UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

MÔNICA MARIA LINS LESSA

APRENDER ÁLGEBRA EM SALA DE AULA:

contribuição de uma seqüência didática

Recife

2005

Mônica Maria Lins Lessa

APRENDER ÁLGEBRA EM SALA DE AULA:

contribuição de uma seqüência didática.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Doutor em Psicologia.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão

Recife

2005

FOLHA DE APROVAÇÃO

Mônica Maria Lins Lessa

Aprender Álgebra em Sala de Aula: contribuição de uma seqüência didática.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Doutor.
Área de Concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovado em: 28 de fevereiro de 2005

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
Instituição: U.F.PE Assinatura: _____

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima
Instituição: U.F.PE Assinatura: _____

Prof. Dr. Alex Sandro Gomes
Instituição: U.F.PE Assinatura: _____

Prof. Dr. Luciano Rogério de Lemos Meira
Instituição: U.F.PE Assinatura: _____

Prof. Dra. Selma Leitão Santos
Instituição: U.F.PE Assinatura: _____

Às minhas amigas que acreditaram em mim, e me acolheram durante essa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer...

Inicio pelo meu orientador, Jorge Tarcísio Da Rocha Falcão. Foi um longo percurso até chegar aqui. Após a conclusão do mestrado continuamos o trabalho em pesquisa, e ele sempre me incentivando para o doutorado. De lá pra cá não parou mais. Com todas as dificuldades que surgiram ao longo do doutorado, Jorge nunca me deixou desistir! Ele sempre dizia: “você termina ou termina, não tem outra opção”, ele não foi apenas um orientador, foi um amigo! Compreendeu todo o processo sempre acreditando na minha capacidade de produção e energia para o trabalho; ele acreditava quando eu desacreditava! Nesta reta final, juntos produzimos o que era possível.

À Anna Paula, minha amiga irmã de tantos anos! Nós fizemos juntas a graduação e o mestrado em Psicologia. No doutorado ela foi para Educação e eu continuei na Psicologia, mas as nossas pesquisas continuaram em torno do mesmo tema: álgebra. Ela foi minha interlocutora neste trabalho e fez valiosas contribuições; digo que ela foi uma ‘segunda orientadora’. Durante esses 20 anos, Nina, como a chamo, participou de todos os momentos da minha vida, e ela sabe o que significa concluir esta etapa de vida. A ela meu eterno obrigado!

A Rosane e a Lúcia, amigas que me ‘colocaram de pé’ e não me deixaram desistir; o incentivo constante, o carinho e a amizade foram marcantes. Elas participaram de momentos importantes da minha vida, sempre contribuindo para o meu crescimento pessoal e profissional. Tenho certeza que elas estão felizes por eu ter conseguido terminar.

Às amigas Ana Coelho, Claudia Araújo, Fabiana Wanderley, Fátima Cruz, Luciana Jungmann, e Pompéia Lyra, a disponibilidade em ajudar sempre estivera

presente. Com elas, tive trocas acadêmicas e pessoais que foram importantes nesta caminhada.

A Lafa, meu colega de turma no doutorado, com quem partilhei o estudo das disciplinas. Conversávamos sobre a vida e suas articulações entre literatura, informática e psicologia. Augusto dos Anjos e o Computador! Só Lafa mesmo com as suas 'viajadas'!

Aos professores agradeço a minha formação. Estou neste programa 'desde pequenininha'. Iniciei com Analúcia Schliemann. A ela serei sempre grata por ter me oportunizado o caminho da pesquisa e do mundo acadêmico. A sua seriedade e o seu compromisso com vida acadêmica é admirável e inesquecível. Fiz Iniciação Científica, Aperfeiçoamento, Mestrado e Doutorado, acho que agora terminei! A Selma e a Luciano, professores, que no doutorado, desafiavam minhas convicções piagetianas e vergnausianas. Eles contribuíram de forma significativa para minha formação, e a Luciano devo a mudança de rumo deste estudo.

A Escola onde fiz a coleta dos dados, aos alunos e, em especial, à professora de matemática, meu agradecimento. Não foi fácil conseguir um professor que topasse e uma escola que permitisse uma intervenção durante as aulas regulares. Sem a disponibilidade e o empenho da professora para aplicar a seqüência, esse estudo não teria sido realizado. Mesmo grávida de 7 meses, ela topou! Muito obrigada professora!

A Vera Amélia, a Elaine e a Vera Ferraz que sempre estiveram dispostas a me ajudar em tudo que precisei da secretaria ao longo desses anos. A elas, eu também agradeço as longas conversas, sobre vários assuntos, que ajudaram em vários momentos da minha vida.

A Bátia, minha terapeuta, que me ajudou a colocar esta tese no plano da realidade.

Indo agora para fora da academia e do mundo psi ...

A Lessa, hoje meu querido amigo, não tenho palavras para agradecer o seu incentivo a minha vida profissional. Ele acompanhou de perto a minha iniciação docente, o mestrado, e agora no doutorado, o término de um ciclo de vida, mesmo não estando mais perto, ele continuou me incentivando e acreditando em mim. Foi ele quem proporcionou as condições favoráveis ao meu crescimento profissional. A ele sou eternamente grata!

A minha mãe pela sua presença marcante nas várias etapas da minha vida e seu constante incentivo a minha profissão. A meu pai pela sua ausência marcada, que me fez crescer e chegar até aqui!

A Baby, minha filha do coração, pelo carinho presente em vários momentos de vida.

Às amigas 'não psi', Rosália, Rilma e Nenem, agradeço a amizade e a acolhida em vários momentos. Sem elas, a caminhada teria sido ainda mais difícil.

A Kleber e a Fábio, obrigada pelo carinho e estímulo para continuar acreditando nas minhas possibilidades.

A Mirian, pelas orações, por seu afeto e cuidado comigo. Ela estava sempre pronta a dar a força, a energia que eu estava precisando. A Sandrinha pelo carinho e amizade.

A Valter e a Hely, a Ângela e a Jussiara, meus chefes, que compreenderam as minhas ausências institucionais e me incentivaram para este caminho profissional.

A D. Enilda pelas orações destinadas a mim.

A Margarida e a Zé Ricardo que me emprestaram a casa de Chã Grande para trabalhar. Sob os olhares curiosos e perplexos de Fátima e seus filhos Mô e Van,

moradores da Chácara, produzi uma etapa crucial da análise dos dados. Foi um momento importante na retomada do trabalho na tese!

A Ricardo, a Enrico e a Lorena, por terem me proporcionado momentos alegres e felizes. Eles fazem parte da minha vida há um ano e meio, acompanharam a reta final desta etapa, e tiveram uma marca especial! A Ricardo, obrigada pelo incentivo e, principalmente, por ter proporcionado profundas reflexões no final de um ciclo da minha vida.

E, por fim, a todos àqueles que não foram citados, mas que me estimularam e não me deixaram desistir.

A Deus e a todos, minha eterna gratidão ...

RESUMO

A presente pesquisa buscou analisar em que medida uma seqüência didática inicialmente negociada entre a pesquisadora e uma professora de matemática com regência dessa disciplina numa sexta série do ensino fundamental possibilitou a aprendizagem de alguns aspectos centrais do campo conceitual da álgebra. Buscou-se mais especificamente verificar os procedimentos de manutenção e mudança de contrato didático no funcionamento da aula de matemática dessa professora-participante, bem como os eventuais impactos da participação dos alunos na seqüência de atividades proposta. Tal seqüência foi oferecida a grupo de 14 alunos de ambos os sexos, faixa etária de 12/13 anos, de uma sala de aula da 6ª série do ensino fundamental II de uma escola da rede particular de ensino do Recife. A análise dos protocolos das produções dos alunos em sala-de-aula dividiu-se em dois momentos: *um primeiro momento* de síntese de informações, realizada através de análises frequenciais simples e multidimensionais referentes aos dados produzidos pelos sujeitos no que diz respeito a equações algébricas com estruturas de complexidade variada, problemas oriundos de livros didáticos de 6ª série e problemas propostos no presente contexto de pesquisa; um segundo momento de análises clínicas com sujeitos detectados como típicos de determinado tipo de perfil de desempenho. Os resultados obtidos indicam que a seqüência atendeu às expectativas de proporcionar contexto de mediação eficaz para a aprendizagem de princípios da álgebra elementar, o que abarca procedimentos de modelização das situações-problema e utilização do princípio da equivalência no tratamento das mesmas. Observou-se ainda ter havido mudanças contratuais no funcionamento da sala-de-aula, notadamente na direção de uma maior participação discursiva dos alunos.

Palavras chave: conceptualização; álgebra e fenômenos didáticos

ABSTRACT

This research analyzed the effects of a didactic sequence in the learning of some fundamental concepts of the conceptual field of algebra. This sequence was proposed to a regular teacher of mathematics, who was told that she was allowed to negotiate changes in the procedures of the sequence offered to her. The main goal was to observe how this teacher would accept this proposal, and which changes would happen in the didactic contract of the group (teacher and pupils). The sequence was then proposed to a teacher of a 6^{th} elementary level group of a private school in Recife, with fourteen 12 to 13 year-old students equally shared in gender. Data were analyzed in two main stages: the first stage covered descriptive-frequencies analysis (uni and multidimensional), concerning a set of equations of varied mathematical complexity, a set of problems from didactic books and a set of problems proposed by the researcher; the second stage was based on a clinical approach of the productions of some students detected as representative of some problem-solving profiles according to previous multidimensional analysis. Data analyzed here showed that the sequence was effective as a mediational context for the learning of elementary algebra. Both abilities in modeling and equation resolution were favored by the pedagogical context of the sequence, which forced also some important changes in the didactic contract of this classroom group. These changes implied specially in greater discursive participation of the students in the class activity.

Keys word: conceptualization; algebra and didatics phenomenons.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 019
Grupo B, exemplo de um problema verbal enfatizando a igualdade na condição de treinamento problemas verbais (itálico-negrito acrescentado no exemplo acima para fins de indicação)

Quadro 2 020
Estruturas matemáticas subjacentes aos problemas utilizados no contexto da pesquisa

Quadro 3 021
Extrato de protocolo, procedimento categorizado como algébrico

Quadro 4..... 022
Extrato de protocolo, procedimento categorizado como aritmético

Quadro 5 026
Modos de representação propostos pelos sujeitos como auxiliares a seus procedimentos de resolução dos problemas utilizados no treinamento

Quadro 6 109
Descrição da Categoria Tipo de Resposta

Quadro 7..... 110
Descrição da Categoria Tipo de Procedimento

Quadro 8 111
Equações propostas no estudo e a representação suas respectivas estruturas algébricas

Quadro 9 111
Percentual de freqüência simples do tipo de resposta nas equações, no pré e pós-teste

Quadro 10 112
Percentual de freqüência simples do tipo de procedimento nas equações, no pré e pós-teste

Quadro 11..... 113
Problemas dos livros didáticos propostos e a sua respectiva modelização

Quadro 12 114
Percentual de freqüência do tipo de resposta nos problemas do livro, no pré e pós-teste

Quadro 13 116
Percentual de freqüência do tipo de procedimento nos problemas do livro, no pré e pós-teste

Quadro 14 118
Problemas propostos e a sua respectiva modelização em função da estruturas algébrica

Quadro 15 119
Percentual de freqüência do tipo de resposta nos problemas propostos, no pré e pós-teste

Quadro 16 120
Percentual de freqüência do tipo de resposta nos problemas propostos, no pré e pós-teste

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 019
Grupo A, exemplo de uma situação-problema na condição de treinamento balança de dois pratos.

Figura 2 023
Distribuição da freqüência percentual das categorias de resposta no item tipo de procedimento (Grupo A: Balança).

Figura 3 023
Distribuição da freqüência percentual das categorias de respostas no item tipo de procedimento (Grupo B: Problemas Verbais).

Figura 4 024
Distribuição da freqüência percentual do tipo de procedimento nos diferentes tipos de estrutura (Grupo A - Balança: Pós-teste). Legenda: Estr.1/2 = estrutura 1 e estrutura 2; Estr. 3/4/5/6 = estrutura 3, estrutura 4, estrutura 5 e estrutura 6.

Figura 5 025
Distribuição da freqüência percentual do tipo de procedimento nos diferentes tipos de estrutura (Grupo B - Problemas Verbais: Pós-teste). Legenda: Estr.1/2 = estrutura 1 e estrutura 2; Estr. 3/4/5/6 = estrutura 3, estrutura 4, estrutura 5 e estrutura 6.

Figura 6 026
Distribuição da freqüência percentual do modo de representação - Grupo A (Balança). Legenda: Sem repres. = não resolve/protocolo em branco; Contas = apenas operações aritméticas; Exam. faz = examinador faz a representação.

Figura 7..... 027
Distribuição da freqüência percentual do modo de representação - Grupo B (Problemas Verbais). Legenda: Sem repres. = não resolve/protocolo em branco; Contas = apenas operações aritméticas; Exam. faz = examinador faz a representação.

Figura 8 064
Tripé constitutivo do objeto de estudo da didática de conteúdos específicos e suas possibilidades de análise

Figura 9..... 072
O triângulo da situação didática proposto por Develay (1989)

Figura 10..... 084
Produção do aluno da 2ª série no protocolo escrito

Figura 11..... 098
Produção do aluno no protocolo escrito

Figura12 112
Diferenças entre os percentuais de acerto nos pré e pós testes para cada uma das seis estruturas de equação.

Figura 13..... 115
Diferenças entre os percentuais de acerto nos pré e pós testes para cada um dos sete problemas oriundos dos livros didáticos

Figura 14..... 123
Plano fatorial 1_Equações (fatores 1 x 2), distribuição dos sujeitos.

Figura 15..... 124
Plano fatorial 2_Equações (fatores 1 x 2), distribuição das modalidades de variáveis.

Figura 16..... 128
Plano fatorial 3_Equações (fatores 1 x 3), distribuição dos sujeitos.

Figura 17..... 129
Plano fatorial 4_Equações (fatores 1 x 3), distribuição das modalidades de variáveis.

Figura 18..... 131
Plano fatorial 5_Problemas_Livros (fatores 1 x 2), distribuição dos indivíduos.

Figura 19..... 132
Plano fatorial 6_Problemas_Livros (fatores 1 x 2), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Figura 20..... 134
Plano fatorial 7_Problemas_Livros (fatores 1 x 3), distribuição dos indivíduos

Figura 21..... 135
Plano fatorial 8_Problemas_Livros (fatores 1 x 3), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Figura 22..... 137
Plano fatorial 9_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 2), distribuição dos indivíduos.

Figura 23..... 138
Plano fatorial 10_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 2), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Figura 24..... 140
Plano fatorial 11_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 3), distribuição dos indivíduos.

Figura 25..... 141
Plano fatorial 12_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 3), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1..... 145
Reprodução de trecho do protocolo escrito de Yago, pré-teste, equação 1 e equação 2

Ilustração 2..... 146
Reprodução de trecho do protocolo escrito de Yago, pré-teste, problema s 1; 2 e 3

Ilustração 3..... 147
Reprodução de trecho de protocolo escrito de Yago, pós-teste, equações 4; 5 e 6

Ilustração 4..... 148
Reprodução de trecho de protocolo escrito de Yago, pós-teste, problemas 1 e 2

Ilustração 5..... 150
Reprodução de trecho de protocolo escrito de Yago, pós-teste, problemas 1 e 2

Ilustração 6..... 152
Reprodução de trecho de protocolo escrito de Diva, pré-teste, problemas 1; 2; 4 e 5

Ilustração 7.....
Reprodução de trecho de protocolo de Diva, pré-teste, problemas 3 e 6 153

Ilustração 8..... 154
Reprodução de trecho do protocolo escrito de Diva, pós-teste, equações 4; 5 e 6

Ilustração 9..... 155
Reprodução de trecho do protocolo escrito de Diva, pós-teste, problemas 1; 2 e 3

Ilustração 10 156
Reprodução de trecho de protocolo escrito de Diva, pós-teste, problemas 4; 5 e 6

Ilustração 11..... 165
Reprodução de trecho de protocolo de Diva, problema 1 de uma atividade da seqüência didática

Ilustração 12..... 166
Reprodução de trecho de protocolo de Diva, problema 4 de uma atividade da seqüência didática

SUMÁRIO

Dedicatória
Agradecimentos
Resumo
Abstract
Lista de Quadros
Lista de Figuras
Lista de Ilustrações
Sumário

Introdução 17
1. Estudo empírico norteador desta tese 18
2. Objetivos 28
3. Questões da pesquisa 29

Capítulo 1 : O sujeito e a conceptualização em matemática 32
1.1.Teoria do sujeito: indivíduos e mediação da cultura 32
1.1.1. Considerações iniciais 32
1.1.2. A perspectiva estruturalista de Jean Piaget 33
1.1.3. A perspectiva de Lev Vigotski 34
1.1.4. A perspectiva de Gerard Vergnaud 36
1.2. Conceptualização em matemática..... 39
1.2.1. Algumas considerações sobre a matemática escolar..... 39
1.2.1. Aprendizagem da matemática escolar: especificando um referencial teórico 42
1.3. O campo conceitual algébrico 45

Capítulo 2 : Álgebra: um campo conceitual 50
2.1. Um pouco de história da álgebra 50
2.2. Algumas considerações sobre a álgebra 53
2.3. Concepções acerca da álgebra 55

Capítulo 3 : Fenômenos Didáticos – Transposição Didática e Contrato Didático... 61
3.1. Transposição Didática 65
3.1.1. Uma reflexão acerca do que é conhecimento 65
3.1.2. Outros aspectos acerca do conceito teórico de transposição didática 67
3.1.3. A produção dos saberes de referência 68
3.1.4. A transposição didática interna 70
3.1.5. A transposição didática interna e suas interfaces na sala de aula 71
3.2. Contrato Didático 73
3.2.1. O que é contrato didático? 73
3.2.2. O contrato didático a partir dos parceiros da relação 76
3.3.3. O contrato didático em sala de aula 79

Capítulo 4 : O Ensino e a Aprendizagem da Álgebra 81
4.1. Considerações acerca do ensino-aprendizagem da álgebra elementar 81
4.2. Estudos acerca da introdução do aluno no domínio algébrico 82
4.3. O que é necessário ser ensinado em álgebra? 96

Metodologia 100

Análise e Discussão dos Resultados 108
1. Visão geral do procedimento de análise 108
2. A primeira etapa de análise 109
2.1. Análise multidimensional fatorial 121
2.2. Análise clínica 144
3. A segunda etapa de análise 158

Considerações Finais..... 169

Referências Bibliográficas 175

Anexos:

Anexo 1: Tabela de percentagem de mulheres entre homens por tipos de especialidade e ano Brasil

Anexo 2: Considerações teóricas sobre a Análise Descritiva Multdimensional

Anexo 3: Quadro das contribuições na categorização dos dados

Anexo 4: Tarefas da Seqüência Didática

Anexo 4a: Tarefas da Seqüência Didática: exemplo da tarefa da balança produzida por duas duplas no computador

Anexo 5: Descrição da Seqüência Didática em sala de aula

INTRODUÇÃO

Um dos objetivos centrais da pesquisa em Psicologia da Educação Matemática no mundo e, particularmente no Brasil, tem sido a busca de subsídios ao longo das últimas décadas, para compreender como se dá o processo de apropriação do saber matemático no universo escolar. Reflete-se que tal interesse e avanço neste campo revelam preocupação e descontentamento em relação a como o processo educativo vem sendo organizado, de uma maneira geral, e, fundamentalmente, no que se refere ao ensino de matemática.

A matemática, como disciplina escolar, no Brasil, carrega consigo um triste fardo: é a disciplina que mais reprova no Ensino Fundamental. E, como conseqüência, a matemática aparece como uma das disciplinas que mais contribui para a interrupção da vida escolar de grande parte dos alunos (http://www.inep.gov.br/download/saeb/2004/resultados/BRASIL.pdf).

Muito já se tem falado e pesquisado acerca de fenômenos que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem de matemática, mas ainda se está muito longe de encontrar respostas definitivas a todas as questões que envolvem o universo da sala de aula e as relações que se estabelecem entre professor, aluno e saber. Alguns fenômenos didáticos, como por exemplo, a Transposição Didática (Chevallard, 1985), tem sido objeto de estudo daqueles que se interessam pelo que acontece numa sala de aula, na gestão de um saber escolar que deve ser ensinado pelo professor e apropriado pelos alunos. Essa é uma questão que será analisada nesse estudo, uma vez que se constitui num elemento importante a ser investigado na aplicação de uma seqüência didática em sala de aula pelo professor.

Em linhas gerais, o interesse desse estudo é analisar em que medida uma seqüência didática oferecida pela pesquisadora, possibilita a aprendizagem dos

conceitos fundamentais de um determinado campo conceitual em matemática pelos alunos, no caso, a álgebra elementar. Além disso, analisar como essa seqüência didática foi negociada com os alunos em sala de aula, pelo professor de matemática.

1. Estudo empírico norteador desta tese

Em estudo anterior (Lins Lessa, 1996), busquei analisar situações didáticas potencialmente facilitadoras para a introdução ao campo conceitual da álgebra, procurando investigar que aspectos desses conceitos seriam mais bem contemplados por determinados suportes didáticos. Para tal, foi escolhido um aspecto considerado fundamental na construção de significado em álgebra, a compreensão do princípio da equivalência (Filloy & Rojano, 1984; Vergnaud, Cortez & Favre-Artigue, 1987; Kieran, 1991; Vergnaud, 1991; Malara & Navarra, 2003). Este princípio é o que permite se passar de uma equação para outra dita equivalente, se tal passagem decorrer da realização de uma mesma operação em ambos os membros da referida equação. No que diz respeito aos suportes didáticos facilitadores de tal compreensão, verificou-se o interesse da mobilização da balança de dois pratos, comparada à proposição de problemas verbais enfatizando em sua apresentação a igualdade entre os membros da equação. Para a realização da análise comparativa em questão, verificou-se sistematicamente o efeito do treinamento em resolução de problemas envolvendo igualdades em duas condições (ver exemplos ilustrativos na figura 1 e quadro 1 a seguir): (a) condição de igualdade entre objetos em equilíbrio em uma balança de dois pratos, e (b) condição de igualdade entre quantidades enfatizadas no enunciado de problemas verbais.

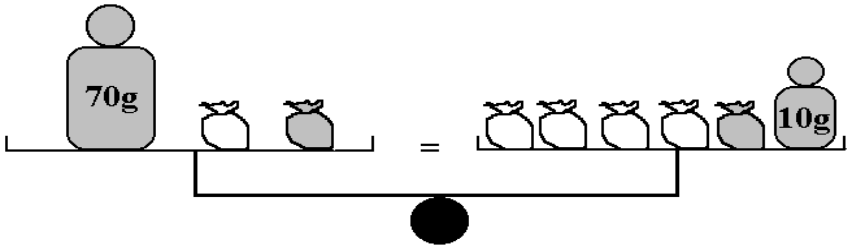


Figura 1: Grupo A, exemplo de uma situação-problema na condição de treinamento balança de dois pratos.

Amanda e Tiane colecionavam papéis de carta. Amanda tinha 70 papéis de carta. Tiane tinha 10 papéis de carta e ganhou dois blocos do seu pai. *As duas meninas ficaram com a mesma quantidade de papéis de carta na coleção*. Sabendo-se que os blocos tinham a mesma quantidade de papéis, quantos papéis de carta tinham em cada bloco?

Quadro 1: Grupo B, exemplo de um problema verbal enfatizando a igualdade na condição de treinamento problemas verbais (itálico-negrito acrescentado no exemplo acima para fins de indicação).

O estudo foi constituído de três fases, cada uma das quais realizada em uma sessão de entrevista, em que o examinador entrevistou individualmente 40 sujeitos (sendo 20 para o Grupo A - Balança, e 20 para o Grupo B - Problemas Verbais) na faixa etária de 11 e 12 anos, cursando a 5ª série do 1º grau de escolas da cidade de Recife (PE). A primeira fase consistiu em um pré-teste, onde os sujeitos resolveram uma lista de seis equações e seis problemas verbais envolvendo igualdades entre quantidades. A segunda fase consistiu em um treinamento, em que os sujeitos foram submetidos individualmente a uma série de doze tarefas-problema. Nesta fase cada um dos grupos (A e B) participou de uma das duas condições de treinamento acima referidas (Grupo A: Balança e Grupo B: Problemas Verbais). Na terceira fase, foi realizado o pós-teste, em que os sujeitos resolveram a mesma lista de equações e problemas verbais resolvidos no pré-teste. Em todas as fases os sujeitos deveriam descobrir o valor das incógnitas envolvidas e justificar a sua resposta tentando explicitar o raciocínio utilizado. Foram estudadas seis estruturas algébricas nos

problemas, duas mais simples (estruturas 1 e 2), que poderiam ser resolvidas pela aritmética, e quatro mais complexas, para as quais a utilização da álgebra se fazia necessária (ver quadro 2 abaixo).

Estrutura	Representação Simbólica
1	$ax + b = c;\ ax = b$
2	$ax + x = b$
3	$a + x = bx$
4	$ax + b = cx + d$
5	$ax + b = ax + cy + d$
6	$ax + by + c = dx + by + f$

Quadro 2: Estruturas matemáticas subjacentes aos problemas.

Para compreender melhor os resultados desse estudo, faz-se necessário um comentário sobre a categorização dos dados e apresentação de algumas figuras. As produções dos sujeitos foram categorizadas, tanto no pré-teste como no pós-teste, a partir de três aspectos básicos: tipo de resposta, referente à análise clássica de desempenho, utilizando-se apenas as categorias acerto-não-acerto; tipo de procedimento, referente à forma básica (aritmética ou algébrica) de resolução mobilizada para resolver o problema; e modos de representação, referentes aos suportes representacionais auxiliares mobilizados pelos sujeitos.

No âmbito deste trabalho, escolheu-se analisar exclusivamente os itens de categorização **tipo de procedimento** e **modo de representação**[1], que foi analisado após a análise do tipo de procedimento. Tais itens são brevemente discutidos a seguir.

[1] Para uma visão global acerca da análise realizada, ver Lins Lessa, 1996.

- Tipo de Procedimento: conforme explicitado acima, consistiu na análise da estratégia usada na resolução dos problemas e equações, tendo-se classificado as produções dos sujeitos em termos de três categorias: *procedimento aritmético, procedimento intermediário e procedimento algébrico.* Vale salientar aqui que o objetivo central do treinamento proposto foi discutir o procedimento algébrico para que o sujeito pudesse dispor dessa alternativa, quando julgasse pertinente para resolver problemas e equações.

Em termos da categorização de procedimento já referida, proceder algebricamente consistiu em realizar uma manipulação algébrica sobre a expressão matemática proposta, isto é, realizar operações semelhantes em ambos os membros da igualdade, a partir de uma representação explícita ou de uma representação mental. O extrato de protocolo 1, transcrito a seguir, dá um exemplo do que foi considerado como procedimento algébrico:

Sujeito nº 10
(extrato de protocolo: problema 3/ procedimento algébrico / pós-teste):

1. E: Me explica como você fez!
2. S: Fábio tinha 69 bolas mais um pacote da sua mãe, e Fernando tinha ganhado quatro pacotes de bolas de gude, se eles tinham a mesma quantidade**,** cortei o pacote de bolas que a mãe deu para Fábio, um eu cortei, e de Fernando eu cortei**,** então quer dizer que esses três que sobraram é igual a essa quantidade aqui (69).
3. (...)
4. E: agora, por que tu cortastes um de um lado e outro do outro lado?
5. S: porque os dois são da mesma quantidade
6. E: e cortando continua igual?
7. S: continua igual
8. E: por quê?
9. S: porque tirando a mesma quantidade, da mesma forma, continua igual.

Quadro 3: Extrato de protocolo, procedimento categorizado como algébrico.

O procedimento aritmético, por sua vez, consistiu na abordagem direta dos problemas, sem manipulações intermediárias e buscando imediatamente o estabelecimento do valor da incógnita, seja por atribuições aproximadas de valores, seja através da realização de operações preliminares, até a obtenção do valor procurado. O extrato de protocolo a seguir ilustra tal tipo de procedimento:

Sujeito nº 35

(extrato de protocolo: problema 1/procedimento aritmético / pós-teste):

1. E: Leonardo e Rafael colecionavam o álbum ... (leitura do problema) quantas figurinhas tinham em cada pacote? vai fazer o quê?
2. S: 47 menos 23 dividido por 2
3. E: por que você vai pegar o 47?
4. S: porque eu pegava 47 subtrai e o resultado eu dividia por 2
5. E: e Leornardo tem quantas figurinhas ao todo?
6. S: 23
7. E: ele só tem as 23?
8. S: não, 47
9. E: ao todo?
10. S: é, ele tem ao todo 47 figurinhas
11. E: igual ou diferente de Rafael?
12. S: igual
13. E: então tem que descobrir quantas figurinhas tem no pacote!
14. S: (escreveu no protocolo)
15. E: tem quantas figurinhas em cada pacote?
16. S: 12
17. E: Ao todo Leonardo tinha quantas figurinhas?
18. S: 47
19. E: e Rafael?
20. S: 47
21. E: os dois meninos tinham a mesma quantidade de figurinhas na coleção?
22. S: tinham.

Quadro 4: Extrato de protocolo, procedimento categorizado como aritmético.

A análise dos resultados obtidos a partir da categorização acima referida permitiu verificar que o procedimento aritmético predominou no pré-teste, enquanto que o procedimento algébrico predominou no pós-teste, tanto no grupo A (Grupo de Treinamento com a Balança) quanto no grupo B (Grupo de Treinamento com os Problemas Verbais) (ver Figuras 2 e 3 à página seguinte). Tais resultados demonstram que o treinamento cumpriu seu objetivo de tornar o procedimento algébrico elegível para a resolução de determinada classe de problemas (aqueles com estruturas matemáticas de tipo algébrico). Todavia, é importante destacar que o procedimento aritmético apresenta ainda um percentual considerável no pós-teste dos grupos A e B, o que pode ser explicado pela proposição de problemas com estruturas 1 e 2 (cf. quadro 2, pg. 3), as quais continuam sendo resolvidas por esse procedimento.

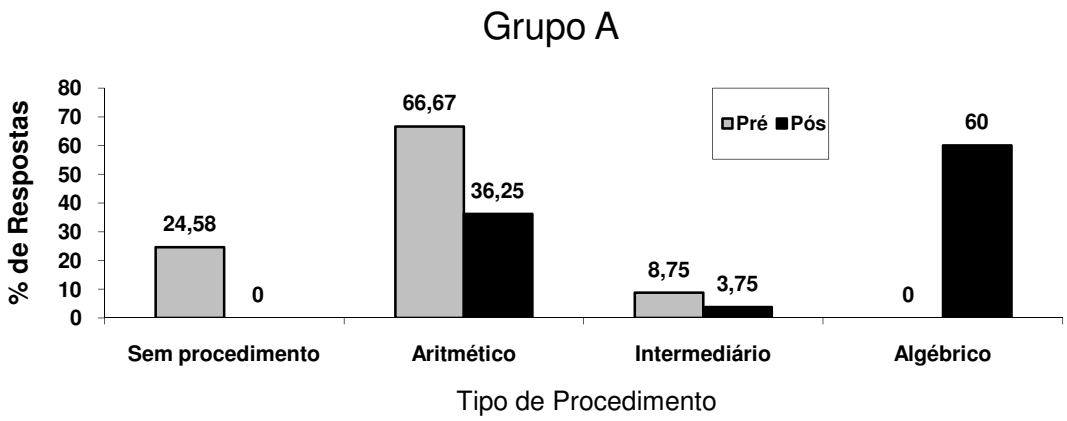


Figura 2: Distribuição da freqüência percentual das categorias de resposta no item tipo de procedimento (Grupo A: Balança).

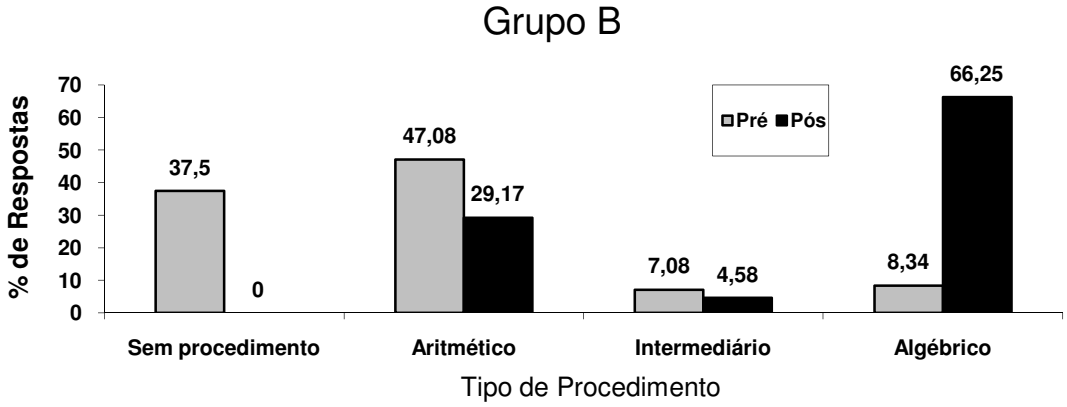


Figura 3: Distribuição da freqüência percentual das categorias de respostas no item tipo de procedimento (Grupo B: Problemas Verbais).

A partir da análise das figuras acima, constata-se que o procedimento algébrico foi predominantemente utilizado pelos sujeitos nos dois grupos de treinamento, o que permite concluir que ambos os tipos de suporte didático (balança ou problemas verbais com ênfase sobre a igualdade entre os membros da equação que os modeliza) promovem o procedimento algébrico, isso para aqueles problemas cuja estrutura matemática subjacente seja efetivamente algébrica. Ou seja, o tipo de procedimento passou a depender do tipo da estrutura envolvida na equação ou no problema.

Então, o que parece ser mais importante para iniciação à álgebra, ou seja, a instrumentalização conceitual dos alunos de forma a habilitá-los a adotar um procedimento algébrico na resolução de problemas/equações, não é o suporte didático em si, mas tal suporte combinado a problemas de estrutura algébrica. Nesse sentido, são as estruturas 3, 4, 5 e 6 (incógnitas aparecendo nos dois membros da equação) que favorecem a compreensão de conceitos básicos na introdução à álgebra (igualdade, representação, incógnita e manipulação de incógnitas). Quando se trata das estruturas mais simples (estruturas 1 e 2 , por exemplo), a estratégia usada é aritmética e quando se trata das estruturas mais complexas (estruturas 3, 4, 5 e 6, por exemplo), usa-se o procedimento algébrico. Como afirma G. Vergnaud (Vergnaud, 1988)**,** não há necessidade de introduzir a álgebra para resolver problemas que envolvem as estruturas simples (incógnita em apenas um membro da equação), pois nestes casos procedimento algébrico não oferece nenhum benefício. Isto pode ser confirmado pelos dados frequenciais reproduzidos nas figuras 4 e 5 abaixo:

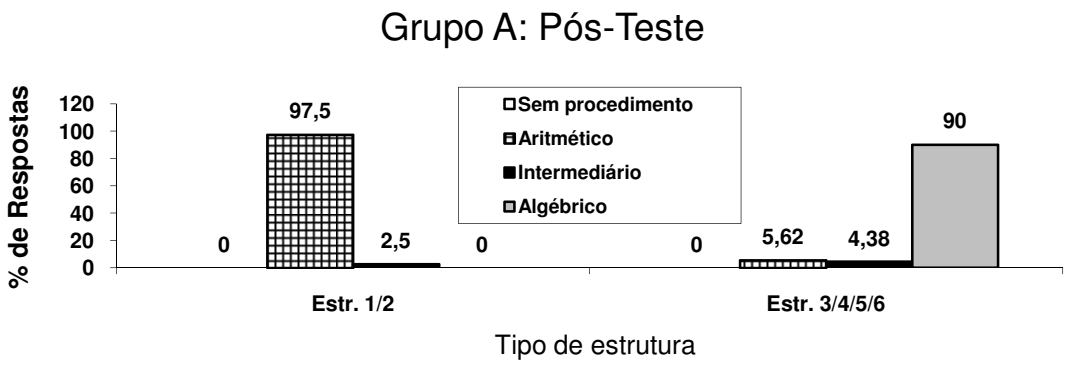


Figura 4: Distribuição da frequência percentual do tipo de procedimento nos diferentes tipos de estrutura (Grupo A - Balança: Pós-teste). Legenda: Estr.1/2 = estrutura 1 e estrutura 2; Estr. 3/4/5/6 = estrutura 3, estrutura 4, estrutura 5 e estrutura 6.

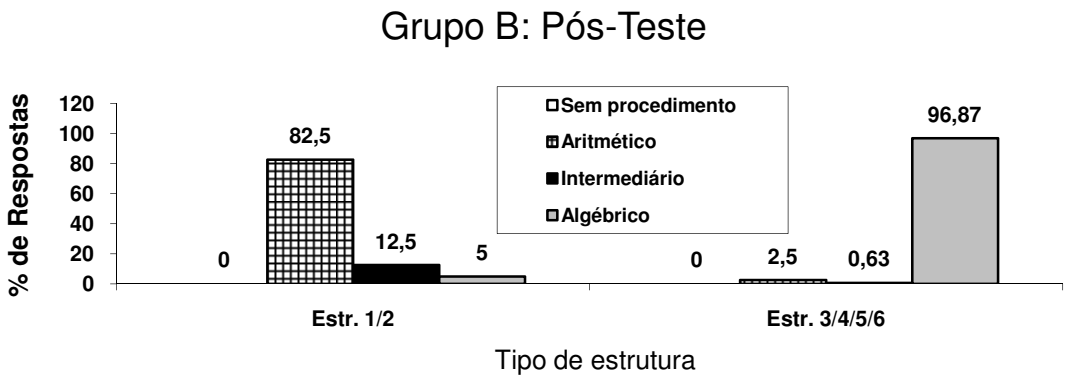


Figura 5: Distribuição da freqüência percentual do tipo de procedimento nos diferentes tipos de estrutura (Grupo B - Problemas Verbais: Pós-teste). Legenda: Estr.1/2 = estrutura 1 e estrutura 2; Estr. 3/4/5/6 = estrutura 3, estrutura 4, estrutura 5 e estrutura 6.

Um outro aspecto apontado por este estudo é que o modo de representar os problemas depende do tipo de treinamento recebido, sendo possível estabelecer uma relação entre o procedimento algébrico e o modo de representação utilizado.

- Modo de Representação: Tal modo de representação foi analisado a partir das representações auxiliares propostas pelos sujeitos na resolução dos problemas, conforme resumido no quadro 3 a seguir. Observa-se que no grupo A (Balança) aparecem diferentes formas de representação (desenho, verbal e literal), mas o conjunto delas apresenta um percentual é menor (43,74%) do que o uso das contas (49,17%). No grupo B (problemas verbais com ênfase sobre a igualdade) o conjunto dessas representações apresenta um percentual maior (64,58%) do que as contas (32,92%).

Modo de representação	Descrição
Sem representação explícita	Sujeitos da categoria "não fez, deixou em branco", quanto ao procedimento.
Desenho	Desenho da balança + pacotes (Grupo A) ou caixas/ pacotes (Grupo B)
Verbal	Resumo do problema, abreviado ou não (linguagem natural escrita)
Literal	Uso de letras como x, y, z
Contas (Sem representação auxiliar explicitada)	Operações aritméticas sem um plano aparente
O examinador propõe a representação	Desenho da balança + pacotes (Grupo A) ou desenho de caixas/pacotes (Grupo B)

Quadro 5: Modos de representação propostos pelos sujeitos como auxiliares a seus procedimentos de resolução dos problemas utilizados no treinamento.

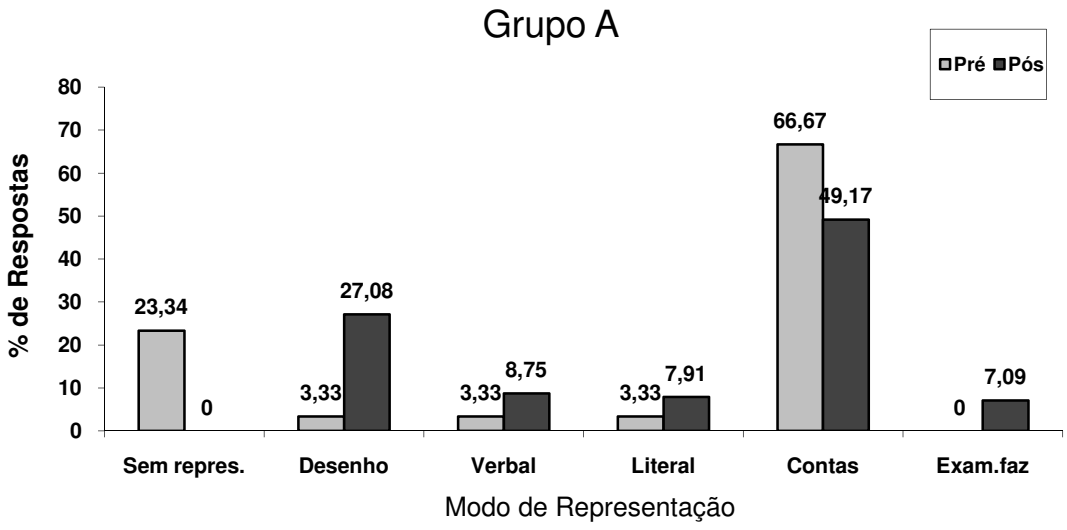


Figura 6: Distribuição da freqüência percentual do modo de representação - Grupo A (Balança). Legenda: Sem repres. = não resolve/protocolo em branco; Contas = apenas operações aritméticas; Exam. faz = examinador faz a representação.

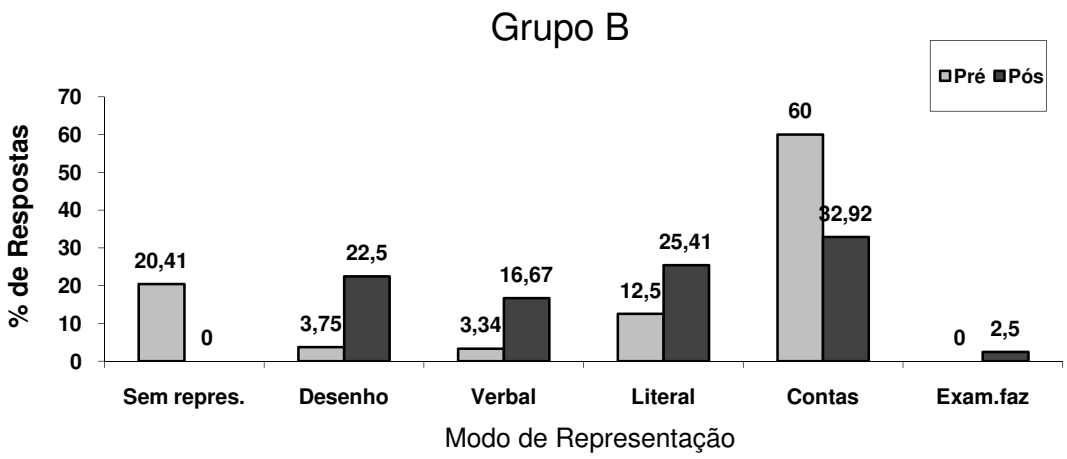


Figura 7: Distribuição da freqüência percentual do modo de representação - Grupo B (Problemas Verbais). Legenda: Sem repres. = não resolve/protocolo em branco; Contas = apenas operações aritméticas; Exam. faz = examinador faz a representação.

Como foi dito anteriormente, é possível considerar a relação entre o modo de representação e o procedimento algébrico para resolução dos problemas e equações. Parece que o uso do procedimento algébrico pressupõe uma forma de representação, sendo esta mais simbólica (Verbal 16,67%; Literal 25,41%) quando o treinamento ocorre com os problemas verbais (Grupo B). Quando o treinamento ocorre com a balança os percentuais da representação simbólica caem (Verbal 8,75%; Literal 7,91%; Exam.faz 7,09%) e o que aparece com maior freqüência é a representação em forma de desenho (27,08%) no Grupo A, destacando que a representação icônica é a mais próxima do objeto real (a balança). Além disso, o percentual em 'contas' é maior neste grupo. Estes resultados parecem indicar que suporte representacional desempenha um papel importante para o raciocínio e procedimento algébrico, e que cada tipo de treinamento oportuniza a compreensão de determinados aspectos do campo conceitual algébrico: a) a balança oportuniza a compreensão do princípio de equivalência, de incógnita*, a* experimentação da manipulação de incógnitas no campo da ação*;* b) os problemas verbais oportunizam a compreensão de igualdade, incógnita e manipulação de incógnita no campo da representação simbólico-formal.

Este estudo analisou os seguintes aspectos em relação à aprendizagem na iniciação à álgebra: 1) aspecto epistemológico, quando discute a questão das estruturas algébricas que favorecem a compreensão dos conceitos fundamentais à introdução ao campo conceitual da álgebra; 2) aspecto conceitual, quando analisou a compreensão dos conceitos como equivalência e incógnita, e 3) aspecto didático-pedagógico quando analisou comparativamente ferramentas didáticas que favorecem esta compreensão. Todos estes aspectos foram analisados a partir de uma situação experimental, e não no contexto da sala de aula. Seria importante analisar esses aspectos à luz dos aspectos ligados às relações que se estabelecem entre professor, aluno e saber no processo de construção de conhecimento no contexto da sala de aula de matemática. Para esse fim, a consideração de fenômenos didáticos, como *transposição didática* e *contrato didático* (Schubauer-Leoni, 1986; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997) faz-se necessária.

2. Objetivos

Diante do exposto, o presente estudo teve como **objetivo geral** ampliar a compreensão sobre a aprendizagem dos alunos na iniciação à álgebra analisando como esse processo ocorre no contexto de sala de aula. Sendo assim, o estudo propõe uma seqüência didática a ser aplicada em sala de aula pelo próprio professor de matemática, e tem como um dos **objetivos específicos** analisar de que formas uma seqüência didática proposta em sala de aula pelo professor, que por sua vez a transpõe para a atividade em sala-de-aula a partir de *negociações* com o pesquisador pode favorecer a construção de significados no campo conceitual da álgebra. Para tal, em cada situação proposta os seguintes aspectos foram analisados: conceitos e estruturas algébricas envolvidas nas situações problemas; modo de apresentação (modo de abordagem da situação) usada pelo professor e as suas intervenções com

os alunos durante o processo de resolução por parte deles: questionamentos, procedimentos de resolução e modos de representação realizados pelos os alunos.

Como desdobramento, outro **objetivo específico** do estudo foi dar continuidade à pesquisa acerca das dificuldades cognitivas dos alunos na aprendizagem da álgebra, a partir da resolução de um conjunto de situações-problema neste campo conceitual, no contexto de sala de aula. Deste modo, as intervenções de natureza didática e psicopedagógica usadas pelo professor para a superação de tais dificuldades, foram objetos de análise, uma vez que este estudo pretende contribuir para a compreensão do processo de aprendizagem do conhecimento algébrico e para a reflexão em torno do *aprender e do não aprender* matemática.

3. Questões da pesquisa

Então, as perguntas que esse estudo faz dividem-se em três blocos: o primeiro diz respeito ao *aluno*, o segundo diz respeito ao *professor*, e o terceiro volta-se para *seqüência* propriamente dita. Tais perguntas podem ser desdobradas nos seguintes termos:

Quanto à seqüência:

- Quais as estruturas algébricas trabalhadas na seqüência?
- Quais os pontos fortes e os pontos fracos da seqüência para oportunizar a aprendizagem dos conceitos fundamentais da álgebra?

Quanto ao professor:

- Como o professor compreendeu a seqüência didática?
- Que aspectos contratuais ele modificou / introduziu / manteve?

Quanto ao aluno:

- Que conceitos fundamentais da álgebra elementar os alunos demonstraram ter aprendido?
- Como os alunos reagiram às propostas do professor em termos de alteração de contrato didático?

Observa-se que este estudo está levantando questões a respeito dos três pólos do *'triângulo das situações didáticas'*: o pólo do saber, o pólo do professor e o pólo do aluno. Todavia, é o pólo do aluno que este estudo vai se deter, ou seja, o interesse central deste estudo é analisar *como o aluno aprende os conceitos fundamentais da álgebra inicial em sala de aula*. Para tal, faz-se necessário '*olhar*' também para o saber e para o professor, mas não como foco principal. Uma vez que toda transposição didática implica em *'mudar a cara'* do saber, a seqüência pode ser analisada da seguinte forma: *'qual foi a cara que a pesquisadora deu para introduzir os conceitos fundamentais em álgebra na sala de aula?'.* Por outro lado, o contrato didático regula a gestão desse saber em sala de aula, então surge a questão: *'como a professora faz a gestão da seqüência em sala de aula com os alunos?'.* Sendo assim, o aporte teórico deste trabalho será em torno do sujeito que aprende, do saber a ser aprendido, no caso álgebra, e dos fenômenos que permeiam esta aprendizagem: transposição didática e contrato didático.

Para responder essas questões e atender aos objetivos do estudo, foi escolhida uma abordagem metodológica que pode ser classificada como "qualitativa-observacional-etnográfica" (cf. abordagem classificatória da pesquisa qualitativa proposta em http://writing.colostate.edu/references/research/observe/pop3a.cfm).

Por qualitativa-observacional entende-se aquela abordagem de pesquisa que busca estudar atividades de grupos humanos em seus contextos ("settings") naturais, o que contrasta com a abordagem experimental tradicional em que o experimentador

privilegia o controle sobre as condições do estudo. A abordagem aqui escolhida busca igualmente assumir um caráter etnográfico, na medida em que propõe uma observação continuada baseada na imersão da pesquisadora no contexto de atividade observado (no caso deste estudo, a sala de aula), de forma a examinar de dentro as atividades em seus contextos de pesquisa, os procedimentos que os indivíduos usam para realizar tarefas, reais e significativas em seus contextos de atividade, mesmo que tais indivíduos não tenham consciência de tais procedimentos (Coulon, 1995).

Isto posto, os capítulos teóricos que se seguem visam discutir a concepção do sujeito que vai aprender um saber (capítulo 1 – O sujeito e a conceptualização da matemática), a concepção deste determinado saber (capítulo 2 – A álgebra: um campo conceitual), os fenômenos didáticos que se instituem o ensino e a aprendizagem deste saber (capítulo 3 – Fenômenos didáticos: transposição didática e contrato didático) e como este saber é ensinado e aprendido na sala de aula (capítulo 4 – O ensino e a aprendizagem da álgebra). Em seguida aos capítulos teóricos, a operacionalização do estudo será apresentada no capítulo de metodologia.

Capítulo 1

O SUJEITO E A CONCEPTUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

1.1. Teoria do Sujeito: Indivíduos e mediação da cultura

1.1.1. Considerações iniciais

Em psicologia da educação matemática, o debate teórico tem freqüentemente feito alusão ao seguinte dilema: o conhecimento deve ser assimilado fundamentalmente a aspectos lógico-operatórios, e somente de forma secundária a aspectos simbólico-representacionais, ou seria justamente o inverso (Nunes, 1994, 1997, 2000; Lins Lessa & Da Rocha Falcão, 2005)? Em termos especificamente da conceptualização em matemática, seria pertinente pensar que a aprendizagem da matemática estaria circunscrita à esfera da linguagem, exclusivamente? Alternativamente, não seria pertinente pensar, na direção proposta por Jean Piaget, que a construção do conhecimento matemático demandaria a ação do sujeito no mundo físico, de forma não necessariamente mediada pela linguagem (linguagem entendida como recurso à função semiótica, recobrindo desde a utilização de signos lingüísticos orais ou escritos até o apelo a suportes simbólicos de forma geral) (cf. Piaget, 1973a)?

Estes questionamentos são fundamentais quando se trata de refletir acerca da origem psicológica do conhecimento matemático, e para tal reflexão buscaremos apoio nas contribuições da perspectiva psicogenética de Jean Piaget, da perspectiva sócio-histórica de Lev S. Vygostky e Alexis Leontiev, e da perspectiva pós-piagetiana de Gérard Vergnaud. Essa discussão teórica sobre as relações entre pensamento e linguagem no âmbito do conhecimento matemático leva necessariamente a uma reflexão epistemológica e psicológica acerca da origem e características básicas do

conhecimento e do sujeito que se está levando em consideração no processo de construção desse conhecimento; em outras palavras, quem é esse sujeito que se desenvolve, que aprende e conceptualiza?

1.2. A perspectiva estruturalista de Jean Piaget

Do ponto de vista de uma epistemologia genética, Piaget defende que o pensamento forma-se a partir dos invariantes operatórios dos esquemas, em um processo de natureza adaptativa, ou seja, biológica (Piaget, 1973b), com clara ênfase sobre aspectos vinculados à *ação*; em artigo sobre as relações entre linguagem e as operações intelectuais, Piaget afirma existir "(...) *uma lógica de coordenações de ações mais profunda do que a lógica vinculada à linguagem e muito anterior à lógica das 'proposições', no sentido estrito". (*Piaget, 1973a, p. 63). Nesta mesma ordem de idéias, Piaget admite que a linguagem seria uma "condição necessária para a realização das estruturas lógicas", mas não uma condição "suficiente", pois tratá-la como suficiente implicaria em desconsiderar o papel fundamental das ações e da inteligência operatória (Piaget, 1973a, p. 63). Nesta perspectiva, o desenvolvimento das operações intelectuais ocorre a partir das ações do sujeito cognoscente, e as raízes das operações lógicas são mais profundas que as raízes das relações lingüísticas. Tal anterioridade da cognição em relação à função simbólica poderia ser exemplificada, na argumentação teórica piagetiana, pelos dados referentes à emergência da permanência de objeto, invariante operatório fundado numa lógica de deslocamentos (coordenação de ações) suportada pela imagem mental pré-simbólica (Piaget, 1977). Coordenações de ações pré-simbólicas estariam igualmente na base do estabelecimento de relações de ordem e de relações parte-todo, fundamentais para a construção, respectivamente, dos invariantes da seriação e transitividade, e dos invariantes relacionados à inclusão de classes (Piaget, 1973a). Conforme os exemplos acima sugerem, os invariantes lógico-operatórios se estruturariam a partir das ações sensório-motoras, constituindo o pensamento (Piaget, 1973a). Portanto, conforme

ressalta Lucy Banks-Leite *"enquanto estruturada pela lógica, a linguagem permanece subordinada à formação das operações lógico-matemáticas, embora contribua necessariamente para o 'fechamento' das estruturas formais"* (Banks-Leite, 1997, p. 212-213). Assim, a perspectiva piagetiana propõe em última análise que o desenvolvimento do pensamento se inicia no período sensório-motor, caracterizado como um período pré-linguístico, de tal sorte que a linguagem passa a ser uma sub-esfera do pensamento, e não o contrário.

1.3. A perspectiva de Lev Vigotski

Na perspectiva denominada sócio-culturalista ou sócio-histórica, L.S. Vigotski defende que o pensamento forma-se a partir de ferramentas mediacionais simbólicas. Para este autor, o processo de desenvolvimento cognitivo não segue padrões estruturais gerais de natureza biológico-adaptativa, "(...)*como sombra lançada pelo objeto, sem coincidir com ele mas reproduzindo com precisão e repetindo seu movimento"* (Vigotski, 2001, p.245). Nesse sentido, o aporte simbólico proporcionado à criança por seu contexto sócio-cultural imediato (aí incluída a escola) e o desenvolvimento geral não representam dois processos independentes, mas um único processo no contexto do qual estes dois aspectos se inter-relacionam de forma complexa. Nessa linha de formulação, o pensamento não pode ser concebido enquanto atividade exclusivamente autônoma, individual, auto-referente; em conseqüência, a psicologia cognitiva não poderia limitar-se à abstração do intrapsíquico, uma vez que, conforme assinala J.-P. Bronckart, "(...) *o pensamento e a consciência não constituem uma emanação de características estruturais ou funcionais internas (...), mas são, ao contrário, determinadas pelas atividades externas e objetivas realizadas com os congêneres, num ambiente social determinado*". (Bronckart, 1985, p. 14).

Alexis Leontiev, um outro autor de grande relevância no contexto do grupo liderado intelectualmente por Vigotski, demarca-se claramente de Vygotsky em sua etapa final de produção intelectual ao estabelecer, em substituição ao par ***pensamento-linguagem*** como motor de reflexão teórica, o par ***atividade-consciência*** (cf. Da Rocha Falcão, 2004)[2]. A proposta de ação mediata de Leontiev desloca o foco de análise da psicologia do *sujeito* para a *atividade*: a explicação não pode mais estar num sujeito com seus objetivos, acessíveis por introspecção (e uma conseqüência teórico-metodológica disso é exatamente o bombardeio crítico de Leontiev à *introspecção* como método de trabalho do psicólogo – cf. Friedrich, 1999).

