UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção

SÍNTRIA LABRES LAUTERT

Recife
2005

SÍNTRIA LABRES LAUTERT

As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção

Tese apresentada à Pós-Graduação de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Doutor em Psicologia

Área de concentração: Psicologia Cognitiva
Orientadora: Dra. Alina Galvão Spinillo

Recife
2005

Lautert, Síntria Labres
As dificuldades das crianças com a divisão : um estudo de intervenção / Síntria Labres Lautert. – Recife : O Autor, 2005.
325 folhas : il., fig., tab., quadros.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Psicologia, 2005.

Inclui bibliografia e anexos.

1. Psicologia cognitiva – Desenvolvimento e aprendizagem. 2. Crianças de escola pública – Aprendizado da matemática – Dificuldades com a divisão – Relações inversas e resto. 3. Educação matemática e psicologia – Estruturas multiplicativas – Campo conceitual. 4. Implicações educacionais – Estudos de intervenção - Divisão. I. Título.

159.953.5	CDU (2.ed.)	UFPE
150.7	CDD (22.ed.)	BC2005-398

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sintria Labres Lautert

As Dificuldades das Crianças com a Divisão: um estudo de intervenção.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Doutor.
Área de Concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovado em: 21 de julho de 2005

Banca Examinadora

Profa. Dra. Alina Galvão Spinillo
Instituição: U.F.PE
Assinatura: Alina Galvão Spinillo

Profa. Dra. Jane Correa
Instituição: UFRJ
Assinatura:

Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito
Instituição: UNICAMP
Assinatura: Márcia Regina F. de Brito

Prof. Dr. Luciano Rogério de Lemos Meira
Instituição: U.F.PE
Assinatura: Luciano Meira

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
Instituição: U.F.PE
Assinatura:

DEDICATÓRIA

À Mário Moisés Molina (marido) que ao me convidar para morar em Recife não tinha noção da dimensão que esta mudança teria em nossas vidas. Seu carinho, incentivo, confiança e apoio incondicionais, em todas as horas, foram a força que eu necessitava para continuar lutando e acreditando nos sonhos que construímos juntos.

AGRADECIMENTOS

A Deus por permitir que eu compartilhe com você este momento tão importante de minha vida acadêmica, guiando-me nos momentos mais difíceis e felizes desta trajetória.

À Alina Galvão Spinillo que sempre me incentivou e propiciou as transformações mais significativas na minha trajetória acadêmica. Lembro, claramente, de nosso primeiro encontro; ela com inúmeras tarefas para resolver e uma estudante, recém chegada do Rio Grande do Sul, pedindo informações sobre o programa de Pós-Graduação. Naquele momento, sem que nos déssemos conta, iniciava a primeira orientação e uma grande amizade. Ao longo desses anos, *dividimos* momentos de aprendizagem, troca de experiência, alegria, tristeza, angústias para obter um *resultado: a concretização de um saber acadêmico.* Sua seriedade profissional, competência acadêmica, companheirismo e amizade tiveram um valor inestimável nesta trajetória.

Aos meus pais Zairo Martins Lautert (In memoriam) e **Elena Labres Lautert** que com seus exemplos de vida foram a fonte constante de inspiração para que eu nunca fraquejasse nesta caminhada.

Às minhas tias Elvira, Ema, Eva e Marlene por cuidarem com tanto carinho, quer seja com *palavras* ou com suas *guloseimas,* das pessoas que são muito especiais para mim.

À minha irmã Sinara Labres Lautert que com sua força, coragem e garra, ensinou-me que a vida deve ser vivida a cada momento.

À Sandra Patrícia Ataíde Ferreira pela disponibilidade, atenção e carinho nos momentos mais decisivos na construção desta Tese. Compartilhar, dividir, multiplicar, somar e subtrair são talvez algumas das palavras que podem traduzir os nossos constantes diálogos. A forma como você e seus familiares me acolheram tornaram minha instância no Recife mais agradável e feliz.

À Sonia Duarte e Emílio Duarte pela disponibilidade, pelo carinho compartilhado durante todos os momentos vividos em Recife e pela incontestável amizade que construímos.

Às colegas de doutorado (Ângela, Eveline, Claudia, Mônica) que compartilharam comigo sentimentos de angústia, de frustração, de satisfação, de cumplicidade e, principalmente, por propiciar diversos momentos de descontração.

À Maria Waleska Andrade Camboim pelo carinho e aconchego oferecidos nos momentos de serenidade e de desespero. Sua forma de olhar para a vida trouxe-me a calma e a tranqüilidade que eu tanto necessitava.

À Jane Correa, Márcia Regina Ferreira de Brito e a Jorge Tarcísio da Rocha Falcão pelas sugestões e comentários preciosos oferecidos no momento da qualificação.

A Antônio Roazzi pela disponibilidade, paciência e ajuda dada no tratamento estatístico dos dados. Suas observações ajudaram a enriquecer as discussões apresentadas.

Aos funcionários da UFPE pelo tratamento atencioso que me dedicaram durante esses anos de convívio, especialmente **Ivo Vanderly da Silva** pela paciência e disponibilidade sempre que seus conhecimentos sobre informática foram solicitados.

Às bolsistas Germana da Costa Cavalcanti e Helga Vanessa Assunção de Souza pela amizade e responsabilidade com que atuaram como auxiliares de pesquisa.

À Michele Araújo Santos e Renata Lurdes Soares pelo carinho, disponibilidade e colaboração durante análise dos dados.

A todas as crianças, professores, coordenadores e diretores que permitiram a efetivação desta pesquisa e se mostraram sempre disponíveis e interessados por todas as atividades realizadas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro sob a forma de bolsa de estudo oferecida para a realização desta pesquisa.

RESUMO

LAUTERT, S. L. **As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção**. 2005. 325 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco.

