual a... trinta e seis que é igual a função de xis. Xis é igual, a dois xis ao cubo mais xis dois menos três, com xis igual a dois, certo.(...) Isso é xis. Eh representa o, o, o, eh um valor da função tipo ponto xis.(...) Essa expressão representa uma equação que vai me dar um ponto em xis. Que aqui atribuindo a esse polinômio vou achar um valor pra xis. Então esse xis a minha função no gráfico vai ser um ponto dele.(...) Representa uma função.(...) Que vai me dar o valor de xis. Ou, o que tá entre parêntesis é uma função.(...) Em que variável... em xis.(...) Que eu achando o resultado dela, acho o ponto xis.(...) Se eu achar a função.(...) Ou, isso é uma função xis que se eu achar o resultado acho o ponto ipslon.(...) Ah! Fazendo pelo limite.(...) Quando xis tender a dois.(...) Não entendi ainda! Como é que faz não.(...) Correto.(...) Hum, hum! (...) É. (...) O limite...(...) Quando xis tende a dois.(...) É isso que eu faria! Aí eu faria o que. Colocaria esse xis, essa função em evidência e botaria xis, limite quando xis tende igual a, limite quando xis tende a dois é igual a essa função xis mais dois menos a função xis sobre dois. Isso vai me dar um valor...(...) É, correto! Só que em lugar de aga eu coloco o dois já, que o dois já tá determinado.(...) O dois eu tou atribuindo como valor de aga.(...) Ah, é xis! (...) É xis. Aí caramba agora que eu entendi, tudo errado! Vou fazer de novo posso? (...) Eu estava tão contente (...) Eu comecei agora a discutir o meu trabalho. Fiquei contente demais. ... Limite... rapaz tá tão bom que até tou revisando isso aqui que nem... quando xis

tende a dois, é igual a função de xis, oh! a função de xis mais aga menos a função de xis sobre aga, isso aqui é igual a função de xis, dois xis ao cubo limite quando xis tende a aga. Dois xis ao cubo mais xis menos, menos três... mais aga.(...) Porque eu tou usando pela regra de limite! Então limite sempre tem que aparecer o aga não? (...) Por exemplo, aqui eu vou atribuir valor direto pra xis.(...) Então é a função desse aqui...Caramba, mas se eu quiser uma função sem o xis e sem o aga, menos outra função vai dar zero. ... Tá entendendo? (...) No meu conceito aqui, se eu colocar função de xis, aga um preciso que aga ele não dá, só dá xis igual a dois, certo? (...) Foi.(...) Direto? Na batata? (...) Limite... quando xis tende a dois, da função, dois xis ao cubo mais xis ao quadrado menos três. Isso é igual a dois vezes dois ao cubo... mais dois ao quadrado menos três... que é igual a dois, oito, dezesseis, quatro, vinte menos três dezessete... Achei um número seco.(...) Já. (...) Porque eu já usei o dois, o dois...(...) Agora! É que a gente... vê uma, vê uma, eu acho que sempre que aparece uma fórmula assim você não encontra você acha que tem que ser uma coisa complicada. Não tem nada disso não, tem que usar o limite tem que chegar a dois ou aga...(...) Eu uso ela quando eu não tenho um ponto entendido, pra qualquer ponto em aga eu posso usar essa função. Por exemplo, eu tenho... eu tenho uma função xis ... mais eu não sei exatamente que, que ponto de xis eu vou encontrar, tá entendendo? (...) É. (...) É dado um valor pra xis...(...) Foi só uma mudança de ipsilon,

função de ipslon, função de xis igual a ipslon e função de xis igual a limite. Essa mudança foi que eu associei... mais ou menos.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} 16 + 4 - 3 = \lim_{x \rightarrow 2} 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2) - f(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(2x^3 + x^2 - 3) + 2]^2 - (2x^3 + x^2 - 3)^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3) + 2]^2 - (2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3)^2}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{17^2 - 16^2}{2}$$

$$\frac{(16+4-3)^2}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(17+2)^2 - (17)^2}{2} = \frac{17^2 + 68 + 4 - 17^2}{2}$$

$$= \frac{72}{2} = 36 \quad \lim_{x \rightarrow 2} = 36$$

$$y = 36 = f(x)$$

$$x = (2x^3 + x^2 - 3) \quad x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^3 + x^2 - 3) + h)^2 - (2x^3 + x^2 - 3)^2}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3) = (2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3) = 17$$

Handwritten mathematical work by student AI2. The work shows the calculation of the limit of a function as  $x$  approaches 2. The function is  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ . The student uses the definition of a limit,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(a)$ , and calculates the derivative  $f'(x) = 6x^2 + 2x$ . They then substitute  $x=2$  to find  $f'(2) = 16 + 4 = 20$ . The final result is  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 17$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2(x+h)^3 + (x+h)^2 - 3) - (2x^3 + x^2 - 3)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + x^2 + 2xh + h^2 - 3) - (2x^3 + x^2 - 3)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - 3) - (2x^3 + x^2 - 3)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 + 2xh + h^2}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (6x^2 + 6xh + 2h^2 + 2x + h)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (6(2)^2 + 6(2)h + 2h^2 + 2(2) + h) = 24 + 12h + 2h^2 + 4 + h = 28 + 13h + 2h^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (28 + 13h + 2h^2) = 28$$

The student also shows the direct substitution method:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3) = 2(2)^3 + (2)^2 - 3 = 16 + 4 - 3 = 17$$

Figura 22: Texto escrito pelo aluno AI2 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eu creio que o limite existe, vai ser quando <math>x</math> tende a dois, é o limite da função dois xis ao cubo mais xis ao quadrado menos três quando xis tender a dois vai ser dois que multiplica dois ao cubo mais dois ao quadrado menos três será igual dois que multiplica oito mais quatro menos três, dezesseis vinte menos três dá dezessete.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>2. <math>(2)^3 + (2)^2 - 3 = 2 \cdot (8) + 4 - 3 = 17</math>.</p> | <p>Embora este aluno tenha dois conceitos para o limite de uma função: como algo inatingível ou como algo dinâmico relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor. O primeiro deles não se constituiu em impedimento para determinação da solução da questão proposta, visto que, a afirmação feita: "Eu creio que o limite existe, vai ser quando <math>x</math> tende a dois, é o limite da função (...)" indicando indica o procedimento adotado na determinação do limite da função, e, portanto agindo de acordo com a noção de que o limite da função é determinado por o valor da função para o xis indicado.</p> |

Handwritten mathematical work by student AI3. The work shows the calculation of the limit of a function as  $x$  approaches 2. The function is  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ . The student uses direct substitution to find  $f(2) = 17$ .

$$= 2(2)^3 + (2)^2 - 3 = 2(8) + 4 - 3 = 17$$

Figura 23: Texto escrito pelo aluno AI3 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite.... Isso aqui existe... o limite sim... Quer dizer, eu posso substituir diretamente porque não vai impedir, dar zero ou coisa assim... então... o limite... de xis tendendo a dois... de... dois vezes oito, mais quatro, que é xis ao quadrado menos três, seria igual a... duas vezes oito é dezesseis... mais quatro é vinte, vinte menos... três é dezessete. Não errei nada aí... vinte menos três é dezessete.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 2} 2.8 + 4 - 3 = 17$ | <p>A afirmação feita pelo aluno de que “Quer dizer, eu posso substituir diretamente porque não vai impedir, dar zero ou coisa assim...” deixa implícita a compreensão de que o limite da função neste caso é igual ao valor da função no ponto xis dado, ratificada no final da afirmação, quando trata sobre a possibilidade da não ocorrência do limite da função, embora em um dos seus argumentos, como no caso do primeiro aluno, explicita a presença do zero como uma possibilidade de não ocorrência do limite. Seu conceito de limite como fronteira não foi um obstáculo para a determinação do limite da função em tela.</p> |

**Figura 24:** Texto escrito pelo aluno AI4 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Análise                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vamos lá. Então o limite é xis tendendo a dois de dois xis ao cubo mais xis ao quadrado menos três. Aqui simplesmente substituiu o dois no xis, né! Vou tentar aqui. Caramba! (...) Oh, rapaz! Acho que eu estou dormindo ainda.(...) Vamos lá, né. Agora sim. Então o resultado dá dezenove.(...) Bem, acho que nesse caso aqui foi apenas uma substituição do xis e obtemos o resultado dezenove.(...) Eu não acredito não que eu não estou sabendo somar! Meu Deus do céu! Eu reescrevo novamente. Posso colocar o resultado aqui embaixo mesmo? Aqui? (...) Rapaz, é brincadeira! Ah, meu</p> | <p>O aluno demonstra no seu argumento “Aqui simplesmente substituiu o dois no xis, né!”, que possui implicitamente a compreensão da continuidade da função dada. Os erros cometidos na obtenção da resposta da questão não foram relativos ao conceito de limite.</p> |



Deus. Eu tô achando até engraçada uma coisa dessas. Pôxa! Agora eu acho que está certo, o resultado é dezessete. Meu Deus! (...) É. Dois resultados errados e outra coisa não é por não saber fazer.(...) Tendo falta de atenção na hora de pequenos cálculos: multiplicação soma. Tudo bem!

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$2(2)^3 + 2^2 - 3 = 32 + 4 - 3 = 33$$

Refazendo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3) = 2(2)^3 + 2^2 - 3 + 16 + 4 - 3 = 19$$

O RESULTADO É 17

$$= 2(2)^3 + 2^2 - 3 = 32 + 4 - 3 = \boxed{33}$$

REFAZENDO:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3) = 2(2)^3 + 2^2 - 3 = 16 + 4 - 3 = \boxed{19}$$

O RESULTADO É  $\boxed{17}$

**Figura 25:** Texto escrito pelo aluno AI5 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                            |                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Existe, esse limite será igual a dois ao cubo vezes dois dezesseis, mais dois ao quadrado quatro vinte menos três dezessete.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>17. Existe</p> | <p>Este aluno também tem a compreensão da continuidade da função dada.</p> |

$$= 17 \text{ existe}$$

**Figura 26:** Texto escrito pelo aluno AI6 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> A função efe de xis vai ser igual dois xis três, mais xis dois menos três (...). A minha função vai ser <math>f(x) = 2x^3 + x^2 - 3</math>, ai no caso uma equação de terceiro grau, porque não poderia, cabe o valor de xis aqui fica xis ao cubo oito vezes dois é dezesseis, mais quatro, [risos].(...) Não consigo ver.(...) Isso aqui muito mais complicado que isso.(...) Dois ao cubo mais dois ao quadrado mais três vai ser igual a dezesseis mais quatro menos três igual a dezessete.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ $2(2)^3 + (2)^2 - 3 = 2.8 + 4 - 3 = 17$ | <p>O aluno tem idéia da continuidade da função, embora não o diga explicitamente, o argumento usado de que “A minha função vai ser <math>f(x) = 2x^3 + x^2 - 3</math>, ai no caso uma equação de terceiro grau, porque não poderia, cabe o valor de xis aqui (...)” deixa transparecê-la.</p> |

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$$

$$2(2)^3 + (2)^2 - 3 = 2.8 + 4 - 3 = 17$$

**Figura 27:** Texto escrito pelo aluno AI7 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                 |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Mais quatro, dezoito, dezesseis xis tende a dois.(...) Limite existe quando o x tende para 2 o limite é 17.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 2} 2(2)^3 + (2)^2 - 3 = 2.8 + 4 - 3 = 17$ <p>limite existe quando o x tende para 2<br/>o limite é 17.</p> | <p>Este aluno mostra, também, nos seus argumentos que tem o conhecimento da continuidade da função.</p> |

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2(2)^3 + (2)^2 - 3 = \overline{2.8} + 4 - 3 = 17$$

limite existe quando o x tende para 2  
 o limite e 17

**Figura 28:** Texto escrito pelo aluno AI8 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Então aqui vai dar... O limite existe. O limite é limite de xis tendendo a dois com dois xis ao cubo mais xis ao quadrado menos três, dá desesseis vinte menos três dá dezessete.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>O limite Existe</p> <p><math display="block">\lim_{x \rightarrow 2} 2.2^3 + 2^2 - 3 = 17</math></p> | <p>O conhecimento da continuidade da função está marcado pela certeza expressada pelo aluno quando diz “Então aqui vai dar... O limite existe”, esta certeza possibilitou a resposta esperada para a questão.</p> |

O limite Existe  

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2.2^3 + 2^2 - 3 = \underline{\underline{17}}$$

**Figura 29:** Texto escrito pelo aluno AI9 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite existe, ele é, nesse caso aqui a gente pode provar se ele existe ou não se agente pegar, o limite que a função é o limite de dois xis três mais xis ao quadrado menos três quando xis tende a dois. Você pega esse limite,... fica dois xis, dois vezes dois ao cubo mais dois ao quadrado menos três, e você agora vai quando xis</p> | <p>O aluno mostra a compreensão da continuidade do limite da função em pauta. Isto fica patente no seu argumento de que “O limite existe, (...) a gente pode provar se ele existe ou não se agente pegar, o limite que a função é o limite de dois xis três mais xis ao quadrado menos três quando xis tende a dois”.</p> |

tende pra dois. E agora é só resolver o limite vai ser igual, fica seis, doze, mais quatro, menos três, o limite quando xis tende a dois da função dois xis três mais xis ao quadrado menos três você ficaria que o limite seria seis doze mais quatro dezesseis menos três seria treze. O limite dessa função quando xis tende a dois seria treze.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2(2)^3 + 2^2 - 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 12 + 4 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = 13$$

Handwritten student work showing the limit calculation for the function  $2x^3 + x^2 - 3$  as  $x$  approaches 2. The student substitutes  $x=2$  into the function, resulting in  $12 + 4 - 3$ , and concludes the limit is 13.

**Figura 30:** Texto escrito pelo aluno AI10 durante a sessão de resolução de problemas

No quadro 7 abaixo são apresentadas quatro categorias consideradas adequadas para resumir o conjunto de respostas dadas pelos dez sujeitos à questão 3, item a.

| Encaminhamentos de proposição do problema                                                       | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                 | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Uso de procedimentos mecânico de substituição imediata para determinação do limite da função |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Uso de argumentos que indicam o reconhecimento da existência do limite da função.            |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Uso de argumento pautado no fato que o denominador de uma fração não pode ser zero           |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Procede entendendo o limite como derivada da função                                          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 7:** Resumo das respostas dadas pelos alunos a **Questão 3a**, durante a sessão de resolução de problemas.

Por este quadro é possível traçar um perfil destas respostas e reconhecer quais destes estudantes alcançaram a solução esperada, apesar de alguns equívocos em algumas operações, e quais deles tiveram mais dificuldades em determinar a solução do problema. Ao não perceber a continuidade da função o estudante passa a proceder mecanicamente num processo de tentativa e erro na determinação do limite, tanto que caso apareça um valor não esperado ou não admitido por ele isto faz com que passe a buscar alternativas para determinar a solução do problema. Pode-se perceber esta afirmação no seguinte argumento apresentado por um destes estudantes ao afirmar que “Caso desse zero, correto! A gente tem que, dar um jeito nisso aí tirar o zero disso aqui. Foi o que eu aprendi”. Este tipo de argumento limita a percepção do aluno sobre o limite de uma função a um modelo de representação associado às frações racionais, isto é, da não existência de uma fração com denominador zero. Isto faz com que *limite igual a zero* seja uma solução impossível, necessitando de um esforço na busca de outra solução.

O mesmo pode-se dizer do uso da derivada como modelo de limite de função. Visto que este tipo de representação utilizado pelo aluno na compreensão do limite de uma função leva-o a utilizar estratégias que não permitirão encontrar a solução desejada e que na maioria das vezes trazem dificuldades até para encontrar a solução, causando um tipo de obstáculo procedural.

**Questão 3:** Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule

esse limite. **b.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$ .

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Problema 3. Verifique se existe o limite abaixo, em caso afirmativo calcule esse limite. Primeira coisa quando tem uma coisa aqui em baixo, o que vem na minha cabeça é L'Hospital. E como eu tou vendo que, que o limite de um sobre xis menos um com xis tendendo a um, isso vai dar um zero. ...Eh, primeira coisa que vem na minha cabeça é fazer um L' Hospital aqui.(...) Posso mesmo? (...) Observando mais um negócio aqui, L'Hospital é, deriva a de cima, deriva em baixo. Se derivar em cima que é uma constante vai dar zero. O limite disso aí vai ser zero. Deixa eu observar se tem outro caminho, pra isso não dar um zero. É isso, zero é um número, mas não gosto que dê um zero não, gosto que dê um ... número ... maior ou menor que zero.(...) Não, eu usaria L'Hospital, se eu não achar outra alternativa eu uso L'Hospital, entendeu! (...) Mas é porque teve tanto problema com L'Hospital na minha cabeça, no primeiro período, que ... problemas de ... com o professor ... de aprender L'Hospital antes do tempo ... aí eu fiquei meio...(.) É, na certa. Traumatizado é uma palavra certa. Traumatizado em usar. Mesmo depois que eu aprendi, que o professor ensinou que eu aprendi não queria mais usar.(...) É.(...) É, tou completamente lembrado do negócio aqui.(...) Eu sei, eu sei...(.) O negócio tá piorando ali.(...) Vai dar um sobre zero, e um sobre zero não existe.(...) É. (...) Tem que se tirar o zero de baixo de qualquer jeito. Eh tem que se tirar de qualquer jeito não. Mas, se não tiver jeito</p> | <p>Como é explicitado pelo próprio aluno, “Primeira coisa quando tem uma coisa aqui em baixo, o que vem na minha cabeça é L'Hôpital”, ele já possui um modelo de representação para resolver questões de limite de função nas quais apareçam um termo com uma variável no denominador. Esse modelo de representação propicia o aparecimento de obstáculos do tipo: epistemológico que dificulta a sua compreensão sobre o fato do limite da função aparentemente não existir além de fazer com que ele fique buscando alternativas para a resolução do problema, o que pode ser observado na sua fala em vários momentos, como ele mesmo diz “observar se tem outro caminho, pra isso não dar um zero”. E obstáculos psicológicos relacionados ao uso da técnica em questão abordada na afirmação “(...) Mas é porque teve tanto problema com L'Hôpital na minha cabeça, no primeiro período, que... problemas de... com o professor... de aprender L'Hôpital antes do tempo... aí eu fiquei meio. (...) Traumatizado em usar. Mesmo depois que eu aprendi, que o professor ensinou que eu aprendi não queria mais usar”, acrescentando-se o fato deste aluno não aceitar a presença do zero no limite “não gosto que dê um zero não, gosto que dê um... número... maior ou menor que zero”. Somente após usar o gráfico da função (abaixo) dada como modelo de representação do seu comportamento, foi possível para o aluno perceber a não</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>deixa ele lá em baixo mesmo.(...) Eu tou pensando em multiplicar em baixo por... xis mais um, em baixo e em cima xis mais um.(...) O problema é que tou usando cane[ta]. Eu não gosto de usar caneta por causa disso. Eu, riscar muita coisa. Mas eu sei que isso vai é bom pra você, mais é que eu não gosto de caneta.(...) É e eu gosto de fazer e apagar se tiver errado.(...) Estou multiplicando em baixo e em cima por xis mais um... prá em baixo obter um ... produto notável. Quando xis tende a um, isso vai ficar xis mais um e o de cá xis ao quadrado... menos um ao quadrado. Ah, não saiu da trança não...(...) Eh, que o limite não existe.(...) É. (...) Outra possibilidade? ... Pera aí tem uma técnica que diz que pode, você dividir tudo por xis. Em cima e em baixo por xis. É pra arriscar, eu vou arriscar.(...) Limite de xis tendendo a um... Ah! Acho que agora dá. Um sobre... Pera aí... x vezes um sobre xis sobre x vezes um menos um sobre xis, deixa ver se tá certo. Xis menos um... [inaudível] eh! Essa também não bateu não.(...) [inaudível] aquele ponto sem ser aquele? (...) Sim, eu acho que esse negócio vai pra infinito mesmo.(...) Traçar o gráfico? (...) Se você traçar o gráfico será que ele não da muita coisa não, velho? (...) O gráfico dessa função! Eta! Pra desenhar gráfico é bronca! (...) Tá tendendo a um.(...) Usar uma escala meio grande aqui... [inaudível] (...) Podia ter estudado isso em casa né! (...) Gráfico... Aí, porque é o gráfico da função né? (...) Esqueço, posso esquecer do limite? (...) Eu construo gráfico meio devagar. ... Quando xis for zero, ipsilon vai ser menos um. Isso aí é</p> | <p>existência do limite da função em decorrência dos limites laterais da função serem diferentes, mais infinito à direita de um e menos infinito à sua esquerda.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

uma coisa meia,... Como é que se diz? (...)

Certo. Quando  $x$  for zero  $\epsilon$  vai ser menos um. ... quando  $x$  [inaudível] pro infinito. ... Quando  $\epsilon$  [inaudível] aumentando os valores de  $x$ ... se aumentar os valores de  $x$ , os de  $\epsilon$  vão diminuir. ...

Que gráfico é esse? [inaudível] Deixe-me buscar outro ponto. ... Quando  $x$  for um não pode. Quando  $x$  for,... quando  $x$  for dois o que acontece? Quando  $x$  for dois...  $\epsilon$  vai ser um. ...  $x$  for três  $\epsilon$  é um meio. Ela não tá [inaudível] nesse ponto não, no meu ponto de vista não.(...) Ela não está definida nesse ponto. ... Esse gráfico vai,... ele vai ficar assintotando o eixo das ... das abscissas ...(...) Não tem outra aqui em baixo.(...) Está exatamente aqui pelo ponto menos um, vai dar menos dois né. ... Isso não tá certo não, o gráfico tem que ser isso assim. ... Ela vai tender num lado pros valores maiores que,... que um, ... para valores maiores que um o valor de  $\epsilon$  vai caindo ... tá mal desenhado mais é ... ela não está definida nesse ponto, ... encostou aqui, mas não encosta não. Do outro lado também... acho que isso é assim mesmo. ... [inaudível] como  $x$  fosse menos um... vai dar menos dois. ...(...) Ela vai tá por aqui assim, vai tá. Quando  $x$  for meio? ... Ela vai tá num ponto aqui entre zero e um em  $x$ . ... São dois, dois, como é que se diz... parecida , parecida, com ... uma hipérbole, como se fosse uma hipérbole. É uma hipérbole, no meu ponto de vista isto é uma hipérbole entendeu! Tá aqui uma das... como é que chama esse negócio da hipérbole? (...) Não, aquele, aquela, como



é que chama, isso aqui, essa reta aqui. Como é que chama. Me ajuda aí! (...) É assíntota? Se chama assíntota? Pronto, é. O eixo das... o eixo xis seria uma delas e a reta ... xis igual a um né? (...) Seria a outra.(...) E agora é isso aí, esse ponto não está definido no menos um, no ponto um, xis igual a um.(...) Que não existe limite nesse ponto. ... Certo? (...) Só até, com efeito, na questão três. ...Tá até riscado aqui [inaudível] (...) [inaudível] reformulando. Reformulando. Uma coisa interessante que eu percebi agora. ... Reformulando, observação, vamos dizer, tem um traço aqui. Com um traço assim embaixo do eu. Dá terceira questão, no meu ponto de vista eu fiz sozinho entendeu! (...) Então, o limite dessa função é tal, não sei que, mas eu tenho limite, coisa interessante que eu percebi agora! Da terceira que[stão] ..., seria ...(...) Ah, esse é o terceiro item **b**, certo! Nessa aqui item **b** eu coloquei nos... É que eu não, é que eu não acredito que eu tenha feito só não! Se eu tivesse sozinho, talvez eu tivesse aplicado L'Hospital logo de primeira, eu não teria parado pra pensar não, também não.(...) Ia chegar em solução zero. A derivada de cima ia dar zero, e a derivada de baixo ia dar um. Zero sobre um.(...) Não. Completamente fora de questão.(...) Eu associei.(...) Não deu.(...) É exatamente pelo que você falou no começo. O L'Hospital precisa de uma, seguir, seguir uma... como se diz ... existem regras pra aplicar ... o L'Hospital, eu não observei, eu não observei essas ... essas condições, também eu não tou lembrado direito quais são. E por isso que não podia, não poderia ter

saído.(...) Lembrei agora de uma coisa. Não sei se tá certo não me corrija se eu tiver errado. L'Hopital você pode usar se o limite de cima tender a zero e o de baixo tender a zero.(...) Que é uma indeterminação.(...) Bom, quando o negócio tá indeterminado.(...) Vou rescrever aqui, eu disse que a função tende a um isso tá errado. Não, o xis tende a um. ... Tem aquele negócio que tem de saber quando ele tende a um pela... direita ele tende a mais infinito, né! Quando ele tende pela esquerda, pra menos infinito. ...

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

O gráfico nos mostra uma hipérbole com assíntotas em  $x = 1$  e o próprio eixo  $x$  nos mostrando que quando (a função tende a 1) o  $x$  tende a 1 não existe limite e por um lado vai a  $+\infty$  e por outro para  $-\infty$ .

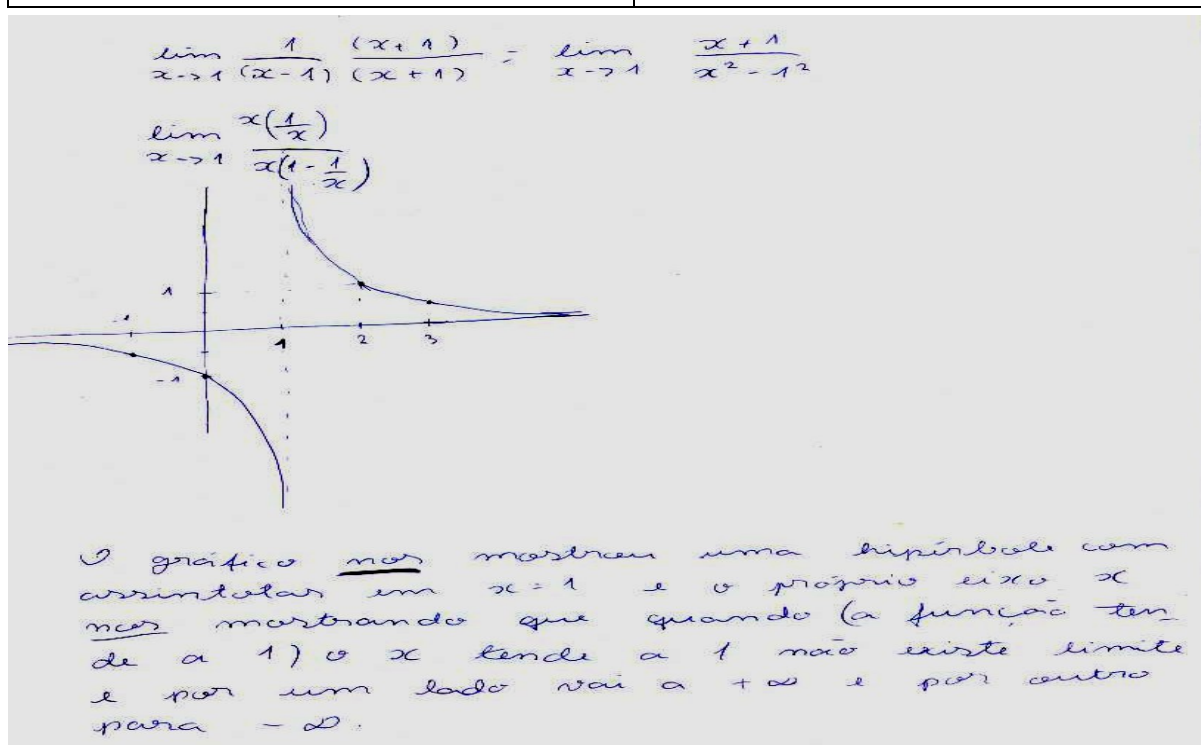


**Figura 31:** Texto escrito pelo aluno AI1 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Verifique se o limite existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite. ... Vou ter de fazer a mesma coisa, tenho certeza que o limite dado... limite ... um ... menos um ... pronto. Se eu usar esse método aqui de cara daria infinito, porque não tem uma regra ... de se ter um sobre xis menos um. E xis sendo um, dá um sobre zero. Um sobre zero é um número que a tendência é o infinito, não tem um número real. ...(...) Deixa eu ver se tem outro método de resolver. ... Ver se tem alguma conta que não dê o valor. ... Eu não tenho limite, e se eu não tenho um limite eu num... se tem definido no ponto todo. Então o limite no ponto... deixa eu ver se eu vou atribuir ... eh! Já nesse caso aqui eu não posso fazer a mesma coisa do primeiro, do segundo percebe agora? Pois, se eu atribuir um valor diretamen[te], direto pra xis o que já dá um valor ... eu vou não ter ponto algum. Porque um sobre zero não é um ponto... De modo algum, se olhar no espaço não encontra esse ponto. Se você usar a regra anterior, também não adianta porque ele, ele não quer saber quem é aga. Porque aga zero, tendendo a zero ele não deve, dá um ponto xis aqui, xis igual a um. ... E aí eu faço, eu posso deixa assim só? (...) Tá certo? [sorri] Eu tou fazendo e ao invés de você tá me avaliando eu tou me avaliando! (...) Quero saber! (...) Numa incógnita, não é? (...) Hum, hum! (...) É. (...) Se existe o limite abaixo e em caso afirmativo calcule esse limite.(...) Hum! (...) Usando, eh! Usando a fórmula que, o método que eu usei</p> | <p>A resposta deste aluno de que o limite não existe não se dá em virtude da observação de que na vizinhança de um os limites laterais são diferentes, como já foi dito, à direita menos infinito e à esquerda mais infinito, e sim por quê o limite é infinito. Aqui o aluno toma a decisão de que não sendo infinito um número real o limite não existe, isso fica claro na sua afirmação “Usando a fórmula que, o método que eu usei no anterior eu cheguei a um valor que não dá um valor, da um valor infinito. Quer dizer não existe o limite”. Chegou-se a solução correta do problema por um argumento não verdadeiro, devido ao conceito que tem do infinito, a metáfora do infinito é um obstáculo epistemológico para este aluno. Além do conceito de limite como derivada de uma função que ele ainda mantém.</p> |

no anterior eu cheguei a um valor que não dá um valor, dá um valor infinito. Quer dizer não existe o limite.(...) Eu coloco, não existe o limite!... Pois, tende a infinito.(...) É, que não existe o limite porque... se limite é um ponto ... eh ... real para aquela, aquele número xis que eu atribuo, então ele tem que ter uma, uma defini, um limite ... Eh, concreto também pra que eu encontre! Porque em cada ponto, cada função no ponto tem que ter um ponto exato pra ela, se naquela função não existe aquele ponto então não existe limite.(...) É infinito.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

não existe lim pois tende ao infinito.

Handwritten student work showing the limit calculation and conclusion. The text reads:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0} = -\infty$  and below it, "não existe lim pois tende ao infinito".

**Figura 32:** Texto escrito pelo aluno AI2 durante a sessão de resolução de problema

| <b>Aluno Informante 3</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resposta</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Análise</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Esse terceiro aqui limite quando limite de um sobre xis menos um quando xis tende a um eu fiz, aqui eu multipliquei a função um sobre xis menos um multipliquei por xis menos um sobre xis menos um.(...) Então eu encontrei é xis menos um dividido por xis ao quadrado menos dois xis mais um. Quando substitui o valor um em xis embaixo vai dar no denominador vai dar um e no numerador vai dar zero então o limite vai ser zero. Foi essa</p> | <p>Este aluno utiliza na resolução da questão uma das técnicas de determinação do limite de uma função quando se tem, por exemplo, a presença de uma função irracional no denominador da função, que não é o caso da função racional em discussão. Observa-se que o modelo de representação que o aluno tem com relação ao uso de artifícios para eliminar o aparecimento do zero no denominador da função, é um fator de obstáculo para determinar a solução da</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>mais ou menos que eu estou lembrado do centro.(...) O de cima da zero.(...) Certo, e esse daqui debaixo, a não é ta certo. Eh! (...) Dá. Vai dar zero também ai dá uma formula é. É dá um limite na formula zero sobre zero. Então esse limite acho que ele não existe. E no caso como não essa tentativa aqui que eu fiz não fez com que o denominador não desse diferente de zero creio que ele não existe.(...) Primeiro, porque multiplicando ele por xis menos um por xis menos um é a mesma coisa que estivesse multiplicando por um.(...) E foi uma tentativa de eliminar ou então pelo menos mudar aqui o essa função xis menos um do denominador.(...) Porque com a função xis menos um quando eu substituir xis por um o denominador vai dar zero.(...) Não existe fração dividido por zero. Não existe o valor de um numero real dividido por zero.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = 0$ <p>Creio que como não pude eliminar o valor zero do denominador o limite não existe.</p> | <p>questão, acrescentando-se, também, a representação que tem da não existência de um número racional na forma de fração, com denominador zero. Tanto que como não obteve êxito na sua tentativa de eliminar o zero do denominador ele concluiu “Então esse limite acho que ele não existe. E no caso como não essa tentativa aqui que eu fiz não fez com que o denominador não desse diferente de zero creio que ele não existe”, ratificando no seu texto escrito “Creio que como não pude eliminar o valor zero do denominador o limite não existe”.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Handwritten mathematical work on yellow paper:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = 0$$

Creio que como não pude eliminar o valor zero do denominador o limite não existe.

**Figura 33:** Texto escrito pelo aluno AI3 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Esse limite não existe... não existe... pois o numerador e o denominador... A parte de baixo é chamada de denominador não é.(...) Denominador... não vai existir o limite porque o denominador vai zerar... Neste caso... vai anular.(...) Tenho, eu poderia cortar com alguma coisa em cima, fazer uma avaliação segundo eh... uma equação do segundo grau aí poderia colocar e cortar, se ele pudesse. (...) Este daqui não...(...) Este daqui não existe mesmo.(...) Eu creio que não.(...) Pera aí deixa eu ver esse negócio aqui de novo...(...) Um... xis menos um... um... xis mais... xis... um menos...xis...se colocasse assim... tem uma questão no calculo de [inaudível] que eu para integrar, tem um negócio assim que eu faço que sai o... ele deixa de ser o de baixo pra ser...não, não eu acho que dá zero mesmo.(...) Arrumar um sistema que desse isso aqui... uma, uma equação que desse assim e não anulasse embaixo, mas eu acho que de qualquer jeito vai anular.... Que tá tendendo a um... colocar xis menos um ou xis menos, vai anular mesmo eu acho que... tem. Eu quero saber se errei muito.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>esse limite não existe pois o denominador neste caso vai anular.</p> | <p>O aluno em questão transporta para a resolução de problemas de limite de função modelo prévio construído no ensino fundamental, da não existência de frações com denominador zero, tornando-se um obstáculo para a compreensão do problema e determinação da sua solução. Essa idéia esta explicita em um dos seus argumentos, “não vai existir o limite porque o denominador vai zerar”.</p> |

esse limite não existe pois o denominador neste caso vai anular.

$$\frac{x^2}{x^2}$$

$$\frac{x^2}{x^2}$$

**Figura 34:** Texto escrito pelo aluno AI4 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vamos lá. Deixe eu ver se eu me lembro como eu posso fazer. Nesse caso aqui eu tenho o limite de xis tendendo a um de um sobre xis menos um. Eu tou com um pouco de dúvida se o primeiro passo aqui seria fazer a substituição, então verificaria que seria um sobre zero, né. Então esse limite tendo ele para...é que não existe no caso, né. Creio que seria mais ou menos assim a solução em torno...Que aqui eu iria anular o denominador, né, eu fazendo a substituição direta. Bem, vou colocar mais ou menos o que eu estou pensando, seria a primeira verificação que está vindo na minha cabeça. Seria o que: um sobre um menos um, então eu teria aqui um sobre zero. Então isso aqui não existe, ao meu ver. Acho que a solução seria essa inexistente, sem solução, alguma coisa assim.(...) Quando ele tem um valor que zere o seu denominador, então ele passa a não existir. Creio que num caso assim, né, de um número fracionário, vamos dizer assim, né. É o que eu estou realmente vendo ah, nesse momento, não estou conseguindo enxergar outra coisa.(...) Tá certo. Realmente, eu não estou com outra visão nesse momento, né.(...) Tá certo! Ok! Deixe eu vê essa daqui.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \text{?}$ | <p>Este aluno também tem como representação o modelo baseado na não existência de números racionais fracionários com denominador zero, observa-se esse elemento no seu argumento de que "(...) então eu teria aqui um sobre zero. Então isso aqui não existe, ao meu ver. Acho que a solução seria essa inexistente, sem solução, alguma coisa assim". Esta concepção não o ajuda a perceber que ao lidar com limite de função o procedimento é diferente, isto é, é possível verificar a existência ou não desse limite.</p> |

$$= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \cancel{\infty}$$

**Figura 35:** Texto escrito pelo aluno AI5 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Sim. Aí é quando já complica porque vem a questão dos limites laterais, né em que ele explicou quando tivesse mais ou menos você colocaria ele tendendo a um mais bem próximo. Nesse caso aqui se ele sendo diretamente a um eu diria que ele não existe.</p> <p><b>Texto produzido pelo aluno:</b><br/>         Ñ existe.</p> | <p>O aluno utiliza a definição formal de lateralidade do limite para verificar a existência do limite da função tratada. Com isso consegue determinar a solução do problema e chegara resposta pretendida.</p> |

$$= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \cancel{\infty}$$

**Figura 36:** Texto escrito pelo aluno AI6 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Aqui já é mais complicado. Tem uma função efe de xis igual a um sobre xis menos um. Aí quando o sistema é zero o limite não existiria, porém ele poderia usar de algum artifício de matemática pra ver se realmente é verdade. No que eu não vejo qual seria. Eu gosto bastante de ver no gráfico, sabe.(...) Falando muita coisa do gráfico de um sobre xis menos um atribuindo valores né! (...) Gráfico da uma visão melhor pra você do que é complexo. Aí quando [inaudível] então xis igual a zero. Xis igual a zero, â xis igual a dois, mais xis igual a um xis igual a dois. Então passa por esses pontos [risos], os sinais giram muito velhos. Quando xis tende a xis igual a um. Xis</p> | <p>Ao abordar a questão o aluno se refere ao fato do denominador da fração da função racional dada como se a função se anulasse no ponto um dado, “Aí quando o sistema é zero o limite não existiria (...)”, em decorrência caberia, neste caso, verificar se o limite não existe e para isso “(...)”, porém ele poderia usar de algum artifício de matemática pra ver se realmente é verdade”. Porém recorre ao gráfico da função como modelo de representação para compreender o comportamento da função, “Eu gosto bastante de ver no gráfico, sabe”, pois segundo ele o “Gráfico da uma visão</p> |



igual a um é aqui então quando, ah isso aqui é interessante quando você coloca assim, xis tende pra um, vai um, aí dá aproximadamente ou negativamente né colocando, por exemplo, números menores do que um menos dois... eu me enrolo geralmente nestas coisas. Tem limite isso aqui? (...) [Inaudível] x menor que um pra ver se ele tem algum valor tende a infinito é porque isso aqui quando x tende a um negativamente, por exemplo, menos qualquer numero dividido por zero, um número assim, por exemplo, zero virgula, zero, zero, zero bem isso aqui é infinito quando x tende a um é esse número tende a infinito. Não sei como aqui. Aí eu sei que a equação corta aqui neste ponto pode ser assim, pode ser assim, e quando corta aqui neste ponto, pode ser assim, pode ser assim.(...) Imaginando que vai ficando um sobre menos três, menos três é o que é menos um zero virgula trinta, zero virgula trinta e três isso é o valor para y, né...três incrível, isso aqui parece que é simples,é simples,mas não estou conseguindo ,menos quatorze vai ficar menos cinco, ai os valores de y tende a diminuir , tendem negativamente pelo lado negativo mais não, é ao contrário ai vem menos quatro fica o valor de y menor. Ai acho que ele tende a crescer aqui assim. Menino...[sorri]...Quando x igual a zero, quando x igual a zero ai tem que colocar efe de xis que é igual a ipsilon igual a...[inaudível]... rapaz eu estou apanhando feio nesta questão. Agora, os valores que achei xis igual a cem menos cento e um é y. Fica um valor bem pequeno, daí em complicado. Quando x tem o valor igual a quanto? (...) É bem negativo. [ lendo o que está resolvendo] menos um terço, y já é maior, ou seja

melhor pra você do que é complexo". Mesmo assim tem dúvida se o limite pode ser infinito, visto que, segundo ele "Simplesmente a gente não pode determinar o limite mais infinito menos infinito". Todas essas questões abordadas traduzem-se em obstáculo epistemológico, que dificultam a conclusão da questão, no que se refere à existência do limite da função.

aqui aumenta, aí tende a infinito crescente né, e aqui esta no dividendo positivamente, ou seja de mais cem menos um noventa e nove, y também fica pequenininho aqui, lá embaixo x é bem grande, onde x é igual a dois por exemplo ele fica igual a zero. eles tem do mesmo jeito. Eles têm um infinito positivo, mas não se aproximam de um. Engraçado tenho quase certeza que isso está errado. Porque vai ter sempre um ao contrário.(...) Acho deixe ver, um menos dois menos três aí não, na medida são fracionários não é. Oxente que absurdo ele teria que se aproximar aqui! Não teria nada aí embaixo que absurdo. Ele tende a se afastar é isso mesmo, quando x é um número grande, bem pequeno, aliás.(...) x igual a um sobre 99, é bem próximo aqui do zero.(...) Meu y exatamente.(...) Positivo.(...) Fica bem próximo do zero. E quando eu vou aproximando aqui.(...) Ele vai ficar, é isso que eu tenho que fazer. É exatamente aí quando ele vai se aproximando. Aí esse aqui chega às vezes a zero aí.(...) Quando x ficar bem pertinho de um? (...) y tende a direita se é positivo, ou negativo? (...) Quando x é. No mínimo essa questão é fácil e eu estou me enrolando desse jeito, eu não acredito.(...) Zero.(...) Um número bem perto de um.(...) Ah! Nesse caso aqui seria uma vírgula um. Uma vírgula um, menos um é igual a zero vírgula um... é igual a dez. aí o y vai ser igual a dez. ele se aproxima e vai pra cima.(...) Vai pra cima também.(...) Agora vai ficar mais fácil tem que fazer zero vírgula nove menos um dá menos zero vírgula um i. 0,1. Dá positivo, dá negativo, aliás, porque negativo é maior. Essa aqui é fácil e eu estou me enrolando desse jeito eu não acredito.(...) Zero.(...) Um número

bem perto de um.(...) Ah! Nesse lado aqui seria 1,1. 1,1-1 é igual a 0,1 é igual... a dez. ... a última vai ser igual a dez. Ele se aproxima mais não tende a crescer.(...) É crescente.(...) Esse outro lado agora vai ficar mais fácil, fica 0,9-1 dá menos zero vírgula um dá positivo, não negativo, aliás, porque é maior. Aqui é assim negativamente fiz errado aqui o gráfico.(...) Rapaz. Quando xis tende ao lado direito, a função tende a mais infinito. Quando tende negativamente, ou seja, pelo lado esquerdo, ou seja, ela tende a menos infinito.(...) Por incrível que pareça eu passei por média em cálculo I, será que vai acontecer com cálculo II. Quando xis tende a direita...pôxa...então tem limite mais ou menos infinito dependendo o lado que ele se aproxima.(...) Que o limite. Simplesmente a gente não pode determinar o limite mais infinito menos infinito, não sei se pode usar, porque indeterminação, né? Porque o limite usado é infinito. É o caso aqui.(...) [Risos], mais infinito ou menos infinito. Depende não sei acho na realidade não tem isso ele tende a isso, mas realmente não chega nunca. Acho que embora o limite tem a ver em chegar a algum canto, acho que não chega.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Quando  $x$  tende a  $-1$  pela direita  $y$  tende a  $+\infty$ , quando  $x$  tenda a  $-1$  pela esquerda  $y$  tende a  $-\infty$



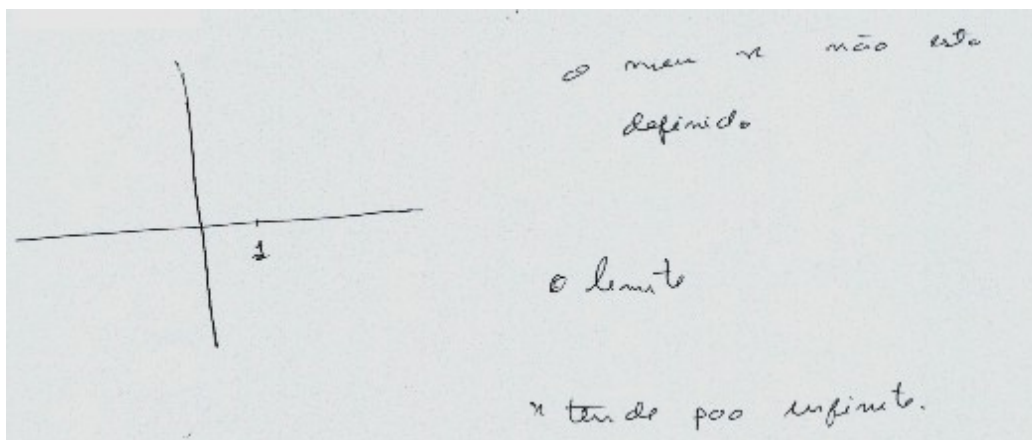


**Figura 38:** Texto escrito pelo aluno A18 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vamos ver. Se você multiplicar em baixo e em cima por xis mais um... Dá no mesmo... Posso passar para outro ou tenho que fazer logo esse?</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>           (...) A princípio não tem limite (...). (...) Os valores laterais são diferentes logo a não é limitada.</p> | <p>O modelo de representação que este aluno possui está baseado na representação do limite por uma indeterminação em que se faz necessário determinar o argumento que será utilizado para suprimir a indeterminação, pode-se perceber isto na afirmativa seguinte: “Se você multiplicar em baixo e em cima por xis mais um”. Retoma a análise afirmando que a função “A princípio não tem limite”, tomando ainda por base o modelo referido acima se respaldando no teorema de L'Hospital para a supressão da descontinuidade, até utilizar ao conceito mais formal dos limites laterais para determinar a solução.</p> |

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$$

Reformando a análise:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(1+x)}{(1+x)} = \frac{-(1+x)}{1-x^2} = \frac{-(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-(x^2-1)}{1-x^2} \quad (x^2-1) \rightarrow 0$$

a princípio, não tem limite.