De fato, Leontiev é avesso a uma explicação centrada no indivíduo (e metodologicamente baseada na introspecção, ou para usar uma expressão atual, em técnicas do tipo "thinking-aloud protocol" – produção de protocolos oriundos da solicitação que o sujeito pense em voz alta). Para ele, a explicação psicológica não pode se restringir a uma teleologia: um objetivo interno levando à realização externa, que é função unívoca identificável daquele objetivo. O sujeito, diz Leontiev, não dá conta sozinho da explicação psicológica, pois a "consciência do mundo" repousa sobre atividade material (a coisa real sendo considerada em contexto, em movimento, em processualidade). Dessa maneira, Alexis Leontiev traz à cena a importante contribuição da atividade material como unidade de análise para a abordagem de competências cognitivas escolares e extra-escolares. O deslocamento de ênfase do sujeito (acessível via solicitação de "pensar alto" ou entrevista clínica piagetiana) para o *sujeito-em-atividade* traz subsídios importantes para o estudo de sujeitos culturalmente desaparelhados e/ou pouco inclinados a "falar" suas competências, o que tem levado várias pesquisas a optar pela análise de uma competência

[2] Da Rocha Falcão alude, em apoio a tal afirmação, a comentário de Valsiner e Van Der Veer acerca de carta escrita por Vigotski a Leontiev nesta época (1933), em que o primeiro faz amargamente alusão ao fato de que as posições de ambos haviam divergido a ponto de ameaçar a "causa comum", arrematando: "Que seja assim: Estou tentando entender tudo isso da maneira spinoziana – com tristeza, mas aceitando como algo inevitável" (cf. Valsiner e Van Der Veer, 1996, pg. 316).

essencialmente práxica dos mesmos, em detrimento de uma competência simbólico-discursivo-conceitual (cf. Da Rocha Falcão, 2005; Da Rocha Falcão, 2004).

1.4. A perspectiva de Gérard Vergnaud

Para Gérard Vergnaud, propositor da teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990), a função simbólica não seria nem uma condição necessária nem uma condição suficiente do processo de conceptualização em geral (e conceptualização matemática em particular), mas contribuiria decisivamente para esse mesmo processo, notadamente em termos da transformação tanto de competências práticas ("conhecimentos-em-ação") quanto de categorias genéricas de pensamento em objetos matemáticos[3]. Este referencial teórico, ao explorar as relações entre pensamento e linguagem, tem oferecido subsídios importantes para as reflexões acerca da passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, conforme discutido por J.T. da Rocha Falcão (Da Rocha Falcão, 1997). Apesar de claramente alicerçada em pressupostos teóricos piagetianos, a perspectiva vergnausiana avança em relação àquela em função basicamente de três aspectos: em primeiro lugar, defende uma perspectiva acerca da constituição do conhecimento (ou mais especificamente da conceptualização) que vai além do primado dos invariantes lógico-operatórios (I) para a formação dos conceitos, acrescentando a tais aspectos outros dois pontos constitutivos do chamado tripé teórico da conceptualização, quais sejam os suportes de representação (R) e as situações sócio-culturalmente significativas (S), no contexto das quais o conhecimento é mobilizado e utilizado. Em segundo lugar, tal perspectiva estabelece claramente a necessidade de se levar em conta a *especificidade* dos conteúdos de conhecimento, ou seja, a referência dos mesmos a determinado campo epistêmico circunscrito (e.g., matemático, físico, moral, histórico, etc.). Tal proposição, conforme discutir-se-á mais adiante, terá conseqüências importantes em termos das questões relacionadas à aprendizagem e

[3] Ver a esse respeito reflexão proposta por Terezinha Nunes, em Nunes, 1994, 1997.

seus obstáculos, pois estes não mais serão restritos a estruturas gerais de pensamento, mas terão de levar em conta aspectos dificultadores inerentes àquele domínio específico. Um exemplo dentre vários, nesse sentido, seria a construção de significado para o sinal de igualdade em álgebra, conforme descrito por Analúcia Schliemann e colaboradores (Schliemann, 1992). Em terceiro e último lugar, tal perspectiva enfatiza a importância do conceito teórico de esquema, definido como "organização invariante da conduta para uma classe delimitada de situações" (Vergnaud, 1990). O esquema estaria aqui na base tanto de competências conceituais, necessariamente baseadas em suportes simbólicos (além de invariantes e situações), como de competências práticas não explicitáveis simbolicamente ("conhecimentos-em-ação" e/ou "teoremas-em-ação"), como, por exemplo, a competência de crianças brincarem em gangorras compensando eventuais diferenças de peso entre cada uma das duas crianças na gangorra, com a mais pesada sentando-se consistente e deliberadamente mais próxima do ponto de apoio da gangorra, sem, contudo dispor de nenhuma "explicação"[4] para tal iniciativa. Para Gérard Vergnaud, a linguagem teria importância decisiva na passagem dos esquemas tipo competência-em-ação para os esquemas conceituais, pois tal passagem decorreria necessariamente da explicitação das referidas competências, ou seja, da aquisição de competência discursiva integrada à competência prático-funcional.

A partir da proposição do esquema como elemento teórico unificador de competências cognitivas conceituais e pré-conceituais, J.T Da Rocha Falcão (1997) propõe análise da construção de significado em contexto matemático específico, a álgebra. Para este autor, tal campo conceitual fornece excelente exemplo de concatenação entre representação e invariantes operatório (conforme dados discutidos em Brito Lima & Da Rocha Falcão, 1997), bem como entre competências-

[4] Tal explicação poderia basear-se no *Princípio Universal das Alavancas*, proposto inicialmente por Arquimedes
(287 a 212 a.C). Tal princípio é freqüentemente discutido na escola fundamental, porém raramente conectado de fato, na mente dos alunos, à brincadeira da gangorra ou a qualquer outra brincadeira ou atividade extra-escolar.

em-ação (como a habilidade de pesar produtos utilizando-se balanças de dois pratos, em contexto extra-escolar de comércio) e competências simbólico-conceituais, como o princípio da equivalência em álgebra (dada uma determinada equação algébrica, pode-se obter equação dela derivada e equivalente desde que se opere de forma semelhante sobre os dois membros da mesma) (conforme dados de Lins Lessa, 1996, e Da Rocha Falcão, 1995). As representações simbólicas, segundo Da Rocha Falcão, constituem-se em aspecto-chave na aprendizagem da matemática devido notadamente a dois aspectos: em primeiro lugar, elas não se restringem a uma mera "roupagem" de estruturas operatórias previamente dadas, e em segundo, tais representações servem de elemento vinculador do indivíduo a determinado acervo cultural (conforme ilustrado acima pela balança de dois pratos), dando ao processo de construção conceitual um componente necessariamente histórico-cultural (Da Rocha Falcão, 2003a). Tais concepções estão alicerçadas na teoria dos campos conceituais, proposta por Gerard Vergnaud, a qual defende que o suporte representacional não somente "reveste" mas participa diretamente da geração do conceito, e que tal conceito é necessariamente simbólico, pois se constrói e é explicitado através da linguagem.

Tal perspectiva teórica tem, portanto, clara herança piagetiana, a qual se enriquece de aportes oriundos da perspectiva sócio-culturalista vigotskiana (notadamente em termos da importância *constitutiva* atribuída aos suportes representacionais e aos contextos de uso no processo de desenvolvimento da conceptualização). Sabemos que as perspectivas piagetiana e vigotskiana baseiam-se em pressupostos e em tradições filosófico-epistêmicas claramente distintas (conforme discutido por J. Bruner, em Bruner, 1997), mas ao mesmo tempo não nos parece desejável, conforme discute Terezinha Nunes, que o fenômeno humano, enquanto "criatura teórica piagetiana", não possa se beneficiar dos aportes de outra construção, a "criatura teórica vigotskiana" (Nunes, 2000). Pois como bem menciona J. Bruner,

citando frase do célebre físico Niels Böhr, “os opostos a grandes verdades podem igualmente ser verdadeiros; apenas os opostos a pequenas verdades é que são falsos” (Bruner, 1997).

Na seção seguinte, conduzimos a discussão para o desenvolvimento conceitual em campo conceitual específico, a álgebra. Em tal discussão, alguns conceitos teóricos discutidos nas seções anteriores serão especialmente relevantes, tais como:

1. Importância de uma *teoria da referência* na abordagem do desenvolvimento da conceptualização: o conhecimento é sempre conhecimento de alguma coisa, de um conteúdo epistêmico específico, e tal especificidade deve ser levada em consideração.
2. Importância dos *esquemas* mentais como organizadores da conduta para classes de situações, esquemas estes baseados em invariantes operatórios, suportes representacionais e contextos situacionais.
3. Importância das interações como contexto de aprendizagem escolar (e extra-escolar), interações estas contextualizadas, no caso da escola, em *contratos didáticos* (cf. tratamento teórico dado a tal termo por Guy Brousseau, em Brousseau, 1987; 1998).

1.2. Conceptualização em matemática

1.2.1. Algumas considerações sobre a matemática escolar

A matemática escolar em seu contexto cultural-contratual assume uma função de segmentação social importante; é ela que opera uma divisão entre os alunos que terá repercussões por toda a vida escolar, com desdobramentos sobre perspectivas profissionais e inserção social destes indivíduos em formação: trata-se da divisão entre o subgrupo dos *bons/fortes* em matemática, destinados às carreiras universitárias científico-técnicas, e dos *fracos/ruins* nessa disciplina, destinados às humanidades, artes, cursos técnicos de baixo nível de exigência em matemática. Para

filósofos e ideólogos como Louis Althusser, a matemática assume papel central no *aparelho ideológico* representado pela escola, aparelho este destinado à perpetuação das estruturas de desigualdade e dominação do estado capitalista (Althusser, 1985). Outros autores em educação matemática, mesmo não indo tão longe quanto Althusser, admitem o papel sócio-político da matemática (Walkerdine, 1988; D'Ambrosio, 1986; 1993; 2002; Knijnik, 1996). Em relação aos professores, costuma haver uma certa hierarquia que faz com que em muitas escolas os professores de matemática são tratados de forma diferenciada, como se a matemática (e por "contágio" seus professores) fosse mais importante que as demais disciplinas[5]. *"Saber matemática é para poucos[6]".* Não é incomum ouvirmos tal afirmativa. Mas qual a natureza do poder e do status da matemática?

D'Ambrosio (1998b) reflete criticamente sobre alguns aspectos que conferem à matemática essa aura de status social, admiração e poder. Tais aspectos, segundo este autor, não podem ser considerados isoladamente, mas em contexto. Um dos aspectos que ele fala é da pretensa *universalidade da matemática.* A matemática para muitos seria um corpo de conhecimento independente do gênero humano, transcultural e mesmo universal (ver, por exemplo, Rothstein, 1995; Davis & Hersh, 1981). Tomando como exemplo a álgebra, o algoritmo algébrico de resolução de problemas pode ser utilizado por qualquer povo, de qualquer cultura. É como se na matemática, diferentemente do que ocorre no estudo das línguas maternas de vários países, todos falassem a mesma linguagem.

A *construção lógica e formal* também é outro aspecto que contribui para o argumento universalista resumido no parágrafo anterior. A matemática tanto versa

[5] Como conseqüência de tal fenômeno social, a distribuição por gênero entre os professores de matemática em muitos países (incluindo o Brasil) não é equitativa, havendo predomínio de professores-homens, notadamente no subgrupo dos professores com licenciatura em matemática (Da Rocha Falcão & Loos, 1999; Sax, 1994; Rosemberg, 2001 – ver Tabela 6, reproduzida no Anexo 1.

[6] Ou como dizia de forma divertida (apesar de preconceituosa) um professor de matemática do ensino médio pernambucano, durante curso de capacitação proferido por Jorge Falcão em 2003: "*Matemática não é piolho, que dá na cabeça de todo mundo...*".

sobre fenômenos concretos e elementos do mundo real (como no caso das operações aritméticas que servem de ferramentas à vida sócio-cultural – cf. discutido no já clássico *Na vida dez, na escola zero...* – Carraher, Carraher & Schliemann, 1988), como também parte para o domínio descolado do mundo empírico e palpável, como quando nos referimos aos números complexos, ou "centros de gravidade" de nuvens estatísticas a 3 + n dimensões. Isso confere à matemática uma abrangência respeitável, desde a aplicação em problemas da vida cotidiana – como pagar o valor de uma mercadoria que se quer comprar e receber o troco – até as deduções de fórmulas e a proposição de axiomas dos mais complexos.

Não só na Psicologia, como também na Filosofia, pode-se encontrar argumentos que buscam justificar o status e "nobreza" da matemática: muitos dos filósofos mais importantes da humanidade reservaram para a matemática lugar de destaque como modalidade de pensamento fundamental do filósofo, como Platão, Aristóteles, Descartes, Comte, Kant – sem pretensão de exaustividade.

Assim, a matemática acadêmica (ou *savoir-savant*) e escolar (*savoir-enseigné* – cf. Chevallard, 1985) tanto pode estar relacionada à investigação empírica, quanto saltar para um domínio construído a partir de premissas pouco (ou nada) conectadas ao real estrito senso. Nesse momento, quando a matemática rompe as barreiras do concreto e passa a atuar no plano lógico-formal, é que ela se torna mais complexa e encantadora[7]. E a álgebra marca um dos momentos de transposição do concreto para o lógico-formal e, talvez por isso, marque uma das grandes rupturas e transformações tanto na história da matemática (cf. Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986) quanto na micro-história do aluno de matemática escolar (cf. Bodanskii, 1991).

[7] Ver a esse respeito a interessante discussão do fazer matemático proposta por S. Singh, a partir da análise da *saga* do mundo dos matemáticos em busca da demonstração do último teorema de Fermat – cf. Singh, 1997)

1.2.2. Aprendizagem da matemática escolar: especificando um referencial teórico

Em termos da abordagem em psicologia cognitiva dos processos de aprendizagem, torna-se pertinente considerar a perspectiva teórica de Gérard Vergnaud (Vergnaud,1990) que defende que todo e qualquer conhecimento é sempre um conhecimento de *algum* conteúdo, e que se refere necessariamente a um determinado campo epistêmico, com suas características, obstáculos epistemológicos (cf. Bachelard, 1996), história e *transposição didática* (Chevallard, 1985). Segundo Vergnaud, faz-se necessário levar em consideração no processo de construção sócio-cultural dos conceitos científicos, a área específica do conhecimento: para este autor, portanto, todo conhecimento, todo processo de aprendizagem refere-se a um conteúdo específico, donde a importância, em seu sistema teórico, do que ele chama de **teoria da referência.** Ainda segundo Vergnaud, *"um único conceito não faz referência apenas a um tipo de situação, e uma única situação não pode se analisada com apenas um conceito; portanto, nós devemos estudar* ***campos conceituais****"* (Vergnaud, 1990). Campo conceitual pode ser definido como *"um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão"* (Vergnaud, 1986). Na sua visão, a descrição de um campo conceitual requer ao mesmo tempo a análise das situações (ou dos problemas), a análise dos procedimentos utilizados pelos alunos e suas argumentações, e as representações simbólicas que utilizam. Portanto, um conceito é estruturado a partir de um tripé formado pelos *invariantes* (I), pelas *situações* (S) e pelas *representações* (R), pólos estes independentes, mas interligados.

Segundo Vergnaud, os *invariantes* dizem respeito às propriedades do conceito. Considerando a álgebra, entendemos que há características e propriedades específicas desse domínio matemático, como, por exemplo, o uso de letras para representar as quantidades desconhecidas. Tais propriedades são inerentes ao conceito de álgebra e caracterizam esse campo de saber.

As *situações*, por sua vez, são aquelas que dão sentido, significado cultural ao conceito. Essa questão é fundamental quando pensamos no ensino de álgebra: *que situações, desenvolvidas em sala de aula, podem dar sentido ao saber algébrico? Que contrato didático é mais eficaz como contexto de aprendizagem?* Mas ao longo da própria história da álgebra podemos registrar inúmeras situações que deram significado ao seu desenvolvimento, tanto de uma álgebra mais elementar, mais presa ao mundo concreto, quanto da álgebra moderna, mais formal.

Por fim, como último elemento do tripé, temos as *representações*. Aqui, podemos mencionar o conjunto de *representações simbólicas* a serem utilizadas em álgebra – a equação, por exemplo, pode ser entendida como uma das formas de representação desse saber.

Desta forma, um Campo Conceitual para Vergnaud pode ser definido como *"um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão"* (Vergnaud, 1986:84). E, nessa visão, a álgebra só faz sentido quando percebida não como um aglomerado de conceitos independentes e algoritmos, mas como fazendo parte de um *campo conceitual*. Historicamente, quando pensamos nas relações entre álgebra e aritmética, álgebra e geometria, álgebra e funções, entendemos essa dimensão da rede, da teia encadeada com outros domínios e conceitos matemáticos, que fazem com que a álgebra (assim como qualquer outro conteúdo matemático) se configure como tal.

Ao longo do seu desenvolvimento, a criança se depara com um grande número de situações onde ela terá que resolver problemas no espaço, no tempo, no domínio das quantidades e das grandezas, utilizando para isso o que Vergnaud (1986) denominou de **"teorema-em-ação"**, que consiste em "relações matemáticas obtidas pelo julgamento das crianças quando escolhem uma operação ou uma seqüência de

operações para resolver um problema". Na maioria das vezes os teoremas-em-ação têm validade local para as crianças e são associados a certos valores de variáveis, constituindo-se numa primeira base que poderá ser alargada em seguida. Vale ressaltar que certos conhecimentos apreendidos pelos alunos podem não ser usados (teoremas que não são teoremas-em-ação), e ao contrário, existem conhecimentos intuitivos das crianças que nunca tomam a forma de verdadeiros enunciados (teoremas-em-ação que não se tornam teoremas). Assim sendo, um dos problemas do ensino e da didática é favorecer a transformação dos teoremas em teoremas-em-ação e vice-versa.

Para exemplificar a questão dos teoremas-em-ação, pode-se mencionar uma ferramenta da nossa cultura, a ***balança de dois pratos,*** largamente utilizada em feiras livres da região nordestina, cujo uso repousa sobre um teorema-em-ação que é a noção de equilíbrio. Numa balança como essa, o princípio de equilíbrio é fundamental para a atividade de compra e venda de mercadorias no dia-a-dia dos indivíduos. Por exemplo: As pessoas sabem que para comprar 2kg de feijão deve-se colocar o peso de 2kg de um lado e ir colocando o feijão até a balança equilibrar, indicando assim que tem 2kg de feijão. Nesta prática do comércio as pessoas facilmente entendem que se o prato onde está o peso estiver mais pesado, então se deve tirar determinada quantidade de feijão, ou inversamente, se o prato com o peso estiver mais leve deve-se colocar mais quantidade de feijão no outro prato. Na medida em que os indivíduos descobrem o peso da mercadoria a partir do equilíbrio dos dois pratos da balança, esta atividade da cultura mobiliza o teorema-em-ação do equilíbrio e auxilia a construção da compreensão do *princípio da equivalência*.

Como muitos dos teoremas-em-ação corporificam situações da cultura e envolvem o uso de instrumentos ou "amplificadores culturais" (Bruner, 1976), a mobilização destes últimos como pontos de partida para a construção conceitual passa a ser um aspecto importante aberto pela teoria vigotskiana, e fortemente

reconsiderado no contexto da teoria dos campos conceituais. No campo da álgebra, por exemplo, um dos elementos que podem se constituir como um obstáculo epistemológico para a sua compreensão é o *princípio de equivalência* entre as equações. Assim, numa perspectiva vergnausiana, a mobilização de uma ferramenta da cultura seria didaticamente válida para a suplantação de obstáculos epistemológicos inerentes à construção do conhecimento, no caso da introdução ao conhecimento matemático algébrico poderia ser a ferramenta cultural da balança de dois pratos. É necessário, portanto, fazer um recorte epistemológico quanto à área do conhecimento envolvido no processo de aprendizagem. No caso deste estudo o recorte é o conhecimento algébrico.

1.3. O campo conceitual algébrico

Os dados do estudo empírico proposto por M.M.Lins Lessa (Lins Lessa, 1996), apresentado na introdução deste trabalho, foram analisados de forma a subsidiar tal discussão no âmbito da construção do conhecimento matemático, mais especificamente, a aprendizagem da álgebra. Dentre os aspectos abordados a partir dos resultados obtidos em tal estudo, dois parecem merecer destaque: (1) a natureza da construção do princípio da equivalência e a compreensão da manipulação de incógnitas a partir da ação do sujeito na condição de treinamento com a balança de dois pratos; (2) a natureza proposicional envolvida na representação dos problemas.

Discutindo o primeiro aspecto é possível comentar que durante as sessões de treinamento com a balança os sujeitos tinham a oportunidade de observá-la concretamente, ou seja, eles podiam observar quando ela estava em equilíbrio e em desequilíbrio. Além disso, os sujeitos tinham a oportunidade de manipular a balança a fim de obter o equilíbrio ou o desequilíbrio através da sua ação sobre a mesma. Nesta situação de treinamento o discurso do examinador, por exemplo, *"se eu coloco o mesmo peso em ambos os pratos da balança, ela fica equilibrada"*, *"se a balança*

estiver equilibrada e eu tirar o mesmo peso de cada lado, ela vai continuar equilibrada", tinha como suporte o objeto onde os sujeitos podiam constatar empiricamente o que estava sendo verbalizado. Sendo assim, pode-se dizer que a construção do princípio da equivalência, de incógnita e de manipulação de incógnita se apoiou decisivamente a ação do sujeito sobre o objeto-balança. Isso não quer dizer que a construção de conceitos decorra da ação concreta do sujeito e não da fala do examinador, e sim, que a situação concreta deu suporte à fala do examinador, uma vez que a balança, enquanto artefato da cultura, mobiliza conhecimentos práticos extra-escolares referentes à noção do equilíbrio, com sua aplicação em situações culturais de pesagem e comércio[8]. Poder-se-ia dizer que a construção de significados algébricos ocorrida no contexto da atividade com a balança teria como suporte preponderante (ou "conceptual scaffolding" - "andaime conceitual" -, segundo Da Rocha Falcão, 1995) uma ação (no sentido piagetiano do termo) e não uma representação mediacional.

Diferentemente do treinamento com a balança, no treinamento com os problemas verbais, o examinador e o sujeito estavam diante de uma atividade que envolvia um suporte discursivo-representacional. Quando o examinador fazia referência à igualdade entre quantidades enfatizadas no enunciado de problemas verbais, o seu discurso tinha como suporte uma proposição verbal que envolvia relações lógico-operatórias como ilustrado no trecho a seguir, transcrito de um dos problemas utilizados: *"As Lojas Americanas e Lobrás tinham a mesma quantidade de chocolate, as caixas de chocolate da Lobrás eram iguais às caixas das Lojas Americanas, vamos supor que as Lojas Americanas tivessem vendido uma caixa e a Lobrás também tivesse vendido, as lojas iam continuar com a mesma quantidade?".*

Nos problemas verbais, a construção do princípio de equivalência não estava suportada por metáforas baseadas por sua vez em artefatos da cultura, e sim numa

[8] Para uma discussão teórica de tais competências escolares em termos de "competências-em-ação" e, mais especificamente, "teoremas-em-ação", ver Vergnaud (2000).

estrutura lógica proposicional do tipo *"se ... então"*, que demanda esquemas operatórios formais do pensamento. Nesta situação, poder-se-ia dizer que a mediação simbólica ocorrida na atividade com os problemas verbais estava alicerçada num suporte representacional lógico-discursivo. Estes dados vão na mesma direção dos dados do estudo de Brito Lima & e Da Rocha Falcão (1997), em que a possibilidade dada aos sujeitos de representação prévia do problema algébrico através de um esquema pictórico e em linguagem natural facilitou decisivamente a abordagem e resolução do mesmo.

Ao considerar comparativamente a situação da balança e a situação dos problemas verbais com ênfase na igualdade, verificamos que tanto a ação quanto o discurso oferecem suportes auxiliares na resolução de problemas algébricos. Portanto, o que está em questão aqui não é a defesa do material concreto como suporte auxiliar, no sentido de que a criança precisa peremptoriamente desses materiais para construir conceitos lógico-matemáticos. Até porque os resultados do estudo apontaram que não houve diferença entre os dois grupos quanto ao uso do procedimento algébrico – trabalhado durante as duas condições de treinamento - para resolver os problemas e as equações. Parte-se aqui do pressuposto segundo o qual o tipo de suporte didático não é o aspecto mais importante na aprendizagem de conteúdos matemáticos em geral, e algébrico em particular. O que o estudo evidencia é que com a balança a criança pode compreender o princípio de equivalência a partir de teoremas-em-ação baseados em esquemas sensório-motores, mas com os problemas apresentados exclusivamente de forma verbal ela precisa de esquemas operatório-formais-discursivos para compreender o mesmo princípio. Isto é, numa situação (balança) a linguagem não é o aspecto fundamental (ou suficiente) para compreensão do princípio, ela organiza e dá significado à ação; como afirma Piaget, a linguagem permanece como condição necessária do acabamento das estruturas lógicas, pelo menos no nível das estruturas proposicionais, mas nem por isso constitui

uma condição suficiente de sua formação (Piaget, 1973a, p. 63). Na outra situação (problemas verbais) a compreensão do princípio se apóia decisivamente na linguagem.

Portanto, os dados do estudo empírico apontam para um processo psicológico de construção do conhecimento matemático de natureza complexa, fazendo apelo a esquemas que vão do pólo da ação ao pólo da linguagem (sem que aqui se proponha uma dicotomia ou hierarquia – cf. Lins Lessa & Da Rocha Falcão, 2005). Tais dados nos autorizam, portanto, a propor que se o conhecimento matemático abarca desde competências-em-ação, teoremas-em-ação e esquemas, que não são necessariamente conceituais, então a construção desse conhecimento não é mediada apenas pela linguagem em todas as situações de aprendizagem. Em se tratando da álgebra, que *"consiste num conjunto de princípios, conceitos, regras e procedimentos matemáticos para a modelização e resolução de problemas específico, cuja abordagem por outros métodos (aritméticos, por exemplo) seria difícil ou impossível"* (Da Rocha Falcão, 1993), constata-se a importância da linguagem na construção desse conhecimento. Porém, insistimos que o aspecto fundante dos esquemas conceituais abstratos é a ação (esquema sensório-motor) e, portanto, a noção de *esquema* pressupõe a interação entre os aspectos simbólicos e operatórios num contexto específico, como por exemplo, a construção do conhecimento algébrico.

Os dados do estudo aqui discutido têm interesse para a discussão acerca da conceptualização em álgebra, e em última análise, para a discussão acerca possibilidades e limites da linguagem na construção do conhecimento matemático. O ponto de vista teórico que se pretende defender acerca da construção do conhecimento matemático é que o mesmo não pode ser considerado exclusivamente em termos simbólico-proposicionais[9]. Determinados aspectos conceituais (como o

[9] Tal convicção teórica é compartilhada por outros pesquisadores em educação matemática, conforme discutido e empiricamente fundamentado por C. Frade (Frade, 2003). Do ponto de vista teórico, ver igualmente a discussão acerca da diferenciação entre conhecimentos tácitos (implícitos, informais) e explícitos (formais, conceituais), bem como a importância dos primeiros para o desenvolvimento da competência em matemática, proposto por M. Polanyi (Polanyi, 1962; Polanyi Society, 2002).

princípio da equivalência em álgebra) não podem ser restritos à lógica proposicional, pois o aspecto fundante de tal construção de significado remonta a esquemas sensório-motores, por sua vez enraizados na ação e corporeidade (Lakoff & Núnez, 2000) do sujeito.

Uma vez que o campo conceitual algébrico é objeto de interesse desse estudo enquanto saber a ensinado em sala de aula, faz-se necessário continuar discutindo este campo conceitual de forma mais detalhada. Trata-se de um saber matemático que tem sua própria história, características e concepções que serão abordadas no capítulo 2 a seguir.

Capítulo 2

ÁLGEBRA: Um campo conceitual

2.1. Um pouco de história da álgebra

A palavra álgebra, como já mencionamos, tem origem árabe, assim como algumas outras palavras em matemática (algarismo, corruptela de Al Khwarismi). Da Rocha Falcão, com base no historiador árabe da matemática Rashid Rashed (Rashed, 1994), menciona que o termo original *al-d'jabra* referia-se a uma habilidade veterinária – a boa redução (no sentido ortopédico, ou seja, melhor junção possível) das partes de uma pata fraturada de camelo (Da Rocha Falcão, 1993).

Em outro texto, Da Rocha Falcão discute a origem cultural-pragmática da álgebra, mencionando um conhecido caso de partilha de bens, que pode ser resumido da seguinte forma: uma escrava se torna amante de seu senhor, e este falece. Como escrava, ela faz parte do espólio dos bens do senhor, mas como amante favorita, ela pode ser considerada sua herdeira e, portanto obter sua liberdade, desde que a compre, pois este era um dos dois únicos modos de um escravo tornar-se livre (o outro decorria de alforria voluntária concedida pelo senhor ainda vivo). Para obter o dinheiro necessário a tal compra, a escrava deveria se constituir como um dos herdeiros. Surge então um dilema que, na partilha de bens faz com que seja desencadeado um problema matemático que não pode ser resolvido aritmeticamente: ela faz parte do espólio do senhor, como "propriedade", mas, por outro lado, tem direito a uma parcela desses mesmos bens, como herdeira. Como, do ponto de vista aritmético, essa escrava pode estar em dois lugares diferentes no contexto de uma sentença matemática (cf. Da Rocha Falcão, 1997)?

Este autor discute que problemas como esse forçaram o surgimento de uma matemática capaz de lidar com entidade matemáticas com valores em suspenso, matemática esta que faz sua primeira aparição histórica no manual proposto pelo matemático árabe Mohammed Al-Kwarizmi, no século IX, intitulado *Al-Kitab-al-muhtasar-fi-hisab-al-d'jabra-l-muqabala*, considerado o primeiro manual sobre álgebra da história (cf. Guedj, 1992). De maneira literal poderíamos traduzir o título deste manual como *"O livro da concatenação e do equilíbrio",* o que tem familiaridade semântica, de um lado, com a redução ortopédica de partes fraturadas de patas de camelo, e concatenação de partes de uma equação matemática em busca do estabelecimento de valores não acessíveis através de operações aritméticas.

Para Dahan-Dalmedico & Peiffer, citados por Da Rocha Falcão, a álgebra poderia, então, ser considerada como um esforço de síntese entre a instrumentalização para a resolução de problemas da vida cotidiana e um trabalho de exploração e pesquisa formal em matemática (Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986; Da Rocha Falcão, 1997). Entretanto, os mais antigos documentos que podem ser considerados como se referindo a um conteúdo algébrico foram papirus egípcios, datados aproximadamente de 1700 a 1600 a.C., escritos por um sacerdote e que atualmente podem ser encontrados em um museu britânico. São as TÁBUAS DE AHMES, que apresentam soluções para equações algébricas.

O desenvolvimento da álgebra, inicialmente, aparece muito ligado à aritmética e à geometria, sobretudo à expressão de princípios gerais referentes aos polígonos. Rojano, por outro lado, discute que a álgebra babilônica podia ser entendida como uma forma sofisticada de resolver problemas aritméticos (Rojano, 1996). Historicamente, foi o grego Diophantus (século III d.C.) quem trouxe uma das maiores contribuições a esse campo de conhecimento: o uso de símbolos e sinais, para caracterizar as operações. Embora em Diophantus encontremos uma álgebra ainda

relacionada à aritmética, talvez já se possa falar na definição de uma *álgebra elementar*, centrada, basicamente, na resolução de problemas e equações simples.

Na Idade Média, por conta de sua própria característica histórica, não são encontradas grandes referências relativas ao desenvolvimento algébrico – assim como de outras áreas do conhecimento e outras Ciências[10] – e a álgebra tem um novo ápice no seu desenvolvimento em torno do século XVII, com o francês François Viète, que introduziu o uso de letras para representar as quantidades e abriu caminho para os trabalhos de Descartes e de Newton. Em seu livro *Introdução à Arte Analítica* (1651), Viète discute aspectos fundamentais da álgebra, relacionados, sobretudo, à resolução de equações (cf. Charbonneau, 1996).

No século XVII há o aprimoramento da notação simbólica, com Viète e Descartes e, no final do mesmo século, com Leibniz e a introdução da *lógica simbólica*. Já no século XVIII, as noções fundamentais em álgebra como, por exemplo, a noção de *funções*, ganham generalidade, libertando-se do cálculo numérico. Por fim, no século XIX houve o aprimoramento da resolução de problemas, das equações e dos cálculos relativos às variáveis, dando subsídios para o desenvolvimento da *álgebra moderna*, livre da aritmética e da geometria, partindo para o domínio da abstração pura.

É importante que façamos essa breve análise da história da álgebra, para entendermos como se dá o seu desenvolvimento, dentro da matemática e, em outro sentido, que influência tal desenvolvimento pode ter na estruturação da álgebra escolar, no contexto de um processo de *transposição didática* (Chevallard, 1985). Isto posto, a questão mais central, pela qual nos interessamos, diz respeito às concepções

[10] Alguns autores (como Rashed, 1984) contestam o etnocentrismo europeu contido nessa afirmação, pois durante tal período histórico – a Idade Média – muitas cidades da península ibérica estavam sob domínio árabe (ou *mouro*, como se dizia), e em tais cidades floresciam a matemática, medicina, filosofia, teologia.

que se tem de álgebra e, a partir de tais concepções, entender como a álgebra escolar se organiza.

2. Algumas considerações sobre álgebra

O que é álgebra? Essa é a questão central deste capítulo, a fim de contribuir para o debate em Educação Matemática. Como perguntas complementares, temos: *Que aspectos poderiam ser considerados especialmente importantes na caracterização do campo conceitual algébrico? Que aspectos distinguem o saber algébrico de outros saberes matemáticos, notadamente o aritmético?*

A idéia de que a álgebra diz respeito fundamentalmente a um conjunto de regras de manipulação que permitem passar da equação à resposta, é veiculada nos manuais introdutórios e reforçada em sala de aula. É importante questionar a natureza deste ensino baseado apenas na memorização de regras e na automatização de algoritmos. Não havendo compreensão dos conceitos envolvidos, como pode haver a futura utilização do conhecimento em outras situações? Os alunos quando aprendem as regras sabem aplicá-las apenas aos problemas bem parecidos com aqueles ensinados pelo professor e resolvidos no livro didático. Quando um problema difere um pouco daqueles já vistos, o aluno não é capaz de resolvê-lo e justifica-se dizendo: "ainda não aprendi este assunto". Isto demonstra, por exemplo, como o ensino da matemática, neste caso, ainda está dominado pela concepção empirista/mecanicista da aprendizagem, a qual prioriza a memorização, o adestramento e não a compreensão.

Neste sentido, o ensino inicial nesta área deve inicialmente considerar a necessidade de trabalhar com as crianças alguns conceitos básicos, instrumentais para a construção de significado nesse campo conceitual. Segundo Vergnaud (1988a), Laborde (1982) e Da Rocha Falcão (1992; 1993), a álgebra representa uma mudança epistemológica importante em relação à aritmética onde, em vez de lidar diretamente

com o processamento numérico imediato, o aluno tem que inicialmente *transpor* o problema da linguagem natural para uma linguagem simbólico-formal corporificada na equação, e em seguida, manipular símbolos com regras explícitas. Para tal, considera-se uma abordagem da álgebra segundo a qual "trata-se de um conjunto de conceitos e procedimentos (algorítmos) matemáticos que permitem a *representação* prévia e a *resolução* de um determinado tipo de problema, para o qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes" (Da Rocha Falcão, 1993).

O estudo de Schliemann, Santiago & Brito Lima (1992) mostrou que a balança de dois pratos parece permitir a compreensão de conceitos como igualdade e incógnita através da atividade de considerar ou não o equilíbrio da balança, quando transformações equivalentes são feitas em ambos os pratos da mesma, ou seja, em ambos os lados da igualdade. É nesse sentido que da Rocha Falcão (1995) propõe que a balança "metaforiza", via conhecimento-em-ação disponível, o princípio algébrico da equivalência de equações.

Quando se introduz álgebra como uma parte formal da matemática, há uma mudança com relação ao que os alunos faziam antes, mas a função comum da álgebra e da aritmética, que é a resolução de problemas, continua obscura. Segundo Vergnaud (1988a), quando a álgebra é introduzida para resolver problemas aritméticos, ela é usualmente vista pelos alunos como mais complexa do que a solução aritmética, porque nas expressões mais simples do tipo $a + x = b$, $ax = b$ e $ax + b = c$, a solução algébrica não oferece benefício óbvio. Filloy & Rojano (1984) e Vergnaud & Cortez (1986) argumentaram que a apresentação de situações-problemas usando a balança de dois pratos é extremamente útil para auxiliar o aluno a vencer dois obstáculos que interferem significativamente na compreensão da álgebra na escola: 1) a operações sobre incógnitas; 2) a utilização de um conceito de equivalência distinto dos significados anteriomente atribuídos pelos alunos ao sinal de igual.

Bodanskii (1990) levanta a questão da compreensão dos conceitos algébricos a partir do entendimento do enunciado dos problemas verbais, sem a necessidade de modelos como o da balança. O autor enfatiza que o ensino da álgebra deve iniciar nas escolas primárias desde os 6 anos de idade, e propõe cinco estágios para o desenvolvimento do método algébrico de resolução de problemas. Nesses estágios, Bodanskii destaca o papel da instrução na formação da habilidade na criança para representar as relações de um problema sob a forma de equação, para que possa ser capaz de resolver problemas algébricos.

Estas considerações acerca do campo conceitual da álgebra levam a questões julgadas relevantes no contexto da Educação Matemática, especificamente a didática da álgebra. Vergnaud (1985), Schubauer-Leoni & Perret-Clermont (1997) defendem que para promover situações adequadas na sala de aula, o professor deve compreender: 1) a natureza do conhecimento/conteúdo da Matemática; 2) o modo como seu aluno desenvolve a compreensão de conceitos matemáticos; e 3) as dificuldades intrínsecas ao processo. Para tal, é imprescindível que haja uma interação constante entre aluno, professor e o conteúdo a ser ensinado.

2.3. Concepções acerca da álgebra

Não é fácil definir a álgebra em poucas palavras. Muito mais do que uma definição *stricto sensu*, os autores discutem *concepções sobre a álgebra*. Lesley Lee (1996) propõe que a álgebra é uma mini-cultura na cultura da matemática. E, assim, há concepções e perspectivas específicas acerca desse *campo conceitual* que precisam ser compreendidas para que possamos ter uma noção da dimensão e do potencial da álgebra, sobretudo focalizando o seu ensino, que é o nosso elemento central de interesse.

Quando nos referimos à álgebra como um *campo conceitual* isso nos remete às idéias defendidas por Gérard Vergnaud (que também se debruçou sobre o ensino e

aprendizagem da álgebra escolar, como veremos no capítulo seguinte). Vergnaud, ao discutir a questão dos conceitos, reflete que estes não existem de forma isolada, mas fazem parte de uma *rede*, de uma *teia* encadeada, que envolve outros conceitos: os *campos conceituais,* já discutidos anteriormente (Vergnaud, 1990). Mas, então, a partir dessa discussão inicial, *o que é álgebra*? Usiskin (1995) aponta a existência de *quatro concepções básicas* acerca da álgebra, todas elas ligadas, sobretudo, ao papel atribuído às variáveis.

- **A primeira concepção** diz respeito à *álgebra como aritmética generalizada.* Nesse sentido, o que diferencia a aritmética da álgebra, é que nesta última, além de se operar com números, opera-se, também, com letras. É a introdução de letras que caracteriza, então, a entrada no domínio algébrico. A álgebra é entendida, assim, como a *matemática das letras.* As operações a serem realizadas são as mesmas efetuadas em aritmética. Desta forma, as letras devem ser tratadas como números, no caso, números desconhecidos: incógnitas e variáveis. É interessante refletir que essa concepção se aproxima do desenvolvimento inicial da álgebra, historicamente: uma álgebra ainda vinculada ao um domínio mais "concreto", ainda ligado à aritmética.
- Uma **segunda concepção** é a de *álgebra como ferramenta de resolução de problemas.* O procedimento algébrico de resolução é potente, no sentido de nos permitir resolver problemas que não seriam possíveis de serem resolvidos no domínio da aritmética, ou que sua resolução aritmética seria longa e enfadonha, baseada, quase sempre, no mecanismo de *tentativas e erros.* A lógica inerente ao algoritmo de resolução de um problema algébrico faz com que o indivíduo possa gerar uma equação, manipular os dados do problema, seguindo uma ordem hierárquica de ação, até encontrar a sua resolução.
- A álgebra também pode ser concebida como *a expressão de relações entre grandezas,* uma **terceira concepção.** Usiskin toma como exemplo a fórmula

A = bh, ressaltando que nessa expressão temos a relação entre três grandezas: **A**, **b** e **h**. Para descobrir o valor desconhecido de uma dessas grandezas, isso dependerá, necessariamente, do valor das outras duas.

Em relação às duas últimas concepções, elas possivelmente estão relacionadas ao que Da Rocha Falcão (1997) chama de *modelização* em álgebra, à possibilidade de, estabelecendo relações e resolvendo problemas, poder gerar modelos algébricos. Outro aspecto interessante de ser considerado é que estas concepções também estão relacionadas a um segundo momento no desenvolvimento histórico da álgebra: a geração de equações e resolução de problemas.

Se as três concepções de álgebra, sugeridas por Usiskin e ora apresentadas, estão relacionadas à álgebra do Ensino Fundamental e Médio, este autor ainda discute **uma quarta concepção**, a qual está ligada à matemática superior: *a álgebra como estrutura.* Assim, ele reflete que *"o estudo da álgebra nos cursos superiores envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais"* (Usiskin, 1996, pg. 17). Não nos aprofundaremos nessa discussão pelo fato de que nosso objeto de investigação é a álgebra inicial, como já mencionamos, mas cabe-nos refletir que essa concepção se aproxima do que é descrito historicamente, acerca da *álgebra moderna,* livre do domínio concreto e partindo para a abstração pura.

A partir dessa linha de pensamento, Charbonneau (1996) procura resumir as idéias centrais acerca do que seja álgebra enfocando três pontos que considera fundamentais, e que serão destacados a seguir:

1. A álgebra não é apenas a *extensão de domínios numéricos.* Assim, a visão da álgebra como aritmética generalizada não seria a que melhor define esse campo de conhecimento. Ao contrário, ela reduz a álgebra a um plano mais concreto, como se fosse uma *aritmética superior.*

2. A álgebra não pode ser entendida também, em sua visão, como uma *questão de simbolismo*. Desta forma, embora sendo possível gerar uma equação a partir dos dados que um problema algébrico nos fornece, reduzir a álgebra ao simbolismo formal seria igualmente uma visão equivocada.
3. Por fim, ele aponta que a álgebra é, em essência, *um caminho para manipular relações*.

E, assim entendendo a álgebra, seria possível dar conta do simbolismo formal, no momento em que é necessário traduzir, por exemplo, os dados de um problema em linguagem natural para uma linguagem algébrica. Seria possível, também, operar, realizando adições, subtrações e demais operações aritméticas, sem com isso apenas conceituar a álgebra como uma generalização da aritmética.

Todos esses processos podem, segundo este autor, ser relacionados a uma idéia maior: a de que existem relações entre números, ou entre magnitudes, ou ainda entre números e letras, de forma que a álgebra poderia ser compreendida como uma *"ciência das relações".*

Este autor ainda discute que *a análise é o coração da álgebra* (Charbonneau, 1996, pg.36). Segundo seu enfoque, isso não é necessariamente verdadeiro para a resolução de problemas aritméticos. O centro da *análise* é, então, a *hipótese*, que pode ser entendida como a aceitação de que o problema em questão possa ser resolvido. E para a resolução do problema é necessário que sejam analisados os elementos nele envolvidos: quantidades conhecidas e desconhecidas, qual a sua natureza e de que forma elas se relacionam.

O trabalho com as quantidades desconhecidas suscita uma distinção importante, segundo Radford (1996), entre *variáveis* e *incógnitas.* Uma definição simples seria a de que a *incógnita* é um número que não varia, mas apenas ele satisfaz a igualdade em uma equação. A *variável*, por definição, *varia*. Ele propõe que uma primeira idéia de variável já aparece na Babilônia, mas, segundo esse autor, o

conceito mais bem definido acerca das variáveis pode ser encontrado em Diophantus[11]

Em relação a essa questão, Booth (1995) propõe uma reflexão que consideramos relevante. Segundo esta autora, a questão central em álgebra, quando nos referimos ao uso de letras, é entendê-las (as letras) como *variáveis*. A noção da letra como representando um único valor aproximaria a álgebra da aritmética, como se a letra, numa dada equação, funcionasse apenas como um 'anteparo' que escondesse o número que há por trás dela e, assim, representasse sempre um valor específico único. Nessa perspectiva, quando pensamos na idéia de *variável*, entendemos que essa pode representar um ou mais valores capazes de satisfazer uma igualdade. Booth acredita que, dessa forma, é possível que nos aproximemos mais da compreensão do uso de letras em álgebra.

Enfim, entender a natureza do valor desconhecido seria, então, um dos elementos fundamentais à análise algébrica de um problema. Essa também é uma das questões fundamentais quando do ensino da álgebra, como veremos no capítulo a seguir. Inúmeros estudos apontam a questão do valor desconhecido, o trabalho com incógnitas e variáveis como sendo, utilizando uma expressa grega, o *calcanhar de Aquiles* da álgebra escolar.

Baseada nessa questão do valor desconhecido, Mason (1996) discute que é comumente em álgebra que se pensa, quando se faz referência ~~da~~ à matemática como sendo uma *linguagem*. Talvez possamos pensar nisso pela própria natureza algébrica do uso de letras. Letras essencialmente têm a ver com linguagem. Isso aponta, mais uma vez, para a força que encontramos nas variáveis, quando nos referimos à álgebra. Numa expressão onde aparecem números e letras, logo pensamos: *isso é uma expressão algébrica.*

[11] Na sua obra On Polygonal Numbers (século XVI).

Por fim, podemos refletir que a álgebra tem, fundamentalmente, uma natureza dialética: ela é *síntese* entre uma ***matemática utilitária e de domínio mais concreto*** e a ***matemática da abstração pura***. É síntese entre ***números*** e ***letras***, que são os símbolos humanos mais poderosos, construídos ao longo da sua evolução histórica. Ela é *síntese* entre ***vários domínios matemáticos***: aritmética, geometria, funções, etc.

Finalmente, ela pode ser investigada e enfocada como *objeto* matemático e como *ferramenta* de resolução de problemas, ensejando mais uma dialética: a *dialética ferramenta-objeto*, discutida por Regine Douady[12]. Talvez, nesse universo imenso de reflexões sobre a álgebra e seu alcance, o que possamos dizer aqui, como nossa própria definição, numa tentativa de descrever a álgebra de forma sucinta é: *a álgebra é a expressão máxima da dialética matemática.*

Como já foi mencionado anteriormente, o aporte teórico deste trabalho também versa sobre os fenômenos didáticos que permeiam o processo de ensino e aprendizagem: transposição didática e contrato didático. Torna-se incompleto discutir este processo em sala de aula sem fazer menção a esses fenômenos. Sendo assim, o capítulo 3 a seguir, discute questões relevantes acerca da transposição didática e do contrato didático, a fim de permitir uma compreensão mais ampla da aprendizagem dos conceitos fundamentais da álgebra em sala de aula, que é o interesse central deste estudo. Vale salientar, que a discussão proposta em torno desta temática, baseou-se nas reflexões de Brito Menezes (2004), defendidas no seu projeto de doutorado qualificado em Educação Matemática (Recife, UFPE).

[12] Ver discussão acerca dessa dialética em Brito Lima, 1996.

Capítulo 3

FENÔMENOS DIDÁTICOS: Transposição didática e Contrato didático

No capítulo anterior foram discutidas questões referentes ao campo conceitual algébrico. Foi realizada uma breve reflexão sobre a história da álgebra, bem como as concepções relativas a esse campo de saber. Entretanto, a discussão abordou a álgebra epistemologicamente, do ponto de vista da matemática pura. Assim, a questão norteadora desse capítulo é: *o que acontece na sala de aula, quando um determinado saber escolar – no caso, o saber algébrico - deve ser ensinado pelo professor e aprendido pelos alunos?* Responder a essa pergunta implica em analisar, além da vertente psicológica, acerca da construção do conhecimento pelo sujeito cognoscente (como foi enfocado no capítulo 1), a vertente didática. Assim, esse capítulo se debruçará sobre essa vertente, mais particularmente sobre a organização do que se chama de *sistema didático*[13].

O sistema didático comporta três elementos que se configuram como partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa: a relação didática. Dois desses elementos são 'humanos': O PROFESSOR E O ALUNO; e o outro é um elemento não-humano, mas que determina, em larga escala, a forma como tais relações irão se estabelecer: o SABER. Esses três elementos constituem uma relação triangular, à qual Guy Brousseau (1986), referiu como *"Triângulo das Situações Didáticas"*. Nesse sentido, pretende-se falar brevemente de cada um dos três pólos da referida triangulação, para que se possa compreender a forma dinâmica como eles interagem e se influenciam mutuamente.

[13] Este capítulo foi proposto a partir das discussões do Projeto de Doutorado Qualificado em Educação/UFPE , da Profª Anna Paula Avelar Brito Menezes.

Inicialmente, ao se referir ao pólo **saber**, é necessário que seja considerado a complexidade. Embora ele seja o elemento *não-humano* da relação, é um equívoco pensar que ele seja mais estático do que os outros dois. O saber precisa ser considerado sob alguns aspectos dinâmicos fundamentais: um primeiro aspecto que diz respeito à *naturezado saber*, à sua EPISTEMOLOGIA. No caso específico do nosso estudo: qual a epistemologia do saber algébrico? Como pergunta complementar, pode-se sugerir: Qual a sua natureza e de que forma ela se revela na sala de aula?

A forma como ele se revela diz respeito a um segundo aspecto relevante: o saber sofre transformações, desde a sua produção, até adentrar na sala de aula. E, nesse espaço, passa por outro processo de transposição, agora coordenado pelo professor.

Todavia, entender que o professor 'muda a cara' do saber, que é o *sujeito didático*, aquele responsável pela sua transformação, na sala de aula, de forma que ele possa ser ensinado e, conseqüentemente, aprendido, implica em dizer que o professor tem algum tipo de relação com o saber em questão. Essa relação é refletida na Didática da Matemática como 'relação ao saber'[14] (ver Brito Menezes, 2004).

Tanto o professor quanto o aluno possuem alguma relação ao saber, embora tal relação, inicialmente, seja assimétrica: o professor sabe algo que o aluno ainda não sabe. Nesse sentido, o que se discute na Educação Matemática é que o objetivo da relação didática é mudar a relação inicial do aluno ao saber. Quando o saber em questão está sendo introduzido, ainda é 'novo', a relação do aluno a este saber ainda é inadequada. Cabe, então, ao professor, criar situações que aproximem o aluno do saber. Isto posto, este estudo também se preocupa em refletir acerca de qual a relação do aluno ao saber, antes da seqüência e após a aplicação da mesma.

Um segundo pólo a ser analisado é o pólo do **professor**. Embora pudéssemos fazer uma longa discussão acerca desse pólo, uma vez que o professor não é o

[14] *Rapport au savoir*, originalmente.

principal foco de análise desse estudo, pretende-se destacar, fundamentalmente, um aspecto que se considera imprescindível de ser levado em conta: a sua *relação ao saber*. Esta relação determina, em larga medida, como o professor irá gerir o tempo na sala de aula, de que forma ele organizará as situações de ensino a serem propostas, que postura ele assumirá perante os alunos; enfim, qual será o seu papel e de que forma ele negociará o *contrato didático*. No caso específico do nosso estudo, como o professor negociará com os alunos as etapas da seqüência didática proposta.

O terceiro pólo da relação didática, também representante de um *pólo humano*, é o **aluno**. Um ponto fundamental a ser levantado aqui, refere-se também à relação aluno-saber. Diferentemente do que se espera do professor e conforme já foi discutido, o aluno, não possui – inicialmente – uma relação estreita ao saber do qual ele deve se apropriar. Por outro lado, eles devem sair dessa situação com a sua relação ao saber modificada. Não se quer afirmar com isto, que o aluno chega à sala de aula como uma *tábula rasa*, na mais autêntica visão empirista; mas que embora ele tenha idéias, hipóteses e conceitos prévios acerca daquele conhecimento, sua relação ao saber é ainda primária. Isso configura certa assimetria entre professor e aluno, no que se refere ao saber. E isto, como era de se esperar, confere ao professor um poder indiscutível nessa relação didática: é ele quem vai iniciar o aluno, quem vai introduzi-lo no novo saber. Claire Margolinas (1993) discute de forma pertinente o seguinte:

> *"No estágio didático inicial, o professor mantém uma relação privilegiada ao saber. Do ponto de vista da relação ao saber, há uma dessimetria que é constitutiva do sistema didático. Nós não dizemos que o aluno não detém alguma relação ao saber antes do ensino, mas simplesmente que no estágio inicial, esta relação é pouco ou não adequada."* (MARGOLINAS,1993, p.228)

No caso específico do nosso estudo, o que interessa é analisar qual a relação do aluno ao saber, inicialmente, antes da seqüência didática ser realizada, e depois, investigando em que medida tal seqüência potencializa, paulatinamente, a aproximação do aluno ao saber algébrico.

Para investigar elementos da relação didática é necessário entender que ela é permeada por certos 'fenômenos' que se instituem na sala de aula. Serão destacados aqui dois fenômenos que são fundamentais de serem discutidos quando se está interessado em investigar a construção de um dado conhecimento, no caso específico, o conhecimento algébrico, a partir de uma seqüência didática previamente proposta, que deve ser negociada e conduzida pelo professor frente aos seus alunos. São eles: a *transposição didática e o contrato didático*.

Antes de falar sobre os fenômenos didáticos acredita-se que é necessário definir o que seja uma situação didática. Por situação didática, pode-se compreender:

> *"o conjunto de relações estabelecidas explícita ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor), com a finalidade de conseguir que estes alunos se apropriem do saber constituído ou em vias de constituição".* (Guy Brousseau, 1982, citado em GÁLVEZ, 1996a, p.28).

O triângulo das situações didáticas poderia ser então, representado da seguinte forma:

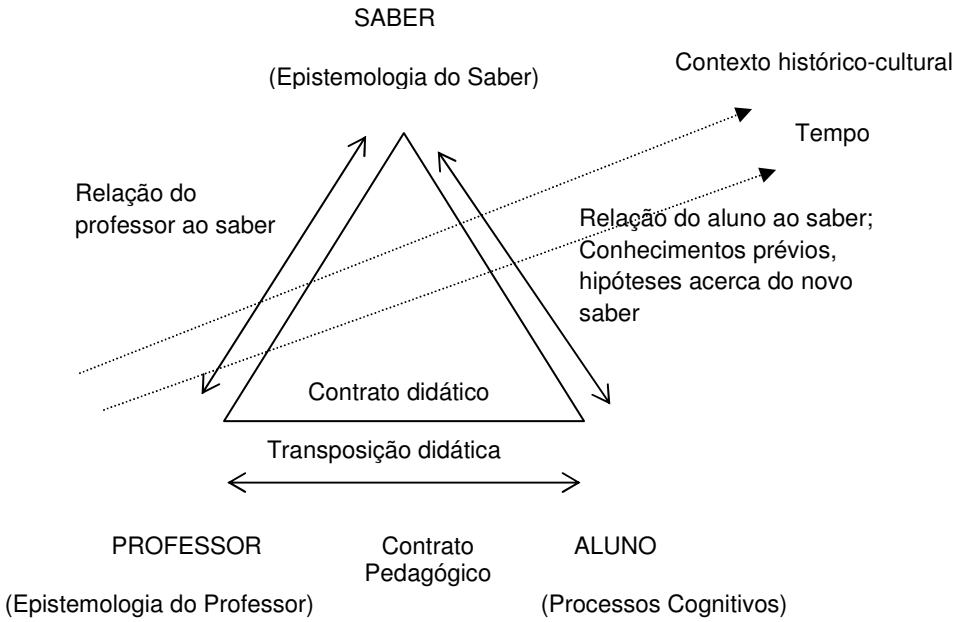


Figura 8 : Tripé constitutivo do objeto de estudo da didática de conteúdos específicos e suas possibilidades de análise

A seguir, será abordado os elementos essenciais que constituem os fenômenos didáticos que são de interesse deste estudo.

3.1.Transposição Didática

Esta seção pretende abordar o fenômeno da Transposição Didática[15]. O estudo desse fenômeno possibilita analisar a trajetória que se cumpre desde a produção do *saber científico* até o momento em que este se transforma em *objeto de ensino* e, como tal, passa a integrar o triângulo fundamental que constitui a relação didática: *professor-aluno-saber*, transformando-se, por fim, em *saber ensinado*. Assim, buscamos aqui analisar cada passo dessa transformação sofrida pelo saber, desde a comunidade científica até a sua inserção no universo da sala de aula.

3.1.1. Uma reflexão acerca do que é conhecimento

A pergunta "o que é conhecimento?" sempre esteve no cerne das reflexões filosóficas e, mais tarde, das reflexões psicológicas e didáticas. A Epistemologia, como Teoria do Conhecimento, buscou respostas para essa e outras questões que surgem a partir dessa primeira pergunta. Pode-se então refletir, como questões adicionais: "de onde vem o conhecimento?" e "como ele é apropriado pelo indivíduo?".