Pesquisas em Psicologia Cognitiva e em Educação Matemática apontam as dificuldades que as crianças experimentam em relação ao conceito de divisão; dentre elas, a dificuldade em compreender as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e a dificuldade em lidar com o resto. A presente pesquisa investigou o efeito de uma intervenção específica sobre o conceito de divisão, voltada para a superação de tais dificuldades. Participaram inicialmente desta investigação 206 crianças, de baixa renda, com idades entre 8 e 15 anos, alunas de 3ª série do ensino fundamental de escolas públicas do Recife. Todas as crianças foram submetidas a um pré-teste geral que consistia na resolução de doze problemas de divisão e somente aquelas que apresentavam dificuldades com este conceito foram incluídas neste estudo. Definida a mostra, as 100 crianças selecionadas foram divididas igualmente em dois grupos: um grupo controle e um grupo experimental e submetidas a um pré-teste específico que envolvia três tarefas. As crianças do grupo experimental receberam, individualmente, uma intervenção específica que envolvia a resolução de problemas de divisão em que o examinador apresentava situações que requeriam: (i) compreender as relações inversas entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante; (ii) compreender o efeito do aumento do valor do resto sobre os demais termos; e (iii) analisar procedimentos de resolução corretos e incorretos apresentados sob forma pictográfica. O papel do examinador consistia em fornecer *feedback* e explicações durante todo o processo de resolução adotado pela criança, ressaltando os princípios invariantes da divisão que estavam presentes na resolução dos problemas. Dois pós-testes (um geral e outro específico) foram aplicados às crianças dos dois grupos. Os dados nos pré-testes e nos pós-testes foram analisados em função do desempenho e das justificativas oferecidas pelas crianças em relação à resolução que adotavam. As justificativas variavam desde justificativas vagas ou inadequadas até aquelas que expressavam uma compreensão dos invariantes da divisão. Os resultados obtidos mostraram que no pré-teste (geral e específico) os dois grupos não diferiam entre si, apresentando o mesmo nível de dificuldade. Observou-se que após a intervenção, as crianças do grupo experimental apresentavam um resultado mais favorável no pós-teste do que no pré-teste (geral e específico). Estas crianças tanto apresentavam um desempenho melhor como eram capazes de oferecer justificativas mais elaboradas que expressavam uma compreensão dos invariantes da divisão. O mesmo progresso, entretanto, não foi observado em relação às crianças do grupo controle. Conclui-se que a intervenção auxiliou as crianças a superar as dificuldades com a divisão, sendo capazes de identificar e analisar os princípios invariantes necessários para compreensão dessa operação matemática, bem como a desenvolver habilidades metacognitivas cruciais para a aprendizagem de conteúdos específicos, no caso conceitos matemáticos.

Palavras-chave: invariantes da divisão; intervenção; dificuldades de aprendizagem.

ABSTRACT

LAUTERT, S. L. **The children difficulties with division: an intervention study.** 2005. 325p. PhD Thesis – Graduate Program of Cognitive Psychology – Federal University of Pernambuco.

Children encounter difficulties in dealing with the division concepts. Researches on cognitive psychology and on mathematical education approaches pointed to, between others, two types of difficulties on this area: (a) the difficulty to understand the inverse relations between the division terms while the dividend is held constant, and (b) the difficulty to deal the remainder. In this present research we have investigated the effect of a specific intervention intending to reduce children difficulties with the division concepts. 206 low-income Brazilian children; ranging from 8 to 15 years old; studying on the third year of fundamental course (public schools of the city of Recife), were submitted to a general pre-test. The pre-test consisted of solving 12 division problems allowing to the selection of children presenting difficulties with the division concept. 100 children were selected and equally divided into two groups: control and experimental. Afterwards, they were submitted to other specific pre-test which consisted of three tasks. The children in the experimental group individually received specific intervention involving the solution of division problems in which the researcher presented situations requiring the children to: (i) understand the inverse relations between the number of the parts and the size of the parts when the dividend is held constant; (ii) understand the effect of enhance the remainder value above the others terms, and (iii) analyze the procedures of correct and incorrect solutions presented on pictographic form. The examiner role, during the whole process of resolution adopted by the child, consisted of providing feedback and explanations, emphasizing the division invariant principles presented in the solution. A general and a specific post-test were applied to the children of both groups. Data on pre and post tests were analyzed in function of both the performance and the explanations children give for the solution they have adopted. The explanations ranged from vague and inadequate explanations to those expressing a comprehension of the division invariants. The findings have showed that both groups (control and experimental) do not differentiated one of each other in the pre-tests (general and specific), presenting the same degree of difficulty. After the intervention process has been done the children in the experimental group demonstrated to be more successful in the post-test than they were in the pre-test (general and specific). Those children either presented an improved performance as they were capable of given explanations more elaborated expressing a better understanding of the division invariants. The same improvement was not presented by the control group. We then conclude that the intervention process helped the children to overcome their division difficulties. They became capable to identify and analyze the invariant principles necessaries to understand the division as a mathematical operation. Also the children have developed metacognitive abilities that are crucial for learning specific academics contents like the mathematics concepts.

Keywords: Division invariants; intervention; learning difficulties.

SUMÁRIO

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE QUADROS

LISTAS DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa insere-se na área dos estudos da Psicologia Cognitiva que procura compreender como ocorre o desenvolvimento e a aprendizagem de conceitos matemáticos. As evidências empíricas acerca da aprendizagem da divisão no contexto escolar apontam para duas dificuldades particulares e freqüentes experimentadas por crianças ao iniciarem a aprendizagem deste conceito: (i) as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante; (ii) o significado do resto e sua relação com os demais termos da divisão (dividendo, divisor e quociente).

Considerando-se as evidências empíricas e as possibilidades de superação dessas dificuldades em contextos de aprendizagem assistida, elaborou-se um estudo de intervenção que contempla a análise e a reflexão sobre os princípios invariantes da divisão que devem ser considerados durante o raciocínio multiplicativo, a saber: (a) igualdade entre as partes; (b) o todo deve ser distribuído entre as partes até não existir a possibilidade de uma nova distribuição; (c) as relações inversas entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante; (d) resto deve ser sempre menor que o número de partes ou tamanho das partes; (e) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes (ou vice-versa), mais o resto.

A intervenção implementada caracteriza-se por ser de natureza tutorada ou instrução direta, que requer um papel ativo do adulto (pesquisador) que faz intervenções explícitas, tais como: apresentar regras e estratégias de resolução, fornecer *feedback* e explicações, corrigir soluções e hipóteses inadequadas ou pouco eficientes. Apesar do papel ativo do adulto (pesquisador), o papel da criança não se restringe a uma recepção passiva de informações, ao contrário, ela participa ativamente de todo o processo de construção e reconstrução do conhecimento.