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1'(x-1) - 1(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{0(x-1) - 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

achando o ponto crítico:

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

Os valores laterais são diferentes logo a não é limitada.

Figura 39: Texto escrito pelo aluno A19 durante sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Tá, aqui é uma questão bem legal de se fazer, é engraçado aqui que você tem uma função onde o limite não existe. Porque você tem que o limite, o limite quando xis tende para um de um sobre xis menos um. Ai você vai ter um menos um daria zero, você tem um dividido por zero, você não tem o que é limite, o limite não existe. Essa parte de limite é até mais fácil quando você desconsidera as regras porque quando começa a chegar as partes de regra, você tem o limite de tal função com tal função tende pra alguma coisa, você tem muita regra, por exemplo, regra pra resolver limite de seno, de cosseno. Por exemplo, tem uma função muito chata, que foi não foi ela caia na prova, é o limite quando seno ao quadrado de h sobre h, que seria o seno ao quadrado de teta sobre teta. Essa função dá um, mas ela só dá um porque o professor diz que ela dá um porque ninguém nunca me provou que ela</p> | <p>Este aluno da sua resposta de que o limite da função não existe utilizando o modelo de representação aprendido do sistema de numeração, no qual não existe uma fração racional com denominador zero. Este modelo de representação propicia o aparecimento de obstáculo epistemológico, uma vez que é feita uma transposição da perspectiva da existência do número racional com denominador zero para o limite de uma função racional. Este comportamento dificulta a percepção do objeto analisado.</p> |

dá um não. Ela dá um porque tá lá no livro que ela dá um. Mas se você for substituir esse limite por um dá zero sobre zero e zero sobre zero o camarada diz a mim que não existe. Ai eu boto que não existe e ele diz: “não cara dá um por causa de tal e tal regra”. E você tem várias regras ai, são um milhão de regras pra você decorar.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-1} = \cancel{\infty}$$

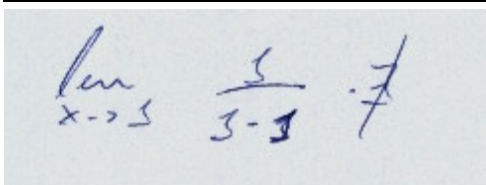


**Figura 40:** Texto escrito pelo aluno AI10 durante sessão de resolução de problemas

| Encaminhamentos de proposição do problema                                              | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                        | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Modelo de representação no Teorema de L'Hôpital.                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Modelo de representação baseado na metáfora do infinito.                            |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Modelo de representação baseado na indeterminação do limite.                        |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Modelo de representação baseado no limite como derivada.                            |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Modelo de representação baseado em a não existência da fração com denominador zero. |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Modelo de representação utilizando a definição formal de limite lateral.            |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 7. Modelo de representação utilizando o gráfico da função                              |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 8:** Resumo das respostas dadas pelos alunos a **Questão 3b**, durante a sessão de resolução de problemas.

No quadro-resumo acima estão apresentadas em sete categorias as respostas dos alunos à questão **3b**, nas seções de resolução de problemas. Se consultadas as produções orais e escritas desses alunos ver-se-á que as categorias

propostas aproximam-se das respostas desses alunos. Nestas condições somente o aluno (AI6) formula a sua resposta utilizando o modelo conceitual formal de limite lateral. O aluno (AI1) tem dois modelos de representação sobre limite de função que aparecem como obstáculos iniciais dificultando a conclusão da resposta ao problema dado. O primeiro deles é o modelo baseado no Teorema de L'Hôpital –que também aparece como modelo de representação do aluno (AI9)–, inadequado para determinar a solução do problema proposto.

O Teorema de L'Hôpital ( $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ), no qual  $f'(x)$  e  $g'(x)$  são as

derivadas de  $f(x)$  e  $g(x)$  respectivamente e  $f(a) = 0$  e  $g(a) = 0$  ou  $\frac{0}{0}$  é utilizado para determinar o limite de uma função em que ocorrem alguns tipos de indeterminação,

como por exemplo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Nestes casos, para resolver o problema da

indeterminação derivam-se independentemente os termos (numerador e denominador) da função dada aplicando-se posteriormente o limite à função derivada obtida e este procedimento é realizado quantas vezes se fizer necessário, até que se elimine a indeterminação, desde que estejam satisfeitas algumas condições, que não discutiremos agora. Tomemos o seguinte exemplo para ilustrar

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ . Quando  $x$  tende ao valor um nesta função aparece a indeterminação

$\frac{0}{0}$ , nesta situação pode-se aplicar L'Hôpital, assim sendo as derivadas do numerado

e do denominador são respectivamente  $2x - 2$  e  $3x^2 - 3$ , aplicando-se o limite a nova

função têm-se  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{3x^2 - 3}$  e quando  $x$  tende a um novamente aparece a

indeterminação  $\frac{0}{0}$ , pode-se aplicar então L'Hôpital mais uma vez. Derivando-se,



mais uma vez, numerador e denominador, respectivamente, obtêm-se 2 e 6x. Aplica-se, novamente, o limite a nova função obtendo-se  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{6x} = \frac{1}{3}$ .

Visto que o referido Teorema não se aplica à situação posta no problema dado a eles, esses alunos recorrem a um novo modelo, baseando na indeterminação do limite. Neste novo modelo, o aparecimento da indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$  proporciona a utilização de artifícios do tipo: (1) a obtenção de uma função equivalente à função original multiplicando-se a primeira função (ou função original) por uma outra função adequada que possibilite a eliminação da indeterminação ou; (2) a realização de uma simplificação na função original que possibilite, também, a eliminação da indeterminação.

Tomemos um exemplo diferente do anterior para esclarecer o fato acima.

Suponhamos que pretendêssemos determinar o limite seguinte:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ . Neste exemplo, pode-se verificar que xis ao tender a menos um o limite da função em destaque varia para uma solução do tipo  $\frac{0}{0}$ . Consegue-se esta solução comentada atribuindo o valor menos um na variável xis em cada função real, que é um termo, da função irracional dada. Encontramos uma indeterminação. Qual o procedimento a ser utilizado para que se elimine a referida indeterminação?

Como na vizinhança de menos um a função  $\sqrt{x^2-1}$  é uma função real não nula, multiplica-se então os termos da função irracional que se pretende determinar o limite –numerador e denominador– pela função irracional  $\sqrt{x^2-1}$ .

Assim sendo, obteremos o seguinte  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ , e que resultará em

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot \sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$ . Como o polinômio do segundo grau  $x^2 - 1$ , pode ser

desmembrado em  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ , e na vizinhança de menos um esse polinômio é não nulo, podemos efetuar uma simplificação na fração racional equivalente obtida, ao cancelar o binômio do primeiro grau  $(x + 1)$  que aparece no numerador e no denominador desta função irracional equivalente, o que resultará no

limite a seguir  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ . Essa nova função racional, que é equivalente à função

original do exemplo, tem limite igual a zero para  $x = -1$ .

No primeiro exemplo,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ , utilizamos L'Hôpital para resolver a

indeterminação, contudo poderíamos usar outro método o da simplificação de fatores comuns, vejamos.

O polinômio do segundo grau do numerador pode ser decomposto e reescrito por  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ , uma vez que 1 é sua única raiz e portanto raiz dupla. Já o polinômio do denominador tem duas raízes, 1 como raiz dupla e 2 como raiz simples podendo ser decomposto na forma  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2)$ . Assim sendo, percebe-se que um dos fatores é comum aos dois polinômios e podemos fazer a simplificação destes, já que, na vizinhança do ponto  $x = 1$ , os dois polinômios são não nulos, obtendo-se então  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$ .

A partir dos dois exemplos dados pode-se perceber que a técnica adequada, a ser utilizada, para eliminar a indeterminação dependerá do tipo de função que esteja em evidência. E, no que se refere ao nosso problema em questão a função dada não se enquadra em nenhuma das situações como as mostrada nos dois exemplos.

A “indeterminação” que aparece é do tipo  $\frac{1}{0}$ , sendo necessário, portanto, a verificação dos limites laterais como foi suscitado depois pelos dois alunos em questão (AI1 e AI9) e além destes por outros dois alunos AI6 (já citado) e AI7. Os estudantes AI2, AI7 e AI8 se prendem ao fato de que por ser o limite infinito (mais infinito ou menos infinito) este limite não existe, atribuindo-se o fato de que infinito não é um número. O aluno AI7, diferentemente dos outros dois utiliza a lateralidade do limite para verificar o limite da função, contudo como tem o modelo de representação calcado na idéia do infinito não ser um número determina à solução do problema utilizando essa concepção.

Com relação ao modelo baseado na indeterminação do limite o que se pode dizer, e já foi comentado anteriormente, é que os alunos limitam-se a utilizar técnicas para eliminar indeterminação, multiplicando os termos da função racional dada por outra função, como se no momento da verificação da existência do limite da função, o fato de aparecer a expressão  $\frac{1}{0}$ , possa ser interpretado como uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

O modelo de representação do aluno AI4, que pensa no limite como derivada de uma função, dificulta a determinação da solução do problema. Porém este modelo é reforçado a partir da sua representação de que não sendo infinito um número real, e o limite para ele tem que ser um número real, ele precisa (...) *ver se tem outro método de resolver*, pois para ele é preciso *Ver se tem alguma conta que não dê o valor*, o valor em questão é o infinito, e assim sendo utiliza uma dedução inapropriada para a conclusão.

O gráfico da função, enquanto modelo de representação, é um dos recursos utilizados por quatro alunos, mas somente AI1 e AI9 concluem

adequadamente a partir desse recurso, os outros dois AI7 e AI8 não conseguem utilizar o recurso para deduzir a resposta à questão, deixando-a sem resposta.

**Questão 3:** Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule

esse limite. c.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x > -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Hei, essa aqui não vou saber fazer não! (...) Não, né que eu tenha medo do bicho não, sabe. É porque, pra quem assistir as fitas que foram gravadas vai ver que a gente não deu isso aí. E todo mundo dá, pelo menos a minha turma que tá pagando cálculo dois, quando tava fazendo Cálculo I senti, nessa primeira prova, dificuldade de fazer esse negócio aqui de função contínua, de diferenciável, não sei o que.(...) Foi.(...) Hum, Hum.(...) Certo. Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite. Limite de ce, não de efe de xis, aí efe de xis vai ser igual a dois xis mais três se xis for men[or], maior que menos um e efe de xis vai ser igual a xis dois menos um sobre xis mais um se xis for menor que menos um.(...) Xis ser maior que menos um...(.) É bem parecido com aquele negócio ali né. Tendência a infinito, menos infinito. Quando for xis, eh...(.) Menos um! Acontece...(.) É...(.) É...(.) Certo.(...) Pode agora usar L'Hospital nessa de baixo? (...) Não, de dá, de uma coisa indeterminada em cima...e em baixo...Bom, em cima, como na primeira, se xis maior do que menos um não tou vendo problema não, em substituir o</p> | <p>Apesar da resistência inicial em não querer resolver a questão, por não a ver como uma função determinada por mais de uma sentença, o estudante percebe depois que a função apresentada pode ser resolvida parcialmente –observando cada uma das funções que aparecem na expressão, já que, o que temos é uma função determinada por mais de uma sentença. Aparece implícito no seu discurso o conceito de limite lateral: “Xis ser maior que menos um... (.) É bem parecido com aquele negócio ali né. Tendência a infinito, menos infinito. Quando for xis, eh...(.) Menos um!”. Embora não explicita, percebe a continuidade da função: “Bom, em cima, como na primeira, se xis maior do que menos um não tou vendo problema não, em substituir o menos um não! A resposta vai dar um...(.) Porque é tranquilo”; assim como pode-se destacar a compreensão de que menos um é ponto de indeterminação na segunda função do sistema (a função não é contínua em menos um): “Quando for xis, eh...(.) Menos um! Acontece...(.) É...(.) É...(.) Certo.(...) Pode agora usar L'Hospital nessa de baixo? (...) Não, de dá, de uma coisa indeterminada em</p> |

menos um não! A resposta vai dar um.(...) Porque é tranquilo, você tá dois vezes menos um, vai dar menos dois, mais três menos um. A função aí não tem problema nenhum.(...) Calcular o limite?...O de baixo tem problema né? (...) To pensando, sinceramente eu não sei se tá certo não! Mas eu usa... usaria L'Hôpital... se eu substituir o menos um na função de baixo, nu... num vai poder, vai dar... uma coisa sobre infinito, ou uma coisa sobre ... dá zero sobre zero que é uma indeterminação, passa pela minha cabeça usar L'Hôpital, aí vai tá certo, vai dar alguma coisa.(...) Ceifando em cima e em baixo, dá dois xis ... sobre um que é igual a menos dois ... Ah! ... era pra eu dar duas respostas? (...) Era pra eu dar duas respostas? ... Não, porque acontece que ele tá eh..., nesse ponto de menos um ele não tá, ele não tá definido nesse ponto. Tá entre aspas né, como ele fez isso aqui. Fez o... a continuidade disso aqui né! Ele obrigou que nesse ponto aí seja igual a menos dois.(...) Sinceramente, eu não sei chegar em conclu... Eu vou dizer que o limite existe.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \left( \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{1} = -2$$

O limite existe, pois como fizemos (ou obrigamos) a função a ser -2 naquele ponto obrigatoriamente deve haver limite.

*cima...e em baixo". Embora, em argumentos anteriores, reconheça a presença de limites laterais, para a conclusão da solução ele não mostra que possua consistência na compreensão deste conceito de lateralidade do limite: "(...) Era pra eu dar duas respostas? (...) Sinceramente, eu não sei chegar em conclu... Eu vou dizer que o limite existe".*

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \left( \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{1} = -2$$

O limite existe pois como fizemos (ou derivamos) a função a ser -2 naquele ponto obrigatoriamente deve haver limite.

**Figura 41:** Texto escrito pelo aluno AI1 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vamos continuar agora. Eu vou tentar resolver esse aqui viu, vou ver se dá. Vou resolver separado o limite. O limite quando <math>x</math> tende a <math>-1</math>, de <math>2x + 3</math>. Não dá para entender não, vou ser sincero caiu numa prova, eu nem sei. Eu não sei se é porque eu não resolvi esses exercícios eu não sei para onde vai. Posso quebrar a cabeça e não sei para onde vai isso aqui não. Não sei se porque...eu sei que seria a função se <math>x = -1</math>, mas todos eles aqui estão diferentes de menos um para poder ver o resultado.(...) Certo.(...) A mais.(...) Eu estou vendo que menos um é ponto crítico.(...) Que a partir daí, então entra aquilo que eu falei. O limite de menos um é o ponto crítico da função, quer dizer no meu gráfico se eu for desenhar ele vai tender para um ângulo e a partir de menos um vai tender para outro. Quer dizer ele é o ponto que define a diferença no decorrer dessa função.(...) Correto. Agora quando vou escrever como é que eu faço, eu não sei.(...) Eh, aqui vai dar</p> | <p>Observando a produção oral do aluno, pode ser verificado nos seus argumentos: (1) Que não reconhece a função dada como sendo definida por mais de uma sentença: “Não dá para entender não (...) Eu não sei se é porque eu não resolvi esses exercícios eu não sei para onde vai”; (2) Não entende que para determinar o limite de uma função verifica-se a existência dos limites laterais mesmo alegando que “Eu vou tentar resolver esse aqui viu, vou ver se dá. Vou resolver separado o limite. O limite quando <math>x</math> tende a <math>-1</math>, de <math>2x + 3</math>”. (3) O argumento a seguir indica a identificação, embora não o diga explicitamente, que menos um é um ponto no qual a derivada da função dada não vai existir pois as derivadas laterais existem, mas são diferentes: “Eu estou vendo que menos um é ponto crítico. (...) Que a partir daí, então entra aquilo que</p> |

igual a...menos três, menos três é igual a um! (...). Limite de xis será menos um xis ao quadrado menos um...se xis ....tava copiando isso lá ....aí eu vou pôr o quê? Xis menos um. Menos um ao quadrado menos um, menos um quer dizer aqui é zero.(...) Zero sobre zero é sempre zero.(...) Se não for deveria ser. [Reflete em silêncio e diz]. Zero sobre um para dar zero. Eu sei que um sobre zero, não é zero, é sempre infinito. Aí zero sobre um...que todo número tem, como se fosse a divisão de derivada a divisão dele igual a um, que se forme uma soma, ele é uma variável uma fração. Todo número fracionário abaixo dele sempre tem o número um, que é como se fosse ele dividido por um para dar ele mesmo. Porque se ele dividir por zero, não dá zero. Então, ah! Zero sobre zero já vi isso aqui em L'Hospital, é L'Hospital, não sei se é o caso.(...) Zero sobre.(...) Não.(...) É infinito (...) Qualquer número de zero abaixo é infinito. Pode ser de zero a qualquer outro número que de zero a abaixo tende a infinito.(...) L'Hospital..., tem o infinito só...(.) Puxa cara eu nem sabia, [dar um sorriso, dizendo] pôxa cara estou impressionado comigo mesmo, eu não sabia que tinha aprendido isso, acho que aprendi alguma coisa nessa época e eu não sabia que tinha aprendido isso...Queria que fosse sincero estou muito complicado, ou se estou na área errada? (...) Isso já acabou foi? Eu respondi o que você queria? (...) Não tem, deixe eu colocar aqui. Falta aqui responder as perguntas.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

como  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  é a  $f(x) = \{$  duas sentenças que

*eu falei. O limite de menos um é o ponto crítico da função, quer dizer no meu gráfico se eu for desenhar ele vai tender para um ângulo e a partir de menos um vai tender para outro. Quer dizer ele é o ponto que define a diferença no decorrer dessa função". O conceito de ponto crítico é utilizado quando se está operando com a derivada da função com a intenção de determinar o(s) ponto(s) de máximo e/ou mínimo da função, o que não se enquadra ao que é solicitado no exercício proposto. Ao identificar a indeterminação na segunda sentença da função  $f$ , reconhece a possibilidade de utilizar L'Hospital como método para eliminar a indeterminação, porém não o faz e conclui utilizando um argumento que não é verdadeiro de que como "tende ao infinito, não existe p/ tende ao infinito".*

atribuindo valores para  $x > -1$  eu vou achar um  
para  $2x + 3$  e se usar um  $x < -1$  vou achar um  
valor  $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$  isso quer dizer que as duas  
sentenças representam a mesma função.

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x + 3 = (2 \cdot -1) + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad (\text{se } x \neq -1) \quad \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0} = \text{L'Hospital}$$

tende ao

infinito

não existe p/ tende ao infinito

como  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  e a  $f(x) =$  duas sentenças que  
atribuindo valores para  $x > -1$  eu vou achar um  
para  $2x + 3$  e se usar um  $x < -1$  vou achar um  
valor  $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$  isso quer dizer que as duas sentenças  
representam a mesma função.  
 $\lim_{x \rightarrow -1} 2x + 3 = (2 \cdot -1) + 3 = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad (\text{se } x \neq -1) \quad \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0} = \text{L'Hospital}$   
tende ao infinito  
não existe p/ tende ao infinito

Figura 42: Texto escrito pelo aluno AI2 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eh, isso aqui é o limite de xis quando xis tende a menos um, porque xis é dois xis mais três quando xis é maior que menos um e xis ao quadrado menos um sobre xis mais um se xis maior que menos um. Então; creio que é limite lateral quando limite de xis de dois xis mais três quando xis tende a menos um pela direita vai dar o valor o limite existe e é igual a um. E,</p> | <p>O aluno reconhece que para obter a solução do exercício proposto precisa ser utilizado o limite lateral e argumenta isto: "(...) creio que é limite lateral(...)", reconhece que os limites laterais existem, porém a conclusão apresentando os limites laterais como a solução do problema é inadequada tanto no texto oral quanto no escrito.</p> |



o limite de xis ao quadrado menos um sobre xis mais um com xis tendendo a menos um pela esquerda o seu valor vai ser menos dois. Acho que nos dois casos o limite existe.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x+3) = (2 \cdot (-1) + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} x-1 = -2$$

O limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $-1$  pela direita será igual a 1, para  $f(x) = 2x + 3$ .

O limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $-1$  pela esquerda será igual a  $-2$ , pois  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Handwritten student work showing the same mathematical steps as the typed text above, including the limit calculations for  $f(x) = 2x+3$  and  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$  as  $x$  approaches  $-1$  from both sides.

**Figura 43:** Texto escrito pelo aluno AI3 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite para xis maior que um... de dois xis mais três... mais xis tendendo a menos um... vai... por valores menores, a maiores que um. Então vai ser... pela direita... vai ser igual a... pertencendo a xis [inaudível] é menos um... menos... seis... mais três... vai ser menos três... não espere</p> | <p>O aluno em questão tem plena convicção da necessidade da utilização dos limites laterais para verificar a existência do limite da função proposta, pode-se observar isto na clareza do seu argumento oral “Se ele quer um número de efe de xis quando xis tendendo a menos um... esse limite não vai</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>             aí, não... menos dois... tá vendo a gente erra<br/>             essas besteiras na prova já é um ponto a<br/>             menos... Mais um... [inaudível] limite... xis ao<br/>             quadrado mais xis... menos um... xis mais<br/>             um... e xis tendendo... a menos um... pela<br/>             esquerda... xis mais um... você exclui esse...<br/>             vai ser igual a menos dois... Se ele quer um<br/>             número de efe de xis quando xis tendendo a<br/>             menos um... esse limite não vai existir... pois...<br/>             os limites... laterais... não são iguais.           </p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = -2 + 3 = +1$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = -2$ <p>             esse limite não vai existir pois<br/>             os limites laterais não são iguais           </p> | <p>             existir... pois... os limites... laterais... não são<br/>             iguais", e conclui de forma correta, não<br/>             tendo dúvida alguma, tanto que ratifica a<br/>             conclusão no seu texto escrito.           </p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

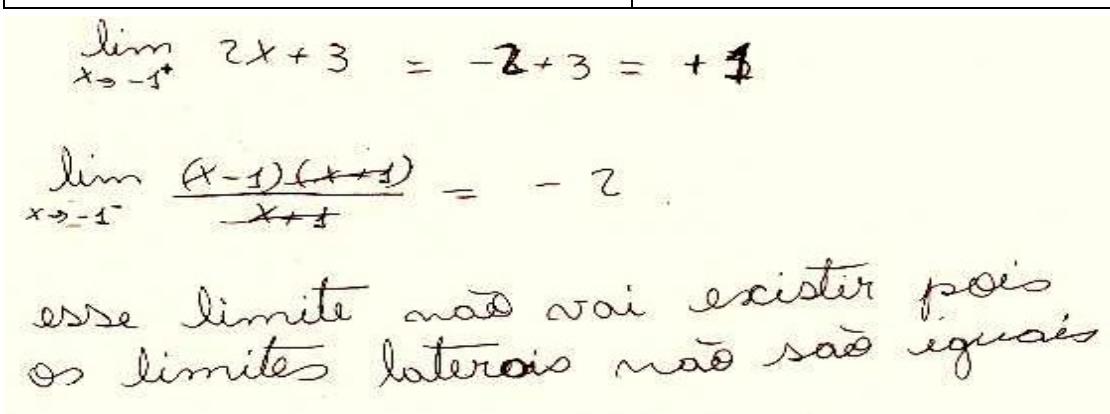


**Figura 44:** Texto escrito pelo aluno AI4 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Deixe eu vê aqui, eu estou realmente um pouco...aqui eu realmente eu não estou lembrando nada.(...) Eu tenho aqui duas fun... uma função que ela por um lado ela é, no caso, maior que menos um e do outro lado menor que menos um. Né</p> | <p>O aluno reconhece a função como definida por mais de uma sentença, e a necessidade de utilizar os limites laterais para determinação do limite da função. Pode-se observar na sua produção escrita que é realizado o tratamento adequado para</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>isso? Então aqui se eu substituir de cara eu, no caso, para o valor maior que menos um eu tenho ela igual a três e menor que menos um eu zero ela, né. Substituindo os valores que eu tenho aqui no xis. Mas realmente eu estou...(…) É pode ser realmente não to...(…) Essa daqui...(…) Aí eu tenho que se eu tenho a função <math>2x + 3</math> então eu quero os valores maiores que menos um então seria 0,1,2 sucessivamente...(…) É a de cima...(…) Substituir valores maiores que menos um para ver, pelo gráfico para onde ela vai. Seria mais ou menos isso? (...) Aí eu pegaria aqui a tabela de x, y e substituiria valores...(…) Tem aqui x, y eu vou colocar o valor menos sendo um ponto como fosse de apoio assim, mesmo sabendo que agente deveria pegar os números maiores que ele não ele. Porque aqui só se ele fosse maior ou igual. Menos um, zero e um, usar três valores pra gente ver. Teria três, três cinco e para xis menor que menos um, eu vou usar xis ao quadrado menos um sobre xis mais um mesmo procedimento. Eu usando aqui o menos um, usando aqui o menos um eu teria zero, aqui o menos dois é seria vou botar aqui do lado mesmo só pra quatro menos um sobre menos dois mais um daria menos três. Realmente agora...(…) Hum! (...) Lembro...(…) Que eu tenho uma função onde ela por um lado, seria lado direito lado esquerdo...(…) Quando xis é maior que menos um eu pego o lado positivo, né isso? (...) E aqui quando xis é menor que menos um eu tenho o lado negativo...(…) A função dois xis mais três...(…) Tá o limite da função...(…) A função seria no caso para o lado que eu vou</p> | <p>determinar o limite da função. Ele também faz uso de seqüências numéricas para servir, como é afirmado, de “apoio” para compreender o que está acontecendo com a função, ao encontrar a indeterminação na segunda sentença da função dada utiliza o processo de simplificação para elimina-la e encontrar o limite da função da sentença. Contudo a sua conclusão não foi adequada, de acordo com as duas alternativas encontradas. Na hora de estabelecer a solução ele se deteve apenas na ultima resposta encontrada, dando uma resposta inadequada à questão.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

usar, certo? (...) Seria o que... Posso colocar aqui embaixo? (...) Seria assim: limite de xis tendendo a menos um de quem? De dois xis mais três.(...) Então seria o que substituindo o menos um aqui, né, eu teria quem? Dois aí eu tenho menos dois mais três é igual a um. Certo? E agora eu pegaria ela, ah, agora pelo lado esquerdo, né isso? (...) Teria aqui o limite de xis tendendo a menos um, de quem? De xis dois menos um sobre xis mais um certo? (...) Então eu substituindo isso aqui eu tinha que... Ai meu deus, ainda errei na hora da transposição. Eu vou colocar aqui embaixo, pode ser? (...) Menos um menos um mais um. Aí eu vou ter zero sobre zero.(...) Né isso? Aí nesse caso aqui pelo lado direito ela tende a menos um, e pelo lado esquerdo ela tende a zero, né. No caso não existe pelo lado esquerdo. Seria. (...) Eraldo – Não estou conseguindo vê! (...) Hum! (...) É. É isso! Dessa maneira aqui eu poderia usar uma regrinha, que no momento eu não estou lembrado do nome, certo? Espera aí. Deixe eu ver... Mas tudo bem, então eu vou fazer aqui da mesma forma...Pôxa! Aqui seria xis mais um xis menos um, né. Aí aqui eu poderia cortar, e substituir aqui seria menos um com menos um daria menos dois. Seria isso. Ao meu ver, né! (...) Bem, então concluímos que pelo lado direito ela teve a menos um, a um,né, um positivo! E pelo lado esquerdo ela teve a menos dois. Seria isso? (...) É... Estou tentando me lembrar de alguma coisinha para vê se me facilita, né, poder explicar assim, porque eu não sou muito bom explicando as coisas não. Deixa ver... Que o limite existe!?

(...) Eita! Então quando o limite da função, né, tendendo a xis, quando xis tende a menos um, eu tenho que ser igual a menos dois pelo lado esquerdo e um pelo lado direito.(...) Não estou vendo meu Deus! É menos dois.(...) Aí no caso eu respondo logo o limite da função acima, né? A função igual a menos dois. Meu Deus isso é uma vergonha.(...) Não de forma alguma.(...) Tá tem problema não tranqüilo, ótimo, estou meio atrapalhado.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+0} =$$

$$= \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = -1-1 = -2$$

$$\text{Logo; o } \lim_{x \rightarrow -1} F(x) = -2$$

Handwritten student work showing limit calculations for two functions as  $x \rightarrow -1$ .

For the first function,  $2x+3$ , the student uses a table to show the limit is 1:

| x  | y |
|----|---|
| -1 | 1 |
| 0  | 3 |
| 1  | 5 |

Then,  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = 2(-1)+3 = -2+3 = 1$

For the second function,  $\frac{x^2-1}{x+1}$ , the student shows the limit is -2:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+0} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = -1-1 = -2$$

Logo; o  $\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = -2$

**Figura 45:** Texto escrito pelo aluno AI5 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O mesmo exemplo que eu dei aqui.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = 1 \quad x > -1$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$ $\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \quad x < -1$ <p>Existe pois ambas as situações acontecem.</p> | <p>O argumento verbal e o argumento escrito utilizado por o aluno deixam implícito que ele reconhece a função como sendo definida por mais de uma sentença, além do emprego dos limites laterais como condições necessárias para determinar o limite da função dada, contudo estes argumentos não foram suficientes para que pudesse concluir corretamente a questão.</p> |

Handwritten work by student AI6:

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = 1 \quad \therefore x > -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \quad \therefore x < -1$$

Existe pois ambas as situações acontecem.

**Figura 46:** Texto escrito pelo aluno AI6 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Esse aqui é mais complicado...[resolvendo]...dois xis mais três ... isso aqui vai dá .....igual a .... então xis igual a menos um isso aqui vai dá uma reta. Aqui efe de xis igual a dois mais dois, xis mais dois igual a um .... agora limite vai ser igual a....(...) É estranho porque essa função aqui, quando xis vai pra menos um depende se vai pro lado direito ou esquerdo vai tender mais infinito menos infinito, mas aí menos um, [risos] não estou tendo a menor idéia.(...) Não aconteceu</p> | <p>O aluno mostra-se confuso, mas vai resolvendo a questão utilizando os limites laterais, utiliza os procedimentos adequados quando encontra a indeterminação na segunda função-sentença, reconhecendo que, naquele sentença, aparece uma indeterminação, pode-se observar bem isto na sua produção escrita. Resolve toda a questão, determina os limites laterais, porém não consegue concluir, indicando uma falta de domínio do conceito de limite lateral.</p> |

porque ele o professor fez errado ele dividiu o número essa divisão não poderia acontecer xis fosse diferença de um, aí você pode dividir esse por esse, mas ele sendo menos um você não pode dividir zero por zero é indeterminado.(...) Olhe bem xis é menor que menos um ou seja já é o limite não é exatamente o valor, então quando a função tende a menos um ou seja  $y$  se aproximando de menos um aí  $f(x)$  de xis no caso a imagem de  $y$  tende a menos dois.(...) Pode xis diferente de menos um. Ele não afirmando que xis é igual a menos um.(...) Está correto para xis diferente de menos um.(...) O de cima não tem nenhuma restrição, então.(...)— Não no primeiro caso não vai dar, estava me referindo a parte **b**, a parte **a**.(...) Por que não deu. Boa pergunta. Se Joaquim estivesse vivo eu perguntava a ele(...). (...)É rapaz fica complicado aqui de responder esta pergunta.(...) Ah! Que na realidade, nesse caso, aqui porque menos um aqui está muito em cima aí aqui dá menos dois. Menos dois sobre um, .... aliás zero. Então menos um ao quadrado dá um, dava zero, zero sobre zero, isso aí se o valor de xis fosse menos um, se realmente o valor de xis fosse menos um, mas aí ele tende a esse valor não é realmente, está chegando bem perto do xis nessa função aqui se aproximando ao máximo de menos um, ela não necessariamente tem que ser mais ou menos, ela pode ser um valor determinado, que inclusive ao meu ver. Joaquim fez isso aqui na sala, eu achei até interessante, mostrei pra meio mundo de gente, mas realmente não compreendo.(...)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>Pode ser.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad x \square -1 \quad f(x) = 2x + 3$ $\lim_{x \rightarrow -1} 2x + 3 = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = -2 \quad \frac{0}{0}$ <p>ind</p> <p><math>x \square -1</math></p> |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

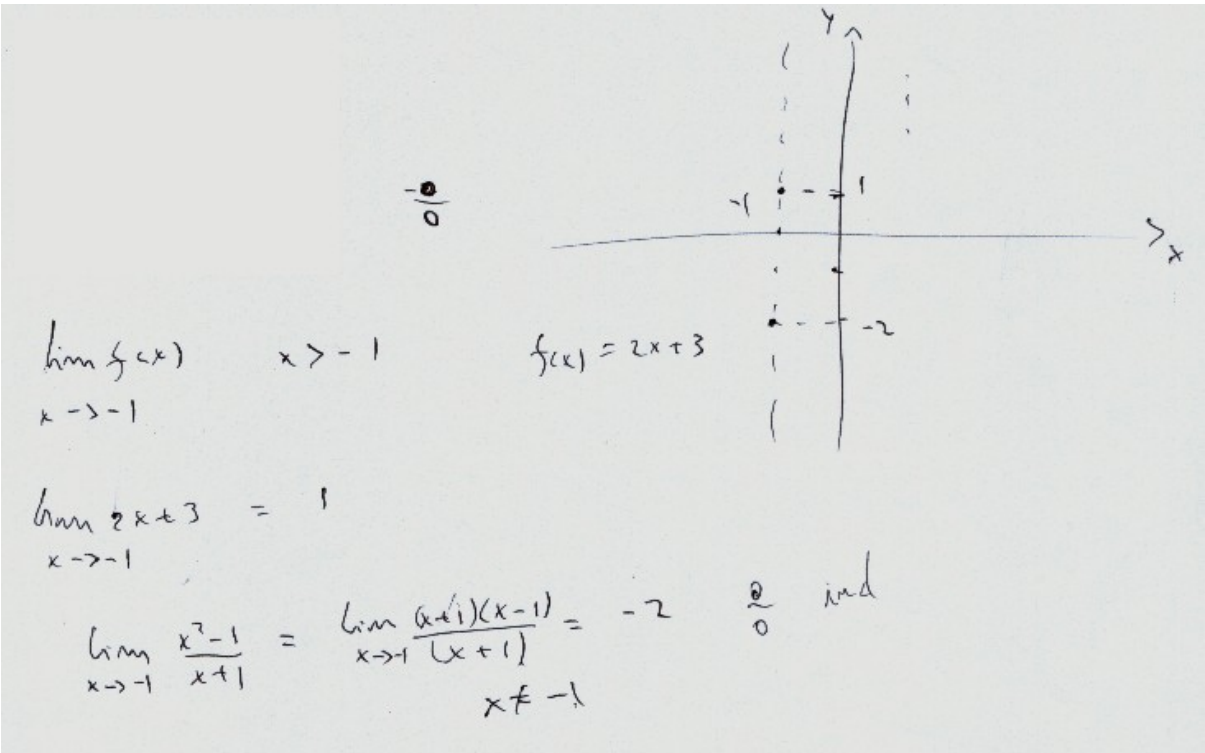


Figura 47: Texto escrito pelo aluno AI7 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Esse aqui é xis maior que menos um?(...) Se xis for maior que menos aqui vou botar aqui. Dois vezes um menos um mais três onde três, vai dar um. Existe. Quando vier pela esquerda o que é que acontece. É direita positiva, esquerda negativo. O limite menos 2 pela direita é um.</p> | <p>O aluno em questão tem a compreensão do que precisa ser feito para resolver a questão, utiliza adequadamente o princípio de que a função é definida por mais de uma sentença, utiliza o conceito de limite lateral para verificar e determinar os limites e concluiu sem vacilar –tanto que o argumento</p> |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Pronto.(...) Verificar se, o limite não existe. O limite não existe. Eu posso dizer porque?(...) Porque não tende para o valor, exato, o mesmo valor limite. o xis vai pela direita ou pela esquerda. Se eu não me engano ainda tem o seguinte. É quando ele vale menos um tem um gráfico, se eu não me engano o limite não vai existir, vai pra cá vai pra cá. Só que aqui ele é menos um vai tá definido pra ver se ele, ... faz uma reta o limite aqui não existe.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>se <math>x = -1</math>      <math>2(-1) + 3 = 1</math>      existe.</p> $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} \quad x \neq -1$ <p><math>f(x) = (x - 1)</math> = quan ele vir pela esquerda o valor limite é</p> <p><math>-2</math></p> <p>quando ele vier pela direita é <math>1</math>.</p> <p>O limite não existe.</p> <p>{porque não para (o valo), o mesmo valor limite quando o x vai pel direita ou pela esquerda.</p> | <p>escrito ratifica a sua argumentação oral—, que o limite da função dada não existe</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|

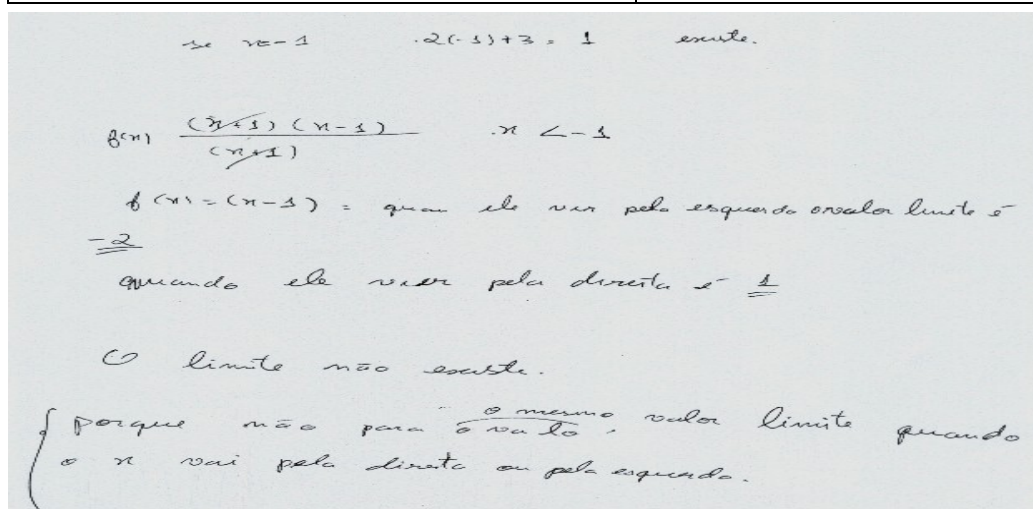


**Figura 48:** Texto escrito pelo aluno A18 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> No caso aqui é o limite da função de xis menos um de dois xis mais três eu acho que é limite pela direita, eu acho. Então esse limite aqui a princípio é e é menos dois ... dá um. Ai tem o segundo limite xis menos um xis dois... ah, direita outro a esquerda, multiplicando isso aqui, desenvolvendo isso aqui vai ficar limite de xis tendendo a menos um o numerador vai ficar xis menos um que multiplica [inaudível] por xis mais um, no caso corta xis dois vai ficar limite de xis tendendo a menos um de xis menos um e se a gente operar essa diferença não tem limite.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Caso 1: <math>\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3=1</math></p> $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$ <p>Não há limite porque os limites laterais são diferentes.</p> | <p>O aluno compreende o que está acontecendo na questão, ou seja, as duas sentenças presentes nesta definição; a necessidade de utilizar a lateralidade do limite e usa bem este conceito, concluindo sem ter dúvida a resposta. Pode-se ratificar isto na sua produção escrita, como os conceitos são bem empregados.</p> |

Caso 1:  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x+3 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$$

Não há limite pq os limites laterais são diferentes

**Figura 49:** Texto escrito pelo aluno AI9 durante sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 10                                                                                                                           |                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                      | Análise                                                                                                                          |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite de f de xis com xis tendendo a menos um se xis maior que menos um e se xis menor que menos um.</p> | <p>Mesmo não deixando explicito, o aluno começa a resolver a questão mostrando um entendimento de que esta função é definida</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Eu vou resolver a primeira aqui seria quando <math>x</math> tende pra menos um quando <math>x</math> maior que menos um. Dois <math>x</math> mais três se <math>x</math> maior que menos um. Ai limite quando <math>x</math> tende a menos um de dois menos um mais três. Seria igual a um. E o outro limite quando <math>x</math> menor que menos um, limite quando <math>x</math> ao quadrado menos um sobre <math>x</math> mais um se <math>x</math> menor que um. Isso aqui já seria aquelas partes mais de limite pra direita limite pra esquerda, você tem um limite chegando por um lado outro pelo outro, você tem um limite quando <math>x</math> maior que menos um quer dizer que ele tem os valores todos maiores que menos um que seriam um, zero, zero é neutro mas zero, um. E você tem o mesmo limite para outra função quando <math>x</math> tende pra menos um com menores que menos um. Limite quando <math>x</math> tende pra menos um, o quadrado de menos um sobre.. No caso esse limite aqui não existiria porque você tem zero sobre zero. Tá certo! Positivo, negativo, positivo. Vou tentar resolver por L'Hospital pra vê o como é que daria. O limite quando <math>x</math> tende a menos um. Vou botar L'Hospital aqui do jeito que eu pronuncio porque eu não sei escrever L'Hospital não viu.(...) Acho que é mais ou menos assim, é /ospital. Vou botar aqui porque vale como uma lembrança. L'Hospital é bem simples para lê um livro também porque você, L'Hospital eu acho que é a regra mãe da matemática. A matemática tá cheia de regra mãe, assim. L'Hospital você deriva a função em cima, no caso <math>x</math> ao quadrado menos um ficaria dois <math>x</math>, deriva a função de baixo daria um e agora você aplica o limite. Você fica com dois <math>x</math>,</p> | <p>por mais de uma sentença; reconhece a necessidade de usar o limite lateral e o faz adequadamente, inclusive eliminando a indeterminação utilizando a regra de L'Hospital corretamente, pode-se confirmar isto tanto no seu argumento oral: "(...) assim. <i>L'Hospital você deriva a função em cima, no caso <math>x</math> ao quadrado menos um ficaria dois <math>x</math>, deriva a função de baixo daria um e agora você aplica o limite</i>", quanto na sua produção escrita. Porém, não utiliza os resultados encontrados com a aplicação dos limites laterais para concluir a questão.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

que é menos um, sobre um. Engraçado é que quando eu resolvi agora por L'Hospital o limite existe ele é menos dois. Então quer dizer esse tipo de limite que você tem numa função, uma fração, você tem xis ao quadrado menos um sobre xis mais um ela não pode ser resolvida de forma simples mas é assim que eu vejo as coisas é assim que eu entendo as coisas e foi assim que eu me dei mal na prova. Eu resolvi três questões assim e no final das contas o professor disse: *"Não, tá ruim. Não vale. Não aceito. Não quero."* E depois o cara prometeu: *"Não, se você se der mal a gente vê isso aí"*. Depois o cara ficou doente e quase que eu me ferro.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x + 3, \text{ se } x > -1 \qquad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \text{ se}$$

$$x > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2(-1) + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(-1)^2}{-1+1} = \frac{0}{0} = \cancel{\text{B}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} -2 + 3 = 1$$

Por lospital (L'Hospital)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{1} = \frac{2(-1)}{1} = -2$

$\lim_{x \rightarrow -3} 2x+3, \text{ se } x > -3$   
 $\lim_{x \rightarrow -3} 2(-3)+3$   
 $\lim_{x \rightarrow -3} -2+3 = 1$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-5}{x+3}, \text{ se } x < -3$   
 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(-3)^2-5}{-3+3} = \frac{0}{0} = \text{Indef.}$   
 Por L'Hopital (L'Hospital)  
 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x}{1} = \frac{2(-3)}{1} = -2$

**Figura 50:** Texto produzido pelo aluno AI10 durante sessão de resolução de problemas

| Encaminhamentos de proposição do problema                                      | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Não reconhece a função como definida por mais de uma sentença               |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Reconhece a função como definida por mais de uma sentença                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Utiliza a lateralidade do limite como argumento                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Proceda entendendo o limite como derivada da função                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Não compreende a lateralidade do limite                                     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Utiliza o argumento do infinito para concluir pela não existência do limite |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 9:** Resumo das respostas dadas pelos alunos a **Questão 3c**, durante a sessão de resolução de problemas.