Nesse sentido, podemos falar de algumas correntes filosóficas e concepções que visam explicar como se relacionam o objeto de conhecimento e o indivíduo (que deverá 'conhecer' tal objeto). É possível sintetizá-las, brevemente, da seguinte forma:

(1) **Uma filosofia empirista**, representada por David Hume e John Locke, dentre outros, que acreditava que o conhecimento era uma cópia funcional da realidade e era impresso na mente do indivíduo a partir da experiência. O indivíduo poderia ser comparado a uma 'tábula rasa', na ocasião do seu nascimento. Essa filosofia influenciou fortemente a psicologia behaviorista de Watson e Skinner e o modelo tradicional de ensino.

[15] A noção de Transposição Didática é inicialmente introduzida por Michel Verret, em sua obra intitulada *Le Temps des Études,* Librairie Honoré Champion, Paris, 1975. Yves Chevallard posteriormente se apropria dessa noção e desenvolve toda sua teoria acerca desse fenômeno didático (ver Chevallard, 1985).

(2) **Uma filosofia racionalista**, representada sobretudo por Platão, que acreditava na existência de um "mundo das idéias", entendendo esse mundo como sendo *supra-sensível*, ou seja, acima e independente do suposto conhecimento que os sentidos nos podem oferecer. Essa visão aparece como antítese à tese empirista, mas, acreditamos, não responde plenamente à questão da origem do conhecimento.

(3) E uma terceira visão, a qual é defendida neste trabalho, e que se propõe a ser uma 'síntese' das duas perspectivas filosóficas: **a visão interacionista**[16], que reflete que o conhecimento é, essencialmente, uma 'construção' que envolve sujeito (indivíduo) e objeto (meio) em interação. E na qualidade de *produto de uma construção*, o conhecimento passa por *transformações*, e tem a sala de aula como um dos lugares privilegiados, no contexto cultural ocidental, onde ocorre sua socialização. Lugar esse, onde se estabelece uma 'negociação de significados' que envolve *professor*, *alunos* e o *saber* que está em cena no jogo didático.

Se entendermos, então, o conhecimento como uma construção histórica e a apropriação deste como uma necessidade social pode-se refletir, na linha proposta por Y. Chevallard, que deve haver 'pessoas' e 'instituições' responsáveis pela sistematização e transmissão de tal saber, e que este processo de socialização do saber, pelas instituições e pessoas que são responsáveis por fazê-la, não implica na disseminação desse saber tal qual ele foi produzido. A sua forma científica 'original' interessa apenas à comunidade científica, que tem uma linguagem toda própria e que necessita conhecer esse saber na sua origem e formato científicos.

Dessa forma, quando nos referimos à existência de tais 'pessoas' e 'instituições', podemos, assim, refletir que um dos papéis destes é a realização da transformação dos saberes de referência (científicos e culturais), para torná-los passíveis de serem ensinados. A essa transformação desses saberes em objetos de ensino, podemos chamar *Transposição Didática.*

[16] Essa visão pode ser representada pelas filosofias Apriorista e Intelectualista (Para o aprofundamento dessas concepções filosóficas, ver Hessen,1999.

3.1.2. Outros aspectos acerca do conceito teórico de transposição didática.

O conceito de transposição didática, no âmbito da Didática da Matemática, foi estudado por Yves Chevallard, que apresenta as noções que balizam tal conceito (Chevallard, 1991).

No processo histórico de apropriação do saber escolar, conforme já mencionamos, o objetivo que se tem não é que o aluno se aproprie do saber tal qual ele foi produzido na comunidade científica. Nesta comunidade e na escola, têm-se objetivos diferentes em relação a esse saber. Retomando o que já propomos acima, o objetivo da escola é sistematizar o saber científico, tornando-o 'ensinável', possibilitando a sua aprendizagem pelo(s) aluno(s). Assim, o *saber científico* vai sofrer várias *transformações*, passando por um nível intermediário – *saber a ensinar* - até que se configure como um *saber ensinado.* Transformações essas, que implicam em *deformações*, *supressões*, *acréscimos*, *'criações didáticas'*, que sofre esse saber (*savoir savant*, em Chevallard) até chegar à sala de aula, como discutiremos mais adiante.

Desta forma, entendemos que a transposição didática é, ao mesmo tempo, um processo epistemológico, sociológico e psicológico, como discutido a seguir:

- **EPISTEMOLÓGICO** porque diz respeito, essencialmente, a um *saber* produzido na comunidade científica, que deverá ser comunicado e socializado. O que caracteriza esse saber, como ele se estrutura, de que forma ele foi desenvolvido; enfim, qual a sua epistemologia, eis as questões centrais que balizam tal enfoque de determinado domínio do saber.

- **SOCIOLÓGICO** porque é necessário considerar como tal saber se constitui historicamente, qual a sua relevância em um determinado tempo e contexto históricos, quais os "desgastes" e "usura"[17] por ele sofrido, dentre outros aspectos relevantes. Nesse sentido, Bordet (1997:46) critica a formulação original de Chevallard, analisando que *"um saber não é sábio* [savant] *em si, é a Sociedade que o faz assim".* E complementa: *"O ensino de um*

[17] Chevallard (1991) discute esses conceitos, como relativos ao desgaste que um saber sofre, socialmente, destituindo-o de sua posição de saber de referência e fazendo com que novos saberes o suplantem e substituam.

saber, com efeito, é sempre a realização de um projeto social, mais ou menos largamente compartilhado, pertencente pelo menos a certo grupo social". Ainda contribuindo para essa análise sociológica, Arsac (1989) discute que há uma pressão social para a comunicação desse saber e para uma utilidade social do mesmo (de preferência em curto prazo).

- E, por fim, **PSICOLÓGICO**, porque no universo da sala de aula o aluno deverá se apropriar desse saber, reconstruí-lo a partir das situações de ensino por ele vivenciadas. O saber a ensinar entrará em cena no jogo didático que envolve *professor-aluno-saber* e sofrerá, então, novas adaptações e deformações, havendo uma negociação de significados pelos parceiros da relação didática. Esse último enfoque será discutido quando abordarmos a transposição didática interna.

Entende-se que esses três enfoques se articulam de forma estreita e interdependente. No entanto, é possível eleger certo recorte no estudo desse fenômeno, desde que entendendo que não se pode deixar de considerar os outros dois enfoques. Nesse sentido, o enfoque deste estudo será prioritariamente psicológico.

Conforme discutido anteriormente, o processo de transformação do *saber científico* em *saber ensinado* comporta a participação de instituições e indivíduos. Para compreender a ação, o papel de cada uma dessas instâncias de participação nesse processo, precisa-se refletir sobre as várias etapas que marcam o caminho percorrido em tal transformação. É o que será discutido a partir de agora.

3.1.3. A produção dos saberes de referência

A produção e comunicação dos saberes de referência são, conforme foi mencionado, necessidades sociais. O pesquisador, no mundo acadêmico/científico, sofre *pressões internas* e *externas* (cf. Arsac,1989) para que comunique suas 'descobertas', suas 'teses'. As *pressões internas* aparecem quando a própria comunidade científica exige que tais saberes sejam comunicados, pois a partir destes, novos saberes serão produzidos. Talvez possamos dizer que um saber, ao ser

produzido, deixa de ter como *dono* aquele pesquisador que o produziu e sistematizou. Entendemos o saber como uma construção histórica e social e, como tal, o pesquisador tem o dever de apresentá-lo aos demais membros da comunidade científica, em congressos, simpósios, etc. E, numa outra instância, de comunicá-lo à sociedade.

Quando se aborda a necessidade de apresentar esse saber à sociedade, compreendem-se, então, as *pressões externas*, às quais foram referidas anteriormente. A evolução de uma sociedade se dá, dentre outros aspectos, em função dos avanços científicos e tecnológicos. Cada novo saber que é apresentado abre caminhos para novas descobertas, para um questionamento acerca dos antigos saberes, para que alguns se tornem obsoletos e outros sejam reafirmados. Assim, os saberes comunicados inicialmente no mundo acadêmico e científico, necessitam de um novo tratamento, no sentido de que sua roupagem mais acadêmica seja retirada e que ele possa, após essa primeira deformação, ser comunicado, compreendido e, se possível, utilizado socialmente, num período breve.

Nesse processo de publicação dos saberes, pode-se falar de duas etapas, como discute Arsac: a *descontextualização* e a *despersonalização* (Arsac, 1989). Esta última se caracteriza pelo conjunto de supressões realizadas pelo pesquisador, numa espécie de 'limpeza' em relação às suas descobertas. Ele deverá eliminar os seus erros, as suas reflexões inúteis, os caminhos tortuosos pelos quais percorreu, os impasses com os quais se deparou. Enfim, eliminar tudo aquilo que personaliza esse saber e o vincula ao cientista (motivações pessoais, ideologias). A etapa de *descontextualização* diz respeito ao 'descolamento' daquele saber de uma situação específica, do problema de pesquisa que a ele deu origem, para, então, poder generalizá-lo.

Arsac (1989, p.6) conclui essa discussão apontando que: *"(...)a grande utilidade do trabalho do pesquisador é de tornar o saber público: os resultados devem,*

em princípio, ser utilizáveis e verificáveis por qualquer pessoa, pelo menos todos os membros da comunidade científica."

Ao ser considerado o fenômeno da Transposição Didática, observa-se que a maioria dos estudos acerca desse fenômeno aborda principalmente essa etapa inicial, que consiste na transformação dos *saberes científicos* (savoir savant) em *saberes a ensinar* (savoir à ensigner), o que chamamos de *Transposição Didática Externa*. No entanto, gostaria de enfatizar aqui a *Transposição Didática Interna*.

3.1.4. A Transposição Didática Interna

O passo final na transformação sofrida pelo saber científico, é aquele que acontece *intramuros* da sala de aula, cujos parceiros envolvidos são o professor e o(s) aluno(s), e que tem no professor o elemento humano responsável por tal transposição. Logicamente, não podemos pensar que a *transposição didática interna* depende unicamente do professor; ela envolve questões bem mais amplas, que conferem uma complexidade considerável a tal processo, como discutiremos agora.

Na sala de aula, por exemplo, essa transformação implica, inicialmente, numa inversão do saber escolar em relação ao científico, como analisa Pais (1999):

> *"(...) o trabalho do professor envolve um importante desafio que consiste numa atividade que é, num certo sentido, inversa daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático elimina as condições contextuais e busca níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno".* (PAIS, 1999 p.28-29).

Entretanto, no momento seguinte é preciso novamente *despersonalizar* e *descontextualizar* o saber (quando da comunicação/publicação dos saberes), a fim de poder sistematizá-lo, institucionalizá-lo, tornar esse conhecimento generalizável. Esse aspecto é pontuado por Arsac (1989), que propõe que o aluno vivencia etapas semelhantes à do pesquisador, na comunidade científica.

Tais etapas, todavia, não têm por objetivo comunicar cientificamente um saber. Trata-se, então, de uma *gênese artificial do saber*, que se torna possível a partir das situações de ensino criadas pelo professor, em contraposição à *gênese natural do saber*, que é histórica. Desta forma, podemos dizer que o aluno *redescobre*, *reinventa* os saberes historicamente produzidos. Essa concepção deixa clara a opção dos que defendem essa linha de pensamento pela visão *construtivista* de ensino e aprendizagem.

3.1.5. A Transposição Didática Interna e suas interfaces na sala de aula

Quando nos referimos ao *trabalho do professor*, no sentido de estabelecer a transposição didática, e à sua importância na apropriação do saber pelos alunos, é necessário que consideremos alguns aspectos essenciais**.**

Em primeiro lugar, o professor organiza situações de ensino <u>para alunos</u> (elementos igualmente humanos da relação). Em segundo lugar – e não menos importante – o professor organiza situações de ensino <u>sobre um dado saber</u>. Isto posto, tomando em conta os dois elementos considerados, além do professor – *aluno* e *saber* – entendemos que a transposição didática, realizada pelo professor, está fundamentalmente vinculada a esses dois elementos que compõem, junto com o ele, o *sistema didático*. Esse sistema não está, entretanto, sujeito à vontade do professor ou do aluno. Ele se institui a partir das relações aqui abordadas, que nem sempre – quase nunca, na verdade – têm um caráter objetivo. Olhar para a transposição didática interna é considerar, antes de tudo, a triangulação proposta por Guy Brousseau (e todos os elementos que nele se interrelacionam), que Develay (1989, p.61) representa da seguinte maneira:

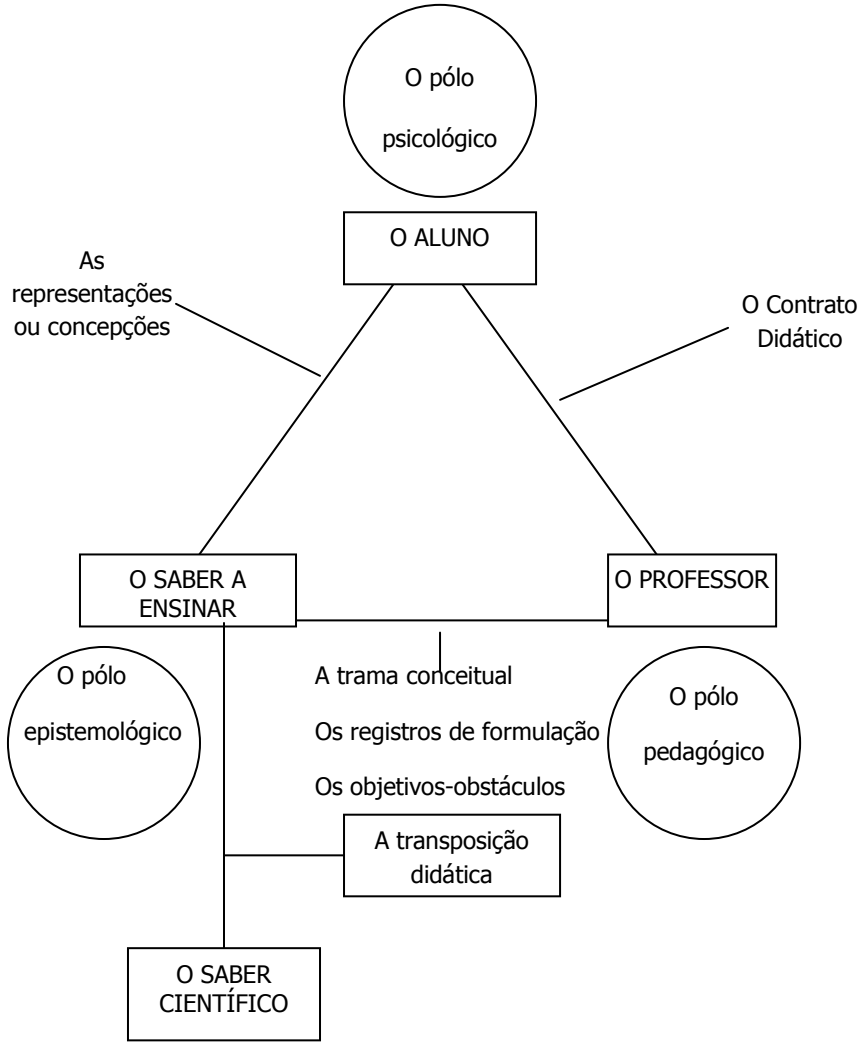


Figura 9: O triângulo da situação didática proposto por Develay (1989)

Essa breve reflexão conduz a questões de extrema relevância: se for analisado que a transposição didática interna tem no professor o elemento central responsável pela sua realização, retomam-se algumas idéias já abordadas anteriormente: idéias relativas ao pólo *professor-saber*; e idéias relativas ao pólo *professor-aluno*.

Quanto ao pólo *professor-saber*, a *transposição didática interna* faz uma interface com a *relação ao saber* (*rapport au savoir*). A transformação do texto didático em um saber ensinado perpassa pela relação que o professor tem com o saber em jogo. As situações de ensino a serem propostas estão, em certa medida, vinculadas a esta relação. A observação de professores em sala de aula revela que estes parecem se sentir mais à vontade e propõem, muitas vezes, situações de ensino mais

interessantes, bem como suas intervenções em relação aos alunos parecem ser melhores, quando estes possuem uma relação mais estreita ao saber.

No que diz respeito ao pólo *professor-aluno*, de forma complementar, pode-se refletir que existem expectativas de um em relação ao outro. O professor espera do aluno toda uma série de comportamentos que o conduzam a se apropriar do saber que está em cena no jogo didático. O aluno, por sua vez, também possui uma série de expectativas em relação ao professor e ao seu papel na gestão do saber. Isso conduz, então, ao segundo fenômeno que aqui será abordado: o contrato didático.

3.2. Contrato Didático

Se for considerado o ambiente escolar, entende-se que tal ambiente é, por excelência, *contratual*; pois pode-se falar de um contrato entre a escola e a sociedade. Chevallard (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001) discute que no contexto escolar existem certas modalidades de contrato, dentre as quais, uma modalidade que ele chamou de *contrato escolar*. Tal contrato, freqüentemente explicitado e, em parte, constituído por regras escritas, regula a relação aluno-escola. Para este autor, esta seria a forma mais explícita de contrato, no ambiente escolar, diferentemente, sobretudo, da noção de *contrato didático*.

3.2.1. O que é Contrato Didático?

A partir da discussão que vem sendo proposta até agora, pode-se sintetizar a idéia de Contrato Didático, segundo Brousseau (1990) como:

> *"o resultado da negociação das relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio e um sistema educativo, com a finalidade de fazer com que os alunos se apropriem de um saber constituído ou em vias de constituição."* (BROUSSEAU,1990)

Tal contrato implica não só em cada parceiro olhar para si próprio e para o seu papel nessa interação, mas, necessariamente, estabelece que *expectativas* um tem em relação ao outro, quais as responsabilidades de cada um na gestão do saber. Todavia, embora considere as *expectativas* de cada parceiro, a entrada no contrato didático, dá-se pelo pólo do SABER, pois a relação entre o professor e o aluno é mediada pelo saber em questão. Nesse quadro teórico, pode-se, então, falar em um caráter mais fechado do contrato.

Schubauer-Leoni (1988b), por sua vez, critica essa visão e propõe uma *análise psicossocial* do contrato didático. Em tal análise, ela enfatiza o caráter intra e intersubjetivo da relação didática, entendendo o *subjetivo* como aquilo que diz respeito aos *sujeitos*, elementos humanos do sistema didático. Nessa linha de pensamento, ela discute que *"cada indivíduo entra na relação* [didática] *regida pelo contrato didático, com os 'hábitos' construídos através de múltiplos outros contratos sociais e didáticos"* (1988b, p.70). Esses hábitos constituem certas *disposições duráveis* e talvez possamos pensar, a partir da perspectiva dessa autora, que são tais disposições que estão na base das *expectativas* e da adaptação ao contrato, bem como, igualmente, à sua inadaptação. Nessa dimensão complexa e dinâmica que envolve o conceito de Contrato Didático, Jonnaert (1994, p.206) propõe que há três elementos essenciais a serem considerados:

(1) A idéia de divisão de responsabilidades, onde a relação didática não aparece mais sob o controle exclusivo do professor e o aluno deve cumprir o seu papel na mesma. Neste sentido, o contrato didático ensejaria *"definir uma divisão de poder".*

(2) A consideração do *implícito*: a relação funciona mais a partir do não-dito, do que das regras enunciadas (embora não se possa desconsiderar o que é explicitado).

(3) A relação assimétrica do professor e do aluno ao saber, como foi discutido anteriormente.

Assim, ainda segundo esse autor, o jogo do contrato didático é um jogo paradoxal, entre opostos: implícito/explícito; unilateral/negociável; espontâneo/imposto; interno/externo. E, dessa forma, ele cria e amplia os espaços de diálogo na sala de aula, estabelecendo um equilíbrio entre esses pólos contraditórios. Jonnaert (1994, p.217) conclui que: *"se o conceito de contrato didático permite compreender o dinamismo da relação didática, inversamente, é o funcionamento da aula que permite decodificar o contrato didático. (...) Não há duas classes idênticas, logo, não há dois contratos idênticos."*

É importante ressaltar que as regras negociáveis nesta relação contratual, embora possam ser duradouras, não são absolutamente estáveis e perenes. Ao longo do processo de ensino e aprendizagem, umas são abandonadas e outras são geradas. Isso implica dizer que o contrato didático passa por um processo contínuo de negociação e renegociação; e que a cada novo saber ou novo grupo de alunos em jogo, um novo contrato se estabelece.

Outro elemento importante a ser considerado, quando do estudo do contrato didático, e que, em certa medida, já refletimos, é que embora este seja caracterizado pela relação ternária que envolve professor, aluno e saber, essa relação não é simétrica, especular. Professor e aluno, como pólos humanos da relação, não representam um o espelho do outro (e eis porque as expectativas de um em relação ao outro são diversas).

O saber, por exemplo, tem significações diferentes, dependendo do lugar a partir do qual ele é olhado. Do ponto de vista do professor, o saber é visto como objeto de ensino e este [professor] assume o papel de ensiná-lo ao aluno. Para o aluno, por sua vez, o saber ocupa o lugar do *novo*, do objeto a ser aprendido e, mais ainda, ele necessitará dar provas de que aprendeu.

Professor e aluno também olham, um para o outro, de forma diferente. Eles se reconhecem mutuamente e aceitam os direitos e as obrigações que o lugar que cada

um ocupa pressupõe realizar. Enfim, eles se sabem os interlocutores legítimos a jogar o jogo didático.

Aqui novamente retomamos a reflexão acerca do poder do professor. O professor tem, perante o aluno, o *poder do conhecimento*, é ele quem conhece aquele novo saber, que o aluno precisa se apropriar. Assim, o professor incorpora o papel de autoridade na relação.

3.2.2. O Contrato Didático a partir dos parceiros da relação:

- **Do ponto de vista do professor: a noção de Contrato Diferencial**

Como foi referido anteriormente, não há uma forma única de olhar o contrato didático. Para que possamos analisá-lo do ponto de vista do professor, precisamos estabelecer algumas questões fundamentais (algumas delas já discutidas ao longo desse capítulo):

(a) Qual o saber que está em cena e a relação do professor com esse saber?
(b) Quem são os alunos com os quais o professor irá interagir (série, escola, classe social)?
(c) Quais as concepções desse professor acerca do que é ensinar e aprender, e acerca do seu papel e dos alunos?
(d) Quais as experiências trazidas de outros contratos já vivenciadas por esse professor?

Responder a essas questões não é tarefa fácil para quem deseja se ocupar da análise desse fenômeno didático a partir do professor, mas alguns estudos têm apontado resultados interessantes. Schubauer-Leoni (1987, 1998a) propõe a existência de um *contrato diferencial* do professor em relação aos alunos. Em suas pesquisas sobre o tema, ela observou que o professor não estabelece o contrato da mesma forma com cada grupo de alunos ou, mais ainda, com cada aluno de um mesmo grupo. A maneira como este contrato se delineia está intimamente relacionada às representações que o professor constrói de seus alunos.

As pesquisas, nessa linha de discussão, têm mostrado que o professor, de certa forma, 'elege' determinados alunos que ele supõe que terão sucesso, e em detrimento disso, aqueles que ele supõe que são fadados ao fracasso. Percebemos, em situações como essa, claramente os *efeitos de contrato* (a ser discutido mais adiante). O professor, em geral, está mais disponível para aquele aluno 'eleito', com o qual ele estabelece um contrato permeado por expectativas positivas: que o aluno é estudioso, tem bom nível intelectual, que tem capacidade de acompanhar os assuntos a serem trabalhados, que responde corretamente aos exercícios e trabalhos propostos. Nesse sentido, tal relação professor-aluno firma-se em um alicerce de parceria, de múltiplas interações, de confiança; e assim promove no aluno uma relação positiva com o professor, com a disciplina e com a própria aprendizagem, em última instância.

Por outro lado, há alunos com os quais o contrato se estabelece de forma bastante diferente da acima aludida. As expectativas que os professores têm em relação a eles é a de que serão alunos fadados ao fracasso na disciplina, que têm um nível intelectual aquém do que se espera e, por isso mesmo, têm dificuldade em aprender, em realizar de forma satisfatória as tarefas propostas. Nesse caso, não se estabelece uma relação de parceria, de cumplicidade, mas, ao contrário, uma relação calcada em expectativas negativas, em descrédito na potencialidade do aluno.

Não há como discutir a questão do *contrato diferencial* sem refletir acerca dos aspectos da subjetividade de ambos os parceiros da relação. Algumas pesquisas têm sido conduzidas, no sentido de analisar a *subjetividade do professor e do aluno* (Araújo, 2002), e de que forma se circunscreve o processo de ensino-aprendizagem a partir desse aspecto. Outras abordam a relação entre *a auto-estima e o autoconceito do aluno e o seu desempenho escolar* (Hazin e da Rocha Falcão, 2001), inferindo que a aprendizagem de determinado saber está relacionada, em parte, à construção de um autoconceito positivo do aluno. E, por outro lado, o professor assume um papel

essencial nessa construção. Enfim, a psicologia e psicanálise, nesse sentido, podem trazer subsídios relevantes para tal análise.

Essa questão que ora aborda-se, embora enfocada de um ponto de vista teórico, é um dos aspectos que mais aparece no discurso do professor e do aluno, quando da realização de pesquisas e de programas de formação continuada. Professores que trabalham na periferia, em escolas públicas, e nas escolas particulares de grandes centros urbanos, verbalizam a diferença em relação à aprendizagem de ambos os grupos e, muitos deles, estão conscientes de que não assumem uma mesma postura em ambas as realidades. Os alunos, por sua vez, também fazem relatos acerca dessas diferenças de contrato que se estabelece na sala de aula. Facilmente eles identificam o colega de sala 'escolhido' pelo professor, aquele que o professor sempre chama ao quadro negro para resolver problemas, aquele que sempre recebe os elogios e incentivos, etc.

Mas para compreender melhor essa dinâmica, é fundamental que possamos refletir sobre o contrato didático a partir do olhar do aluno. No tópico seguinte pretendemos nos debruçar um pouco sobre essa questão.

- **Do ponto de vista do aluno**

Uma pergunta desencadeadora dessa reflexão, proposta pela própria Schubauer-Leoni (1988a:62) pode ser: *"como os alunos vivem esta tripolaridade relacional* [professor-aluno-saber]*?"* Nesse sentido, ela propôs um estudo, onde um grupo de alunos assume o lugar do professor ("petits maîtres" de 11-12 anos) e propõem tarefas escolares para crianças de 7-8 anos.

Ela observa, neste estudo, que no lugar de assumir uma postura daquele que 'concebe questões' (concepteurs de questions) para os alunos, esses 'pequenos professores' funcionam como aqueles que 'dão as respostas' (donneur de réponses). Dessa maneira, colocam-se no lugar de *detentores do saber*, ressaltando a

dessimetria entre o professor e o aluno, no jogo didático. E tal dessimetria se dá pelo fato de que se concebe que *o professor sabe qualquer coisa que os alunos não sabem ainda*. E isto, como já discutimos, deixa o professor no lugar – utilizando-nos de uma expressão psicanalítica-lacaniana – do "suposto saber". Dessa forma, Shubauer-Leoni ressalta que o *saber* constitui um fator central nesses respectivos posicionamentos e dessimetria entre professor e aluno.

Ainda no estudo que mencionamos acima, a pesquisadora encontra elementos que reafirmam a idéia de *contrato diferencial*, que abordamos no tópico anterior, quando os alunos assumem o papel de 'pequenos mestres'. Na proposição de tarefas para os seus 'alunos', eles estabelecem tarefas difíceis (tâche "dure", segundo sua própria expressão) para alunos mais fracos. E isso legitima a representação que se tem de que os alunos fracos não obtêm sucesso na resolução de tarefas escolares.

3.2.3. O Contrato Didático em Sala de Aula

Pode-se questionar, a partir de tudo o que discutimos até agora, como é possível analisar o contrato didático que se estabelece entre um determinado professor e um grupo de alunos, no interior de uma relação didática?

A teorização acerca desse tema propõe que o contrato didático, pelo fato de ser carregado de elementos implícitos, pode torna-se difícil de ser capturado. Os autores que se dedicam ao estudo desse fenômeno apontam que ele é mais facilmente identificável quando há uma *ruptura* do mesmo. A ruptura se dá quando ambos os pares da relação - ou um deles - defronta-se com uma situação conflituosa. Em geral, quando o contrato é rompido torna-se em parte explicitado e deve ser renegociado. Pelo discurso do professor e dos alunos em uma situação de ruptura do contrato, podemos identificar os elementos que o compõem e as responsabilidades que cabiam a cada um dos parceiros da relação.

Entretanto, nem sempre ele é rompido. Aliás, podemos até dizer que em boa parte do tempo ele é aceito tacitamente por ambos os parceiros. Como podemos, então, investigá-lo quando ele é 'honrado' pelas partes envolvidas? Como capturar a contradição a ele inerente, entre *explícito-implícito, negociado-imposto, unilateral-negociado*, etc., no momento em que ele segue seu curso naturalmente?

Entende-se que fazer uma análise do contrato didático de forma mais cuidadosa implica em se debruçar de forma efetiva sobre a interação discursiva que envolve professor e aluno, a despeito de um dado saber. Esse não é o objetivo do nosso estudo. Todavia, acredita-se que é fundamental lançar um olhar, mesmo que de forma mais incipiente, sobre os fenômenos didáticos, quando se quer investigar a construção do conhecimento por parte do aluno.

O capítulo que se segue, pretende então, tentar estabelecer uma relação entre os fenômenos didáticos ora discutidos e o ensino e aprendizagem da álgebra escolar. Serão abordadas questões relativas às concepções acerca da álgebra escolar, bem como dos obstáculos que, via de regra, se instituem, quando da introdução do aluno nesse campo de saber. Tais questões serão ilustradas com exemplos de pesquisa sobre a introdução à álgebra elementar.

Capítulo 4

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

4.1. Considerações acerca do ensino-aprendizagem da álgebra elementar

Quando se aborda a aprendizagem do conhecimento matemático, faz-se necessário discutir sobre ensino de matemática, que em muitos casos, parece restringir-se ao mero ensino de procedimentos para resolver problemas. O contrato didático usual na aula de matemática se caracteriza pela ênfase sobre definições e premissas (a serem memorizadas), seguidas dos devidos "exercícios de fixação", no espírito pedagógico do "drill-and-practice" (exercícios repetitivos destinados à memorização e automação de procedimentos) de inspiração fortemente associacionista (Nasser & Tinoco, 2001). Nesse contexto contratual, o professor freqüentemente não se preocupa com procedimentos argumentativos em sala-de-aula, que possibilitem: a) confrontação de pontos de vista (inclusive os do professor); e b) compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos que estão envolvidos nas discussões, nas premissas e conclusões, nos algoritmos (Da Rocha Falcão, Leitão, Araújo, Lins Lessa & Oliveira Osório, 2002). Tal postura tem, naturalmente, repercussões sobre o trabalho didático-pedagógico do professor. Isto ocorre no contexto do ensino da álgebra, conteúdo bastante rico em regras e algoritmos de simplificação ("passa de um membro para o outro *trocando o sinal ...*) frequentemente oferecidos aos estudantes para memorização e execução em ocasiões apropriadas, o que é suficiente para a consecução, pelo aluno, de resultados corretos e aprovação escolar.

No capítulo 2 a álgebra foi enfocada como *saber científico*, uma vez que, considerando o triângulo das situações didáticas, fica entendido que quando se fala de

um conteúdo a ser ensinado na instituição escolar, precisa-se conhecer a sua natureza epistemológica. Com tal ênfase, neste capítulo, não pretendemos ignorar o caráter sistêmico do triângulo interativo professor-aluno-saber (discutido no cap. 3, a propósito da ilustração à pág. 44), isolando para análise a relação de ensino em detrimento do saber ensinado. Trata-se tão somente de ênfase de análise, agora voltada para questões de ordem especificamente didática.

Conforme discutido no capítulo anterior, o saber algébrico, como qualquer outra modalidade de saber produzido na comunidade científica, sofre transformações no percurso de seu contexto de produção (saber de referência[18]) até sua formulação como saber para ensino[19] (currículos e parâmetros curriculares, programas, livros didáticos – processo de *transposição externa*), e desse ponto até a sua inserção na sala de aula, sob a coordenação do professor (*transposição interna*).

No momento em que o saber adentra a sala de aula, sob a coordenação do professor, a transposição didática estabelece uma inter-relação com outro fenômeno: o contrato didático. Assim, pretende-se refletir sobre como o professor gerencia tais fenômenos nesse universo, de forma que os alunos se apropriem desse novo saber.

4.2. Estudos acerca da introdução do aluno no domínio algébrico

Um dos aspectos importantes, a ser considerado quando falamos da iniciação ao ensino de álgebra, é que ele marca a introdução do aluno em um domínio mais sofisticado da matemática. Em aritmética, professor e alunos lidam com problemas que demandam para sua resolução princípios dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas (cf. Vergnaud, 1981) juntamente com o conhecimento algorítmico das operações fundamentais, com ou sem reserva, e muito

[18] Tradução usual dos termos originais em língua francesa *savoir-savant* ou *savoir à enseigner* (cf. Chevallard, 1985; 1991)
[19] Ou *savoir enseigné*, na terminologia original.

frequentemente o exercício na execução de tais operações, sem qualquer conexão a problemas.

A introdução à álgebra, como discutido anteriormente, começa formalmente, no Brasil, no segundo ciclo do Ensino Fundamental, mais especificamente na sexta série. Do ponto de vista da psicologia do desenvolvimento e aprendizagem de inspiração teórica piagetiana, esse momento coincide com a transição para o período operatório formal. Segundo os postulados clássicos dessa teoria, é nesse período que o pensamento rompe a barreira do *concreto* e passa a atuar no *possível – hipotético*, no *abstrato.* Isso seria uma possível justificativa psicológica ao ensino de uma matemática mais *formal*, mais 'descolada' do mundo concreto, e esse argumento é ainda defendido por muitos psicólogos, pedagogos e educadores, em geral, para falar do ensino de álgebra em torno da 6ª série do Ensino Fundamental.

Alguns estudos (Kieran, 1992; Thompson,1995; Brito Lima, 1996; Da Rocha Falcão, Brito Lima, Araújo, Lins Lessa & Osório, 2000a e 2000b) defendem que a álgebra pode ser introduzida mais cedo do que propõe o currículo escolar vigente. Brito Lima (1996), em estudo realizado com crianças de 1ª a 6ª série do Ensino Fundamental, encontrou que já a partir da 2ª série alguns alunos conseguem propor alguma forma de representação de problemas algébricos, apresentados em linguagem natural. Neste estudo, a pesquisadora encontra um *desenvolvimento* nessas formas de representação, desde uma representação mais *icônica*, na qual a criança representa os dados concretos do problema, passando por uma representação intermediária, onde ela coloca círculos, quadrados e outros símbolos para representar os dados desconhecidos do problema, até o uso sistemático de letras. A seguir, essa possibilidade de *modelização* de problemas, com as crianças pequenas, é ilustrada por uma das crianças entrevistadas da 2ª série, que produziu a seguinte representação que a pesquisadora chamou de icônica:

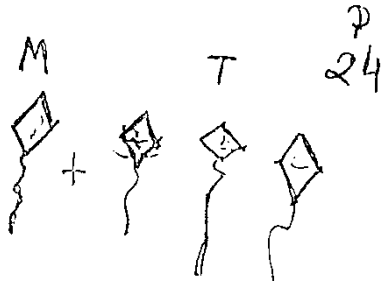


Figura 10 : Produção do aluno da 2ª série no protocolo escrito

Segundo o problema apresentado aos alunos, as crianças de Boa Viagem produziram uma certa quantidade de pipas pela manhã e o triplo dessa quantidade à tarde. No final, haviam produzido a mesma quantidade das crianças do bairro de Piedade (24 pipas).

Em outro estudo, da Rocha Falcão, Brito Lima, Araújo, Lins Lessa & Osório[20] aplicaram, em sala de aula, uma seqüência de atividades que se propunha a introduzir alguns conceitos algébricos para crianças de 2ª série de uma escola da cidade do Recife. Tal estudo consistia na realização de *módulos de atividades,* cada um versando sobre um determinado conceito ou procedimento algébrico a ser apropriado pelos alunos, desde a *comparação e transformação entre quantidades*, passando pela *representação icônica e simbólica*, até a proposição de uma *equação* (etapa chamada de *modelização*). Os módulos iam, pouco a pouco, apresentando elementos mais complexos, com o objetivo de levar aos alunos a compreensão dos conceitos algébricos essenciais.

Para os soviéticos de Kharkov, Davydov e Bodanskii (1991), as crianças deviam aprender, de fato, que matemática é sinônimo de *estabelecimento e manipulação de relações entre objetos matemáticos* (conhecidos ou desconhecidos). Segundo eles constitui-se em um obstáculo de tipo didático, a "proibição" piagetiana de oferecer álgebra cedo, que foi criado pela submissão dos alunos inicialmente à aritmética. Isto "vicia" os alunos a considerarem que matemática é sinônimo de números.

[20] (2000a e 2000b)

Esses estudos nos possibilitam refletir sobre as concepções vigentes, relativas à álgebra. A noção de prioridade aritmética, ao que parece, está apoiada em um tipo de concepção, que, necessariamente, não parece ser a mais adequada.

Alguns estudos nos dão suporte para refletir acerca dessa transição aritmética-álgebra, como veremos a seguir. Gérard Vergnaud foi um dos muitos estudiosos que se interessou em investigar a passagem da aritmética à álgebra. Mas outros pesquisadores também fundamentam essa reflexão[21]. Como as questões propostas por esses estudiosos são de natureza mais psicológica e epistemológica do que didática, falaremos de alguns elementos que consideramos importantes, mas buscaremos estabelecer relações com a vertente didática.

Filloy e Rojano (1984); Vergnaud e Cortes (1986) acreditam que a passagem da aritmética à álgebra se caracteriza como uma "ruptura epistemológica", pois os alunos passam de uma etapa de conhecimento matemático para outra, na qual precisam se apropriar e dominar novos objetos matemáticos, até então desconhecidos, reformulando algumas das suas antigas concepções.

Ainda para Vergnaud, Cortes e Favre-Artigue (1987), o aspecto mais central que caracterizaria tal ruptura epistemológica diz respeito ao seguinte:

> *"(...) enquanto que a resolução aritmética de um problema em linguagem natural consiste em procurar as incógnitas intermediárias numa ordem conveniente e a escolher os dados e operações adequadas para calcular tais incógnitas, a álgebra consiste em extrair e escrever relações implícitas entre incógnitas e dados, passando, em seguida a procedimentos de tratamento relativamente automáticos até a obtenção do resultado".* (VERGNAUD, CORTES E FAVRE-ARTIGUE 1987, p. 259-280).

[21] Ver Filloy e Trojano (1984); Kieran 1989, 1992); os estudos brasileiros de Lins e Gimenez (1997); Meira (1996); Brito Lima (1996)

O estudo de Lins Lessa (1996), já citado anteriormente, demonstrou que a questão central para promover a passagem de um procedimento aritmético para um procedimento algébrico parece não ser propriamente o tipo de suporte didático (balança ou problemas verbais) usado, pois cada um oportuniza a compreensão de determinados aspectos do campo conceitual algébrico:

- **A Balança** oportuniza a compreensão do *princípio de equivalência*, de *incógnita, a* experimentação da *manipulação de incógnitas* no campo da *ação.*
- **Os Problemas verbais** oportunizam a compreensão de *igualdade*, *incógnita e manipulação de incógnita* no campo da *representação simbólico-formal:*

Portanto, o que parece mais importante para iniciação à álgebra é o tipo de estrutura envolvida na situação problema. Como já foi mencionado, são as estruturas 3, 4, 5 e 6 (incógnitas aparecendo nos dois membros da equação) que favorecem a compreensão de conceitos básicos na introdução à álgebra (igualdade, representação, incógnita e manipulação de incógnitas). Como afirma Vergnaud (1988)**,** quando a álgebra é introduzida para resolver problemas que envolvem as estruturas simples 1 e 2 (incógnita em apenas um membro da equação), não há necessidade de usar o procedimento algébrico, pois não oferece nenhum benefício.

Para estabelecer essas relações, é necessário que o aluno se aproprie do procedimento algébrico de resolução de problemas que é, em essência, diferente do procedimento aritmético. Assim, na resolução de um problema algébrico, torna-se necessário extrair as relações matemáticas existentes entre os dados do problema; transpor estas relações da linguagem natural para um sistema simbólico formal (equação); e operar seguindo todo um processamento algébrico que envolve a manipulação de incógnitas e números conhecidos, com o objetivo de descobrir o valor desconhecido – a incógnita.

Tomando como ponto de partida essa questão e considerando o viés didático, podemos refletir que há elementos fundamentais de transposição didática e contrato

didático que podem ser observados. Primeiramente, a compreensão do que vem a ser uma incógnita. Operar com letras e números é uma marca do domínio algébrico, que precisa ser apropriada pelos alunos.

Booth (1995) aponta que uso de letras marca um dos obstáculos com os quais os alunos se deparam em álgebra, pois ele impede que a resolução possa ser feita diretamente, como no caso da aritmética. Em uma adição do tipo **3 + 5 = ?**, é possível ao aluno realizar a operação de forma direta. No caso de **3x + 5 = 11**, é mais difícil operar diretamente, por conta da existência da letra, pois há a necessidade de estabelecer relações entre os dados e seguir todo um procedimento de resolução que conduza à identificação do valor do ***x***, ou seja, ao valor que satisfaz a igualdade.

Segundo Filloy e Rojano (1984) 3x + 5 = 11, não é o bom exemplo, pois não é com ele que se dá a famosa ruptura – ou seja, é ainda possível resolver a equação acima aritmeticamente. Para estes autores, a equação que instaura a ruptura, e, portanto o bom exemplo para o que você está dizendo, é aquela com a célebre estrutura **ax + b = cx + d**.

Outro elemento que também pode ser obstaculizante, ainda com respeito às variáveis, refere-se ao fato dos conceitos de variável/incógnita não ser explorado adequadamente. É comum, ao se perguntar ao aluno *"o que é uma incógnita?"*, a resposta, via de regra, ser: *"é o **x**".* Isso provoca um tipo de erro que Brito Lima (1996) identificou em um estudo que buscava investigar como os alunos de 2ª a 6ªa série (série onde formalmente se inicia o ensino de álgebra, como já mencionamos) desenvolvem o *pensamento algébrico.* Quando o problema que era proposto em linguagem natural trazia elementos que possibilitavam a geração de uma equação com duas variáveis (por se tratar de quantidades desconhecidas, mas que eram de natureza diferentes), os alunos de 6ª série comumente colocavam a letra ***x*** para

representar qualquer quantidade desconhecida, como podemos observar no extrato de protocolo a seguir.

> Cr - A quantidade de frutas que D. Vera comprou foram 67, mais um saco de que é **x**. E é igual a D. Lia, que é **23** mais **x** mais **x** de novo, porque é um saco de maçã e um de uva.
>
> (Explica o procedimento de resolução...)
>
> E - E você usa **x** pra tudo que é desconhecido?
>
> Cr - É.
>
> E - E pode usar a mesma letra para coisas desconhecidas que são diferentes?
>
> Cr - Acho que sim... é tudo desconhecido!

Assim, a noção do que vem a ser *variável* (como também, *incógnita*) é uma questão bastante relevante quando se discute o desenvolvimento do *pensamento algébrico.* Booth (1995) faz uma reflexão importante, em outra direção do que discute Brito Lima, mas ainda referente à questão das variáveis. Ela propõe a idéia que se tem de que a letra representando um *valor específico único,* aproxima a álgebra da aritmética, onde cada símbolo representa um único valor numérico. Esta discussão pode ser ilustrada se tomamos um tipo de atividade escolar comum no final das séries iniciais do Ensino Fundamental (em geral na 4ª série), antes da introdução formal do aluno no domínio algébrico. O professor solicita ao aluno que encontre o valor do quadrado, como no exemplo a seguir:

$$3 + \square = 8$$

Apenas um número satisfaz a expressão e essa idéia parece ser transposta para álgebra, como se o simples fato de, ao invés de utilizarmos o quadrado, utilizássemos o **x** (3 + x = 8), essa expressão passasse a ser considerada uma equação algébrica. Na visão de Booth, essa seria uma concepção bastante inadequada e se configuraria como um obstáculo na construção do pensamento algébrico. Essa autora reforça ainda mais tal questão, citando um estudo (Booth,1995:32) onde era proposto o seguinte problema:

Considerando a expressão ***x + y + z = x + p + z.*** Essa afirmação é verdadeira?

Sempre; Nunca; Às vezes, quando...

Um dos alunos justifica: *"Não será verdade nunca! (...) porque ela terá valores diferentes... porque* p *tem de ter um valor diferente de* y *e dos outros valores, senão não será verdadeira".*

Assim, construir uma noção clara do que vêm a ser variáveis é um dos aspectos mais importantes no desenvolvimento do pensamento algébrico. A idéia de variável também aparece associada diretamente à noção de equação. Como já foi mencionado, o aluno não pode operar de forma direta no problema, como acontece em aritmética, mas precisa estabelecer uma ***equação*** e realizar todo um procedimento de resolução que o possibilite encontrar o número que satisfaça a igualdade e, dessa forma, descobrir o ***x***.

O que tradicionalmente se vê no ensino de álgebra, em termos de transposição didática interna, é que o professor de matemática quase sempre tende a valorizar mais a etapa operacional, ou seja, o procedimento algébrico de resolução da equação. E nesse procedimento, um elemento explícito do contrato didático é o de que *o aluno deve obedecer a uma série de passos seqüenciais e regras fixas, a fim de achar a solução do problema, encontrando o valor da incógnita*.

Em primeiro lugar, ele deve separar *letras* e *números*. A variável deve ficar no primeiro membro da igualdade, à esquerda do sinal, e os números que não estão atrelados à parte literal devem ser colocados no outro membro, à direita do sinal de igualdade.

Uma segunda regra é a de que ao mudar de membro, deve-se realizar a operação inversa. O que é dito aos alunos, em geral, como forma de sintetizar esse procedimento é que *"mudando de lado, muda-se o sinal".* Assim, se um número, em determinado membro, está "acompanhado" do sinal + , ele deve passar para o outro membro mudando este sinal para (–). Alguns professores mencionam a idéia de operação inversa, mas muitos deles remetem apenas à 'mudança do sinal'.

Em seu estudo experimental, Brito Lima encontrou esse tipo de argumento, ao questionar aos alunos sobre o porquê de, numa determinada equação, o número, ao ser transposto para o outro membro, aparecia, por exemplo, com um sinal negativo à sua frente (Brito Lima, 1996). As justificativas das crianças entrevistadas era justamente a de que *ao mudar de lado, deve-se mudar o sinal*.

Outros alunos, quando questionados sobre o porquê desse procedimento, justificavam que era *"porque tinha que usar a operação inversa"*, sem, contudo, explicar o porquê do uso de tal operação. Quando o entrevistador insistia ainda mais, quase sempre a resposta final era: *"porque o professor ensinou assim".*

A seguir, como forma de ilustrar essa discussão, o extrato de um protocolo de entrevista de um aluno de 6ª série, cujo problema em linguagem natural envolvia quantidades de bolas de gude, e apresentava a seguinte estrutura: **a + x = bx**. A equação a ser proposta deveria ser: **26 + x = 3x**.

> Cr - É... 26 bolas de gude, que era de Sérgio, mais a quantidade ***x***, que é a quantidade que continha no saquinho, é igual à quantidade que Joãozinho tinha, que era três saquinhos, que era ***3x***. Aí passa os termos de x pro lado esquerdo e os que não são de x pro lado direito, continuando a operação inversa, aí ficou ***x menos***, que aqui era mais, aí passou pro outro lado, aí ficou ***- 3x***. Aí é igual a ***- 26***, era ***+ 26*** aí ficou ***- 26***. Então, ***x - 3x = - 26, - x = - 26 : 2***, ***- x = - 13***, aí ***x*** não pode ficar negativo, aí multiplica tudo por ***menos um***, aí fica ***x = 13***.
>
> E - Ah, quer dizer que você multiplicou tudo por ***menos um***, aí ele ficou positivo?
>
> Cr - Fica, porque "negativo com negativo" é o inverso do negativo, que é "positivo".
>
> E - E por que você multiplicou por ***menos um***?
>
> Cr - Porque o x não pode ficar negativo.
>
> E – E por que o x não pode ficar negativo?
>
> Cr – Ah... porque senão dá errado o resultado. (...)
>
> E – Me explica outra coisa: por que você passou tudo que tinha x para o lado esquerdo e o que não tinha x para o lado direito?
>
> Cr - Porque tem que fazer assim, separar os termos com x dos que não têm x, pra poder descobrir quanto é x.
>
> E – E, por que mesmo, quando você passou x para o lado esquerdo e o que não tem x para o direito, o 26 ficou -26?
>
> Cr - Não é a operação inversa? Mudou de lado tem que fazer isso. (...)

Acredita-se que essa é uma questão inerente à forma como os contratos didático e pedagógico se estabelecem, não só no ensino de matemática, mas de qualquer disciplina: *o que o professor ensina deve ser aprendido e aplicado, sem que necessite de muitas explicações. Se ele ensinou, deve ser cumprido.* Dessa forma, as respostas são banais: *"porque tem que ser assim"; "porque senão dá errado"*; sem que, na verdade, o aluno apresente o argumento formal que justifique tal procedimento.

Retomando a discussão acerca da idéia de equação e do procedimento algébrico de resolução, Cortes, Kavafian e Vergnaud (1989) pontuam que uma equação deve ser compreendida como uma igualdade que explicita relações matemáticas existentes entre a variável e certos dados, com o objetivo de calcular a variável, mas que nem sempre isso é enfocado na sala de aula. Nessa direção, Kieran encontra em seus estudos que há uma carência de uma concepção estrutural do que seja uma equação pelos estudantes. Eles não conseguem perceber, por exemplo, a relação de equivalência existente entre expressões como $x + 4 = 7$ e $x = 7 - 4$ *(* Kieran 1982, 1984, 1992).

Em seu estudo, Brito Lima também observa que muitos dos alunos esperavam que após o sinal de igualdade aparecesse apenas um único número, entendendo esse número como o *resultado da equação*. Assim, eles não sentiam dificuldades em equações cuja estrutura era $ax + b = c$, mas apresentavam alguma dificuldade quando se deparavam com uma equação do tipo $ax + b = cx + d$ [22]. Alguns deles chegavam a dizer que não era possível resolver tal equação, uma vez que não aparecia o *resultado* após o sinal.

Lins & Gimenez (1997) discutem que esse fenômeno está relacionado ao que o pesquisador australiano Kevin Collis chama de *"não-aceitação da falta de fechamento"*. Numa questão como: *"se* ***e + f = 8*** *então,* ***e + f + g = ?****"*, muitos alunos se

[22] Conforme discutido anteriormente Filloy e Rojano (1984) chamam as equações onde após o sinal de igualdade aparece apenas um número de equações aritméticas, e a segunda estrutura (números e letras após a igualdade) de equações algébricas.

recusam a aceitar ***8 + g*** como resposta, uma vez que ***8 + g*** não é uma *resposta fechada*, não corresponde a um único resultado.

Talvez seja possível acreditar que essas concepções e obstáculos se instituem por conta da forma como o contrato didático e a transposição didática se estabelecem no ensino de aritmética. Retomando a questão acima aludida, após a igualdade, espera-se sempre o *resultado.* Alguns estudos[23] discutem que esse tipo de contrato faz com que os alunos concebam que o sinal de igualdade anuncia o resultado da operação (o que é reforçado pela tecla = das máquinas de calcular, que de fato têm essa função: fornecer o resultado da operação). Como se o que está antes do sinal sofresse uma transformação e resultasse no número à direita do sinal.

Essa concepção precisa ser revista quando os alunos passam a lidar com equações algébricas, o que força os alunos a suplantarem obstáculos psicológicos e didáticos. O sinal de igualdade precisa ser entendido como indicando que há uma equivalência entre o que está à sua direita e à sua esquerda. Isso implica no estabelecimento de um novo significado para o sinal de igualdade como operador, com ultrapassagem de um significado anterior tão incorporado no ensino de aritmética (ver a esse respeito: Schliemann, De Avelar Brito Lima, Lins Santiago, 1991; Vergnaud, Cortes & Favre-Artigue, 1987).

Hoje em dia é possível encontrar livros didáticos de matemática para o ensino fundamental (5ª., 6ª. e/ou 7ª. Séries) que utilizam a balança de dois pratos no início do capítulo destinado à iniciação à álgebra, como recurso didático destinado a estabelecer conexões entre a idéia culturalmente familiar das condições de equilíbrio entre os pratos de uma balança de dois pratos e a idéia do princípio da equivalência entre os membros de uma equação algébrica (para uma discussão acerca desse recurso didático, ver Da Rocha Falcão, 1995). A balança aparece, então, como uma *criação didática*, conforme referiu Chevallard (1991), cujo objetivo principal é auxiliar o

[23] Ver Kieran (1992) e Schliemann, Brito Lima & Santiago (1992)

aluno na compreensão do sinal (=) como expressando a igualdade entre duas quantidades, igualdade esta que pode ser mantida desde que se façam alterações iguais em tais quantidades, assim como, numa balança de dois pratos, o acréscimo ou retirada de pesos idênticos dos dois pratos não altera a condição de equilíbrio anterior.

As dificuldades anteriormente aludidas enfrentadas pelo aluno na compreensão do significado do sinal de igualdade, são ampliadas dificuldade específica dos alunos no que diz respeito à manipulação de incógnitas no procedimento de realizar a mesma operação em ambos os membros de uma equação sem, com isto, alterar a igualdade (cf. Kieran (1988, 1989) e Schliemann, Brito Lima & Santiago (1992). Tal dificuldade se traduz numa mais fácil aceitação da retirada de 4 em ambos os lados da equação *5x + 5 = 2x + 4*, de forma a simplificá-la ao passar à equação equivalente 5x + 1 = 2x, do que a retirada de 2x de ambos os membros da equação.

Todavia, esta abordagem de tais obstáculos referentes à ampliação de significado do sinal de = (igual) e a compreensão do princípio da equivalência abarcando números e letras não é procedimento realizado com freqüência por professores e alunos; o que comumente é enfatizado é o procedimento de "passagem" de um lado para outro da equação, fundada na idéia de que *ao mudar de lado, inverte-se o sinal.* Embora muitos professores considerem o procedimento de passagem como uma versão comprimida[24] da realização da mesma operação em ambos os membros da igualdade, não é isto que ocorre com os estudantes, pois os mesmos não procedem às passagens de um lado a outro a partir do princípio da equivalência comprimido num procedimento automatizado. Conforme enfatiza Terezinha Nunes, não se pode confundir procedimentos *comprimidos* e procedimentos *automatizados*, apesar dos mesmos terem uma mesma aparência comportamental: comprime-se apenas aquilo que foi anteriormente compreendido, construído conceitualmente (ao passo que se pode perfeitamente automatizar uma regra ou princípio sem qualquer compreensão dos fundamentos matemáticos da mesma).

[24] No sentido dado ao termo por Terezinha Nunes, em Nunes, 1997.

Podemos nos questionar, no que se refere à *relação ao saber* do professor, se de fato está claro para muitos dos professores de matemática que o procedimento de 'mudança de um membro para o outro na equação' é equivalente ao de tirar a mesma quantidade de ambos os membros da igualdade. E então, se o professor não possui essa compreensão, ele não poderá *descomprimir* seu conhecimento para explicitá-lo e auxiliar a construção conceitual de seu aluno (o qual somente em seguida poderá comprimir tal conhecimento num algoritmo automatizado – o que a tradição francófona de didática da matemática chama de "détour algébrique").

Outra dificuldade revelada por alguns estudos experimentais acerca da passagem aritmética-álgebra, diz respeito à representação sob forma de equação do enunciado de um problema. Lochhead & Mestre (1995) exemplificam essa questão a partir de um problema relativamente simples: é solicitado aos alunos que eles leiam uma sentença que relaciona duas variáveis e que escrevam uma equação que represente essa relação. No problema a seguir (1995:145), 37% dos alunos de um curso de Engenharia se equivocaram na resposta:

> Escreva uma equação usando as variáveis *A* e *P* para representar a seguinte afirmação: Há seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade. Use *A* para indicar o número de alunos e *P* para indicar o número de professores.

Dos alunos que erraram, dois terços deles propôs a seguinte equação: $6A = P$, havendo uma troca de variáveis.

Outros pesquisadores[25] quando investigam a proposição de equações a partir de problemas em linguagem natural também encontram esse tipo de dificuldade. No momento em que se depara com o problema, o aluno precisa transformá-lo para a linguagem matemática. Este é um momento muito importante na resolução de tal tipo de problema. Os dados da "pequena história" que aquele problema contém devem ser

[25] Ver, por exemplo, Laborde (1982), Da Rocha Falcão (1992) e Brito Lima (1996).

transformados em números, letras, igualdade, e ainda assim representarem fidedignamente o problema.