Neste sentido, esta Tese tem como objetivo investigar o efeito de uma intervenção específica sobre a compreensão do conceito de divisão em crianças, focalizando as suas dificuldades nesse domínio, a fim oferecer caminhos possíveis à construção de novas alternativas para a conceptualização da divisão enquanto operação matemática no cenário escolar. A Tese foi organizada em quatro capítulos: Capitulo 1- Fundamentação Teórica; Capítulo 2 - Método; Capítulo 3 - Análise e Discussão dos Resultados e Capítulo 4 – Conclusões e Discussões.

O Capítulo 1 (Fundamentação Teórica) apresenta estudos na área da Psicologia, Educação e Educação Matemática que nortearam a realização desta pesquisa, estando dividido em três partes. A Parte I é introdutória, tendo por objetivo situar o leitor acerca das discussões recentes entre a Educação Matemática e a Psicologia. A Parte II discorre sobre a complexidade da operação de divisão e as dificuldades experimentadas por crianças e adolescentes em relação a este conceito, apresentando resultados de pesquisas recentes na área. Na Parte III, discutem-se os aspectos relevantes acerca de estudos de intervenção, destacando-se resultados de pesquisa e a relevância desses estudos como ferramenta para esclarecer as relações entre aprendizagem e desenvolvimento.

O Capítulo 2 (Método) apresenta os objetivos gerais da pesquisa, a natureza da intervenção proposta, os participantes e o planejamento experimental. Este último encontra-se organizado nas seguintes seções: (1) pré-teste e pós-teste gerais; (2) pré-teste e pós-teste específicos; (3) intervenção.

No Capítulo 3 (Análise dos Resultados) são apresentados os sistemas de análises, resultados e comentários relativos a cada tarefa aplicada no planejamento. Devido à complexidade do *design* metodológico, com pré e pós-testes gerais e específicos, optou-se por apresentar e discutir os resultados em cinco partes. Na Parte I, são apresentados o sistema de análise, os resultados e comentários relativos ao pré-teste e pós-teste gerais. Nas Partes II, III e IV, são apresentados, separadamente, o sistema de análise, os resultados e comentários relativos à cada uma das tarefas do pré e pós-testes específicos (respectivamente, Tarefa 1: Relações inversas, Tarefa 2: Significado do resto e Tarefa 3: Procedimentos incorretos de resolução); e na Parte V são apresentados e discutidos, de forma conjunta, os resultados e comentários relativos à comparação das justificativas mais elaboradas nas três tarefas que compõem o pré e o pós-testes específicos.

No Capítulo 4 são apresentadas as Conclusões e Discussões derivadas dos resultados obtidos nesta investigação com a perspectiva de se oferecer caminhos possíveis para a Educação Matemática. As conclusões decorrentes desta Tese, com certeza, não são suficientes para abarcar a complexidade das relações existentes no campo conceitual das estruturas multiplicativas, no qual se insere o conceito de divisão, porém apontam aspectos instigantes para manter vivo o diálogo entre a Psicologia Cognitiva e a Educação Matemática. Esses aspectos são discutidos nas conclusões, especificamente, nos tópicos sobre as implicações educacionais e investigações futuras em que se apresentam sugestões que poderão contribuir para responder algumas questões suscitadas ou deixadas em aberto na presente investigação.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

PARTE I: O diálogo entre a Educação Matemática e a Psicologia: a Teoria dos Campos Conceituais

Falar de um possível diálogo entre a educação matemática e a psicologia requer, inicialmente, discutir as relações entre educação e psicologia. Tal discussão é uma tarefa prazerosa, porém extremamente complexa. A complexidade reside, dentre outros aspectos, no fato de se tentar identificar os vínculos e as relações entre essas duas áreas do conhecimento sem perder de vista a identidade de cada uma delas. Se por um lado, a educação matemática encontra subsídios teóricos na psicologia, esta, por sua vez, encontra um campo vasto de aplicação na educação, inclusive investigando a plausibilidade de seus pressupostos teóricos.

Compreender o diálogo possível entre educação e psicologia requer delimitar um campo específico da psicologia que seja de interesse para a educação. Nesse sentido, dois pontos surgem como cruciais: a aprendizagem e o desenvolvimento, aspectos estes tratados, dentre outros, pela psicologia do desenvolvimento cognitivo.

Spinillo (1999, p. 56), discutindo as relações entre aprendizagem e desenvolvimento a partir de evidências empíricas derivadas de pesquisas de intervenção, comenta que “[...] uma questão que tem despertado o interesse de pesquisadores e educadores refere-se a quanto, e em que extensão, o curso do desenvolvimento pode ser alterado por situações de aprendizagem”. Esta preocupação foi interpretada por alguns estudiosos como a necessidade de se estabelecer relações entre níveis gerais de desenvolvimento cognitivo e a capacidade das crianças aprenderem.

Autores diversos, como Resnick e Ford (1981), por exemplo, comentam que historicamente houve um momento em que os estudiosos estavam interessados em aplicar, de forma direta e automática, conhecimentos psicológicos de natureza geral ou universal às situações de ensino. Estes conhecimentos baseavam-se nas pesquisas desenvolvidas no âmbito da psicologia científica, na qual se destacam três áreas de pesquisa: o estudo e a medida das diferenças individuais e a elaboração de testes, a psicologia da aprendizagem e a psicologia do desenvolvimento. Para Beveridge (1997), a importância da psicologia para a educação tornou-se mais efetiva quando a psicologia do desenvolvimento procurou voltar-se para a aprendizagem de conteúdos particulares, cedendo lugar à construção de teorias de domínios específicos (e.g.; KARMILOFF-SMITH, 1992; VERGNAUD,1990) e às reflexões didáticas que são de extrema importância para a compreensão das múltiplas conexões entre teoria e prática (e. g.; DA ROCHA FALCÃO, 2003; PAIS, 2002).

A Teoria dos Campos Conceituais, delineada por Vergnaud (1990), é considerada um exemplo representativo deste novo enfoque acerca das relações entre a psicologia e a educação em um domínio de pesquisa recente, o da *educação matemática.*

Discutindo as relações entre a psicologia e a educação, Brito (2001) e Correia (2004) enfatizam que, dentre outros pontos, a psicologia educacional seria mais do que uma aplicação da psicologia às situações educacionais; visto que aquela se constituiria como uma área de estudo cujo ponto de partida é o fenômeno educacional e cujo objeto de estudo seriam as situações escolares. Neste sentido, teorias da aprendizagem, teorias do desenvolvimento, bem como o intercâmbio entre elas seriam pontos de particular interesse do psicólogo educacional, visto que este exerce um trabalho de cunho necessariamente educativo, apesar da diversidade de atribuições, funções e papéis delegados a ele no cenário escolar. O objetivo de seu fazer psicológico no âmbito institucional seria contribuir para a eficiência do processo educacional através de uma ação interdisciplinar, conduzindo-o, necessariamente, ao exercício das funções de planejador, pesquisador, consultor e orientador, a fim de propiciar a aprendizagem e o desenvolvimento de todos que estão imbricados, direta ou indiretamente, no processo ensino-aprendizagem (CORREIA; CAMPOS, 2004; SANTOS, 2004).