Nas seis categorias estabelecidas no quadro 9 acima estão apresentadas de forma sincopada os resultados das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema apresentado acima: *Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite.*

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } x > -1 \\ \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Podemos observar no referido quadro acima que somente três (AI4, AI8 e

AI90), dos oito estudantes que reconhecem a função dada como definida por duas sentenças e que utilizam o conceito de lateralidade do limite (que envolvem a resolução do problema) o fazem adequadamente e concluem o problema determinando a solução corretamente. Os outros cinco estudantes (AI3, AI5, AI6, AI7 e AI10) não conseguem utilizar os resultados encontrados, por eles, para concluir coerentemente a questão. Outros dois alunos (AI1 e AI2) utilizam os limites laterais para também resolver o problema, contudo não concluem corretamente a questão por não interpretarem adequadamente o conceito utilizado de limite lateral. O não reconhecimento, por parte desses dois últimos estudantes, da função como determinada por mais de uma sentença contribui para essa conclusão inadequada. Em particular o estudante AI2 tem as suas concepções de limite de função pautadas no limite como derivada e da não existência do limite infinito, o que faz com que ele realize um esforço cognitivo grande para compreender os conceitos de lateralidade, existência do limite e de continuidade que lhe é exigido no desenvolvimento da questão.

**Questão 3:** Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite. **d.** Seja  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & , \text{se } x = 2 \end{cases}$

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Produção oral do aluno:</b> [inaudível] Verifique se existe o limite abaixo, em caso afirmativo calcule esse limite. Seja efe de xis, dois xis menos três se xis é diferente de dois e um se xis for igual a dois. Calcule o limite de efe de xis quando xis tender a dois. ... Qual é o que tá [inaudível] ... quando xis tender a dois ... Tá fácil demais pro meu gosto. Vou usar o mesmo método do que eu fiz em cima, não tou vendo problema nenhum em substituir o | O estudante não vê dificuldade em determinar o limite da função, como ele próprio afirma “ <i>não tou vendo problema nenhum em substituir o dois</i> ”, esse argumento indica uma compreensão implícita da continuidade da função, contudo ele não manifesta explicitamente na sua conclusão que tenha claro esse conceito. |

dois. Vamos lá, o limite quando xis tender a dois ... Sendo que ele tá dizendo já, que quando for dois ... isso ia ser um. Não sei pra que ele fez isso aqui não. Fez isso não, mas ... da função dois xis menos três, isso aqui é igual a limite quando xis tender a dois de quatro menos três, que vai dar limite de xis tendendo a dois, quatro menos três, vai dar um. Já deu um, mas eu já tinha dito que ia dar um...(..) Pronto.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = \lim_{x \rightarrow 2} 4 - 3 = \lim_{x \rightarrow 2} 1$$

o limite é igual a 1 como já havia sido dito no enunciado.

Handwritten student work showing the limit calculation and a concluding statement.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = \lim_{x \rightarrow 2} 4 - 3 = \lim_{x \rightarrow 2} 1$$

O limite é igual a 1 como já havia sido dito no enunciado.

**Figura 51:** Texto escrito pelo aluno AI1 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Veja se existe o limite abaixo em cada alternativa e calcule esse limite. Certo, vamos ver aqui. Mesma coisa de cima então, fiz uma vez e deu certo vamos ver se dá de novo. Limite de xis tende a dois quando dois xis menos três xis deve ser igual a dois. Nesse caso quando aparecer algo assim...são coisas repetitivas mas que por besteira fico aperreado. Não entendo. Quatro menos três é igual a um. Limite [risos] aí não tem como xis igual a dois vem um... se</p> | <p>O argumento inicial do aluno (“Certo, vamos ver aqui. Mesma coisa de cima então, fiz uma vez e deu certo vamos ver se dá de novo”) indica que ele percebe que a função é determinada por mais de uma sentença. E utiliza-se do conceito de limite lateral para encontrar o limite da função dada (ver produção escrita, abaixo), contudo em momento algum manifesta perceber que a função é contínua.</p> |

não existe xis, mas quando existir um, eu sei que a função é dois xis menos três. Isso aí quer dizer ela é uma constante em um. O limite dela seria um, porque é se não tem nenhuma atribuição o limite dela seria igual dois, poderia ser igual a dez mais o valor dela é um. Senão não tem nem como.(...)...especialmente...é igual a um.(...) O limite, existe limite. Quando xis tende a dois é igual a um...existe.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = 1 \quad \text{existe} = 1$$

Handwritten student work showing the same limit calculations as the typed text above.

**Figura 52:** Texto escrito pelo aluno AI2 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Quando o limite tende a menos um pela esquerda; que a função passa a ser xis ao quadrado menos um sobre xis mais um eu posso considerar xis ao quadrado menos um como sendo xis menos um multiplicado por xis mais um. Então sendo assim eu corto o xis mais um do numerador com o xis mais um do denominador e passo com isso eu tiro o valor</p> | <p>O estudante confunde-se e começa a olhar a questão dada como se fosse a anterior. Apercebendo-se do seu engano passa a resolução da questão proposta. Ao ler a questão manifesta reação de não estar entendendo o que se pede, mas em seguida afirma “Aí, eu penso o seguinte ele tende a dois pela direita e pela esquerda. Então substituindo dois na nessa função agente</p> |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>zero do denominador então a função o limite da função se iguala vai se igualar a menos dois.(...) Porque aqui com, com não sei se eu entendi certo? Ou, ou(...) É porque f de xis ele assume duas funções assume dois, dois é duas funções,né. Dois xis mais três se xis for maior que menos um. Xis vai assumir valores maiores que menos um. Então ele tende a menos um pela direita e xis ao quadrado menos um sobre xis mais um se xis for menor que menos um. Então ele vai assumir valores menor que menos um menos dois menos dois sobre cinco menos cinco sobre dois assim até alcançar aquele na verdade ele não alcança né o menos um.(...) Não tá,tá,tá.(...) Essa questão aqui a d eu não estou compreendendo muito bem. É o limite quando f de xis liga f de xis quando f de xis tende a dois. Então, xis menos três se xis for diferente de dois. Aí, eu penso o seguinte ele tende a dois pela direita e pela esquerda. Então substituindo dois na nessa função agente encontra o valor um.(...) E se xis for igual a dois a função vai ter o valor igual a um. Então seu limite também será igual a um.(...) Pronto, o que eu entendi foi isso.(...) É, é que ela o limite ele é descontinuo ele, ele não alcança o valor dois. E quando agente considera o limite dele xis exatamente dois é a o limite passa a ser um , e são iguais,não sei se a função continua. Acho que se eu não estou esquecido é função continua.(...) É, que o conceito de função continua é quando o limite tende pela, tendendo pela direita ou pela esquerda de um determinado valor ele tem que ser igual ao valor da função. O valor do</p> | <p><i>encontra o valor um (...) E se xis for igual a dois a função vai ter o valor igual a um. Então seu limite também será igual a um", e conclui que a função é contínua. Aqui nesse caso temos o teorema de continuidade em seus primórdios.</i></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

limite tem que ser igual ao valor da função. O que está acontecendo é isto mesmo.(...) – O limite de uma função continua. Vou colocar aqui a definição de uma função continua.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$\lim_{x \rightarrow 2^{\pm}} 2x - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = 1$$

O limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow 2^{\pm}$  será igual a 1.

E o limite (quan) de  $f(x)$  quando  $(x - (1) 2) x = 2$  também será igual a 1. Isso indica (de) que a função é continua no ponto  $x = 2$ .

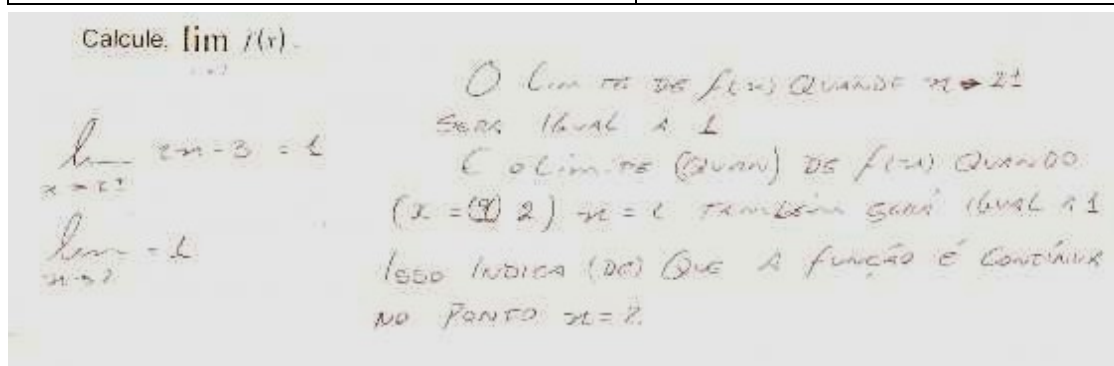


**Figura 53:** Texto escrito pelo aluno AI3 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Verifique se existe o limite. Em caso afirmativo calcule esse limite... xis diferente de dois... puxa... limite... de dois xis menos três... com xis tendendo a... dois... será... dois, quatro vezes dois... não, dois vezes dois quatro menos três dá um... e o limite... de um quando xis tende a dois vai ser igual a... a um... esse limite vai existir... Existir... e será... igual... a um... limite de efe de xis quando xis tende a dois é igual a um.(...) Tá bom, eu prefiro passar para o outro.(...).</p> | <p>Utiliza os limites laterais para determinar o limite da função pedida, porém não reconhece que a função é definida por mais de uma sentença nem que é contínua.</p> |

|                                                                                                                                                                                                      |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = 1$ $\lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$ <p>esse limite vai existe e será igual a</p> $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$ |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

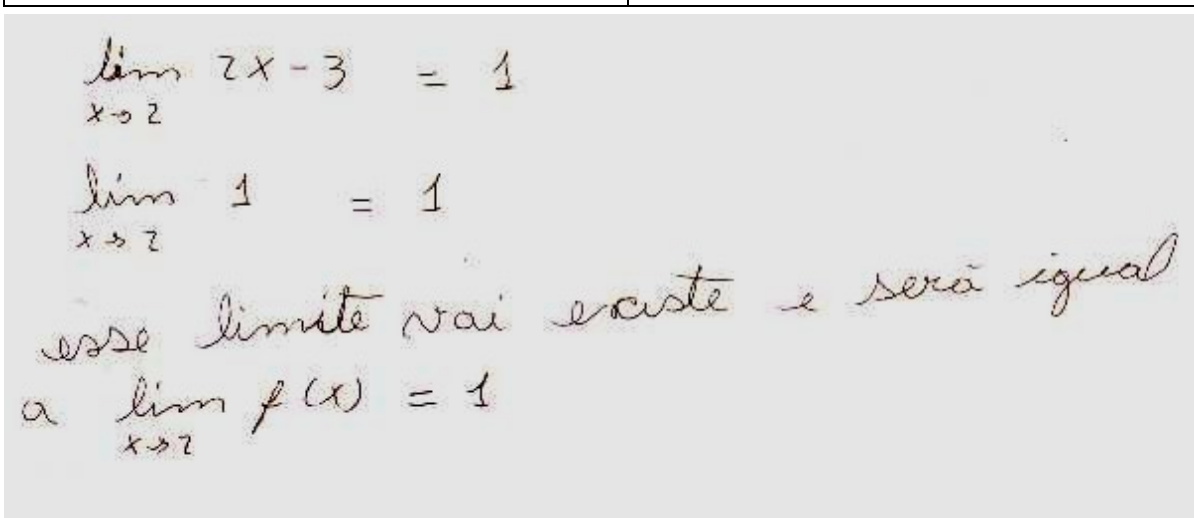


**Figura 54:** Texto escrito pelo aluno AI4 durante a sessão de resolução de problemas

| <b>Aluno Informante 5</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resposta</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Análise</b>                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Então vamos lá. O limite da... A função é, eh, dois xis menos três se xis for diferente de dois, e um se xis for igual a dois. Então a função é essa aqui, então deixa eu ver. ...mais um, ela é constante,né. Hum. Ao meu ver aqui essa função realmente ela só pode ter assim valores diferentes de dois porque se não ela é sempre constante. No ponto que for igual a dois ela sempre será um, né. Quando xis tende a dois para esse lado de cá ela é um, certo. E aqui o xis diferente de dois.(...) Ser diferente de dois. É aquela coisa,né, eu estou vendo aqui que quando xis for dois ele tem um</p> | <p>Utiliza o conceito de limite lateral, embora para encontrar os limites laterais utiliza como estratégia seqüências numéricas convergentes para dois. Além disso não reconhece que a função é definida por mais de uma sentença e que é contínua também.</p> |

valor constante: é um, certo; quando ele for dois. Para esse caso aqui. Porém, neste caso aqui também no dois xis menos três se xis for igual a dois, vamos dizer assim, mudando aqui se ele for igual a dois o que acontece? Eu vou ter um valor constante porque ele vai ser o que? Vai ser quatro menos três vai dar um, né. Então ele teria que ser diferente de dois porque? Essa é a minha dificuldade, né.(...) Hum.(...) Pra esse caso? (...) Ah, eu vou dar uma resposta bem...Eu acho que..., por..., quer dizer, o que significa xis ser diferente de dois?(...) Qualquer um outro menos dois! Pode ser tanto maior que dois quanto menor que dois, porém, o dois não pode entrar.(...) Maiores...(...) Pronto. Então no caso eu posso sair, né, para...(...) ...ver se eu me oriento. Então vamos ver. A função que eu vou usar aqui, nesse caso agora, seria o que? Dois xis menos três, vou botar aqui, para xis maior que dois. Certo?(...) Então tudo bem. Usando três. Porque são valores maiores que...,né, só para eu tentar me posicionar aqui. Sim, três, eh, dois, ... Aí nesse caso, eh, para...(...) Hum.(...) Certo. Deixa eu ver. Então vou colocar aqui...Vou fazer aqui do lado. Então deixa ver o que é que eu posso concluir. Para xis maior que dois, né, a ...,eh, vai aumentando os valores. Fiz aqui com dois vírgula um e para dois vírgula dois. Então quando eu usei o valor dois vírgula um eu tive o resultado de um vírgula dois, né. Então no caso ele vai se distanciando de dois.(...) No caso seria o que? Um vírgula nove?(...) Para xis maior. Certo.(...) Aí no caso seria dois vírgula zero cinco?(...) Ai nesse caso os

valores vão diminuindo.(...) E vão se aproximando de dois, ou de ..., no caso de um. Espera aí! Quando eu tenho... Espera aí. Dois! Eu não estou conseguindo ver.(...) Dois vírgula zero um, né, para ver se.. Realmente eu estou uma coisa... Aí seria aqui menos três daria um vírgula zero dois, né. Então no caso quando xis for valores maiores que dois, quer dizer, então ele vai se aproximando de zero, né.(...) De um, que diga! Não é porque vai diminuindo a né é isso. Aí nesse caso.(...) Aí no caso então, eu posso concluir aqui que o limite da função.(...) É para valores maiores que dois, aí nesse caso deveria pegar para valores menores que dois também pequenos pra ver a.(...) Pelo menos isso é uma revisão está me ajudando em alguma coisa, meu Deus. Vamos ver cadê os valores que eu vou pegar aqui é menores que dois eu poderia botar 1.9?(...) Não é menos três vamos lá, 0,8 eu botar 1,92 para ver se.(...) Bem, então eu posso concluir também tende a um, aí então, eu posso botar aqui, assim o limite tal.(...) Então é melhor limite de xis tendendo a dois da função tende a um. Jorge pelo amor de Deus não diz a ninguém não visse, para ninguém dizer que Eraldo é um cara que não sabe nem escrever o nome dele.(...) Consegui compreender agora da chegando aqui a, a.(...) O que foi que eu usei o tempo todo?(...) Valores em xis para encontrar a tendência de quando xis tende a dois pra que valor ele vai.(...) Valores. substituindo na equação.(...) Deixa eu ver assim uma, não foi como eu tinha deduzido anteriormente né assim. É assim como uma lógica, vamos dizer assim.

Aqui eu verifiquei o que a minha posição o primeiro lado, não usei nem o que eu estava vendo por cima que quando for um para  $x=2$  não é isso? Então, eu verifiquei aqui também, que ele teria quer ser diferente de dois aqui em cima porque se não ele daria um.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Então:  $\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = 1$

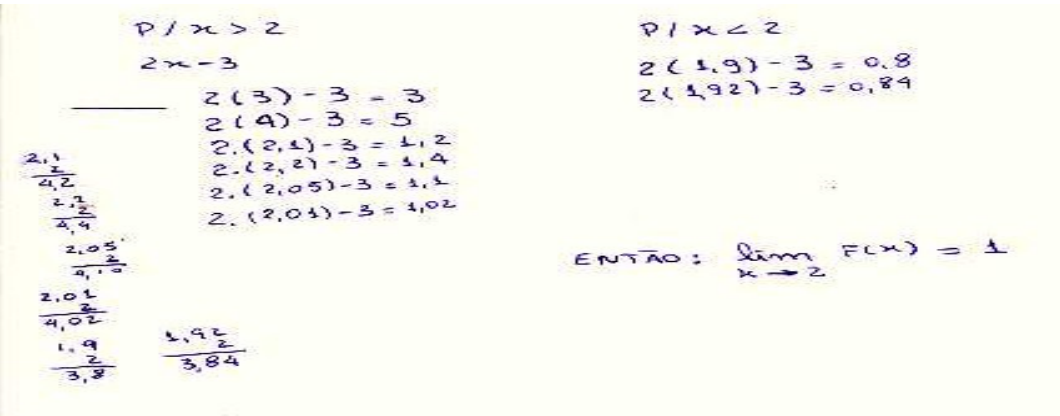


Figura 55: Texto escrito pelo aluno AI5 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Pronto.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = 1</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2</math></p> | <p>Utiliza o conceito de lateralidade do limite , porém não reconhece a função contínua dada como tal. Conclui que o limite existe, porém não é possível garantir se está falando da existência do limite da função ou dos limites laterais, uma vez que determinou que o limite da função constante, <math>f(x) = 1</math>, é dois. Porém em qualquer situação que fosse a sua conclusão estaria inadequada.</p> |

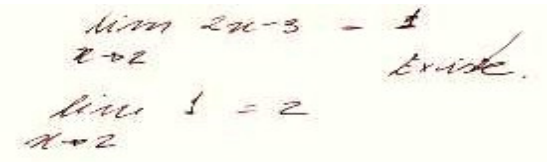


Figura 56: Texto escrito pelo aluno AI6 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Limite de efe de xis tendendo a dois ... xis igual a dois pertencentes a reta paralela. Então, limite de efe de xis para quando xis diferente de dois. Para xis efe [...] é o limite de dois xis menos três igual a [...] engraçado eu não posso determinar. É porque em um ponto você precisar usar as duas coordenadas .. é diferente do dois. Espero que eu não seja obrigado a voltar aqui para o parágrafo um [risos] y vai ser igual um xis tendendo dois vai ser igual a um quando xis é igual a dois, ... isso aí é incrível mesmo ... restrições quando a imagem da função for para um valor diferente de dois então, o limite de xis tendendo a dois é igual a um, ou seja efe de xis vai ser igual a um. Se xis for igual a dois aí ele já determinou né, no gráfico a restrição de o valor vai ser igual a um. Ou seja, o limite de xis tendendo a dois, quando não tem xis na equação aí vai ser igual a um.(...) Porque eu errei aqui. Depois quando eu dei uma olhada oxente menino não é assim não, rapaz eu estou até com vergonha, que absurdo. Até parece que eu não aprendi nada, mas eu aprendi alguma coisa.(...) Existe.(...) É igual a um. Então o limite existe e é igual a um. Quando xis tende a dois a função é igual a um. Porque eu acredito que seja assim, você pode fazer um valor, você pode fazer a função tendendo a um número. É uma variável y de xis é igual a dois menos três, y de xis igual a um. É quando você acha esse valor, tem esse valor, fazer uma das variáveis tender a um número mas não necessariamente a outra precisa também tender a esse número, pois é ao</p> | <p>Este sujeito reconhece que a função é definida por mais de uma sentença não só nas suas argumentações orais, como também na sua produção escrita. Faz conjecturas a esse respeito, inclusive achando estranho o fato da função ser a mesma para xis maior que dois e para xis menor que dois. Mesmo assim não consegue vislumbrar que a função dada é contínua.</p> |

contrário a outra variável pode chegar a um valor concreto. Embora uma variável não seja realmente. Porque aquela outra questão por exemplo o xis tende a um valor, mais ele na função ou seja, y teoricamente não existia nesse valor, mas se você fizer xis ir ao limite, ou seja, chegar bem próximo daquele valor não chegando nesse valor porque a função não é definida nesse valor, você pode ter um resultado um valor concreto. Não mais ou menos infinito. No caso aquela vai conseguir um valor, tem limite já? Específico qual é? Porque era bem base dizer que era mais ou menos infinito. Olhe ver o que é que você acha, tem um valor definido para essa função?(...) É quando xis tende a um. Não tem jeito de fazer y tender a um número que não seja mais ou menos infinito. Um valor próprio, um valor concreto. Eu acho que limite depende da função. Tem funções que podem chegar a um valor concreto e tem outras que não, que é mais ou menos infinito dependendo onde chaga. Aluizio deve ter detonado.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

P/  $x \neq 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$$

o limite existe e é igual a 1

$$Y(x) = 2x - 3$$

$$Y(x) = 1$$



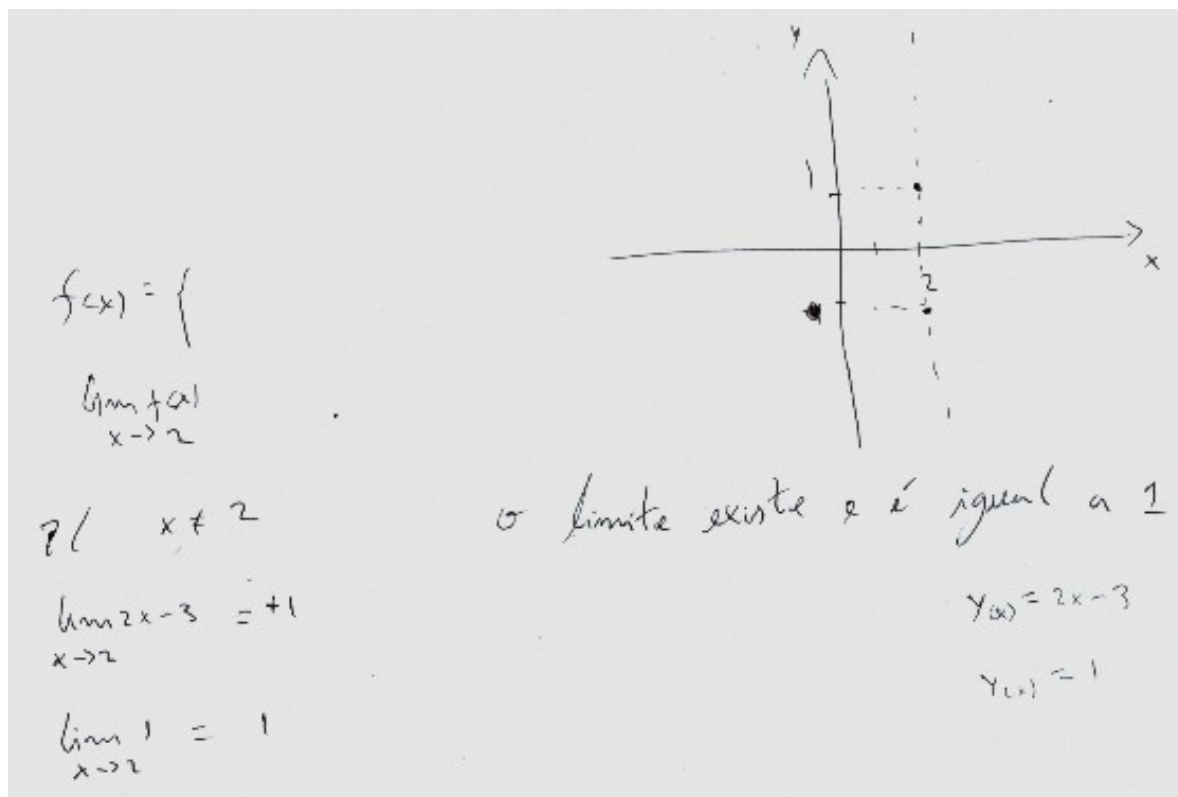


**Figura 57:** Texto escrito pelo aluno AI7 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É isso. O limite existe. O seu limite existe. O limite existe quando ele vale um, a função dele vale menos um. Opa! Quando vale um a função dele vale menos um. Posso,...tá certo. Dois vezes dois, quatro... tá certo. Aqui vale um. Quando ele for por aqui tendendo pra dois, ele vai valer, ele vai tender a um também.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ <p>quando ele tende para <math>x = 2</math> tento pela direita e esquerda o valor limite é 1.</p> <p>O limite existe</p> | <p>Este sujeito reconhece que o limite da função dada existe, e utiliza o conceito de limite lateral para determina-lo, contudo não aborda em nenhum momento que a função é determinada por mais de uma sentença e não reconhece também que é continua em 2.</p> |

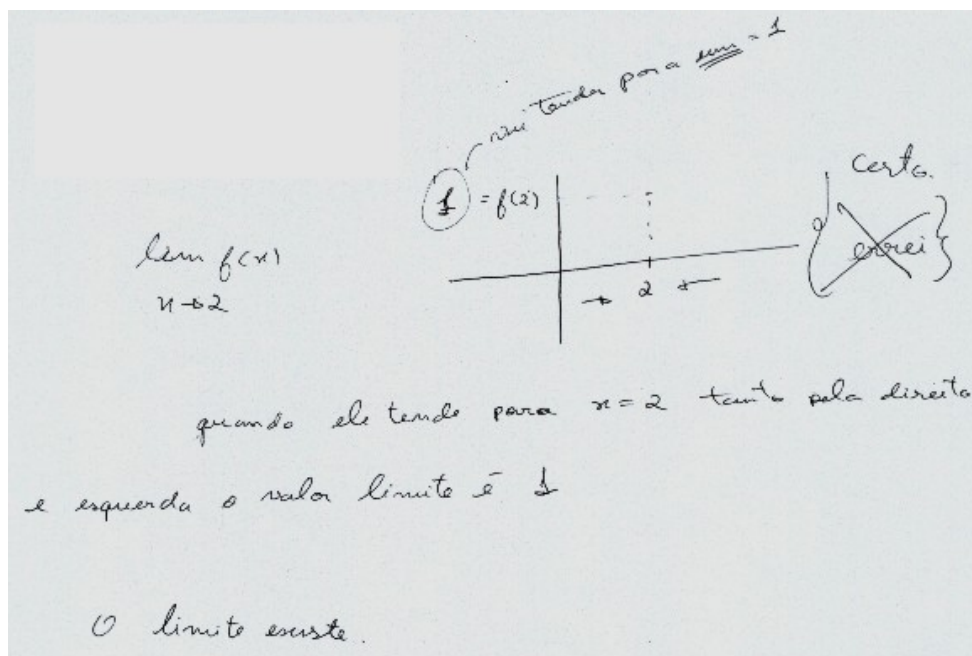


Figura 58: Texto escrito pelo aluno A18 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> [Ele sussurrou algumas poucas palavras mas não disse nada. Na fita o tempo de rolagem desse intervalo é de cerca de 5 a 10 segundos]</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 3 = 1$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 3 = 1$ <p>Sendo os limites laterais iguais a 1 e quando x igual a 2 tb, a função tem limite igual a 1.</p> | <p>A produção escrita do estudante permite perceber que ele utiliza o conceito de limite lateral para determinar o limite da função dada. Este sujeito concluiu pela existência do limite e que este é igual a um e não faz nenhuma referencia a respeito da continuidade da função.</p> |

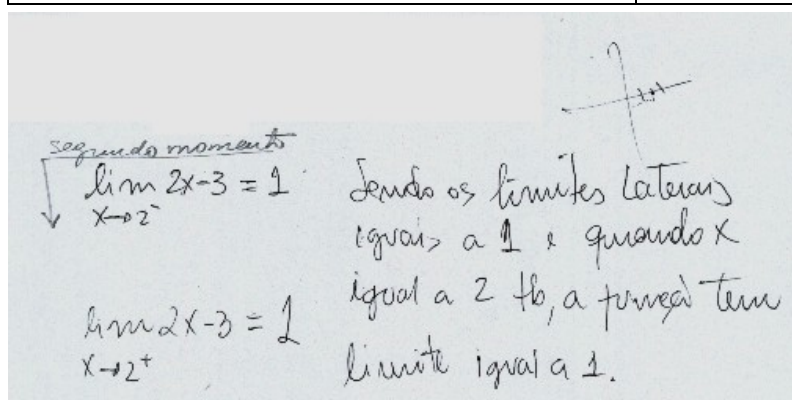


Figura 59: Texto produzido pelo aluno A19 durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> – Eu tenho uma função aqui dois xis menos três se xis diferente de dois, e o valor da função é um se xis é igual a dois. Calcule o limite, xis tendendo a dois ... se xis diferente de dois. Limite quando xis tende pra dois, dois, dois menos três quando xis tende a dois a função dois xis menos três seria, substitui isso aqui, o limite quando xis tende pra dois quatro menos três o limite seria um. Ele pede pra calcular aqui, calcule o limite caso afirmativo mas o limite existe o limite é um. Só que ele deu aqui em baixo que o limite se xis igual a dois o limite é um. Vou dá uma paradinha por aqui resolveria só o primeiro limite que confirmaria o segundo caso xis fosse igual a um xis fosse igual a dois o limite seria um que é a resposta que a gente chega aqui no final. Se eu lembrar daqui para o final da entrevista como é que se faz a outra parte eu voltarei.(...) Han, han!</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3, \text{ se } x \neq 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} 2(2) - 3$ $\lim_{x \rightarrow 2} 4 - 3 = 1$ | <p>O estudante não reconhece que a função dada é definida por mais de uma sentença, e que por isso seria necessário utilizar o conceito de limite lateral para determinar o limite da função dada. Como também não reconhece que a função dada é contínua, embora tenha determinado o seu limite no ponto dado usando este fato.</p> |

**Figura 60:** Texto produzido pelo aluno AI10 durante a sessão de resolução de problemas

Nas seis categorias elencadas no quadro abaixo se procurou colocar os aspectos centrais que permeiam as respostas de cada estudante em relação à pergunta geradora. Pode ser visto que somente dois estudantes (AI2 e AI7) reconhecem que a função dada, na sua estrutura, é semelhante a anterior, ou seja, é definida por mais de uma sentença.

| Encaminhamentos de proposição do problema                        | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                  | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Não reconhece a função como definida por mais de uma sentença |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Reconhece a função como definida por mais de uma sentença     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Utiliza limites laterais                                      |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Não reconhece que a função é contínua                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Reconhece a continuidade da função                            |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Utiliza seqüências numéricas para determinar o limite         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 10:** Resumo das respostas dadas pelos alunos a **Questão 3d** durante a sessão de resolução de problemas.

Inclusive poderíamos, se quiséssemos, ter representado a função  $f(x)$

acima na forma seguinte: 
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x > 2; \\ 2x - 3, & \text{se } x < 2; \\ 1, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

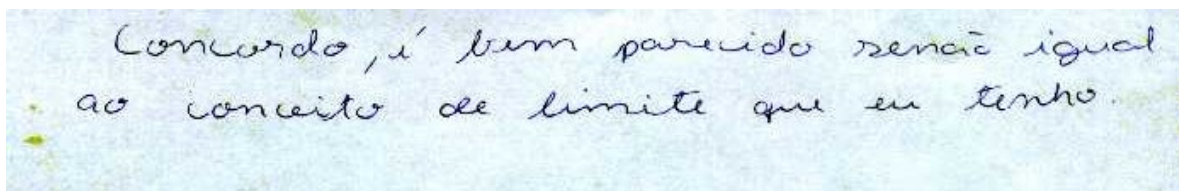
Porém dentre os estudantes que não reconhecem a função como definida por mais de uma sentença quatro deles (AI3, AI4, AI5 e AI9) a representam como tal ao pretenderem determinar o seu limite, aplicando o conceito de limites laterais. Dos oito estudantes que utilizaram o conceito de limites laterais para determinar o limite da função dada um deles (AI5) utiliza o conceito de convergência por seqüência numérica (isto é, uma seqüência  $(x_n)$  converge para  $a$  ou tende para  $a$  quando o seu limite é  $a$ ,  $\lim x_n = a$ ) e, somente um, (AI3) utiliza o conceito de função contínua e mostra que tem compreensão dele, (AI3) – *Acho que se eu não estou esquecido é*

*função continua.(...) É, que o conceito de função continua é quando o limite tende pela, tendendo pela direita ou pela esquerda de um determinado valor ele tem que ser igual ao valor da função. O valor do limite tem que ser igual ao valor da função. O que está acontecendo é isto mesmo.(...) O limite de uma função continua. Vou colocar aqui a definição de uma função continua.*

*Ai7 – “Eu acho que limite depende da função. Tem funções que podem chegar a um valor concreto e tem outras que não, que é mais ou menos infinito dependendo onde chaga”*

**Questão a:** Um limite descreve para onde uma função  $f(x)$  se move quando a variável  $x$  se move em direção a um certo ponto.

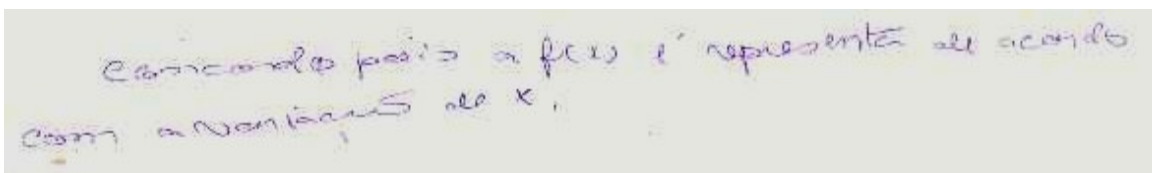
| <b>Aluno Informante 1</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resposta</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>Análise</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite descreve para onde uma função <math>f(x)</math> se move quando a variável <math>x</math> se move em direção a um certo ponto. ... Eu não posso dizer se tá totalmente certo ou totalmente errado não, eu concordo que, com o, com o que tem escrito aqui. (...) Um limite descreve para onde uma função se move quando a variável <math>x</math> se move em direção a um certo ponto. ... Em direção a um certo ponto ... Esse está meio assim mas, ... eu concordo. [Lê em voz baixa e diz] Bem parecido, se não igual ao conceito de limite que eu tenho.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b><br/>Concordo, é bem parecido senão igual ao conceito de limite que eu tenho.</p> | <p>Se retomarmos o conceito de limite atribuído por este aluno na primeira questão veremos que os conceitos de limite que ele tem é do limite é do limite como aproximação, aproximação de um valor de referência, como ele mesmo afirma “<i>Bem parecido, se não igual ao conceito de limite que eu tenho</i>”.</p> |



Concordo, é bem parecido senão igual ao conceito de limite que eu tenho.

**Figura 61:** Texto escrito pelo aluno AI1, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

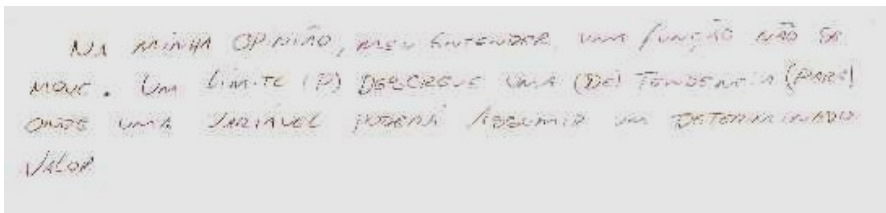
| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                         |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> [inaudível]...Esse também? (...) As informações que constam abaixo foram dadas por alguns alunos da área dois quando solicitados que dessem um conceito de limite. Gostaria se possível que você se posicionasse tecendo comentários sobre cada uma dessas respostas. O limite, descreve para onde uma função... função de xis se move quando a variável xis, quando a variável xis se move em direção a um certo ponto. É para dizer se está certo ou errado? (...) Não, não discordo. Espere aí.... O limite descreve...(..) O limite descreve para onde uma função, função de xis se move, quando a variável xis se move em direção a um certo ponto... É concordo, porque aqui está em relação a xis. E esse xis é exatamente pra dar meu y... Quando o meu xis se move... Eu concordo... pois... uma função xis... é representada... de acordo... com a variação... de xis... É eu acho que repeti a mesma coisa, mas eu concordo... [inaudível] Devia ter até uma aula disso aí, parece que o cara aprende mais do que outro aprende coisas que não ... nem sabia que sabia... ou nem sabia que existia.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno</u></b></p> <p>Concordo pois a <math>f(x)</math> é representa de acordo com a variação de <math>x</math>.</p> | <p>Este aluno concorda com o que está apresentado na questão inclusive atribuindo que a função "<math>f(x)</math> é representa de acordo com a variação de <math>x</math>."</p> |



Caricando pois a  $f(x)$  e' representa de acordo com a variável de  $x$ .

**Figura 62:** Texto escrito pelo aluno A12, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É porque o que está assim meio assim é se move a função se move, não sei eu acho meio estranho. Porque para mim o que se move é um carro é uma pessoa né, não uma função. Eu acho que limite ele, ele dá a noção pra onde um determinado valor que uma variável pode assumir. Eu acho que tem mais a minha percepção de limite é mais assim eu não colocaria por onde uma função se move, mas creio que o caso o aluno que respondeu ele expressou a forma dele entender do mesmo jeito que a minha foi diferente. foi diferente da dele.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Na minha opinião, meu entender, uma função não se move. Um limite (p) descreve uma (de) tendência (para) onde uma variável poderá assumir um determinado valor.</p> | <p>Este estudante mostra uma compreensão que o conceito de limite de função não está associado a movimento de uma função, ao afirmar que “uma função não se move”, contudo apresenta uma versão estática do limite de uma função, para o qual “Um limite (p) descreve uma (de) tendência (para) onde uma variável poderá assumir um determinado valor”.</p> <p>Na verdade, o que ocorre é uma variação do valor da função quando a variável, no caso <math>x</math>, se aproxima do valor de referência.</p> |



NA MINHA OPINIÃO, MEU ENTENDER, UMA FUNÇÃO NÃO SE MOVE. UM LIMITE (P) DESCREVE UMA (DE) TENDÊNCIA (PARA) ONDE UMA VARIÁVEL PODERÁ ASSUMIR UM DETERMINADO VALOR.