Neste processo, há uma perda do referencial semântico do problema. Com o término do cálculo algébrico, o aluno deve retomar o problema e relacionar o número encontrado com o problema dado, passando do *resultado* numérico obtido à *resposta* do problema. Esta etapa de retorno ao referencial semântico de origem representa, assim, um movimento inverso à etapa anterior, que se segue à colocação de um problema em equação e ao cálculo algébrico. Essa questão de *descontextualização* e *recontextualização* foi abordada no capítulo referente à transposição didática e acreditamos que é de extrema relevância na gênese do saber.

No entanto, o próprio trabalho com problemas que contextualizem o saber algébrico é algo que precisa ser refletido. Nos livros didáticos de matemática, até algumas décadas atrás, havia dois capítulos distintos: um versando sobre *equações algébricas* e outro que trazia *problemas envolvendo equações.* Isso se configura, no nosso entender, como uma questão importante, em termos de transposição didática externa (bem como interna). Possivelmente, a idéia subjacente a essa antiga proposta de organização dos conteúdos é a de que resolver um problema algébrico é mais difícil do que trabalhar com a equação já pronta, pois o aluno precisaria interpretar o problema, extrair, por ele mesmo, os dados numéricos e estabelecer a incógnita. Entretanto, não se reflete que esse procedimento descontextualiza a noção do que seja uma incógnita e a compreensão de uma equação.

Todas essas questões, no nosso entender, são de extrema relevância para que possamos refletir sobre como se pode ensinar álgebra, no universo da sala de aula. Muitos estudiosos têm discutido exaustivamente essa problemática, e alguns estudos podem apontar caminhos nesse processo, como veremos mais adiante.

4.3. O que é necessário ser ensinado em álgebra?

Alan Bell propõe que na sala de aula há alguns elementos relativos à álgebra que precisam ser compreendidos pelos alunos (Bell, 1996). Para este autor, um primeiro elemento diz respeito ao *uso da linguagem algébrica* como forma de expressar relações e trabalhar com representações. Além desse, é fundamental o trabalho com a *manipulação de expressões simbólicas* de forma a possibilitar a proposição e resolução de equações, bem como o trabalho com funções e fórmulas.

Nesse sentido, é necessário que os alunos compreendam a álgebra como um *sistema de relações*. É isso, possivelmente, que Rômulo Lins & Joaquim Gimenez definem como o desenvolvimento do *pensamento algébrico* (Lins e Gimenez, 1997). Muito mais do que ensinar álgebra como um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados na resolução de um problema específico, cabe ao professor criar situações de ensino que possibilitem ao aluno *pensar algebricamente* ao se deparar com um problema. Situação essa que pode ser colocada, por exemplo, em forma de equação ou em um problema em linguagem natural, dentre outras possibilidades. Bell sintetiza essa idéia apontando quatro aspectos essenciais no ensino de álgebra, que destacaremos aqui (BELL, 1996, p. 174-175):

1. Tornar o aluno capaz de operar com expressões simbólicas.
2. Focalizar a aprendizagem dos aspectos lingüísticos da álgebra, de forma que o aluno aprenda a escrever e ler uma notação algébrica de maneira correta e significativa.
3. Ensinar os alunos a manipulá-las (notações) correta e fluentemente.
4. Possibilitar aos alunos a aquisição da competência estratégica necessária para que eles possam fazer uso dessa linguagem (algébrica), sempre que se depararem com situações onde precisem generalizar, propor e resolver equações, bem como trabalhar com funções e fórmulas.

Pode-se refletir que essas competências estratégicas às quais Alan Bell (1996) se reporta, não podem ser desenvolvidas todas ao mesmo tempo. É necessário considerar que há um caminho a ser percorrido no desenvolvimento das potencialidades que instrumentalizem o aluno a 'olhar algebricamente' para um

problema e a poder mobilizar as competências necessárias para a sua resolução: interpretando-o; extraindo os dados relevantes da situação-problema; propondo uma representação deste em uma linguagem simbólica (equação ou não-equação); manipulando com os símbolos propostos, a fim de poder resolver a situação proposta.

A álgebra, por conta de sua amplitude, pode ser ensinada enfocando *resolução de problemas*, ou relacionando-a com *funções* e com *geometria*; fazendo uso de *diagramas*, como também do ambiente virtual do *computador*. Os diversos estudos revelam a funcionalidade de cada um desses domínios. O que se torna mais importante, em cada um desses ambientes ou domínios matemáticos, é atribuir sentido aos elementos centrais em álgebra: a noção de incógnitas e variáveis, a modelização, a representação, a linguagem algébrica.

A resolução de problemas, historicamente, foi o que trouxe a maior contribuição para o desenvolvimento da álgebra. A matemática utilitária dos povos da Idade Antiga, bem como dos árabes da época de Al Kwarizmi, que se debruçava sobre problemas matemáticos cotidianos que precisavam ser resolvidos, configurou-se como um ponto de partida importante para a álgebra. Bednarz & Janvier (1996) observam que acontece o mesmo no ensino de álgebra. Há uma preferência pela resolução de problemas como elemento para se trabalhar a álgebra escolar. Essa preferência parece remeter à concepção da álgebra como ferramenta de resolução de problemas, também discutida anteriormente. Seriam, então, esses problemas, que revelariam ao aluno a potente ferramenta que é a álgebra, uma vez que pelo procedimento aritmético de resolução de problemas, eles (alunos) não conseguiriam dar conta do problema proposto.

Entretanto, muito do que foi e ainda é trabalhado em termos de resolução de problemas, diz respeito a *encontrar o valor da incógnita.* A resolução de problemas precisa ser entendida de uma forma amplificada. Problemas que envolvem geometria

e funções, por exemplo, possibilitam ao aluno ampliar a sua concepção de álgebra, muitas vezes restrita à idéia de *"campo da matemática que trabalha com letras".*

Com respeito à resolução de problemas, ainda no estudo de Brito Lima, discutido no tópico anterior, esta pesquisadora propõe duas classes de problemas algébricos, baseadas naqueles que apareciam nos livros didáticos de matemática. Uma primeira classe era a que enfatizava a *transformação de uma quantidade em outra*, semelhante aos problemas de aritmética. Um exemplo de problema desse último tipo poderia ser:

> "Carla colecionava papéis de carta. Ela tinha 23 papéis na coleção e ganhou dois pacotes da sua tia. No final, a sua coleção ficou com 37 papéis de carta. Quantos papéis havia em cada pacote que ela ganhou?"

A equação gerada por este problema seria **23 + x = 37**. Essa estrutura era uma das que mais apareciam nos livros didáticos, no Brasil, na década de 80 (época de realização do estudo) e, embora legítima como estrutura algébrica, promove alguns efeitos. Em primeiro lugar, o sinal de igualdade continua a ser tratado como *operador*, tal como o é, classicamente, em aritmética. Isso, como já discutimos, pode obstaculizar a compreensão da igualdade entre quantidades, tão importante quando da introdução no domínio algébrico. Segundo, um problema desse tipo pode ser resolvido aritmeticamente. Assim, a potência da álgebra como ferramenta de resolução de problemas, não é claramente percebida.

Os alunos de séries preliminares (2ª e 3ª séries), nesse estudo, resolviam problemas desse tipo por adição. Assim, ao **23** eles adicionavam *palitos* ou *bolas*, desenhados no papel, contando um a um, até chegarem ao número **37**:

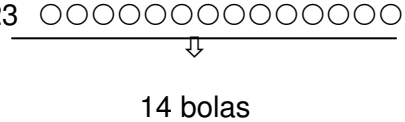


Figura 11: Produção do aluno no protocolo escrito

A segunda classe de problemas, que não foi freqüentemente encontrada nos livros didáticos, ressaltava a igualdade entre quantidades, como no exemplo a seguir:

> "Bruno e Rafael adoravam docinhos. Numa tarde, Bruno comeu 12 surpresas de uva e todos os brigadeiros que havia em uma bandeja. Rafael comeu ao todo 27 doces, entre brigadeiros e surpresas de uva. Eles comeram a mesma quantidade de docinhos. Quantos brigadeiros havia na bandeja?"

Embora muitos alunos resolvessem esse problema aritmeticamente, uma vez que a estrutura do mesmo era simples (a + bx = c), a igualdade entre quantidades era ressaltada, o que favorecia, segundo o estudo, o desenvolvimento do procedimento algébrico de resolução, quando eram apresentados problemas de estrutura mais complexa.

Após a discussão proposta acerca do saber algébrico, do ensino de álgebra e dos fenômenos didáticos, entende-se que é de fundamental importância continuar a investigar a construção do conhecimento algébrico pelos alunos no âmbito da aprendizagem da matemática escolar. No caso deste estudo em particular, a aprendizagem da álgebra inicial. O capítulo que segue propõe o desenho metodológico desse estudo, que busca capturar os elementos relativos à interface entre a construção de significados em álgebra inicial pelos alunos da 6ª série e os fenômenos didáticos que envolve: *o saber, o professor e o aluno*.

METODOLOGIA

Conforme apresentado no capítulo de Introdução, o estudo realizado pela presente tese teve como objetivo geral oferecer subsídios adicionais à compreensão do processo de aprendizagem dos alunos na iniciação à álgebra analisando como esse processo ocorre no contexto *contratual* de sala de aula. Mais especificamente, o estudo propôs uma ***seqüência didática*** que foi entregue a um professor que concordou em aplicá-la em sua própria sala-de-aula. Buscou-se, portanto circunscrever um objeto de estudo que possibilitasse analisar de que formas uma seqüência didática proposta em sala de aula pelo professor, que por sua vez a transpõe para a atividade em sala-de-aula a partir de *negociações* com a pesquisadora, pode favorecer a construção de significados no campo conceitual da álgebra. Detalhes operacionais de tais objetivos são fornecidos nas seções seguintes.

Sujeitos

Este estudo trabalhou com professora de matemática e 14 alunos de ambos os sexos, faixa etária de 12/13 anos, de uma sala de aula da 6ª série do ensino fundamental II de uma escola da rede particular de ensino do Recife. Este nível de escolaridade foi escolhido por se tratar da série onde usualmente se introduz o ensino de álgebra na escola, atendendo ao objetivo do estudo que é investigar a aprendizagem escolar da álgebra. O grupo de alunos era homogeneamente oriundo da classe média, que é o segmento sócio-econômico típico deste tipo de escola. A professora de matemática também participou como sujeito do estudo, pois buscou-se verificar como ela estabeleceu o contrato didático com os alunos, ou seja, como ela negociou a seqüência didática com eles, e como ela fez a gestão do saber, no caso,

dos conceitos fundamentais da álgebra, a partir da seqüência proposta pela pesquisadora.

Procedimentos Metodológicos

A **primeira etapa** (pré-testagem) consistiu da aplicação coletiva, feita pela professora, de dois instrumentos de avaliação: a) lista de problemas de álgebra oriundos de livros didáticos de matemática de largo emprego em escolas recifenses e brasileiras, tendo-se escolhido os livros didático propostos por Bigode (1994) para a 6ª série do ensino fundamental (ver reprodução destes problemas no quadro 11, página 88); b) problemas e equações elaborados pela pesquisadora e usado em estudo anterior – Lins Lessa, 1996) (ver Anexo 2). A utilização destes dois instrumentos de pré-testagem buscou cobrir tanto os chamados "problemas contratuais", ou seja, aqueles problemas considerados relevantes pelos livros didáticos (aqui tomados como representativos do processo de transposição didática primária da álgebra), como os problemas de pesquisa, propostos pelo próprio pesquisador a partir de suas idéias prévias sobre a organização do campo conceitual da álgebra.

A ordem de apresentação das situações-problema foi a seguinte: primeiro as equações usadas no estudo anterior (Lins Lessa, 1996), depois os problemas do livro didático da 6ª série (Bigode, 1994) e, em seguida, os problemas que também foram usados no estudo anterior da pesquisadora. Todos os sujeitos da turma realizaram o pré-teste e receberam a lista nesta ordem.

A **segunda etapa** consistiu na passagem da seqüência didática desenvolvida pela pesquisadora para a professora. Neste momento a pesquisadora apresentou à professora de matemática, todas as etapas da seqüência e suas respectivas atividades (a seqüência didática apresentada à professora, no processo de passagem e negociação da mesma, encontra-se reproduzido mais adiante). Apresentou-se à

professora o objetivo geral da seqüência, que era trabalhar através de diferentes atividades determinados conceitos algébricos fundamentais para a introdução ao ensino da álgebra, e consequentemente, aprendizagem desses conceitos para a resolução de problemas algébricos. Discutiu-se com ela quais os conceitos que cada etapa e respectivamente cada atividade contemplava. Informou-se à professora que ela tinha liberdade para propor novas tarefas a partir de cada atividade da seqüência, deixando claro que a seqüência estava entrando na programação do calendário escolar como uma série de atividades a mais do que já havia sido planejado pela escola para trabalhar a introdução à álgebra elementar (conteúdo previsto para a 6ª série do ensino fundamental).

A **terceira etapa** consistiu na aplicação da seqüência didática em sala de aula pela professora de matemática e observação da mesma pela pesquisadora. A seqüência foi subdividida em quatro etapas, conforme apresentado na seção seguinte:

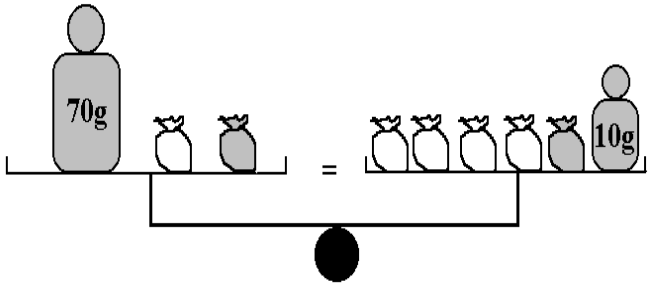
A seqüência didática

Tal seqüência consistiu numa série de atividades divididas em quatro etapas e apresentadas aos alunos pela professora, recebendo os alunos uma folha de papel ofício contendo tais atividades (ilustração dessa folha ver anexo 4 e 4a) para a realização de trabalho de aplicação coletiva (porém feito de forma individual) em sala de aula. Não obstante o trabalho dos alunos-sujeitos ter tido caráter individual, houve debates envolvendo o professor e os demais sujeitos. A seqüência foi aplicada pela professora de matemática em sala de sala, nos dias e horários habituais da aula de matemática previstos no calendário escolar (informados adiante). Estas atividades estavam programadas dentro do conteúdo escolar previsto para a 6ª série, conforme negociação envolvendo a professora, a coordenação pedagógica da escola e os pais dos alunos-sujeitos. Nesse sentido, a seqüência foi considerada pela escola (e aceita

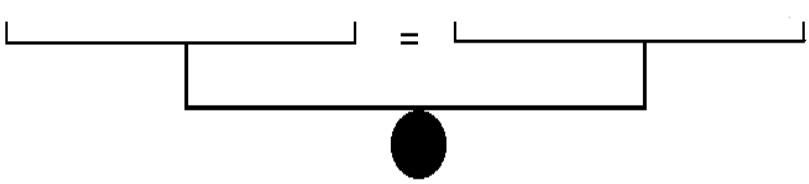
pelas famílias) como conjunto de atividades complementares para o conteúdo de álgebra já previsto no currículo desta série. Os exemplos de cada etapa serão apresentados no capítulo de análise dos dados na seção do relatório da observação. Conforme informado anteriormente, reproduções das situações encontram-se no anexo 4 e 4a.

Etapa Balança: consistiu na proposição de diferentes situações problemas na balança (desenhada no papel), onde os alunos iriam discutir com a professora o principio de equivalência, a descoberta do valor desconhecido (incógnita) e a manipulação de incógnitas como procedimento de resolução de problemas. As situações de uma maneira geral se apresentavam da seguinte forma:

1. Desenho da balança com pesos e saquinhos para descobrir o valor dos saquinhos (incógnitas)



2. Desenho da balança vazia para compor as situações de igualdade



Etapa Quantidade Discretas : tal etapa, por sua vez, consistiu na proposição de relações matemáticas entre números, nas quais os alunos, dada uma relação, deveriam calcular o valor da diferença entre eles. Ou então, dada a diferença entre os números inferir qual a relação matemática entre os números. Essas relações eram expressas pelos sinais: **> ; < ; =**

3. Situações para os alunos completarem, estabelecendo as relações usando os sinais: > ; < ; = , entre quantidades numéricas representadas. Por exemplo:

	3	
20	**?**	17

4. Situações para os alunos completarem, calculando a diferença entre quantidades numéricas representadas. Por exemplo:

	?	
17	**<**	19

5. Situações para os alunos completarem, onde são dadas a relação (sinal) e a diferença (numero), compondo quantidades numéricas. Por exemplo:

	5	
?	〉	**?**

Etapa Cálculo Simbólico (relações de 2ª ordem) : Esta etapa tem o mesmo objetivo da anterior que é estabelecer relações matemáticas, todavia, consiste em relações de segunda ordem, onde os alunos deveriam estabelecer relações lógicas apenas com letras, sem considerar o valor numérico.

6. Situações para estabelecer uma relação, a partir de outra relação, entre letras usando os sinais: > ; < ; =

A	**>**	**B**
A + X	**?**	**B**

A	**=**	**B**
A - X	**?**	**B - X**

Etapa Problemas Verbais: esta última etapa consiste em apresentar relações lógicas para o uso de cálculo simbólico em problemas verbais, usando a linguagem natural.

7. Problemas verbais usando calculo simbólico

Um grupo de pedreiros de Casa Amarela é capaz de construir uma certa quantidade de casas em um mês, enquanto outro grupo de pedreiros do bairro da Macaxeira constrói uma outra quantidade de casas no mesmo tempo. Vamos chamar de A esse tanto de casas que o grupo de pedreiros de Casa Amarela constrói, e vamos chamar de B o tanto de casas construídas pelo grupo da Macaxeira. Nós sabemos que A é maior que B. O que poderíamos sugerir fazer para que o número de casas construídas pelo segundo grupo de pedreiros se tornasse igual ao número de casas construídas pelo primeiro grupo?

A observação

Todo processo de trabalho realizado pela professora a partir da seqüência didática negociada com a pesquisadora foi sistematicamente observado pela pesquisadora em sala-de-aula, nos dias e horários da aula de matemática previstos no calendário escolar (2ªs feiras – das 16h20 às 17h10 (uma aula) e 5ªs feiras – das 13h30 às 15h (duas aulas semanais). A observação não foi videografrada (tendo em vista restrição imposta pela escola), tendo sido registrada pela pesquisadora sob a forma de diários escritos de observação, material complementado por registros audiográficos e protocolos de trabalho dos alunos em folhas de papel. A pesquisadora procurou registrar as atividades realizadas, os escritos que a professora e os alunos faziam no quadro e as falas (professor e alunos). Foram observadas doze aulas, em oito encontros, durante o período de um mês (quatro semanas).

Durante as aulas observadas a pesquisadora ficou sentada em uma carteira na sala de aula, anotando tudo que se passava e sem qualquer participação nos debates, a não ser quando um aluno fazia alguma pergunta e a professora solicitava algum comentário da pesquisadora. Afora tais casos, a pesquisadora permaneceu a maior parte do tempo calada, assumindo uma postura apenas de observadora.

A pesquisadora estabeleceu um *rapport* positivo com os alunos interagindo com eles antes de começar a aula e no final da aula. Procurava conversar com os sobre diversos assuntos: a escola, a turma, as atividades realizadas na escola, etc. O objetivo desta atitude era permitir que os alunos se sentissem mais a vontade com a presença da pesquisadora na sala de aula.

Durante a aula, a pesquisadora observava o que os alunos eram capazes de elaborar cognitivamente na interação com o professor e os colegas, através das sugestões, explicações e contrargumentações. Assim, a pesquisadora procurava

entender o raciocínio que os alunos apresentavam a discussão em sala, a cada passo na resolução das situações problemas, e analisar se havia compreensão dos procedimentos que estavam sendo apresentado, utilizado e discutido pela professora e os alunos. Quando os alunos estavam fazendo as atividades da seqüência sozinhos, em duplas ou em grupo, a pesquisadora andava pela sala olhando as suas produções.

Também durante a aula, as trocas verbais que aconteciam em sala entre os alunos e a professora, eram acompanhadas pela pesquisadora com uma expressão que procurava demonstrar interesse e atenção ao que estava sendo falado por todos. Com esta atitude, os alunos estabeleceram uma relação simpatia para com a de pesquisadora.

A opção por uma postura neutra durante a observação buscou contemplar objetivos do estudo. O interesse desta investigação estava focalizado no processo de aprendizagem no contexto natural da sala de aula, tendo em vista a apropriação realizada pelo professor do material didático oferecido. Então, não era papel da pesquisadora explicar conceitos nem tirar dúvidas dos alunos, isso era papel da professora da turma. Além disso, a seqüência já foi uma proposição da pesquisadora e ela estava presente durante a aplicação, o que já altera o contexto natural da sala de aula. Se, além disso, a pesquisadora interviesse na aplicação, o contexto se distanciaria bastante seu status natural, e se aproximaria de um contexto de 'laboratório'.

A **quarta etapa** (avaliação da seqüência): aplicação coletiva do pós-teste pela professora de matemática em sala de aula. Foi aplicada a mesma lista de equações e problemas do pré-teste, e apresentada na mesma ordem (equações, problemas do livro didático e os outros problemas)

Na seção seguinte são oferecidos e discutidos os resultados obtidos.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

1. Visão geral do procedimento de análise

Conforme explicitado no capítulo anterior, este estudo comportou quatro etapas procedurais: a primeira etapa de pré-testagem, a segunda etapa referente à passagem negociada da seqüência didática para a professora de matemática da turma selecionada, em seguida a terceira etapa destinado à aplicação da referida seqüência em sala de aula, e finalmente, a quarta etapa de pós-testagem. No que diz respeito ao esforço interpretativo de análise, este também comportou etapas. Baseou-se em duas etapas principais:

- A primeira etapa de análise voltou-se para as produções individuais dos sujeitos no pré-teste e no pós-teste; tal etapa comportou um primeiro momento de síntese de informações, realizada através de análises multidimensionais[26] referentes aos dados produzidos pelos sujeitos no que diz respeito aos aspectos centrais observados nas testagens, sejam na resolução de **equações**, nas situações-**problema oriundos de livros didáticos de 6ª série** e nas situações-**problema propostos criados em contexto de pesquisa**, conforme previamente descrito no capítulo referente à metodologia (páginas 77 a 83). Este primeiro momento de síntese foi seguido por um segundo momento de aprofundamento, fundado em análises clínicas sugeridas pelas informações oriundas do primeiro momento (como por exemplo, análises clínicas dos protocolos e notas de observação referentes àqueles sujeitos detectados como típicos de determinado tipo de categoria de desempenho).

[26] Para uma breve introdução geral à análise descritiva multidimensional, bem como às modalidades utilizadas neste trabalho (classificação ascendente hierárquica e análise fatorial) consultar o Anexo 2 .

- A segunda etapa de análise, por sua vez, referiu-se aos dados narrativos oriundos dos diários de observação da pesquisadora, referentes a todo processo vivenciado durante a seqüência didática em sala-de-aula.

  As seções seguintes trazem os dados das análises supracitadas.

2. A primeira etapa de análise

Para a realização das análises desta primeira etapa, as respostas dos sujeitos aos itens propostos nos instrumentos de testagem (pré-teste e pós teste) foram categorizadas em termos de dois aspectos básicos:

- **Tipo de Resposta**: Nesse primeiro nível de análise, procedeu-se basicamente a uma análise acerto-erro, conforme ilustrado pelo quadro abaixo:
-

Códigos numéricos	Categoria: Tipo de Resposta	Descrição
1	Acerto	Deu uma resposta numérica certa ao problema.
2	Erro	Deu uma resposta numérica errada ao problema.
3	Não Fez	Deixou em branco, não forneceu qualquer resposta

Quadro 6: Descrição da Categoria **Tipo de Resposta**

- **Tipo de Procedimento**: Nesse segundo nível de análise procedeu-se a uma análise dos procedimentos mobilizados na resolução dos problemas e equações, conforme quadro a seguir:

Códigos numéricos	Categoria:Tipo de Procedimento	Descrição
1/ 2/ 3	**Aritmético:**	
	(1) Contas	- Operações aritméticas sem um plano aparente.
	(2) Atribuição de valor	- Atribuição de valor às incógnitas e verificação através de contas.
	(3) Resposta Numérica	- Resposta numérica sem cálculo explicitado no protocolo.
4 / 5	**Algébrico:**	
	(4) Balança	- Manipulação algébrica (cancelar quantidades iguais em ambos os membros da igualdade), usando ou não a metáfora da balança.
	(5) Expressão algébrica	- Apelo a regras de manipulação algébrica (formais) ensinadas na escola sobre equação.
6	Sem procedimento explicitado no protocolo	Não fez, deixou em branco.

Quadro 7: Descrição da Categoria Tipo de Procedimento

A partir de tais categorias básicas de análise, procedeu-se ao levantamento de freqüências simples.

- **Freqüências simples por situação problema:**

a) Equações com respectivas freqüências simples de respostas e procedimento:

Antes de apresentar as freqüências de resposta, no quadro abaixo, estão dispostas as equações propostas na pesquisa e suas respectivas representações simbólicas da estrutura algébrica.

Estrutura	Representação simbólica da estrutura algébrica	Equações propostas na pesquisa
1	ax + b = c; ax = b	2x + 22 = 68
2	ax + x = b	4x + x = 55
3	a + x = bx	x + 36 = 4x
4	ax + b = cx + d	x + 77 = 3x + 13
5	ax + b = ax + cy + d	2x + 96 = 2x + 2y + 14
6	ax + by + c = dx + by + f	2x + 2y + 79 = 4x + 2y + 31

Quadro 8: Equações propostas no estudo e a representação suas respectivas estruturas algébricas

No quadro a seguir são apresentados os percentuais de freqüência de resposta no pré-teste e no pós-teste.

Equação	Freqüência percentual de resposta no pré-teste			Freqüência percentual de resposta no pós-teste		
	Acerto	Erro	Não Fez	Acerto	Erro	Não Fez
1	85,7	14,3	0	92,8	7,2	0
2	7,2	71,4	21,4	50	42,8	7,2
3	21,4	14,3	64,3	50	28,6	21,4
4	0	7,2	92,8	35,7	28,6	35,7
5	0	0	100	21,4	21,4	57,2
6	0	0	100	21,4	7,2	71,4

Quadro 9: Percentual de freqüência simples do tipo de resposta nas equações, no pré e pós-teste

Observa-se no quadro 9 acima uma mudança no que se refere ao percentual de resposta não fez no pós-teste em relação ao pré-teste: com exceção da equação 1, em que o percentual dos sujeitos que não fizeram foi nulo tanto no pré-teste quanto no pós-teste. Em todas as demais equações caiu a freqüência da resposta não fez, aumentando os percentuais de acertos do pré para o pós-teste, conforme ilustrado pela figura a seguir:

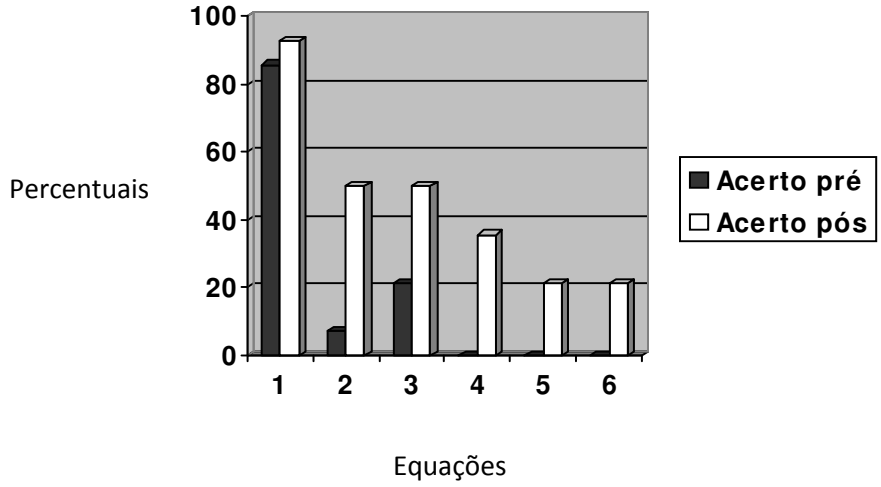


Figura 12 : Diferenças entre os percentuais de acerto nos pré e pós testes para cada uma das seis estruturas de equação.

Isso demonstra que os alunos tentaram resolver mesmo cometendo erros. O quadro 10 a seguir, mostra o percentual de freqüência de procedimento tanto no pré-teste quanto no pós-teste. Quanto ao procedimento observa-se ausência do procedimento algébrico no pré-teste, e o aparecimento no pós-teste (a partir da equação 3). Isso indica que mudanças ocorreram entre esses dois momentos da pesquisa, o que se pode considerar o papel da seqüência didática nesse processo.

Equação	**Freqüência percentual de procedimento no pré-teste**			**Freqüência percentual de procedimento no pós-teste**		
	Aritmético	**Algébrico**	**Sem proced.**	**Aritmético**	**Algébrico**	**Sem proced.**
1	100	0	0	100	0	0
2	78,6	0	21,4	92,8	0	7,2
3	35,7	0	64,3	71,4	7,2	21,4
4	7,2	0	92,8	42,9	21,4	35,7
5	0	0	100	21,4	21,4	57,2
6	0	0	100	14,3	21,4	64,3

Quadro 10: Percentual de freqüência simples do tipo de procedimento nas equações, no pré e pós-teste

b) Problemas referentes aos livros didáticos com respectivas freqüências simples de respostas e procedimentos:

A seguir, no quadro 11, estão dispostos os problemas do livro didático propostos na pesquisa e sua respectiva modelização.

Problema dos livros didáticos	Equação de modelização
a) Numa balança de pratos temos 12 bananas que pesam 100 gramas cada uma, e 8 laranjas de pesos iguais, equilibrando com 2 melões que pesam 2 quilos cada um. Qual o peso, em gramas, de cada laranja?	$(12 \times 100gr) + 8x = (2 \times 2000gr)$
b) Pedro tirou notas 5, 6, e 7 em matemática nos três primeiros bimestres do ano. Qual deve ser a nota mínima que Pedro deve tirar na 4ª prova, sabendo que a nota mínima para a aprovação na prova final é 5,0?	$\frac{5 + 6 + 7 + x}{4} = 5$ $18 + x = 20$
c) A soma das idades de 4 irmãos é 84. Qual a idade de cada irmão, sabendo que de dois em dois anos nascia um?	$x + (x + 2) + [(x + 2) + 2] + \{ [(x + 20 + 2] + 2 \} = 84$ $4x + 12 = 84$
d) A soma das idades de Otávio e Nicolau é 22 anos. Descubra a idade de cada um, sabendo que Otávio é 4 anos mais novo que Nicolau.	Se x = Otávio $\Rightarrow$ $x + (x + 4) = 22$ Se x = Nicolau $\Rightarrow$ $x + (x - 4) = 22$
e) A soma das idades de meu pai, meu sobrinho e a minha é 98. Qual é a idade de cada um, sabendo que a idade de meu pai é o dobro da minha e a minha é o dobro da idade de meu sobrinho?	x = sobrinho $x + 2x + 2 (2x) = 98$ $7x = 98$
f) Com R$ 5,00 posso comprar um álbum e 5 pacotes de figurinhas, ficando R$ 1,00 de troco. Quanto custa o álbum, sabendo que o preço de 5 pacotes equivale ao preço do álbum?	$x + 5y + 1 = 5$ $5y = x$ $\Downarrow$ $x + x = 4$ $2x = 4$
g) Duas caixas juntas pesam 22kg. Quanto pesa cada uma, sabendo que a mais pesada tem 6kg a mais que a outra/	$x + (x + 6) = 22$ $2x + 6 = 22$

Quadro 11: Problemas dos livros didáticos propostos e a sua respectiva modelização

O quadro 12 abaixo, apresenta os percentuais de freqüência de resposta e o quadro 8 demosntra percentual de freqüência de procedimento dos problemas, tanto no pré-teste quanto no pós-teste.

Problemas	Freqüência percentual de resposta no pré-teste			Freqüência percentual de resposta no pós-teste		
	Acerto	Erro	Não Fez	Acerto	Erro	Não Fez
a	14,3	57,1	28,6	28,6	71,4	0
b	7,2	85,6	7,2	35,7	64,3	0
c	21,4	42,9	37,7	42,8	57,2	0
d	21,4	14,3	64,3	57,2	42,8	0
e	0	14,3	85,7	7,2	42,8	50
f	28,6	14,3	57,1	78,5	7,2	14,3
g	7,1	28,6	64,3	35,7	42,9	21,4

Quadro 12: Percentual de freqüência do tipo de resposta nos problemas do livro, no pré e pós-teste

Também ocorrem mudanças importantes em termos de desempenho quando se comparam o pré-teste e o pós-teste referentes aos problemas oriundos dos livros didáticos. De forma geral, aumentam os percentuais de acerto do pré-teste para o pós-teste para todos os problemas, notadamente para o problema f, conforme se pode melhor visualizar na figura abaixo:

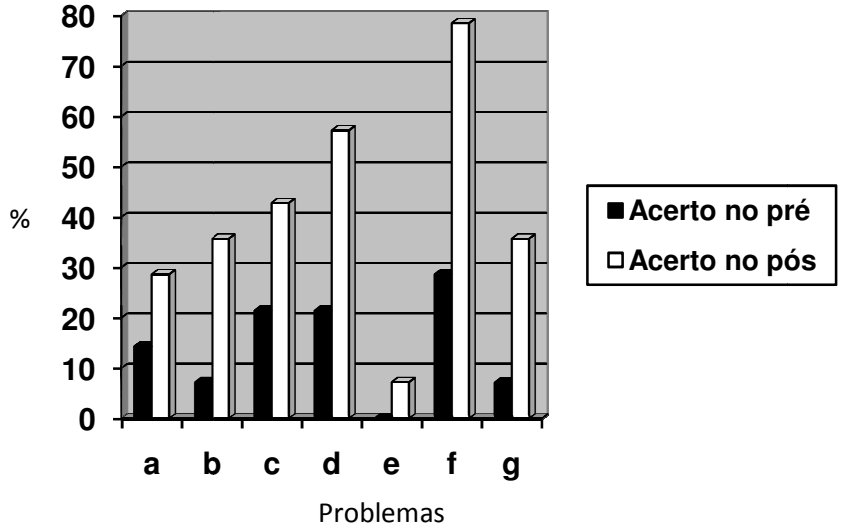


Figura 13: Diferenças entre os percentuais de acerto nos pré e pós testes para cada um dos sete problemas oriundos dos livros didáticos

Isso demonstra que os sujeitos, mais uma vez, tentaram resolver mesmo correndo o risco de errar. Não há graduação crescente na complexidade da estrutura matemática do problema (a) para o problema (g), como ocorre nas equações e nos problemas propostos no contexto dessa pesquisa. Nota-se através da equação de modelização apresentada no quadro 6, que a estrutura algébrica envolvida nos problemas é a mais simples, correspondendo à estrutura do tipo 1 ($ax + b = c$; $ax = b$; ver quadro 8). Então, o que provavelmente torna o processo de resolução destes problemas difícil, gerando os erros, é a interpretação dos mesmos e respectiva modelização, e não a estrutura algébrica subjacente.

É possível constatar estes aspectos também a partir da análise do procedimento escolhido pelos sujeitos, conforme resumido pelo quadro 13 a seguir. O procedimento algébrico não aparece como forma de resolução dos problemas, que são resolvidos através do procedimento aritmético. A modelização do problema é uma etapa necessária e característica de um procedimento algébrico no seu processo de resolução. Uma vez que a dificuldade de resolução dos problemas do livro didático

usados nesta pesquisa parece residir na modelização, os alunos tentam resolvê-los através do procedimento aritmético que, consequentemente, leva aos erros.

O fato do procedimento algébrico aparecer no problema (a), 35,7 no pós-teste, não é um indicador de que os alunos transferiram o suporte representacional da balança aprendido durante a seqüência para resolver esses problemas do livro didático. Este problema faz referência à balança de dois pratos (conforme pode ser verificado no quadro 11), o que por sua vez sugere o uso desse suporte para tentar resolver algebricamente.

O quadro 13 vem demonstrar o que já foi dito anteriormente na análise do quadro 12: os sujeitos tentaram resolver os problemas, não deixando-os em branco, pois o percentual de *'sem procedimento'* chegou a zero nos problemas (a; b; c; d) e caiu bastante nos outros (e; f; g). Isso mostra que, inicialmente, os alunos não desistiram de resolver.

Problemas	**Freqüência simples de procedimento no pré-teste**			**Freqüência simples de procedimento no pós-teste**		
	Aritmético	**Algébrico**	**Sem proced.**	**Aritmético**	**Algébrico**	**Sem proced.**
a	64,3	7,2	28,5	64,3	35,7	0
b	92,8	0	7,2	100	0	0
c	64,3	0	35,7	100	0	0
d	35,7	0	64,3	100	0	0
e	21,4	0	78,6	57,2	0	42,8
f	42,8	0	57,2	85,7	0	14,3
g	35,7	0	64,3	78,6	0	21,4

Quadro 13: Percentual de freqüência do tipo de procedimento nos problemas do livro, no pré e pós-teste

c) Problemas propostos no contexto da pesquisa com respectivas freqüências simples de respostas e procedimentos:

A seguir, no quadro 14, estão relacionados os problemas propostos no contexto da pesquisa [27] e suas respectivas equações de modelização (ou seja, expressões algébricas que "transcrevem" (cf. Laborde, 1982) o problema da linguagem natural para a linguagem matemática).

Estrutura	Problema proposto no contexto da pesquisa	Equação de modelização
1	Leonardo e Rafael colecionavam o álbum da Copa do Mundo. Leonardo tinha 23 figurinhas e dois pacotes fechados. Rafael tinha 47 figurinhas. Os dois meninos tinham a mesma quantidade de figurinhas na coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de figurinhas, quantas figurinhas tinham em cada pacote?	$2x + 23 = 47$
2	Bárbara e Rita resolveram encher as bolas para enfeitar o aniversário de uma amiga. Bárbara encheu um pacote de bolas pela manhã e três pacotes a tarde. Rita encheu 84 bolas. As duas meninas encheram a mesma quantidade de bolas para a festa. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas tinham em cada pacote?	$x + 3x = 84$
3	Fábio e Fernando eram irmãos e colecionavam bolas de gude. Fábio tinha 69 bolas de gude de seu pai e um pacote de bolas de gude de sua mãe. Fernando ganhou de sua mãe quatro pacotes de bolas de gude iguais ao de Fábio. Os dois irmãos ganharam a mesma quantidade de bolas de gude para a coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas de gude tinham em cada pacote?	$X + 69 = 4x$
4	Bruno e Tiago resolveram dar chicletes às crianças no Dia de São Cosme e Damião. Bruno comprou 49 chicletes soltos e duas caixas de chicletes. Tiago comprou 21 chicletes soltos e quatro caixas de chicletes iguais às de Bruno. Os dois meninos compraram a mesma quantidade de chicletes. Sabendo-se que as caixas tinham a mesma quantidade de chicletes, quantos chicletes tinham em cada caixa?	$2x + 49 = 4x + 21$

[27] Gostaríamos de recordar, como auxílio ao leitor, que tais problemas foram criados para o contexto da pesquisa, diferentemente dos chamados "problemas de livro didático", extraídos de livro didático de uso corrente por ocasião da realização da pesquisa. O leitor poderá recuperar a discussão acerca da diferenciação entre estes dois conjuntos de problemas no capítulo de metodologia, páginas 77 a 83.

5	Dona Zuleide e Dona Rosário eram costureiras de uma boutique. Elas foram numa loja comprar material que estava faltando. Dona Zuleide comprou 56 botões brancos e duas caixas de botões pretos. Dona Rosário comprou 12 botões brancos, duas caixas de botões pretos iguais às de Dona Zuleide e duas caixas de botões azuis. As duas costureiras compraram a mesma quantidade de botões. Sabendo-se que as caixas de botões da mesma cor tinham a mesma quantidade de botões, quantos botões azuis tinham em cada caixa que Dona Rosário comprou?	$2x + 56 = 2x + 2y + 12$
6	Dona Vera e Dona Lia foram na feira comprar frutas. Dona Vera comprou 89 laranjas, dois um sacos de maçãs e dois um sacos de goiabas. Dona Lia comprou 21 laranjas, dois sacos de maçãs iguais ao de Dona Vera e quatro sacos de goiabas também iguais ao de Dona Vera. As duas senhoras compraram a mesma quantidade de frutas. Sabendo-se que os sacos de frutas do mesmo tipo tinham a mesma quantidade de frutas, quantas goiabas tinham em cada?	$2x + 2y + 89 = 2x + 4y + 21$

Quadro 14: Problemas propostos e a sua respectiva modelização em função da estruturas algébrica

No quadro 15 e no quadro 16 a seguir, serão apresentados os percentuais de freqüência de resposta e os percentuais de freqüência de procedimento observado tanto no pré-teste quanto no pós-teste, respectivamente. Esses quadros apresentam dados numéricos que não indicam mudanças positivas do pós-teste em relação ao pré-teste. Por exemplo, o percentual de *'não fez'* (ver quadro 15) só cai um pouco nos problemas 5 e 6, aumentando um pouco o percentual de acerto no problema 5 (de 21,4 para 28,6), e deixando de ser zero para ser 21,4 o percentual de acerto no problema 6 (ver quadro 15). Entretanto nos outros problemas (1; 2; 3; 4), como se pode observar também no quadro 15, aumentam o percentual de 'não fez', diminuindo o percentual de acertos e erros.

Esses problemas merecem uma análise qualitativa que ajude na compreensão desses valores numéricos. Eles eram os últimos da lista de problemas entregue aos alunos para resolverem, como o tempo era definido (o tempo de duração da aula de matemática), o que parece ter acontecido foi que não deu tempo de resolvê-los, uma

vez que os sujeitos tentaram mais do que deixaram em branco as equações e os problemas do livro. Os alunos iam seguindo a lista, e quando chegavam nesses problemas o tempo não era suficiente, o que os levou a deixar os problemas em branco (não fez / sem procedimento)[28]. O que ocorre com o problema 1 parece ilustrar esta inferência, veja: no pré-teste o seu percentual de acerto foi de 100%, e no pós-teste o percentual cai a 50%, surgindo 21% de erro e 28;6% de 'não fez'.

Problemas	Freqüência percentual de resposta no pré-teste			Freqüência percentual de resposta no pós-teste		
	Acerto	Erro	Não Fez	Acerto	Erro	Não Fez
1	100	0	0	50	21,4	28,6
2	78,6	21,4	0	71,4	7,2	21,4
3	35,7	42,9	21,4	28,6	21,4	50
4	35,7	35,7	28,6	28,6	28,6	42,8
5	21,4	21,4	57,2	28,6	28,6	42,8
6	0	42,8	57,2	21,4	28,6	50

Quadro 15: Percentual de freqüência do tipo de resposta nos problemas propostos, no pré e pós-teste

O quadro 16 a seguir, apresenta dados numéricos interessantes. O procedimento algébrico aparece nos problemas 1, 2 e 3 no pré-teste, e não aparece no pós-teste. Como é de se esperar no pós-teste, por causa da estrutura algébrica envolvida no problema, o procedimento algébrico surge nos problemas 4 e 5. No que se refere ao problema 6, o procedimento algébrico aparece nas duas etapas.

Os valores numéricos 7,1 e 14,3 (que aparecem no quadro 11 em questão) indicam que se trata de um sujeito e dois sujeitos respectivamente. Parece que sujeitos que apresentaram características interessantes no processo de resolução contribuíram para essa distribuição percentual. Alguns deles serão alvo de uma

[28] Como já foi explicitado anteriormente nos quadros 6 e 7, o tipo de resposta 'não fez' é acompanhada pelo tipo de procedimento 'sem procedimento'.

análise clínica individualizada na seção 2.2 desta análise. De qualquer forma, o procedimento algébrico não apareceu no pós-teste como era de se esperar. Parece que em virtude do aumento do percentual de *'não fez'* e não em virtude do aumento do percentual de procedimento aritmético.

Problemas	**Freqüência percentual de procedimento no pré-teste**			**Freqüência percentual de procedimento no pós-teste**		
	Aritmético	**Algébrico**	**Sem proced.**	**Aritmético**	**Algébrico**	**Sem proced.**
1	92,8	7,2	0	71,4	0	28,6
2	92,8	7,2	0	78,6	0	21,4
3	64,3	14,3	21,4	50	0	50
4	71,4	0	28,6	50	14,3	35,7
5	42,8	0	57,2	57,2	7,1	35,7
6	35,7	7,1	57,2	50	7,2	42,8

Quadro 16: Percentual de freqüência do tipo de resposta nos problemas propostos, no pré e pós-teste

Além desse levantamento das freqüências simples das repostas dos sujeitos, o estudo contou com a análise multidimensional, que será explicitada no próximo tópico. Nesta análise os sujeitos e as respectivas modalidades de variáveis (as categorias de respostas dos sujeitos na resolução dos problemas) são distribuídos no plano fatorial, distribuições estas que busca-se interpretar.

2.1. Análise Multidimensional Fatorial

A partir das mesmas categorias de análise usadas para as análises frequenciais simples reportadas nas seções anteriores, foram realizadas análises multidimensionais de tipo fatorial (análise fatorial de correspondências - AFC).Tal análise alimentou-se portanto das categorias de respostas dos sujeitos para os problemas referentes às equações, problemas do livro didático e problemas do contexto de pesquisa. Tal análise se limitou à interpretação dos três primeiros fatores de maior poder de resumo da informação (fatores 1 a 3, que são aqueles com maior percentagem de participação na variância explicada – cf. Fenelon, 1981), em termos de distribuição no plano fatorial de modalidades de variáveis e sujeitos. Para a leitura dos planos que se seguem, o leitor deverá considerar as seguintes convenções:

- Planos fatoriais dos sujeitos: **I** indica indivíduo; o número que se segue é um identificador do sujeito; sujeitos em azul são aqueles cuja localização no plano se projeta do lado direito do fator 1; sujeitos em vermelho, do lado esquerdo).

  Exemplo: **I9 = sujeito n°. 9**

- Planos fatoriais das modalidades de variáveis:

Letras (1ª)	**Significação**
A	Desempenho do sujeito (acerto/erro) no pré-teste
B	Desempenho do sujeito (acerto/erro) no pós-teste
C	Tipo de procedimento do sujeito no pré-teste
D	Tipo de procedimento do sujeito no pós-teste
(2ª)	
E	Categorização referente às equações
L	Categorização referente aos problemas dos livros didáticos
P	Categorização referente aos problemas propostos pela experimentadora

Números	
(1º)	Identificação do item do teste de avaliação (quando se segue às letras A ou B), item de procedimento nas equações (quando se segue à letra E), de problemas dos livros didáticos (após letra L) e de problemas propostos pela experimentadora (após letra P).
(2º)	Tipo de resposta: - Análise acerto/erro quando se refere a catagorizações iniciadas pelas letras A ou B, conforme convenção estabelecida no quadro 1, pág. ___ . Tipo de procedimento: - Análise de procedimento quando se refere a categorizações iniciadas pelas letras E (equações), L (problemas dos livros didáticos) ou P (problemas propostos pela pesquisadora), conforme convenções estabelecidas no quadro 2, pág. ___ .

• Exemplo:

AE21			
A = Pré-teste	**E =** Equações	**2** (1º. Número) = Item 2	**1** (2º. Número) = Resposta 1 (acerto)

A seguir serão apresentados os planos fatoriais da análise multidimensional fatorial referente às equações e problemas:

a) Planos fatoriais referentes às <u>equações</u>:

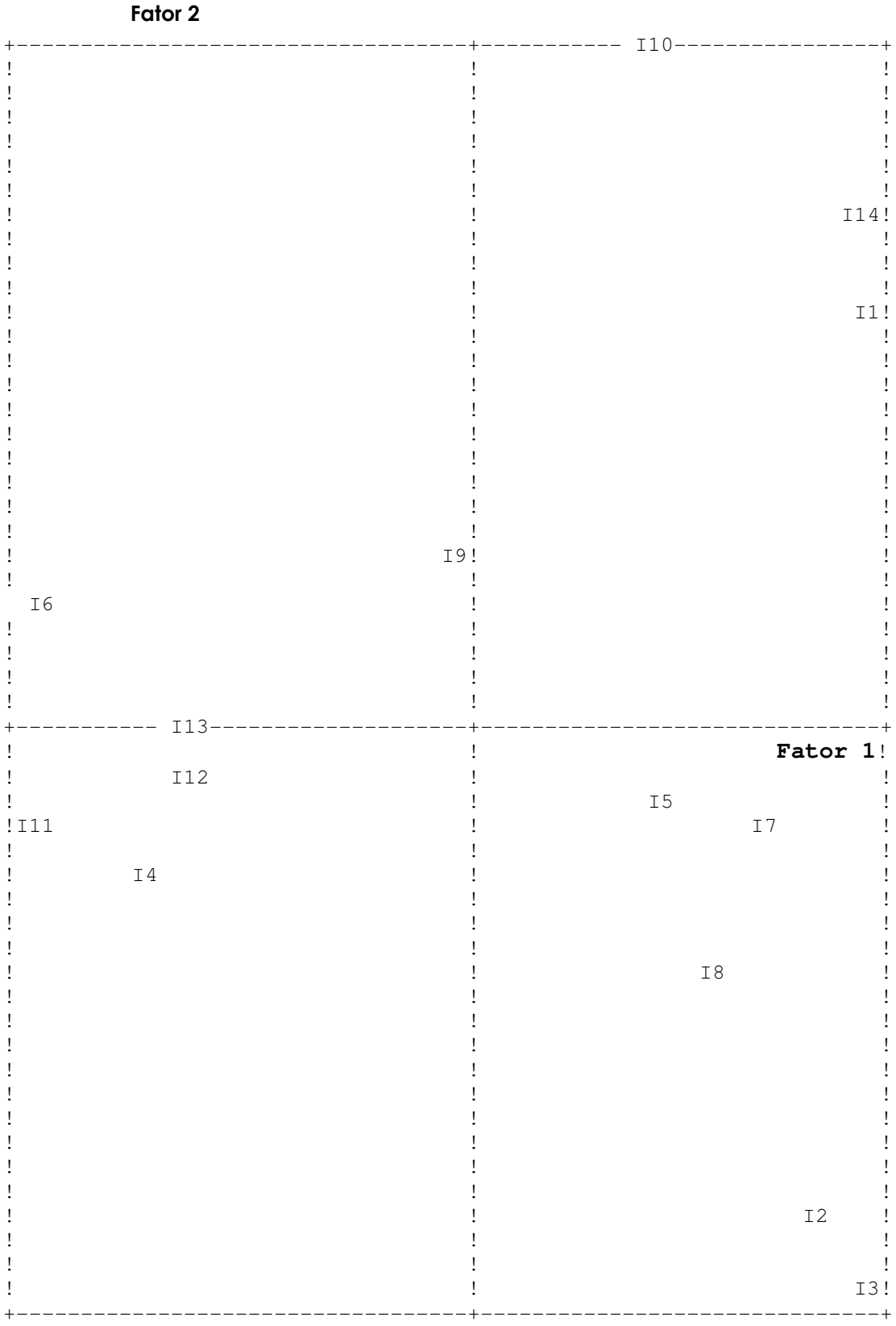


Figura 14: plano fatorial 1_Equações (fatores 1 x 2), distribuição dos sujeitos.

Fator 2

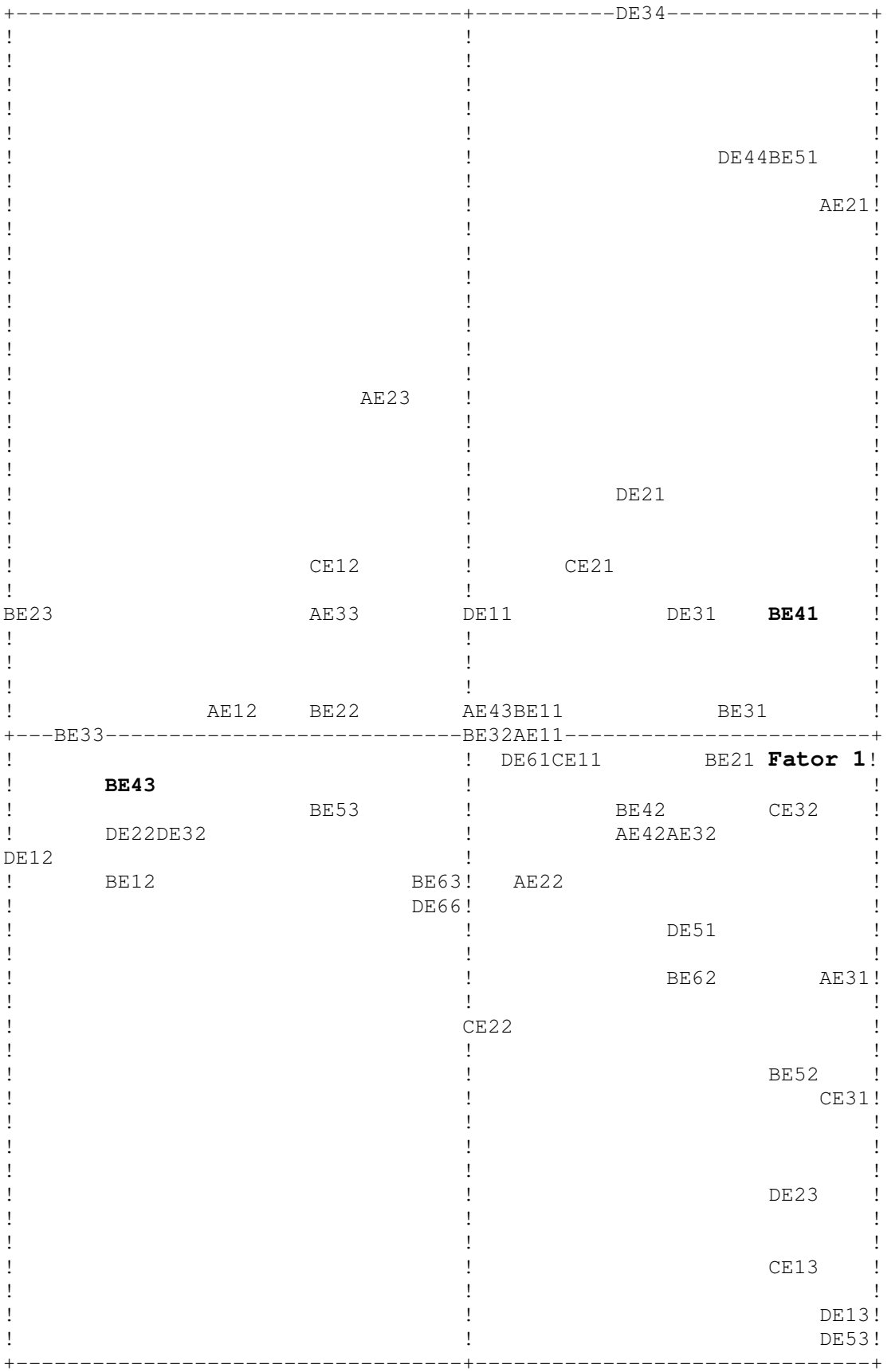


Figura 15 : plano fatorial 2_Equações (fatores 1 x 2), distribuição das modalidades de variáveis.

Pontos superpostos no plano fatorial 2:

Convenção: Está indicada fora dos parênteses a modalidade que está sob aquela que aparece no plano (entre parênteses, à direita, a modalidade que aparece no plano)

BE61(BE51)	DE54(DE44)	DE64(DE44)	DE55(AE21)	DE65(AE21)	CE26(AE23)
CE36(AE33)	DE26(BE23)	DE41(DE31)	CE46(AE43)	DE36(BE33)	DE46(BE43)
DE56(BE53)	CE41(AE42)	CE23(BE62)	DE43(DE23)	DE33(DE13)	

Exemplo : BE61 (BE51) significa : a modalidade BE61, que não aparece no plano fatorial, ocupa o mesmo lugar da modalidade BE51, que aparece no plano (**OBS**: o fato de estarem superpostas indica que tais modalidades têm a mesma contribuição para os fatores do plano).

- **Análise do fator 1 (Equações) :**

A distribuição das modalidades de variáveis, em termos de tensão entre os lados direito e esquerdo do fator 1 (horizontal), no plano fatorial 2 acima, tem como tensão mais saliente:

Fator 1

Lado esquerdo	Lado direito
Sujeitos que erram (BE22) ou não fazem no pós-teste as equações 2 (BE23), 3 (BE33), 4 (BE43, maior contribuição de tipo de resposta a este lado do fator) e 5 (BE53), e consistentemente deixam sem procedimento, no pós-teste, as equações 3 (DE36), 4 (DE46) e 5(DE56).	Sujeitos que acertam no pós-teste as equações 4 (BE41, maior contribuição[29] ao fator neste sub-grupo, grafada em negrito no plano fatorial 2), equação 2 (BE21), equação 3 (BE31, esta também com acerto no pré-teste: AE31), atribuem respostas numéricas no pós-teste às equações 1 a 4 (DE13, DE23, DE33, DE43. (com procedimento 1 também para a equação 3: realização de operação aritmética sem plano aparente),

Dito de forma mais simples, tem-se aqui a oposição entre sujeitos que, no pós-teste, acertam ou tentam encaminhar a resolução do problema através de resposta numérica sem explicitação de cálculo (lado direito), versus sujeitos que, também no pós-teste, erram ou não fazem, deixando os problemas sem qualquer procedimento.