Esta mudança de perfil pela qual vem passando a psicologia educacional, juntamente com as influências teóricas recentes oriunda da psicologia da aprendizagem e da psicologia do desenvolvimento, contribuíram para o surgimento e continuidade de um domínio de pesquisa denominado *Psicologia da Educação Matemática* que tem como foco de análise a atividade matemática. Esta atividade, segundo Da Rocha Falcão (2003), abarca três contextos culturais complexos e diversos de construção de significado em matemática: (a) matemática escolar (atividades desenvolvidas em sala de aula de matemática); (b) matemática extra-escolar (matemática do dia-a-dia, atividades envolvendo conhecimentos matemáticos no contexto de situações extra-escolares culturalmente significativas, por exemplo, as práticas profissionais); (c) matemática dos matemáticos (corpo de conhecimentos socialmente compartilhado, epistemologicamente delimitado e praticado por grupos de profissionais específicos).

Ressalta-se que, a matemática escolar, que ocorre no contexto específico da sala de aula, é regida por regras e expectativas que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Este conjunto de normas (implícitas e explícitas) organizadoras das relações que os alunos e professores mantêm com o saber é denominado contrato didático[1]. (BROUSSEAU, 1986, DA ROCHA FALCÃO, 2003; PAIS, 2002; SILVA, 1999). Este contrato didático passa por um processo contínuo de negociação e renegociação a cada novo saber (conteúdo a ser ensinado) ou grupo de alunos que estejam envolvidos no processo de aprendizagem, gerando o estabelecimento de um novo contrato conforme as exigências do contexto. Segundo Da Rocha Falcão (2003, p. 19), as pesquisas em educação matemática mostram alguns itens usuais de contrato didático que são adotados na sala de aula de matemática, por exemplo: "meninos se saem melhor em matemática que meninas; todo problema de matemática tem uma (e apenas uma) solução, e o professor é sempre capaz de chegar a tal solução". Percebe-se, portanto que o contrato didático é uma noção importante para se entender o fenômeno educacional, quer seja no contexto específico da sala de aula ou em situação de pesquisa.

---

[1] A noção de contrato didático apresentada baseia-se na definição proposta por Guy Brousseau. Para uma discussão mais aprofundada do termo, ver BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique dês mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.7, n 2, 1986, p- 33-116.

Outra noção importante a ser considerada que estrutura o referencial teórico para a pesquisa em educação matemática é a noção de *situação didática.* Segundo o modelo desenvolvido na França por Brousseau (1986), o significado do saber matemático é fortemente influenciado pela forma didática como o conteúdo é apresentado e desenvolvido na sala de aula de matemática. A estrutura da situação didática encontra-se associada a uma diversidade de noções: contrato didático, obstáculos epistemológicos, transposição didática, engenharia didática entre outras[2] (FREITAS, 1999).

Considera-se uma situação didática "[...] as múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico" (PAIS, 2002). Ademais, além do trinômio professor, aluno e saber deve-se considerar que a matemática escolar insere-se em um contexto mais amplo que abarca "[...] as práticas culturais cotidianas extra-escolares e a matemática enquanto domínio epistêmico socialmente compartilhado" (DA ROCHA FALCÃO, 2003, p.20).

Através da análise de situações didáticas é possível investigar e compreender a complexidade da aprendizagem da matemática e, ao mesmo tempo, desvelar aspectos que são essenciais para a compreensão de conceitos matemáticos. As situações didáticas propostas em sala de aula ou em contextos de pesquisa devem possibilitar que o aluno mobilize seus conhecimentos prévios, seja capaz de explicitar seus procedimentos e a forma de raciocínio utilizados a fim propiciar a reconstrução ou a construção de novos conhecimentos. Esta maneira de conceber a prática educativa conduz, necessariamente, a trajetórias distintas da proposta tradicional de ensinar matemática que se encontra ancorada na aplicação de regras, fórmulas e algoritmos que são aprendidos única e exclusivamente através da memorização (FREITAS, 1999).

---

[2] Informações acerca destes conceitos são obtidas em Franchi, Silva, Freitas, Pais, Maranhão, Damm, Igliori e Machado (1999) e Pais (2002).

Em síntese, a Psicologia da Educação Matemática surge como uma área de interseção entre a Matemática, a Educação e a Psicologia que busca aprofundar a compreensão sobre os aspectos psicológicos do ensino e da aprendizagem da matemática. Na esteira dessas reflexões, alguns questionamentos despontam: como se caracteriza a compreensão de conceitos matemáticos em crianças dentro e fora da escola? Quais as dificuldades que enfrentam em relação a estes conceitos? Como propiciar situações que auxiliem a superação dessas dificuldades e que promovam a aquisição e desenvolvimento do conhecimento matemático? A presente investigação se insere nesta área de estudo, sendo um exemplo, na ordem dos estudos de natureza empírica, que visam oferecer subsídios psicológicos para o debate interdisciplinar no campo da educação matemática.

Os enfoques teóricos que dão suporte às discussões acerca da Psicologia da Educação Matemática são inúmeros e abarcam visões distintas acerca de como ocorre o processo de construção do conhecimento matemático. Esta investigação toma como referencial a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud por dois motivos. Primeiro, porque esta ilustra o diálogo constante entre a psicologia e a educação matemática e, segundo, porque esta é a teoria de referência para o processo psicológico de construção do conhecimento defendida nesta investigação: a conceptualização da divisão.