**Figura 63:** Texto escrito pelo aluno A13, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                                               |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eu acho que isso aqui tá certo. Eu posso ter um limite e representar uma reta ele .... a função..... poderia representar uma função na qual o limite representasse uma reta.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>está certo.</p> <p>porque eu poderia representar uma função na qual o limite representasse uma reta, por exemplo.</p> | <p>Para este estudante o limite de uma função pode ser representado geometricamente por uma reta.</p> |

está certo.  
 porque eu poderia representar uma  
 função na qual o limite representasse  
 uma reta, por exemplo.

**Figura 64:** Texto escrito pelo aluno AI4, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Que saco fazer um comentário. [relendo em voz baixa] Porque é aquela coisa ao meu ver, o que é que acontece quando uma variável <math>x</math> que ela tem que pertencer aos reais <math>x</math> pertencendo aos reais tende a um valor a qualquer um aí ocorrendo isso.(...) É do que seria o comentário vamos dizer assim. Porque aqui o que ele diz é isso. Um limite descreve para onde uma função de <math>x</math> se move quando a variável <math>x</math> se move em direção a um certo ponto. Aí isso é uma coisa assim lógica, quando um <math>x</math> se move a um ponto a outro aí vai descrevendo a função o limite por exemplo</p> | <p>Para este aluno o conceito de limite tem que estar próximo da definição formal de limite. Mantendo a atitude anterior relativa ao seu conceito de limite de função expressado na questão <b>1</b>.</p> |



como agente tinha visto ali na questão anterior por um lado ela tendia a um, por outro lado também tendia a um. Então daí eu vou tirar minha função se ela é constante se ela não é.(...) Eu acho assim que está incompleto.(...) Certo.(...) Eu estou quase chegando, é que eu sou muito ruim assim de redigir, entendesse, é aquela coisa eu fico um pouco, com certo receio aí quando eu olho para uma questão eu faço de tudo para tentar organizar o meu psicológico. E pôxa eu vou tentar ler vou tentar analisar e depois de eu quebrar a cara muitas vezes tá entendendo, porque é assim aquela coisa não é questão que eu não saiba de verdade, mas as vezes é um eu não sei o que é que dá que o cara vai só tenta somar é como é que eu posso dizer assim o valor de cabeça aí você bota o valor e tá pensando em outra coisa aí termina botando aquele valor que você tava pensando e não o valor que é o real, entendeu! Aí, você tem vinte pra diminuir três o cara bota cinqüenta meu irmão isso aí é impossível uma coisa dessa. Rapaz é uma coisa séria. Então deixa eu ver aqui se eu consigo ... (fica balbuciando enquanto tenta resolver a questão) meu Deus do Céu! ... (continua a balbuciar) erreí de novo. Bem então respondendo a questão, no meu ponto de vista esse comentário tá incompleto pois deveria ter sido dito que  $x$  pertence aos reais e com uma tendência a um número real positivo a qualquer, né! Se isso for verificado, para um número  $\varepsilon$  positivo e real existe um número  $h$  positivo e real também. Aqui eu fui escrever real aí botei entre parênteses como você tinha.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>No meu ponto de vista esse comentário esta incompleto pois deveria ter dito que: <math>x \in \mathbb{R}</math> e com tendência a um número real positivo <math>a</math>. Se isso for verificado, para um número <math>\varepsilon</math> positivo e (ral) real, existe um número <math>h</math> positivo e (ral) real.</p> |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

NO MEU PONTO DE VISTA ESSE COMENTÁRIO ESTA INCOMPLETO POIS DEVERIA TER DITO QUE:  $x \in \mathbb{R}$  E COM TENDÊNCIA A UM NÚMERO REAL POSITIVO  $a$ , SE ISSO FOR VERIFICADO, PARA UM NÚMERO  $\varepsilon$  POSITIVO E (RAL) REAL EXISTE UM NÚMERO  $h$  POSITIVO E (RAL) REAL.

**Figura 65:** Texto escrito pelo aluno A15, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É concordo essa definição está bem parecida com a que eu dei. Ele no caso utilizou o nome variável, eu utilizei é alguma coisa assim, tipo um número real ou um número infinito tendendo para direita ou para esquerda. Bem a forma que, foi como eu falava no início a forma que foi passada para a gente o conceito de limite na realidade não foi dado conceito, foi extraído o conceito. Na realidade que a gente percebe não se tem uma preocupação de extrair o conceito de limite, de derivada, de integral de a definição. Então você torna-se mecânico pra você ver e saber como é que faz, mas não saber porque faz. Pra que serve onde se utiliza. Eu concordo eu entendi quando eu estudei e até o resto da vida acho que eu não vou ver mais limite, mais ou menos essa definição talvez ela esteja certa ou errada mais eu entendi dessa forma também.</p> | <p>Como o próprio estudante o afirma concorda, “É concordo essa definição está bem parecida com a que eu dei”. De fato, se verificarmos, o seu conceito de limite está associado à idéia de movimento de aproximação a um valor.</p> |

|                                                                                                                 |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Eu concordo com a forma que está sendo expressa acima.</p> |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

*Eu concordo com a forma que está sendo expressa acima.*

**Figura 66:** Texto escrito pelo aluno AI6, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Análise                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eu concordo, tem que comentar? (...) Eu concordo. Interessante que eu já não, comentários eu [risos] por instinto eu nunca fiz, nunca faço.(...) Eu acho complicado.(...) É quando uma função, outra função tem um determinado ponto. Aliás quando uma variável tem determinado ponto, a outra também tende justamente a outro ponto. Realmente eu não sei o que eu posso comentar sobre isso.(...) Quero. Eu simplesmente concordo sem comentário.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Eu concordo.</p> | <p>A tendência deste aluno em concordar, inclusive, como ele mesmo disse, “<i>Eu simplesmente concordo sem comentário</i>”, é porque a afirmação veiculada na questão acima se aproxima do conceito de limite proposto por ele na primeira questão.</p> |

*EU CONCORDO.*

**Figura 67:** Texto escrito pelo aluno AI7, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

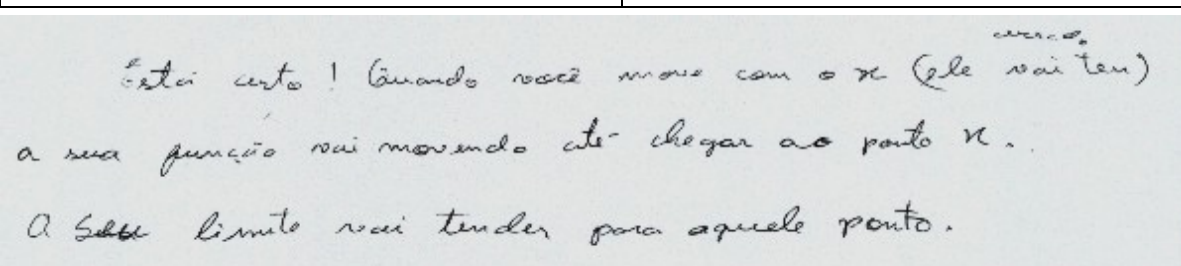
| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Já sei, ele quer saber aqui, quando a pessoa ...essa pergunta aqui? Limite descreve para onde uma função se move quando a variável <math>x</math> se move em direção a um certo ponto.(...) Ah, isso aí foi</p> | <p>Este aluno concorda com a afirmação acima, (re) afirmando inclusive a sua perspectiva anterior sobre o limite de função, veiculada na questão <b>1</b>.</p> |

comentário do rapaz, foi? (...) Hum, tá legal! Um limite descreve para onde uma função se move quando a variável  $x$  se move em direção a um certo... Na verdade se ele quer, se ele se move a um certo ponto  $x$ , em direção a um certo ponto ele vai tender para o limite de uma função. O Limite da função. ... Quando você move com  $x$  a sua função vai movendo ... até chegar ao ponto  $x$ . ... Do limite do  $x$ . ... O seu limite ... [O seu limite vai tender para aquele ponto].

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Está certo! quando você move com o  $x$  (ele vai tem) a sua função vai movendo até chegar ao ponto  $n$ .

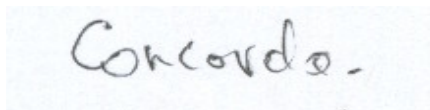
O seu limite vai tender para aquele ponto.



Está certo! Quando você move com o  $x$  (ele vai tem) a sua função vai movendo até chegar ao ponto  $n$ .  
O seu limite vai tender para aquele ponto.

**Figura 68:** Texto escrito pelo aluno AI8, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                | Análise                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Mesmo concordando tem que tecer o comentário? (...)</p> <p>Concordo sim. Sem comentário.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Concordo</p> | <p>O próprio estudante reafirma nessa questão a sua perspectiva anterior relativa ao conceito de limite de função, como sendo relacionado a aproximação da função a um número.</p> |



Concordo.

**Figura 69:** Texto escrito pelo aluno AI9, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão **a** acima

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Essa primeira informação aqui ele fala que “Um limite descreve para onde uma função <math>f(x)</math> se move quando a variável <math>x</math> se move em direção a um certo ponto”. Eu diria que está correta porque o limite ele também descreve a função, né, descreve o comportamento de função num determinado ponto realmente, quer dizer descreve a trajetória. Eu não diria bem que se move eu diria mas que o limite descreve a trajetória de uma função para determinados pontos, eu acrescentaria isso aqui. Eu colocaria assim : um limite de uma função descreve a trajetória que a partícula faz num determinado ponto.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Um limite de uma função, descreve a trajetória que a partícula faz num determinado ponto.</p> | <p>A concepção que este estudante mostra nesta questão diverge da sua concepção anterior de limite, relacionada à primeira questão, quando lhe foi pedido o conceito de limite de função, em que ele associou limite a derivada de uma função.</p> |

**Figura 70:** Texto escrito pelo aluno AI10, durante a sessão de resolução de problemas, quando foi pedido que se posicionasse sobre questão a acima

Apresentamos abaixo dois quadros-resumo, que auxiliam a interpretação mais global das produções dos sujeitos: o primeiro quadro diz respeito à questão 4 item a, enquanto que o segundo quadro reproduz (para a comodidade do leitor) a análise proposta para a questão 1, de forma a serem evidenciadas relações entre um momento e outro da atividade de resolução de problemas dos sujeitos.

| Tipo de conceptualização de limite                                                | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                   | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Concorda que o limite de uma função é de aproximação a um valor de referência     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Não concorda que o limite de uma função é de aproximação a um valor de referência |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 11:** Resumo da **Questão 4a**, análises dos estudantes do conceito de limite dado por um aluno fictício.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                          | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                             | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível                                                                                                                                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira                                                                                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor:                                                                                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como tendência a um valor de referência                                                                                                                           |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e epsilon (distância de $x$ ao ponto limite, e de $f(x)$ ao valor limite, respectivamente) |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo da **Questão 1**, sobre conceptualização de limites, desenvolvida pelos alunos entrevistados, durante a sessão de resolução de problemas

Apesar de não aparecer explicitado, mas estamos lidando com limite de função real a uma variável real. Então ao lidar com o limite de uma função, por exemplo,  $f(x)$ , dizer que a função se move não é adequado, pois, na verdade a função não se move. De fato, o que verificamos é como a função  $f(x)$  varia quando a variável  $x$  aproxima-se de um certo valor, ou seja, tende a esse valor.

A expressão “se move” não está apropriada para determinar o limite de uma função, dever-se-ia utilizar a expressão “se aproxima” ou a palavra “tende”, porque o conceito de limite é aproximação. O que se pretende é verificar “Como se comporta a função  $f$  quando a variável  $x$  se aproxima de...”. Mas, só se pode aproximar de um ponto (ou de um valor), se pode aproximar-se de mais infinito e de menos infinito. Como mais infinito e menos infinito não é um ponto, então se mover

em direção a um certo ponto estaria errado se formos olhar todos os casos do conceito de limite.

Na física, por exemplo, não se está somente interessado quando  $x$  se aproxima. Se  $x$  representa o tempo, o interesse não está quando  $x$  se aproxima de um tempo finito. Geralmente se está interessado com o que acontece no futuro e o que aconteceu no passado. Então, você está interessado em mais infinito e em menos infinito. Por isso que o conceito de limite é muito mais geral do que se aproximar de um ponto.

No quadro 11 acima apresentamos as respostas dos estudantes pesquisados, referentes à questão acima, em duas categorias. Observa-se que oito dos dez estudantes concordam com o conceito de limite de função que é fornecido por o estudante imaginário, e um deles (AI1) foi categórico em afirmar que o conceito dado era *Bem parecido, se não igual ao conceito de limite que eu tenho*. O aluno AI10 embora concorde com a afirmação, não o faz no todo, o faz ponderando *Eu não diria bem que se move, eu diria mais que o limite descreve a trajetória de uma função para determinados pontos*, ou seja, institui uma idéia de movimento mais do ponto de vista geométrico, atribuindo ao limite a descrição da trajetória de uma partícula.

Dos dois alunos que não concordaram com o conceito dado pelo estudante fictício, um deles, (AI5) mantêm, a respeito do limite de função, a concepção que declarou na primeira pergunta (Questão número 1) que lhe foi feita, do conceito de limite de função próxima da definição formal de limite, reafirmando sua posição nessa questão. O outro estudante (AI3) não concorda por entender como ele mesmo declara que *Na minha opinião, meu entender, uma função não se move (...) Porque para mim o que se move é um carro é uma pessoa né, não uma*

*função*. De fato, uma função não se move a sua imagem (de uma variável) é que varia à medida que há uma variação dos valores da variável.

Comparando-se os dois quadros mostrados acima – **Quadro 11** e o **Quadro 5**-, cada um deles associado às questões **4 a** e **1** respectivamente, encontra-se uma semelhança entre as respostas dos sujeitos em relação as suas crenças sobre o conceito de limite de função.

**Questão b:** Um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar.

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar.... o limite é o número ou ponto além do qual a função não pode ultrapassar. ... Eu concordo ... pois o limite é o valor máximo ... como já diz o nome.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>Concordo, pois o limite é o valor máximo como já diz o nome.</p> | <p>O estudante concorda com a assertiva e reafirma a sua posição ao dizer que concorda “<i>pois o limite é o valor máximo como já diz o nome</i>”. Retomando-se o conceito de limite de função estabelecido por ele ver-se-á que estabelece na sua conceptualização limite como fronteira.</p> |

**Figura 71:** Texto escrito pelo aluno AI1, em resposta à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar... É errado... não concordo... pois... [pensando] o limite... é um</p> | <p>Para este estudante o “<i>limite... é... um ponto que está na função</i>”, mas isto só é permitido acontecer se a função for contínua naquele ponto. Além do aspecto citado acima,</p> |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>ponto, certo... um ponto que está na função... e há um único para cada xis... o limite é um ponto que está na função e além do qual [inaudível] para cada xis... mas... não define o fim da função. Eh... ele pergunta aqui, o limite é um ponto... é um número ou um ponto, além do qual a função não pode ultrapassar. Eu não concordo porque, pois um ponto... Você quer limite. Pois limite... é... um ponto que está na função... e há um e um único... e um único ponto... para cada xis, mas... não... não é o fim da função... É que quando passa é como se fosse pronto ali é o limite e dali pra lá não existe mais função tá entendendo. É o limite daquele xis mais dali pra lá pode existir ou não, ele não define se você acabou a função ali ou não.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>não concordo pois o lim é ponto que esta na função e o único ponto para cada x, mais não o fim da função.</p> | <p>também é utilizada a unicidade do limite para ampliar a sua discordância. No entanto, em nenhum momento, a assertiva acima aborda a não unicidade do limite. Se retomarmos a primeira questão na qual se pede o conceito de limite, os seus argumentos propõem o limite como fronteira.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Figura 72:** Texto escrito pelo aluno AI2, em resposta aa questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                             |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eu acho que limite é um número, um valor ou um ponto onde uma função não alcançará. Aquele valor exato.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Um limite (<math>E_r</math>) é um número, um valor numérico o qual uma função nunca alcançará.</p> | <p>A discordância se dá porque este aluno compreende limite como algo inatingível. De acordo com as suas convicções anteriores.</p> |

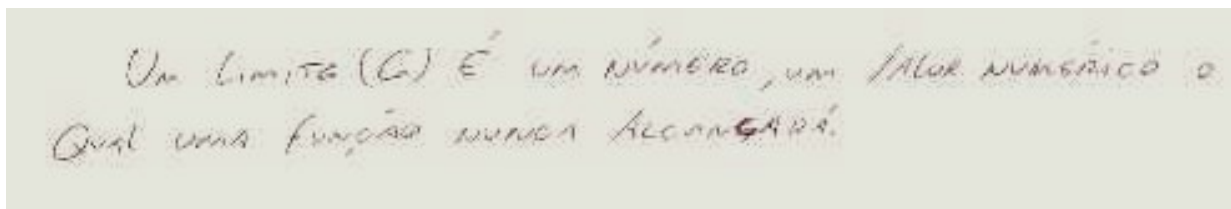


**Figura 73:** Texto escrito pelo aluno A13, em resposta à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Ele tá dizendo que o limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar. Acho que esse aqui está errado, este tá errado, exatamente o número ou ponto, nessa parte que ele fala ultrapassar. Nessa ele fala em ultrapassar porque o limite ele vai tender vai tender a um certo valor.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/> acho que esse está errado exatamente nessa parte que <del>falei</del> falar exatamente em ultrapassar o por que o limite vai tender a um certo certo valor.</p> | <p>A discordância está somente na maneira de argumentar do aluno fictício, pois se olharmos o quadro 1 abaixo (reportando-se à questão número 1) ver-se-á que este aluno tem a mesma crença, no limite como fronteira. Pois, o conceito de limite de função deste aluno admite o limite como fronteira.</p> |

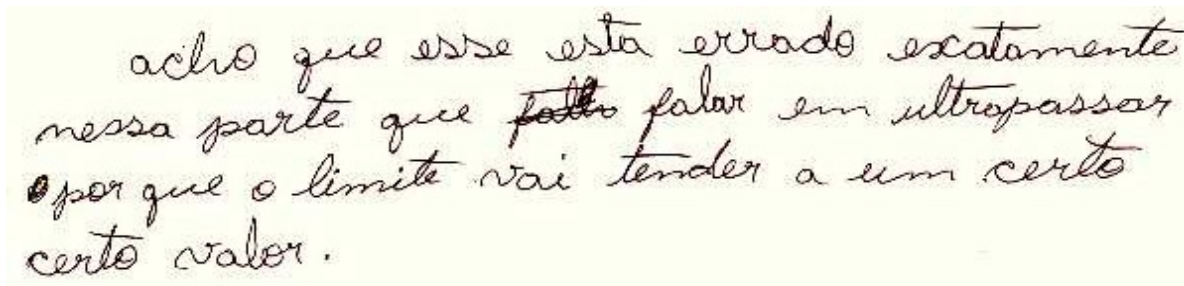


**Figura 74:** Texto escrito pelo aluno A14, em resposta à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> (Fica balbuciando, relendo a questão) Não é que ele não possa ultrapassar, ele tende aquele valor né! ... Deixa ver como é que eu posso dizer isso. Tem aqui ... não é que ele não possa</p> | <p>O comentário que este estudante faz ratifica a sua concepção de limite como tendência a um valor de referência quando diz “Bem, respondendo essa questão, eh, não é que não possa ser ultrapassado, mas sim com</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <p>ultrapassar é que ele tem a tendência àquele valor, não! (...) Eu vou colocar assim ... Bem, respondendo essa questão, eh, não é que não possa ser ultrapassado, mas sim com tendência a um número ou ponto, né! Taí meu comentário.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Não é que “não possa ser ultrapassado”, mas com tendência a um número ou ponto.</p> | <p>tendência a um número ou ponto, né! Taí meu comentário”.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|

NÃO É QUE “NÃO POSSA SER ULTRAPASSADO”, MAS COM TENDÊNCIA A UM NÚMERO OU PONTO.

**Figura 75:** Texto produzido pelo aluno A15, em resposta à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eu acho que não. Porque existe a questão do limite tender pra. Quer dizer quando tem um limite tendendo a zero pela direita, quer dizer é um limite acima de zero. Pouquíssimo, ou bem próximo de zero acima de zero isso significa dizer que não pode ultrapassar. Pode ultrapassar pois ...</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Pode ultrapassar pois quando o limite tende a uma variável pela direita ficará pouco mas será acima da variável.</p> | <p>Este aluno tem a concepção do limite de função relacionado a movimento de aproximação de um valor, contudo a sua discordância se dá em virtude de um equívoco cometido na sua concepção de limite lateral, pois para ele o fato de tender ao número dado por uma seqüência de números maiores que este é garantia que o limite pode ser ultrapassado.</p> |

Pode ultrapassar pois quando o limite tende a uma variável pela direita ficará pouco mas será acima da variável.

**Figura 76:** Texto escrito pelo aluno A16, respondendo à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Agora que eu pequei realmente. Eu concordo. É realmente você tem um valor de determinado xis que você não pode ultrapassar, a gente quer saber qual é o valor de y que corresponde assim. Mais ou menos infinito, pode ser uma função assim combina mesmo, mas você não tem que achei, você quer saber qual o valor que essa função tem quando a outra variável, não sei quando a outra função efe de xis .. tem mais esse ponto xis determinado pela função aí o limite não conta. Pra comentar fica mais difícil ainda.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Concordo.</p> | <p>O estudante concorda com a assertiva, inclusive, ratificando a sua concepção anterior sobre limite de função como algo inatingível.</p> |



**Figura 77:** Texto produzido pelo aluno A17, respondendo à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problema

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Só limite, né? (...)</p> <p>Um limite é um número ou ponto do qual uma função não pode ultrapassar.(...) Ele é, aqui, assim. Eu botei que ele é um ponto, no gráfico. Que você acompanhando o gráfico vai tender pra um ponto, certo! Então também ele é um número, porque, na função, se você</p> | <p>Ele reforça a afirmação da assertiva ao afirmar que "(...) se você jogar aquele número na função, o limite vai tender para aquele número tanto como se você chegar bem perto do número é exatamente o limite". Estando de acordo com sua concepção de limite.</p> |

jogar aquele número na função, o limite vai tender para aquele número tanto como se você chegar bem perto do número é exatamente o limite. Acho que é isso. Não deu pra explicar muito aqui não, mas acho que falando é melhor do que escrevendo. Mas que realmente é isso.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

O limite é um ponto no gráfico onde você acompanhando o gráfico tanto pela esquerda ou pela direita o gráfico vai tender para aquele ponto desejado.

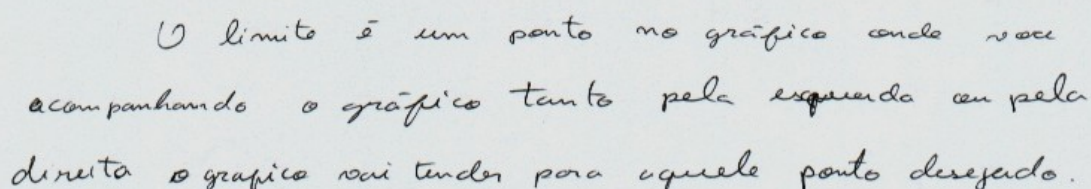


**Figura 78:** Texto produzido pelo aluno A18, respondendo à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problema.

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Concordo. Porque está dizendo aqui uma dada função... uma dada função cujo limite tendê a um de um sobre xis menos um a função, a função será limitada no valor de xis igual a um tendendo ao infinito, é, sendo ... o limite ... pois que menos infinito pela direita ...</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Concordo pq em dada função cujo <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}</math> a função (nunca) será limitada no valor de <math>x = 1</math> tendendo ao infinito, sendo limite pela esquerda - <math>\infty</math> e pela direita + <math>\infty</math>.</p> | <p>O aluno concorda com a afirmação dada, contudo o argumento usado não é convincente. Contudo, a sua concepção de limite de função é de aproximação a um valor estabelecido.</p> |

Convergindo. A função não tem limite pq os limites laterais são diferentes.

Concordo pq em dada função cujo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$   
a função (curva) será limitada no valor de  $x=1$  tendendo  
ao infinito, sendo limite pela esquerda  $-\infty$  e pela direita  
 $+\infty$ .  
Corregendo: A função não tem limite pq os limites  
laterais são diferentes.

**Figura 79:** Texto produzido pelo aluno A19, respondendo à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problema.

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> São todos conceitos que as outras pessoas colocaram? (...) Um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar.(...) Eu fico meio sem entender o que ele quis dizer que é “um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar” porque o limite não é um número, né. O limite ele descreve a trajetória da função ele não é um ponto fixo a função pode ter vários limites, pode tender ao infinito, pode não ter limite algum. Acho que essa daqui não descreveria muito bem não porque você pode restringir, pode dizer que a função tem um limite num determinado ponto mas não vai ter em outro. Eu não concordo com essa colocação não, “um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar”. Uma função pode ultrapassar, uma função pode ser restrita mas ela pode ultrapassar. Pronto. Eu acrescentei aqui algumas coisas... [escreveu: “Não concordo com a afirmação devido ao fato que o limite de uma função descreve a trajetória da mesma numa curva e pode estar ou não limitada”].</p> | <p>A discordância reside na expressão analítica de uma função particular. Além disso, garante que “Uma função pode ultrapassar, uma função pode ser restrita, mas ela pode ultrapassar”. E acrescenta “Não concordo com a afirmação devido ao fato que o limite de uma função descreve a trajetória da mesma numa curva e pode estar ou não limitada”.</p> |



|                                                                                                                                                                                                         |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| limitada.”                                                                                                                                                                                              |  |
| <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Não concordo com a afirmação devido ao fato que o limite de uma função descreve a trajetória da mesma numa curva e pode estar ou não limitada.</p> |  |

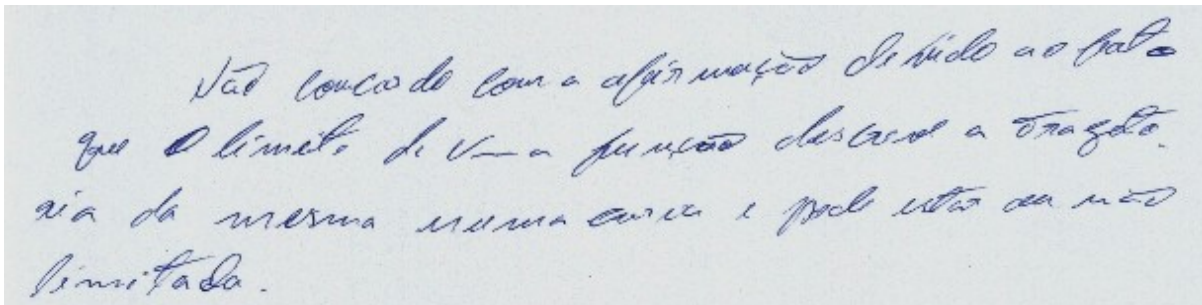


**Figura 80:** Texto produzido pelo aluno AI10, respondendo à questão **b** acima, durante a sessão de resolução de problema.

De forma semelhante ao que se fez para a questão anterior, apresentamos abaixo dois quadros-resumo, que auxiliam a interpretação mais global das produções dos sujeitos: o primeiro quadro diz respeito à questão 4 item b, enquanto que o segundo quadro reproduz (para a comodidade do leitor) a análise proposta para a questão 1, de forma a serem evidenciadas relações entre um momento e outro da atividade de resolução de problemas dos sujeitos.

| Tipo de conceptualização de limite                                                   | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                      | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Concorda que o limite é um ponto além do qual uma função não pode ultrapassar     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Não concorda que o limite é um ponto além do qual uma função não pode ultrapassar |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 12:** Resumo da **Questão 4b**, análises dos estudantes do conceito de limite dado por um aluno fictício.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                          | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                             | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível                                                                                                                                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira                                                                                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor:                                                                                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como tendência a um valor de referência                                                                                                                           |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e epsilon (distância de $x$ ao ponto limite, e de $f(x)$ ao valor limite, respectivamente) |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo da **Questão 1**, sobre conceptualização de limites, desenvolvida pelos alunos entrevistados, durante a sessão de resolução de problemas

Estamos lidando com limite de função real a uma variável. Isto significa que podemos estar lidando, por exemplo, com uma função crescente, quando se calcula o limite de uma função desse tipo o limite vai ficar sempre acima da função e se a função for decrescente o limite ficará abaixo. Explicando melhor, uma função real a uma variável ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) é dita crescente quando, dados  $x, y \in \mathbb{R}$  ( $x$  e  $y$  números reais),  $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$  (ou seja, se  $x$  é menor que  $y$  a imagem de  $x$  pela  $f$  tem que ser menor que a imagem de  $y$  pela  $f$ ). Daí, se tomarmos dois números reais  $x$  e  $a$  tal que  $x < a$ , o que acontecerá com o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ? Será sempre maior que  $f(x)$ , para todo  $x < a$ . De modo análogo se a função for decrescente.

Isto significa então que nem sempre fica o ponto além do qual a função não pode ultrapassar.

O **Quadro 12** acima tem representado as tendências dos estudantes pesquisados quanto a assertiva feita com relação ao limite de uma função. Diferentemente da assertiva anterior, nesta as opiniões estão muito próximas, desde



que, entre os dez alunos seis concordam com a afirmação postulada na questão e quatro discordam dela.

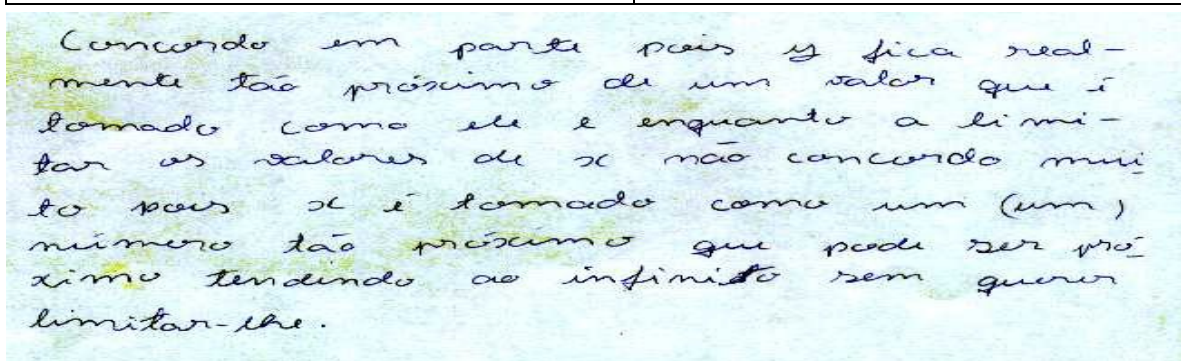
Se levarmos em consideração que o aluno AI4 discordou da opinião dada por ter interpretado o *não pode ultrapassar* como sendo ultrapassar -ao afirmar que na assertiva aparece a afirmação *Nessa ele fala em ultrapassar* - teríamos o grupo dos dez alunos com as opiniões divididas entre o concordar e o discordar da proposição.

Ao observarmos o quadro abaixo do primeiro, no qual aparecem as categorias em que foram enquadradas as concepções de limites desses mesmos estudantes, vê-se que as posições de concordância tomadas em relação ao conceito de limite de uma função, conforme exposto na afirmação, convergem para os conceitos que estes alunos expressaram sobre limite, com exceção do estudante AI7 que segundo seu conceito o limite é um movimento de aproximação para um valor fixo, mas esse valor não é atingido. No entanto, com relação às opiniões discordantes, somente o aluno AI3 mantém a sua concepção sobre limite de uma função, como sendo um movimento de aproximação a um valor inatingível.

**Questão c:** Um limite é um número do qual os valores  $y$  de uma função  $y = f(x)$  podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de  $x$ .

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é um número do qual os valores $\epsilon$ de uma função $\epsilon$ igual a $\epsilon$ de $x$ podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de $x$ . ... Um limite é um número do qual os valores ... $\epsilon$ de uma fun... $\epsilon$ igual a $\epsilon$ de $x$ ... podem ficar | Este estudante concorda com o fato dos valores de $y$ ficarem arbitrariamente próximos de um número, contudo, não concorda com o fato de se limitar os valores de $x$ argumentando que “ <i>um número próximo pode tender a infinito</i> ”. E de fato, pois quando se limita o valor de $x$ , pode-se |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de <math>x</math>. Limitar os valores de <math>x</math>. ...Ao se limitar os valores de <math>x</math>. ... os valores de <math>x</math> ... Eu concordo em parte ... Ah, eh! não gostei desse negócio de ... próximo ao se limitar os valores de <math>x</math>. Não gostei muito desse negócio não. Porque,... quando a gente diz limitar o valor de <math>x</math>. Quando a gente diz que <math>x</math> tende a um número ... eu não acredito que você seja limitando esse número não, entendeu! (...) É um número próximo. Mas, um número próximo pode tender a infinito ... esse negócio do <math>\epsilon</math> ficar arbitrariamente próximo ...</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Concordo em parte pois <math>y</math> fica realmente tão próximo de um valor que é tomado como ele e enquanto a limitar os valores de <math>x</math> não concordo muito pois <math>x</math> é tomado como um (um) número tão próximo que pode ser próximo tendendo ao infinito sem querer limitar-lhe.</p> | <p>faze-lo por um intervalo muito grande. O que caberia melhor seria dizer ao se limitar do valor de <math>x</math> num intervalo pequeno em torno de <math>x</math>.</p> <p>Porém em relação à primeira parte da afirmação, pode acontecer que o limite seja mais infinito, ou até menos infinito. E neste aspecto o que significa dizer que está próximo?</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



Concordo em parte pois  $y$  fica realmente tão próximo de um valor que é tomado como ele e enquanto a limitar os valores de  $x$  não concordo muito pois  $x$  é tomado como um (um) número tão próximo que pode ser próximo tendendo ao infinito sem querer limitar-lhe.

**Figura 81:** Texto escrito pelo aluno AI1, em resposta à questão **c** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 2                                                                                         |                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                   | Análise                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite é um número do qual os valores <math>\epsilon</math> de uma</p> | <p>Este estudante discorda, mas não consegue explicar qual é a sua discordância.</p> |

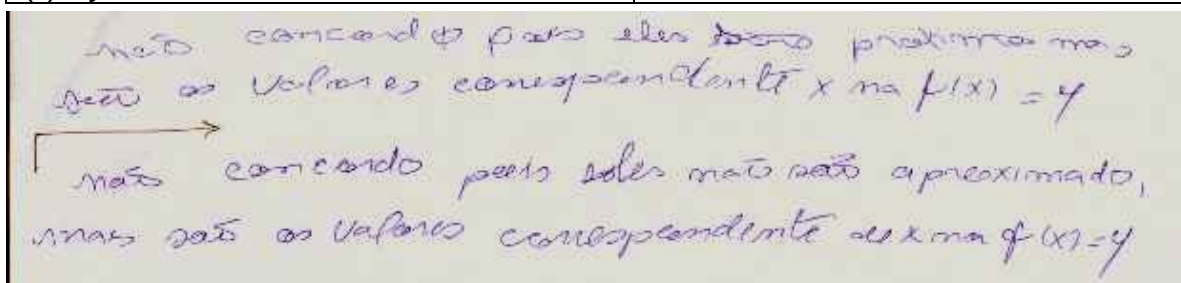
função  $\epsilon$  igual a função de  $x$  podem ficar... arbitrariamente próximos ao se limitar ao valor de  $x$ ?... Tem uma coisa errada aqui... O limite é um número... no qual os valores  $\epsilon$ . Certo... O limite de uma função... é o valor que ele vai atribuir os valores de  $\epsilon$  que é igual ao, função de  $x$ . Pode ficar arbitrariamente próximo. Não, não fica próximo... ao se limitar os valores de  $x$ ... Ai, Ai, Ai... uma coisa errada, não... não tem um número aqui... [inaudível] (...) Eh, eu acho errado, errado não concordo... Os números ficam próximos... mas são valores... que correspondem... a uma função de  $x$  que é igual a  $y$ ... Não concordo, pois... eles são, não, eles não... são... rapaz vai ter trabalho viu... Ela tá errada visse... não concordo pois eles não.. são próximos, mas são os valores correspondentes... Vou riscar aqui pode? (...) Certo.(...) Não concordo... pois ... [escrevendo].

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

não concordo pois eles são próximos mas são os valores correspondentes  $x$  na  $f(x) = y$

**Segundo momento**

não concordo pois eles não são aproximado, mais são os valores correspondente de  $x$  na  $f(x) = y$

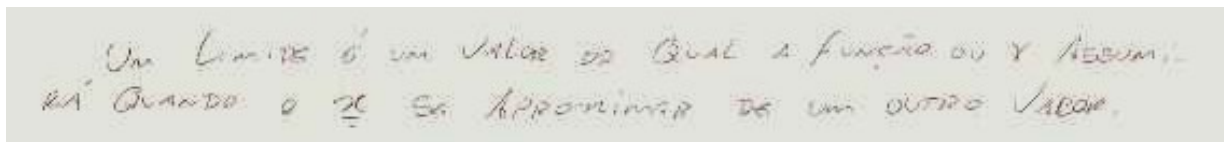


não concordo pois eles são próximos mas são os valores correspondentes  $x$  na  $f(x) = y$

não concordo pois eles não são aproximado, mais são os valores correspondente de  $x$  na  $f(x) = y$

**Figura 82:** Texto escrito pelo aluno AI2, em resposta à questão **c** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

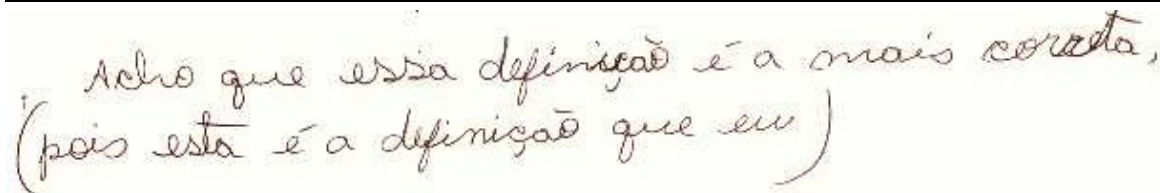
| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite é, é o, são valores que ipsilon e efe de xis podem assumir quando <math>x</math> tende a um determinado valor, o qual esse valor de <math>x</math> ele nunca alcançará.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Um limite é um valor do qual a função ou <math>y</math> assumirá quando o <math>x</math> se aproximar de um outro valor.</p> | <p>Como este estudante escreve outra afirmação, diferente da original, infere-se que ele não concorda com a afirmação anterior. E a diferença entre as duas afirmações é grande, uma vez que na afirmação original fala-se da variação de <math>f(x)</math> e na sua afirmação o aluno fala em valor fixo.</p> |



Um Limite é um valor do qual a função ou  $y$  assumirá quando o  $x$  se aproximar de um outro valor.

**Figura 83:** Texto escrito pelo aluno AI3, em resposta à questão **c** acima, durante a sessão de resolução de problemas

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> [Relê o enunciado por três vezes] Acho que essa aqui é a definição mais correta até agora. É a mais correta pois esta é a definição que ... guarda isso aqui.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Acho que essa definição é mais correta, (pois esta é a definição que eu)</p> | <p>Este estudante concorda com a afirmação e acha que é a que guarda mais relações com o que ele pensa.</p> |



Acho que essa definição é a mais correta, (pois esta é a definição que eu)

**Figura 84:** Texto escrito pelo aluno AI4, em resposta à questão **c** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Deixe ver se eu compreendi, certo! (repete a leitura da questão). Pra mim isso é uma verdade. Agora como explicar isso, aí é que é o problema. Deixa ver. ... bem o comentário é esse, é que o comentário acima mostra uma definição, uma definição para limite, né! ... Pelo que eu tou vendo assim (balbucia repetindo uma parte da questão, próximos ao se limitar os valores de <math>x</math>) porque quando vai, quando se limita o valor para <math>x</math> então a gente vai tendo os valores próximos né! Arbitrariamente para <math>y</math> né! ... Eh o ... meio capenga mais tá indo.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>O comentário acima mostra uma definição de limite.</p> | <p>Este estudante acha a definição a que mais se aproxima da definição formal de limite. Garantindo-se algumas condições que dêem uma melhor precisão à resposta tais como as vizinhanças de <math>x</math> e de <math>f(x)</math>, de fato teremos essa afirmação mais próxima da definição de limite.</p> |

O COMENTÁRIO ACIMA MOSTRA UMA DEFINIÇÃO DE LIMITE.

**Figura 85:** Texto escrito pelo aluno AI5, em resposta à questão c acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Análise                                                                                                                         |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É realmente. Aqui, assim, arbitrariamente...tá muito relativo né, você que um...quando você quer procurar um valor limite, você tem que procurar um valor muito próximo daquilo. Se jogar um negócio arbitrário que tem que tá, distante meio relativo, forma de arbitrário. [ele reler]. Concordo também.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>Concordo com a definição colocada.</p> | <p>Este estudante concorda, porém comenta a necessidade de garantia da vizinhança de <math>x</math> e de <math>f(x)</math>.</p> |

*Trabalhando com a definição*

**Figura 86:** Texto escrito pelo aluno A16, em resposta à questão acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É rapaz esse negócio está muito complicado [ reler o enunciado]. Rapaz eu não posso ajudar muito não. Sei lá esta me dando, esta misturado. O que eu sei eu já disse. Após reler diz: acho que até chegar naquele valor ali, assim, colocar o limite é o valor de xis(..) É com o estado arbitrariamente próximo, eu acho que pode até chegar até determinado valor. Valores de <math>y</math>, não porque valores de <math>y</math> realmente não podem que são, porém não estar determinado, e você não quer uma ... que negócio estranho. Eu digo uma coisa aí depois contradigo e depois afirmo e fico eternamente na dúvida. (...) Eu acho em tese, aí você fica, alguém pergunta e o professor qual a função do professor?[ risos] (...) Eu fico eternamente pensando mas geralmente os professores não. Eu acho que está certo também. Deve estar próximo porque <math>y</math> o valor da função para o valor de xis. Que uma função é quando uma variável depende da outra, você tem o valor de xis você tem o valor da outra. Nem sempre pra todo valor de xis você tem um correspondente em <math>y</math>, mas você pode usar o limite pra achar como <math>y</math> se aproxima de outro valor. Então, pode até chegar no valor, mas arbitrariamente próximo e xis também chegar ao valor determinado, sabe. E mais uma vez só fiz riscar o papel,</p> | <p>Este estudante observa que “Nem sempre pra todo valor de xis você tem um correspondente em <math>y</math>, mas você pode usar o limite pra achar como <math>y</math> se aproxima de outro valor”. Isto dá uma dimensão de que nem sempre <math>x</math> pode estar no domínio da função e neste caso não se tem o valor da função naquele ponto, mas que quando se verifica o limite é possível determinar se aquele ponto terá imagem.</p> |

estragar uma folha.(...) Não!

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Obs: Desenha um plano cartesiano, porém não escreve mais nada.