Cabe finalmente ressaltar a equação envolvida numa e noutra tendência do fator a equação 4, cujo acerto no pós-teste apresenta a maior contribuição para o lado

[29] Ver anexo 3 para a clarificação acerca da noção de contribuição (CTR) e média das contribuições.

direito do fator, e cujo abandono sem encaminhamento explícito apresenta a maior contribuição para o lado esquerdo do fator, é justamente a equação que muitos autores consideram como a primeira estrutura efetivamente algébrica: ax + d = cx + d. Dessa forma, pode-se afirmar que o fator 1 separa aqui sujeitos que, no pós-teste, puderam abordar equações algébricas (mesmo que através de caminhos pré-algébricos), versus sujeitos que não conseguiram adquirir ferramentas para abordar tais estruturas. O exame do plano fatorial 1 (distribuição dos sujeitos) mostra que os sujeitos-representantes do sub-grupo de sujeitos do lado direito do fator são: o sujeitos 3 e o sujeito 1. Enquanto que os sujeitos-representantes do lado esquerdo do fator são: o sujeito 11 e o sujeito 4 Portanto, aqueles sujeitos que representam melhor o perfil dos subgrupos a que pertencem, são os sujeitos 3 (lado direito) e 11 (lado esquerdo).

- **Análise do fator 2 (Equações) :**

Na análise desse fator 2, observa-se a tensão apresentada na organização abaixo:

Fator 2	
Lado inferior	**Lado superior**
Há neste lado o erro no pré-teste referente à equação 2 (AE22), erro no pós-teste referente à equação 5 (BE52) e não fez equação 6 (BE63), juntamente com categorias procedimentais do tipo resposta numérica para as equações 1 (DE13), 2 (DE23) e 3 (DE33).	Aparece aqui acerto no pré-teste referente à equação 2 (AE21), no pós-teste, acerto para as equações 5 (BE51) e 6 (BE61), acompanhado do procedimento conta para a equação 2(DE21) e balança para a equação 3 (DE34).
Os sujeitos 10; **14 (Yago)** e **1 (Diva)** são associados a tais modalidades (cf. plano fatorial 1)	Os sujeitos 3 e 2 são associados a tais modalidades (cf. plano fatorial 1).

Em resumo, tem-se aqui a oposição entre sujeitos que se opõem em temos de acertos e erros tanto no pré-teste quanto no pós-teste. Adicionalmente, tem-se, do lado dos que acertam, procedimentos de tipos conta e balança, e do lado dos que erram, procedimentos do tipo resposta numérica. O procedimento balança ocorre na equação 3 , a qual aparece incógnita em ambos os membros da equação, justificando portanto um procedimento do tipo algébrico.

- **Análise do fator 3 (Equações) :**

O fator 3, assim como o fator 2, a tensão entre os sujeitos tanto no pré-teste quanto no pós-teste gira em torno do acerto e do erro. Veja a seguir:

Fator 3

Lado inferior	Lado superior
Os sujeitos (2; 3; 10) usam procedimento conta	Os sujeitos (8; 5; 7) usam o procedimento balança

Os procedimentos balança e conta estão separando os sujeitos no pós-teste. Isto ocorre nas equações 3 (DE34), 4 (DE44), 5(DE54) e 6 (DE64), as equações onde aparecem incógnitas em ambos os membros da equação, justificando portanto um procedimento do tipo algébrico.

Seguem os planos fatoriais (sujeitos e modalidade de variáveis) referentes ao

Fator 3:

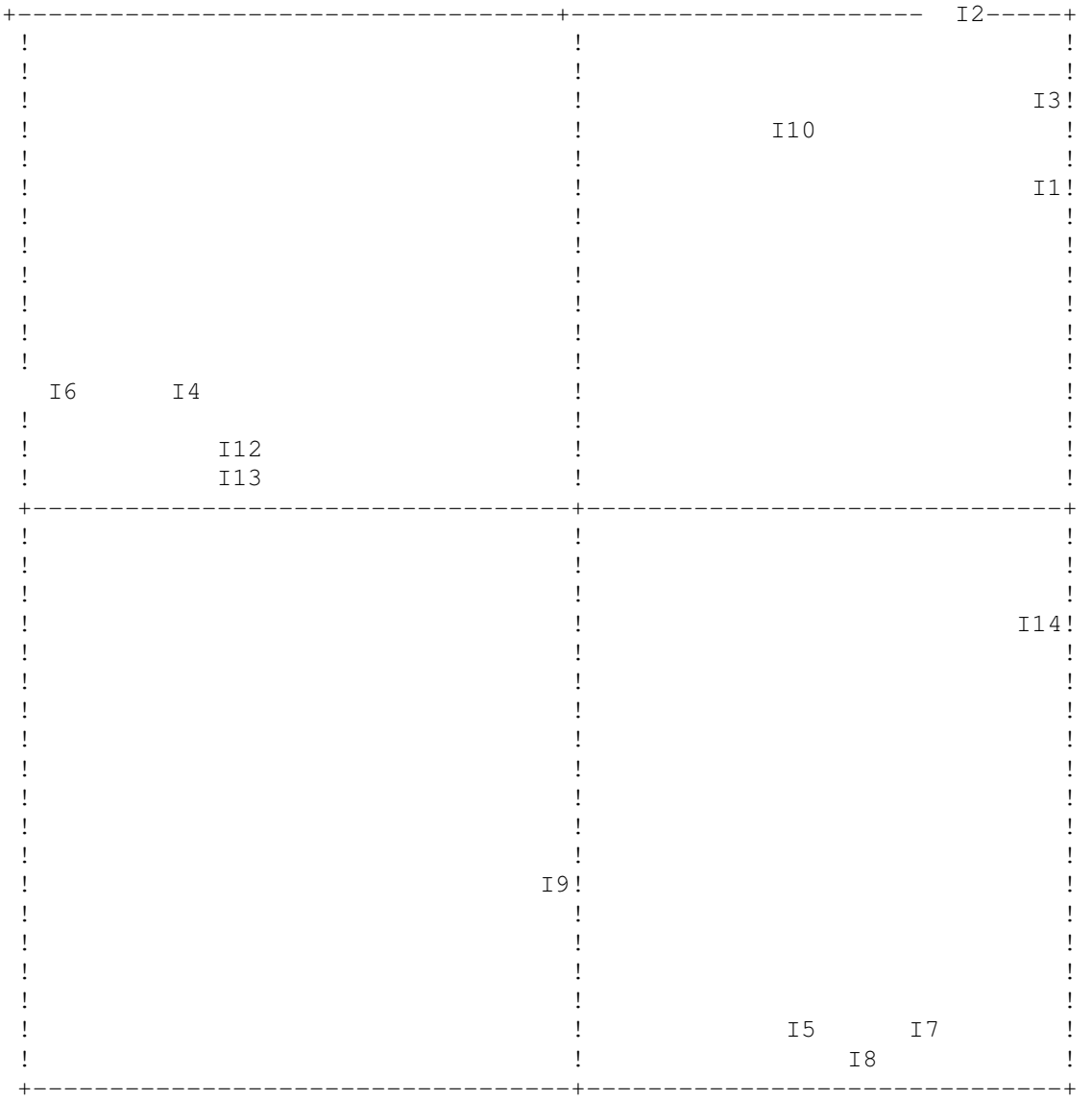


Figura 16 : plano fatorial 3_Equações (fatores 1 x 3), distribuição dos sujeitos.

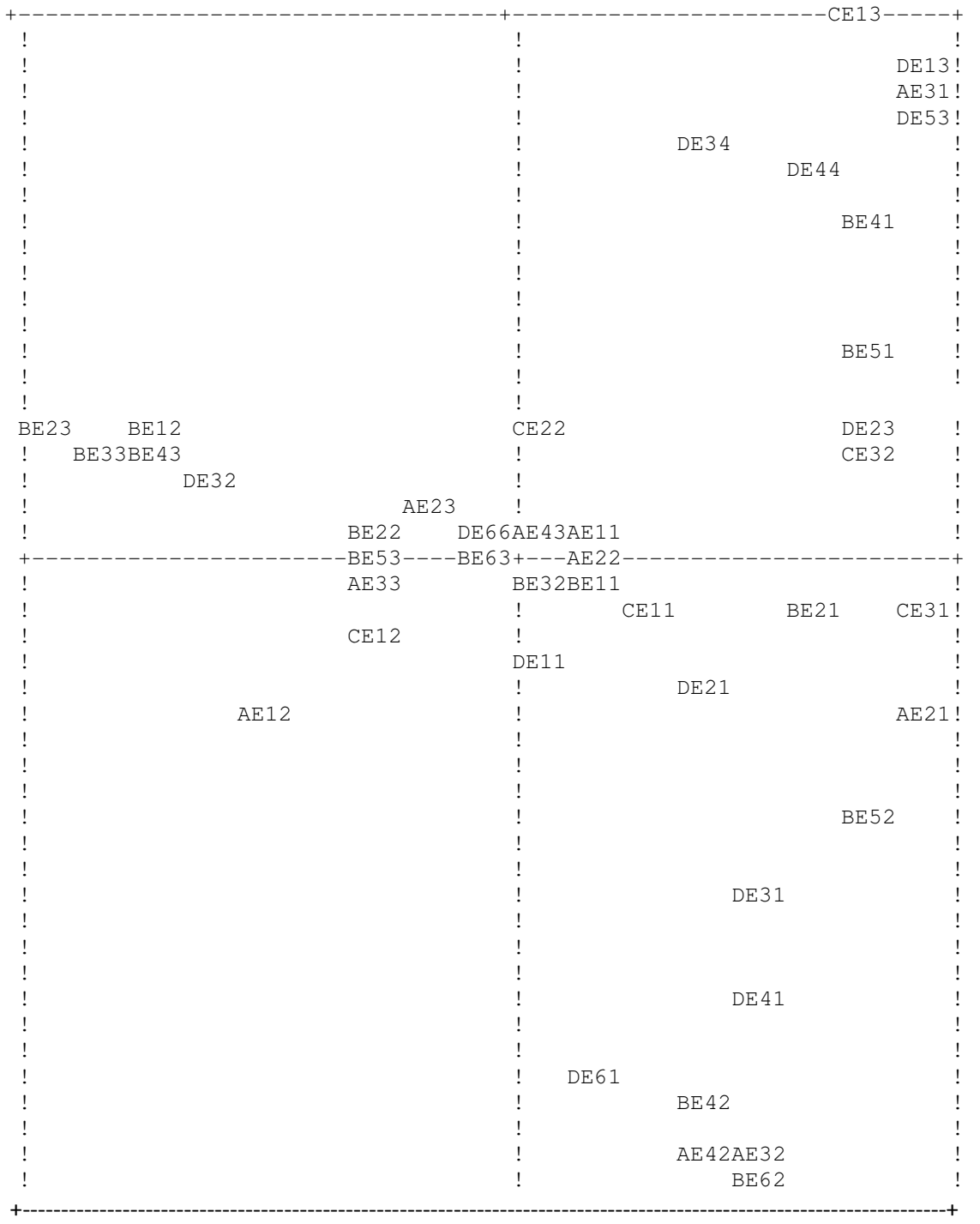


Figura 17 : plano fatorial 4_Equações (fatores 1 x 3), distribuição das modalidades de variáveis.

Pontos superpostos no plano fatorial 4:

Convenção: Está indicada fora dos parênteses a modalidade que está sob aquela que aparece no plano (entre parênteses, à direita, a modalidade que aparece no plano)

DE33(DE13)	DE54(DE44)	DE64(DE44)	BE61(BE51)	DE12(BE23)	DE26(BE23)
DE43(DE23)	DE22(BE43)	DE36(BE33)	DE46(BE43)	CE26(AE23)	CE46(AE43)
DE56(BE53)	CE36(AE33)	BE31(BE21)	CE21(CE11)	DE55(AE21)	DE65(AE21)
CE41(AE42)	DE51(AE32)	CE23(BE62)			

- **Análise envolvendo os três fatores nas equações:**

Diante do exposto, poder-se-ia se interpretar que *os três fatores* parecem indicar que os sujeitos quando resolvem as equações tendem a usar um procedimento aritmético do tipo conta (procedimento onde o cálculo é explicitado) e do tipo resposta numérica (procedimento onde o cálculo não é explicitado), isso tanto no pré-teste quanto no pós-teste, destacando que as contas levam mais a acertos do que as respostas numéricas. Em contrapartida, no pós-teste, para as equações onde aparece incógnita nos dois membros, o procedimento balança é usado e isso parece ser um aspecto que tenciona a separação dos sujeitos pelo fator 3.

a) Planos fatoriais referentes aos problemas do livro didático:

- **Análise do fator 1:**

O fator 1 informa sobre a distribuição dos sujeitos quanto à resolução dos problemas do livro didático no pré-teste. Os sujeitos estão divididos da seguinte forma:

Fator 1

Lado esquerdo	**Lado direito**
Os sujeitos (2;3) tentaram resolver usando o procedimento contas (CL31; CL41), eles ora acertaram (AL81) e ora erraram (AL82).	Os sujeitos (9;11;10) não resolveram os problemas e, portanto, não há procedimento (CL16; CL36) .

Neste caso, o sujeito quando tentam resolver, acertando ou não, usa um procedimento aritmético.

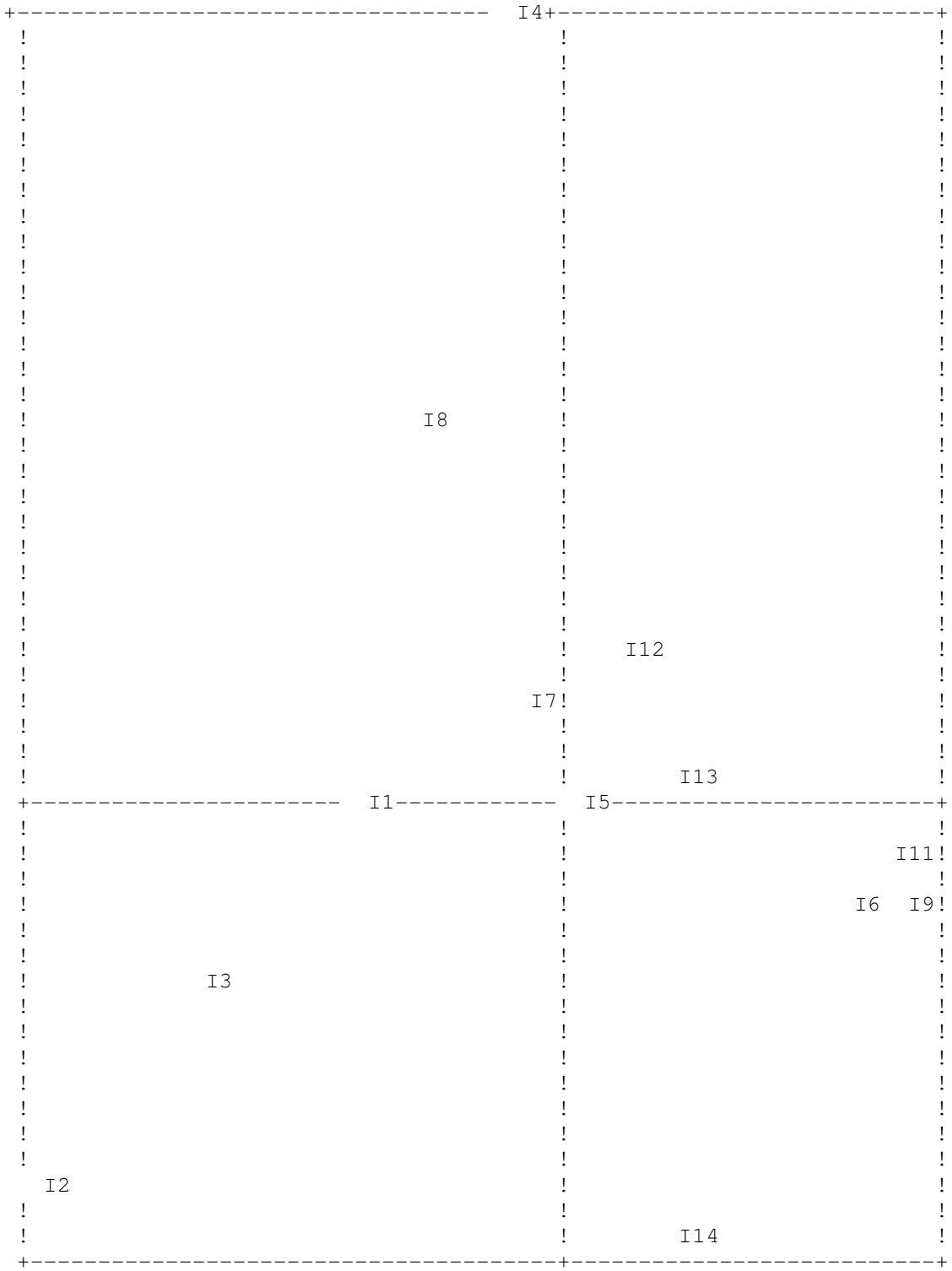


Figura 18 : plano fatorial 5_Problemas_Livros (fatores 1 x 2), distribuição dos indivíduos.

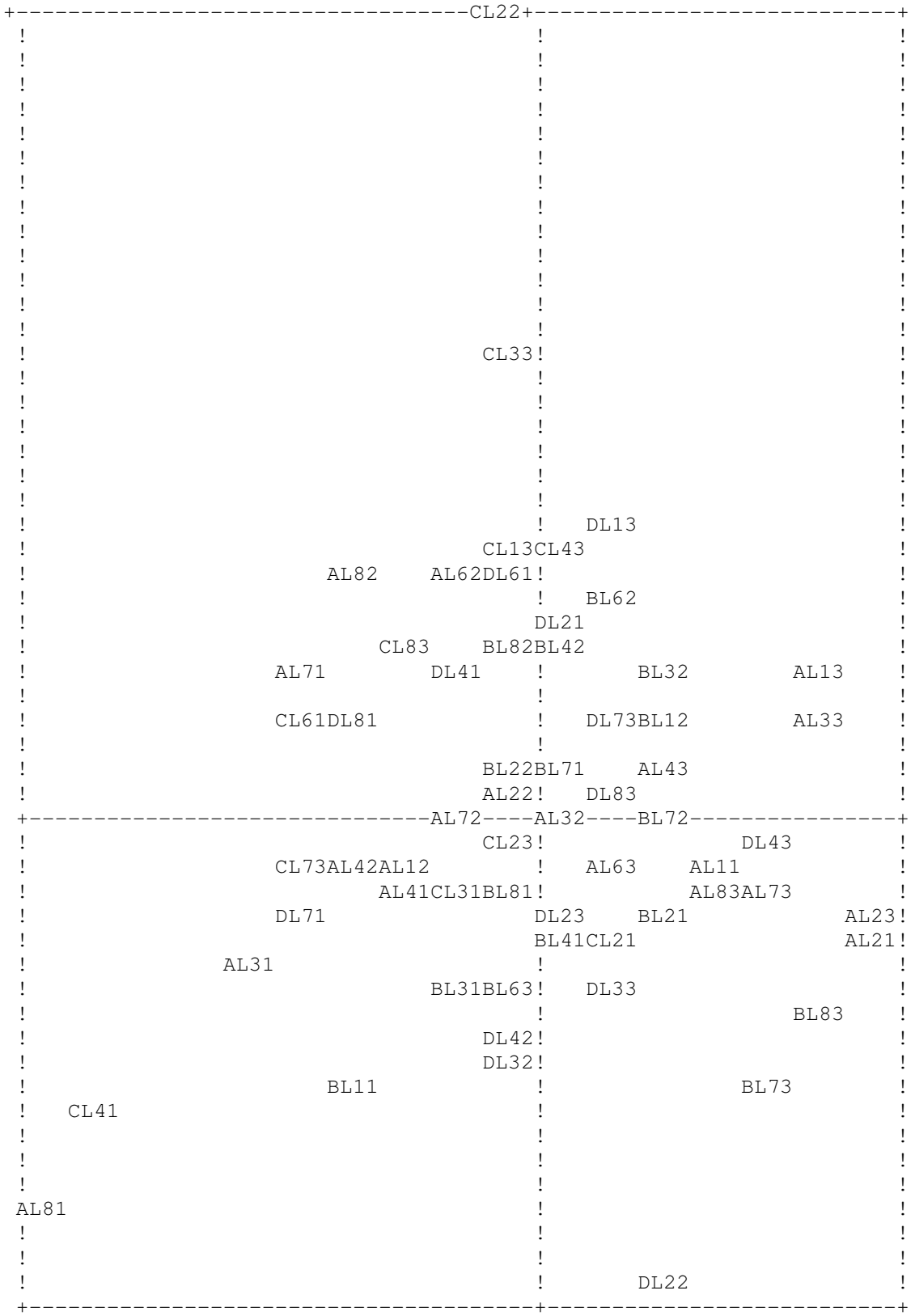


Figura 19 : plano fatorial 6_Problemas_Livros (fatores 1 x 2), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Pontos superpostos :

CL71(CL22) CL82(CL22) CL63(CL33) DL31(DL21) CL46(AL11) DL14(AL11)
CL11(BL81) CL76(AL73) CL86(AL83) CL16(AL23) CL26(AL23) CL36(AL23)
CL66(BL21) DL63(AL23) BL61(AL21) DL11(CL21) DL86(BL83) DL66(DL42)
DL76(BL73) CL81(CL41) CL14(AL81) DL15(AL81)

- **Análise do fator 2:**

O fator 2 informa sobre os sujeitos quanto à resolução dos problemas no pós-teste. A análise deste fator permite localizar sujeitos representativos da contribuição para esta divisão (ou seja, aqueles com maior contribuição para o fator). São eles[30]: Yago e Diva.

Fator 2

Lado inferior	Lado superior
Os sujeitos representativos daqueles que acertaram; esses sujeitos são Yago (14) e Diva (1).	Os sujeitos representativo daqueles que erraram; esses sujeitos são Ana (4) e Beto (8).

Quanto ao procedimento, observam-se os seguintes aspectos: contas (DL71) , atribuindo valores (DL22) , resposta numérica (DL33), todos os procedimentos são aritméticos.

- **Análise do fator 3:**

O fator 3 parece sugerir que sujeitos tanto no pré-teste quanto no pós-teste estão sendo divididos em termos do tipo de procedimento aritmético usado na resolução dos problemas do livro didático (ver planos fatoriais 20 e 21 às páginas seguintes).

[30] **Os nomes citados dos sujeitos da pesquisa são fictícios.**

Fator 3	
Lado inferior	**Lado superior**
Predomina <u>resposta numérica</u> (o cálculo não é explicitado) como o tipo de procedimento de maior contribuição ((DL33).	Predomina o tipo de procedimento <u>conta</u> (o cálculo é explicitado) para a resolução dos problemas (CL21;DL11 – maior contribuição). O sujeito (14) Yago aparece marcadamente do lado do procedimento <u>conta</u>.

Este fator 3, também continua apresentando a tensão em torno do procedimento aritmético para a resolução dos problemas dos livros didáticos. Também surge, com forte contribuição do ao lado do tipo de procedimento <u>contas</u>, a resposta <u>não fez</u> acompanhada de <u>sem procedimento</u> (CL16).

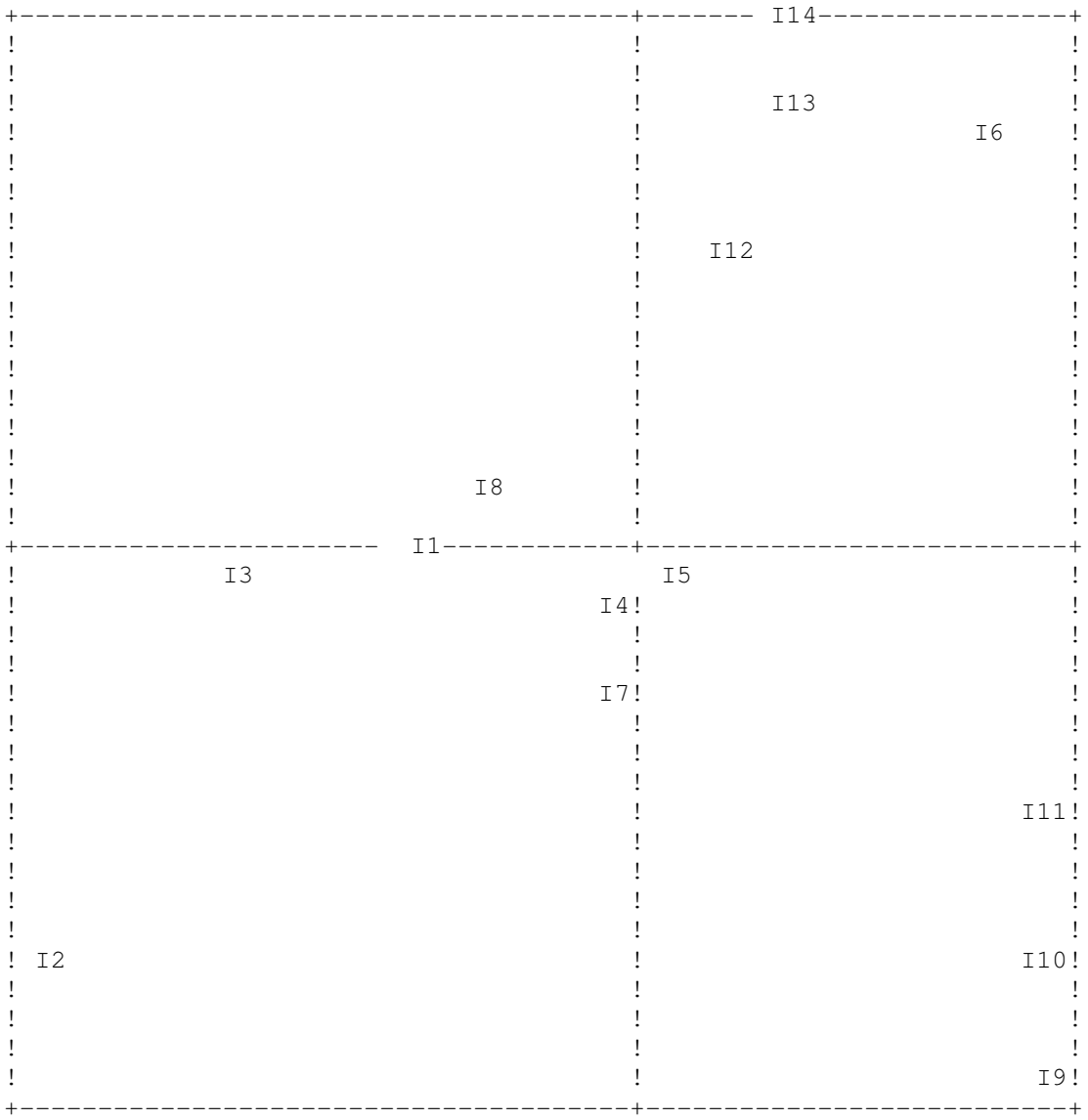


Figura 20 : plano fatorial 7_Problemas_Livros (fatores 1 x 3), distribuição dos indivíduos.

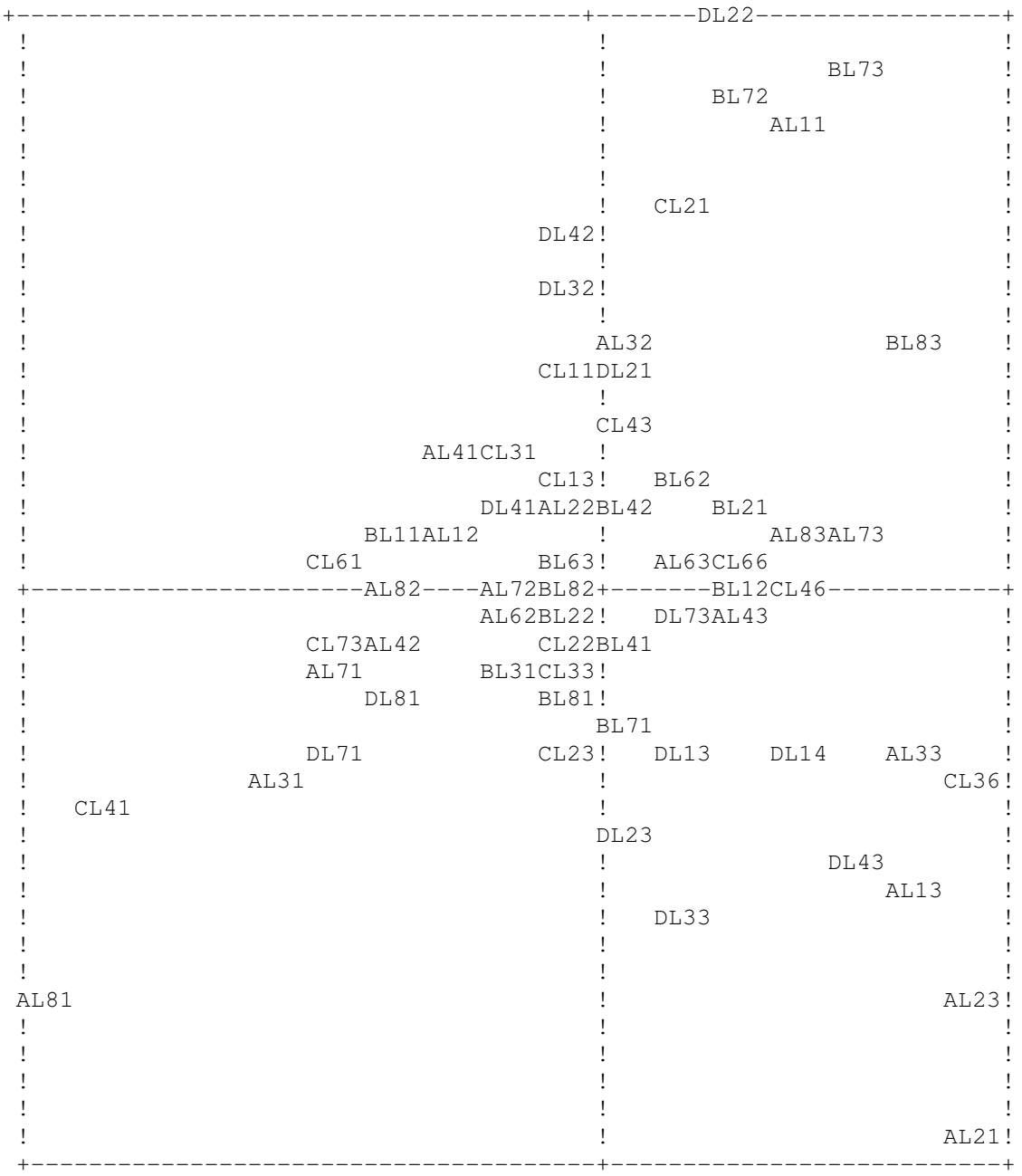


Figura 21 : plano fatorial 8_Problemas_Livros (fatores 1 x 3), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Pontos superpostos :

DL76(BL73) DL11(CL21) DL86(BL83) DL31(CL43) DL61(CL13) BL32(BL21) CL76(AL73) CL83(AL12) CL86(AL83) DL66(BL63) DL83(DL73) CL71(CL22) CL82(CL22) CL63(CL33) CL81(CL41) CL14(AL81) CL16(AL23) CL26(AL23) DL15(AL81) DL63(AL23) BL61(AL21)

- **Análise envolvendo dos três fatores nos problemas do livro didático:**

Analisando conjuntamente *os três fatores*, é possível perceber que na resolução dos problemas do livro didático ora os sujeitos acertavam e ora erravam, tanto no pré-teste quanto no pós-teste. Mas, na tentativa de resolver, eles usaram os procedimentos aritméticos (contas, atribuição de valores e resposta numérica). Nesta análise, o sujeito Yago se destacou, uma vez que o seu protocolo de resposta dos problemas é marcado por uma intensa produção aritmética (muitas contas) para conseguir resolver os problemas propostos. O procedimento algébrico não aparece contribuindo para separar os sujeitos em torno dos três fatores referentes à análise das respostas aos problemas propostos nos livros didáticos. Então os sujeitos quando tentam resolvê-los fazem contas, dão respostas numéricas, ou seja, usam o procedimento aritmético e não o procedimento algébrico.

b) Planos fatoriais referentes aos problemas propostos no contexto de pesquisa:

- **Análise do fator 1:**

Analisando o fator 1 nos planos fatorias 22 e 23 às páginas seguintes, observa-se que a tensão entre os sujeitos está sendo marcada pela oposição de dois sujeitos da pesquisa, Yago (14) e Diva (1), em todos os problemas no pós-teste.

Fator 1

Lado esquerdo	Lado direito
Todos os problemas que marcam este fator não foram resolvidos (não fez; BP13; BP23 BP33; BP43; BP53; BP63) e, consequentemente, aparecem sem procedimento (DP16; DP26; DP36; DP46; DP56; DP6). O sujeito representante desta distribuição é Yago (14).	Em contrapartida, todos os problemas são resolvidos. O procedimento de maior contribuição é o aritmético resposta numérica (CP33) ao lado de outros como atribuição de valores (CP52; CP62; DP42; DP62), mas aparece o procedimento algébrico balança nos problemas 4 (DP44); 5 (DP54 e 6 (DP64). O sujeito representante desta distribuição é Diva (1)
Este fator separa de um lado os problema que não foram resolvidos e portanto sem procedimento, e do outro lado os problemas resolvidos, seja usando o procedimento aritmético ou algébrico.	

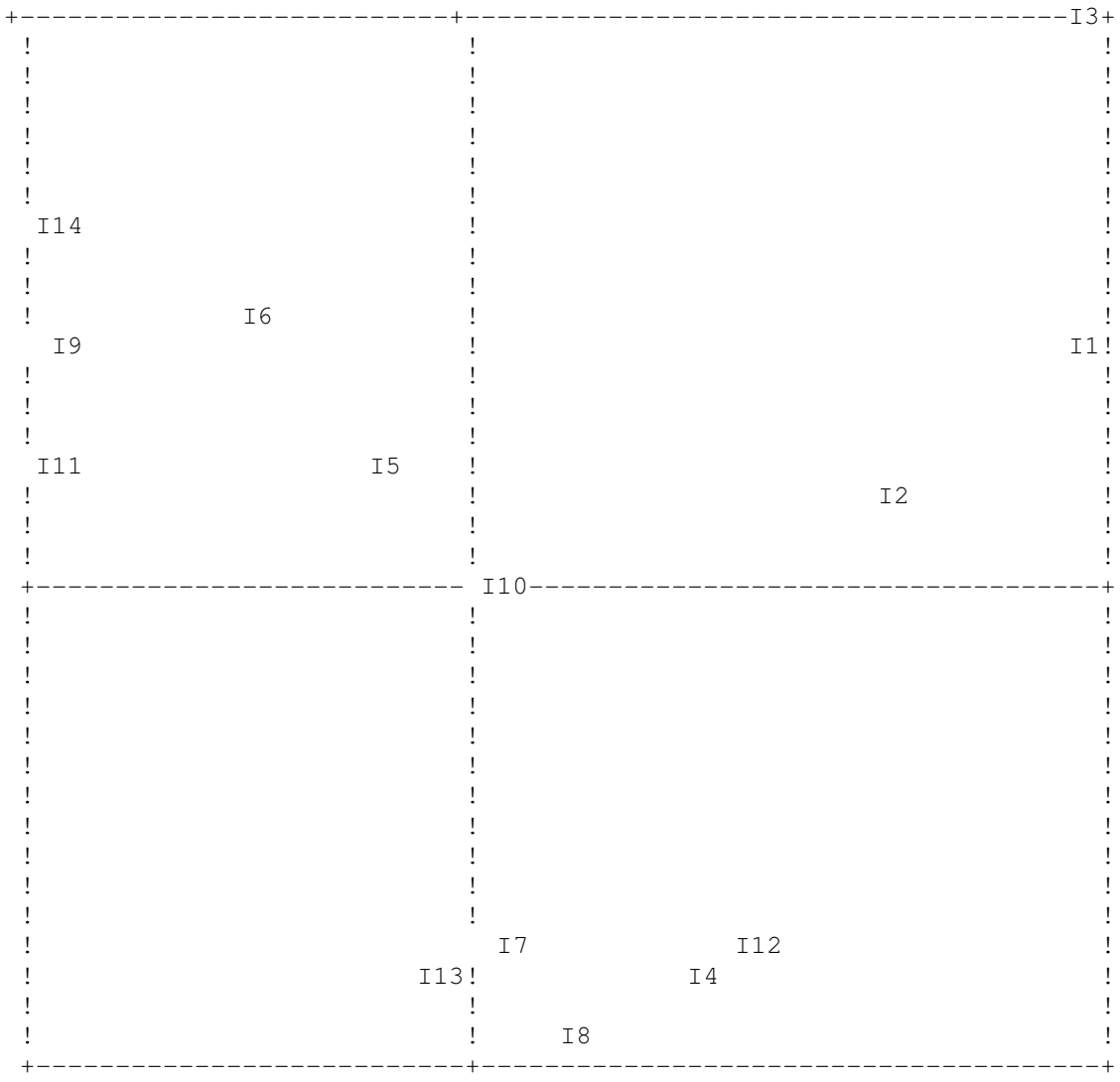


Figura 22 : plano fatorial 9_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 2), distribuição dos indivíduos.

- **Análise do fator 2:**

Neste fator 2 a tensão entre os dois sujeitos Yago e Diva volta a aparecer, só que agora eles estão do mesmo lado, tanto no pré-teste quanto no pós-teste.

Fator 2	
Lado inferior	**Lado superior**
Os sujeitos Yago (14) e Diva (1) estão juntos do lado onde aparece o acerto com procedimento aritmético atribuindo valores (CP52; CP62; DP52; DP62 – as maiores contribuições).	Os sujeitos Beto (8) e Ana (4) estão junto do lado onde aparece o erro (BP32; BP42;BP52) com procedimento aritmético contas (CP41; DP41 – maiores contribuições).

Esses sujeitos estão distribuídos da mesma forma que o plano fatorial do fator 2 dos livros didáticos: Yago e Diva juntos do lado do acerto, Beto e Ana juntos do lado do erro.

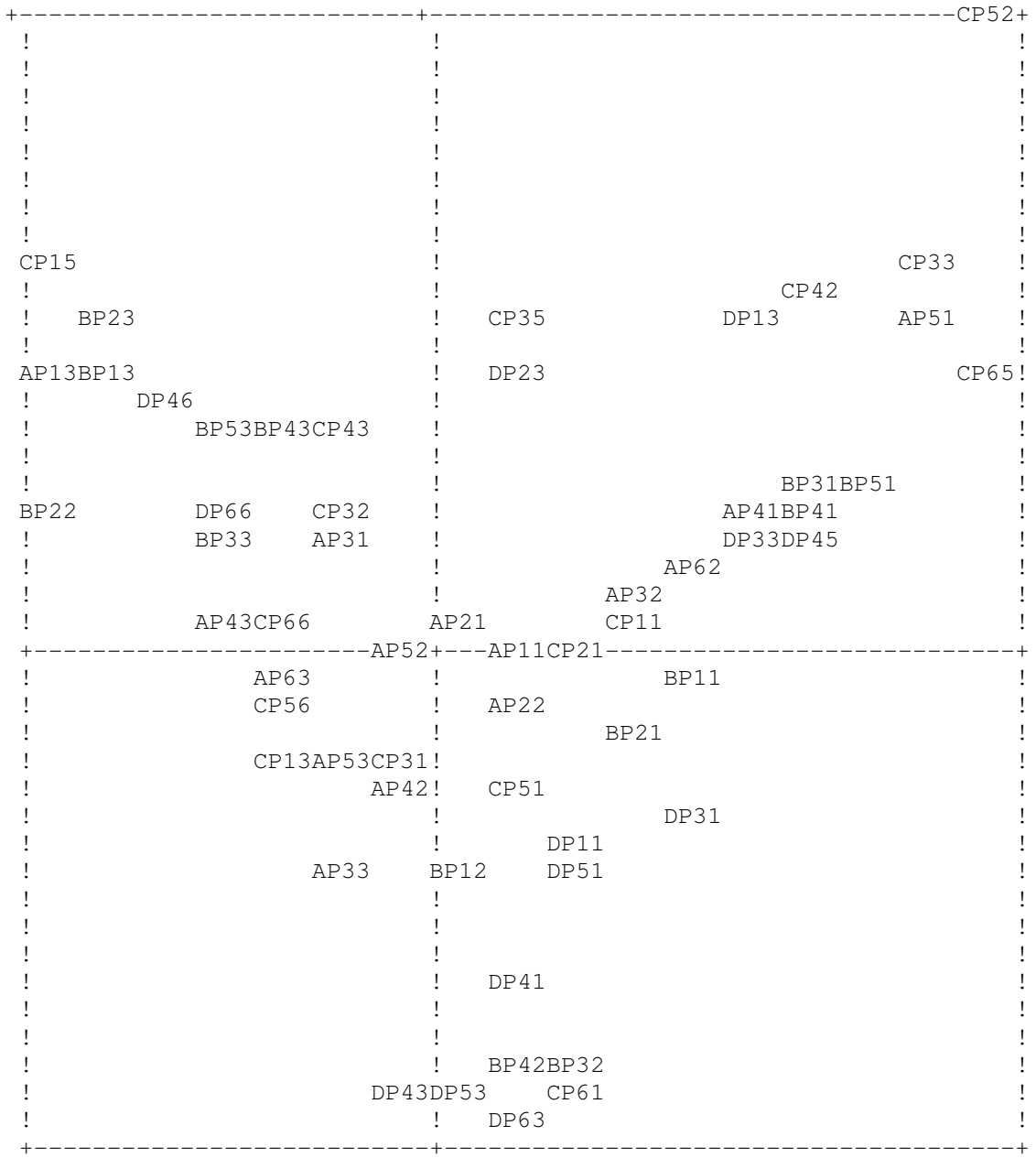


Figura 23 : plano fatorial 10_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 2), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Pontos superpostos :

CP62(CP52) DP42(CP52) DP52(CP52) DP62(CP52) CP25(CP15) BP61(AP51) DP26(BP23) DP16(BP13) DP44(CP65) DP54(CP65) DP64(CP65) DP56(DP46) BP63(BP33) DP36(BP33) CP53(AP32) CP46(AP43) CP63(CP21) CP23(CP13) DP21(DP11) CP36(AP33) DP61(DP51) BP52(BP42) BP62(BP32) CP41(BP32)

- **Análise do fator 3:**

Neste fator (planos fatoriais 24 e 25 às páginas seguintes) aparece de forma relevante a divisão dos sujeitos em termos de procedimento aritmético e procedimento algébrico no pós-teste. Do lado do procedimento algébrico encontra-se Diva (sujeito de maior contribuição – 192) e do outro, lado do procedimento aritmético, encontra-se Tais (sujeito de maior contribuição – 322).

Fator 3

Lado inferior	Lado superior
O procedimento algébrico balança nos problemas 4 (DP44); 5 (DP54) e 6 (DP64); Diva fez uso do procedimento algébrico (balança) nos problemas que são modelizados por uma equação onde aparecem incógnitas nos dois lados da equação	O procedimento aritmético resposta numérica aparece nos problemas (DP13; DP23; DP43) e atribuindo valores aparece nos problemas (DP42; DP52;DP62); Já Taís fez uso do procedimento aritmético em todos os problemas, sejam naqueles onde a incógnita aparece apenas em um membro da equação, como naqueles onde aparece nos dois membros.

A tensão neste fator foi entre os sujeitos Diva e Taís. As duas resolveram e acertaram todos os problemas tanto no pré-teste quanto no pós-teste, o que diferenciou foi o procedimento usado.

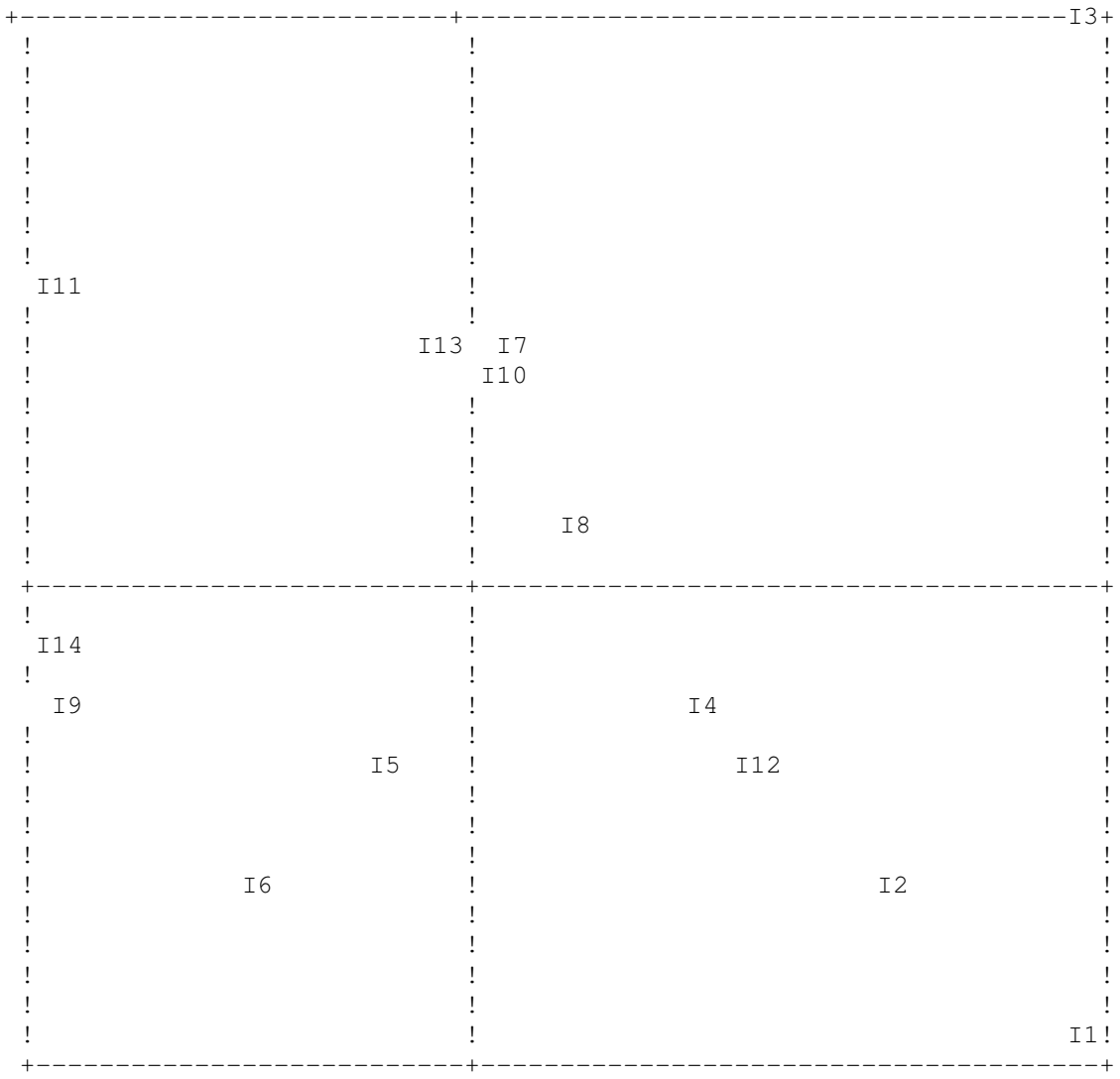


Figura 24: plano fatorial 11_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 3), distribuição dos indivíduos.

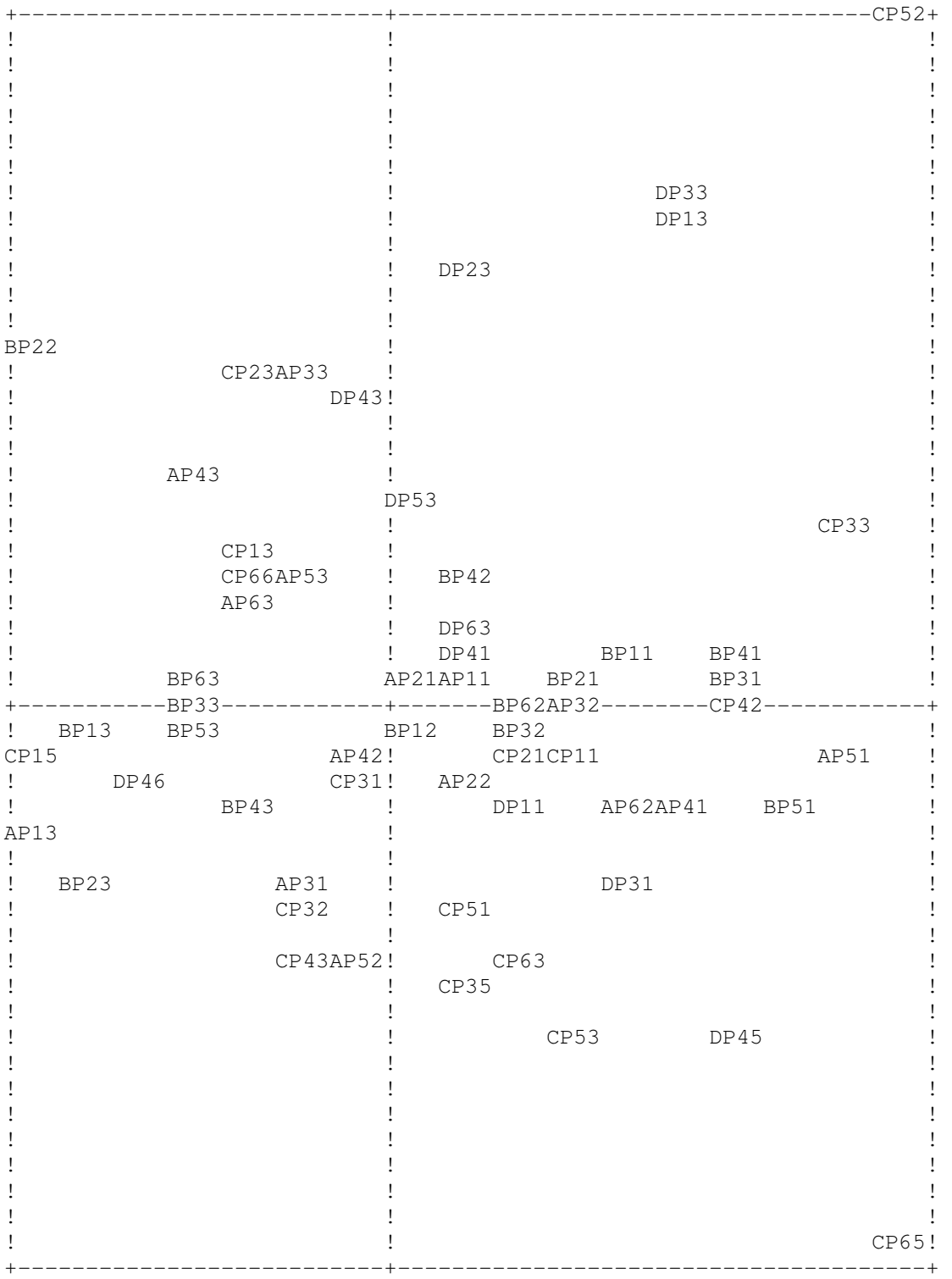


Figura 25 : plano fatorial 12_Problemas_Pesquisa (fatores 1 x 3), distribuição das modalidades de categorias de respostas.

Pontos superpostos :

CP62(CP52) DP42(CP52) DP52(CP52) DP62(CP52) CP36(AP33) CP46(AP43)
CP56(CP13) BP52(BP42) CP41(BP62) DP36(BP33) DP66(BP33) DP16(BP13)
DP51(BP32) DP61(BP32) BP61(AP51) CP25(CP15) CP61(CP21) DP56(DP46)
DP21(DP11) DP26(BP23) DP44(CP65) DP54(CP65) DP64(CP65)

- **Análise envolvendo os três fatores nos problemas propostos no contexto da pesquisa:**

Analisando os três fatores observa-se aparecimento do uso do procedimento algébrico na resolução dos problemas pelos sujeitos da pesquisa, sendo o elemento responsável pela tensão entre eles. Estes problemas parecem ter levado alguns sujeitos a fazerem uso do procedimento algébrico, modelizando-os através da metáfora da balança, ao mesmo tempo em que levaram outros sujeitos a resolverem através de contas (procedimento aritmético).

Juntando as três análises: das equações, dos problemas do livro didático e dos problemas propostos no contexto da pesquisa.

A análise multifatorial possibilita olhar para as produções dos sujeitos e perceber que uma variável importante no agrupamento e separação dos sujeitos é o tipo de procedimento para resolver as diferentes situações de resolução de problemas que o contexto da pesquisa propõe. As equações e os problemas propostos no contexto da pesquisa, diferentemente dos problemas do livro didático, apontam para o uso do procedimento algébrico balança no pós-teste, principalmente nas situações-problema onde a estrutura algébrica apresenta incógnitas nos dois membros da igualdade (estruturas 3, 4, 5 e 6). As equações já sugerem um procedimento algébrico e os problemas são formulados com o propósito de enfatizar a igualdade entre quantidades relacionadas a duas pessoas, dando pistas para uma modelização em termos algébricos. Não são todos, nem a maioria dos sujeitos que usam esse procedimento pra resolver as situações-problema, mas os que usam o fazem com propriedade, demonstrando que esta foi uma aquisição feita durante a seqüência didática proposta no contexto da pesquisa, uma vez que eles não mostram tal procedimento de resolução no pré-teste. O procedimento algébrico foi observado tanto

no pré-teste (ou pós-teste) quanto nos diálogos na sala de aula durante a realização das atividades propostas pela seqüência didática.

A análise das produções dos sujeitos referentes à formulação dos problemas oriundos dos livros didáticos não sugere inicialmente um *procedimento algébrico*, e sim um *procedimento aritmético* do tipo contas (muitas contas), atribuição de valores e contas posteriores para verificar se a resposta encontrada está correta, respostas numéricas sem explicitação dos cálculos. Para "atacar" esses problemas de forma algébrica faz-se necessário que o professor na sua prática didática promova uma discussão com os alunos sobre a natureza algébrica subjacente a esses problemas e ensine como usar um procedimento algébrico. Caso contrário, é natural que os alunos "ataquem" esses problemas com um procedimento aritmético. Um aspecto importante desta análise é que ela aponta para a necessidade de analisar clinicamente a forma de resolução de alguns sujeitos que foram determinantes em termos de contribuições aos fatores principais dos planos analisados. É o caso dos sujeitos Yago e Diva (já comentados anteriormente). Diva pelo uso marcado do procedimento algébrico balança e Yago pela intensa produção aritmética (muitas contas) para conseguir resolver as equações e problemas.

2.2. Análise clínica

Como foi dito anteriormente, a análise multidimensional apontou sujeitos representativos de determinados perfis de procedimento, cuja análise clínica individual poderia trazer informações adicionais relevantes. Os sujeitos objetos dessa análise serão Yago e Diva. Yago por ter apresentado uma atitude bem determinada para conseguir resolver os problemas propostos, realizando para tal várias contas, demonstrando o seu desempenho aritmético. Esta intensa produção impossibilitou que Yago concluísse a resolução dos problemas em função do tempo ter-se esgotado[31], deixando assim vários problemas em branco. O outro sujeito, Dora, foi escolhido em virtude da transferência que fez dos conceitos e procedimentos trabalhados durante a seqüência didática para o momento do pós-teste. Ela resolveu as equações e os problemas que apresentavam a estrutura algébrica 4, 5 e 6 (incógnitas nos dois membros da igualdade) usando o procedimento algébrico balança.

Caso 1: Yago[32]

No pré-teste Yago resolve as duas primeiras equações (2x + 22 = 68 ; 4x + x = 55), realizando várias contas, conforme pode ser observado a seguir no extrato de protocolo.

[31] As sessões de resolução de problema não tiveram o tempo controlado por determinação interna à pesquisa, e sim por determinações referentes ao funcionamento da escola.
[32] Os identificadores desse e demais sujeitos citados neste capítulo são fictícios.