1.1. A Teoria dos Campos Conceituais e a noção de esquema

A Teoria dos Campos Conceituais trata de desenvolvimento (VERGNAUD, 2003). Como afirmado por Da Rocha Falcão (1999, p. 88), campos conceituais em sua "[...] acepção psicológica, dizem respeito à estruturação complexa, dinâmica e situada de esquemas no âmbito do funcionamento cognitivo do indivíduo que aprende, resolve problemas e se desenvolve". Os esquemas, tal como conceituados por Vergnaud, ilustram a natureza psicológica desta teoria, uma vez que os esquemas são determinados pelo indivíduo a partir de uma dada situação, constituindo-se em uma organização cognitiva para determinada situação.

Segundo Franchi (1999), a Teoria dos Campos Conceituais ou Teoria da Conceituação do Real amplia a discussão iniciada por Piaget sobre o desenvolvimento e o funcionamento cognitivo. Tal ampliação traz subjacente duas direções complementares e imprescindíveis quando se analisa simultaneamente o desenvolvimento e o funcionamento cognitivo. A primeira considera como ponto norteador do desenvolvimento o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio deste conhecimento. A segunda consiste em estudar o funcionamento cognitivo do sujeito-em-situação, considerando que os processos cognitivos e as respostas dos indivíduos estão intrinsecamente imbricados nas situações com as quais eles são confrontados.

Para Vergnaud (1990), a Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista na sua essência, priorizando a construção de uma estrutura coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, aquelas que dependem da ciência e da técnica. Essa construção teórica apresenta uma concepção interativa de conceito, buscando compreender as filiações e rupturas dos conhecimentos (habilidades e informações expressas) que o compõem. Os conteúdos referentes a cada conceito são estudados e descritos com base tanto nas situações e problemas nelas envolvidos como nos procedimentos usados pelos indivíduos em tais situações. Conforme esse autor, é através da consideração desses aspectos que se torna possível analisar a relação entre os conceitos enquanto conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos.

De acordo com o autor, embora inicialmente a Teoria dos Campos Conceituais tenha sido elaborada para explicar o processo de conceituação pertencente ao domínio da matemática, essa teoria não se restringe a esse domínio[3], porém é inegável a sua importância para a Educação Matemática.

Uma análise mais focada do arcabouço teórico elaborado por Vergnaud (1990) revela que o termo *conhecimento* abarca dois significados distintos: *competências e concepções.* Ambos, segundo Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001), podem ser considerados como as duas faces de uma mesma moeda. A palavra *competência* refere-se às ações julgadas e implementadas pelo sujeito diante das situações, e a palavra *concepção* refere-se, em geral, às expressões verbais ou outras representações simbólicas que são expressas por seqüência de enunciados.

Para compreender o que vem a ser competência e sua relação com a concepção, é necessário entender outro aporte teórico da psicologia: o conceito de *esquema* desenvolvido por Piaget e retomado por Vergnaud (1990). Segundo Piaget (1969), *esquemas* são estruturas cognitivas através das quais os indivíduos se adaptam e se organizam no meio. Em outras palavras, significa a forma como os indivíduos organizam seus invariantes de ação ao lidar com um conjunto de situações análogas.

Conforme Nunes, Campos, Magina e Bryant (2001), o termo *esquema*, adotado em psicologia, tem um significado semelhante àquele utilizado na vida cotidiana, ou seja, o esquema é um esboço em que aparece apenas o essencial daquilo que precisa ser representado. Por exemplo, um esboço de um capítulo de livro é um esquema, porque nele estão contidas apenas as principais idéias do autor. Essa noção de esquema, enquanto unidade psicológica da conduta é essencial para a compreensão de como os indivíduos constróem um determinado conceito.

No caso específico da matemática, a origem da compreensão das operações aritméticas encontra-se nos *esquemas de ação* das crianças. Os conceitos de adição e subtração, por

---

[3] Uma ilustração a este respeito pode ser obtida em VERGNAUD. G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org.) **Por que ainda há quem não aprende? A teoria.** Rio de Janeiro: Vozes, 2003, p 21-64.

exemplo, têm origem nos esquemas de ação de juntar, separar e colocar em correspondência um-a-um. Já os conceitos de dividir e multiplicar têm origem nos *esquemas de ação* da distribuição e da correspondência-um-para-muitos, respectivamente (NUNES; BRYANT, 1997, SPINILLO; MAGINA, 2004).

No caso específico da divisão, tema central dessa investigação, esses *esquemas de ação* permitem que as crianças que ainda não foram formalmente ensinadas sobre a divisão resolvam, de modo prático, problemas do cotidiano ou escolares; usando o *esquema de distribuição*. Ao usar este esquema, a atenção da criança volta-se para a ação que está sendo realizada, como ilustra a resolução do seguinte problema:

> Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixa? (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 240)

A criança pega 16 carrinhos para fazer a distribuição entre as cinco caixas, usando o esquema de correspondência um-a-um: um carrinho para caixa A, um para a B, um para a C, um para a D, um carrinho para a caixa E. Essa ação é repetida até que se tenham esgotado todos os 16 carrinhos e que não exista a possibilidade de realizar outra rodada de distribuição. Nesta situação, a criança considera a *ação* realizada e não necessariamente os *invariantes operatórios*[4] que levam a uma compreensão do conceito. Os invariantes operatórios relativos à divisão seriam: a divisão eqüitativa das partes, relação entre o número de partes e o tamanho das partes, e esgotamento do todo sem conseguir ainda conceber que a soma das partes constitui o todo.

Entretanto, apesar da criança compreender de modo implícito a ação que está sendo realizada, não é capaz de verbalizar, no momento, que o todo deve ser distribuído em quantidades iguais ou que o raciocínio requerido para resolver este tipo de problema vai além da compreensão das relações parte-todo. Isso implica considerar as relações inversas entre o

[4] Nesta investigação as palavras invariantes operatórios e princípios invariantes são adotados como sinônimos.

tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido. Assim, constata-se que um esquema é um plano de ação, uma estratégia que abrange uma classe de ações, numa determinada seqüência a fim de permitir a realização de uma tarefa, quer seja resolver uma operação de divisão ou conduzir uma jangada à vela ao mar (VERGNAUD, 2003).

Segundo Vergnaud (1990, 1997), é através destas situações iniciais que os conceitos começam a adquirir significado. O autor argumenta que tanto do ponto de vista psicológico quanto do ponto de vista didático, para que um conceito possa ser compreendido em seu desenvolvimento, é imprescindível considerar três dimensões[5]- S, I, R, onde:

S é um conjunto de situações que torna o conceito significativo;

I é um conjunto de invariantes operatórios (propriedades fundamentais que caracterizam o conceito) que podem ser detectados e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações.