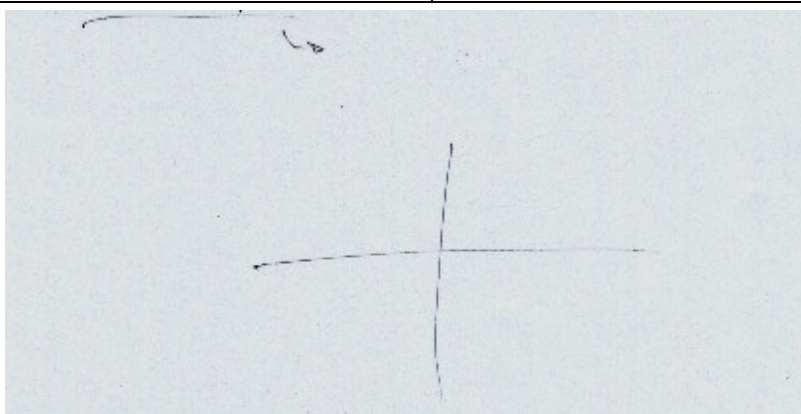


**Figura 87:** Representação gráfica produzida pelo aluno A17, na resposta à questão **c** acima, durante a sessão de resolução de problemas.

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é um número do qual os valores <math>\epsilon</math> de uma função podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar. ... Vou repetir um limite é um número do qual os valores <math>\epsilon</math> de uma função podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de <math>x</math>. (...) Nesta questão ele quer saber o que? É exatamente isso, mesmo. ... Essa questão aqui. Ele diz aqui, o limite é um número do qual os valores <math>\epsilon</math> de uma função pode ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de <math>x</math>. Quer dizer, a tendência é que você jogar, a tendência é que você jogar um <math>x</math>, um valor, um <math>x</math> na função, reduzindo esse <math>x</math> o máximo até ele chegar naquele ponto ele vai tender exatamente para o valor limite. Aí o que é que eu faço, faço isso, escrevo isso aqui?</p> | <p>O estudante em tela concorda com a versão dada, e na sua afirmação utiliza uma concepção heurística de movimento ao afirmar que “a sua função vai andar até chegar ao limite”. A sua abordagem está dimensionada na perspectiva de uma vizinhança pequena em torno de <math>x</math>, e que isso possa lhe garantir uma vizinhança bem próxima de <math>f(x)</math>, isto pode ser observado ao afirmar que “a tendência é que você jogar um <math>x</math>, um valor, um <math>x</math> na função, reduzindo esse <math>x</math> o máximo até ele chegar naquele ponto ele vai tender exatamente para o valor limite.”.</p> |



|                                                                                                                     |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b>                                                                          |  |
| é isso, quando você aproxima ao numero de x por números muito próximos a sua função vai andar até chegar ao limite. |  |

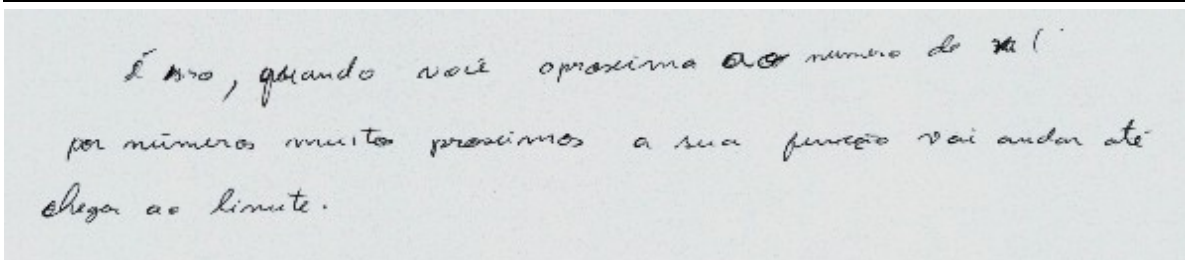


**Figura 88:** Texto escrito pelo aluno A18, em resposta à questão c acima, durante a sessão de resolução de problema.

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                      |
| <b>Produção oral do aluno:</b> [lê a afirmação duas vezes] Concordo porque ... atingirá .... o valor ...determinado por xis ... ficando apenas ... nas proximidades.<br><br><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br>Concordo pq a função nunca atingirá o valor determinado por x ficando apenas nas proximidades. | Este estudante concorda, utilizando a perspectiva de que o limite nunca é atingido. Contrária inclusive à sua perspectiva anterior de convergência a um valor de referência. |

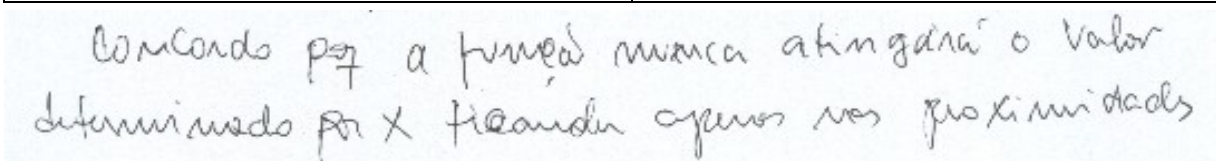


**Figura 89:** Texto escrito pelo aluno A19, em resposta à questão c acima, durante a sessão de resolução de problema.

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Produção oral do aluno:</b> Ah, é que ele fala com relação aos pontos, se eu quero aproximar duas funções “podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de x.” Acho que isso aqui ele está falando em relação a você tender uma função para um ponto, né. Por exemplo, você tentar tender uma função a zero fazer com que o limite tenda a | Este estudante traduz a assertiva analisada como se o proponente estivesse querendo dizer que a função tende para um ponto. Mas, ele vislumbra limite de uma função em uma perspectiva geométrica de movimento, como a trajetória de uma |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>zero e com isso você aproximar <math>x</math> e <math>y</math>, porque para cada valor de <math>x</math>is você tem um correspondente <math>y</math> mas eu realmente não entendo não, eu não entendo assim não. Eu entendo limite basicamente como sendo a descrição da trajetória de uma partícula sobre uma curva assim fica mas fácil para mim entender. É o desenho que a partícula está fazendo num determinado ponto você determina os pontos e ali você consegue traçar a trajetória e essa trajetória é que vai dar o limite pelo caminho que ela faz. Eu não consigo entender com sendo números, ou simplesmente um número. Eu até entendo o que ele diz aqui que é aquele negócio que a gente sempre faz no segundo grau, primeiro e segundo grau, você pega uma função tipo <math>f(x) = 2x</math> onde <math>y = f(x)</math> e você traça uma tabela bota quando <math>x</math>is for dois, por exemplo, você resolve a função e teria que <math>y</math> é igual a quatro, quando <math>x</math>is fosse três você teria que <math>y</math> é igual a seis. Eu até entendo ficaria sempre como uma função de razão dois mas eu não vejo, eu não consigo entender quando ele fala assim “é um número”, eu consigo entender como a trajetória numa curva você tem um gráfico <math>x</math>is <math>y</math> e para cada ponto de <math>x</math>is você tem um ponto correspondente em <math>y</math> e a medida que esses pontos se aproximam ou se afastam em determinados valores, positivos ou negativos, você vai ter uma trajetória uma coisa que tem uma cara, seria você dar uma cara você dá um determinado... você dá uma cara para o “bicho”. Você não diz uma função é isso ela faz isso. Mas porque ela faz isso? Porque como os valores de <math>x</math>is estão crescendo desse jeito os valores de <math>y</math> estão crescendo desse jeito porque eles têm uma relação. Mas eu não entendo assim não eu entendo sempre como sendo a trajetória da partícula na curva e o limite é o que vai dizer que em determinado ponto</p> | <p>partícula, desenhando inclusive o gráfico que representaria essa trajetória. Essa perspectiva sempre aparece em virtude que o seu conceito de limite é o de derivada de uma função.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

xis, como ele fala, ela vai estar num ponto y, seria uma coisa mais ou menos assim. Três em xis seis, quatro em xis oito, e você teria sucessivas seqüências de números que vai descrever qual é realmente a trajetória que a curva faz. Eu consigo entender mais facilmente quando eu digo que o limite ... pode dizer também que a curva está numa função. Você está calculando a trajetória que a função está fazendo em determinados pontos, determinado instante. [escreveu : "Um limite quando se calcula para uma função estamos calculando em que posição a partícula que tem uma função determinada se encontra em um determinado momento."

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Um limite que do (quando) se calcula para uma função, estamos calculando em que posição a partícula que tem uma função determinada se encontra em um determinado momento.

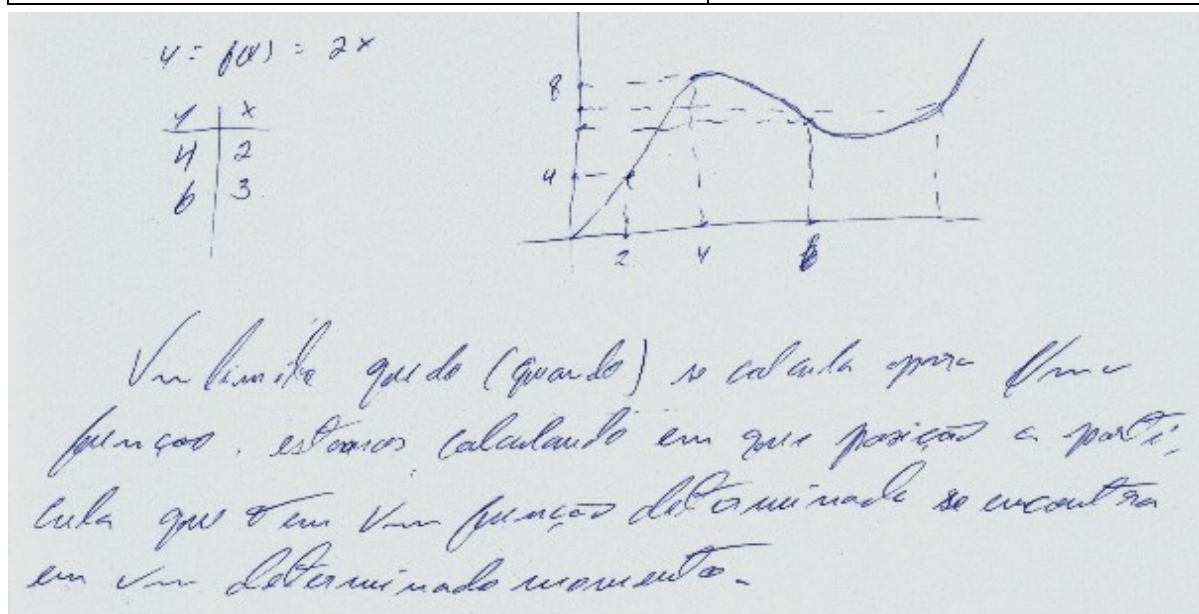


**Figura 90:** Texto escrito pelo aluno AI10, em resposta à questão c acima, durante a sessão de resolução de problemas.

De forma semelhante ao que se fez para a questão anterior, apresentamos abaixo dois quadros-resumo, que auxiliam a interpretação mais global das produções dos sujeitos: o primeiro quadro diz respeito à questão 4, item c, enquanto que o segundo quadro reproduz (para a comodidade do leitor) a análise proposta para a questão 1, de forma a serem evidenciadas relações entre um momento e outro da atividade de resolução de problemas dos sujeitos.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                              | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                                 | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Concorda com o conceito que um limite é um número do qual os valores $y$ de uma função $y = f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de $x$ .     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Não concorda com o conceito que um limite é um número do qual os valores $y$ de uma função $y = f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de $x$ . |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 13:** Resumo da **Questão 4c**, análises dos estudantes do conceito de limite dado por um aluno fictício.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                          | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                             | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível                                                                                                                                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira                                                                                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor:                                                                                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como tendência a um valor de referência                                                                                                                           |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e épsilon (distância de $x$ ao ponto limite, e de $f(x)$ ao valor limite, respectivamente) |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo da **Questão 1**, sobre conceptualização de limites, desenvolvida pelos alunos entrevistados, durante a sessão de resolução de problemas

No **Quadro 13** acima estão representados os posicionamentos dos dez alunos pesquisados em relação à afirmação apresentada na questão acima, sete

estudantes afirmam concordar com a assertiva apresentada de que *Um limite é um número do qual os valores  $y$  de uma função  $y = f(x)$  podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de  $x$ .*

Bom essa afirmação é ambígua, ao se dizer *ao se limitar o valor de  $x$* . Talvez o melhor fosse dizer *ao se aproximar do valor de  $x$* . Por quê, o fato é, quando se limita o valor de  $x$ , pode-se limitar por um intervalo muito grande. Mas, o conceito de limite é estabelecido tomando-se um intervalo pequeno em torno de  $x$ , não para uma limitação muito grande. Então, ao se falar em limitar os valores de  $x$ , é porque deve se estar pensando em valores muito próximos de  $x$ , pelo menos isso deve ficar bem claro.

Outra questão diz respeito a *os valores de  $f(x)$  poderem ficar arbitrariamente próximos*, próximos do que? Do limite, presume-se. Todavia o que pode acontecer se o limite não existir? Neste caso  $y$  não poderá estar próximo. E, se acontecer o limite ser mais infinito (ou, menos infinito)? O, que significará ficar próximo de mais infinito (menos infinito)?

Olhando-se o **Quadro 5** logo abaixo vê-se que dentre estes o aluno A17 apresentava uma perspectiva do limite de uma função como sendo algo inatingível. Dos três que não concordaram com a afirmação o estudante A12 tinha a percepção do limite de uma função como uma aproximação para um valor de referência. É possível perceber também, verificando os argumentos utilizados por estes sujeitos, que muitos intuem idéias que abrangem tanto o ponto de vista estático quanto cinético para o conceito de limite de função.

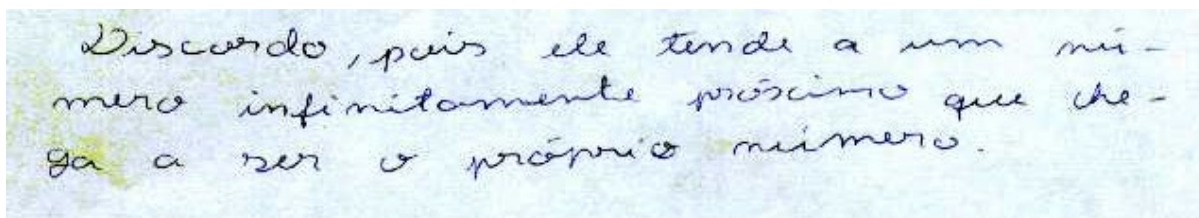
Com relação ao primeiro aparecem abordagem estático-numérica quando se fala do limite como tendência a um número ou um ponto (A15: *porque quando vai, quando se limita o valor para  $x$  então a gente vai tendo os valores próximos né!*

*Arbitrariamente para y né!) ou a um valor que pode ser assumido pela função (AI3: O limite é, é o, são valores que epsilon e epsilon de xis podem assumir quando x tende a um determinado valor). E também a perspectiva estático-geométrica quando o estudante afirma que (AI10: Eu entendo limite basicamente como sendo a descrição da trajetória de uma partícula sobre uma curva assim fica, mas fácil para mim entender).*

Do ponto de vista cinético tem-se o caráter cinético geométrico (AI10: *É o desenho que a partícula está fazendo num determinado ponto você determina os pontos e ali você consegue traçar a trajetória e essa trajetória é que vai dar o limite pelo caminho que ela faz*) e o caráter cinético-numérico (AI8: *quando você aproxima ao numero de x por números muito próximos a sua função vai andar até chegar ao limite*).

**Questão d:** Um limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança.

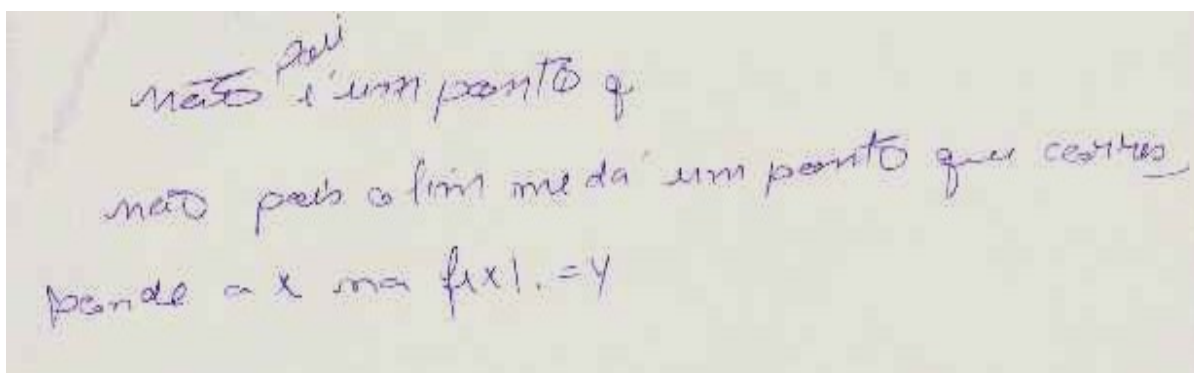
| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Análise                                                                                                                                               |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança. ... Um limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança. ... Discordo. ... Desde o segundo grau tem um, um negócio para você fazer PG. Tem uma soma de uma PG infinita? ... Quer dizer que 0,9999... era igual a 1. Ele provava de, duas três maneiras que esse número era igual a 1. Então, discordo. Posso discordar?</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Discordo, pois ele tende a um número infinitamente próximo que chega a ser o próprio número.</p> | <p>Este estudante discorda que o limite nunca seja alcançado “pois ele tende a um número infinitamente próximo que chega a ser o próprio número”.</p> |



Discordo, pois ele tende a um número infinitamente próximo que chega a ser o próprio número.

**Figura 91:** Texto escrito pelo aluno A11 referindo-se à questão d acima.

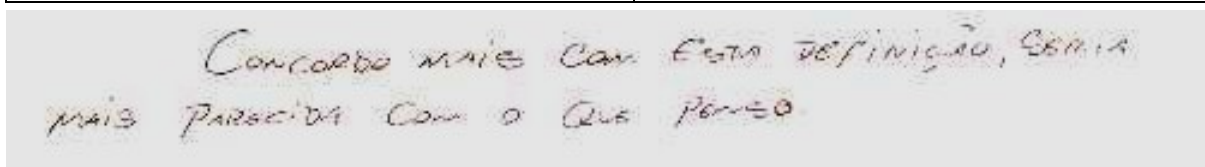
| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança? Não, tá errado!... Se eu for ver, então eu tou todo errado ou então o pessoal está todo errado, não entendo não Acho que eu estou errado, não? (...)Acho que limite é um ponto exato para aquele xis em ipsilon. Aí o pessoal diz aqui.não o número se aproxima mais não chega. Aqui, não o número agora nunca vai alcançar aquele número ali. Vamos dizer o que é o xis realmente? O limite... O que é o limite? É um ponto ou não é? Tá entendendo? (...) Não, vou botar isso aqui. Não, porque limite é um ponto...Aí depois você diz tá tudo errado, aí eu...(.) Aí por exemplo meu conceito primeiro agora não tem nada haver com que eu estou falando agora. Se eu for ver aqui está tudo errado.(...) Se eu for refazer...(.) Engraçado como a memória volta né porque eu estou botando coisa aqui que eu nem imaginava e agora primeiro eu vejo que não tem nada a ver o que falei... Não, é um ponto... não... pois... é um ponto que corresponde a xis... agora deu problema viu.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>não pois é um ponto q<br/>         não pois o <i>lim</i> me dá um ponto que corresponde a <math>x</math> na <math>f(x) = y</math></p> | <p>Este estudante discorda, pois na sua perspectiva "(...) limite é um ponto exato para aquele xis em ipsilon (...) " o que esta compatível com o seu conceito de limite de uma função.</p> |



não é um ponto q  
 não pois o lim me dá um ponto que costuma  
 pode a x mas fixl. = y

**Figura 92:** Texto escrito pelo aluno AI2 referindo-se à questão d acima

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Eu acho que, aqui eu concordo com ela. ... Se eu colocar aqui entre parêntesis você vai pensar que tá , tá errado né! Oh, desculpe!</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>         Concordo mais com esta definição, seria mais parecida com o que penso</p> | <p>Este aluno concorda, pois, para ele, o conceito de limite que foi dado "(...) seria mais parecida com o que penso". E realmente está compatível com um dos conceitos de limite que o referido estudante apresentou, o limite como algo inatingível.</p> |



Concordo mais com esta definição, seria mais parecida com o que penso

**Figura 93:** Texto escrito pelo aluno AI3 referindo-se a questão d acima

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Certo pela definição é isso aqui também. Ele diz que o limite fica bem próximo do dois, mais que não chega a dois, mais esses valores substituem os valores de dois. Essa parte, entendeu o que eu disse? (...) Ele tá dizendo que o limite é um número ou ponto no qual a função se aproxima mais, nunca se alcança. Se eu tivesse uma <math>f(x)=3x+2</math>, se ele quer limitar essa função. O limite de <math>f(x)</math> quando <math>x</math> tender a dois por exemplo eu colocaria aqui dava seis mais</p> | <p>Este estudante discorda do fato de na afirmativa parecer que o limite da função "nunca alcança" o número ou o ponto dado. E vai muito, além disso, fornece um contra-exemplo para ilustrar e ratificar a sua afirmação. E o contra-exemplo utilizado, muito bem empregado, ratifica a sua resposta.</p> |

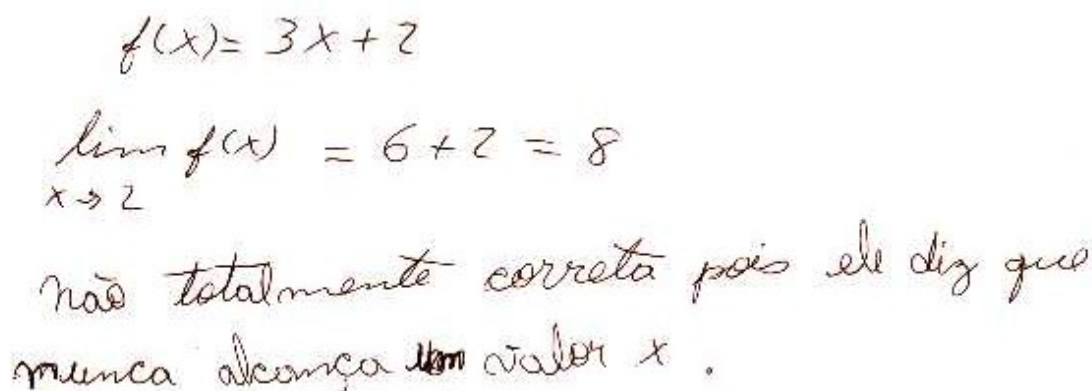
dois seria oito. Eu não sei como é que a pessoa diz que chega bem próximo de dois mais não é dois se substituiu o valor de dois.(...) Porque, o denominador não tem um número aí para anular então agente pega direto.(...) Aí eu não usaria, acharia assim tão correto porque ele disse mais nunca alcança. Não está bem correto, não está totalmente correto. Ele diz nunca alcança o valor de xis.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

$$f(x) = 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 + 2 = 8$$

não totalmente correta pois ele diz que nunca alcançará um valor x.



$f(x) = 3x + 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 + 2 = 8$

não totalmente correta pois ele diz que nunca alcança um valor x.

**Figura 94:** Texto escrito pelo aluno A14 referindo-se a questão d acima

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Análise                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Assim. Realmente seria os limites laterais, né! Tendem ... a se aproximar, mas nunca é o próprio ponto, né! Sempre perto, mas nunca o ponto. Mas deixe ver o que é que eu posso comentar sobre isso (balbuciando) ... Pensando como é que eu posso mudar porque isso aqui realmente faz parte do conceito de limite, né! Porque você tá tendendo sempre a chegar num valor ou num</p> | <p>Este estudante concorda com a afirmativa dada, e os argumentos utilizados para justificar a sua decisão prendem-se ao fato deste estar pensando no limite de função como algo inalcançável, o que inclusive contrapõe à sua concepção inicial sobre limite.</p> |



ponto porém não é aquele ponto, nunca vai ser ele, porém vai tender a ele. São valores sempre próximos, né! Aí então deixa ver. Vou botar assim, isso ... é uma ... verdade ... pois ... pois um limite será sempre ... um número ou ponto eeeh ... onde ele sempre se aproxima, mas nunca é aquele ponto ou número determinado ...(...) Aqui não, agora...sim.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Isso é uma verdade pois um limite será sempre um número, onde ele se aproxima, porém nunca é o número ou ponto em questão.

ISSO É UMA VERDADE POIS UM LIMITE SERÁ SEMPRE UM NÚMERO, ONDE ELE SE APROXIMA, PORÉM NUNCA É O NÚMERO OU PONTO EM QUESTÃO.

**Figura 95:** Texto escrito pelo aluno A15 referindo-se a questão d acima

| <b>Aluno Informante 6</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resposta</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>Análise</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vai existir ponto em que se ela alcançar ela não vai existir. c. No caso você tem que aproximar para que evite que fique com zero pelo menos no denominador.[ relê em tom baixo] Nem sempre, eu acho também. Nem sempre haverá situações em que alcançará.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Nem sempre haverá situações em que alcançará.</p> | <p>O estudante concorda com a afirmativa, e faz algumas reflexões para justificar. “<i>Nem sempre haverá situações em que alcançará</i>”, com relação a esta podemos pensar aqui no caso da função constante, na qual o limite será “sempre alcançado”; “<i>Vai existir ponto em que se ela alcançar ela não vai existir</i>”, podem-se pensar aqui nos limites laterais, em que os limites laterais existem e são finitos, porém são diferentes, neste caso os limites não vai existir; “<i>É ficar uma função determinada zero sobre zero</i>”, aqui está contraditório, pois o fato de no limite aparecer uma indeterminação do tipo</p> |

|  |                                                                                                                                                           |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | citada, não implica que o limite não exista ou não seja alcançado, pois ao se eliminar a indeterminação pode-se encontrar um limite, por exemplo, finito. |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

*Nem sempre haverá situações em que alcançamos*

**Figura 96:** Texto escrito pelo aluno A16 referindo-se a questão d acima

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Rapaz estou me saindo muito ruim em todas elas posso até mudar de curso.(...) Efe de xis igual a y, ou y igual a efe de xis. Nesse estou com tudo. Pode ser um valor. Mais se nunca alcança é bem apropriado como é que eu posso dizer que xis tende a um menos um de uma função que tenha como denominador ... quando xis se aproximando, pode ser que nunca alcance.(...) Para determinadas funções o limite de xis sobre y menos um da função é um ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança. Limite deve ser isso, estou me esquecendo do significado dessa palavra.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> $f(x) = y \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ $y = f(x)$ <p>Para determinadas funções o limite <math>\frac{x}{x-1}</math> da função é um ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança.</p> | <p>Este estudante utiliza como justificativa argumentativa –e essa sua resposta está de acordo com a concepção que ele mostrou sobre o limite de função-, a função do tipo <math>\frac{x}{x-1}</math>, em que no ponto <math>x = 1</math> o denominador fica igual a zero. De fato, neste caso particular, o limite não vai existir, porém se tomar para mesma função o limite quando <math>x</math> tende a zero, o limite será zero.</p> |

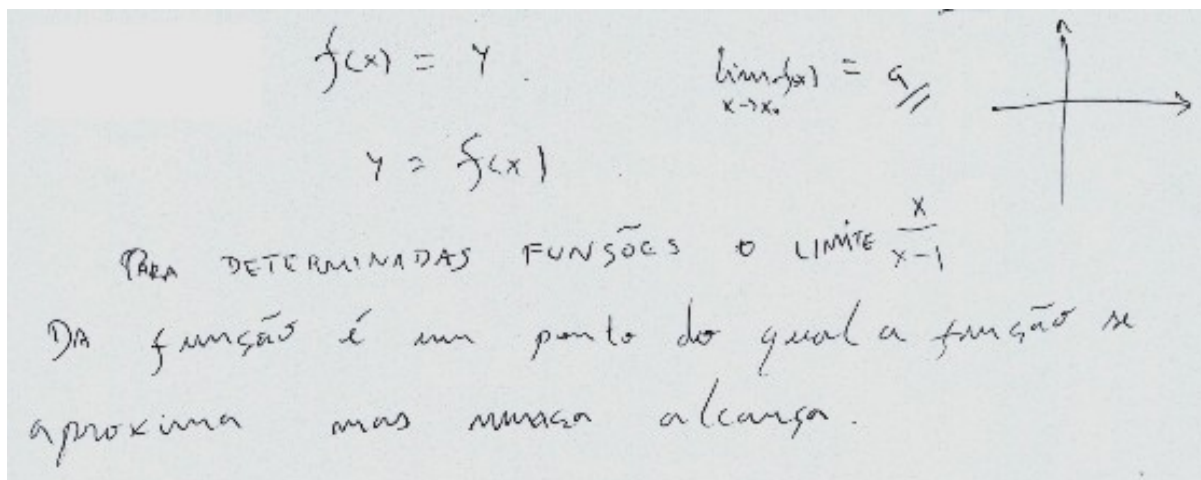


**Figura 97:** Texto escrito pelo aluno A17 referindo-se a questão d acima

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Ele é um ponto do que a função se aproxima mais nunca alcança. Essa é a resposta. Ele é mais é um número né? Ele é o ponto do qual a função se aproxima, ele é o ponto, espere aí, espere aí, o ponto está aqui. Então, o limite tende pra aquele número, certo. O limite tende pra aquele número só que... naquele ponto do xis, ele naquele ponto xis, [ele repete refletindo] ele é o ponto o ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança, ...é isso mesmo ele é o limite. Ele é o ponto na função.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>limite é <math>\rightarrow</math></p> <p>é um número (ele) é um ponto no a função se limite aproxima mas nunca alcança.</p> <p>Mas agente sabe o seu valor limite (número).</p> | <p>Há uma concordância por parte do estudante com a afirmação feita. As concepções que este aluno tem de limite -olhando-se o conceito dado por ele-, é do limite de uma função como aproximação a um valor de referencia, no entanto pensa que, “ele é o ponto o ponto do qual a função se aproxima, mas nunca alcança,... é isso mesmo ele é o limite”.</p> |

limite é  $\rightarrow$   
 é um número (ele) é um ponto no a função se limite  
 aproxima mas nunca alcança.  
 mas agente sabe o seu valor limite - (número).

**Figura 98:** Texto escrito pelo aluno A18 referindo-se a questão d acima

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Concordo basicamente porque foi o que eu disse anteriormente.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>           Concordo pq foi a minha opinião na resolução da questão anterior.</p> | <p>A sua afirmação como ele mesmo diz está de acordo com a resposta que deu na questão c, anterior, "concordo pq a função nunca atingirá o valor determinado por <math>x</math> ficando apenas nas proximidades". Para ele, como decorrência do limite da função ficar nas proximidades esse limite nunca será atingida.</p> |

Concordo pq foi a minha opinião na  
 resolução da questão anterior

**Figura 99:** Texto escrito pelo aluno A19 referindo-se a questão d acima

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Isso aqui é engraçado porque você tem : "um limite é um número ou ponto do qual se aproxima mas nunca alcança." É porque... Eu acho que é aquele negócio de aproximar, é porque a função ela tende para aquele número mas ela nunca alcança. Isso aí também ninguém nunca explicou não. Ou se me explicou eu não lembro. Eu posso até estar sendo injusto com os professores mas eu não creio que ninguém tenha me explicado porque não</p> | <p>Existe uma concordância do estudante com o conceito postulado, pois, embora tenha uma compreensão de que a aproximação ao limite se dá observando o comportamento de "<math>f(x)</math>" à medida que a variável "<math>x</math>" fica bem próxima do ponto (o número) para o qual está se aproximando. Observemos o que é declarado "<i>Ela tende àquele ponto, ela tende com valores positivos, ela tende com valores negativos, você tem o elemento se aproximando pela direita, pela esquerda</i>".</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>alcança esse número. Mas ele tende para aquele número e qual é o limite quando ele tende para aquele número? O que você tem é bem engraçado você tem limite de dois xis quando xis tende pra um, por exemplo, aí o limite nesse ponto um ele é dois mas isso não quer dizer que a função não necessariamente ninguém nunca me explicou claramente se a função realmente nunca chega àquele ponto dois, mas ela tem uma tendência a chegar lá porque ela tende a chegar em um, essa função ela tende a um quer dizer quando ela tende a um é o limite quando dois xis tende a um seria dois mas eu não sei se necessariamente se ela chega. Então eu diria realmente eh, um número é uma função que realmente se aproxima mas nunca chega realmente. Eu deixaria do jeito que está aqui. Ninguém nunca me explicou, e se explicou eu não sei porque não alcança, se alcança. Não lembro se ela nunca realmente se aproxima do ponto. Mas... realmente ela tende. Ela tende àquele ponto, ela tende com valores positivos, ela tende com valores negativos, você tem o elemento se aproximando pela direita, pela esquerda. Mas eu não sei dizer se realmente ela alcança, e se ela não alcança porque não alcança mas é realmente assim mesmo quando eles dão.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2</math></p> <p>Não lembro se ela nunca realmente se aproxima do ponto.</p> | <p>Contudo, apesar de ter percebido esse fato e de ter dado um contra exemplo que lhe permitiria tirar a dúvida sobre a afirmação, não consegue concluir, sem essas dúvidas, do que o limite de uma função “<i>Mas eu não sei dizer se realmente ela alcança, e se ela não alcança porque não alcança, mas é realmente assim mesmo quando eles dão</i>”.<sup>1</sup></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

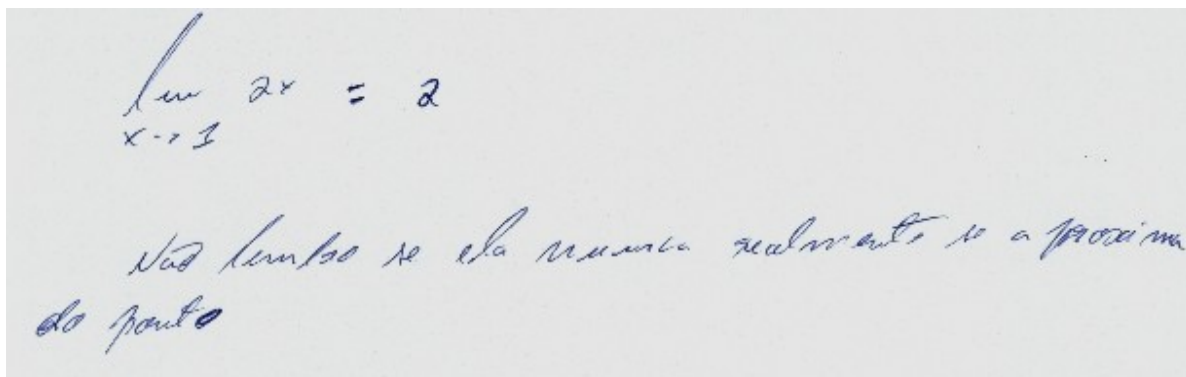


**Figura 100:** Texto escrito pelo aluno A110 referindo-se a questão d acima

Apresentamos abaixo, como das vezes anteriores, dois quadros-resumo, que auxiliam a interpretação mais global das produções dos sujeitos: o primeiro quadro diz respeito à questão 4, item d, enquanto que o segundo quadro reproduz (para a comodidade do leitor) a análise proposta da atividade de resolução de problemas dos sujeitos para a questão 1, de forma a serem evidenciadas relações entre um momento e outro da atividade de resolução de problemas dos sujeitos.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                    | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                       | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Concorda que o limite é um número ou um ponto do qual a função se aproxima, mas nunca alcança.     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Não concorda que o limite é um número ou um ponto do qual a função se aproxima, mas nunca alcança. |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 14:** Resumo da **Questão 4d**, análises dos estudantes do conceito de limite dado por um aluno fictício.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                           | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                              | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível.                                                                                                                                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira.                                                                                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor.                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como aproximação a um valor de referência.                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e épsilon (distância de $x$ ao ponto limite, e de $f(x)$ ao valor limite, respectivamente). |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função.                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo da **Questão 1**, sobre conceptualização de limites, desenvolvida pelos alunos entrevistados, durante a sessão de resolução de problemas

Com relação a esta questão *Um limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima, mas nunca alcança* aparecem duas incoerências, a primeira é que nem sempre o limite é um número, já que o limite de uma função real, a uma variável real, poderá ser mais (ou, menos) infinito, que não é um número real.

A segunda reside no fato do limite nunca ser alcançado. Se tomarmos por exemplo uma função constante  $f(x) = K$ ; sendo  $K$  um número real, qualquer que seja o número real  $x$  a sua imagem pela  $f$  será sempre  $K$ . Assim sendo, o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ , qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$  ( $a$  é um número real).

Em virtude do que foi apontado nos dois parágrafos anteriores vê-se que, a ausência de alguns elementos, como os que foram abordados, neste conceito podem promover um conflito cognitivo no estudante a respeito do seu próprio conceito de limite de função. Um exemplo disto está presente, por exemplo em um dos argumentos utilizados por o aluno AI10 quando da sua justificativa com relação à concordância com este conceito de limite abordado acima, AI10: *Ela tende àquele ponto, ela tende com valores positivos, ela tende com valores negativos, você tem o elemento se aproximando pela direita, pela esquerda. Mas eu não sei dizer se*

*realmente ela alcança, e se ela não alcança porque não alcança mas é realmente assim mesmo quando eles dão*, este aluno inclusive dá um contra exemplo para a questão -  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$  - que poderia dirimir as suas próprias dúvidas, mas não foi assim que aconteceu.

No **Quadro 14** acima, relativo a **Questão 4d**, a maioria dos estudantes (sete estudantes) concorda com o conceito de função que é dado. Alguns desses alunos apresentam conflitos cognitivos em relação às concepções que têm com relação ao conceito de função, como é o caso do aluno AI10, citado acima. Estes conflitos estão relacionados às crenças apresentadas por estes estudantes sobre o conceito de limite de função de uma variável, como é possível observar no quadro um abaixo do primeiro. Estas concepções promovem o desenvolvimento de obstáculos que, na maioria das vezes, impedem que esse estudante possa inclusive apresentar soluções para o limite de funções, compatíveis com a função que está sendo, por ele, analisada.

Com relação aos três estudantes que discordaram da assertiva acima o estudante AI4 mostra na sua justificativa uma boa compreensão de uma das incoerências que aparecem no conceito apresentado como solução. Inclusive apresentando um contra exemplo que contradiz a afirmação de que *função se aproxima mas nunca alcança*, este contra exemplo é a função do primeiro grau  $f(x) = 3x + 2$ , a qual  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 + 2 = 8$ .

O estudante AI1 aproxima-se de uma boa justificativa ao analisar que o limite da função depende da variável  $x$ , se esta variável tem de se aproximar do número por valores muito próximos a esse número, quando diz que *pois ele tende a um número infinitamente próximo que chega a ser o próprio número*.



**Questão e:** Um limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar.

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar. ... Um limite é uma aproximação ... que pode se tornar tão exata quanto você desejar. ... Eu penso logo num gráfico de uma área, quando você ... faz essa área assim, intervalos tão pequenos, infinitamente pequenos que esse negócio dá exatamente a área que você procura. Então, o limite é a aproximação tão exata de quanto você desejar. ... Limite é uma aproximação tão exata quanto você desejar [refletindo em voz alta]. Eu con... discordo também...</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Discordo, pois ela não pode ser considerada uma simples aproximação e sim se tomada como um (infi   número infinito se torna o próprio número.</p> | <p>Este estudante discorda e utiliza como argumento para discordar o conceito da área sob o gráfico de uma função “<i>Eu penso logo num gráfico de uma área, quando você... faz essa área assim, intervalos tão pequenos, infinitamente pequenos que esse negócio dá exatamente a área que você procura</i>”, contudo esse exemplo contradiz a sua opção em discordar.</p> |

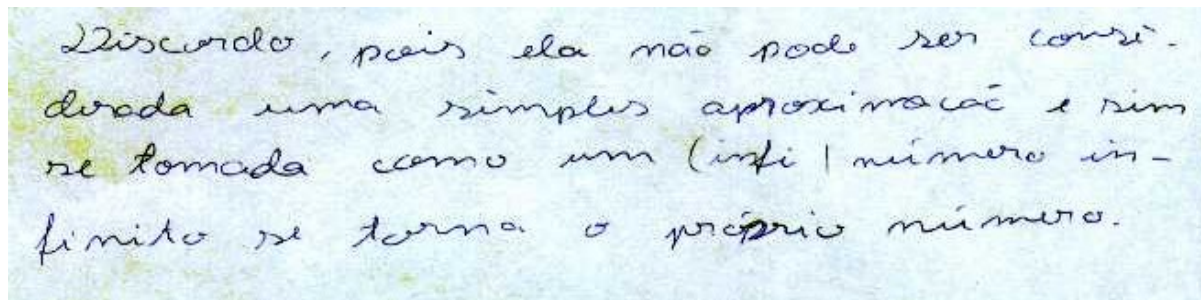


**Figura 101:** Texto escrito pelo aluno AI1 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 2                                                                                                                       |                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar. Não... Ele é uma exa,</p> | <p>A justificativa da pelo estudante para discordar da proposição feita está relacionada somente a semântica entre ser</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>ele não é uma aproximação que pode se tornar, ele é número exato quando ele representa... um ponto... como, como bati na tecla. Ele é um, representa um ponto em relação a xis. Se eu lhe der um ponto xis... eu tenho uma função... xis... que vai exercer exatamente ao meu limite de xis... Meu limite naquela função. Exato!... [inaudível] Exato... para função de xis.</p> <p><b><u>Texto escrito proposto pelo aluno:</u></b><br/>não, pois é um número exato para <math>f(x)</math>.</p> | <p>exatamente o limite de acordo com este aluno “é um número exato para <math>f(x)</math>”, e ser “tão exata quanto você desejar”.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Figura 102:** Texto escrito pelo aluno AI2 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Análise                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Acho que esse tão exata, ... acho que ela pode se aproximar o quanto você desejar, mas tão exata! Porque assim, acho que, exata não tem tão... Exata é exata e... Ela pode se aproxi... É um, um,um, ... uma aproximação que pode chegar a um ponto, a, a, um, um valor que seja satisfatório ao que você deseja.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b><br/>Um limite é uma aproximação que pode se tornar (tão) próximo quanto s) próximo o suficiente para satisfazer o que se deseja.</p> | <p>Este estudante apresenta uma discordância com o conceito dado somente em virtude da sua discordância em relação à palavra “exata” propondo substituí-la por “próximo o suficiente”.</p> |

**Figura 103:** Texto escrito pelo aluno AI3 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Análise                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é uma aproximação [inaudível]. Acho que essa parte aqui está errada. Ele disse que o limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você deseja. E o limite é um valor exato, eu acho. Agora eu acho deveria ser no lugar da palavra exata próxima seria a palavra próximo de um certo valor. Um valor desejado.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Eu acho que um limite é um valor exato. Agora eu acho que deveria no lugar da palavra exata seria a palavra próximo de um certo valor desejado.</p> | <p>Como os estudantes anteriores esse estudante discorda do conceito dado por a expressão usada “<i>tornar tão exata quanto você deseja</i>”.</p> |

*Eu acho que um limite é um valor exato. Agora eu acho que deveria no lugar da palavra exata seria a palavra próximo de um certo valor desejado.*

**Figura 104:** Texto escrito pelo aluno AI4 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É, minha resposta diretamente é não. Agora deixa eu ver porque não. ... (fica balbuciando) ... Porque você ... pode ter uma aproximação ... Bem, a minha resposta é não porque você pode tender a uma aproximação, mas não a um ponto exato.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Não, porque você pode ter uma aproximação mas não um ponto exato.</p> | <p>A discordância desse aluno em relação ao conceito vai além da questão relacionada a palavra “aproximação”, mas, também, com relação a expressão “tão exata quanto você deseja”, pois segundo a sua concepção o limite não pode assumir um valor exato. Isto é, o limite de uma função é inatingível.</p> |

NÃO, PORQUE VOCÊ PODE TER UMA APROXIMAÇÃO MAS NÃO UM PONTO EXATO.