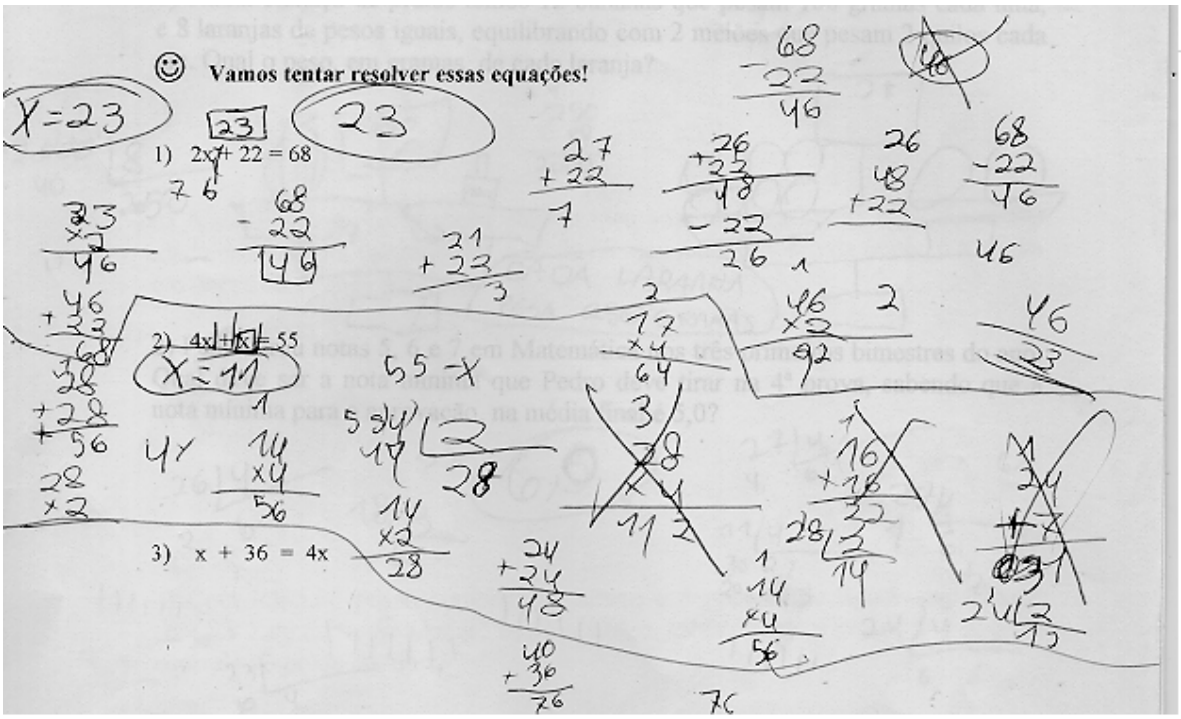
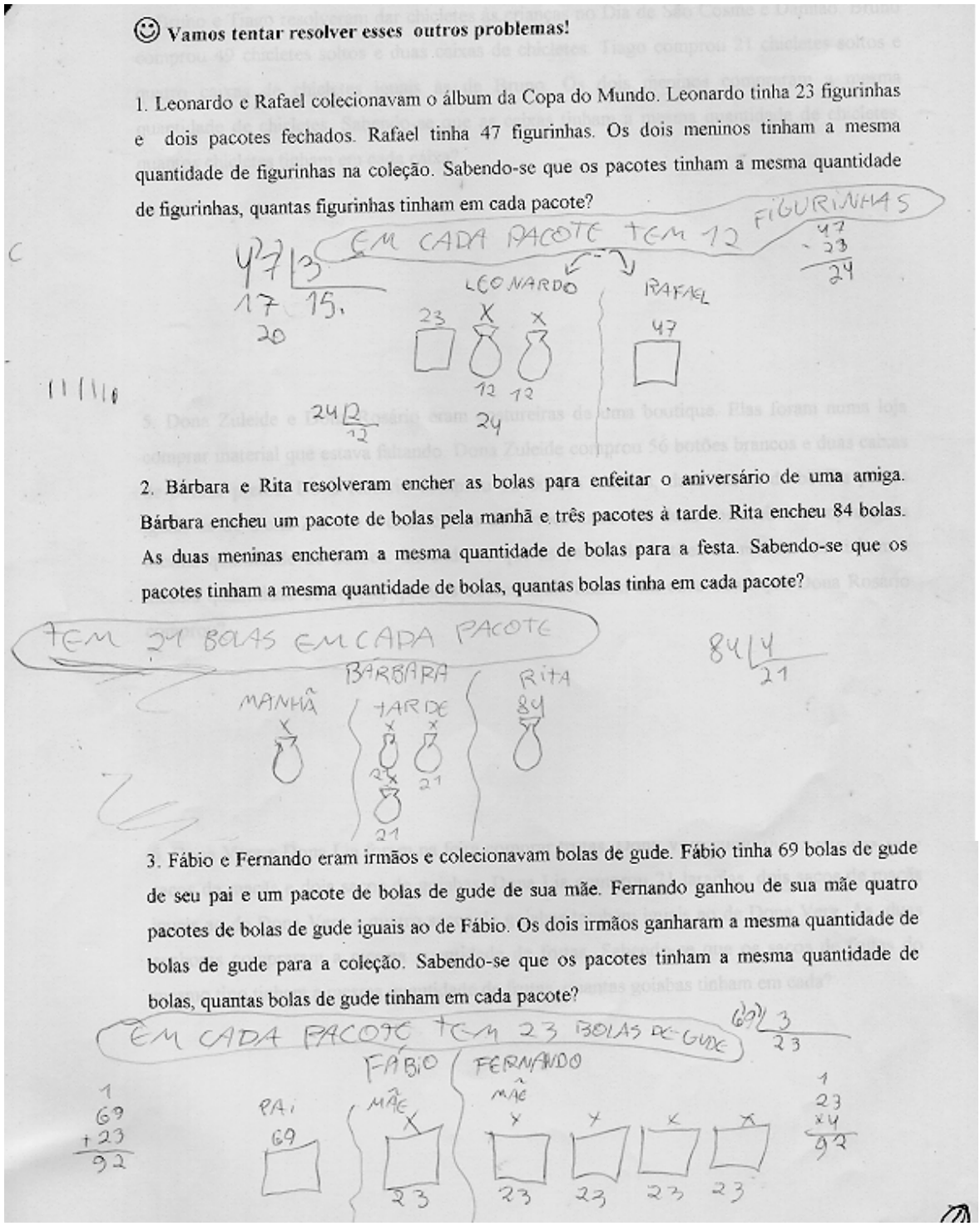


Ilustração 1: reprodução de trecho do protocolo escrito de Yago, pré-teste, equação 1 e equação 2

Em relação aos problemas do livro ele tenta resolver os três primeiros, também fazendo contas diversas sem a modelização dos problemas antes, mas não consegue. Nos problemas propostos no contexto da pesquisa, Yago modeliza usando desenhos (ver extrato do protocolo a seguir) os três primeiros problemas e consegue resolvê-los. O tempo acabou e Yago não pode continuar a resolução dos outros três problemas.



☺ **Vamos tentar resolver esses outros problemas!**

1. Leonardo e Rafael colecionavam o álbum da Copa do Mundo. Leonardo tinha 23 figurinhas e dois pacotes fechados. Rafael tinha 47 figurinhas. Os dois meninos tinham a mesma quantidade de figurinhas na coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de figurinhas, quantas figurinhas tinham em cada pacote?

2. Bárbara e Rita resolveram encher as bolas para enfeitar o aniversário de uma amiga. Bárbara encheu um pacote de bolas pela manhã e três pacotes à tarde. Rita encheu 84 bolas. As duas meninas encheram a mesma quantidade de bolas para a festa. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas tinha em cada pacote?

3. Fábio e Fernando eram irmãos e colecionavam bolas de gude. Fábio tinha 69 bolas de gude de seu pai e um pacote de bolas de gude de sua mãe. Fernando ganhou de sua mãe quatro pacotes de bolas de gude iguais ao de Fábio. Os dois irmãos ganharam a mesma quantidade de bolas de gude para a coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas de gude tinham em cada pacote?

Ilustração 2: reprodução de trecho do protocolo escrito de Yago, pré-teste, problema s 1; 2 e 3

A modelização caracteriza o uso do procedimento algébrico para resolver problemas. No caso de Yago, ele fez uma modelização icônica, que demonstra a compreensão do problema e a necessidade de organizar as informações nele contidas

para poder resolvê-lo. Observa-se que só são realizadas as contas necessárias e não contas diversas como tentativas para achar a resposta. Trata-se de uma modelização icônica, mas observa-se o aparecimento do x como se fosse o símbolo para cada saco ou pacote desenhado.

No **pós-teste**, Yago resolve seguidamente todas as equações e os quatro primeiros problemas do livro. Ele teve que interromper a atividade de resolução porque o tempo acabou, não deu tempo de chegar aos problemas que no pré-teste ele tinha resolvido através da modelização. A ordem do protocolo era: seis equações, depois os sete problemas do livro, e depois os seis problemas do contexto da pesquisa.

Para resolver as equações algébricas (já discutido anteriormente a diferença entre equações aritméticas e equações algébricas), Yago decompôs a equação e usou a manipulação de incógnitas, caracterizando assim o uso do procedimento algébrico. Pode-se, além disso, observar no protocolo (a seguir) que ele conclui que o y (a outra incógnita) pode assumir qualquer valor numérico.

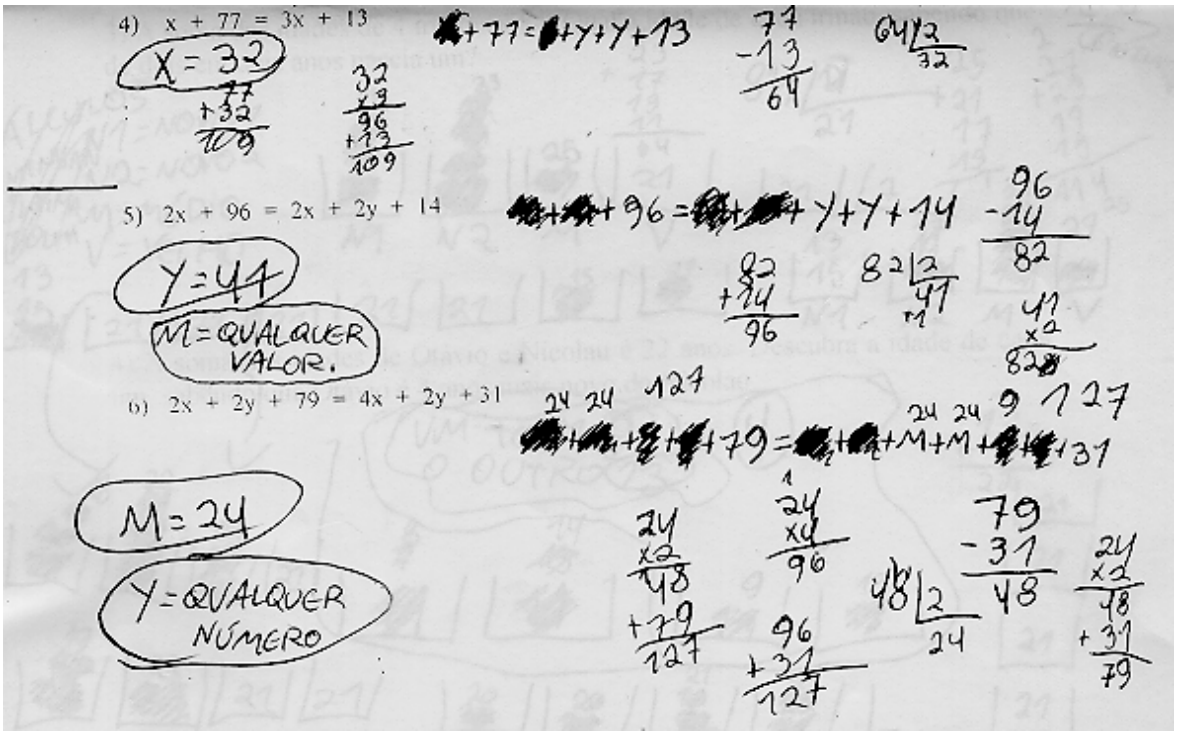


Ilustração 3: reprodução de trecho de protocolo escrito de Yago, pós-teste, equações 4; 5 e 6

Nos problemas do livro, ele modeliza o primeiro (ver expressão em cima do problema 1, Ilustração 4), faz os cálculos necessários e resolve. O desenho da balança aparece não como uso do procedimento algébrico, e sim com ilustração do problema que trata de balança de pratos.

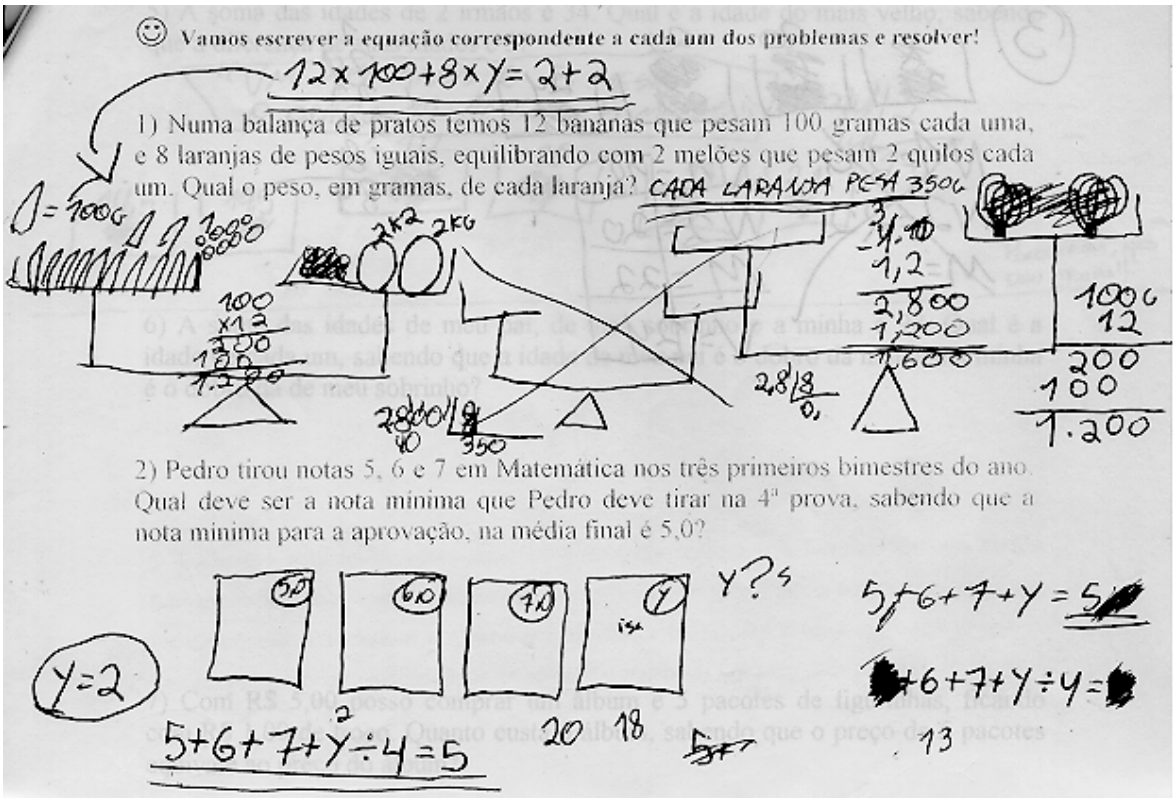


Ilustração 4: reprodução de trecho de protocolo escrito de Yago, pós-teste, problemas 1 e 2

Yago também modeliza o segundo problema, cometendo um erro matemático na notação da expressão matemática, quando escreve: 5 + 6 + 7 + y ÷ 4 = 5. Nos outros dois problemas, ele realiza o procedimento de atribuição de valores para encontrar as idades dos personagens envolvidos no problema.

Como foi Yago durante a seqüência didática?

Durante a seqüência didática Yago mostrou-se muito calado, pouco participava das discussões em sala de aula com a professora e os outros alunos. A fala dele só foi registrada uma única vez no 3º dia pela pesquisadora. Diante da situação na balança: 70g 10g @@, ele disse: "tem o peso de 10, tirando de 70, 60, dividido por dois" [a professora perguntou porque dividia por 2 e ele explicou], "porque tem dois saquinhos". Nessa passagem, Yago demonstrou a compreensão da igualdade entre os dois membros da equação e como fazer para calcular o valor de x, numa equação que envolve uma estrutura algébrica do tipo 1 (ax + b = c). No que se refere às atividades da seqüência feitas no papel, Yago não realizá-las em dupla como os outros alunos, costumava resolvê-las sozinho, demonstrando compreensão dos conceitos trabalhados através da sua produção. Observe no protocolo a seguir como ele parece compreender a metáfora da balança para modelizar equações e descobrir o valor desconhecido através da manipulação de incógnitas. Ele inclusive começa a compreender a diferença entre incógnita e variável, quando faz referência na parte de cima do protocolo que o x é o valor desconhecido (a ser descoberto) e D é um outro valor desconhecido, mas que pode ser qualquer número.

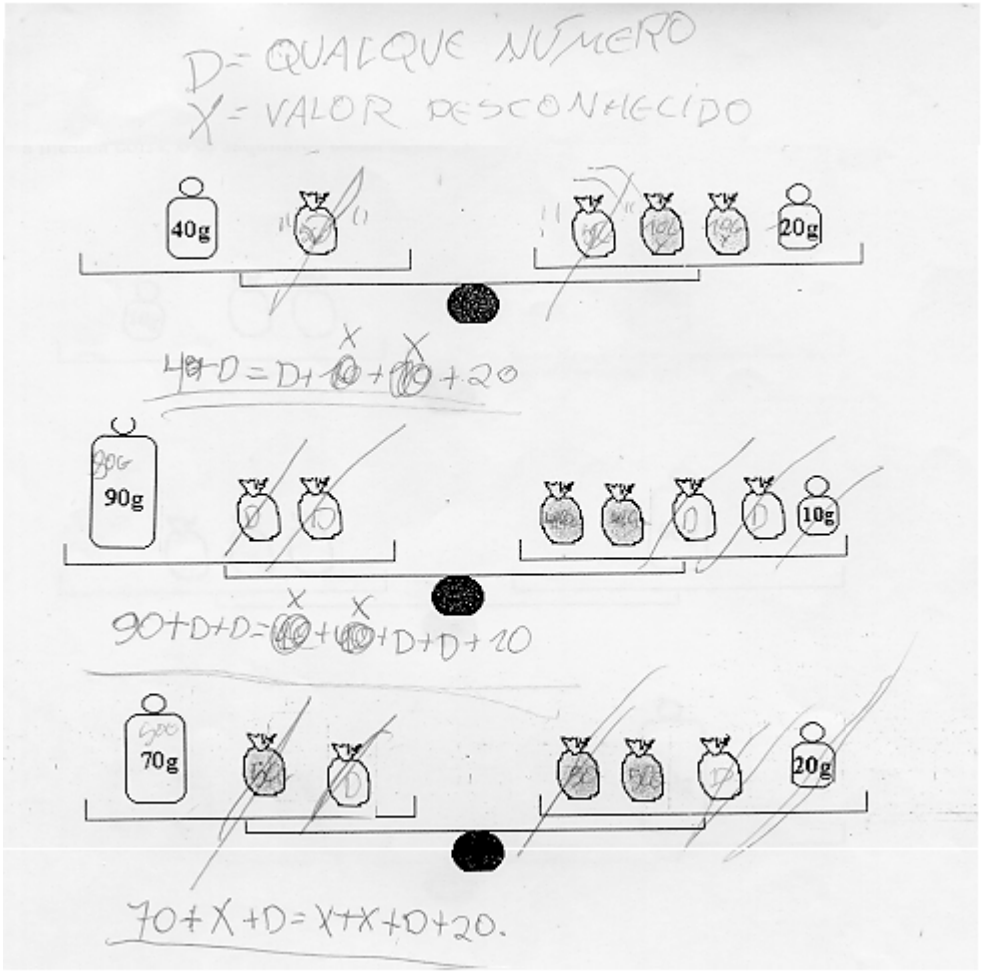
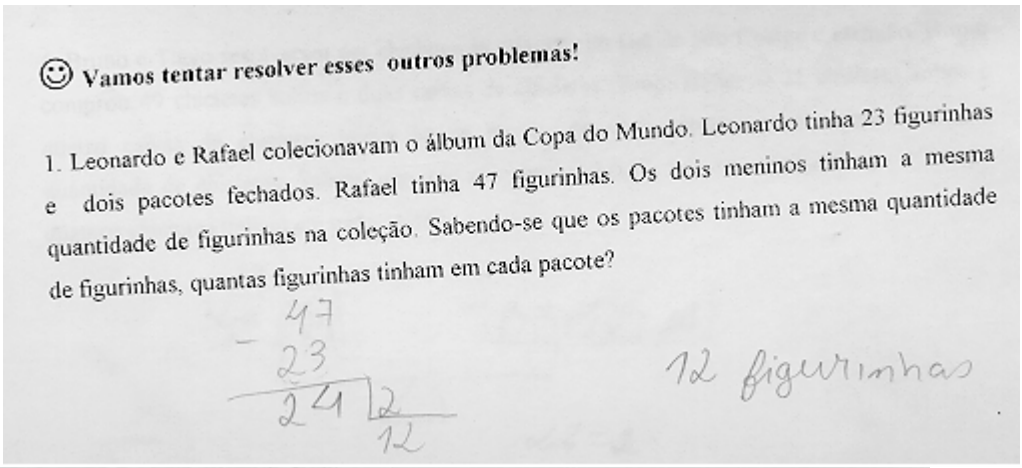


Ilustração 5 : reprodução de trecho de protocolo de Yago, atividade da seqüência didática

Caso 2: Diva

No pré-teste Diva resolve a primeira equações (2x + 22 = 68) por meio de conta, não consegue resolver a segunda (4x + x = 55), encaminha a resolução da terceira através da atribuição de valor (x + 36 = 4x), chegando à resolução, e deixa em branco as três seguintes (x + 77 = 3x + 13 ; 2x + 96 = 2x + 2y + 14 ; 2x + 2y + 79 = 4x + 2y + 31). Os problemas do livro (letras a; b; c; f; g) ela tenta resolver dando uma resposta numérica ou fazendo uma conta, mas sem sucesso, e os problemas propostos pela pesquisadora (letras d; e) ela deixa em branco.

Ainda no pré-teste, nos problemas propostos pela pesquisadora, Diva apresenta um outro desempenho, e acontece, conforme reproduzido abaixo, o seguinte: ela resolve os problemas (1; 2; 4 e 5 – ver ilustração 6) fazendo conta ou dando uma resposta numérica, e os problemas (3 e 6 – ver ilustração 7) ela não acerta, mas modeliza-os usando letras para representar as quantidades desconhecidas informadas no problema, veja a seguir:

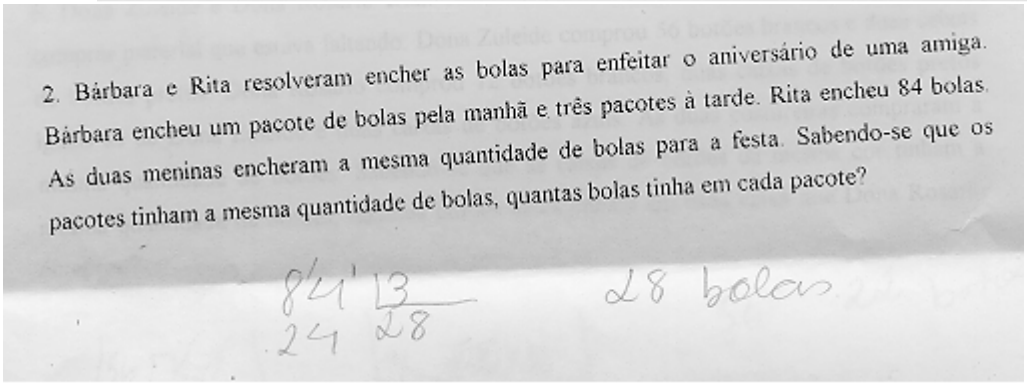


☺ **Vamos tentar resolver esses outros problemas!**

1. Leonardo e Rafael colecionavam o álbum da Copa do Mundo. Leonardo tinha 23 figurinhas e dois pacotes fechados. Rafael tinha 47 figurinhas. Os dois meninos tinham a mesma quantidade de figurinhas na coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de figurinhas, quantas figurinhas tinham em cada pacote?

47
−23
24 | 2
12

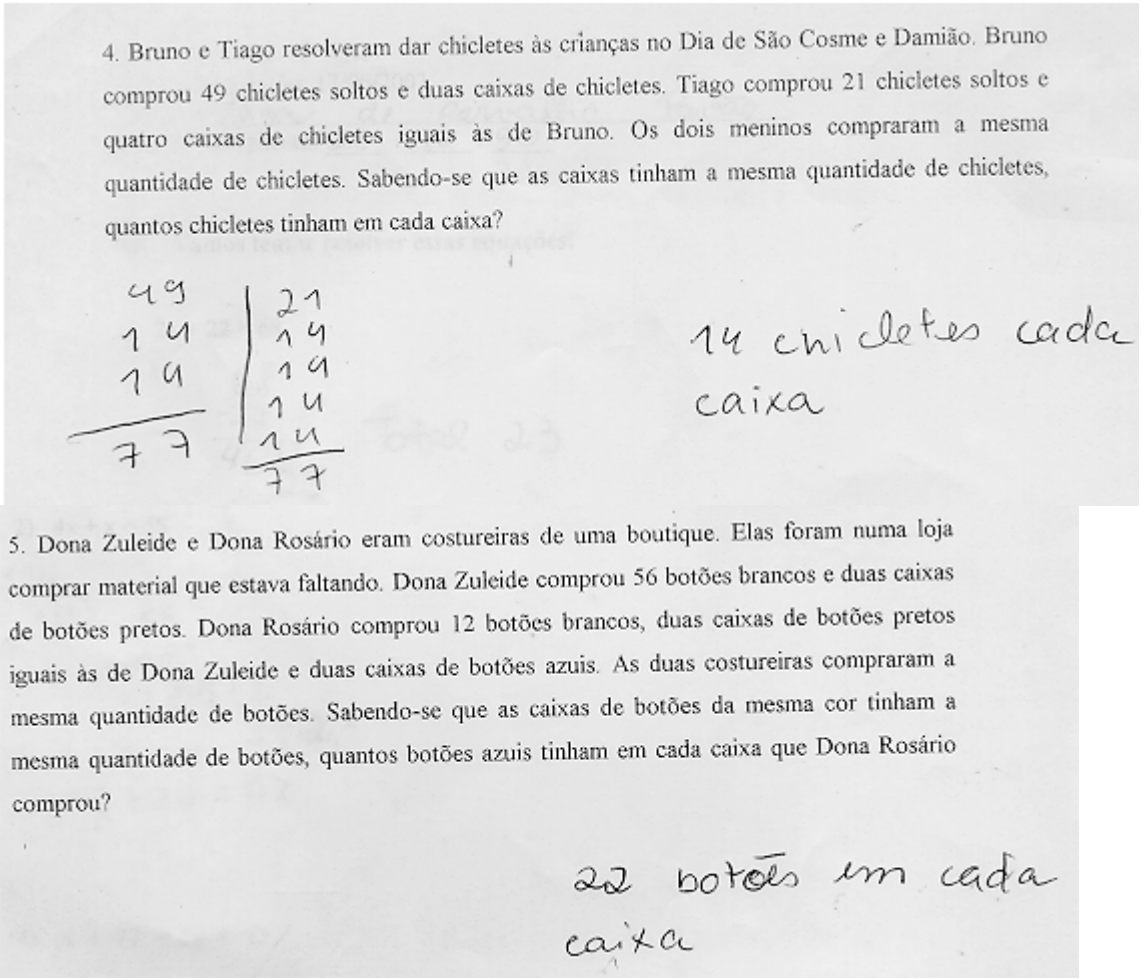
12 figurinhas



2. Bárbara e Rita resolveram encher as bolas para enfeitar o aniversário de uma amiga. Bárbara encheu um pacote de bolas pela manhã e três pacotes à tarde. Rita encheu 84 bolas. As duas meninas encheram a mesma quantidade de bolas para a festa. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas tinha em cada pacote?

84 | 3
24 28

28 bolas



4. Bruno e Tiago resolveram dar chicletes às crianças no Dia de São Cosme e Damião. Bruno comprou 49 chicletes soltos e duas caixas de chicletes. Tiago comprou 21 chicletes soltos e quatro caixas de chicletes iguais às de Bruno. Os dois meninos compraram a mesma quantidade de chicletes. Sabendo-se que as caixas tinham a mesma quantidade de chicletes, quantos chicletes tinham em cada caixa?

49 | 21
14 | 14
14 | 14
 | 14
 | 14
77 | 77

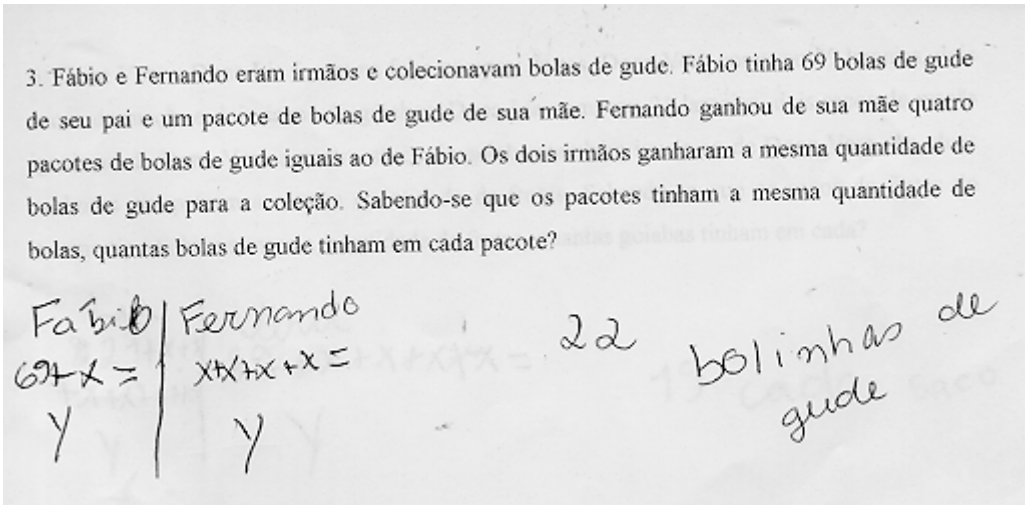
14 chicletes cada caixa

5. Dona Zuleide e Dona Rosário eram costureiras de uma boutique. Elas foram numa loja comprar material que estava faltando. Dona Zuleide comprou 56 botões brancos e duas caixas de botões pretos. Dona Rosário comprou 12 botões brancos, duas caixas de botões pretos iguais às de Dona Zuleide e duas caixas de botões azuis. As duas costureiras compraram a mesma quantidade de botões. Sabendo-se que as caixas de botões da mesma cor tinham a mesma quantidade de botões, quantos botões azuis tinham em cada caixa que Dona Rosário comprou?

22 botões em cada caixa

Ilustração 6: reprodução de trecho de protocolo escrito de Diva, pré-teste, problemas 1; 2; 4; 5

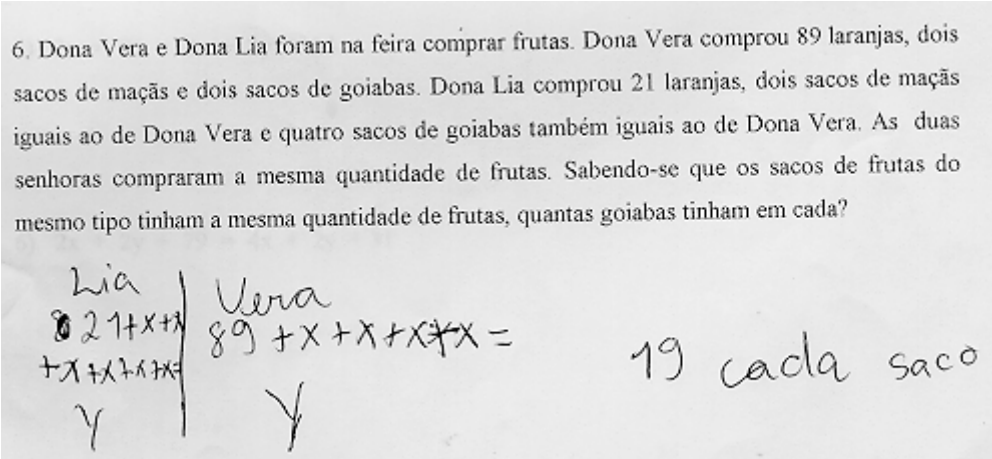
A seguir os protocolos dos problemas 3 e 6:



3. Fábio e Fernando eram irmãos e colecionavam bolas de gude. Fábio tinha 69 bolas de gude de seu pai e um pacote de bolas de gude de sua mãe. Fernando ganhou de sua mãe quatro pacotes de bolas de gude iguais ao de Fábio. Os dois irmãos ganharam a mesma quantidade de bolas de gude para a coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas de gude tinham em cada pacote?

Fábio | Fernando
69+x= | x+x+x+x=
y | y

22 bolinhas de gude


6. Dona Vera e Dona Lia foram na feira comprar frutas. Dona Vera comprou 89 laranjas, dois sacos de maçãs e dois sacos de goiabas. Dona Lia comprou 21 laranjas, dois sacos de maçãs iguais ao de Dona Vera e quatro sacos de goiabas também iguais ao de Dona Vera. As duas senhoras compraram a mesma quantidade de frutas. Sabendo-se que os sacos de frutas do mesmo tipo tinham a mesma quantidade de frutas, quantas goiabas tinham em cada?

Lia
21+x+x
+x+x+x+x
y

Vera
89+x+x+x+x=
y

19 cada saco

Ilustração 7: reprodução de trecho de protocolo de Diva, pré-teste, problemas 3 e 6

O pós-teste de Diva é ilustrativo da contribuição da seqüência didática para a resolução destes problemas. As três primeiras equações ela resolve diretamente usando o procedimento aritmético (contas), mas a três seguintes: $x + 77 = 3x + 13$; $2x + 96 = 2x + 2y + 14$; $2x + 2y + 79 = 4x + 2y + 31$, Diva aborda usando o auxílio representacional da balança, caracterizando procedimento algébrico.. Conforme discutido anteriormente, a seqüência teve como um dos objetivos apresentar o suporte representacional da balança para dar significado às equações algébricas. Veja nos extratos de protocolo a seguir a representação da equação na balança e a manipulação de incógnitas permitindo a resolução das equações, o que não tinha ocorrido no pré-teste.

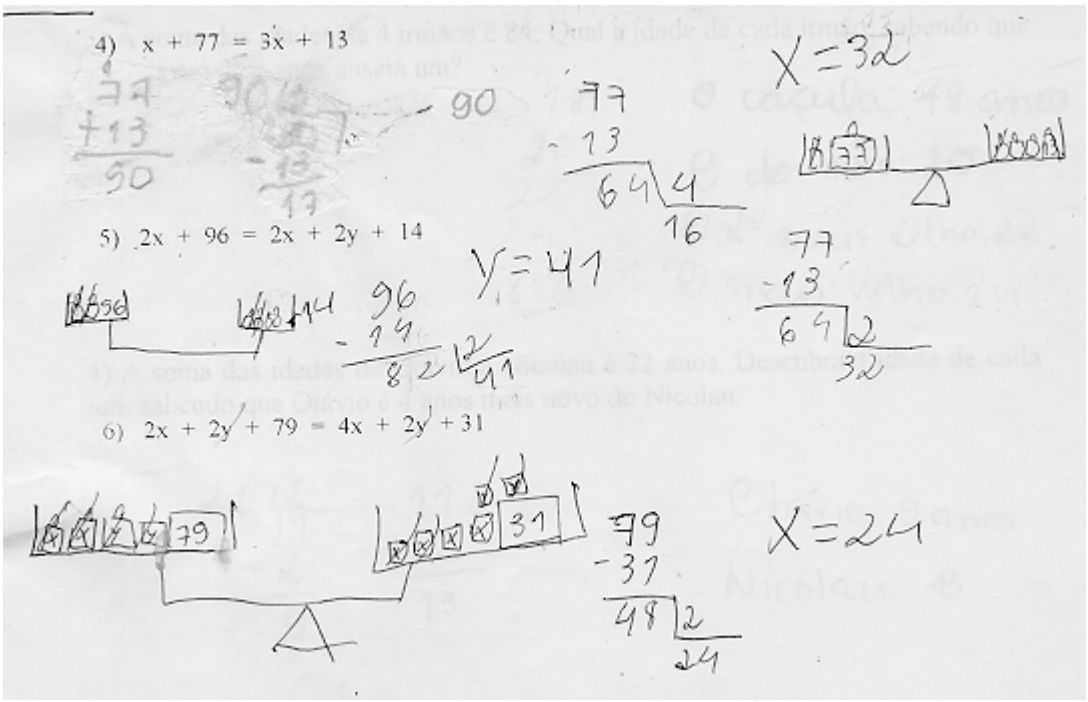
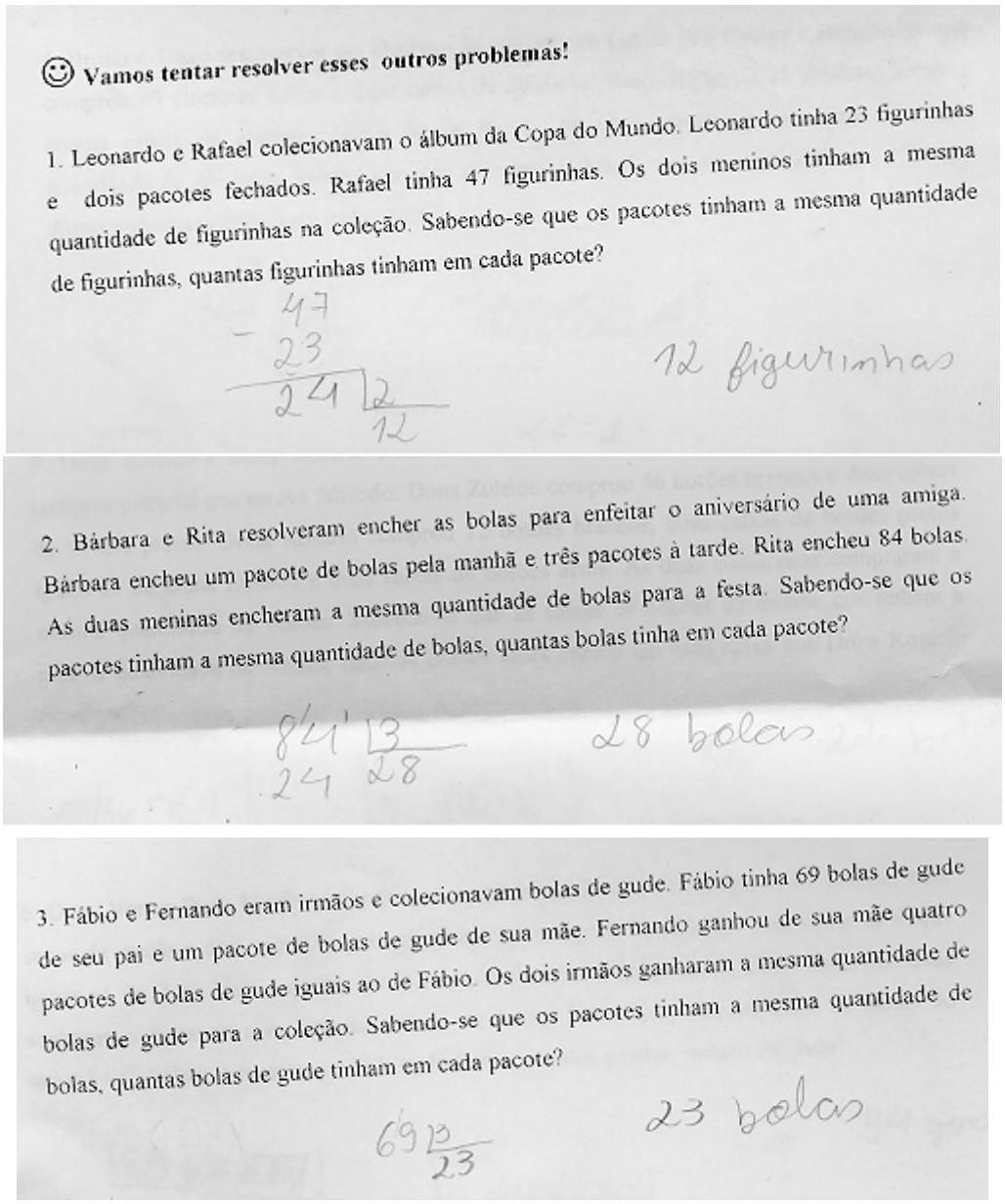


Ilustração 8: reprodução de trecho do protocolo escrito de Diva, pós-teste, equações 4; 5 e 6

Nos problemas do livro, dos sete ela resolve quatro usando contas, erra dois, e deixa um em branco. Com os problemas propostos no contexto da pesquisa, repete-se o que tinha ocorrido na resolução das equações. Os três primeiros (que a expressão que modeliza corresponde às três primeiras equações) Diva resolve através de conta, mas os três seguintes, que correspondem à modelização das outras três equações, ela resolveu usando o auxílio representacional da balança, conforme protocolo a seguir.



☺ **Vamos tentar resolver esses outros problemas!**

1. Leonardo e Rafael colecionavam o álbum da Copa do Mundo. Leonardo tinha 23 figurinhas e dois pacotes fechados. Rafael tinha 47 figurinhas. Os dois meninos tinham a mesma quantidade de figurinhas na coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de figurinhas, quantas figurinhas tinham em cada pacote?

47
-23
24 | 2
12

12 figurinhas

2. Bárbara e Rita resolveram encher as bolas para enfeitar o aniversário de uma amiga. Bárbara encheu um pacote de bolas pela manhã e três pacotes à tarde. Rita encheu 84 bolas. As duas meninas encheram a mesma quantidade de bolas para a festa. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas tinha em cada pacote?

84 | 3
24 28

28 bolas

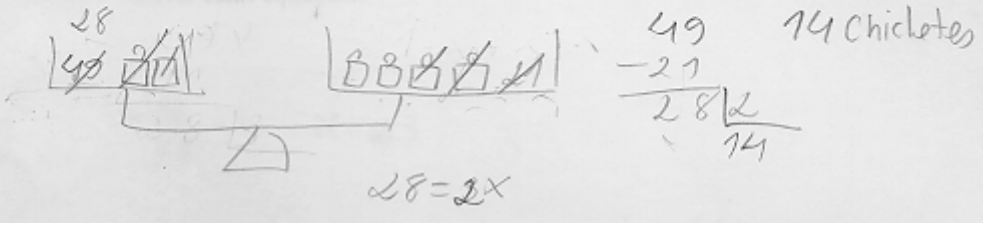
3. Fábio e Fernando eram irmãos e colecionavam bolas de gude. Fábio tinha 69 bolas de gude de seu pai e um pacote de bolas de gude de sua mãe. Fernando ganhou de sua mãe quatro pacotes de bolas de gude iguais ao de Fábio. Os dois irmãos ganharam a mesma quantidade de bolas de gude para a coleção. Sabendo-se que os pacotes tinham a mesma quantidade de bolas, quantas bolas de gude tinham em cada pacote?

69 | 3
23

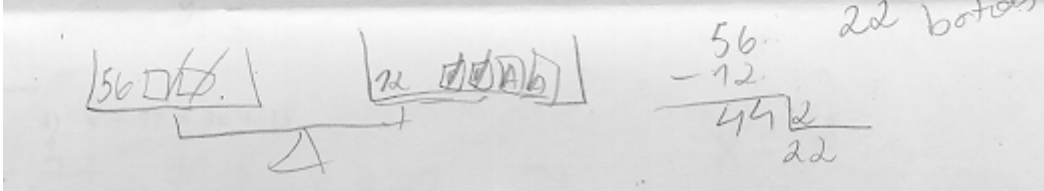
23 bolas

Ilustração 9: reprodução de trecho do protocolo escrito de Diva, pós-teste, problemas 1; 2 e 3

4. Bruno e Tiago resolveram dar chicletes às crianças no Dia de São Cosme e Damião. Bruno comprou 49 chicletes soltos e duas caixas de chicletes. Tiago comprou 21 chicletes soltos e quatro caixas de chicletes iguais às de Bruno. Os dois meninos compraram a mesma quantidade de chicletes. Sabendo-se que as caixas tinham a mesma quantidade de chicletes, quantos chicletes tinham em cada caixa?



5. Dona Zuleide e Dona Rosário eram costureiras de uma boutique. Elas foram numa loja comprar material que estava faltando. Dona Zuleide comprou 56 botões brancos e duas caixas de botões pretos. Dona Rosário comprou 12 botões brancos, duas caixas de botões pretos iguais às de Dona Zuleide e duas caixas de botões azuis. As duas costureiras compraram a mesma quantidade de botões. Sabendo-se que as caixas de botões da mesma cor tinham a mesma quantidade de botões, quantos botões azuis tinham em cada caixa que Dona Rosário comprou?



6. Dona Vera e Dona Lia foram na feira comprar frutas. Dona Vera comprou 89 laranjas, dois sacos de maçãs e dois sacos de goiabas. Dona Lia comprou 21 laranjas, dois sacos de maçãs iguais ao de Dona Vera e quatro sacos de goiabas também iguais ao de Dona Vera. As duas senhoras compraram a mesma quantidade de frutas. Sabendo-se que os sacos de frutas do mesmo tipo tinham a mesma quantidade de frutas, quantas goiabas tinham em cada?

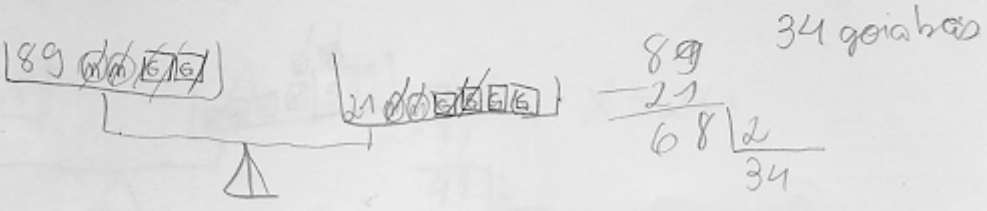


Ilustração 10: reprodução de trecho de protocolo escrito de Diva, pós-teste, problemas 4; 5 e 6

Como foi Diva durante a seqüência didática?

Diferentemente de Yago, Diva teve uma participação mais intensa durante as discussões em sala com a professora e os colegas. Diva também demonstrou a compreensão da igualdade entre os dois membros da equação e como fazer para calcular o valor de x, numa equação que envolve uma estrutura algébrica do tipo 1 (ax + b = c). Veja abaixo extrato do diário da aplicação da seqüência:

[A professora foi ao quadro desenhar a situação: \ 0 0 0 / \ 0 80g /

40 + 40 + 40 = 120; 40 + 80 = 120]

Diva: *80 pode dividir por 2, tem um saquinho do lado do 80 e do outro lado*

[os alunos M e Diva referem-se a outra situação]:

M: *Você soma 60 mais 20, ai divide (...) [foi interrompido pela aluna D]*

Diva: *60 menos 20 aí dá 40, aí tira um saquinho de cada lado, aí 40 dividido por 2 dá 20*

[A professora faz a representação da situação que M e Diva estavam se referindo]:

N + N + N + 20 = N + 60

3N + 20 = N + 60

M faz outra situação: *40 + N = N + X + X + 20 e diz: Eu faria a mesma técnica do passado, tira 20 de 40, cortava os 2N*

40 = X + X + 20

20 = X + X

D: *40 menos 20 igual a 20, 20 dividido por 2*

Professora: *Dá pra saber o valor de N?*

D: *Pode ser qualquer número porque está anulado*

Compreendeu também que numa equação com duas letras, como por exemplo, a equação: 40 + n = n + x + x + 20, que só é possível descobrir o valor do x, pois como ela mesma falou: “pode ser qualquer número porque está nula” [referindo-se ao valor de n]. Ela realizava suas atividades no papel em dupla ou sozinha e resolvia as situações problemas demonstrando compreensão.

3. A segunda etapa da análise

Esta etapa consiste na análise dos dados oriundos dos diários de observação da pesquisadora, referentes a todo processo vivenciado durante a seqüência didática em sala-de-aula. A análise da seqüência, aqui proposta, consiste em avaliar em que medida ela oportunizou que os alunos compreendessem alguns conceitos fundamentais para a aprendizagem da álgebra. Um outro aspecto a analisar durante a aplicação da seqüência didática diz respeito ao contrato didático estabelecido entre a professora e os alunos, ou seja, como a professora negociou com os alunos as atividades propostas pela seqüência.

No primeiro dia de aplicação da seqüência, a professora fez uma modificação na atividade proposta, incluindo o uso do computador, conforme descrito no extrato do diário da seqüência abaixo. Faz parte do contrato didático das aulas de matemática dessa turma ir para a sala de informática na escola. Como essa ida já estava prevista, a professora propôs realizar a primeira atividade da seqüência no computador, solicitando aos alunos que desenhasse a balança colocando os dados que ela ia escrever no quadro. Desta forma, a professora inseria as atividades da seqüência no contexto das atividades já desenvolvidas na sala de aula.

1º DIA

[*Como já estava previsto, os alunos foram para a sala de informática. A professora pediu que eles fizessem um círculo para ela explicar a atividade que eles iriam realizar].*

[No quadro a professora disse que eles iam fazer atividade em dupla, no computador (utilizando tratamento de texto), desenhar a balança – 1ª ação: descobrir o valor do saquinho; 2ª ação: fazer uma expressão matemática]

[A professora escreveu no quadro]:

1ª pesagem

disponível: 70g/10g e 00 (dois saquinhos agrupados)

2ª pesagem

disponível: 60g / 000 (três saquinhos agrupados)

3ªpesagem

disponível: 90g/ 00 (dois saquinhos agrupados)

4ªpesagem

disponível: 50g/ 0000 (quatro saquinhos agrupados)

[Os alunos desenharam a balança no computador, mas tiveram muitas dúvidas para realizar a atividade que a professora pediu]

Por sugestão da pesquisadora, para esclarecer as dúvidas surgidas no dia anterior, a professora no segundo dia distribuiu a folha com a primeira atividade da seqüência como modelo das primeiras situações de igualdade na balança. Assim, a professora manteve a modificação que ela tinha feito (os alunos iriam construir a balança no computador para essas quatro primeiras situações), mas deu mais clareza a atividade proposta pela seqüência (ver a atividade no anexo 4 e 4a).

2º DIA

[A professora distribuiu a folha com o modelo das quatro primeiras situações e os alunos fizeram no computador, calculando o valor do saquinho e fazendo a expressão. A professora ajudou os alunos na construção das expressões].

[Hoje, a partir do modelo os alunos entenderam o que era para fazer]

[Tinha uma dupla que estava descrevendo o que tinha na balança, a professora viu e disse para elas fazerem uma expressão/equação que simbolizasse aquele texto]

No terceiro dia de aplicação, observa-se no extrato do diário a seguir, um exemplo de uma renegociação de contrato implícita. A professora está explicando o procedimento de resolução aos alunos, neste caso a regra negociada (implicitamente) era que as situações seriam trabalhadas sequencialmente, quando resolvida uma situação passava-se para outra. Porém, num determinado momento, esse contrato didático foi renegociado. Quando a professora estava apresentando uma nova situação, o aluno fez referência à situação anterior e a professora, em vez de continuar discutindo a nova situação, volta a discutir a situação anterior.

3º DIA

[A professora comentou rapidamente o trabalho que eles fizeram no computador: alguns alunos escreveram com palavras um texto, outros escreveram uma expressão com números, com números e letras e, em seguida, a professora escreveu no quadro]:

\70g / \10g 00/ [desenhou a balança]

$70g = 10g + 30g \times 2$

Professora: *Se colocasse o saquinho do outro lado ia ficar desequilibrado, mas o objetivo não é deixar equilibrado? O sinal significa que 70 é igual a 10 mais dois saquinhos.*

[A professora escreveu no quadro de outro jeito]:

$70g = 10 + N + N$

$N + N \Rightarrow 2N$

Professora: *A letra só serve para o valor desconhecido; é álgebra*

[A professora escreve no quadro]:

$60 = X + X + X$ *[A professora fez referência aos X, dizendo que ele indicam*

$20 \quad 20 \quad 20$ *que os números são os mesmos]*

$3 \times X$

$60 = 3 \times 20$

O aluno Y falou: *tem o peso de 10, tirando de 70, 60, dividido por 2*

[A professora introduziu outra situação, mas o aluno Y fez referência a situação anterior, então a professora seguiu o raciocínio dele e voltou para primeira situação apresentada]

Professora: *por que divide por 2?*

O aluno Y: *porque tem dois saquinhos*

[A professora escreve no quadro]

$10g + nn = 70g$ *[a professora refletiu que* $nn \neq n + n$*]*

Um aluno V: $0 = X$

$(2X + 10) = 70$

$2X + 10/70 = 30$ *, tá certo?*

[o aluno abreviou, por sua própria iniciativa, as etapas do procedimento]

[A professora fez relação com o pré-teste dizendo que os saquinhos correspondiam ao X das equações e falou em seguida: vamos por passos:

1º) $2X + 10 = 70$

2º) $2X = 70 - 10$

3º) $2X = 60$

4º) $X = 60 \div 2$

5º) $X = 30$ *]*

[A professora disse que devia seguir os passos, fazendo referência à forma direta que o aluno V tinha feito]

Este extrato mostra que a professora realiza a atividade juntamente com os alunos, ilustrando um contrato didático onde a gestão do saber é compartilhada entre a professora e os alunos.

Um outro aspecto que também pode ser observado de forma incipiente, no diário de observação acima, é a concepção que a professora tem sobre o que é álgebra, quando ela diz: "*A letra só serve para o valor desconhecido; é álgebra".* Neste momento, ela aponta para relação entre o uso de letras na matemática e a álgebra.

No decorrer da análise dos conceitos trabalhados pela seqüência didática, essas ações serão apontadas. Tais atividades podem ser agrupadas em três blocos de atividades:

a) Seqüência de atividades usando o suporte representacional da balança de dois pratos para trabalhar o princípio de equivalência, noção de incógnita e variável, manipulação de incógnitas, procedimento matemático/algébrico para descobrir o valor desconhecido.

Pode-se observar que a noção de equilíbrio e a habilidade de manipulação de valores desconhecidos foram utilizadas e compreendidas pelos alunos, inclusive identificando valores desconhecidos em lados distintos da balança que podiam ser anulados, a fim de descobrir o valor da incógnita.

[Os alunos D e M oralmente fazem referência a uma situação e a professora escreve a representação no quadro]

N + N + N + 20 = N + 60

3N + 20 = N + 60

D: *60 menos 20 aí dá 40, aí tira um saquinho de cada lado, aí 40 dividido por 2 dá 20*

[M escreve no quadro outra situação]

40 + N = N + X + X + 20

M: *Eu faria a mesma técnica do passado, tira 20 de 40, cortava os 2N*

40 = X + X + 20

20 = X + X

D: *40 menos 20 igual a 20, 20 dividido por 2*

Professora: *Dá pra saber o valor de N?*

D: *Pode ser qualquer número porque está anulado*

Observa-se nessa passagem um aspecto estabelecido pelo contrato didático que é a permissão para que os alunos façam interferências durante o processo de resolução do colega e a participação da professora neste processo de resolução.

b) Seqüência de sentenças expressando relações lógicas entre quantidades e entre letras, para determinação dos símbolos de igualdade ou desigualdade.

Atividades de determinação do cálculo da diferença entre dois valores conhecidos, de determinação de valores, tendo a diferença conhecida, sejam com números positivos ou negativos, também foram argumentados e compreendidos pelos alunos. Pode-se observar também que a noção de que letras podem representar valores numéricos e que ao acrescentar ou diminuir o mesmo valor para duas letras distintas não altera o princípio de igualdade ou desigualdade existente entre ela, foram relações compreendidas pelos alunos. A seguir, observa-se novamente os alunos resolvendo as situações propostas de forma coletiva.

[A professora dividiu a turma em quatro grupos de alunos e escreveu no quadro a situação abaixo para eles responderem]:

Se A	**=**	*B*
Então, A − X	**?**	*B − X*

Grupo A: *acho que é igual*

Grupo B: *se A é 7 e B é 7, então se X for 1, então 7 menos 1 é 6; 7 menos 1 é 6 (referindo-se inicialmente a A – X e depois a B – X.*

Grupo C: *está certo"*

Grupo D: *[fez uma alteração, mas manteve a igualdade]*

A	**=**	*B*
A + X	**=**	*B + X*

Outra situação:

A	*>*	*B*
A + X	***?***	*B + X*

Grupo A: *A é maior que B e os dois X tem o valor igual, então fica >. Por exemplo, se A é 8 e B for 7, A mais alguma coisa e B mais alguma coisa. [usou exemplo com números]*

---

c) Problemas verbais envolvendo relações lógicas entre grandezas numéricas desconhecidas

Através do extrato do diário de observação onde está descrita a fala do aluno M e das ilustrações dos protocolos de Diva, observa-se que os alunos transferiram a idéia do esquema simbólico que tinham trabalhado na seqüência das atividades com números e letras para determinação de igualdade e desigualdade.