R é um conjunto de representações simbólicas, lingüísticas, gráficas ou gestuais que permitem representar os invariantes, as situações e os procedimentos.

O autor acrescenta a essa proposição três pontos relevantes: (1) uma única situação não abarca toda a rede semântica constituinte de um dado conceito, pois as suas propriedades variam de acordo com as inúmeras situações; (2) uma situação, em geral, para ser analisada exige a consideração de vários conceitos; (3) a formação do conceito não ocorre de forma abrupta, o mesmo é construído paulatinamente ao longo do desenvolvimento, sofrendo muitas interações e defasagens durante esse processo, o que pode ser observado através do comportamento dos indivíduos quando da resolução de problema.

Tais pontos suscitam a consideração de que os conceitos nunca podem ser discutidos isoladamente e que há uma multiplicidade de circunstâncias (situações, invariantes e significantes) a serem consideradas nesta construção (VERGNAUD, 1990, 2003). Dessa

---

[5] Na Parte II deste trabalho serão apresentados exemplos que ilustram essas três dimensões.

maneira, os conceitos incorporam o estatuto de ferramenta psicológica (DA ROCHA FALCÃO, 1996,1997, 2003).

De acordo com Vergnaud (1990), a operacionalidade de um conceito abarca uma variedade de situações, manifestando-se sob uma diversidade de ações e esquemas. Tal construção conceitual torna-se possível porque os esquemas comportam quatro aspectos: *invariantes operatórios* – possibilitam aos indivíduos reconhecer quais são os elementos pertencentes a uma dada situação e apreender a informação da situação tratada. Estes determinam as diferenças entre um esquema e outro, sendo imprescindíveis para a formação dos campos conceituais; *antecipações* – os indivíduos podem antecipar o objetivo a ser alcançado, os efeitos a serem considerados e as etapas intermediárias eventuais; *regras de ação* – que possibilitam aos indivíduos gerarem uma seqüência de ações. Regras do tipo "se... então"; e as *inferências* - que levam os indivíduos a reorganizarem as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios que dispõem.

Ademais, os teoremas-em-ação não se caracterizam como um teorema no sentido convencional, uma vez que se referem às competências que os indivíduos mobilizam em algumas situações específicas e que são muito pouco explicitados, visto que implicam em proposições explicativas que não estão ao alcance deles naquele momento. No entanto, os teoremas-em-ação são importantes para a aprendizagem de conteúdos específicos porque apontam uma trajetória intuitiva de estratégias utilizadas pelos indivíduos, através das quais será possível fazê-los avançar na elaboração de um dado conceito. Em outras palavras, os teoremas-em-ação são importantes no sentido de ajudar os indivíduos a transformar os conhecimentos intuitivos em conhecimentos explícitos.

Os teoremas-em-ação envolvem três aspectos relevantes para a aprendizagem de conteúdos específicos: (1) são formas eficazes em termos de funcionamento cognitivo que permitem ao indivíduo lidar com situações reais diárias, apesar de serem pouco explícitos; (2)

constituem o patrimônio de grupos ou subgrupos culturais, cuja transmissão ocorre fora do espaço escolar; (3) podem ser acionados como ponto de partida para ampliação conceitual, via ensino (DA ROCHA FALCÃO, 1999). Pode-se dizer, portanto, que na perspectiva de Vergnaud, a relação entre o conhecimento empírico e o conhecimento científico abrange algo mais complexo do que a simples articulação entre esses dois campos de saber.

Nesta concepção, a abordagem psicológica do conceito não pode prescindir da consideração de um domínio epistemológico específico, visto que "o conhecimento é sempre conhecimento de algo" que se encontra amalgamado a três aspectos que dão ao "conceito o seu estatuto de ferramenta psicológica: o conjunto de situações, os invariantes operatórios e o conjunto de significantes que permitem representá-lo" (DA ROCHA FALCÃO, 2003, p.40).

Face às discussões aludidas nesta seção, torna-se necessário apresentar os campos conceituais da aritmética, na qual se encontra inserido o objeto de estudo desta investigação: o conceito de divisão.

1.1.1. Os campos conceituais da aritmética

Conforme Vergnaud (1982, 1991, 1997, 2003), os conceitos matemáticos estão inseridos em campos conceituais, que são definidos como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos, representações simbólicas firmemente unidos uns aos outros. Para o autor, existem dois grandes campos conceituais da aritmética: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. Embora seja possível delimitar o espaço pertencente a cada um desses campos, devido às especificidades de cada um deles, os limites cognitivos entre ambos não são completamente definidos, haja vista a existência de proximidades inerentes às estruturas aditivas e às estruturas multiplicativas.

Segundo Vergnaud (1982), o campo conceitual das estruturas aditivas é constituído por um conjunto de situações que pode ser analisado com base na adição e na subtração. Estas envolvem um estado inicial, a operação (algo adicionado ou retirado) e o estado final, após a transformação. As principais relações aditivas são: composição, transformação e comparação de medida; composição de transformações e de relações e transformações de relações[6]. Por outro lado, o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve todo o conjunto de situações que requer o uso de divisão, multiplicação ou a combinação destas operações. Além das operações mencionadas, fazem parte deste campo conceitual outros conceitos como: fração, razão, proporção, porcentagem, número racional, análise de dimensão, espaços vetoriais, funções lineares e não lineares.

Para Vergnaud (1991), a complexidade e diversidade em relação ao domínio das relações multiplicativas podem ser ilustradas através da resolução de um conjunto de problemas complexos que podem ser identificados a partir de três categorias distintas próprias das estruturas multiplicativas: produto de medidas, proporção múltipla e isomorfismo de medidas. Embora a resolução desses tipos de problemas requeira uma operação de divisão, o grau de dificuldade exigido em cada uma dessas categorias é diferente, como discutido a seguir.

Em problemas envolvendo produto de medidas ocorre uma relação ternária (entre três variáveis). A relação ternária consiste numa relação de três quantidades, das quais uma é produto das outras duas quantidades, tanto no plano numérico como no plano dimensional. Vergnaud (1991), comenta que esta estrutura cartesiana de duas medidas para encontrar uma terceira medida pode ser observada em problemas que envolvem volume, área e combinatória.

---

[6] Situações de natureza aditiva não serão discutidas neste estudo; no entanto, informações detalhadas sobre tais situações podem ser obtidas em Vergnaud (1986, 1991, 1997).