**Figura 105:** Texto escrito pelo aluno A15 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Já é mais completa essa aqui. Essa aqui eu concordo. Vai depender da precisão que você necessita. Eu coloquei. Concordo pois haverá situação exata, em que você lança aquele valor direto e você vai obter a função e ela existe. Situação que você vai ter que aproximar pela direita pra que ela exista ou pela esquerda. Variar né, eu acho correta que mais completa essa definição.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>Concordo pois haverá situação exata próxima pela direita e pela esquerda.</p> | <p>A concordância, deste estudante, reside no fato de que se os limites laterais existirem e forem iguais, então o limite da função existe, ou no caso em que a função é contínua no ponto dado. Pode-se observar isto na leitura dos seus argumentos “Concordo, pois haverá situação exata, em que você lança aquele valor direto e você vai obter a função e ela existe. Situação que você vai ter que aproximar pela direita pra que ela exista ou pela esquerda. Variar né, eu acho correta que mais completa essa definição”.</p> |

*Concordo pois haverá situação exata, próxima pela direita e pela esquerda.*

**Figura 106:** Texto escrito pelo aluno A16 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Cada vez mais eu vejo que não sei de nada de limite. É realmente eu concordo. Se a função permitir ..... o limite é uma aproximação ... é exata. Eu acho que isso daqui independe da função. Um conceito muito errado. O limite de uma função depende de cada função ou é um conceito geral? (...) O que eu acho que tem uma coisa</p> | <p>Este estudante revela nas suas colocações vários aspectos que estão relacionados ao conceito de limite de uma função a uma variável, que são os seguintes: (1) “O limite de uma função depende de cada função”, isto é, a existência ou não do limite e o tipo de limite se finito ou não depende da função; (2) “Depende de que lado você vai também</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>errada, mas eu acho que depende da função, se não é uma função definida você pode achar o limite que pode até ser um valor exato pra isso e de xis, que você colocar direto na equação você encontra zero sobre zero, infinito menos infinito mais infinito. Depende de que lado você vai também tem isso. Então, mas funções ... que cortam né naquele ponto. Por exemplo xis igual a dois, polinômio por exemplo. Polinômio geralmente é definido em todos os pontos na função contínua, aliás polinômio sempre é definido em todos os pontos. Então, pra qualquer valor que você define, que você tender xis pra qualquer valor vai ter um valor exato pra y. Isso não acontece com todas as funções. Embora funções não definidas em certos pontos você fazendo o limite você já tem o valor exato. Então, aí já muda a idéia, incrível, acho que não tenho a definição exata eu só queria saber depois dessa entrevista qual o conceito de limite.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Se a função permitir o limite é uma aproximação ... é exata.</p> | <p>tem isso", a necessidade de serem verificados os limites laterais; (3) "<i>Polinômio geralmente é definido em todos os pontos na função contínua, aliás polinômio sempre é definido em todos os pontos</i>", a continuidade da função, ou seja, relação entre a continuidade de uma função e o seu limite; (4) "<i>Embora funções não definidas em certos pontos você fazendo o limite você já tem o valor exato</i>", uma função pode ter o seu limite determinado a menos da supressão da descontinuidade.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Se a função permitir o limite é uma aproximação exata.

**Figura 107:** Texto escrito pelo aluno A17 referindo-se à questão e acima

| <b>Aluno Informante 8</b>                                            |                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resposta</b>                                                      | <b>Análise</b>                                                                                                                                                                |
| <b>Produção oral do aluno:</b> Sim.                                  | O estudante concorda com a afirmação sem justificar. Se olharmos o quadro um abaixo veremos que a sua concepção de limite esta relacionada à aproximação a um ponto ou valor. |
| <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Sim.</p> |                                                                                                                                                                               |

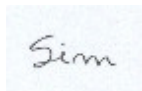


**Figura 108:** Texto escrito pelo aluno AI8 ao referir-se à questão e acima

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                  |                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                            | Análise                                                               |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Se aproxima mas não o quanto você desejar, né.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>Exato sim, mas não o quanto você deseja.</p> | O aluno não concorda em virtude da expressão “o quanto você desejar”. |

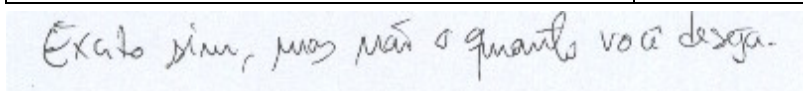


**Figura 109:** Texto escrito pelo aluno AI9 referindo-se à questão e acima

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> O professor falou uma vez sobre esse negócio : “Um limite é uma aproximação que se pode tomar tão exata quanto você desejar.” Eu acho que não tanto quanto você desejar não eu acho que é tanto quanto você necessita. Porque eu acho que é a série de Taylor que a gente estuda pra fazer essas aproximações. E eu acho que a série de Taylor aproxima até a quinta casa decimal, até a sexta, é viável calcular depois disso fica muito difícil. Ela não pode ser tão exata quanto você queira não ela pode ser tão exata tanto quanto necessário, você pode usar o limite pra calcular uma coisa exata a valores de, sei lá, três ou quatro casas decimais. Eu acho que isso aqui você calcula por série de Taylor. E ela realmente dá uma aproximação porque o próprio conceito da função, o limite de uma função dois xis ou três xis quando xis tende àquele número mas ele não chega não.</p> | Este estudante discorda, pois para ele o que se consegue obter é uma boa aproximação, dependendo dos métodos que se utiliza para obter o limite, nunca a exatidão. E reforça o seu argumento usando como exemplo a série de Taylor. |



Então você pode aproximar ele, por exemplo se o ponto for três você chega a dois vírgula oito, nove, sete, três... Mas realmente ela pode sim pode ser tão exata desde que você ... Desde que você utilize os métodos requeridos pode-se realmente ter uma boa aproximação.

**Texto escrito produzido pelo aluno:**

Desde que se utilize os métodos requeridos pode-se realmente ter uma boa aproximação.

**Figura 110:** Texto escrito do aluno A110 ao referir-se à questão e acima

De forma semelhante ao que se fez para a questão anterior, apresentamos abaixo dois quadros-resumo, que auxiliam a interpretação mais global das produções dos sujeitos: o primeiro quadro diz respeito à questão 4, item e, enquanto que o segundo quadro reproduz (para a comodidade do leitor) a análise proposta para a questão 1, de forma a serem evidenciadas relações entre um momento e outro da atividade de resolução de problemas dos sujeitos.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Concordo que um limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar.     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Não concordo que um limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar. |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 15:** Resumo da **Questão 4e**, análises dos estudantes do conceito de limite dado por um aluno fictício.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                          | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                             | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível                                                                                                                                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira                                                                                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como aproximação a um valor de referência                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e épsilon (distância de $x$ ao ponto limite, e de $f(x)$ ao valor limite, respectivamente) |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo da **Questão 1**, sobre conceptualização de limites, desenvolvida pelos alunos entrevistados, durante a sessão de resolução de problemas

No que diz respeito à afirmativa sobre o limite de função a uma variável de que “Um limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar”. Desde que o limite exista e seja finito isto é verdade. Essa alternativa é a que mais se aproxima do conceito formal de limite. Claro que existem diversas questões que devem ser observadas quando se dá o conceito dessa forma, como por exemplo: se o limite é finito; o intervalo que se está tomando para a variável em relação ao valor que a que esta variável está convergindo; o comportamento da função, isto é, como a função varia, com a variação da variável, e outras que já foram faladas anteriormente. Com relação a muitas dessas questões que foram abordadas por alguns desses estudantes -principalmente o estudante A17, que faz uma bela reflexão sobre o limite de uma função, pode-se ver no **Quadro 15**, acima, o resultado das suas avaliações do conceito de limite em tela. Somente três estudantes concordam com o conceito de limite de função dado, sendo que somente os dois primeiros fazem uma análise mais apurada do caso, como é possível observar em cada quadro acima que concerne às suas respostas. Aparecem



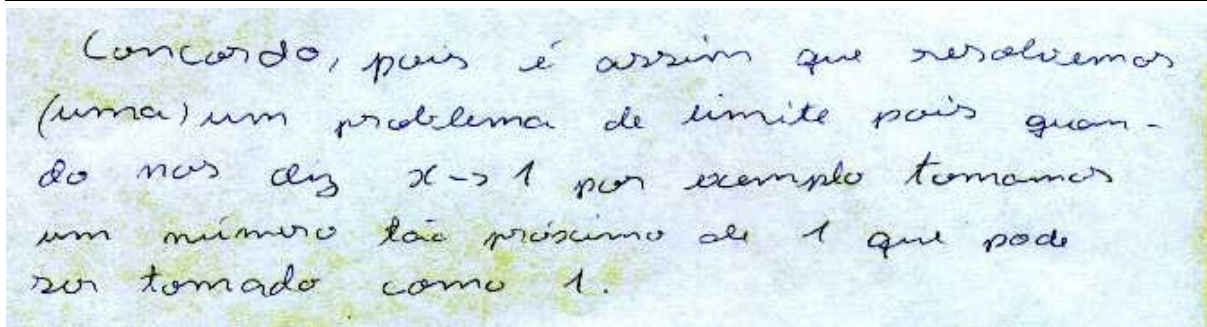
questões ligadas ao conceito de limite, feitas por associação, por exemplo, com outros conteúdos de cálculo que possibilitam o aparecimento de obstáculos epistemológicos na aprendizagem do conceito de limite.

Um exemplo disto, o argumento do estudante AI10, quando utiliza a série de Taylor para justificar a questão da exatidão que está presente na afirmação sobre limite de uma função. São questões como esta, muitas vezes ligadas ao rigor no uso de operações ou de métodos para provar determinadas relações - como é o caso da expansão em série de Taylor, que é utilizada para determinar como se expande e como se comporta uma função  $f$  em torno de um ponto a interior a um intervalo domínio da função  $f$ . Pois, nesse caso existe uma série de conceitos envolvidos para se chegar a determinação da série citada, um deles, por exemplo, é o de função classe  $C^\infty$  (que é a classe de todas as funções que podem ser derivadas tantas vezes quanto se queira em todos um ponto, por exemplo, de um intervalo real). Portanto, conceitos mal compreendidos podem obstruir a construção de conceitos anteriores como a construção de novos conceitos.

**Questão f:** Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado.

| Aluno Informante 1                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é determinado vamos colocar na variável na função valores numéricos cada vez mais próximos a numéricos a um dado numérico até que o limite seja alcançado. Pois é assim que resolvemos ...um problema.... | Este estudante concorda com a assertiva apresentada, pois esta converge para a sua concepção de limite de função como aproximação a um valor de referência (ver quadro 1, abaixo). A afirmação feita “ <i>é assim que resolvemos... um... problema</i> ”, ou seja, atribuindo valores à variável até determinar |

|                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>Concordo, pois é assim que resolvemos (uma) um problema de limite, pois quando nos diz <math>x \rightarrow 1</math> por exemplo tomamos um número tão próximo de 1 que pode se tomado como 1.</p> | <p>o limite da função está afeita a procedimentos heurísticos estáticos numéricos (cf. SIERPINSKA, 1987).</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



Concordo, pois é assim que resolvemos (uma) um problema de limite pois quando nos diz  $x \rightarrow 1$  por exemplo tomamos um número tão próximo de 1 que pode ser tomado como 1.

**Figura 111:** Texto escrito pelo aluno A11 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Um limite é determinado ao se colocar na variável de um função valores... Um limite é determinado ao se colocar na variável de um função... valores numéricos cada vez mais próximos... a um dado número até que o limite esteja alcançado. Correto! Mas... não, tou com uma besteira aqui. Um limite é determinado ao se colocar na variável... de um função valores numéricos... cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado... Introduzindo a fórmula... Usando a fórmula para aga ... não... Mas esse é um... Correto! Mas este é um método... [repete em tom baixo] Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função... Tá errado... pois o limite... é um número... alcançado... de acordo... com a variável... desejada... em xis.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b></p> <p>correto mas usando a fórmula para <math>n \rightarrow 0</math></p> | <p>Este estudante fica em dúvida se concorda ou não com a assertiva apresentada, e esta dúvida parece residir na fragilidade da sua construção do conceito de limite de uma função. O argumento utilizado como justificativa está de acordo com as suas concepções sobre limite de função.</p> |

|                                                                                                                                                         |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>correto, mas esse é um método</p> <p>Errado, pois o <math>\lim</math> é um número alcançado de acordo com a variável desejada em <math>x</math>.</p> |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

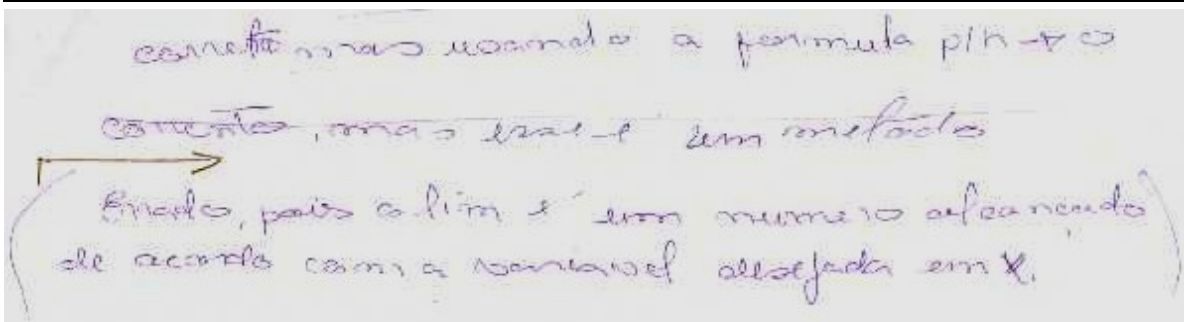


**Figura 112:** Texto escrito pelo aluno AI2 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Análise                                                                                |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Concordo aqui com essa ... essa afirmação. ... Certo. Porque na minha concepção o valor exato ele nunca vai ser alcançado, mas contanto que ele atinja o valor eh, satisfatório ..., mas concordo com isso aqui.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Concordo com esta afirmação.</p> | <p>Este argumento utilizado pelo estudante prende-se ao fato do limite ser finito.</p> |

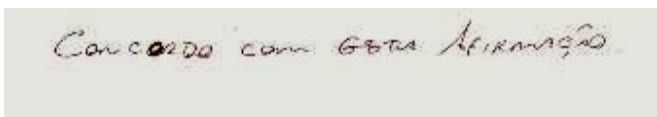


**Figura 113:** Texto escrito pelo aluno AI3 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Análise                                                                                                                                                                                               |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Cada vez mais próximas. É esse daqui tá certo. Esta definição de limite esta correta, pois se eu quiser que uma certa função <math>f(x)</math> tenda a dois por exemplo, eu irei dar valores arbitrários para este valor seja alcançado. Eu terminei.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Esta definição de limite esta correta, pois se</p> | <p>O argumento utilizado por este aluno para concordar com a assertiva acima se baseia na concepção de limite de uma função por aproximação a um número (real finito) por uma sequência numérica.</p> |

|                                                                                                                             |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| eu querer que uma função $f(x)$ tenda $z$ , por exemplo, eu irei dar valores arbitrário para que este valor seja alcançado. |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

Esta definição de limite está correta pois se eu quiser que uma função  $f(x)$  tenda  $z$ , por exemplo, eu irei dar valores arbitrário para que ~~este~~ valor seja alcançado

Figura 114: Texto escrito pelo aluno AI4 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Análise                                                                                                                                           |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> (fica relendo a questão em voz baixa) Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos...Bem, então ... eh, é uma maneira para fazer verificação em limites, se existem ou não.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>É uma maneira para fazer verificação em limites, se existe ou não.</p> | <p>A posição que este estudante assume com relação ao conceito dado é de que este seve “para fazer verificação em limites, se existe ou não”.</p> |

É UMA MANEIRA PARA FAZER VERIFICAÇÃO EM LIMITES, SE EXISTE OU NÃO.

Figura 115: Texto escrito pelo aluno AI5 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 6                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É também eu concordo é determinado quando você coloca a variável no caso desse <math>x</math> colocar um valor bem próximo do valor numérico que você quer</p> | <p>O aluno em questão concorda que o limite de uma função se obtém da forma proposta, na afirmação feita acima, levando-se em conta a sua observação de que “É porque</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>alcançar. [...] também tá completo. É porque varia tanto assim de forma de limite pra limite que o conceito que a gente teve é pouco pra responder diretamente. Eu concordo também.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Concordo com a situação acima.</p> | <p><i>varia tanto assim de forma de limite pra limite que o conceito que a gente teve é pouco pra responder diretamente". O que deixa a sua resposta de acordo com o seu conceito exposto na primeira questão.</i></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

*Concordo com a situação acima.*

**Figura 116:** Texto escrito pelo aluno A16 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> É eu estudei isso. Eu li um ... que falava sobre isso. Você colocava valores cada vez mais próximos a xis, um valor que você escolhesse que a função provavelmente não é definida, e as previsões não definia naquele ponto então, você vai colocando valores mais próximos, mais próximos aí tem uma hora que chega o valor que você se aproximando mais ainda não passa daquele valor. Aí é o limite, o valor eu não sei. Só lendo essas afirmações é isso mesmo aí o limite ocorre quando colocando cada vez mais próximos do valor escolhido a função alcança um determinado valor, (<math>y = a</math>). Um valor real.</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>O limite ocorre quando colocando valores cada vez mais próximos do valor escolhido a função alcança um determinado valor, (<math>y = a</math>).</p> | <p>Este estudante concorda com a proposição feita e respalda a sua opção usando a leitura de um livro como justificativa. E reescreve como ele acha que deveria ser o conceito dado: "O limite ocorre quando colocando valores cada vez mais próximos do valor escolhido a função alcança um determinado valor, (<math>y = a</math>)".</p> |

*O limite ocorre quando colocando valores cada vez mais próximos do valor escolhido a função alcança um determinado valor, ( $y = a$ ).*

**Figura 117:** Texto escrito pelo aluno A17 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 8                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Vou botar aqui assim. Deixe ver se eu lembro como é a tabela. Valor vamos supor quatro vírgula isso aqui vai dar um número 5, vai dar o número eu vou calcular mais vou dizer que vai dar esse número aqui.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>É claro.</p> | <p>Há aqui uma concordância sem justificativa. O que se pode dizer, ao verificar o conceito de limite dado por este aluno (ver quadro 1, abaixo), é que limite para ele está relacionado a aproximação a um ponto ou valor de referência. E, olhando o que ele faz (verificar infográfico abaixo), dá para se ter uma idéia de como ele imagina que pode ser determinado o limite de uma função quando a variável tende a um valor finito.</p> |

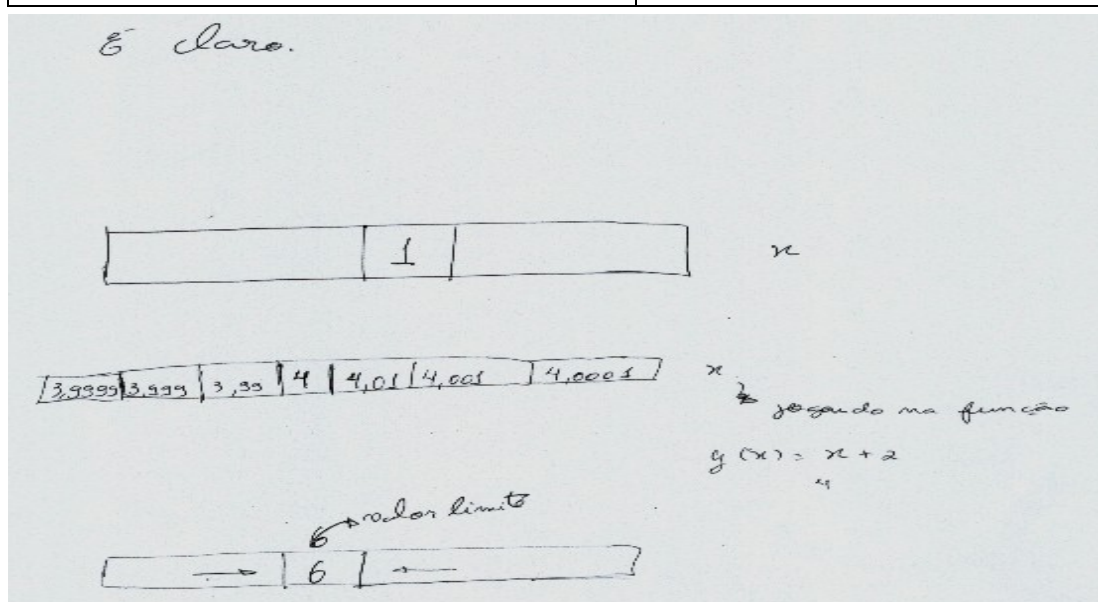
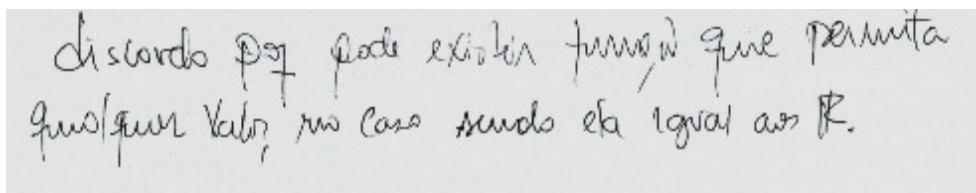


Figura 118: Texto escrito pelo aluno AI8 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Análise                                                                                                                                     |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Discordo porque pode existir uma função que permita qualquer valor no caso sendo ela igual aos reais.</p> <p><b>Texto escrito produzido pelo aluno:</b><br/>Discordo pq pode existir função que permita qualquer valor, no caso sendo ela igual aos <math>\mathbb{R}</math>.</p> | <p>Este estudante discorda porque, para ele a variável poderá se aproximar de qualquer valor, e não necessariamente de um valor finito.</p> |

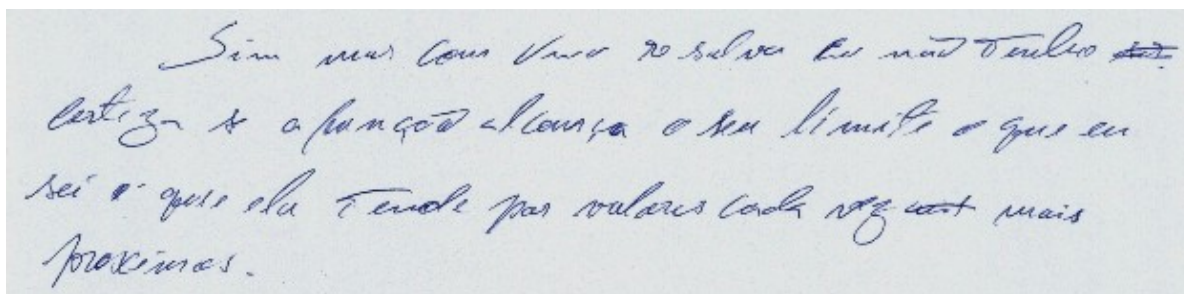




discordo pq pode existir função que permita qualquer valor, no caso sendo ela igual ao  $\mathbb{R}$ .

**Figura 119:** Texto escrito pelo aluno AI9 referindo-se à questão f acima

| Aluno Informante 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resposta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Análise                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>Produção oral do aluno:</b> Tem aqui : “Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado.” Eu não sei dizer se esse limite é alcançado eu sei que a função tende. Ela tende para aquele limite. Ela pode tender para muito, muito, muito próximo mas nunca alcançar. Eu botaria aqui olhe eu sinceramente não sei se ela alcança mas eu sei que ela tende, ela pode tender para valores cada vez mais próximos. Ela pode ser cada vez mais próximo daquilo ali mas eu não sei se ela tende a alcançar não, quer dizer, ela tende a alcançar mas não sei se ela alcança! [respondeu : Sim, mas com uma ressalva eu não tenho certeza se a função alcança o seu limite o que eu sei é que ela tende por valores cada vez mais próximos.] Pronto!</p> <p><b><u>Texto escrito produzido pelo aluno:</u></b></p> <p>Sim mas com uma ressalva eu não tenho <del>ser</del> certeza se a função alcança o seu limite o que eu sei é que ela tende por valores cada vez <del>mas</del> mais próximos.</p> | <p>Este estudante concorda com a proposição apresentada, mas não tem certeza se a função alcança ou não o limite. Este tipo de dúvida apresentada está associado ao conceito que ele tem de limite como derivada de uma função. Ele pode, por exemplo, associar o fato de não ter a derivada em um determinado ponto à não ter o limite da função naquele ponto.</p> |



Sim mas como vou resolver eu não tenho certeza se a função alcança o seu limite e que eu sei e que ela tende por valores cada vez mais próximos.

**Figura 120:** Texto escrito pelo aluno A110 referindo-se à questão f acima

De forma semelhante ao que se fez para as questões anteriores, apresentamos abaixo dois quadros-resumo, que auxiliam a interpretação mais global das produções dos sujeitos: o primeiro quadro diz respeito à questão 4, item f, enquanto que o segundo quadro reproduz (para a comodidade do leitor) a análise proposta para a questão 1, de forma a serem evidenciadas relações entre um momento e outro da atividade de resolução de problemas dos sujeitos.

| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                             | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                                | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Concordo que um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado.     |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Não Concordo que um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado. |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 16:** Resumo da **Questão 4f**, análises dos estudantes do conceito de limite dado por um aluno fictício.



| Tipo de conceptualização de limite                                                                                                                                          | Sujeitos |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                                                                                                                                                             | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. Limite como algo inatingível                                                                                                                                             |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2. Limite como fronteira                                                                                                                                                    |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3. Limite como algo dinâmico, relacionado a movimento de aproximação a um ponto ou valor.                                                                                   |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4. Limite como aproximação a um valor de referência                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5. Limite concebido de forma próxima ao conceito formal: representação com delta e épsilon (distância de $x$ ao ponto limite, e de $f(x)$ ao valor limite, respectivamente) |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6. Limite como a derivada da função                                                                                                                                         |          |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

**Quadro 5:** Resumo da **Questão 1**, sobre conceptualização de limites, desenvolvida pelos alunos entrevistados, durante a sessão de resolução de problemas

O conceito de limite de função de uma variável dado acima, de que, *Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado*, pode-se dizer que é um conceito preliminar, uma vez que se pensa no aspecto de utilizar seqüências de números e observar como a função se comporta a media que essas seqüências vão se aproximando do objeto definido. Ou seja, a heurística utilizada neste caso é utilizar aproximações por valores conhecidos. Este tipo de atitude pode causar obstáculos epistemológicos à construção do conceito de limite de função. Muitas vezes, em virtude da utilização desse tipo de estratégia para resolver o problema, o estudante não consegue, por exemplo, observar o que significa a variável tender a infinito.

No **Quadro 16** acima, relativo à **Questão 4f**, somente dois estudantes discordam a proposição dada sobre o limite de uma função. O estudante AI9 deixa implícito na sua justificativa que a variável poderá se aproximar de qualquer valor, e não necessariamente de um valor finito. Já, o estudante AI2 justifica como

argumento de que “o limite é um número alcançado de acordo com a variável desejada em  $x$ ”.

Os oito alunos que concordam com o conceito dado sobre limite de função têm a suas concepções de limites pautadas na aproximação por um valor. Essa crença trouxe dificuldades para eles mesmos, inclusive, justificarem as suas opções.

A construção de um conceito relacionado a convicções que não se sustentam colocam esses estudantes, na presença de novas experiências, diferentes das comumente vivenciadas por eles, os colocando em conflito cognitivo com essas convicções. Esses conflitos podem trazer vantagens e desvantagens, a vantagem seria despertar nos estudantes uma perspectiva de mudança conceitual que contribuísse para o desenvolvimento de conceitos científicos novos e compatíveis com o desenvolvimento atual da ciência (cf. BACHELAR, 1974 e 1999). Porém, o que veio ocorrendo, podemos refletir, com uma desvantagem, é que na maioria dos casos esses conflitos obstruem a compreensão do conceito de limite de função de uma variável.



## CAPÍTULO 5

### Discussão

Segundo Abbagnano (1998), a palavra de origem grega *MATEMA* significa *tudo que é objeto de aprendizagem*. Porém, para o filósofo, astrônomo e médico grego Sexto Empírico (180 – 220), *MATEMA* também implicava *além da coisa aprendida, quem a aprende e o modo de aprender*. Assim ele entendia, por *matemático*, todo aquele que se dedicava ao estudo de ciências, além dos filósofos.

Segundo o que foi discutido no capítulo 1 desta tese, a matemática foi sendo desenvolvida, foi ganhando corpo e assumindo a categoria de ciência desde os antigos Egípcios e Babilônios que desenvolveram todo um cabedal de conhecimento matemático focando-se na observação da natureza.

Conforme tentamos demonstrar em nossa breve análise histórica da matemática, diversas concepções foram incorporadas a esse domínio do saber, ao longo dos séculos, como por exemplo: a incorporação do método dedutivo introduzido por Thales, modificado a partir da inferência indutiva de Platão e dos Pitagóricos; a incorporação do uso da observação e da lógica por Aristóteles para a representação de fenômenos em acréscimo às relações dedutivas de Euclides, que culminariam com a idealização de um padrão para a matemática pautado na consistência de postulados; a introdução na matemática da visão Escolástica, dominante na Idade Média (dos séculos IX ao XVII) – doutrinas teológico-filosóficas caracterizadas, sobretudo pelo problema da relação entre a fé e a razão.

Desenvolveram-se nesta doutrina inúmeros sistemas, do ponto de vista filosófico, pela posição adotada quanto ao problema dos universais, para qual o universo é organizado e compreensível. Esta concepção do escolasticismo sofre transformações, no século XIV, em virtude das mudanças implementadas na visão qualitativa de movimento e variação, e isso promove mudanças na proposição de envolver aspectos mais quantitativos à matemática.

Continuando tal percurso histórico de desenvolvimento, cabe mencionar a incorporação das convicções de Kepler e Galileu, nos séculos XV e XVI, de que a matemática seria independente do conhecimento intuitivo e experiencial, e da modificação, nos séculos XVI e XVII, da concepção da matemática como a base da arquitetura do universo. A álgebra, desenvolvida pelos árabes no século XIII, passou a ser empregada com um caráter mais prático no século XVII, na Europa, especificamente na Itália. Culmina com a ênfase dada, no século XVIII, a aplicação do cálculo (cálculo diferencial e integral) na resolução de problemas da matemática e de outras ciências. Desse ponto do desenvolvimento histórico em diante, começa a ficar mais evidente uma concepção de matemática mais independente do mundo dos sentidos, com elementos que transcendem a experiência empírica, de maneira que o objeto de estudo é caracterizado utilizando-se argumentos da lógica, a aritimetização e o refinamento formal da linguagem matemática, através do uso de símbolos (FREUDENTHAL, 1989).

Durante o século XIX foram realizados esforços, por parte dos matemáticos da época, para dar uma base mais sólida às noções matemáticas de *derivada* e de *integral*. Para isso, era necessário rever as concepções envolvidas numa nova análise do conceito de infinito. Então, por volta do final desse mesmo século, sob o efeito da aritimetização da análise matemática, possibilitou-se que o

conceito de infinito pudesse ser introduzido na matemática sem prejuízo da consistência lógica do objeto, uma vez que este transcendia toda intuição e análise. Surge assim o conceito de limite de uma sequência infinita de elementos para dar a sustentação exigida aos conceitos de derivadas e integrais, definindo-os, no final, como abstrações baseadas no primeiro.

Com o passar dos anos as bases conceituais do cálculo vão se ampliando, indo além da geometria, incorporando-se a álgebra, os números reais e funções. Os conceitos de derivada e integral passam a ser utilizado para a modelização, compreensão e explicação de fenômenos físicos, bem como para a resolução de problemas de matemática aplicada a domínios técnico-profissionais como engenharia e economia, dentre outros. Nesse momento, os conceitos supracitados são definitivamente incorporados ao currículo escolar de vários cursos de formação superior.

Junto a estas bases conceituais (da geometria, dos números reais, da álgebra, e funções) incorporaram-se também as intuições e construtos mentais abstratos, elementos necessários à aplicação dos conceitos com os quais lidam a matemática e as demais ciências. No ensino das definições fundamentais do cálculo e operações relativas a derivadas, integrais e a limites, principalmente, são esquecidas as dificuldades epistêmicas e históricas em meio às quais estes conceitos e operações foram desenvolvidos, passando-se a exigir dos alunos que tais habilidades e competências conceituais estejam prontamente dominadas pelos estudantes, exigindo-se igualmente destes alunos uma considerável precisão de afirmações e a capacidade de utilização de regras contidas em teoremas, proposições e propriedades.

O ensino da Matemática no ensino superior, e por assim dizer o ensino de

Cálculo, tem o seu foco na abstração de definições e deduções (DREYFUS, 1991). Em geral o ensino de limite de funções de uma variável real, no contexto da disciplina de Cálculo I, ocorre no nível da dedução formal. Nele devem ser estabelecidas inter-relações entre definições, propriedades, proposições, teoremas e demonstrações, e os papéis de cada um desses termos sem que nem mesmo tenham sido explicados pelo professor os significados de cada um deles. Neste nível de ensino os estudantes devem ser capazes de construir demonstrações e não apenas memorizá-las; enxergar a possibilidade de desenvolvê-las de mais de uma maneira; compreender e saber aplicar teoremas e propriedades na resolução de problemas.

Muitas vezes pensa-se ser suficiente definir e exemplificar um conceito abstrato e espera-se com isso que os estudantes construam as propriedades do referido conceito deduzindo-as da definição. Essa maneira de ensinar, primando muitas vezes por uma metodologia arraigada num formalismo culto, seguindo mais ou menos um encadeamento do tipo teorema-prova-aplicação ou ainda definição-propriedade tem vantagens e desvantagens.

As vantagens, por exemplo, são: permitir uma estrutura de planejamento para a disciplina (ou curso); uma previsão da progressão dos conteúdos da matéria; e uma certa garantia de que os assuntos do currículo poderão ser cobertos. Em contrapartida, as desvantagens apresentam-se ligadas à inflexibilidade com relação à adaptabilidade da maioria dos estudantes (cf. DREYFUS, 1991), adaptabilidade à nova atitude de pensar matematicamente, operando com conceitos mais avançados, e de lidar com estes conceitos, representando, visualizando, generalizando, bem como classificando, conjecturando, induzindo, analisando, sintetizando, abstraindo e formalizando, ou seja, usando um cabedal de processos que interagem para

compreensão do conceito, de um objeto.

O que faremos aqui é discutir as questões relacionadas aos aspectos matemáticos e psicológicos da construção do conceito de limite de função (função real a uma variável real) em cálculo, observando os obstáculos conceituais que dificultam a formação deste conceito.

Aspectos matemáticos e psicológicos de um processo muitas vezes não podem ser separados (DREYFUS, 1991), isto significa que muitas vezes um não surge independente do outro, isto é, podem ser gerados pelo mesmo processo. Por exemplo, ao trabalhar com limite de função, nas sessões de resolução de problemas, muitos estudantes desenharam o gráfico de algumas dessas funções para observar o comportamento destas na vizinhança dos pontos dados, na tentativa de determinar o limite da função. Nesse momento esse estudante estava realizando um processo matemático seguindo regras estabelecidas, em linguagem matemática, para a construção desse gráfico e, ao mesmo tempo, provavelmente, estava formando uma imagem mental visual do gráfico dessa função. Ou seja, o estudante estava visualizando a função através do seu gráfico de maneira que pudesse raciocinar sobre aquela função. Nesse instante as imagens, mental e matemática, estão muito próximas aqui.

Os dez estudantes que participaram desta pesquisa expressaram tanto por produção oral quanto escrita suas concepções para cada um dos doze problemas que lhes foram apresentados. Na primeira questão, em que lhes foi solicitado indiretamente que dessem seus conceitos de limite, foram identificadas, nas suas respostas, as seis categorias seguintes relativas as suas crenças sobre o que é limite de uma função: (1) Limite como algo inatingível; (2) Limite como fronteira; (3) Limite como algo dinâmico (relacionado a movimento de aproximação a



um ponto ou valor); (4) Limite como aproximação a um valor de referência; (5) Limite concebido de forma próxima ao conceito formal (representação com epsilon -distancia de  $f(x)$  ao valor limite; e delta –à distância de  $x$  ao ponto limite); e (6) Limite como a derivada de uma função. Estas categorias encontradas nas suas produções orais e escritas foram às mesmas estimadas a priori e colocadas na forma de afirmativas sobre o conceito de limites no ultimo bloco de problemas, quando se pedia para que eles se posicionassem com relação àquelas afirmativas.

Três fatos nos chamaram a atenção: (1) muitas dessas crenças estão presentes nas proposições de mais de um estudante; (2) vários estudantes apresentam mais de uma crença com relação ao limite de função e; (3) a forma como essas crenças permanecem com esses estudantes, em face das noções espontâneas de limite que eles possuem, geram conceitos imprecisos que aparecem nas soluções dos problemas e em argumentos apresentados por esses estudantes.

Com relação aos dez estudantes da amostra pesquisada a configuração que retrata as suas convicções sobre o limite de função é a seguinte: seis apresentam apenas uma convicção sobre o limite de função; quatro apresentam respostas em mais de uma categoria; seis estudantes atribuem ao limite de função uma natureza dinâmica, segundo a qual o “limite de uma função é o máximo valor onde determinada função consegue chegar”.

Os modelos de representação concebidos por estes estudantes de Cálculo I, vão colocando em destaque a abordagem utilizada por cada um deles para resolução de cada um dos problemas que vão sendo apresentados posteriormente. Muitos deles têm dificuldades para propor um problema de limite de função, na maioria das vezes fornecendo exemplos ou comentários como se fosse o problema formulado e, quando conseguem fazê-lo nem sempre concluem, o

procedimento de proposição do problema, apresentando uma solução.

Ao lhe serem apresentados problemas de limites de função, considerados como padrão (limite de uma função polinomial; limite de uma função racional; e, limite de função definida por mais de uma sentença), ocorrem as seguintes situações: (1) A maioria consegue reconhecer a existência do limite da função quando esta é uma função polinomial real (contínua em todos os pontos do conjunto dos números reais, embora poucos reconheçam a continuidade quando acontece); (2) há procedimentos que podemos considerar como mecânicos em virtude da conduta do estudante em simplesmente fazer a substituição do ponto na função, aliados às concepções que aparecem sobre o denominador de uma fração que não pode ser zero (o que não tem relação nenhuma com o problema apresentado) e (3) o entendimento do limite como derivada de uma função (fato que não está sendo solicitado no problema) possibilitam o surgimento de obstáculos que dificultam a determinação da solução do problema.

A noção de função contínua é local, isto é, é possível tornar  $f(x)$  arbitrariamente próximo de  $f(a)$  desde que se tome  $x$  suficientemente próximo de  $a$ . Isto quer dizer que o fato de uma função ser contínua em um ponto não garante a ela ser contínua em outro ponto. Tomemos por exemplo, para ilustrar, a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , esta função não é contínua em  $x = 0$  zero, mas é contínua para todo  $x \neq 0$ . Porém, determinado o domínio da função, a noção de função contínua pode se tornar global, ou seja, uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio, neste caso diremos simplesmente que a função dada é contínua.

Entretanto, a noção de função contínua pode ser restringida ao conceito de limite quando se estabelece que uma função real  $f$  é continua em um ponto  $a$  se, e somente se, o seu limite existe em  $a$  e é igual a  $f(a)$  à imagem da função  $f$  no ponto

$a$  dado. Em linguagem não coloquial: *Seja  $a \in X$  um ponto de acumulação de  $X$ .*

*Então  $f: X \rightarrow \mathcal{R}$  é contínua no ponto  $a$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .*

No momento em que a função é racional e a verificação do limite desta função é feita para a variável independente (no caso  $x$ ) tendendo a um ponto que não se encontra no domínio da função (ou seja, o ponto é um ponto de descontinuidade da função, o que é o mesmo que dizer que a função não é contínua naquele ponto) aparecem várias representações que geram obstáculos para obtenção da solução do problema, tais como: o fato de o infinito não ser um número real garante que não possa existir limite infinito de função; a utilização inadequada da regra de L'Hôpital<sup>12</sup> como técnica para eliminar o denominador zero da fração racional em decorrência do modelo da inexistência de fração com denominador zero (tal uso da regra acima referida levou a muitas conclusões verdadeiras de que o limite não existia, baseando-se em um argumento falso); a representação do limite como derivada de uma função, que além de dificultar a compreensão do fenômeno dificulta a obtenção da solução do problema, visto que, o estudante utiliza a definição de derivada de uma função como limite, para determinar o limite da função.

No momento que a função dada é definida por mais de uma sentença acontecem dois comportamentos diferentes por parte destes estudantes: o primeiro é em relação à primeira função, mostrada no item 3c (ver Apêndice 1), nesse caso aparecem dois fatos que despertam as atenções: (1) somente dois estudantes não reconhecem (pelo menos não deixam nenhuma pista) que a função dada é definida por mais de uma sentença, porém todos os estudantes utilizaram o conceito de

---

<sup>12</sup> A Regra conhecida como regra de L'Hôpital consiste do seguinte argumento se  $f(x)$  e  $g(x)$  são funções diferenciáveis e  $x = a$  tal que  $f(a) = 0$  e  $g(a) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

limite lateral para determinar o limite da função; (2) dentre os estudantes que reconhecem a função como definida por mais de uma sentença (e foram oito) e utilizam o conceito de limite lateral para verificar a existência do limite da função dada, somente três concluem corretamente utilizando o argumento correto de que o limite da função dada não existe, pois os limites laterais embora existam são diferentes. Os outros cinco não conseguem utilizar o limite lateral como argumento para determinar a existência ou não do limite da função e, dentre estes, um utiliza inadequadamente o argumento que o limite é infinito, embora não tenha sido este o resultado alcançado por ele na resolução do problema, para concluir pela não existência do limite da função.

O segundo comportamento se dá no momento que as atenções dos sujeitos pesquisados voltam-se para a segunda função apresentada no item 3d (ver apêndice 1) novamente dois fatos chamam a atenção: (1) Todos os alunos garantem que o limite da função existe e que este é igual a um, mas apenas um estudante percebe que a função é contínua e afirma isto; (2) ainda que tenham utilizado o conceito de lateralidade para determinar o limite da função, procedimento adequado e similar ao da questão anterior, no entanto nenhum dos alunos que concluíram esta questão acertadamente e não responderam ao problema anterior (a menos de um estudante que foi além dos demais colegas na sua conclusão) utilizaram-se desse fato para revisar as suas respostas anteriores (embora tivessem liberdade para isto).