7º dia:

[A professora apresenta a atividade e propõe que deve haver uma relação com a situação anteriormente apresentada – referindo-se às ***expressões da aula passada****]*

Leitura do problema pela aluna L – "Casa Amarela ...]

[O aluno M escreve no quadro:

A > B

A = B + x (ou y ... pode ser qualquer um)

"A não é maior do que B?"

A – Casa Amarela

B – Macaxeira

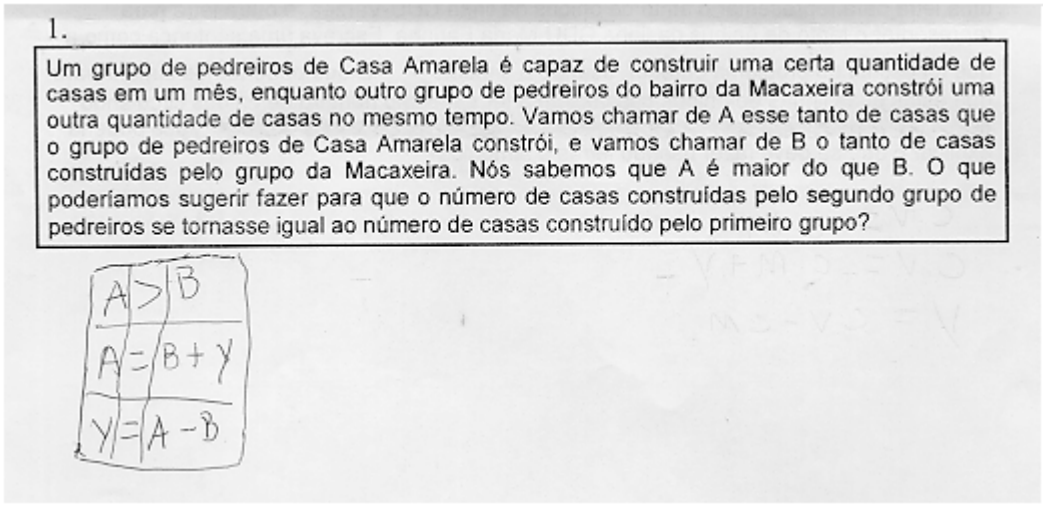
"tem que ser B + x = A"

A > B

"como fazer para igualar?"

A = B + x]

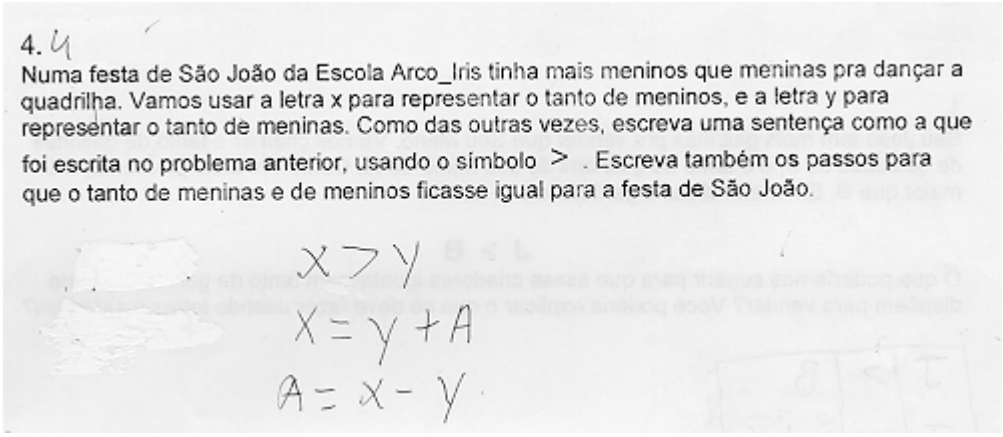
[Diva passou o problema da linguagem natural para a linguagem matemática, desprezando a idéia de casas, pedreiros. Outros alunos também fizeram o mesmo procedimento]


1.

Um grupo de pedreiros de Casa Amarela é capaz de construir uma certa quantidade de casas em um mês, enquanto outro grupo de pedreiros do bairro da Macaxeira constrói uma outra quantidade de casas no mesmo tempo. Vamos chamar de A esse tanto de casas que o grupo de pedreiros de Casa Amarela constrói, e vamos chamar de B o tanto de casas construídas pelo grupo da Macaxeira. Nós sabemos que A é maior do que B. O que poderíamos sugerir fazer para que o número de casas construídas pelo segundo grupo de pedreiros se tornasse igual ao número de casas construído pelo primeiro grupo?

A	>	B
A	=	B + Y
Y	=	A - B

Ilustração 11 : reprodução de trecho de protocolo de Diva, problema 1 de uma atividade da seqüência didática


4. 4
Numa festa de São João da Escola Arco_Iris tinha mais meninos que meninas pra dançar a quadrilha. Vamos usar a letra x para representar o tanto de meninos, e a letra y para representar o tanto de meninas. Como das outras vezes, escreva uma sentença como a que foi escrita no problema anterior, usando o símbolo > . Escreva também os passos para que o tanto de meninas e de meninos ficasse igual para a festa de São João.

X > Y
X = Y + A
A = X - Y

Ilustração 12 : reprodução de trecho de protocolo de Diva, problema 4 de uma atividade da seqüência didática

---

Quando a professora (no exemplo acima) faz referência às “expressões da aula passada”, demonstra que está levando o aluno a estabelecer relações entre duas situações diferentes (cálculo simbólico e problemas) já discutidas em sala de aula. Com isso a professora reafirma a *divisão compartilhada na gestão do saber*, criando um ambiente de construção de significados em sala de aula. Estabelecer relações entre situações distintas, permite ao aluno perceber o aspecto invariante do problema, o que permite usar o mesmo procedimento de resolução. O aluno M propõe logo a linguagem matemática, desprezando a idéia de casas, pedreiros. Os outros alunos, acompanhando o raciocínio do aluno M, fazem o mesmo procedimento, mostrando que aprenderam o procedimento algébrico de resolução de problemas, ou seja, aprenderam um novo saber.

Ainda neste 7º dia da seqüência pode-se observar ações referentes ao contrato didático: a professora faz perguntas aos alunos; diz como eles devem proceder para resolver os problemas; apresenta no quadro discute uma forma de resolver realizada por um aluno; oportuniza que o aluno tome a iniciativa de ir ao quadro demonstrar como resolveu o problema; veja a seguir:

---

*[A professora pergunta aos alunos se eles entenderam a relação de **y** para **J** e **B**]*

[A professora pede que cada aluno tente representar no papel, em linguagem natural ou matemática, a resposta do problema]

[A professora observa as formas de representação no papel e mostra, no quadro, uma representação que apareceu]:

J = B + C = J [a professora falou: essa sentença é verdadeira?]

[O aluno V vai ao quadro e atribui valores ao problema]:

J B

16 10

6 ⇒ C [o aluno V diz: a diferença dos dois (C) seria 6]

C = J – B [o aluno V pergunta se pode, depois, dividir a diferença por 2 que dá 3]

$C = \frac{J - B}{2}$

C = 3 [o aluno V parece um pouco confuso e os outros alunos percebem a sua confusão, depois ele esclarece: se não pudesse tirar nem colocar nada, ele poderiam dividir a diferença por dois, para equilibrar os valores – no exemplo, cada um ficaria com 3]

[O aluno V diz: digamos que eles trabalhassem em cooperativa, em símbolo como poderíamos representar essa situação]:

$\frac{J + B}{2} = C$ *[o aluno diz: C seria o valor final que cada um ficaria]*

Durante toda a seqüência a professora: explica as situações problemas; faz demonstração de como resolver; explicita as etapas do procedimento; apresenta definições; faz perguntas aos alunos; responde as perguntas dos alunos; diz como eles devem proceder para resolver os problemas, estabelece relações com outras situações já vivenciadas por eles; chama os alunos para resolver as situações no quadro; permite que os alunos façam interferências durante o processo de resolução do colega. Essas ações da professora podem ser observadas nos extratos dos diários

de observação da seqüência apresentados até então e no anexo 5, onde estão descritos todos os dias de observação. Elas ilustram a forma como a professora negociou com os alunos o contrato didático, ou seja, de como este saber está sendo gerenciado em sala de aula.

Resumidamente, de forma simplificada, o objetivo da relação didática é mudar a relação inicial do aluno ao saber (*rapport au savoir*[33]). Segundo Margolinas (1993), essa relação é ainda incipiente, e vai sendo modificada ao longo da relação didática. Quando não ocorre essa modificação, deve-se refletir sobre o que pode ter ocorrido, por exemplo, na *transposição didática* e/ou na negociação do *contrato didático*, ou mesmo da própria relação do professor com o saber. Observa-se ao longo da seqüência que o aluno vai mudando essa relação inicial na forma de abordar os problemas, construindo um procedimento de resolução mais adequado.

Negociando a seqüência com os alunos em sala de aula, a professora possibilitou que a relação didática provocasse uma mudança em relação ao saber. Desta forma, pode-se dizer que esta seqüência parece ter contribuído para aprendizagem de conceitos algébricos necessários na resolução de problemas neste campo conceitual, o que já tinha sido observado na análise multidimensional na relação entre pré-teste e o pós-teste.

[33] Objeto de estudo da Didática da Matemática. É um tema complexo e não é o nosso objeto de estudo, mas é importante fazer referência no contexto da análise.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo partiu de estudo anterior que analisou aspectos importantes na aprendizagem da álgebra, como por exemplo, a importância das estruturas algébricas para a compreensão dos conceitos fundamentais neste campo conceitual, quais os conceitos fundamentais e que tipo de situação didático-pedagógico pode contribuir para sua aprendizagem. No entanto, todos esses aspectos foram inferidos a partir de uma situação experimental, e não no contexto de sala de aula.

Retomando os objetivos, esse estudo visa ampliar a compreensão sobre a aprendizagem dos alunos na iniciação à álgebra, analisando como esse processo ocorre no contexto de sala de aula. Para tal, o estudo propôs uma seqüência didática a ser aplicada em sala de aula pelo próprio professor de matemática, e teve como um dos objetivos, analisar como esta seqüência poderia favorecer a construção de significados no campo conceitual da álgebra.

Então, este estudo traz como contribuição para a investigação no campo da Psicologia da Educação Matemática, estudar o processo de aprendizagem em álgebra pelo aluno, à luz dos aspectos ligados às relações que se estabelecem entre professor, aluno e saber no processo de construção de conhecimento no contexto da sala de aula de matemática. Para tal, a consideração nesta investigação de fenômenos didáticos, como *transposição didática* e *contrato didático* é um diferencial importante. Assim, a discussão trazida por este estudo girou em torno do sujeito que aprende, do saber a ser aprendido, no caso álgebra, e dos fenômenos didáticos que permeiam esta aprendizagem.

Observa-se que este estudo analisou a contribuição de uma seqüência didática para a aprendizagem da álgebra pelos alunos. Tal análise possibilitou trazer algumas reflexões a respeito do *'triângulo das situações didáticas,* que envolve professor-aluno-

saber, notadamente o pólo do aluno, uma vez que foi analisado o uso do procedimento algébrico na resolução de problemas. Quanto aos alunos, no que se refere ao desempenho comparado no pré e pós-teste, foi possível observar mudanças no que se refere ao procedimento de resolução de problemas. Eles usaram procedimento algébrico, demonstrando compreensão de conceitos fundamentais como: princípio de equivalência, noção de incógnita e variável, manipulação de incógnitas. Os alunos reagiram de forma interessada à proposta da professora em aplicar a seqüência, participando oralmente das discussões em sala de aula e realizando as atividades com êxito na maioria das vezes.

Quanto à professora, ela demonstrou compreensão dos objetivos da seqüência didática e dos conceitos que estavam sendo trabalhados por ela. Inclusive, a professora fez modificações nas atividades propostas. Os seus conhecimentos acerca do saber algébrico foram observados através das explicações dadas durante a aplicação da seqüência.

Quanto à seqüência, ela foi inicialmente negociada entre a pesquisadora e a professora, que se apropriou dela e a negociou com os seus alunos em sala de aula. Parece que a seqüência cumpriu o objetivo de trabalhar os conceitos fundamentais para a aprendizagem do procedimento algébrico de resolução de problemas. Em cada etapa a seqüência abordou aspectos importantes para a iniciação à álgebra. Foi durante a etapa da balança que o princípio de equivalência e a manipulação de incógnitas, conceitos fundamentais nesta iniciação, foram discutidos de forma sistemática entre os alunos e a professora. Dos oito dias destinados para trabalhar a seqüência, quatro foram dedicados á etapa da balança. A etapa do cálculo simbólico oportunizou a reflexão sobre as relações que os símbolos expressam e sobre o uso das letras na linguagem matemática, o que foi importante para que, na etapa seguinte – a dos problemas verbais, os alunos pudessem aprender a modelizar os problemas, ou seja, passar da linguagem natural para a linguagem matemática.

Apresentar situações-problema que trabalhavam o princípio de equivalência, a manipulação de incógnitas, a linguagem simbólica e a modelização de problemas verbais, parece ter sido um dos pontos fortes da seqüência didática proposta neste estudo. Desta forma foram trabalhados os conceitos necessários a aprendizagem do procedimento algébrico para a resolução de problemas.

Estes dados vão em direção a alguns aspectos discutidos por Alan Bell (1996) Segundo este autor, há alguns elementos relativos à álgebra que precisam ser compreendidos pelos alunos na sala de aula: um primeiro elemento diz respeito ao *uso da linguagem algébrica* como forma de expressar relações e trabalhar com representações. Além desse, é fundamental o trabalho com a *manipulação de expressões simbólicas* de forma a possibilitar a proposição e resolução de equações. Nesse sentido, é necessário que os alunos compreendam a álgebra como um *sistema de relações*. É isso, possivelmente, que Rômulo Lins & Joaquim Gimenez definem como o aspecto central do desenvolvimento do *pensamento algébrico* (Lins e Gimenez, 1997).

A álgebra pode ser ensinada enfocando *resolução de problemas*. Para tal, é necessário considerar que há um caminho a ser percorrido para que o aluno 'olhe algebricamente' para um problema e possa mobilizar as competências necessárias para a sua resolução: interpretando-o; extraindo os dados relevantes da situação-problema; propondo uma representação deste em uma linguagem simbólica (equação ou não-equação); manipulando ~~com~~ os símbolos propostos. O que se torna mais importante, é atribuir sentido aos elementos centrais em álgebra: a noção de incógnitas e variáveis, a modelização, a representação, a linguagem algébrica.

Todavia, um aspecto que pode ser considerado como um ponto fraco da seqüência foi a pouca diversidade de situações-problema. As diferentes estruturas algébricas, principalmente aquelas onde a incógnita aparece nos dois membros da

equação, só foram trabalhadas na etapa da balança, as demais etapas não contemplaram essas estruturas, apenas a estrutura 1 (ax + b = c). A etapa de cálculo simbólico contemplou as relações de 2ª ordem que favoreceram a modelização dos problemas verbais na etapa seguinte.

Outro ponto merece ser comentado: a seqüência não contemplou os problemas que aparecem no livro didático, impossibilitando que fosse oportunizado um espaço em sala de aula para trabalhar a modelização desses problemas. Os problemas verbais trabalhados durante a seqüência e os que fizeram parte do pré e pós-teste, não são tipos de problemas que aparecem nos livros e nas salas de aula das escolas. Então, a contribuição para modelizar e resolver de forma algébrica os problemas do livro didático é mínima, pois não foi um aspecto contemplado pela seqüência. É importante relembrar aqui, o que foi discutido na análise dos resultados acerca do processo de resolução dos problemas do livro didático. O que dificultou foi a interpretação desses problemas e a sua modelização, e não a estrutura algébrica. A modelização do problema é uma etapa necessária e característica de um procedimento algébrico de resolução de problemas; uma vez que a seqüência não contemplou a modelização desses tipos de problemas, os alunos tentaram resolvê-los através do procedimento aritmético cometendo erros, demonstrando a pouca contribuição da seqüência para tais problemas.

Como já foi dito anteriormente, o objetivo da relação didática é mudar a relação inicial do aluno ao saber. Essa relação incipiente, e vai sendo modificada ao longo da relação didática. A *transposição didática*, o *contrato didático* e a *relação do professor com o saber* são fenômenos importantes de serem considerados na relação didática, para que a relação inicial do aluno ao saber possa ser modificada. O saber algébrico, como qualquer outra modalidade de saber produzido na comunidade científica, sofre transformações ao longo do percurso: sai do seu contexto de produção, passa pela sua formulação como saber a ser ensinado *(transposição externa)* e chega à sala de

aula, sob a coordenação do professor (*transposição interna*). No momento em que o saber adentra a sala de aula, sob a coordenação do professor, a transposição didática estabelece uma inter-relação com outro fenômeno: o contrato didático. Assim, refletir sobre como o professor gerencia tais fenômenos nesse universo, de forma que os alunos se apropriem de um novo saber.

Foi possível observar neste estudo que os alunos participantes da presente pesquisa mudaram a relação inicial que eles tinham com o saber algébrico. A partir da comparação entre o pré-teste e o pós-teste nota-se que ocorreu a aprendizagem de um novo tipo de procedimento para resolver problemas, o procedimento algébrico. A aprendizagem da modelização também foi verificada em alguns alunos. Essas conquistas deveu-se à alguns aspectos, mas um deles deve ser ressaltado: o *contrato didático* que a professora gerenciou em sala de aula. Foi negociando a seqüência didática com os alunos, que a professora possibilitou a mudança em relação ao saber por parte dos alunos.

Muito mais do que ensinar álgebra como um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados na resolução de um problema específico, cabe ao professor criar situações de ensino que possibilitem ao aluno *pensar algebricamente* ao se deparar com um problema. Situação essa que pode ser colocada, por exemplo, em forma de equação ou em um problema em linguagem natural, dentre outras possibilidades. Os dados aqui analisados fornecem subsídios no sentido de mostrar que a professora, na negociação da seqüência didática, possibilitou que os alunos pensassem algebricamente, na medida em que a professora realiza as atividades juntamente com os alunos, ilustrando um *contrato didático* onde a gestão do saber é compartilhada entre a professora e os alunos. Assim, a sala de aula torna-se ambiente de construção de significados.

Segundo a perspectiva de Gérard Vergnaud acerca do ensino de álgebra, a balança de dois pratos pode se tornar um recurso da cultura didaticamente válido para

a introdução ao conhecimento matemático algébrico. Neste estudo foi possível constatar mais uma vez, visto que outros estudos já demonstraram este aspecto, inclusive o estudo anterior de Lins Lessa (1996), que a mobilização da balança como suporte representacional propiciador da conexão entre conhecimentos-em-ação e conceitos algébricos cumpre um papel importante na aprendizagem de conceitos fundamentais como princípio de equivalência e manipulação de incógnitas. Diferentemente do estudo anterior de Lins Lessa (Lins Lessa, 1996), no contexto deste estudo atual, a balança real foi substituída por desenho esquemático. Isso contribui para a posição segundo a qual a presença pura e simples de suportes concretos não é o aspecto mais importante, do ponto de vista didático, para a facilitação do ensino da matemática, e sim a proposição de situações de mediação que possibilitem a construção de significados necessários à conceptualização em matemática, no caso em álgebra.

Por fim, para que se discuta como o sujeito se desenvolve, aprende e conceptualiza o saber algébrico em sala de aula, fenômenos que fazem parte do *triângulo das situações didática*, como *transposição didática* e *contrato didático* precisam ser levados em consideração. E assim, meu *'olhar'* sobre aprender álgebra foi ampliado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTHUSSER, L . **Aparelhos ideológicos de Estado**. Rio de Janeiro: Ed. Graal, 1985.

ARAÚJO, C.R. **A afetividade e a formação do professor de matemática:** possíveis caminhos nessa interlocução. Artigo não publicado. Recife, 2002.

ARSAC, G. La transposition didactique en mathématiques. In: ARSAC, G.; DEVELAY, M. & TIBERGHIEN, A. **La Transposition Didactique en Mathématiques, en Physique, en Biologie**. Lyon: IREM et LIRDS, 1989.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1996.

BANKS-LEITE, L. As questões lingüísticas na obra de Jean Piaget: apontamentos para uma reflexão crítica. In: BANKS-LEITE, L. (Org.). **Percursos Piagetianos**. São Paulo: Cortez, 1997, p. 207-224.

BEDNARZ, N.; JANVIER, B. Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In: BEDNARZ, N.; KIERAN,C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra:** perspectives of recearch and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p.115-136.

BELL, A. Problem-solving approaches to algebra: two aspects. In: BEDNARZ, N.; KIERAN,C.; LEE, L. (Eds.).**Approaches to Algebra:** perspectives of recearch and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p.167-185.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática Atual**. São Paulo: Atual, 1994.

BODANSKII, F. The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children. In: DAVIDOV, V.V. (1991) **Soviet Studies in Mathematics Education:** psychological abilities of primary school children in learning mathematics. Reston: NCTM, 1991, vol. 6, p. 275-338.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (orgs.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1995, p. 23-37.

BRITO LIMA, A. P. **O Desenvolvimento da Representação de Igualdades**.1996. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1996.

BRITO LIMA A.P.; DA ROCHA FALCÃO, J.T. Early development of algebraic representation among 6-13 year-old children: the importance of didactic contract. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21, 1997, Lahti, Filândia. **Proceedings of the XVIth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Lahti, Filândia, 1997, vol. 2, p. 201-208.

BRITO MENEZES, A. P. **Contrato Didático e Transposição Didática: análise das inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação a álgebra na 6ª série do ensino fundamental**, 2004. Projeto de Qualificação (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

BRONCKART, J.P. **Vygotski aujourd'hui**. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé, 1985.

BROUSSEAU, G. Ingéniere didactique. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. **Deuxième École d'Eté de Didactique des Mathématiques**. Olivet, 1982.

BROUSSEAU, G. Fondementes e méthodes de la didactique dês mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques,** 1986, 7(2), 33-115.

BROUSSEAU, G. & HULIN, M. (orgs.). **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques:** actes du Colloque de Sèvres**.** Sèvres : La Pensée Sauvage, 1987, p. 259-280.

BROUSSEAU, G. Le contrat didatique: le milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 9/1,1990, p. 308-336.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.

BRUNER, J. **Uma nova teoria de aprendizagem**. Rio de Janeiro: Block Editores, 1976.

BRUNER, J. Celebrating divergence: Piaget and Vygotsky. **Human Development,** 1997, 40: 63-73

CARRAHER, T.N.; CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CHARBONNEAU, L. From Euclid to Descartes: algebra and its relation to geometry. In: BEDNARZ, N.; KIERAN,C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra**: perspectives of Recearch and Teaching**.** Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p.15-37.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

_____. Sur la notion de temps didactique. **IVème École d'Eté de Didactique des mathématiques**. 1986.

_____. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir ensigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

CORTES, A.; KAVAFIAN, N.; VERGNAUD, G. Le champ conceptuel, outil d'analyse pour l'introduction de l'algèbre. **5ª Ecole D'ete de Didatique des Mathematiques et de L'informatique.** Kérallic, ago./set., 1989.

COULON, A. **Ethnomethodology .** London: Sage, 1995.

DAHAN-DALMEDICO, A. ; PEIFFER, J. **Une histoire des mathématiques**. Paris: Seuil, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus Editorial, 1986.

_____. Etnomatemática: um programa. **Educação Matemática em Revista**. Ano 1, No. 1-2, p. 5-11, 1993.

_____. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1998a.

_____. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1998b.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. **The mathematical experience**. Boston: Birkhäuser, 1981.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. **Représentation du probleme, écriture de formules et guidage dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre**. Tese (Doutorado) Universidade de Paris-V, Paris,1992.

_____. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A.D.; CARRAHER, D.W.; SPINILLO, A.G.; MEIRA, L.L.; DA ROCHA FALCÃO, J.T. **Estudos em psicologia de educação matemática**. Recife, Editora Universitária UFPE, 1993.

_____. A case study of algebraic scaffolding: from balance scale to algebraic notation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 19, 1995, Recife, Brasil. **Proceedings of the XIXth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife, Brasil, 1995, vol. 2, p. 66-73

_____. **Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos**. In: Dias, M.G.B.B.; Spinillo, A. Tópicos em psicologia cognitiva. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996.

_____.Lenguaje algebraico: un enfoque psicológico. **Uno – Revista de Didáctica de las Matemáticas.** Barcelona, Espanha, vol.14, p. 25-38, 1997.

_____. **O que sabem os que não sabem? Contribuições para a exploração psicológica das competências cognitivas humanas**. Projeto de produtividade em pesquisa 2005-2007 – CNPq. Recife, 2004.

_____. Conceptualisation en acte, conceptualisation explicite: quels apports théoriques à offrir à la didactique des mathématiques et des sciences? **Actes du Colloque Les Processus de Conceptualisation en debat-hommage a Gérard Vergnaud**. Paris : Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, 2005.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. , LOOS, H. Diferenças de desempenho em matemática em função do gênero: dados recentes para uma discussão antiga. In: ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 1999, Recife. **Anais IV**

Encontro Pernambucano de Educação Matemática (digital). Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1999 p. 25-35.

DA ROCHA FALCÃO, J. T.; MENEZES, A.P.A.B.; ARAÚJO, C. R.; LINS LESSA, M. M.; OSÓRIO, M. M. O. Introducing Algebraic Activity in Elementary Level. In: INTERNATIONAL CONGRESSS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 9, 2000, Tóquio. **Proceedings of the *9th* International Congress on Mathematical Education** (ICME 9). Tóquio, 2000a.

DA ROCHA FALCÃO, J. T.; MENEZES, A.P.A.B.; ARAÚJO, C. R.; LINS LESSA, M. M. L.; OSÓRIO, M. O. A Didactic Sequence for the Introduction of Algebraic Activity in Early Elementary School In: CONFERENCE INTERNATIONAL OF THE GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICAL EDUCATION (PME), 24, 2000, Hiroshima. **Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education,** Hiroshima: Hiroshima University, 2000b, vol. 2, p. 209 – 216.

DA ROCHA FALCÃO, J.T.; LEITÃO, S.; ARAÚJO, C.; LINS LESSA, M.M.; OLIVEIRA OSÓRIO, M. Argumentation in the context of a didactic sequence in elementary algebra. In: ANNUAL MEETING OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 26, 2002, Norwich, UK. **Proceedings of the 26th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)**. Norwich, UK, 2002, vol. 1 p. 272.

DA ROCHA FALCÃO, J.T., RÉGNIER, J.-C. Sobre os métodos quantitativos na pesquisa em ciências humanas: riscos e benefícios para o pesquisador. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. Brasília, v. 81, no. 198, p. 229-243, maio/ago. 2002.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. Relações entre pensamento e linguagem: explorações teóricas no contexto da educação matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, no. 41, p. 43-56, 2003a.

DA ROCHA FALCÃO, J.T., MEIRA, L.R. Análise qualitativa e quantitativa an pesquisa em psicologia: divergências e complementaridades. In: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE PSICOLOGIA, 33, 2003, Belo Horizonte. **Anais da XXXIII Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Psicologia**. Belo Horizonte, 2003b, p. 24.

DEVELAY, M. A propôs de la transposition didactique en sciences biologiques. In: ARSAC, G.; DEVELAY, M. & TIBERGHIEN, A. **La Transposition Didactique en Mathématiques, en Physique, en Biologie**. Lyon: IREM et LIRDS, 1989.

FENELON, J.-P. **Qu'est-ce que l'analyse des données?** Paris: Lefonen, 1981.

FILLOY, E.; ROJANO, T. From an arithmetical thought to an algebrical thought. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 6, 1984, Wisconsin**. Proceedings of the VIth International Conference of the Psychology of Mathematics Education**. Wisconsin, 1984

FRIEDRICH, J. La rencontre Léontiev- Vygotski: quelques concepts-clés. In: CLOT, Y. (Org.). **Avec Vygotski**. Paris, La Dispute, 1999.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (orgs.) **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GUEDJ, D. Sur les rives du signe égal (Que nous raconte la naissance de l'algèbre?). **Libération**. 1992, p.32.

HAZIN, I. & DA ROCHA FALCÃO, J. Self-esteem and performance in school mathematics: a contribution to the debate about the relationship between cognition and affect. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 25, 2001, Holanda. **Proceedings of the XXVth International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Holanda, 2001.

JONNAERT, P. À propos du contrat didactique! **Cahiers de Recherche en Éducation**. Sherbrooke: Éditions du CRP, vol. 1, nº 2, p. 195-234, 1994.

KIERAN, C. The learning of algebra: a teaching experiment. IN: ENCONTRO ANUAL DA AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1982, New York. **Eric document reproduction**. New York, 1982, service no. ED 216 884.

_____. A comparison between novices and more expert algebraic students on tasks dealing with the equivalence of equations. In: ANNUAL MEETING OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 6, 1984, Madison. **Proceedings of the VIth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)**. Madison: University of Wisconsin, 1984, p. 83-91.

_____.Two different approaches among algebra learners. In: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1988, Reston, VA. **Yearbook of research on mathematics teaching and learning. The ideas of Algebra**. Reston,VA, 1988, p. 91-96.

_____. The early learning of algebra: a structural perspective. In: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Hillsdale, NJ. Research issues in the learning and teaching of algebra. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1989, p. 33-56

_____. A procedural-structural perspective on algebra research. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 13, 1991, Assisi. **Proceedings of the XVth International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Assisi, 1991, p. 245-251.

_____. The learning and teaching of school algebra. In: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1992, New York. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, p. 390-419.

KIERAN,C. & LEE, L. (Eds.) (1996). **Approaches to Algebra:** perspectives of recearch and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 65-86.

KNIJNIK, G. **Exclusão e resistência**: educação matemática e legitimidade cultural. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

LABORDE, C. **Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique**. Tese (Doutorado) – Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble. Grenoble, França, 1982.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. **Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being**. New York: Basic Books, 2000.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN,C.; LEE, L. (Eds.) **Approaches to Algebra: Perspectives of Recearch and Teaching**. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 87-106.

LINS LESSA, M. M. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para inciação á álgebra**: um estudo comparativo. 1996. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1996.

LINS LESSA, M. M., DA ROCHA FALCÃO, J.T. Pensamento e linguagem: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. **Psicologia, reflexão e crítica**. Porto Alegre, vol.18, no.3, p.315-322, 2005.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J.P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A.; SHULTE, A (orgs.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995, p. 144-154.

MALARA, N.A.; NAVARRA, G. **Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking**. Bolonha: Pitagora Editrice, 2003.

MARGOLINAS, C. **De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: Bednarz, N.; Kieran,C.; Lee, L. (Eds.). **Approaches to Algebra:** perspectives of recearch and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

MEIRA, L.L. Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso. In: Spinillo, A.; Bompastor Borges Dias, M.G (orgs.). **Tópicos em Psicologia Cognitiva**. Recife: Editora da Universitária da UFPE, 1996.

NUNES, T. O papel da representação na resolução de problemas. **Dynamis**. Blumenau, vol.1, no. 7, pp. 19-27, 1994.

_____. Systems of signs and mathematical reasoning. In: Nunes, T.; Bryant, P. (1997) **Learning and teaching mathematics:** an international perspective. London: Psychology Press, 1997.

_____. How mathematics teaching develops pupils' reasoning systems. In: INTERNATIONAL CONGRESSS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 9, 2000, Tóquio. **Abstracts of plenary lectures and regular lectures of the *9th* International Congress on Mathematical Education** (ICME 9). Tóquio, 2000, p.14-19.

PAIS, L. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PIAGET, J. A linguagem e as operações intelectuais. In: Ajuriaguerra, J.; Bresson, F.; Fraisse, P.; Inheleder, B.; Oléron, P. (orgs). **Problemas de psicolingüística**. São Paulo: Editora Mestre Jou, 1973a.

_____. **Biologia e conhecimento**: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos. Petrópolis: Vozes, 1973b.

_____. **Psicologia da inteligência**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1977.

POLANYI, M. **Personal knowledge**. London: Routledge & Kegan Paul, 1962.

POLANYI SOCIETY. Disponível em: http://www.mwsc.edu/orgs/polanyi . Acesso em 2002.

RADFORD, L. The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra**: perspectives of recearch and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 39-53.

RASHED, R. **Entre l'arithmétique et l'algèbre : recherches sur l'histoire des mathématiques arabes**. Paris: Les Belles Lettres, 1984.

REALI, G. **História da Filosofia**: do humanismo a Kant. São Paulo: Paulus, 1990.

ROJANO, T. The role of problems and problem solving in the development of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra**: perspectives of recearch and teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 55-62.

ROSEMBERG, F. Educação formal, mulher e gênero no Brasil contemporâneo. **Estudos feministas**, Florianópolis, Ano 9, no.2, p. 515-540, 2001. Documento integral disponível em formato pdf em: http://www.scielo.br/pdf/ref/v9n2/8638.pdf . Acesso em janeiro/2005.

ROTHSTEIN, E. **Emblems of mind: the inner life of music and mathematics**. New York: Times Books / Random House, 1995.

SAX, L. Mathematical self-concept: how college reinforces the gender gap. **Research in Higher Education**. Vol. 35, no. 2, p. 141-166, 1994.

SCHLIEMANN, A.D., DE AVELAR BRITO LIMA, A.P., LINS SANTIAGO, M. M. **O desenvolvimento da compreensão de igualdades.** 1991. Relatório de pesquisa. Recife, 1991.

SCHLIEMANN, A. D.; SANTIAGO, M. M. L.; BRITO LIMA, A. P. Understanding equivalences through balance scales. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 16, 1992, Durhan. **Proceedings of the XVIth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Durhan, New Hampshire, 1992.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématique. **European Journal of Psychology of Education**. Vol. I, no.2, p. 139-153, 1986.

_____. Le contrat didactique dans une approche psychosociale des situations d'ensigneiment. **Interactions Didactiques**. No. 8, p. 63-75, 1988a.

_____. Le contrat didactique: une construction theorique et une connaissance pratique. **Interactions Didactiques**. No. 9, p. 68-80, 1988b.

SCHUBAUER-LEONI, M.L., PERRET-CLERMONT, A.-N. Social interactions and mathematics learning. In: Nunes, T., Bryant, P. **Learning and teaching mathematics: an international perspective**. London: Psychology Press Ltd. Publishers, UK, 1997.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. ; GROSSEN, M. Negotiating the Meaning os questions in didactic and experimental contracts. **Europian Journal of Psychology of Education**. Vol. III, nº 4, p. 451-471, 1993.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1997.

SISTEMA DE AVALIAÇÃO DO ENSINO BÁSICO, Relatório SAEB 2004. Disponível em: http://www.inep.gov.br/download/saeb/2004/resultados/brasil.pdf.

SHULTE, A (orgs.). **As déias da Álgebra**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995, p. 79-88.

THOMPSOM, F. O ensino de álgebra para a criança mais nova. In: COXFORD, A.; SHULTE, A (orgs.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A (orgs.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995, p. 9-22.

VALSINER, J. & VAN DER VEER, R. **Vygostsky – uma síntese**. São Paulo: Edições Loyola, 1996, p. 316.

VERGNAUD, G. **L'enfant, la mathématique et la réalité.** Berne: Editions Peter Lang, 1981.

_____. Concepts et schémes dans une théorie opératoire de la represéntation. **Psychologie Française**. Paris, vols. 3 e 4, nº 30, 1985.

_____. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**. Vol. 1, p. 75-90, 1986.

_____.Vergnaud, G. Theorical framewooks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In: INTERNATIONAL CONGRESSS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 6, 1988, Budapeste. **Proceedings of the 6*th* International Congress on Mathematical Education** (ICME 6). Budapeste,1988, p. 39-41.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Paris, vol.10, no. 23, p.133-170, 1990.

_____. Que peut apporter l'analyse de l'activité à la formation des enseignants et des formateurs? **Carrefours de l'éducation**, Paris, no.10, p. 49-63, 2000.

VERGNAUD, G. ; CORTES, A. Introducing Algebra to "Low-level" Eighth and Nineth graders. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 10, 1986, London. **Proceedings of the Xth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. London, 1986, p. 319-324.

VERGNAUD, G., BROUSSEAU, G.; HULIN, M. (orgs.) **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques**: actes du Colloque de Sèvres. Sèvres: La Pensée Sauvage, 1987, p. 259-280.

VERGNAUD, G.; CORTES, A.; FAVRE-ARTIGUE, P. Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistémologiques et didactiques. In: VERGNAUD, G.; BROUSSEAU, G.; HULIN, M. (orgs.). **Didatique et aquisition des connaissances scientifiques**: actes du Colloque de Sèvres. Sèvres: La Pensée Sauvage, 1987, p. 259-280.

VIGOTSKI, L.S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo, Martins Fontes, 2001.

WALKERDINE, V. **The mastery of reason**: cognitive development and the production. 1988.

ANEXOS

ANEXO 1

TABELA 6 – PORCENTAGEM DE MULHERES ENTRE PROFESSORES POR TIPOS DE ESPECIALIDADE E ANO. BRASIL

Tipos de especialidade de professores	*Porcentagem de mulheres por ano*			
	1988		1998	
	Nº	%	Nº	%
Ensino pré-escolar	69.941	93,6	121.355	94,8
Ensino especial	5.746	81,6	19.169	88,0
Ensino fundamental	133.782	81,1	201.088	80,2
2º grau	369.602	72,4	449.447	72,2
Disciplinas pedagógicas	20.674	44,8	17.328	58,8
Formação profissional	35.758	46,0	59.132	56,0
Ensino superior não classificado	40.339	37,3	49.671	43,8
Ciências biológicas medicina	18.510	37,4	13.652	43,6
Ciências humanas de ensino superior	16.990	43,1	17.846	41,5
Ciências físicas e química	3.994	31,2	2.791	38,3
Matemática, estatística	4.978	30,7	5.229	36,1
Engenharia e arquitetura	10.016	15,3	6.596	23,5
Administrativas, econômicas e contábeis	11.396	19,5	8.745	23,2

Fonte: RAIS 1988 e 1998 [33] (www.fcc.org.br, acessado em 15 jan. 2001 às 15h)

Fonte: Rosemberg, 2001 (disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ref/v9n2/8638.pdf)

ANEXO 2

Considerações teóricas sobre a Análise Multidimensional

Introdução à análise multidimensional de dados categorizados de tipo classificação ascendente hierárquica (CAH)[34]

A análise descritiva multidimensional consiste em um ambiente de análise de dados em que as informações são "olhadas"sob diversas perspectivas de forma simultânea, a partir de um certo conjunto de dimensões classificatórias. Tais dimensões possibilitam a construção de uma "árvore" taxonômica que poderia ser exemplificada pelo diagrama abaixo, referente à classificação de aimais domésticos de companhia (cf. exemplo proposto originalmente por Da Rocha Falcão, 1996, pg. 143), ou de um *plano fatorial*, como será mostrado e discutido mais adiante.

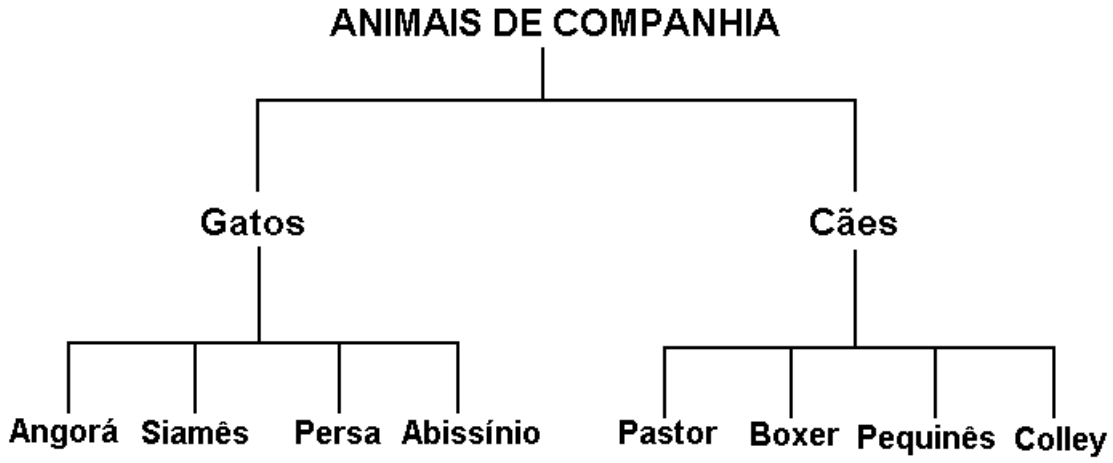


Diagrama 1

Uma ilustração de árvore de classificação taxonômica hierárquica.
(reproduzido de Da Rocha Falcão, 1996, pg. 143)

No exemplo acima, parte-se de um "nó" inicial que vai separar animais de estimação em geral em dois grnades grupos, os *gatos* e os *cães.* Tal partição inicial poderia ser feita a partir de um único critério, como por exemplo família zoológica. .

[34] Tal anexo informativo baseia-se em Da Rocha Falcão & Meira, 2003; Da Rocha Falcão & Régnier, 2002; Fenelon, 1981.

Consideremos o exemplo proposto por J.-P. Fenelon (1981, p. 30), referente a uma pesquisa na qual tentou-se estabelecer associações entre **cores** e **temas** (sentimentos/idéias), conforme listas abaixo:

CORES: azul, vermelho, amarelo, verde, lilás, violeta e cinza.

TEMAS: trabalho, perigo, férias, amor, ódio, calma.

ma estrutura de ordenação dos dados que permitiria a visualização de ligações entre cores e temas seria a tabela cruzada, tal qual ilustrada abaixo:

	Traba-lho	**Perigo**	**Férias**	**Amor**	**Ódio**	**Calma**
Azul						
Vermelho			**35**			
Amarelo						
Verde						
Lilás						
Violeta						
Cinza						

Nesta tabela, percebe-se que o tema **férias** foi associado 35 vezes à cor **vermelha**; uma análise unidimensional completa exigiria, ainda, a consideração da distribuição dos demais temas para a cor vermelha (gráfico 1), ou a distribuição das demais cores para o tema Férias (gráfico 2); dito de outra forma, fixa-se uma dimensão e examina-se a distribuição de freqüência das instâncias da outra dimensão.

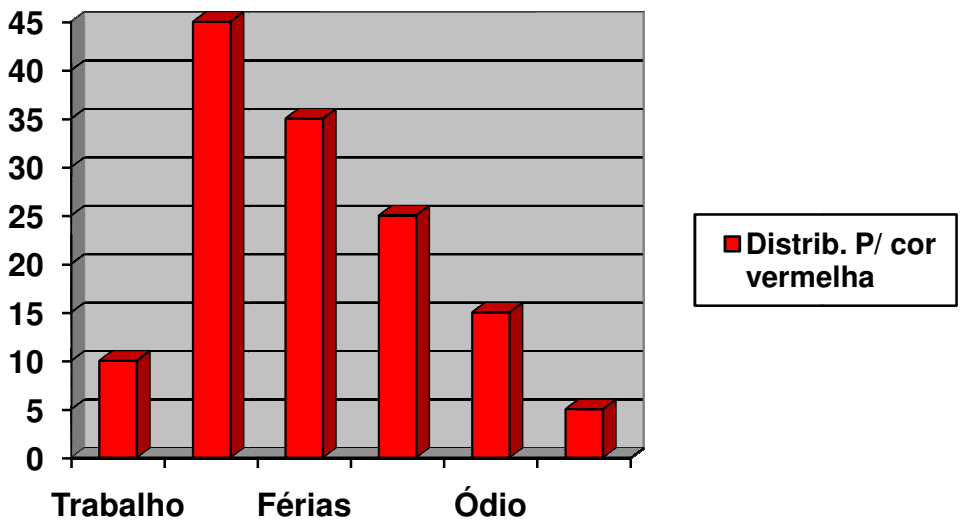


Gráfico 1: distribuição de freqüência dos temas para a cor vermelha

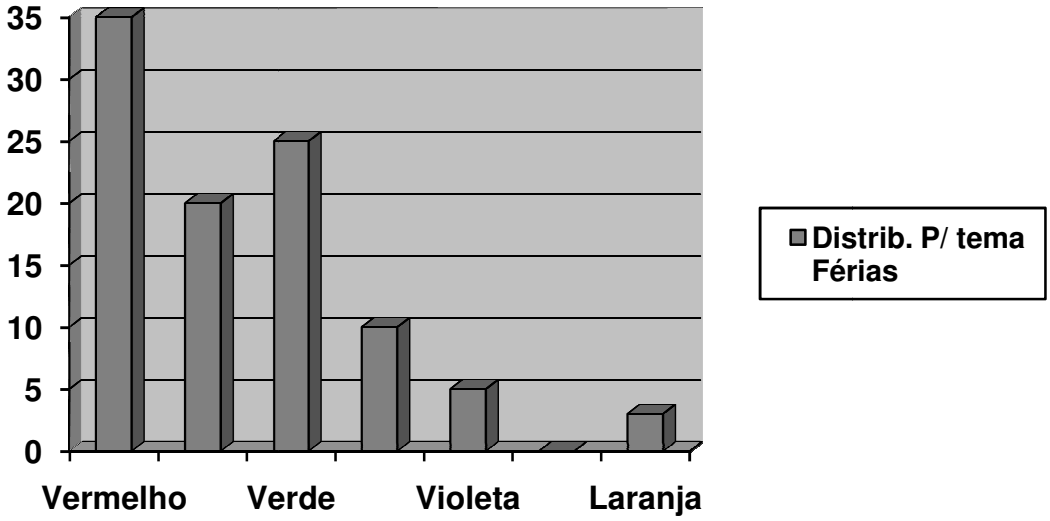


Gráfico 2: distribuição de freqüência de cores para o tema "Férias".

Uma tal análise unidimensional permite constatar uma associação entre Vermelho e Férias, como permitiria igualmente constatar outras associações entre outras cores e outros temas, *mas sempre em termos de uma dimensão de cor com uma dimensão de tema por vez*. Esse é um aspecto essencial a entender para se ter clareza acerca da *limitação estrutural* da análise unidimensional, e do ganho que é representado pela passagem à análise multidimensional. A relação entre Vermelho e Férias poderia ser analisada num contexto completamente diverso, conforme o plano fatorial abaixo:

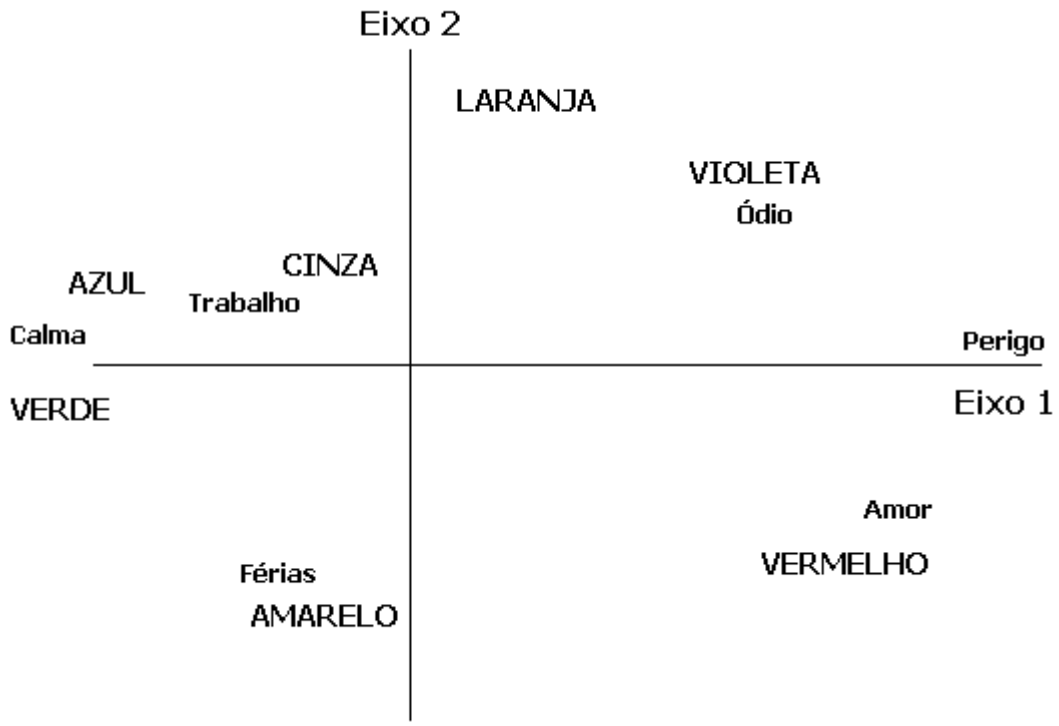


Ilustração 1: Plano fatorial envolvendo cores e temas.

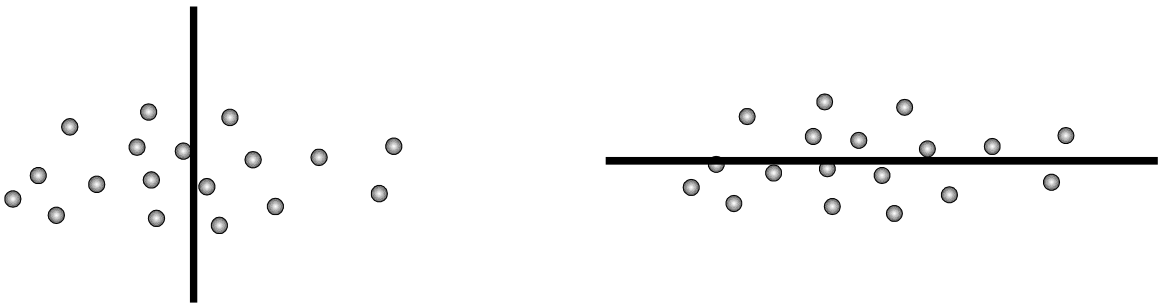
Vários aspectos merecem comentário acerca das informações contidas no plano fatorial acima:

3.1. O ponto de intersecção dos eixos 1 e 2 é denominado *centro de gravidade* ou *baricentro*, e o algoritmo que permite construir tal ponto, assim como os demais pontos onde se situam as diversas cores e temas é o *cálculo baricêntrico*. Trata-se de um algoritmo recursivo poderoso, conceitualmente simples mas de execução extremamente complexa quando realizada manualmente, razão pela qual a disseminação desse instrumento de análise seguiu-se à popularização do uso da ferramenta informática. No plano fatorial acima, como em qualquer plano fatorial, o baricentro representa um ponto de concentração máxima de tipicalidade. Nesse sentido, "*o baricentro está para a nuvem multidimensional de informações assim como a média está para uma distribuição unidimensional de freqüências*" (Benzecri e cols., 1980). Num plano multidimensional representando várias características de uma amostra de brasileiros (sexo, distribuição de renda, respostas a questionários, etc.), o baricentro poderia ser assimilado à idéia corrente de brasileiro típico. Convém salientar que, muito frequentemente, o baricentro não representa um elemento real da amostra pesquisada, mas tão somente um elemento virtual, uma criatura estatístico-matemática que serve de referência para situar os demais pontos (estes sim, necessariamente reais).

3.2. A distância de cada elemento do plano fatorial (no caso acima, cores e temas) em relação ao baricentro não é de natureza euclideana, mas expressa a *variância* desse elemento em relação ao baricentro, e, adicionalmente, a contribuição[35] desse elemento à variância global explicada pelo plano fatorial[36]. Quanto maior a distância de um determinado elemento em relação ao baricentro, tanto maior sua contribuição à variância global.

3.3. A localização de cada ponto (cor ou tema) leva em conta todos ou outros elementos na sua construção, e esse aspecto deve ser levado em consideração, pois esse aspecto é a carcacterística central do algoritmo e da filosofia de análise multidimensional de dados. Retomemos, assim, a relação anteriormente comentada entre Vermelho e Férias. Numa análise unidimensional, tinha-se verificado uma associação entre essa variáveis. Agora, num contexto multidimensional, essa associação ganha nuances novas e enriquecedoras. De fato, Vermelho e Férias continuam próximos, mas somente em termos de suas projeções sobre o eixo 2 (eixo vertical); em termos do eixo 1 (principal fator) *essas variáveis de fato se opõem* (surpresa!). Ora, uma tal constatação, visível à simples inspeção visual, seria bastante menos acessível no contexto de uma análise unidimensional clássica.

3.4. O eixo 1 representa a reta que consegue resumir a informação da nuvem com um mínimo de distorção. Para ilustrar de forma simples essa idéia de resumo com um mínimo de distorção, veja os dois casos ilustrados abaixo:



(a) **(b)**

Ilustração 2: duas formas de se passar um eixo fatorial por uma nuvem de dados, de forma a distorcer o mínimo possível a estrutura desta nuvem (o que é melhor conseguido pela opção (b).

[35] Em muitos programas, a variância é calculada dividindo-se o percentual 100 pelo número de modalidades contribuintes (indivíduos ou categorias de resposta), e depois multiplicando-se o resultado por 10, de forma a eliminar números menores que 1 (este é o caso do aplicativo usado na presente pesquisa).

[36] O que não esgota a variância total da nuvem de informações, havendo assim um resíduo não abarcado pelo plano fatorial, também chamado *variância não-explicada*.

No primeiro caso, a utilização de um eixo de resumo horizontal distorceria grandemente as informações, pois a comparação do somatório das variâncias de cada ponto em relação ao ponto médio com o somatório das variâncias das projeções de cada ponto sobre o referido eixo de resumo evidenciaria uma diferença importante. Por outro lado, o eixo ilustrado pelo segundo caso distorce bem menos as informações, pois a diferença entre o somatório das variâncias originais e projetadas sobre o eixo é bem menos importante.

No caso da construção do plano fatorial com o auxílio de algoritmo informatizado, cabe ao programa buscar o eixo mais adequado, e em seguida construir o eixo 2, ortogonal ao primeiro[37].

3.5. Uma vez construído o plano fatorial, cabe ao psicólogo buscar uma interpretação para os eixos, em função das modalidades que mais contribuem para ele nas duas extremidades. Esta tarefa guarda pouca relação com algum tipo de *expertise* estatística, relacionando-se muito mais com o *savoir-faire* específico do psicólogo enquanto tal.

[37] A ortogonalidade do segundo eixo em relação ao eixo principal é uma decisão metodológica, mais do que um imperativo de ordem técnica ou matemática. Há algoritmos que repetem para o eixo 2 o mesmo procedimento de busca do melhor eixo, caso em que este eixo não é necessariamente ortogonal ao primeiro. A opção pela ortogonalidade ou não do segundo eixo deve ser orientada pelas propriedades matemáticas que se deseja preservar, em função da análise que se deseja fazer (ver, nesse sentido, o aprofundamento desta discussão em Fenelon, 1981, pp.88-138).