Neste tópico, abordaremos problemas de análise combinatória, pois eles requerem o uso da divisão, temática central desta investigação[7].

Para Vergnaud (1991), existe uma forma de divisão própria da relação multiplicativa que não pode ser confundida com as divisões que se derivam do isomorfismo de medidas. Por exemplo:

> "Trocando somente de blusão e cachecol, Ana pode ter 15 trajes diferentes. Ela tem 3 blusões. Quantos cachecóis ela tem?" (VERGNAUD, 1991, p. 214)

Note-se que neste problema, o número de trajes deve ser dividido pelo número de blusões para se achar o número de cachecóis. Portanto, três elementos diferentes estão relacionados entre si, uma vez que cada traje a ser usado requer um blusão e um cachecol diferente, ou seja, para cada blusão usado existe a possibilidade de usar cinco cachecóis diferentes para formar os trajes.

Na estrutura de proporção múltipla existe a relação entre três medidas, nas quais a terceira delas é proporcionalmente independente das duas outras medidas de espaço, ou seja, em problemas envolvendo essa estrutura três variáveis devem ser consideradas e relacionadas. Para ilustrar este tipo de estrutura, Vergnaud (1983, p.138) apresenta o seguinte exemplo no qual deve ser estimada a produção de leite de uma fazenda:

> A produção de leite de uma fazenda é (sob certas condições) proporcional ao número de vacas e ao número de dias do período considerado (VERGNAUD, 1983, p. 138).

Nesse exemplo, para se calcular a produção de leite devem-se considerar três variáveis: o número de vacas, a produção média de leite por vacas por dia e número de dias. Sem considerar todas essas variáveis, o fazendeiro não pode estimar a produção de leite. Para Vergnaud (1983), os problemas que envolvem proporções múltiplas são os mais complexos.

---

[7] Explicações mais detalhadas referentes a outras operações usadas para resolver tais problemas podem ser encontradas em Vergnaud (1991) ao tratar sobre a multiplicação.

No problema de isomorfismo de medidas, existe uma relação quaternária, ou seja, existe uma proporção simples entre dois espaços de medida. Segundo Vergnaud (1991), o esquema para resolver este tipo de problema envolve três níveis de dificuldades: multiplicação, regra de três e divisão. Entretanto, esses problemas podem ser representados por esquemas análogos, nos quais uma quantidade é procurada. Por exemplo:

(1) Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Qual é o preço de uma garrafa?

garrafas		***reais***
1	$\longrightarrow$	**X**
3	$\longrightarrow$	**12**

(2) Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$ 4,00 cada um. Quantos pacotes ele pode comprar?

pacotes		***reais***
1	$\longrightarrow$	**4**
X	$\longrightarrow$	**12**

Figura 1. Problemas de divisão representados por esquemas análogos (VERGNAUD, 1991, p.198).

O resultado para esses dois problemas pode ser encontrado, segundo Vergnaud (1991), a partir de uma tabela de correspondência entre dois tipos de quantidades que traduz o isomorfismo de duas medidas (garrafas/reais ou pacotes/reais), como ilustra a Figura 2 a seguir:

Pacotes/ garrafas		***Reais***
1	$\longrightarrow$	**4**
2	$\longrightarrow$	**8**
3	$\longrightarrow$	**12**
4	$\longrightarrow$	**16**
5	$\longrightarrow$	**20**

Figura 2. Correspondência que traduz o isomorfismo de medidas entre duas quantidades (garrafas/reais e pacotes/reais).

Embora ambos os problemas possam ser resolvidos e as respostas possam ser encontradas através do isomorfismo entre duas medidas (Figura 2), diferenças entre esses dois exemplos podem ser observadas. No primeiro problema (Figura 1), é preciso buscar o valor unitário, o quociente e a relação entre grandezas diferentes; enquanto que, no segundo exemplo, o valor unitário está dado e é necessário buscar o número de unidades do primeiro tipo (pacotes) que corresponde a uma grandeza dada pelo segundo tipo (reais). Esses dois tipos de problemas são denominados por Vergnaud (1991) de divisão por partição e divisão por quotas.

Em problemas de divisão por partição, é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos). Por exemplo:

> Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixa? (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 240)

Para resolver este tipo de problema, é preciso considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao tamanho das partes, que o dividendo é representado pelo todo (valor/quantidade a ser dividida) e que o divisor refere-se ao número de partes em que o todo é dividido.

Em problemas de divisão por quotas, é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas. Por exemplo:

> Marta tinha 19 rosas e queria colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos será que ela vai precisar? (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 240)

Para resolver problemas de divisão por quotas, deve-se considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao número de partes em que o todo foi dividido, que o dividendo é representado pelo todo e o divisor refere-se ao tamanho das partes (quotas previamente estabelecidas).

Uma análise desses dois tipos de problemas revela que a mudança de incógnita a ser encontrada altera a natureza da operação a ser aplicada Em problemas de divisão por partição, a criança deve encontrar o tamanho das partes; já em problemas de divisão por quotas, a criança deve encontrar o número de partes em que o todo foi dividido. Em outras palavras, apesar dos problemas envolverem a divisão cada um deles requer uma forma de raciocínio distinta que está imbricada na situação, ilustrando a idéia de que existem diferentes situações que envolvem um mesmo conceito. Logo, na perspectiva de Vergnaud (1990) para que um conceito possa ser compreendido não se deve considerar apenas as situações ou os invariantes ou os significantes, mas esses três aspectos em conjunto.

Ao considerar a situação como marco inicial para o entendimento acerca da conceptualização da divisão, abre-se caminho para a compreensão das dificuldades apresentadas pelos indivíduos e a possibilidade de se construir intervenções que os auxiliem a ampliar o conceito já construído.

Embora considerar as três dimensões, proposta por Vergnaud, seja fator decisivo para a construção de um dado conceito, existe um outro aspecto que merece ser contemplado: a forma de intervir para que os indivíduos, sobretudo a criança, compreendam os princípios invariantes presentes num dado conceito. Este aspecto é contemplado na presente investigação que, partindo das dificuldades apresentadas por crianças ao resolverem problemas de divisão, propõe-se a examinar o efeito de uma intervenção. A intervenção proposta envolve situações que visam superar as dificuldades acerca das relações inversas quando o dividendo é mantido constante e as dificuldades com o resto, fundamentando-se nas evidências empíricas apresentadas e discutidas pelos teóricos da área. A natureza da intervenção implementada, bem como suas características são apresentadas no Capítulo 2 - Método.