Este acontecimento ratifica o que vinha sendo percebido de cada um dos universitários ao longo das sessões de resolução de problemas, ou seja, que tais alunos não estabeleciam relações entre os procedimentos usados para determinação da existência do limite das funções dadas. Cada novo problema abordado era encarado de uma forma tal que conceitos, propriedades e/ou

procedimentos utilizados na resolução do exercício anterior não tinham nenhuma relação com o novo problema, numa concepção fragmentada do conceito de limite de função.

As crenças e concepções, já apresentadas, nos argumentos dos estudantes -com relação à existência do infinito, a número real, e à função real-, na solução dos problemas propostos de limites de função (tanto do ponto de vista da produção oral quanto no texto escrito por cada um deles), possibilitam o aparecimento de obstáculos epistemológicos do tipo: *obstáculos heurísticos estáticos numéricos e heurísticos estáticos geométricos*; *obstáculos heurísticos cinéticos geométricos e heurísticos cinéticos numéricos*; e *obstáculos de Eudoxo e de Fermat* (abordados no Capítulo 2, e representados no Quadro 17, Apêndice 4).

Além destes, aparecem obstáculos que podem ser classificados como *substancialistas* e como *verbais* em decorrência das argumentações relativas à qualidade dos objetos em estudo e das explicações dos fenômenos ligados a estes.

A noção de limite é difícil de ser introduzida, porque, de acordo com Cornu, ela parece ter mais relação com a metafísica e a filosofia. O aspecto metafísico da noção de limite é um dos principais obstáculos para os estudantes hoje. Esse obstáculo, que é histórico, torna a compreensão do conceito de limite extremamente difícil, principalmente por quê um limite não pode ser calculado usando diretamente métodos familiares da álgebra e da aritmética (cf. CORNU, 1991), nesta noção metafísica aparece o próprio conceito de infinito.

Ao visitarmos na História da Matemática a história do conceito de limite, percebemos as dificuldades, debates, suposições, e disputas de idéias que apareceram no desenvolvimento desse conceito. A perspectiva apresentada por Bernard Cornu é que:

É útil estudar a história do conceito para localizar períodos de desenvolvimento lento e as dificuldades que surgem que podem indicar a presença de obstáculos epistemológicos. (CORNU, 1991, p.159)

Ele vai mais além ao dizer que historicamente o conceito de limite foi introduzido para resolver dificuldades relativas a três questões: problemas de geometria, problema da soma e convergência de uma série e o problema da diferenciação. Assim sendo classificou como quatro os maiores obstáculos epistemológicos na história do limite, são eles: 1) A falha na conexão da geometria com os números; 2) A noção do infinitamente grande e infinitamente pequeno; 3) O aspecto metafísico da noção de limite e, 4) O limite é atingido ou não?

Dos obstáculos heurísticos citados acima, com relação aos associados a números, existe uma correspondente crença na existência de um número real (finito) que é maior do que todos os outros é o que B. Cornu classifica de *noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno*. Encontramos este mesmo tipo de crença entre os nossos estudantes-sujeito e a denominamos de *Limite como fronteira* e *Limite como aproximação a um valor de referência* para duas das nossas categorias classificatórias.

Outro obstáculo epistemológico que o referido autor cita está associado à concepção acerca de “se o limite é atingido ou não”. Esta é uma noção que foi, durante muito tempo, objeto de debates no século XVIII, envolvendo matemáticos do porte de D’Alembert – que insistia em dizer que o limite nunca coincide, ou nunca se torna igual à quantidade do qual ela é limite (CORNU, 1991; BOYER, 1959 e 1989) – e outros. Esta mesma crença está presente nos argumentos de alguns dos estudantes pesquisados e que categorizamos por *Limite como algo inatingível*.

Com relação ao que ele chama de *aspecto metafísico da noção de limite*, encontramos esta perspectiva na declaração do aluno A17 ao dizer que

“Simplesmente a gente não pode determinar o limite mais infinito menos infinito, não sei se pode usar, porque indeterminação, né? Porque o limite usado é infinito”, para este aluno o infinito existe somente potencialmente, o que Sierpinska (1987), classifica como *Obstáculo heurístico estático numérico*, como pode ser visto no Quadro 17, Apêndice 4.

Ao elaborarmos as atividades propostas sobre limite de função, para os estudantes que participaram da pesquisa, esperávamos ter subsídios que nos permitissem identificar as idéias espontâneas, representações, intuições e concepções anteriores que tinham sobre limite de função. Além disso, ajudá-los a refletir sobre esses elementos conceituais. O que pudemos observar é que há uma diversidade de concepções sobre limite de função, demonstradas pelos estudantes pesquisados, conforme Cornu essa diversidade de concepções, associada à riqueza e complexidade de noções, e os obstáculos cognitivos tornam o ensino do conceito de limite difícil (cf. CORNU, 1991). Além disso, a compreensão, por parte do docente de Cálculo Diferencial e Integral, da existência de obstáculo epistemológico no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação pode ajudar a diminuir as dificuldades no processo ensino-aprendizagem dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, a começar pelo de limite de função. No capítulo seguinte e final desta tese, tecemos considerações adicionais sobre tais aspectos pedagógicos.





## **CAPÍTULO 6**

### **Conclusão**

Os Estudos em Educação Matemática no Brasil vem se desenvolvendo ao longo desses anos com muita intensidade e a preocupação com o ensino da Matemática tem-se evidenciado não só em relação à Matemática que é ensinada nos níveis fundamental e médio, mas com ressonância também no ensino superior. Não são poucos os trabalhos que vem sendo realizados nesse último, inclusive com relação ao Cálculo Diferencial e Integral, abordando diversos aspectos, desde os epistemológicos aos voltados para as questões de ensino. Mas, todos eles, independentemente da metodologia usada ou dos instrumentos utilizados para construção dos dados, têm um foco sobre o ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

Ensino-aprendizagem, uma palavra composta que ao unir os dois substantivos autônomos incorpora nessa acepção uma concepção de indissociabilidade. Indissociabilidade entre o ensino e a aprendizagem, pois não pode e não deve existir dicotomia entre eles, já que o primeiro não pode existir sem o segundo. Isto é, não se pode falar de ensino se não houver aprendizagem. Assim sendo, o uso do hífen não se justificaria, a menos que cada palavra perdesse a sua identidade de sentido, e isso não acontece. Outrossim, ensino não tem valor de prefixo e se o fosse o hífen deveria servir para indicar continuidade. E por assim dizer, o ensino universitário, seja ele em que nível for não deve estar separado da

aprendizagem. Admitindo-se esta postulação, então, o ensino de Cálculo, e conseqüentemente o ensino de limite de função de uma variável real, não pode prescindir da aprendizagem dos estudantes. E é assim que deve acontecer, ensino e aprendizagem não devem estar nunca separados, como “é assim que acontece na escola – matemática e pedagogia não estão nunca separadas” (LINS, 2003).

O Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, de acordo com Lachini (2001, p. 147), adquiriu o *status* de:

[...] linguagem por excelência do paradigma científico e como instrumento indispensável de pensamento para todas as áreas do conhecimento, desde sua consolidação no final do Século XVII com Newton e Leibniz, é colocado como disciplina básica e obrigatória em diversos cursos de graduação da área de Ciências Exatas.

Ao se analisarem as propostas de conteúdos programáticos dos programas de disciplinas dos cursos da Área II (Anexo 8) ver-se-á que consta da proposta do ensino-aprendizagem de Cálculo nesses cursos a introdução de conteúdos considerados básicos, fundamentais para a formação geral do estudante de maneira que este possa conhecer, analisar e avaliar dados; pensar organizadamente; e aprender a utilizar regras e procedimentos na resolução de problemas.

Assim, o estudo do Cálculo passa a ter uma grande importância para dar uma formação científica ao estudante e para instrumentalizar o futuro profissional. Ratificando o que já foi anteriormente abordado, que de modo geral o ensino de matemática culturalmente percorre três níveis: o formal (consistindo de regras e valores); o informal (com regras de comportamento e de raciocínio) e o técnico (com o conhecimento explícito) (cf. SIERPINSKA, 1987).

Os livros didáticos, tanto os de autores brasileiros (FLEMING & GONÇALVES, ÁVILA) quanto os traduzidos de autores não brasileiros (MUNEM &

FOULIS; SWOKOWSKY; LEITHOLD; SIMMONS; PISKUNOV; GUIDORIZZI; AYRES; HOFFMANN e outros), são de boa qualidade e enfatizam aplicações tanto relacionadas a fatos físicos e geométricos como nas mais diversas áreas (física; economia; química; biologia; medicina; astronomia e outras)

Existe também a disposição do estudante uma série de softwares especializados (Maple, Derive, Theorist e Mathematica) que através de simulações os ajudam na observação e análise de diversas situações problema, incluindo-se a parte operacional.

Mas, todo o esforço empregado, com a utilização desses elementos citados (currículo, livro didático, softwares especializados), reforçado por uma carga horária semanal de quatro horas aula, professores e monitores para atendimento em horários complementares, parece não serem suficientes para evitar a reprovação.

Dentre os vários aspectos já apontados que poderiam ser presumidos como obstáculos para a aprendizagem dos conteúdos de limite em cálculo buscou-se verificar na atividade de resolução de problemas dos estudantes pesquisados como se dava à construção de significados dos conceitos de limite.

Neste estudo aparecem elementos que poderão contribuir, caso se queira, para (re) pensar o ensino de limites de funções de uma variável real em Cálculo I na perspectiva da aprendizagem.

O olhar clínico sobre os protocolos de resolução de problemas objetivava observar: (1) o aspecto conceitual – destinando-se a identificar como concebiam o conceito de limite de uma função; (2) as ações empregadas para resolução dos problemas propostos sobre limites de funções; e (3) o resultado que essas perspectivas conceituais tinham sobre suas concepções dos limites de funções.

Tomaram-se como referenciais a psicologia cognitiva enquanto área de

conhecimento, visto que o nosso foco era a aprendizagem dos conceitos de limite em cálculo, bem como a teoria elaborada por Gaston Bachelard sobre *obstáculos* na formação do conhecimento científico, tais como obstáculos epistemológicos e psicológicos advindos da concepção de formação destes conceitos. Com isso o que se pretendia era adotar uma abordagem mais interpretativa para o entendimento dos significados, do referido conceito, produzidos por cada estudante.

Ao se analisar os dados gerados nesta pesquisa foi possível identificar na produção oral e escrita dos estudantes pesquisados, sobre o conceito de limite de função de uma variável real em cálculo, elementos que, colocados em consonância com o referencial teórico utilizado, nos ajudaram a perceber obstáculos de natureza epistemológica e de natureza psicológica.

A análise dos protocolos permitiu verificar que: (1) A existência de conceitos matemáticos prévios (como por exemplo, o de fração) dificultava a construção de um novo conceito e por consequência a compreensão de um novo sistema; (2) Argumentos baseados em experiências anteriores geravam obstáculos de natureza psicológica que dificultavam, para o estudante, a compreensão de um fato novo. (3) Havia uma concepção de fragmentação do conceito pelo estudante que impedia, em muitos momentos, a compreensão do fenômeno apresentado. (4) Detectou-se a utilização de argumentos de natureza verbal informal inapropriados (tais como, (A14): “esse limite não existe, pois o denominador nesse caso vai anular”; ou (A13): “Creio que como não pude eliminar o valor zero do denominador o limite não existe”) que eventualmente permitiam ao estudante chegar a conclusões verdadeiras ou a conclusões falsas ou não chegar à conclusão alguma; em nosso entendimento, tais argumentos trazem obstáculos à aprendizagem. (5) Uso de argumentos matemáticos formais não adequados ao problema que estava posto

(como por exemplo, (A19): “Os valores laterais são diferentes logo a [função] não é limitada”), impedido a solução ou a solução adequada deste.

Em termos de conclusões gerais do presente trabalho, pode-se dizer que as crenças construídas por os estudantes pesquisados nas suas representações sobre limite de função de uma variável real possibilitam um terreno inicial para a construção de significado nesse domínio, mas por outro lado, possibilitam igualmente o surgimento de obstáculos que promovem dificuldades para compreensão do conceito de limites em cálculo.

Os problemas de aprendizagem, em contexto escolar, surgem nas relações dialógicas que se estabelecem entre os indivíduos no interior da sala de aula no cotidiano escolar. A produção de significados, embora esteja sendo criada no coletivo e permeada pela cultura na qual o sujeito está inserido, é individual e só passa a ser compartilhada coletivamente depois de construída individualmente, pois no processo de construção o sujeito apropria-se da informação, internaliza, transforma e exterioriza. Nessas condições, a escola não pode desconsiderar a singularidade de cada indivíduo e o papel ativo que desempenha na construção do conhecimento.

Um novo projeto deve ser assumido no tocante a (re)definir a escola e a sala de aula, e vice versa, enquanto espaço de aprendizagem, apropriação e produção do conhecimento científico e cultural, de maneira que ensino-aprendizagem sejam indissociáveis no processo de incorporação desse conhecimento científico e cultural. E nesse projeto devem ser modificadas as relações instituídas entre professor(es) e aluno(s).

Nossa proposta é que se busque no ensino de Cálculo a variedade de situações-problema e representações, de modo que esta enriqueça a compreensão

do conceito de limite de função em Cálculo. Este é um conceito matemático abstrato, e como tal é um conceito (como muitos conceitos matemáticos) que nem sempre tem correlação com o mundo físico. Portanto é mister que se prepare o estudante para transformar no devido tempo modelos rígidos em modelos mais plásticos e que isto possa implicar em níveis mais elevados de abstração que promovam o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

### **PROPOSTA DE NOVAS PESQUISAS**

Neste trabalho nós nos propusemos a investigar os obstáculos e as dificuldades inerentes ao ensino e aprendizagem do conceito de limite em cálculo. Nossa avaliação é que tais objetivos foram alcançados, contudo algumas questões ficaram passíveis de serem investigadas com maior profundidade e outras de serem ainda investigadas. Uma questão, por exemplo, que precisaria ser considerada diz respeito a uma busca de generalização dos dados aqui encontrados; dito de outra maneira, em que medida o que foi observado com os dez alunos pesquisados aparece nos demais alunos dos diversos cursos que utilizam o cálculo como disciplina básica.

Mas a sala de aula continua sendo um campo fértil para investigação das questões relacionada, ao ensino-aprendizagem de matemática, e no que diz respeito ao ensino de matemática no terceiro grau, mais ainda. Sendo assim algumas questões poderiam ser sugeridas para serem investigadas em futuros trabalhos de pesquisa, uma delas seria verificar a relevância de variáveis afetivas, tais como a motivação de professores e estudantes em uma sala de aula de Cálculo Diferencial e Integral, para a aprendizagem dos conceitos aqui discutidos; uma outra vertente

de pesquisa interessante seria especificar as crenças culturais e normativas presentes implícita ou explicitamente no contrato didático de funcionamento da sala de aula de Cálculo Diferencial e Integral; finalmente, outra direção de pesquisa poderia ser a investigação do discurso em sala de aula como cenário de construção de significados dos Conceitos utilizados no ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

As três perguntas balizadoras da investigação do processo de conceptualização de limite de função de uma variável real, conforme já haviam sido apresentadas foram: (1) Que tipo de construção conceitual é produzida pelo estudante de cálculo? (2) Quais as construções básicas dos alunos nas questões propostas relativas a limites? (3) Que obstáculos poderiam ser apontados no processo de construção conceitual realizado pelos alunos?

Com relação à primeira pergunta (Que tipo de construção conceitual é produzida pelo estudante de cálculo?), a análise dos dados indicam que os estudantes pesquisados concebem o limite de uma função como o valor real máximo que determinada função pode alcançar, mas que é inatingível. A perspectiva de valor real máximo compreende apenas valores finitos já que para a maioria deles o infinito não existe, ou pelo menos existe somente potencialmente, o que significa dizer que o infinito é visto somente como uma construção mental em matemática, apenas uma idéia.

No que tange à segunda pergunta (Quais as construções básicas dos alunos nas questões propostas relativas a limites?), o que se pode dizer é que a maioria dos sujeitos entrevistados reconhece a existência do limite no caso das funções polinomiais reais (funções que são globalmente contínuas, isto é, contínuas em todo conjunto dos números reais). Mesmo assim poucos reconhecem a

continuidade da função quando ela aparece. Os procedimentos utilizados, por esses estudantes, na resolução dos problemas são muitas vezes mecânicos. Mecânicos porque os estudantes, na maioria dos problemas resolvidos, preocupavam-se apenas em substituir o valor da variável na função em que se estava pretendendo determinar o limite, para ver que resultados obtinham sem ter uma preocupação em analisar a função em tela, o que significa dizer, por exemplo, não observavam nem o domínio da referida função para verificar se o valor aludido para determinar o limite pertencia ou não ao domínio da função dada.

E mais, ao empregarem o conceito de limite lateral para resolver os problemas apresentados, não mostram uma atitude de que reconhecem a utilização deste conceito. Significa dizer que não apresentam, em alguns momentos, argumentos plausíveis com a utilização do referido conceito, por isso a insegurança demonstrada na obtenção dos resultados, concluindo, muitas vezes, diferentemente do que aparece nas soluções obtidas, como encontrar (por exemplo, para a função apresentada na questão três item c) limites laterais diferentes e concluir que o limite da função dada existe. As concepções mais presentes entre os estudantes pesquisados do conceito de limite de função real a uma variável real são do limite relacionado a movimento de aproximação a um valor real finito e que o limite de uma função não é atingido, fica apenas próximo do valor esperado.

Com relação ao último questionamento (Que obstáculos poderiam ser apontados no processo de construção conceitual realizado pelos alunos?), pode-se dizer que aparecem obstáculos de natureza epistemológica, relacionados: à idéia de movimento da função e da variável independente (com relação às funções adotadas, a variável é  $x$ ) em direção a um ponto ou valor, o que poderíamos denominar de obstáculos cinéticos, concordando com a classificação de Sierpinska (1987), bem



como a redução do limite da função a valores numéricos inteiros, o que poderíamos chamar de concepções mais estáticas do limite, que na acepção da mesma autora seriam os obstáculos estáticos. Além dos obstáculos epistemológicos citados aparecem também obstáculos epistemológicos inerentes ao rigor matemático, cujo aspecto está relacionado à maneira como é ensinado o limite de funções de uma variável recorrendo-se a uma estratégia de ensino que privilegia, muitas vezes, à tríade: teorema (ou definição) – demonstração – exercício; sem deixar de mencionar os obstáculos de natureza psicológica, associados às convicções prévias sobre a matemática e sobre o conteúdo de limites, como sendo complicados e de difícil compreensão.

Esperamos que os obstáculos epistemológicos referidos nesse trabalho e a sua natureza tornem-se de conhecimento de professores de Cálculo e, que assim sendo, possam trazer contribuições para esses professores no que tange a determinação das suas estratégias de ensino de limites de função. Na perspectiva de escolherem as estratégias que sejam mais apropriadas ao processo de ensino de limite de função. De maneira que dêem aos estudantes de Cálculo a possibilidade de superação destes obstáculos, propiciando uma melhor aprendizagem do limite de função.

## BIBLIOGRAFIA

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Editora Martins Fontes 1998.

ABRÃO, B. S. *História da Filosofia*. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

ALIBERT, D. & THOMAS, M. Research on Mathematical Proof. In: *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1991.

BACHELARD, G. O Novo Espírito Científico. In: *Os Pensadores*. Vol. XXXVIII; São Paulo: Editora Abril Cultural, 1974.

\_\_\_\_\_. *A Formação do Espírito Científico: uma contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Tradução por Estela dos Santos Abreu. 2. reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto Editora Ltda, 1999.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdos*. Lisboa – Portugal: Edições 70 Ltda, 1977.

BARON, M. E. & BOSS, H. J. M. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo*. Tradução por José Raimundo Braga Coelho [et al]. Vol. 1-5, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BEZERRA, P. & FERNANDES, A. *Fundamentos de Taxionomia Vegetal*. Fortaleza: Edições Universidade Federal do Ceará, 1989.

BITTENCOURT, J. Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática In: *Educação Matemática em Revista*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Maio, 6(5), 1998. p. 13-17.

BKOUCHE, R. Sur la Notion de Perspective Historique dans L'enseignement d'une Science In: *REPERES – IREM*, 39 : Avril, 2000. p. 35-48.

BOYER, C. B. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications Inc., 1959.

\_\_\_\_\_. *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, 2.Ed. New York, 1968.

CANDELA, A. Construção Discursiva de Contextos Argumentativos no Ensino de Ciências In: *Ensino Aprendizagem e Discurso em Sala de Aula: Aproximações Ao Estudo Do Discurso Educacional*. Coll & Edwards (Eds.), Porto Alegre, Artes Médicas, 1998. p. 143–169.

CARRAHER, D. W. Educação Tradicional e Educação Moderna. In: *Aprender Pensando: Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação*. Petrópolis: Ed. Vozes, 1988. p. 11-29.

CARRAHER, T. N., SCHLIEMANN, A. D., CARRAHER, D. W. Mathematical Concepts in Everyday Life. In: *Street Math and School Math: The Cultural Contexts of Learning Mathematics*, 1988.

CASSIRER, E. On the Theory of the formation of Concepts. In: *Substance and Function*. New York: Dover, 1923. p. 3–26.

\_\_\_\_\_. *Substance et fonction: éléments pour une théorie du concept*. Paris: Les Editions de Minuit, 1977.

COLL, C. & ONRUBIA, J. A Construção de Significados Compartilhados em Sala de Aula: atividade conjunta e dispositivos semióticos no controle e no acompanhamento mútuo entre professores e alunos In: *Ensino aprendizagem e discurso em sala de aula: aproximações ao estudo do discurso educacional*, Coll & Edwards (Eds.). Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 75–106.

CORNU, B. Limits. In: *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall (Ed.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

COURANT, R. & ROBBINS, H. *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. London. Oxford University Press, 1953.

Da ROCHA FALCÃO, J. T. Elementos para uma Abordagem Psicológica do Desenvolvimento de Conceitos Científicos e Matemáticos In: *Tópicos em Psicologia Cognitiva*. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996. p. 139-167.

DREYFUS, T. Advanced Mathematica Thinking Process. In: *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall (Ed.), Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

EDWARDS Jr, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer – Verlag, 1979.

EDWARDS, D. Em Direção a uma Psicologia do Discurso da Educação em sala de aula In: *Ensino aprendizagem e discurso em sala de aula: aproximações ao estudo do discurso educacional*. Coll & Edwards (Eds). Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 47–74.

FREI BETTO. Como deixar-se moldar pelo sistema In: *Revista Caros Amigos*, setembro, 2000.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREUDENTHAL, H. Notation mathématique In: *Encyclopædia Universalis*. Vol. 16. Paris: Encyclopædia Universalis S/A, 1989. p. 474-480,

FROTA, M. C. R. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo In: *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte: Editora FUMARC, 2001.

\_\_\_\_\_. *O pensar Matemático no Ensino Superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos*. (Tese Doutorado em Educação - Conhecimento e Inclusão Social) Belo Horizonte: Faculdade de Educação/UFMG, 2002.

FUSON, K. Roles of Representation and Verbalization in the Teaching of Multidigit addition and subtraction. *European Journal of Psychology of Education*, 11(1/2), 1986. p. 2-8.

GREENO, J. The Situated Activities of Learning and Knowing Mathematics. *Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. DeKalb, IL: The Program Committee, 1988. p. 481-521.

HAREL, G. & KAPUT, J. The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts In: *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall (Ed.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

KENT, P. & STEVENSON, I. "Calculus in Context"; A Study of Undergraduate Chemistry Students' Perception of Integration. *Submitted to the Psychology of Mathematics Education 23 conference*. Israel: July 1999.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo In: *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte: Editora FUMARC, 2001.

LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R. E. *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, 2000.

LEFÈVRE, F. & LEFÈVRE, A. M. C. *O Discurso do Sujeito Coletivo: uma nova abordagem metodológica em pesquisa qualitativa*. São Paulo: Faculdade de Saúde Pública/USP, 1999.

LEITÃO, S. The Potential of Argument in Knowledge Building. *Human Development*, 43, 2000. p. 332–360.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 1 e 2. 3.Ed. São Paulo: Editora Harbra Ltda. São Paulo, 1994.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científico Editora S.A., 1978.

LINS, R. C. *Polêmica: os problemas da educação matemática*. Folha Online, Sinapse, 29 de abril de 2003. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u385.shtml>. Acessado em 29 de abril de 2003.

MAINGUENEAU, D. *Novas tendências em análise do discurso*. 2.Ed. Editora Pontes, 1993. p. 9–25.

MARCUSCHI, L. A. *Análise da conversação*. 5.Ed. São Paulo: Editora Ática, 1999.

MARKOVÀ, I. A Three – step Process as a Unit of Analysis in Dialogue In: *The dynamics of dialogue*, I. Markovà e K. Foppa (Eds.). Hemet Hempstead: Hawser Press, 1990. p. 129–146.

MEEL, D. E. Honors Students' Calculus Understanding: Comparing Calculus & Mathematica and traditional Calculus Students, CBMS Issues In: *Mathematics Education*. Vol. 7, 1998. p. 163–215.

MEIRA, L. Análise Microgenética e Videográfica: Ferramentas de Pesquisa em Psicologia Cognitiva. *Revista Temas em Psicologia*. N.3, 1994. p. 59-71.

\_\_\_\_\_. Making Sense of Instructional Devices: The Emergence of Transparency in Mathematical Activity, *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 29. n. 2, 1998. p. 121-140.

MERCER, N. As Perspectivas Socioculturais e o Estudo do Discurso em sala de aula. In: *Ensino aprendizagem e discurso em sala de aula: aproximações ao estudo do discurso educacional*. Coll & Edwards (Eds.). Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 13-28.

MRECH, L. M. *Psicanálise e educação: novos operadores de leitura*. São Paulo: Pioneira, 1999.

MONTEIRO, L. C. S. *O Desenvolvimento das metáforas do conceito de infinito na educação matemática*. (Dissertação de mestrado em Psicologia ) Recife. Centro de Filosofia e Ciências Humanas/ UFPE, 2003.

NEMIROVSKY, R., TIERNEY, C., WRIGHT, T. Body Motion and Graphing. *Cognition and Instruction*, n.16; Ano 2, 1998. p. 119-172.

NETO, P. C. *Ao Pé da Letra*. Rio de Janeiro: Editora do Brasil S.A., 2001.

PIAGET, J., SZEMINSKA, A. *A Gênese de Número na Criança*. 2.Ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC, 1975.

PINTO, M. M. F. Discutindo a transição dos cálculos para a análise real. In: *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte: Editora FUMARC, 2001.

PIRIE, S. E. B. & KIEREN, T. E. A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, n. 3; Ano 9 , 1989. p. 7-11.

PONTECORVO, C. & GIRARDET, H. Arguing and Reasoning in Understanding Historical Topics. *Cognition and Instruction*, n.3 e n.4; Ano 11. 1993. p. 365-395.

ROBERT, A. L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, n.3, 1982. p. 307-341.

ROBERT, A. & SCHWARZENBERGER, R. Research in Teaching and learning mathematics at an advanced level. In: *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall (Ed.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

ROSHELLE, J. *Preliminary Report on Classroom Observations*. Relatório interno. , Palo Alto – Califórnia: Institute for Research on Learning, 1991.

RUSSEL, B. *Introdução à Filosofia Matemática*. 4.Ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981.

SAD, L. A. *Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro – SP: Instituto de Geociências e Ciências Exatas/ UNESP, 1998.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill Editora, 1987.

SIERPINSKA, A. Obstacles Epistemologiques relatifs a la notion de Limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 6. n.1, 1985. p. 5-67.

\_\_\_\_\_. Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits, *Educational Studies in Mathematics*, n. 18; 1987. p. 371- 397.

TALL, D & VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n.12. 1981. p. 151-169.

VALSINER, J. *Culture and Human Development*. London - UK : SAGE, 2000.

VAN DER VEER, R. & VALSINER, J. *Vygotsky uma síntese*. São Paulo: Edições Loyola, 1996.

VERGNAUD, G . Conclusion (Chapter 18). In: *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Janvier, C. (Ed.), Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, 1987a.

\_\_\_\_\_. Questions vives de la Psychologie du Developpement Cognitif. *Questions Vives de la Psychologie*. Colloque D' Aix – en – Provence, 1987b.

\_\_\_\_\_. La Théorie des Champs Conceptueles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 10. n. 13, 1990. p. 133-170.

\_\_\_\_\_. The Nature of Mathematical Concepts In: *Learning and teaching mathematics: an international perspective*. NUNES; BRYANT (Eds). London: Psychology Press, 1997.

VINNER, S. Cognitive theory of advanced mathematical thinking In: *Advanced Mathematical Thinking*. David Tall (Ed.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

WILLIAMS, S. R. Models of Limit Held by College Calculus Student. *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol 22. n.3, 1991. p. 219 – 236,



## **APÊNDICES**

## Apêndice 1

## Conjunto de Problemas

## Universidade Federal de Pernambuco

## Centro de Filosofia e Ciências Humanas

## PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

CÓDIGO DO ALUNO (NÃO PREENCHER): \_\_\_\_\_

1. Se um colega lhe perguntasse o que é limite de uma função o que você escreveria para ele?
2. Crie um problema em que se possa utilizar o limite de uma função que, ilustre o seu conceito de limite. Indique de que maneira você resolveria este problema.
3. Verifique se existe o limite abaixo. Em caso afirmativo calcule esse limite.

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x^2 - 3)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x > -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

d. Seja  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ . Calcule,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

4. As informações que constam abaixo foram dadas por alguns alunos da área II, quando solicitados que dessem um conceito de limite. Gostaria, se possível, que você se posicionasse, tecendo comentários sobre cada uma dessas respostas.

- a. Um limite descreve para onde uma função  $f(x)$  se move quando a variável  $x$  se move em direção a um certo ponto.
- b. Um limite é um número ou ponto além do qual uma função não pode ultrapassar.
- c. Um limite é um número do qual os valores  $y$  de uma função  $y = f(x)$  podem ficar arbitrariamente próximos ao se limitar os valores de  $x$ .
- d. Um limite é um número ou ponto do qual a função se aproxima mas nunca alcança.
- e. Um limite é uma aproximação que pode se tornar tão exata quanto você desejar.
- f. Um limite é determinado ao se colocar na variável de uma função valores numéricos cada vez mais próximos a um dado número até que o limite seja alcançado.

**Apêndice 2****Informações Biográficas**

**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Centro de Filosofia e Ciências Humanas**  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

---

**CÓDIGO DO ALUNO (NÃO PREENCHER):** \_\_\_\_\_

**1. NOME:** \_\_\_\_\_

**2. SEXO:** 1( ) MASCULINO 2( ) FEMININO **3. IDADE:** \_\_\_\_\_

**4. NOME DO CURSO:** \_\_\_\_\_

**5. ANO DE INGRESSO:** \_\_\_\_\_ **6. PERÍODO:** \_\_\_\_\_

**7. ESCOLA QUE FREQUENTOU NO ENSINO MÉDIO:**

1( ) REDE PÚBLICA 2( ) REDE PRIVADA

**8. DIGA QUAL CURSO FREQUENTOU NO ENSINO MÉDIO**

1( ) CIENTÍFICO 2( ) TÉCNICO 3( ) MAGISTÉRIO

**SE CURSO TÉCNICO ESPECIFIQUE:** \_\_\_\_\_

**9. ESCOLARIDADE DO PAI**

1( ) NÃO ESTUDOU

2( ) PRIMEIRO GRAU INCOMPLETO

3( ) PRIMEIRO GRAU COMPLETO

4( ) SEGUNDO GRAU INCOMPLETO

5( ) SEGUNDO GRAU COMPLETO

6( ) TERCEIRO GRAU INCOMPLETO

7( ) TERCEIRO GRAU COMPLETO. ESPECIFIQUE O CURSO: \_\_\_\_\_

**10. NO CASO DE PÓS-GRADUAÇÃO ESPECIFIQUE A TITULAÇÃO**

1( ) ESPECIALIZAÇÃO 2( ) MESTRADO 3( ) DOUTORADO

**11. PROFISSÃO DO PAI:** \_\_\_\_\_

**12. ESCOLARIDADE DA MÃE**

1( ) NÃO ESTUDOU

2( ) PRIMEIRO GRAU INCOMPLETO

3( ) PRIMEIRO GRAU COMPLETO

4( ) SEGUNDO GRAU INCOMPLETO

5( ) SEGUNDO GRAU COMPLETO

6( ) TERCEIRO GRAU INCOMPLETO

7( ) TERCEIRO GRAU COMPLETO. ESPECIFIQUE O CURSO: \_\_\_\_\_

**13. NO CASO DE PÓS-GRADUAÇÃO ESPECIFIQUE A TITULAÇÃO**

1( ) ESPECIALIZAÇÃO 2( ) MESTRADO 3( ) DOUTORADO

**14. PROFISSÃO DA MÃE:** \_\_\_\_\_

**15. QUAL A SUA PROCEDÊNCIA?**

1( ) CAPITAL                      2( ) INTERIOR

DE QUAL MUNICÍPIO: \_\_\_\_\_

**16. QUAL O TIPO DA SUA MORADIA EM RECIFE ?**

- 1( ) CASA  
 2( ) APARTAMENTO  
 3( ) PENSIONATO  
 4( ) CASA DO ESTUDANTE  
 5( ) REPÚBLICA

**17. COM QUEM VOCÊ MORA ATUALMENTE EM RECIFE?**

1( ) PAIS    2( ) PARENTES    3( ) COLEGAS    4( ) AMIGOS    5( ) SOZINHO

**18. VOCÊ EXERCE ALGUM TIPO DE ATIVIDADE REMUNERADA?**

1( ) SIM                      2( ) NÃO

**EM CASO AFIRMATIVO RESPONDA AS QUESTÕES 19, 20, 21 , SE NÃO PASSE IMEDIATAMENTE A QUESTÃO 22.****19. QUAL É ESSA ATIVIDADE?** \_\_\_\_\_**20. EM QUAL (IS) TURNO(S) VOCÊ TRABALHA?** \_\_\_\_\_**21. QUANTAS HORAS DIÁRIAS OU SEMANAIS VOCÊ TRABALHA?** \_\_\_\_\_**22. VOCÊ JÁ FOI REPROVADO ALGUMA VEZ EM CÁLCULO I, NA UFPE?**

1( ) SIM, QUANTAS VEZES? \_\_\_\_\_ 2( ) NÃO

**23. QUANTAS VEZES CURSOU A DISCIPLINA CÁLCULO I, NA UFPE?**

1( ) UMA VEZ    2. ( ) MAIS DE UMA VEZ    QUANTAS VEZES? \_\_\_\_\_

**24. VOCÊ FREQUENTOU A REFERIDA DISCIPLINA ATÉ O FIM, TODAS AS VEZES?**

1( ) SIM    2( ) NÃO

**NO CASO DA RESPOSTA SER NEGATIVA ESPECIFIQUE O MOTIVO DO ABANDONO**


---

---

---

---

---

---

---

---

**25. JÁ FOI REPROVADO EM ALGUMA OUTRA DISCIPLINA NO SEU CURSO ATUAL, ATÉ HOJE?**

1( ) SIM                      2( ) NÃO

**EM CASO AFIRMATIVO CITE-A(S) COM O RESPECTIVO SEMESTRE DA REPROVAÇÃO**


---

---

---

---

---

## Apêndice 3

## Exemplos

**Exemplo 1:** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ , (com  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $n$  é um número natural)<sup>13</sup> tem por soma 2.

**Solução:** Considere a sequência  $\{u_n\}$ , cujo termo geral é  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ , onde alguns termos estão abaixo representados,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots,$$

a partir desta sequência se pode formar a sequência de somas parciais seguinte,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 & \Leftrightarrow s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} & \Leftrightarrow s_2 &= \frac{3}{2} \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \Leftrightarrow s_3 &= \frac{7}{4} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & \Leftrightarrow s_4 &= \frac{15}{8} \\ s_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & \Leftrightarrow s_5 &= \frac{31}{16} \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (1)$$

essa sequência de somas parciais  $\{s_n\}$

forma a série infinita denotada por,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad (2)$$

para determinar se a série tem uma soma precisamos calcular o limite de  $s_n$  com  $n$  tendendo ao infinito, ou seja, precisamos calcular o limite da série para um valor do número natural  $n$  tão grande quanto se possa estipular, para isso tomar-se-á,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

em primeiro lugar, para solucionar esse problema, é preciso encontrar uma fórmula para  $s_n$ . Da álgebra, pode-se fazer uso da seguinte identidade,

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (3)$$

aplicando esta fórmula na identidade (3) acima, com  $a = 1$  e  $b = \frac{1}{2}$ , tem-se

$$1 - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (4)$$

<sup>13</sup> Neste exemplo  $n$  será tomado sempre como um número natural.

<sup>14</sup> Observe que o valor  $1 - \frac{1}{2^n}$ , no primeiro membro da identidade (3), foi obtido pelas substituições de  $a = 1$  e de  $b = \frac{1}{2}$  na referida identidade, e resulta dos seguintes passos, que foram omitidos:

Essa equação (4) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Comparando-se as equações (5) e (1), pode-se escrever,

$$s_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \quad (6)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . Aplicando-se o limite em ambos os membros de (6), obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \right] \quad (7)$$

Aplicando-se as propriedades de limites em (7) obtém-se o seguinte resultado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \right) = 2 \cdot (1 - 0) = 2 \quad (8)$$

Assim sendo, pode-se concluir que, a série infinita, representada em (2), tem por soma 2, (LEITHOLD, vol.2).

**Exemplo 2:** Determine o limite da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , para  $x \rightarrow +\infty$ , com  $x \in X$  e  $X = \mathbb{R}^+$  (onde  $\mathbb{R}^+$  é o conjunto dos números reais não negativos).

**Solução:**

Pela definição (3) acima, de limite no infinito, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

Pois, dada a propriedade que garante que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$  se  $r$  for um inteiro positivo qualquer, pode ser garantido o limite da função dada (no caso específico da função apresentada  $r=1$ ). além do mais o resultado encontrado pode também ser visualizado, bastando, para isso, que se observe o gráfico da função definida, que para valores de  $x > 0$  é uma curva, denominada hipérbole, que está localizada no primeiro quadrante (quadrante positivo) do plano cartesiano, donde, a medida que a variável independente  $x$  passa a assumir valores cada vez maiores no semi-eixo

$$(1)^n - \left( \frac{1}{2} \right)^n = 1 - \frac{(1)^n}{(2)^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

<sup>15</sup> O segundo membro da identidade (foi obtido 4) após efetuar a subtração  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  e daí, utilizando o princípio da equivalência na referida identidade (4) obtemos o resultado desejado que é apresentado em (5).

<sup>16</sup> As propriedades de limites envolvidas são as seguintes: na primeira igualdade é que o limite de um produto é o produto dos limites. Quando passamos para a segunda igualdade usamos na expressão entre parênteses as propriedades seguintes, que o limite da soma é a soma dos limites e que o limite de uma constante é o valor da própria constante, e, por fim aplicamos no segundo termo da subtração que se encontra entre parênteses o resultado já enunciado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

positivo horizontal, a imagem de cada um desses pontos, que é representada pela variável  $y = f(x)$ , passa a assumir no semi-eixo vertical positivo, valores cada vez mais próximo de zero, sem contudo atingir o zero, desde que  $x$  não alcança o infinito. ou seja, o valor zero para o limite da função é uma atribuição feita com a finalidade de limitar o crescimento da variável  $x$ , delimitando-se, portanto,  $y = f(x)$ . o que é interessante observar, é que  $+\infty$  não é um número real, e como tal não existe. além disso o limite que estamos trabalhando é um limite lateral, neste caso lateral à direita.

Vejam os exemplos a seguir, baseando-se na mesma função do exemplo um acima. observe como a mesma função pode assumir um comportamento diferente em relação ao limite, a depender do comportamento que se está querendo verificar.

**Exemplo 3:** Determine o limite da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , para  $x \rightarrow 0^+$  (significa que  $x$  se aproxima de zero apenas pelo semi-eixo positivo das abscissas) com  $x \in X$  e  $X = \mathbb{R}^+ - \{0\}$  ou  $X = \mathbb{R}_+^*$  (que quer dizer conjunto dos números reais positivos).

**Solução:**

De acordo com a definição (4), de limite infinito, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

O gráfico da função é o mesmo da função do exemplo anterior, porém a propriedade que se está usando nesse momento para definir o limite é a que estabelece que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty, \text{ sempre que } r \text{ for um inteiro positivo qualquer. além disso pode-se}$$

ainda fazer as seguintes observações: (1) que o número real zero não faz parte do domínio da função e assim sendo a variável  $x$  nunca atingirá esse valor por mais que se aproxime dele por um número real positivo; (2) que embora  $+\infty$  não represente um número real, de maneira que a definição referida imediatamente acima não exprime limite no sentido estrito da definição.