ANEXO 3

Quadro das contribuições na categorização dos dados

Equações

Variáveis e sujeitos:

Fator 1

Lado esquerdo	CTR	Significação	Lado direito	CTR	Significação
AE31	32	Eq.3, acerto pré	AE33	20	Eq.3, NF, pré
BE21	35	Eq.2, acerto pós	BE22	21	Eq.2, erro, pós
BE31	27	Eq.3, acerto pós	BE23	20	Eq.2, NF, pós
BE41	40	Eq.4, acerto pós	BE33	49	Eq.3, NF, pós
BE51	19	Eq.5, acerto pós	BE43	68	Eq.4, NF, pós
BE52	19	Eq.5, erro pós	BE53	28	Eq.5, NF, pós
BE61	19	Eq.6, acerto pós	CE36	20	Proced pré, eq 3, sem proced.
CE31	18	Proced. Eq 3: conta, pré	DE12	22	Proced pós, eq 1, atrib val.
CE32	17	Proced. Eq 3: atrib val, pré	DE26	20	Proced pós, eq 2, sem proced..
DE13	21	Proced. Eq 1: resp num, pós	DE32	20	Proced pós, eq 2, atrib val.
DE23	21	Proced. Eq 2: resp num, pós	DE36	49	Proced pós, eq 3, sem proced..
DE31	19	Proced. Eq 3: conta, pós	DE46	68	Proced pós, eq 4, sem proced..
DE33	21	Proced. Eq 3: resp num, pós	DE56	28	Proced pós, eq 5, sem proced..
DE43	21	Proced. Eq 4: resp num, pós			
Sujeitos: 3 (116: Táis), 1 (88: Diva).			Sujeitos : 11 (181: Al), 6 (166: V. S), 4 (96: Ana)		

Fator 2

Lado superior	CTR	Significação	Lado inferior	CTR	Significação
AE21	21	Eq 2, pré, acerto.	AE22	18	Eq 2, pré, erro.
AE23	27	Eq 2, pré, NF.	BE52	26	Eq 5, pós, erro.
BE51	72	Eq. 5, pós, acerto.	BE63	16	Eq 6, pós, NF.
BE61	72	Eq. 6, pós, acerto.	CE13	22	Proced, Eq. 1, pré,resp num.
CE26	27	Proced, Eq. 2, pré,sem proced	CE22	36	Proced, Eq. 2, pré,atrib val.
DE21	29	Proced, Eq. 2, pós,conta	DE13	51	Proced, Eq. 1, pós,resp num
DE34	41	Proced, Eq. 3, pós, balança	DE23	51	Proced, Eq. 2, pós,resp num
			DE33	51	Proced, Eq. 3, pós,resp num
Sujeitos: 10 (288: M) 14 (148: Yago) 1 (101: Diva)			Sujeitos : 3 (209: Taís) 2 (157: Ana)		

Fator 3

Lado superior	CTR	Significação	Lado inferior	CTR	Significação
AE31	57	Eq 3, pré, acerto.	AE32	59	Eq 3, pré, erro.
BE41	50	Eq 4, pós, acerto.	AE42	30	Eq 4, pré, erro.
CE13	28	Proced, Eq. 1, pré, resp num	BE42	105	Eq 4, pós, erro.
DE13	46	Proced, Eq. 1, pós, resp num	BE52	16	Eq 5, pós, erro.
DE33	46	Proced, Eq. 3, pós, resp num	BE62	33	Eq 5, pós, erro.
DE34	16	Proced, Eq. 3, pós, balança	CE23	33	Proced, Eq. 2, pré, resp num
DE44	28	Proced, Eq. 4, pós, balança	CE41	30	Proced, Eq. 4, pré, conta
DE53	18	Proced, Eq. 5, pós, resp num	DE31	56	Proced, Eq. 3, pós, conta
DE54	28	Proced, Eq. 5, pós, balança	DE41	64	Proced, Eq. 4, pós, conta
DE64	28	Proced, Eq. 6, pós, balança	DE51	62	Proced, Eq. 5, pós, conta
			DE61	47	Proced, Eq. 6, pós, conta
Sujeitos: 2 (150: Yn) 3 (97: Taís) 10 (84: M)			Sujeitos : 8 (177: Beto) 5 (160: L) 7 (152: V. A)		

Problemas do Livro Didático

Variáveis e sujeitos:

Fator 1

Lado direito	CTR	Significação	Lado esquerdo	CTR	Significação
AL13	27	Lv.1, pré, NF	AL12	23	Lv.1, pré, erro
AL21	15	Lv.2, pré, acerto	AL31	37	Lv.3, pré, acerto
AL33	33	Lv.3, pré, NF	AL71	37	Lv.7, pré, acerto
AL73	27	Lv.7, pré, NF	AL81	34	Lv.8, pré, acerto
AL83	23	Lv.8, pré, NF	AL82	18	Lv.8, pré, erro
BL61	15	Lv.6, pós, acerto	BL11	20	Lv.1, pós, acerto
BL83	18	Lv.8, pós, NF	CL14	34	Proced, Lv.1, pré, balança
CL16	41	Proced, Lv.1, pré,sem proced	CL31	18	Proced, Lv.3, pré, conta
CL36	46	Proced, Lv.3, pré,sem proced	CL41	47	Proced, Lv.4, pré, conta
Sujeitos: 9 (137 - Ad) 11 (133 - Al) 10 (113 - M)			Sujeitos: 2 (316 - Yn) 3 (142 - Taís)		

Fator 2

Lado superior	CTR	Significação	Lado inferior	CTR	Significação
AL82	23	Lv.8, pré, erro	AL81	15	Lv.8, pré, acerto
BL32	14	Lv.3, pós, erro	BL11	26	Lv.1, pós, acerto
BL42	16	Lv.4, pós, erro	BL31	19	Lv.3, pós, acerto
BL62	26	Lv.6, pós, erro	BL73	15	Lv.7, pós, NF
BL82	17	Lv.8, pós, erro	CL14	15	Proced, Lv.1, pré, balança
CL13	27	Proced, Lv.1, pré, resp num	CL41	16	Proced, Lv.4, pré, conta
CL22	63	Proced, Lv.2, pré, atrib val	CL81	16	Proced, Lv.8, pré, conta
CL33	40	Proced, Lv.3, pré, resp num	DL15	15	Proced, Lv.1, pós, equação
CL43	27	Proced, Lv.4, pré, resp num	DL22	20	Proced, Lv.2, pós, atrib val
CL63	40	Proced, Lv.6, pré, resp num	DL33	14	Proced, Lv.3, pós, resp num
CL71	63	Proced, Lv.7, pré, conta	DL42	13	Proced, Lv.4, pós, atrib val
CL82	63	Proced, Lv.8, pré, atrib val	DL71	25	Proced, Lv.7, pós, conta
DL13	33	Proced, Lv.1, pós, resp num	DL76	15	Proced, Lv.7, pós, sem proced
DL21	24	Proced, Lv.2, pós, conta			
DL31	25	Proced, Lv.3, pós, conta			
DL61	33	Proced, Lv.6, pós, conta			
Sujeitos: 4 (520 – Ana) 8 (111 – Beto)			Sujeitos: 14 (165 – Yago) 1 (123 – Diva)		

Fator 3

Lado superior	CTR	Significação	Lado inferior	CTR	Significação
AL11	35	Lv.8, pré, acerto	AL13	35	Lv.1, pré, NF
AL32	29	Lv.3, pré, erro	AL21	26	Lv.2, pré, acerto
BL73	43	Lv.7, pós, NF	AL23	14	Lv.2, pré, NF
CL11	21	Proced, Lv.1, pré, conta	AL33	13	Lv.3, pré, NF
CL21	54	Proced, Lv.2, pré, conta	AL81	14	Lv.8, pré, acerto
DL11	54	Proced, Lv.1, pós, conta	BL61	26	Lv.6, pós, acerto
DL21	22	Proced, Lv.2, pós, conta	BL71	17	Lv.7, pós, acerto
DL22	28	Proced, Lv.2, pós, atrib val	CL14	14	Proced, Lv.1, pré, balança
DL31	15	Proced, Lv.3, pós, conta	CL16	43	Proced, Lv.1, pré, sem proced
DL32	14	Proced, Lv.3, pós, atrib val	CL23	21	Proced, Lv.2, pré, resp num
DL42	30	Proced, Lv.4, pós, atrib val	CL26	14	Proced, Lv.2, pré,sem proced
DL63	29	Proced, Lv.6, pós, resp num	CL36	14	Proced, Lv.3, pré,sem proced
DL76	43	Proced, Lv.7, pós,sem proced	DL15	14	Proced, Lv.1, pós, equação
DL83	15	Proced, Lv.8, pós, resp num	DL23	40	Proced, Lv.2, pós, resp num
			DL33	47	Proced, Lv.3, pós, resp num
			DL43	32	Proced, Lv.4, pós, resp num
Sujeitos: 14 (207 – Yago) 13 (145 – O) 6 (117 – V. S.)			Sujeitos: 9 (193 – A) 10 (106 – M) 2 (105 – Yn)		

Problemas do contexto da pesquisa

Variáveis e sujeitos:

Fator 1

Lado direito	CTR	Significação	Lado esquerdo	CTR	Significação
AP41	23	Pb.4, acerto pré	AP63	14	Pb.6, NF, pré
AP51	38	Pb.5, acerto pré	BP13	33	Pb.1, NF, pós
BP11	18	Pb.1, acerto pós	BP23	24	Pb.2, NF, pós
BP21	13	Pb.2, acerto pós	BP33	22	Pb.3, NF, pós
BP31	27	Pb.3, acerto pós	BP43	16	Pb.4, NF, pós
BP41	22	Pb.4, acerto, pós	BP53	27	Pb.5, NF, pós
BP51	36	Pb.5, acerto pós	BP63	24	Pb.6, NF, pós
BP61	38	Pb.6, acerto pós	CP56	15	Proced, Pb.5, pré, sem proced
CP33	24	Proced. Pb.3, pré, resp num	CP66	19	Proced, Pb.6, pré, sem proced
CP42	18	Proced. Pb.2, pré, atrib val	DP16	33	Proced, Pb.1, pós, sem proced
CP52	20	Proced. Pb.5, pré, atrib val	DP26	24	Proced, Pb.2, pós, sem proced
CP62	20	Proced. Pb.6, pré, atrib val	DP36	22	Proced, Pb.3, pós, sem proced
CP65	13	Proced. Pb.6, pré, equação	DP46	30	Proced, Pb.4, pós, sem proced
DP31	14	Proced. Pb.3, pós, conta	DP56	30	Proced, Pb.5, pós, sem proced
DP42	20	Proced. Pb.4, pós, atrib val	DP66	27	Proced, Pb.6, pós, sem proced
DP44	13	Proced. Pb.4, pós, balança			
DP52	20	Proced. Pb.5, pós, atrib val			
DP54	13	Proced. Pb.5, pós, balança			
DP62	20	Proced. Pb.6, pós, atrib val			
DP64	13	Proced. Pb.6, pós, balança			
Sujeitos: 3 (261 – Taís) 1 (170 – Diva) 2 (76 – Y) 12 (28 – F) 4 (13 – Ana)			Sujeitos : 14 (152 – Yago) 9 (126 – Ad) 11 (117 – Al) 6 (42 – V. S.)		

Fator 2

Lado superior	CTR	Significação	Lado inferior	CTR	Significação
AP51	21	Pb.5, acerto, pré	BP32	34	Pb.3, erro, pós
BP13	18	Pb.1, NF, pré	BP42	49	Pb.4, erro, pós
BP23	18	Pb.2, NF, pré	BP52	49	Pb.5, erro, pós
BP43	17	Pb.4, NF, pré	CP41	49	Proced. Pb.4, pré, contas
BP53	15	Pb.5, NF, pré	CP61	26	Proced. Pb.6, pré, contas
BP61	21	Pb.6, acerto, pós	DP11	23	Proced. Pb.1, pós, contas
CP33	17	Proced. Pb.3, pré, resp num.	DP21	23	Proced. Pb.2, pós, contas
CP35	13	Proced. Pb.3, pré, equação	DP41	38	Proced. Pb.1, pós, contas
CP42	21	Proced. Pb.4, pré, atrib val	DP43	13	Proced. Pb.4, pós, resp num.
CP52	26	Proced. Pb.5, pré, atrib val	DP51	16	Proced. Pb.5, pós, contas
CP62	26	Proced. Pb.6, pré, atrib val	DP53	28	Proced. Pb.5, pós, resp num.
DP13	13	Proced. Pb.1, pós, resp num.	DP61	16	Proced. Pb.6, pós, contas
DP16	18	Proced. Pb.1, pós,sem proced	DP63	15	Proced. Pb.6, pós, resp num.
DP23	13	Proced. Pb.2, pós, resp num.			
DP26	18	Proced. Pb.2, pós,sem proced			
DP42	26	Proced. Pb.4, pós, atrib val			
DP46	18	Proced. Pb.4, pós,sem proced			
DP52	26	Proced. Pb.5, pós, atrib val			
DP56	18	Proced. Pb.5, pós,sem proced			
DP62	26	Proced. Pb.6, pós, atrib val			
Sujeitos: 3 (231 – Taís) 14 (84 – Yagoi) 6 (45 – V. S.) 9 (40 – Ad) 1 (37 – Diva)			Sujeitos : 8 (138 – Beto) 13 (113 – O) 4 (100 – Ana) 12 (94 – F) 7 (94 – V. A.)		

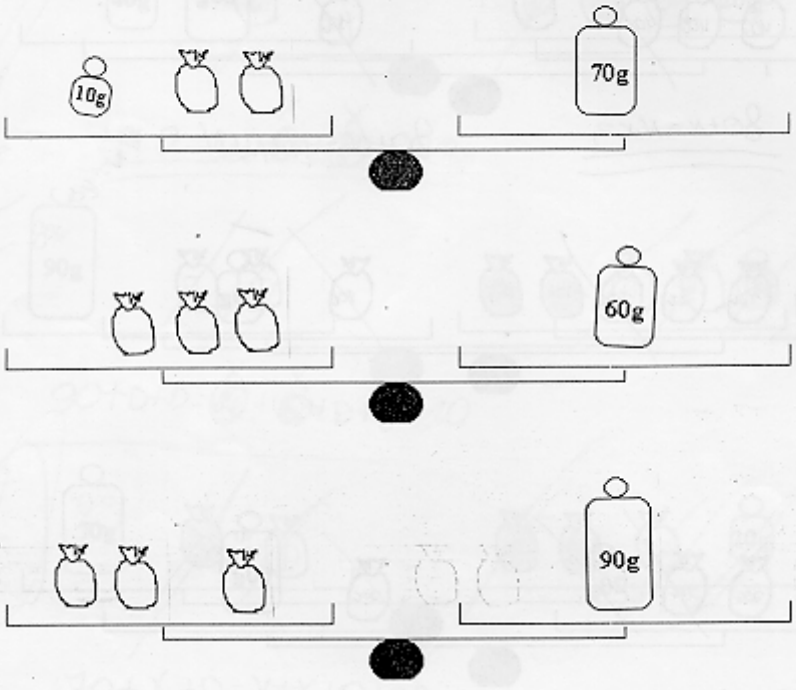
Fator 3

Lado superior	CTR	Significação	Lado inferior	CTR	Significação
AP33	29	Pb.3, erro, pré	AP52	19	Pb.5, erro, pós
AP43	18	Pb.4, erro, pré	CP35	18	Proced. Pb.3, pré, equação
CP23	21	Proced. Pb.2, pré, resp num.	CP43	22	Proced. Pb.4, pré, resp num.
CP36	29	Proced. Pb.3, pré,sem proced	CP53	46	Proced. Pb.5, pré, resp num.
CP46	18	Proced. Pb.4, pré,sem proced	CP63	22	Proced. Pb.6, pré, resp num.
CP52	48	Proced. Pb.5, pré, atrib val	CP65	29	Proced. Pb.6, pré, equação
CP56	17	Proced. Pb.5, pré,sem proced	DP31	18	Proced. Pb.3, pós, contas
CP62	48	Proced. Pb.6, pré, atrib val	DP44	29	Proced. Pb.4, pós, balança
DP13	45	Proced. Pb.1, pós, resp num.	DP54	29	Proced. Pb.5, pós, balança
DP23	56	Proced. Pb.2, pós, resp num.	DP64	29	Proced. Pb.6, pós, balança
DP33	49	Proced. Pb.3, pós, resp num.			
DP42	48	Proced. Pb.4, pós, atrib val			
DP52	48	Proced. Pb.5, pós, atrib val			
DP62	48	Proced. Pb.6, pós, atrib val			
Sujeitos: 3 (322 – Taís) 11 (80 – Al) 7 (59 – V. A.) 13 (58 – O) 10 (45 – M)			Sujeitos: 1 (192 – Diva) 2 (82 – Yn) 6 (73 – V. S.) 12 (31 – F) 5 (28 – L) 4 (13 – Ana)		

ANEXO 4

Tarefas da Seqüência Didática

Lembrando pra você: Na balança abaixo há saquinhos de produtos de dois tipos, representados pela ***cor dos saquinhos*** (branco e cinza). Os saquinhos brancos pesam todos a mesma coisa, e os saquinhos cinza também.



Lembrando pra você alguns sinais importantes em atemática:

>	MAIOR QUE
<	MENOR QUE
=	IGUAL A

1.

A = B
A + X > B

(>)
<
=

2.

A = B
A + X = B + X

>
<
(=)

3.

A > C
N = D

A + N > C + D

(>)
<
=

4.

Z < T
X < Y

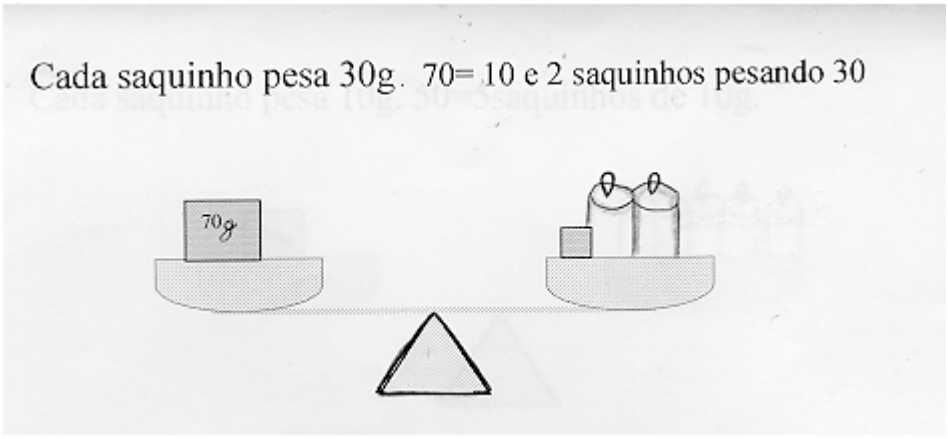
Z + X < T + Y

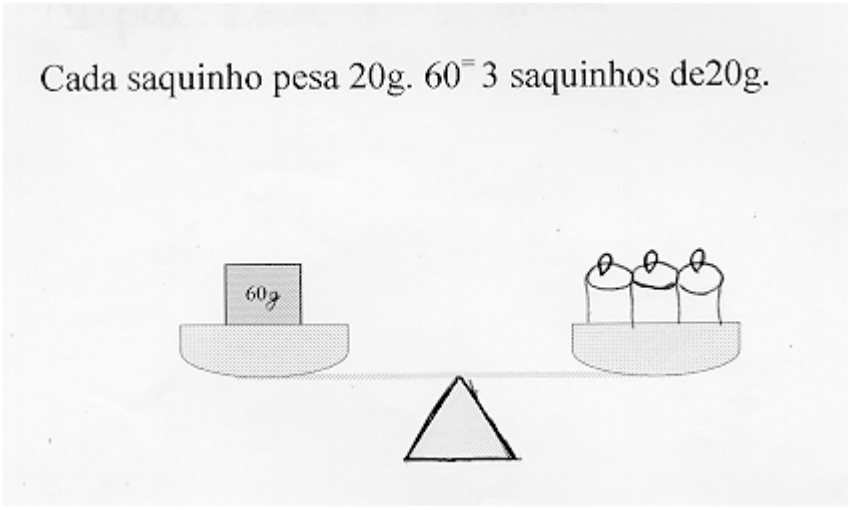
>
(<)
=

ANEXO 4a

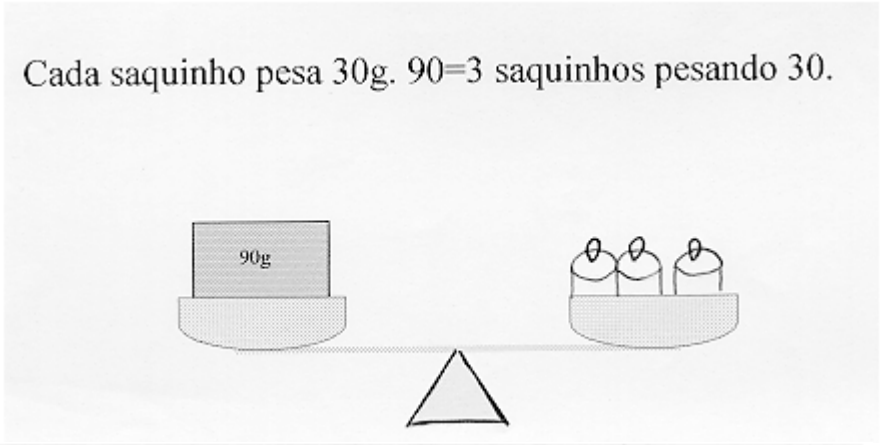
Tarefas da Seqüência Didática: exemplo da tarefa da balança produzida por duas duplas no computador

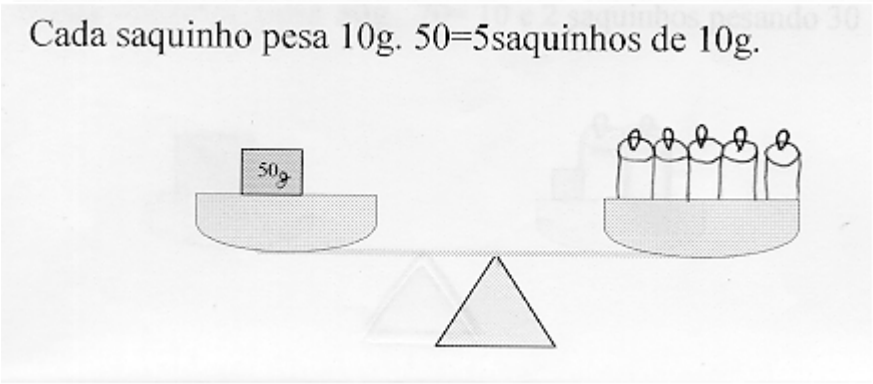
Dupla: T e Y (duas meninas)



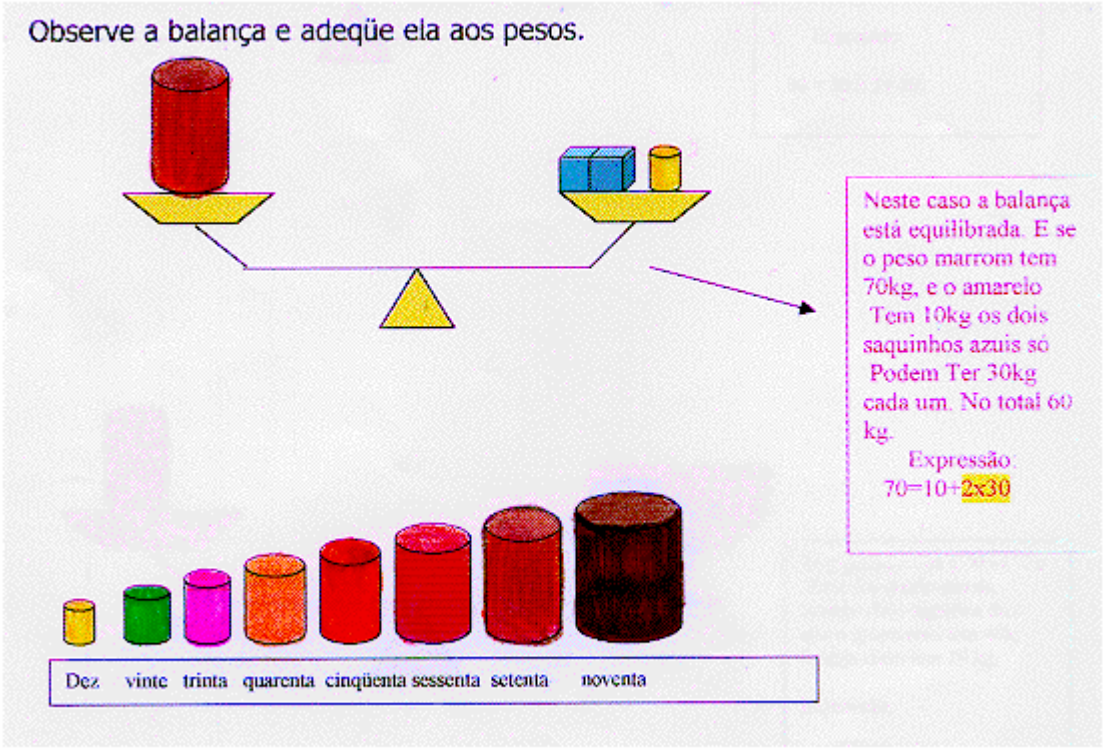


(continuação)

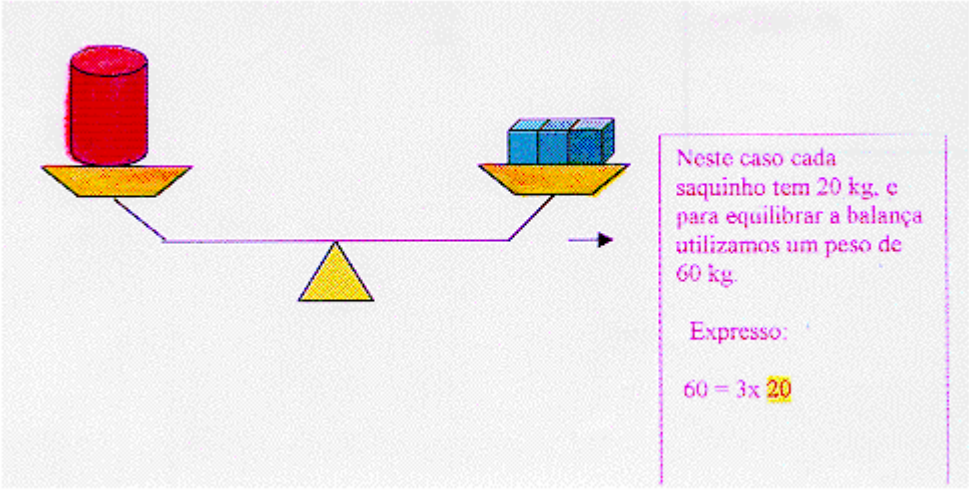




Trabalho de outra Dupla: D e B (um menino e uma menina)



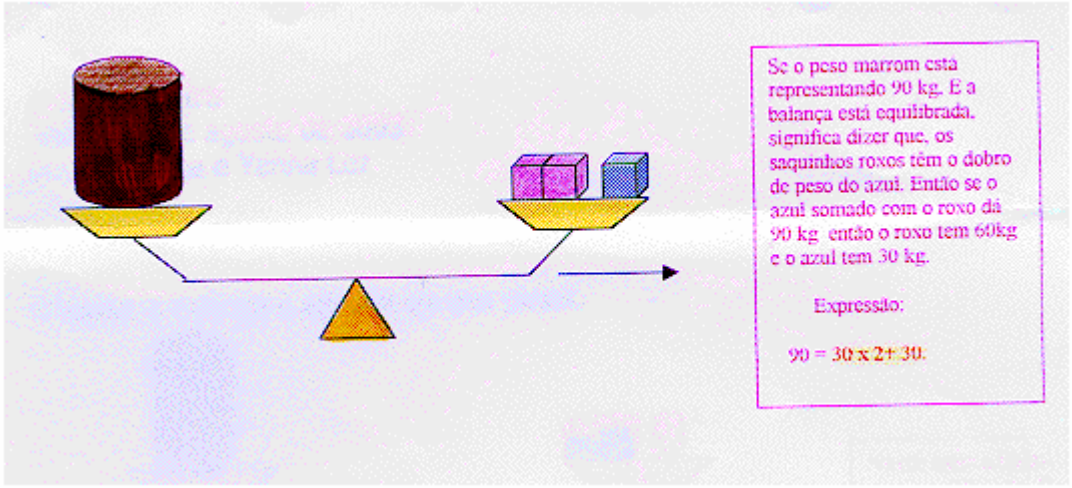
(continuação)



Neste caso cada saquinho tem 20 kg, e para equilibrar a balança utilizamos um peso de 60 kg.

Expresso:

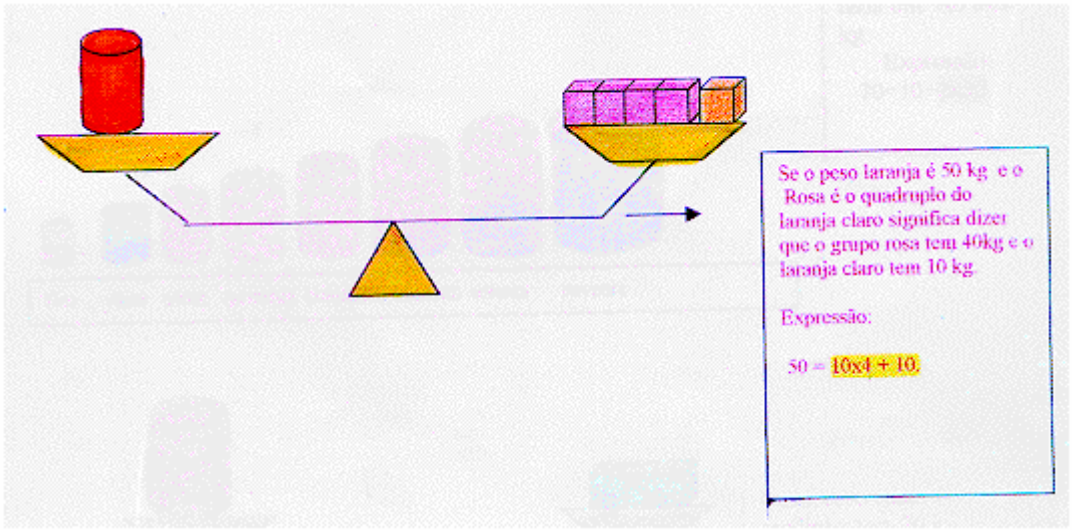
60 = 3x 20



Se o peso marrom está representando 90 kg. E a balança está equilibrada, significa dizer que, os saquinhos roxos têm o dobro de peso do azul. Então se o azul somado com o roxo dá 90 kg então o roxo tem 60kg e o azul tem 30 kg.

Expressão:

90 = 30 x 2+ 30.



Se o peso laranja é 50 kg e o Rosa é o quadruplo do laranja claro significa dizer que o grupo rosa tem 40kg e o laranja claro tem 10 kg.

Expressão:

50 = 10x4 + 10.

ANEXO 5

Descrição da Seqüência Didática

ESCOLA PARTICULAR DA CIDADE DO RECIFE – 6ª SÉRIE

PROFª JOANA (NOME FICTÍCIO) – LICENCIADA EM MATEMÁTICA PELA UFRPE

Dias/horários de observação em sala de aula:

- 2ª feira: das16h20 às 17h10 (uma aula)
- 5ª feira: das 13h20 às 15h (duas aulas)

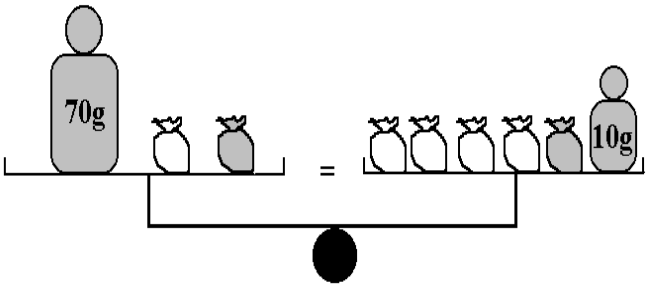
1. Descrição da Seqüência Didática:

Para relembrar, vale a pena retomar o que já foi dito na metodologia sobre a seqüência. Tal seqüência didática consistiu numa série de atividades apresentadas aos alunos em sala-de-aula, pela professora de matemática, nos dias e horários habituais das aulas de matemática. Tais atividades foram sempre entregues aos alunos numa folha de papel ofício, solicitando-se deles que as fizessem em sala de aula, a partir das discussões com o professor e os colegas de sala.

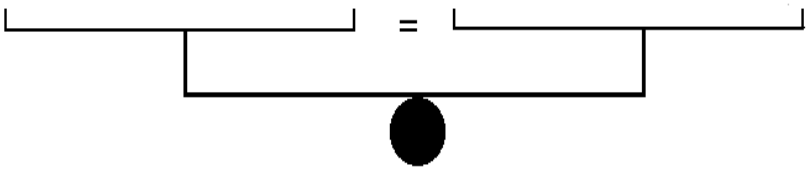
As atividades propostas na seqüência foram consideradas pela coordenação pedagógica da escola como adequadas à programação do conteúdo escolar previsto para a 6ª série. De fato, tais atividades podem ser consideradas como complementares ao conteúdo de álgebra já previsto no programa de atividades em matemática desta série. Exemplos das atividades realizadas com os alunos estão a seguir. No anexo encontra-se a folha com o registro de todas as atividades.

Etapa Balança

8. Desenho da balança com pesos e saquinhos para descobrir o valor dos saquinhos



9. Desenho da balança vazia para compor as situações de igualdade



Etapa Quantidades Numéricas

10. Situações para os alunos completarem, estabelecendo as relações usando os sinais: > ; < ; = , entre quantidades numéricas representadas. Por exemplo:

	3	
20	**?**	17

11. Situações para os alunos completarem, calculando a diferença entre quantidades numéricas representadas. Por exemplo:

	?	
17	**<**	19

12. Situações para os alunos completarem, onde são dadas a relação (sinal) e a diferença (numero), compondo quantidades numéricas. Por exemplo:

	5	
?	⟩	**?**

Etapa Cálculo Simbólico (relações de 2ª ordem)

13. Situações para estabelecer uma relação, a partir de outra relação, entre letras usando os sinais: > ; < ; =

A	**>**	**B**
A + X	?	**B**

A	**=**	**B**
A - X	?	**B - X**

Etapa Problemas Verbais

14. Problemas verbais usando calculo simbólico

Um grupo de pedreiros de Casa Amarela é capaz de construir uma certa quantidade de casas em um mês, enquanto outro grupo de pedreiros do bairro da Macaxeira constrói uma outra quantidade de casas no mesmo tempo. Vamos chamar de A esse tanto de casas que o grupo de pedreiros de Casa Amarela constrói, e vamos chamar de B o tanto de casas construídas pelo grupo da Macaxeira. Nós sabemos que A é maior que B. O que poderíamos sugerir fazer para que o número de casas construídas pelo segundo grupo de pedreiros se tornasse igual ao número de casas construídas pelo primeiro grupo?

Então, dividindo estas etapas pelos dias de aplicação, tem-se a seguinte distribuição:

- Etapa da Balança: 1º; 2º; 3º e 4º dia
- Etapa Quantidade Discretas: 5º dia
- Etapa Cálculo Simbólico (relações de 2ª ordem): 6º dia
- Etapa Problemas Verbais: 7º e 8º dia

1º DIA: 11/08/03

[Neste dia já estava previsto que os alunos iriam para a sala de informática. Então, a professora pediu que eles fizessem um círculo para ela explicar a atividade que eles iriam realizar].

[No quadro a professora disse que eles iam fazer atividade em dupla, no computador (utilizando tratamento de texto), desenhar a balança – 1ª ação: descobrir o valor do saquinho; 2ª ação: fazer uma expressão matemática]

[Foram para o computador e a professora colocou no quadro o seguinte]:

1ª pesagem
disponível: 70g/10g e 00 (dois saquinhos agrupados)
2ª pesagem
disponível: 60g / 000 (três saquinhos agrupados)
3ªpesagem
disponível: 90g/ 00 (dois saquinhos agrupados)

[Os alunos desenharam a balança no computador, mas tiveram muitas dúvidas para realizar a atividade que a professora pediu]

2º DIA: 14/08/03

[Formaram-se seis duplas, para trabalhar no computador – cinco homogêneas e uma heterogênea – quanto ao gênero. Dois alunos trabalharam sozinhos].

[A professora distribuiu a folha com o modelo das quatro primeiras situações e os alunos fizeram no computador, calculando o valor do saquinho e fazendo a expressão. A professora ajudou os alunos na construção das expressões].

[Hoje, a partir do modelo os alunos entenderam o que era para fazer]

[Uma dupla estava descrevendo em linguagem natural o que havia na balança, a professora percebeu e disse para elas fazerem uma expressão/equação que simbolizasse aquele texto]

3º DIA: 18/08/03 – [AULA NA SALA DE AULA APÓS O RECREIO]

[A professora comentou rapidamente o trabalho que eles fizeram no computador: alguns alunos escreveram com palavras um texto, outros escreveram uma expressão com números, com números e letras e, em seguida, a professora escreveu no quadro]:

\70g / \10g 00 / [desenho da balança: o **0 representa o saquinho**]

70g = 10g + 30g $\times$ 2

Professora: Se colocasse o saquinho do outro lado ia ficar desequilibrado, mas o objetivo não é deixar equilibrado? O sinal significa que 70 é igual a 10 mais dois saquinhos

[A professora escreveu no quadro de outro jeito]:

70g = 10 + N + N

Professora: A letra só serve para o valor desconhecido; é álgebra

N + N $\Rightarrow$ 2N

[Escreveu também]:

60 = X + X + X [A professora disse: os números somados são os mesmos]

20 20 20

3 $\times$ X

60 = 3 $\times$ 20

O aluno Y falou: tem o peso de 10, tirando de 70, 60, dividido por 2

Professora: por que divide por 2?

O aluno Y: porque tem dois saquinhos

[A professora escreve no quadro]

10g + nn = 70g [a professora refletiu que nn ≠ n + n]

Um aluno V: 0 = X

(2X + 10) = 70

2X + 10/70 = 30 , tá certo?

[o aluno abreviou, por sua própria iniciativa, as etapas do procedimento]

[A professora fez relação com o pré-teste dizendo que os saquinhos correspondiam ao X das equações e falou em seguida: vamos por passos:

1º) 2X + 10 = 70

2º) 2X = 70 – 10

3º) 2X = 60

4º) X = 60 ÷ 2

5º) X = 30]

[A professora disse que devia seguir os passos, fazendo referência à forma direta que o aluno V tinha feito]

[A professora entregou a atividade e disse: o que vocês fariam para descobrir o peso?]

Um aluno: Um teria um valor diferente?

Professora: todos têm o mesmo peso

Professora: atribuindo valor, por tentativa:

40 + 40 dá 80 com 40, 120 80 + 40 dá 120

\ 0 0 0/ \ 0 80/

N + N + N = N + 80

A aluna Y: Como chegar a esse 40, não tem nenhum indício pra chegar a esse 40?

4º DIA: 21/08/03

[A professora entregou as folhas e começou a comentar, resgatando a aula anterior, falando sobre a manipulação de incógnitas: como foi que vocês encontraram esse 40?]

[Nenhum dos alunos lembrava]

[A professora foi ao quadro desenhar a situação: \ 0 0 0 / \ 0 80g /

40 + 40 + 40 = 120; 40 + 80 = 120]

D: 80 pode dividir por 2, tem um saquinho do lado do 80 e do outro lado

V: Se tivesse mais um saquinho dividiria por 3 ou por 4?

Professora: Vamos ver a outra para ver se vocês entenderam mesmo

\ 0000/ \30 0/

[a professora falou: corta um saquinho de cada lado, 30 dividido por 3 igual a 10g]

[os alunos M e D referem-se a outra situação]:

M: Você soma 60 mais 20, ai divide (...) [foi interrompido pela aluna D]

D: 60 menos 20 aí dá 40, aí tira um saquinho de cada lado, aí 40 dividido por 2 dá 20

[A professora faz a representação da situação que M e D estavam se referindo]:

N + N + N + 20 = N + 60

3N + 20 = N + 60

M faz outra situação: 40 + N = N + X + X + 20

Eu faria a mesma técnica do passado, tira 20 de 40, cortava os 2N

40 = X + X + 20

20 = X + X

D: 40 menos 20 igual a 20, 20 dividido por 2

Professora: Dá pra saber o valor de N?

D: Pode ser qualquer número porque está anulado

[A professora propôs uma atividade no papel e disse: é resolver no papel individualmente]

[Mateus queria fazer oralmente]

[Enquanto a turma estava resolvendo, a professora foi junto do aluno A e de outros alunos]

[Os alunos pediram para ir ao quadro resolver e explicar no quadro]

D e M: \90 0 0/ \10 0 0 @ @/ [eles desenharam a balança]

Explicação dos dois alunos:

Corta os dois saquinhos que não é necessário, aí 90 – 10 = 80 ÷ 2 = 40

Professora: Matematicamente tá certo? Não! Então, faz direito

[Nesta ocasião **a pesquisadora** interfere e faz o comentário de que o sinal de = está sendo usado como transformador. Faz um tipo de apelo à professora para que ela discuta com os alunos esta questão]

Alunos D e M: 10 + 2N + 2X = 90 + 2N

Professora: Vai descobrir o quê? O X? Elimina então o N

Alunos D e M: 10 + 2X = 90

2X = 90 – 10

2X = 40 (?)

[A professora diz como é que faz: 2X = 80

X = 40]

V e F: Tirei um preto e um preto; eliminei um preto e um preto, um branco e um branco

D e T: [Foram fazer a expressão]: 70 + X + N = X + X + N + 20

70 – 20 =

50 ÷ 1 =

50

Professora deu a seguinte definição: A palavra equação tem um prefixo equi que significa equilíbrio, equivale. Equação significa dizer: ação de equilíbrio.

[A professora puxou a incógnita (o X)]

[A professora refletiu cada passo para a resolução da equação

70 + X + N = X +N + 20 1ª ação

70 + X + N = X +N + 20 2ª ação (cortar os X e os N)

X + 20 = 70 3ª ação

X = 70 – 20

X = 50]

[Os alunos iam ao quadro para desenhar, resolver e explicar]

[**M** foi ao quadro, desenhou e escreveu:

\50 0 0 @ @/ \ @ @ 0 0 0 0 10/ 0 = n

@ = x

50 + n + n + x + x = x + x + n + n + n + n + 10]

M: Xô n, xô n ...

[Na medida em que ia cortando na representação, M ia cortando na balança]

Professora: Vamos fazer devagar

50 = n + n + 10

50 – 10 = n + n

40 = 2n

n = 40 ÷ 2

n = 20

Professora: Representado passo a passo para deixar tudo bem explicado

[A professora entregou a folha em branco para criarem e fazerem a equação em dupla.Uma dupla fazia uma situação para o outro responder]

[No momento da elaboração das situações, os alunos tiveram certa dificuldade de criar, estavam colocando mais de uma incógnita]

5º dia: 25/08/03

[A professora começou dizendo que vai fazer uma seqüência de atividade e escreveu o seguinte diagrama]:

	5	
?		**?**
	〉	

[Um aluno escreveu o número 3]:

	5	
3		**?**
	>	

[A professora explicou: Esse número (3) deve ser maior de que esse (?), o número para ser descoberto, e a diferença entre eles é 5. Então pode ser 3? Será que não pode?

[A professora escreveu no quadro: 3 – (-8) = 5, e falou: relembrando os números negativos]:

[A professora dividiu a turma em 4 grupos e fez um jogo de competição com pontuação.Ela dava a diferença e o sinal no diagrama, o grupo A colocava um número no lado esquerdo, o grupo B no lado direito, o grupo C explicava e o grupo D confirmava ou não. A situações criadas foram as seguintes]:

	2	
17		19
	<	

[A professora escreveu o 2 (diferença) e o sinal (⟨), o grupo A escreveu 17, o grupo B 19, o grupo C explicou e o grupo D confirmou]

[Outras situações criadas pela professora] :

	0	
-17		-17
	=	

Um aluno: É muito fácil porque a diferença é 0

	1	
-13		-14
	>	

[Nessas duas situações anteriores, os alunos completaram com números negativos por sugestão da professora que tinha como objetivo dificultar as situações numéricas e revisar os números negativos]

[Outra situação]

	3	
20		17
	>	

[Ao final da aula, a professora criou uma nova situação, introduzindo letras]

[A professora escreveu a seguinte atividade no quadro: $X \neq 0$ Completar com **> ; < ; =**]

A	=	B
A + X	**?**	B

[A professora explicou usando números]: 7 = 7

10 > 7

Se A	**>**	B
Então, A + X	**>**	B
E não A + X	**=**	B

6º dia: 28/08/04

[A professora deu continuidade à atividade que tinha iniciado na aula anterior]

[A professora dividiu a turma em quatro grupos de alunos e escreveu no quadro a situação abaixo para eles responderem]:

Se A	**=**	B
Então, A − X	**?**	B − X

Grupo A: acho que é igual

Grupo B: se A é 7 e B é 7, então se X for 1, então 7 menos 1 é 6; 7 menos 1 é 6 (referindo-se inicialmente a A − X e depois a B − X.

Grupo C: está certo"

Grupo D: [fez uma alteração, mas manteve a igualdade]

A	**=**	B
A + X	**=**	B + X

[Outras situações]

A	>	B
A + X	**?**	B + X

Grupo A: A é maior que B e os dois X tem o valor igual, então fica >. Por exemplo, se A é 8 e B for 7, A mais alguma coisa e B mais alguma coisa [usou exemplo com números]

Professora: Será que precisa usar números? Não precisa usar números, é como se fosse com a balança (metáfora), a balança mais pesada de um lado.

Grupo D:

A	≠	B
A × X	=	B × X

[T e D colocaram números]:

5	≠	6
5 × 2 10		6 × 2 12

Professora: Então como pode ser igual? Vamos ver se fosse na balança!

\A A A/ \ B B/ A ≠ B

A = 10 B = 15 , [a professora diz: então equilibra]

Professora: A = B

A + x **?** B x ≠ 0

se x = 0, fica =

mas se x ≠ 0, fica >

[A professora faz outras situações]:

A > C

N = D

A + N > C + D

Z < T

x < y

Z + x **?** T + y ,

Professora: Se Z e X é menor que T e Y então Z + x é menor que T + y.

Professora: Z + x são os dois menores do que T + y, os dois maiores, os dois maiores são maiores do que os dois menores.

[A professora propõe outra situação]:

Z < T

x > y

Z + x **?** T + y

Professora: Vai depender de que número for **x** e **y**

7º dia: 01/09/04

[A professora apresenta a atividade e propõe que deve haver uma relação com a situação anteriormente apresentada – referindo-se às expressões da aula passada]

- [Leitura do problema pela aluna L – "Casa Amarela ...]

[O aluno M:

A > B

A = B + x (ou y ... pode ser qualquer um)

"A não é maior do que B?"

A – Casa Amarela

B – Macaxeira

"tem que ser B + x = A"

A > B

"como fazer para igualar?"

A = B + x]

[Os alunos propuseram logo a linguagem matemática; desprezaram a idéia de casas, pedreiros]

- [Leitura do outro problema pela aluna Y – "Seu José tem ...]

O aluno M: Esse outro é a mesma coisa: J = B + y

A aluna Y: Vamos supor J é 10, B é 2, depende do valor, e y fosse 4, então ...

O aluno M: Pra J se igualar a B tinha que adicionar algo

Professora: de que maneira eu poderia representar y para dar sempre certo?

[para satisfazer a igualdade; está impícito na fala da professora]

B + y = J

Professora: como eu posso falar do y em relação ao J e B?

10 > 2 + 8

[a professora atribui valores numéricos, para ver se os alunos compreendem que o y deverá ser J – B].

[A professora pergunta aos alunos se eles entenderam a relação de y para J e B]

[Um dos alunos vai explicar e utiliza os mesmos valores numéricos (10, 2 e 8) sugeridos pela professora]:

Casa Amarela Macaxeira

A > B

B + x = A

B + y = J y = J – B

J > B

10 > 2 + 8

J B y

- [A professora pede que cada aluno tente representar no papel, em linguagem natural ou matemática, a resposta do problema]
- [A professora observa as formas de representação no papel e mostra, no quadro, uma representação que apareceu]:

J = B + C = J [a professora falou: essa sentença é verdadeira?]

[O aluno V vai ao quadro e atribui valores ao problema]:

J B

16 10

6 $\Rightarrow$ C [O aluno diz: a diferença dos dois (C) seria 6]

C = J – B [o aluno pergunta se pode, depois, dividir a diferença por 2 que dá 3]

$C = \frac{J - B}{2}$

C = 3 [o aluno parece um pouco confuso e os outros alunos percebem a sua confusão, depois ele esclarece: se não pudesse tirar nem colocar nada, ele poderiam dividir a diferença por dois, para equilibrar os valores – no exemplo, cada um ficaria com 3]

[O aluno diz: digamos que eles trabalhassem em cooperativa, em símbolo como poderíamos representar essa situação]:

$\frac{J + B}{2} = C$ [o aluno diz: C seria o valor final que cada um ficaria]

8º dia: 04/09/03

[Quatro semanas de observação: 8 dias, 12 aulas; durante um mês]

[A professora relembrando as situações da aula anterior, aí a aluna T falou: a da balança que de um lado estava mais pesado]

[Os alunos iniciaram a resolução do problema dos ônibus]:

CDU – Várzea (CV) e CDU – Maria Farinha (CM)

CV > CM

CV = CM + y [a professora: e o y pode ser qualquer valor?

[os alunos: não, tem que ser a diferença]

[os alunos propõem a sentença que permite achar o valor de y]

[O aluno V propõe uma distribuição dos ônibus]:

A > B

$\frac{A + B}{2} \Rightarrow A = B$

[É interessante nesse exemplo, que eles, embora utilizem o raciocínio matemático, permanecem bem ligados ao problema proposto – ônibus]

Professora: É possível ainda pensar em outra forma?

As alunas T e D começam a atribuir valores:

CM + 4 = 40 ...

[Entretanto, elas começam a se confundir no momento de expressar o seu pensamento]

Professora: Vou fazer uma pergunta pra vocês, digamos que seja tudo da mesma empresa e chegam 14 ônibus novos.

[A professora atribui valores]

CV = 20

CM = 12

20 – 12 = 8

14 – 8 = 6 ÷ 2 = 3 [a professora diz: para cada ônibus]

[A professora continua: Chegam 14 ônibus, dá pra deixar os dois com a mesma quantidade de ônibus]

[A professora pede que os alunos representem só com os símbolos matemáticos. Mas, na verdade, a professora propôs outro problema a partir do primeiro]

CV > CM

CV – CM = x

CM + x = CV ... [os alunos se confundem um pouco e a professora propõe uma organização dos símbolos]: CV

CM

y = número de ônibus novos que chegam

[Os alunos ficam meio confusos e ficam falando de forma atropelada]

[A professora tenta explicar novamente o problema]:

CV > CM y = quantidade de ônibus

CV – CM = X x = diferença da duas linhas

y – x = z z = resultado; sobra

z ÷ 2 = J

CV + J = CM + x + J

[A professora fica coordenando as falas e o raciocínio dos alunos].

[Um aluno pergunta se pode colocar números na expressão também].

[Outra sugestão da aluna D]:

Soma tudo [atribuindo valores]

20 + 12 + 14 = 46

46 |_2_

23

[Leitura do problema seguinte por um aluno]

Professora: Vocês fazem sozinho primeiro!

[A professora dá um tempo para que os alunos resolvam e passa pelas bancas observando a resolução dos alunos].

[O aluno V diz e a professora escreve no quadro]:

$x \Rightarrow$ meninos

$y \Rightarrow$ meninas

$z \Rightarrow$ diferença

$x - y = z$

$z + y = x$

[O aluno A]:

$x > y$

$y > x$

$x = y$ [a professora pergunta: Isso tem sentido?]

[A aluna T explicou trocando a letra]:

$x > y$

$x = y + A$

$x = 10$

$y = 5$

$x - y = 5$, [T explica: a diferença ... é a mesma coisa, o mesmo raciocínio]

[A professora pergunta aos alunos: Considerando as quatro atividades que a gente fez – balança, cálculo das diferenças, competição – essa agora, vocês vêem alguma relação entre elas?]

A aluna Y: sim, claro, todas envolvem quantidades desconhecidas

A aluna T: todas envolvem a diferença, equilibrar

Professora: Se eu perguntar pra vocês: qual o conceito de equação, o que vocês diriam? A gente já resolveu alguma equação aqui? Eu falei pra vocês que EQ é de equilíbrio, ação de equilibrar. A gente fez alguma ação de equilibrar?

Alunos: sim

Professora: Quando não havia igualdade era uma inequação, quando tem > ou < . Propõe uma equação e pergunta como seria na balança

8x + 5 = 10

\0 0 0 0 0/ _____/

[A professora se confunde na hora de representar e propõe 5 pacotes desconhecidos. A aluna, Y, percebe que ela se confundiu e diz: não to entendendo nada, tem que ser 8 saquinhos e o peso 5]

[A professora muda o número, pois o número 8 não podia ser!]

\0 0 0 0 0 5 / \ ___ 10____/

[A professora: Como a gente chama o valor desconhecido? (ela mesma responde) INCÓGNITA.Qual a diferença entre FÓRMULA e EQUAÇÃO? Isso que a gente pode substituir valores por número, a gente chama de FÓRMULA, que pode se transformar em EQUAÇÃO se definir o valor único].

[A professora tenta discutir com os alunos que para ser uma equação precisa ter sempre uma igualdade. Relaciona a questão FÓRMULA e EQUAÇÃO. Que equação implica em descobrir, sempre, um valor desconhecido, e que na fórmula você pode jogar outros valores].

2. Fala da Professora sobre a Sequência Didática:

Não é objetivo desta pesquisa realizar análise de discurso da fala da professora. Então, este depoimento da professora está posto aqui porque ele retrata em linhas gerais os objetivos da seqüência, como ela foi trabalhada em sala e qual a avaliação da professora sobre a contribuição dessas atividades propostas para a aprendizagem dos conceitos fundamentais da álgebra em sala de aula.

"Essa seqüência didática a meu ver favoreceu aos alunos a se familiarizar com alguns princípios algébricos, de forma que na possibilidade do grupo argumentar, discutir os significados que eles iam formando a medida que eram apresentadas e desenvolvidas atividades didáticas, as quais tinha por objetivo fazer despertar, desafiar a estrutura do pensamento abstrato, tão necessário no estudo da álgebra. Os alunos puderam de fato fazer comentários e descobertas interessantes a respeito dessa estrutura.

Na seqüência da atividade da balança de dois pratos pode-se observar que a noção de equilíbrio e a habilidade de manipulação de valores desconhecidos estiveram sendo utilizados e compreendidos pelos alunos, inclusive o tratamento de neutralizar valores em lados distintos da balança a fim de anular uma das incógnitas e descobrir o valor da outras.

Na seqüência de determinação de símbolos de igualdade ou desigualdade, dada uma sentença lógica pode-se observar que a noção de que letras podem representar valores numéricos e que acrescentar ou diminuir o mesmo valor para duas letras distintas não altera o princípio de igualdade ou desigualdade existente entre elas. E ainda outras relações lógicas foram percebidas pelos alunos, bem como na atividade de determinação do cálculo da diferença entre dois valores, tendo a diferença desconhecida, ou um dos valores desconhecidos e a diferença conhecida,

seja com números positivos ou negativos, também foram bem argumentados e compreendidos pelos alunos.

E por fim, problemas abertos foram apresentados, os quais possibilitavam a transferência ou transposição didática das noções de equilíbrio, valor desconhecido, cálculo da diferença e estruturas lógicas de igualdade e desigualdade. Aqui descobertos e uma melhor estruturação simbólica dos princípios foram apresentados.

Existe também anterior a seqüência, um pré-teste onde equações simples de uma incógnita e de duas incógnitas com a possibilidade de se anularem estiveram presentes no teste e problemas que poderiam ser resolvidos por equação ou simplesmente pelo cálculo aritmético, mas com o princípio de valor desconhecido presente nos mesmos.

Os alunos tiveram dificuldade de resolver tais equações e tiveram uma reação de impossibilidade de lidar com tais questões sem que a professora, eu no caso, tivesse dado qualquer orientação para resolvê-los, contudo através de um incentivo e encorajamento, a maioria utilizou-se do método de fazer por tentativas as respostas para equações e problemas. Posteriormente à seqüência aplicada e com alguns princípios discutidos e estruturados na mente da maioria dos alunos, esperava-se que eles resolvessem esse mesmo teste com mais facilidade e já se utilizando dessas noções formadas para aplicá-las na resolução das equações e problemas desse teste, porém foi percebido ainda uma dificuldade, ainda que menor do que a inicial do pré-teste, em fazer as equações manipulando as letras e resolver os problemas armando uma estrutura algébrica com letras. Acredito que tal formalização ainda precisaria de uma maior discussão do que essas noções e manipulação simbólica pode ser utilizada na resolução de equações e problemas e sugeria outras atividades didáticas onde a manipulação com letras fossem constituídas mais elaboradamente.

O motivo que acredito ter dificultado na transferência diz respeito ao nível de formalização estruturada, os conceitos pareciam ainda estar no que Vergnaud chama de 'teorema em ação', se é possível resolver situações pela noção intuitiva e de lógica que se tem a respeito dos mesmos, no entanto, a formação do conceito científico, o conceito organizado por propriedades formais e estruturas de uma linguagem que é própria ainda estavam se estruturando na mente dos alunos, bem como a apresentação do conceito formal de equações algébricas.

Uma outra questão a ser abordada aqui, diz respeito ao fator motivacional, foi observado que os alunos se envolveram e participaram bem da seqüência, mas alguns recursos tiveram que ser adequados ao movimento do grupo, com construir suas próprias balanças no laboratório de informática, argumentar e discutir suas respostas na forma de um jogo entre equipes ou simplesmente promover discussões coletivas com o grupo, valorizando suas descobertas e ajudando-os a estruturar seus pensamentos e idéias.

No mais foi válido para mim como professora de matemática ter participado dessa pesquisa em educação e psicologia, referente ao trabalho científico da tese de doutorado de Mônica Lessa em Psicologia Cognitiva. Acredito ainda que a experiência venha a contribuir com a minha prática pedagógica no ensino da álgebra. É certo que para o objetivo de formar a habilidade nos alunos de lidar com fórmulas, equações, expressões algébricas e cálculo algébrico de forma significativa e contextualizada, a seqüência aqui apresentada ainda não é suficiente, mas é válido ressaltar que os princípios que a mesma promove na estruturação das noções cognitivas no aprendizado da álgebra são importantes e fundamentais, e a possibilidade de discussão de situações e alternativas para resolvê-los foram de grande relevância no desenvolvimento do pensamento abstrato e algébrico".

"Comentário a respeito da seqüência didática aplicada na Escola, com a turma da 6ª série a respeito da formação dos princípios da álgebra". [Joana]

Lessa, Mônica Maria Lins

Aprender álgebra em sala de aula: contribuição de uma seqüência didática / Mônica Maria Lins Lessa. – Recife: O Autor, 2005.

226 folhas : il., fig., quadros.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Psicologia Cognitiva, 2005.

Inclui: bibliografia, anexos.

1. Psicologia Cognitiva. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Álgebra. 4. Aprendizagem. I. Título.

159.9	**CDU (2. ed.)**	**UFPE**
150	**CDD (22. ed.)**	**BCFCH2010/25**