A metáfora do infinito é utilizada, neste caso, para justamente representar essa indeterminação da variável  $x$  para atingir o valor zero à direita

## Apêndice 4

## Quadro - Obstáculos

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | OBSTÁCULO HEURÍSTICO |          |            |          | OBSTÁCULO RIGORISTA |           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------|------------|----------|---------------------|-----------|
|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | ESTÁTICO             |          | CINÉTICO   |          | De Eudoxo           | De Fermat |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Geométrico           | Numérico | Geométrico | Numérico |                     |           |
| AI 1 | O limite de uma função para mim é o máximo valor onde determinada função consegue chegar, ou seja, nunca irá ultrapassar essa marca.<br><b>[Limite à idéia de movimento]</b>                                                                                                                                                             |                      |          |            | +        |                     |           |
| AI 2 | Agora em cálculo vou explicar o que, matematicamente um númerosinho, diminuízinhos...<br><b>[Limite a provar relações entre quantidades]</b>                                                                                                                                                                                             |                      |          |            |          | +                   |           |
|      | (...) Eu sei que a derivada é a área de um gráfico, né! então esse limite seria exatamente o extremo desse gráfico que me daria os pontos de extremidade do gráfico<br><b>[Limite à derivada e este ao conceito de área]</b>                                                                                                             | +                    |          |            |          |                     |           |
| AI 3 | Eu acho que limite é um número, um valor ou um ponto onde uma função não alcançará. Aquele valor exato<br><b>[Limite como ponto ou número inatingível]</b>                                                                                                                                                                               |                      |          |            | +        |                     |           |
| AI 4 | Eu posso ter um limite e representar uma reta ele... a função... poderia representar uma função na qual o limite representasse uma reta.<br><b>[Limite à representação geométrica]</b>                                                                                                                                                   | +                    |          |            |          |                     |           |
| AI 5 | No meu ponto de vista esse comentário está incompleto, pois deveria ter dito que: $x \in \mathbb{R}$ e com tendência a um número real positivo $a$ . Se isso for verificado, para um número $\mathfrak{N}$ positivo e $(ra)$ real, existe um número $h$ positivo e $(ra)$ real.<br><b>[Limite a rigor de relações entre quantidades]</b> |                      |          |            |          | +                   |           |
|      | (...) o limite seria quando uma função tendesse para alguma coisa, isso pode ser número real ou infinito mesmo, pra chegarmos a outra que não, eh                                                                                                                                                                                        |                      | +        |            |          |                     |           |



|      |                                                                                                                                                                                                                                                              |  |   |   |  |   |   |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---|---|--|---|---|
| AI 6 | ... não resultasse o denominador desta função caso tenha um zero, ou que ela não exista, ou que não exista o limite.<br><b>[Função é reduzida ao conjunto dos seus valores]</b>                                                                              |  |   |   |  |   |   |
| AI 7 | Simplesmente a gente não pode determinar o limite mais infinito menos infinito, não sei se pode usar, porque indeterminação, né? Porque o limite usado é infinito.<br><b>[O infinito não existe ou só existe potencialmente]</b>                             |  | + |   |  |   |   |
| AI 8 | O limite é um ponto no gráfico onde você acompanhando o gráfico tanto pela esquerda ou pela direita o gráfico vai tender para aquele ponto desejado.<br><b>[Limite movimento de aproximação a um gráfico]</b>                                                |  |   | + |  |   |   |
|      | (...) quando você aproxima ao número de x por números muito próximos a sua função vai andar até chegar ao limite.<br><b>[Limite a movimento de aproximação a número ou ponto]</b>                                                                            |  |   | + |  |   |   |
|      | Então também ele é um número, porque, na função, se você jogar aquele número na função, o limite vai tender para aquele número tanto como se você chegar bem perto do número é exatamente o limite.<br><b>[Relaciona número à variável na função]</b>        |  |   |   |  |   | + |
| AI 9 | (...) em dada função cujo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ a função (nunca) será limitada no valor de $x = 1$ tendendo ao infinito, sendo limite pela esquerda $-\infty$ e pela direita $+\infty$ .<br><b>[Limite à expressão analítica da função]</b> |  |   |   |  |   | + |
|      | A matemática tá cheia de regra mãe<br><b>[Limite a teoremas e propriedades]</b>                                                                                                                                                                              |  |   |   |  | + |   |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |  |   |  |  |  |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--|---|--|--|--|
|  | <p>Eu entendo limite basicamente como sendo a descrição da trajetória de uma partícula sobre uma curva assim fica mas fácil para mim entender.(...) eu não consigo entender com sendo números, ou simplesmente um número.</p> <p><b>[Limite à idéia de trajetória de uma partícula]</b></p> | + |  |   |  |  |  |
|  | <p>É o desenho que a partícula está fazendo num determinado ponto você determina os pontos e ali você consegue traçar a trajetória e essa trajetória é que vai dar o limite pelo caminho que ela faz</p> <p><b>[Limite à idéia de trajetória de uma partícula]</b></p>                      |   |  | + |  |  |  |

**QUADRO 17:** Relação entre obstáculos epistemológicos relacionados a limites e as concepções dos estudantes relacionadas aos conceitos de limites

## Apêndice 5 DIÁLOGO ENTRE PESQUISADOR E UM ESTUDANTE PESQUISADO

DIÁLOGO ENTRE O PESQUISADOR E O ESTUDANTE RESPONDENTE (AI9) DURANTE A SUA SOLICITAÇÃO DE REFORMULAÇÃO DAS RESPOSTAS ÀS QUESTÕES 3B E 3D.

**AI9** – No caso retomando a terceira questão item B.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

**AI9** – Xis tendendo a um... menos um menos xis. não tem limite.

**P** – VOU LHE MOSTRAR UMA COISA AQUI TÁ CERTO.

**AI9** – O que?

**P** – VOCÊ MESMO QUE ESCREVEU 4.

**AI9** – Sinceramente eu acho que ...

**P** – VAMOS FAZER O SEGUINTE TENTE TRAÇAR O GRÁFICO DESSA FUNÇÃO, VEJA SE VOCÊ CONSEGUE.

**AI9** – O gráfico da função. eu sou acostumado fazer gráfico não tenho lembrança, estou mal. é zero, né?

**P** – CADÊ ONDE É QUE ESTÁ O ZERO?

**AI9** – Ah! tem que colocar mais um zero aqui? ah! sim, sim, entendi.

**P** – NÃO PORQUE VOCÊ ESTÁ DIZENDO AQUI A DERIVADA DE UM QUE MULTIPLICA XIS MENOS UM, ENTÃO TEM QUE APARECER O ZERO AQUI.

**AI9** – Esse aqui é um zero menos um que multiplica o número de xis. se é porque, na hora normalmente sai mais rápido, mais. xis é um ... igual a zero ...

**P** – ESTÁ ERRADO, JÁ QUE VOCÊ ESTÁ FALANDO EM PONTOS CRÍTICOS. QUAL É A DEFINIÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS?

**AI9** – Porque tem que achar o ponto crítico primeiro, pra saber a segunda derivada no caso, se é crescente ela.

**P** – CERTO MAIS ONDE É QUE ESTÃO OS PONTOS CRÍTICOS DA FUNÇÃO? ONDE É QUE VOCÊ ENCONTRA OS PONTOS CRÍTICOS DA FUNÇÃO?

**AI9** – Aonde é que encontro os pontos críticos?

**P** – EH!, ONDE É QUE ESTÃO DETERMINADOS OS PONTOS CRÍTICOS DA FUNÇÃO?

**AI9** – Onde a primeira derivada for zero.

**P** – SÓ?

**AI9** – Não, aí eu acho que.

**P** – VAMOS VER SÓ, PONTOS CRÍTICOS SÓ OCORREM ONDE A PRIMEIRA DERIVADA É ZERO?

**AI9** – Depende da função, né.

**P** – ENTÃO, ONDE A PRIMEIRA DERIVADA É ZERO OU, QUAL É A OUTRA SITUAÇÃO QUE PODE SER PONTO CRÍTICO?

**AI9** – Na verdade agora eu não lembro.

**P** – ONDE A PRIMEIRA DERIVADA NÃO EXISTE.

**AI9** – Eu sabia disso.

**P** – OS PONTOS QUE A FUNÇÃO PODE ACONTECER. ONDE A PRIMEIRA DERIVADA É ZERO, OU ONDE ELA NÃO EXISTE.

**A19** – Então, aqui no caso seria zero?

**P** – ESSA PRIMEIRA DERIVADA SE ANULA EM ALGUM PONTO?

**A19** – Xis igual a um. quer dizer.

**P** – ENTÃO XIS IGUAL A UM O QUE É QUE ACONTECE, COM A DERIVADA?

**A19** – Xis igual a um o que acontece com a derivada?

**P** – HUM, O QUE É QUE ACONTECE QUANDO VOCÊ FIZER XIS IGUAL A UM?

**A19** – Vai para o infinito.

**P** – ENTÃO A DERIVADA NÃO EXISTE? NÃO É ISSO?

**A19** – Exato.

**P** – PRONTO. ENTÃO ESSE É UM PONTO CRÍTICO.

**A19** – Ponto um.

**P** – UM, QUE VOCÊ JÁ TINHA COLOCADO AÍ NO GRÁFICO. PORQUE ESSA DERIVADA ELA SE ANULA AÍ EM ALGUM PONTO. TEM ALGUM PONTO, ALGUM VALOR DE XIS ONDE A DERIVADA SEJA ZERO? TENTANDO ASSIM GUIAR VOCÊ.

**A19** – Estou entendendo.

**P** – NO QUE VOCÊ ESCREVEU.

**A19** – Olhe assim qual objetivo de eu forma o gráfico, pra ver?

**P** – É UMA MANEIRA DE VOCÊ ESTUDAR A FUNÇÃO SE ELA TEM LIMITE OU NÃO. QUE LIMITE É. SÓ UMA AJUDA SE VOCÊ QUIZER CONTINUAR ANALISANDO..

**A19** – Não é verdade.

**P** – ACHO QUE VOCÊ CONSEGUIRIA PERCEBER, O QUE ESTÁ AQUI.

**A19** – Eu estou querendo me lembrar tá entendendo?

**P** – PENSE ASSIM. O QUE É QUE VAI ACONTECER COM A FUNÇÃO QUANDO ELA ASSUMIR VALORES, POR EXEMPLO, DISTANTE DE UM, NÃO É. VALORES MENORES DO QUE UM TÁ CERTO É QUE ESTEJA DISTANTE DE UM. O QUE É QUE VAI ACONTECER QUANDO ELA ASSUMIR VALORES MENORES DO QUE UM, MAS BEM MAIS PRÓXIMOS DE UM, DEPOIS VOCÊ VAI VER O COMPORTAMENTO TAMBÉM DA FUNÇÃO PARA VALORES MAIORES DO QUE UM BEM AFASTADO DE UM, E VALORES MAIORES OU ENTÃO BEM PRÓXIMOS DE UM. VOCÊ VER COMO É O COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO, COMO É QUE ELA SE COMPORTA AÍ VOCÊ VAI DESENHANDO.

**A19** – E não teria também a reta inclinada, ver se tem um limite inclinado. porque se

**P** – SE TIVER, SE TIVER. PORQUE COMO É O NOME DESSA RETA QUE VOCÊ COLOCOU PONTILHADA AQUI.

**A19** – É um limite, é o limite dela.

**P** – O QUE É QUE VAI ACONTECER AQUI COM A FUNÇÃO PERTO DELA?

**A19** – Quando ela vier para o limite pela esquerda, ele tender a um, ele vai tender a menos infinito.

**P** – PELA ESQUERDA. E PELA DIREITA?

**A19** – Pela direita quando qualquer número é maior que ele ela vai te dar mais infinito.

**P** – E AÍ COMO É QUE VAI FICAR O GRÁFICO NESSE CASO?

**A19** – Sim mais, vai ficar assim.

**P** – CERTO.

**A19** – A questão é o limite horizontal, porque aqui poderia vir zero algum tipo.

**P** – SIM, AÍ VAMOS PENSAR QUANDO É QUE ESSA FUNÇÃO ASSUMIRIA O VALOR ZERO AQUI NO CASO. PRA VOCÊ TER COM, O VOCÊ DISSE O QUE A ?

**A19** – O limite horizontal.

**P** – O QUE O COMPORTAMENTO DESSA FUNÇÃO EM RELAÇÃO A ESSA HORIZONTAL, NÃO É ISSO? VOCÊ JÁ VIU O COMPORTAMENTO DELA EM RELAÇÃO A ESSA VERTICAL AQUI EM UM, QUE PASSA EM UM. ENTÃO VOCÊ QUE VER EM RELAÇÃO A ESSA HORIZONTAL AQUI QUE.

**A19** – Ou essa horizontal ou qualquer outra reta.

**P** – OU QUALQUER UM OUTRA QUE POSSA EXISTIR, CERTO. SERÁ QUE VAI EXISTIR ALGUMA OUTRA ALÉM DESSA? QUE RETA É ESSA AQUI HORIZONTAL?

**A19** – O eixo xis.

**P** – O EIXO XIS. ENTÃO, SERÁ QUE VAI HAVER ALGUMA OUTRA RETA HORIZONTAL AQUI AO GRÁFICO, ALÉM DO EIXO XIS? PORQUE AQUI EM RELAÇÃO A RETA VERTICAL VOCÊ TEVE UMA DIFERENTE DO EIXO Y.

**A19** – Ah! entendi. no caso, como é o nome dessas retas assíntota, não é ?

**P** – ASSÍNTOTA. ENTÃO VOCÊ TEM AQUI UMA ASSÍNTOTA VERTICAL QUE É.

**A19** – Pra análise do gráfico o limite é só um.

**P** – O QUE É QUE ACONTECE QUANDO A FUNÇÃO SE APROXIMA DE UM PELA ESQUERDA?

**A19** – Menos infinito aliás. quando o limite da função tiver pela direita é chamada finito.

**P** – E AÍ QUAL É O LIMITE DA FUNÇÃO?

**A19** – Não existe, porque os limites são diferentes.

**P** – E ESSA RESPOSTA SUA ESTÁ CERTA OU ESTÁ ERRADA?

**A19** – Tá errada.

**P** – OLHE BEM?

**A19** – Porque elas os limites laterais são diferentes.

**P** – ENTÃO NÃO É ISSO QUE VOCÊ DISSE PRA UM LADO É MENOS INFINITO.

**A19** – Mas no caso aqui eu disse será limitado.

**P** – AH! SIM TUDO BEM. MAS EU ESTOU FALANDO, VEJA COMO VOCÊ DEU O EXEMPLO, VOCÊ DEU A MESMA QUESTÃO COMO EXEMPLO E NEM SE APERCEBEU.

**A19** – Eu prometo que eu nem pensei nesse exemplo.

**P** – EU JUSTAMENTE ANOTEI ISSO AQUI, QUE VOCÊ DEU EXEMPLO IGUALZINHO AO EXERCÍCIO. E VOCÊ NÃO SE APERCEBEU, E VOCÊ FEZ TODA A ANÁLISE E NÃO SE APERCEBEU QUE VOCÊ TINHA. EU DISSE PRONTO. É INTERESSANTE EU DISSE PÔXA ELE DEU O EXEMPLO. ELE JÁ VAI ME DIZER ASSIM ME DÊ A QUESTÃO AQUI QUE EU JÁ SEI A RESPOSTA.

**A19** – Sinceramente eu nem pensei, rapaz, nem.

**P** – ESTÁ SATISFEITO?

**A19** – Estou.

**P** – A OUTRA A TRÊS D.

**A19** – Verifique se o limite abaixo existe. caso afirmativo.

**P** – AH! VOCÊ ESQUECEU DE COLOCAR AQUI QUE O LIMITE, OS VALORES DOS LIMITES LATERAIS.

**A19** – Os valores na questão três item b. os valores laterais são diferentes logo a função não é limitada. uma outra questão lá está como limitada.

**P** – VOCÊ QUER CORRIGIR?

**A19** – Botar um não.

**P** – VOCÊ CONSEGUIU? FAÇA ESSA OBSERVAÇÃO AÍ.

**A19** – Agora eu voltei como é que eu posso fazer aqui?

**P** – BOTE AQUI QUE VOCÊ ESTÁ CORRIGINDO.

**A19** – Corrigindo a função não tem limite porque os limites laterais são diferentes. verifique se existe o limite abaixo existe. caso afirmativo calcule esse limite. seja a função  $f(x)$  tal que  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  se  $x \neq 1$  e  $f(1) = 0$ . não estou lembrado não.

**P** – O QUE É QUE ESTÁ PEDINDO AQUI?

**A19** – Se o  $x$  for diferente disso aqui a função vai ser isso aqui.

**P** – SIM O QUE É QUE SIGNIFICA DIZER QUE  $x$  É DIFERENTE DE DOIS.

**A19** –  $x$  tem qualquer valor diferente, tem qualquer valor diferente de dois.

**P** – SIM DIGA.

**A19** – E o valor dessa função vai ser esse valor de  $x$  diferente de dois isso aqui na verdade.

**P** – ENTÃO SE VOCÊ VAI ANALISAR PRA  $x$  DIFERENTE DE DOIS. ENTÃO VOCÊ VAI VER QUE VALORES DE  $x$ .

**A19** – maiores ou menores.

**P** – ENTÃO VERIFIQUE ISSO O QUE É QUE ACONTECE QUANDO VOCÊ PEGAR VALORES MAIORES DO QUE DOIS VALORES DE  $x$  MAIORES DO QUE DOIS, E VALORES DE  $x$  MENORES DO QUE DOIS. O QUE ISSO QUE VOCÊ ESTÁ FAZENDO?

**A19** – O limite pela direita e pela esquerda.

**P** – E COMO É QUE CHAMA O LIMITE PELA DIREITA E PELA ESQUERDA?

**A19** – Não lembro não.

**P** – NÃO LEMBRA DO NOME NÃO. MAS VOCÊ SABE O QUE É QUE VOCÊ ESTA FAZENDO?

**A19** – Sei, sei.

**P** – ENTÃO. QUAL É O LIMITE DA FUNÇÃO QUANDO VOCÊ VERIFICAR A ESQUERDA DE DOIS E QUAL O LIMITE DA FUNÇÃO QUANDO VOCÊ VERIFICAR A DIREITA DE DOIS.

**A19** – Eu vou pela esquerda ... é aparentemente você olhando assim, se você for analisar um limite da primeira função aqui ela tendendo pela esquerda o valor dela vai ser diferente.

**P** – BOM QUANTO É QUE DÁ PELA ESQUERDA?

**A19** – Está errado na verdade, lembrei agora.

**P** – VERIFIQUE OS LIMITES LATERAIS? O QUE VAI ACONTECER COM ESSE LIMITE QUANDO DOIS SE APROXIMAR, DESCULPE. QUANDO XIS SE APROXIMAR DE DOIS PELA ESQUERDA?

**A19** – Ele vai vim se você fizer o gráfico, ele vai vim dois ele pode ter o valor 1; 1,5 ele vai passar de três, entendeu o que eu quero falar?

**P** – SIM. QUANDO VOCÊ BOTAR POR EXEMPLO XIS IGUAL A UM PONTO CINCO.

**A19** – Aí já vai dar o que? três, mas ele pode passar de 1,5.

**P** – CERTO. ELE SÓ NÃO PODE PASSAR DE QUANTO?

**A19** – De dois.

**P** – ENTÃO QUANDO ELE FOR PEGANDO VALORES CADA VEZ MAIS PRÓXIMOS DE DOIS ISSO AQUI VAI SE APROXIMAR DE QUANTO?

**A19** – De um.

**P** – ESSE LIMITE VAI SER QUANTO ENTÃO?

**A19** – Um.

**P** – ENTÃO BOTE. E QUANDO ELE SE APROXIMAR

**A19** – O mesmo valor.

**P** – PRONTO. E AÍ O QUE É QUE VOCÊ PODE DIZER SOBRE LIMITE?

**A19** – Existe limite e o limite da função é um.

**P** – E VOCÊ PODE DIZER

**A19** – Como se xis for igual a dois também vai ser um.

**P** – AÍ O QUE É QUE VOCÊ PODE CONCLUIR?

**A19** – Que o limite da função é um, existe o limite da função.

## **ANEXOS**



UFPE - Ciclo Básico - Área II

Cálculo I - Turmas: 2G+GF+2L+2P+2H+HF

1º Exercício Escalar - Recife, 4-2-2

Questões:

1) Calcular os limites: (1 ponto cada)

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2-p^2)}{x-p}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2) Calcular derivada das funções: (1 ponto cada)

a)  $f(x) = (x^3 + \sqrt{x}) \operatorname{cosec} x$

b)  $g(x) = \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$

c)  $h(x) = x^2 \ln x + e^{\sin x}$

d)  $l(x) = \frac{x e^{2x}}{\ln(3x^2+1)}$

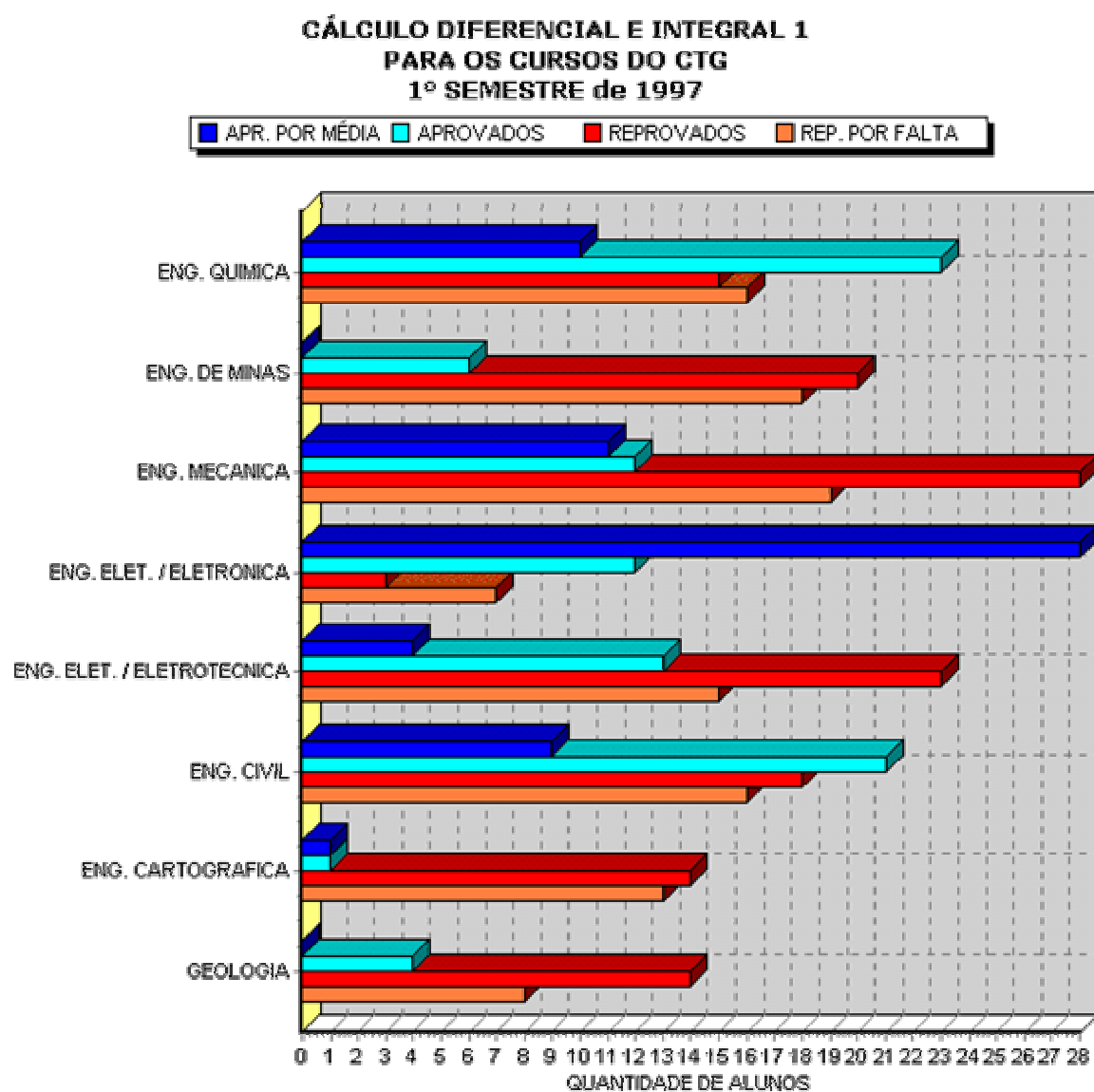
e)  $m(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

e)  $n(x) = (\sin 3x + \cos 2x)^3$

Bom Carnaval !!!

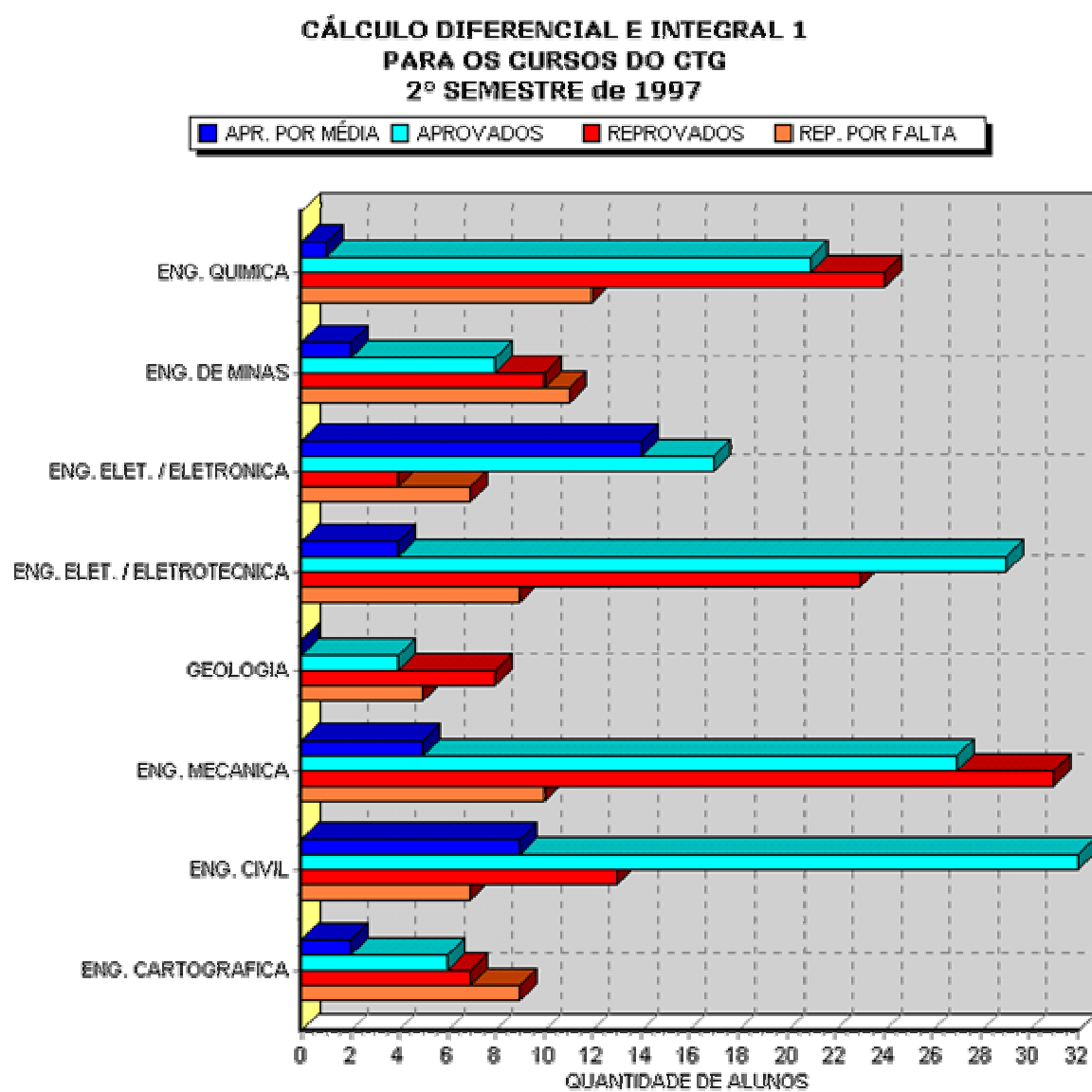
## Anexo 2

## Estatísticas da Área II – 1997/ I



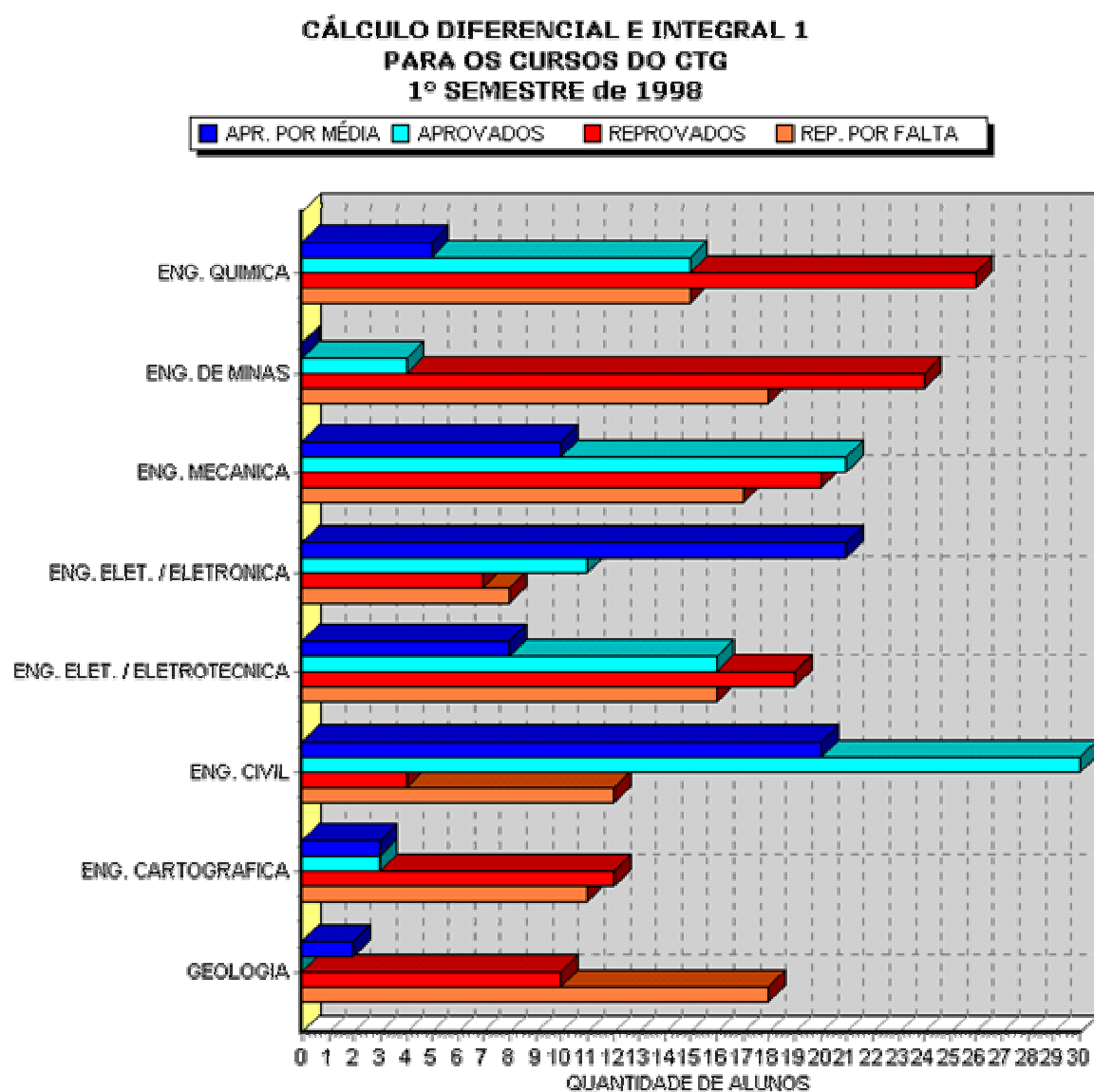
## Anexo 3

## Estatísticas da Área II – 1997/ II



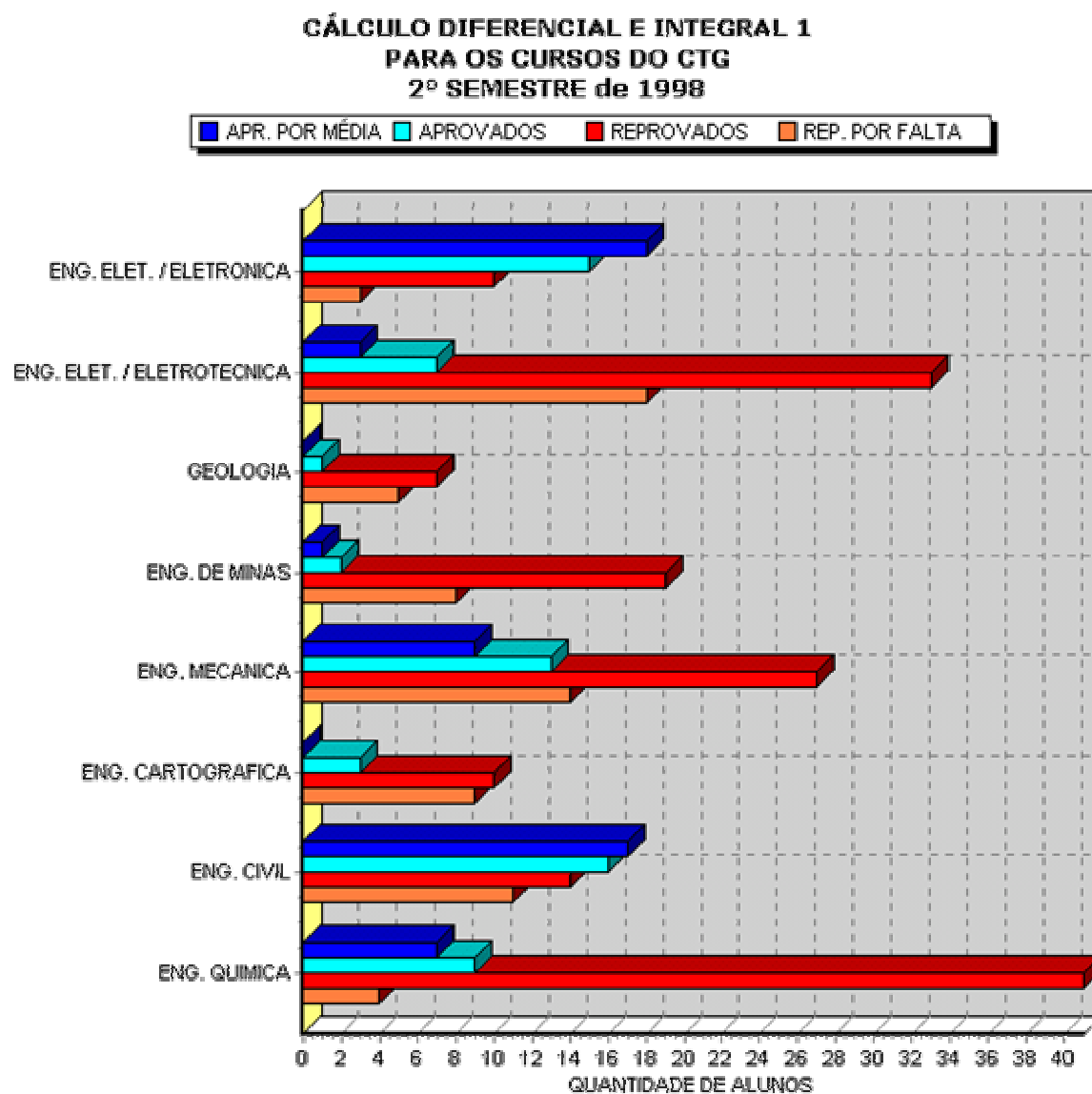
## Anexo 4

## Estatísticas da Área II – 1998/ I



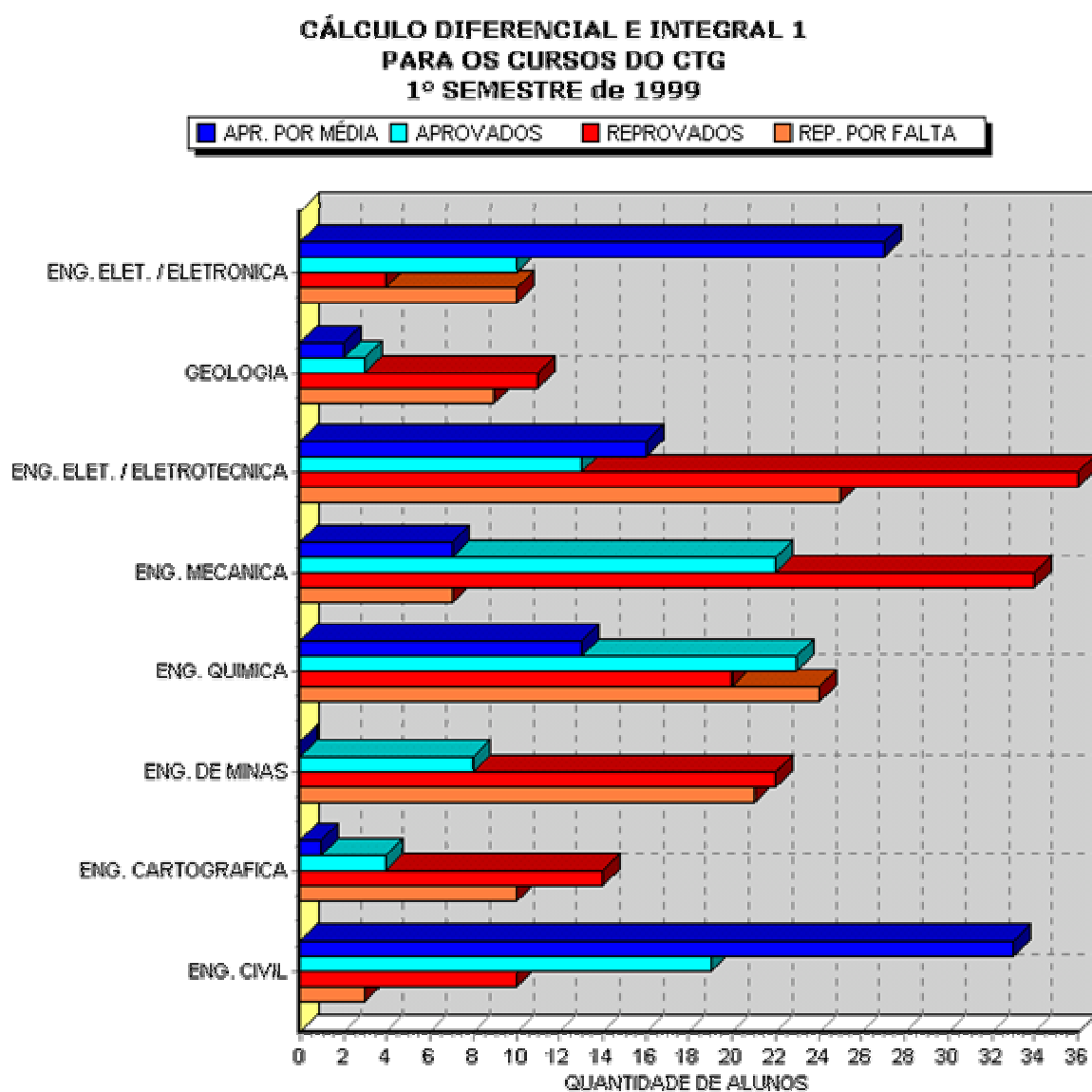
## Anexo 5

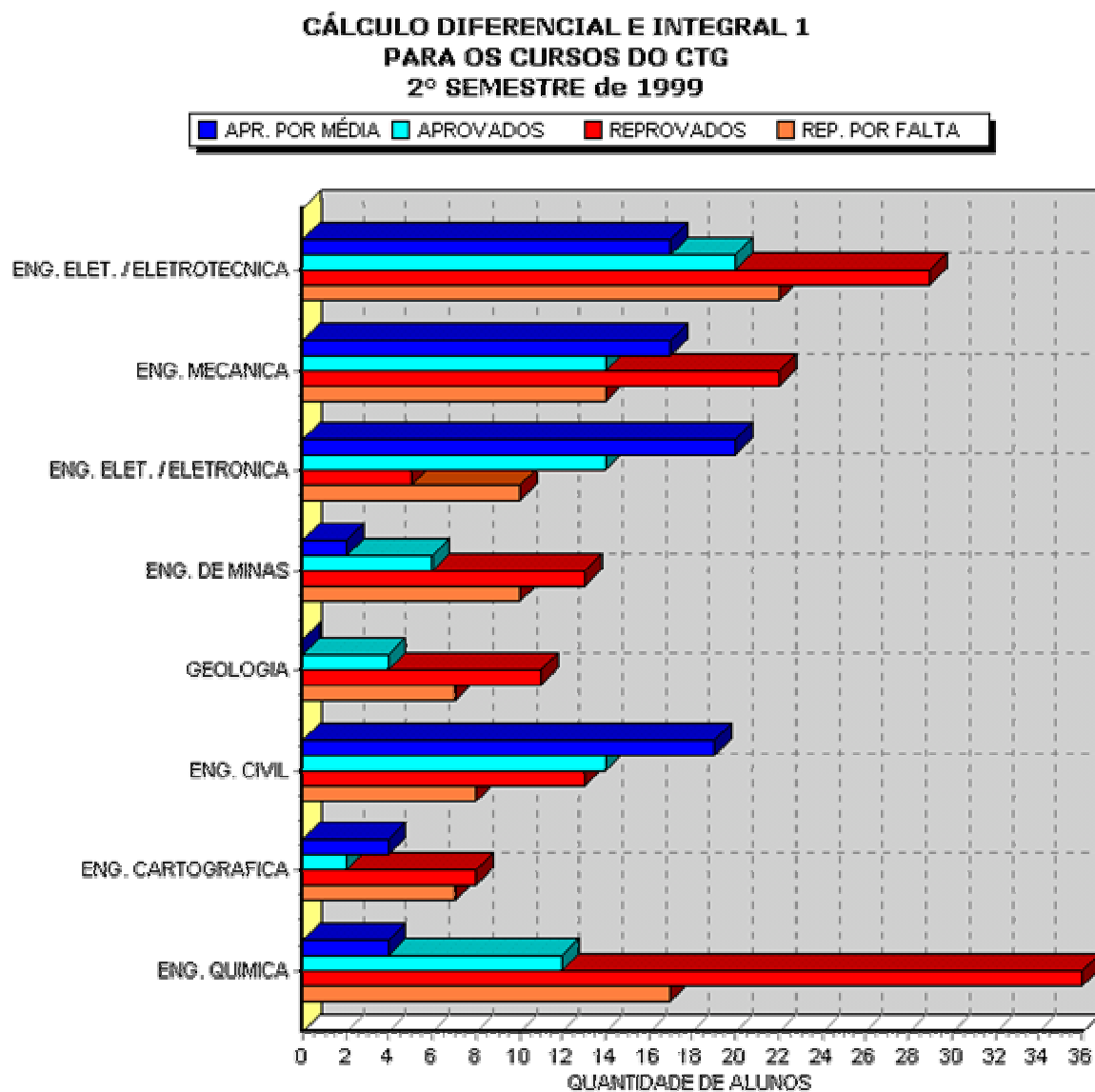
## Estatísticas da Área II – 1998/ II



## Anexo 6

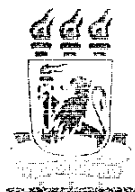
## Estatísticas da Área II – 1999/ I





## Anexo 8

## Programa de Disciplina de Cálculo I



**UFPE**  
**PROGRAMA DE DISCIPLINA**  
**MODELO PROACAD 12/84**

PROGRAMA VÁLIDO PARA O  
 ..... SEMESTRE DE .....

## DADOS DA DISCIPLINA

| CÓDIGO | NOME                             | CARGA HOR.<br>TEÓRICA | SEMANAL<br>PRÁTICA | Nº DE<br>CREDITO | CARGA HOR.<br>GLOBAL |
|--------|----------------------------------|-----------------------|--------------------|------------------|----------------------|
| MA 026 | CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I | 04                    | 00                 | 04               | 60                   |

## EMENTA

Derivada de funções de uma variável  
 Propriedades básicas das funções de uma variável.  
 Integrais de funções de uma variável.

## CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Limites e Continuidade

Introdução, definição de função contínua, definição de limite, limite laterais, propriedades operatórias, teorema do confronto, teorema do valor intermediário.

Derivadas

Introdução, derivada de uma função existência da derivada, regras de derivação, derivadas das funções trigonométricas, regra da cadeia para a derivação de função composta, derivação de função dada implicitamente, derivada da função inversa.

Estudo da Variação das Funções

Teorema do valor médio, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão, grafias.

Integrais

Primitiva de uma função, integral definida, teorema fundamental do cálculo, cálculo de área.

Métodos de Integração

Substituição e por partes.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE A DISCIPLINA

HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO OU ÁREA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE MATEMÁTICA

Assinatura do Chefe do Departamento

Assinatura do Coordenador do Curso ou Área