A Parte II, a seguir, versa sobre a complexidade da divisão e as dificuldades documentadas na literatura que emergem quando as crianças e adolescentes resolvem problemas envolvendo essa operação.

PARTE II: A complexidade da divisão, as noções iniciais das crianças e as dificuldades experimentadas em relação a este conceito

Conceitos de natureza multiplicativa requerem mudança substancial no pensamento dos indivíduos. Diferentemente das operações de natureza aditiva (que envolvem um estado inicial, uma operação e o estado final após a transformação), as de natureza multiplicativa, como, por exemplo, a divisão, oferece desafios adicionais, tais como: as divisões sucessivas, uso de regras operatórias, a busca de um quociente que requer o estabelecimento das relações entre o tamanho das partes, o número de partes e o tamanho do todo (VERGNAUD, 1983, 1986, 1990, 1991; NUNES; BRYANT, 1997).

Nunes e Bryant (1997) afirmam que durante muito tempo acreditou-se que todas as transformações relevantes ao raciocínio matemático dependiam exclusivamente de transformações lógicas, ou seja, a criança deveria adquirir a compreensão lógica necessária para ser capaz de, por exemplo, contar, somar, dividir. No entanto essa concepção, defendida por Piaget, passa por transformações substanciais, quando se considera as três dimensões imbricadas na construção dos conceitos defendida por Vergnaud (1990): as situações que dão significados aos conceitos, as propriedades invariantes dos conceitos e as representações utilizadas na simbolização do conceito.

No caso da divisão, do ponto de vista matemático, dois problemas podem ter a mesma solução formal (15÷3 = 5), mas, sob o ponto de vista psicológico e educacional, os problemas podem ser diferentes (apresentar situações distintas), como pode ser ilustrado nos exemplos a seguir:

> Márcio foi a uma papelaria e comprou 15 cadernos para dar aos seus 3 amigos. Ele quer que cada amigo receba a mesma quantidade de cadernos. Quantos cadernos cada amigo vai receber? (Problema de divisão por partição)
>
> Márcio comprou 15 bolinhas de gude. Ele quer dar 3 bolinhas de gude para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar bolinhas de gude? (Problema de divisão por quotas)

Ao tentar resolver estes problemas, as crianças associam estas situações aos invariantes operatórios do conceito de divisão: na divisão por partição, as partes distribuídas entre as pessoas devem ser iguais, na divisão por quotas, a quota preestabelecida não pode ser alterada, existe uma relação inversa entre o divisor e o quociente, o resto é sempre menor que o divisor etc. Do ponto de vista gráfico, por exemplo, a expressão verbal “15 dividido por 5” pode ser representada através de diferentes formas matemáticas convencionais (15/5, 15÷5) ou não-convencionais (pictográfica ou icônica), ou ser representada também através de materiais concretos (fichas, objetos idênticos aos presente no enunciado)[8].

Outro aspecto que tem sido central nas discussões de Nunes e Bryant (1997) refere-se ao fato das crianças usarem uma relação lógica específica para resolver um problema em uma dada situação, mas não em outra na qual esta mesma relação poderia ser usada. Segundo os autores, este tipo de evidência é importante porque mostra duas concepções distintas sobre matemática em crianças: (1) as situações são matematicamente diferentes e pedem invariantes lógicos distintos, apesar de, na superfície, parecerem equivalentes para a maioria dos adultos, como no caso dos problemas de divisão por partição e divisão por quotas comentados anteriormente e; (2) a mesma relação lógica poderia estar conectada a um sentido de número novo em uma situação diferente. Por exemplo, em problemas de comparação[9] (estruturas aditivas) as crianças têm que lidar com um novo significado de número: o número tem uma medida de relações estáticas.

---

[8] Na literatura, as expressões material concreto (e.g.; BATISTA, 2002; LAUTERT, 2000; LAUTERT; SPINILLO, 1999; SELVA, 1998), material de contagem (e.g.; CALSA, 2002) e material manipulativo (e.g.; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004; SELVA; BORBA; STEEDMAN, 2004) são usadas como sinônimos.

[9] Neste tipo de problema, as crianças têm que compreender a palavra *“mais”* em seu sentido comparativo. Por exemplo, no problema ‘Eduardo tem 8 laranjas e Mário tem 5. Quantas laranjas Eduardo tem a mais do que Mário?’, as crianças entendem que Eduardo possui mais laranjas que Mário, porém apresentam dificuldades em quantificar essa comparação.

Além desses aspectos, Nunes e Bryant (1997) destacam os invariantes lógicos presentes na organização das ações dos indivíduos na compreensão do conceito de divisão, a saber:

- o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão eqüitativa das partes);
- o todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição;
- o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto;
- quanto maior (ou menor) o número de partes, menor (ou maior) o tamanho de cada parte (relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes);
- o resto nunca pode ser maior e nem igual ao número de partes ou tamanho das partes.

Portanto, a compreensão do conceito de divisão não pode ser desenvolvida quando se toma como referência apenas um dos invariantes operatórios presentes na ação dos indivíduos. É necessário que os sujeitos se apropriem, durante o processo de construção do conhecimento, de outros invariantes operatórios envolvidos na divisão, para que assim possam entender a lógica subjacente ao conceito e, poder fazer uso dele de uma forma mais consciente e elaborada. Como comentam Correa e Spinillo (2004), a solução correta de um problema ou operação de divisão nem sempre é sinônimo de uma compreensão mais sofisticada do conceito, haja vista que a criança pode aplicar corretamente o algoritmo para a solução de um problema e ter um nível de compreensão bastante elementar; ou de maneira oposta, cometer erros ao aplicar o algoritmo e ter um conhecimento mais elaborado do que a criança que resolve corretamente. Assim, como afirmam as autoras "[...] refletir e interpretar os tipos de resolução adotados por crianças é uma tarefa complexa, porém essencial tanto para pesquisadores como para educadores que se propõem a compreender o raciocínio da criança e a implementar formas de desenvolvê-lo" (p. 103).

O entendimento acerca da conceptualização da divisão é, muitas vezes, confundido com competência em operar o algoritmo da divisão. Aplicar o algoritmo da divisão com precisão passa a ser o único critério para definir e avaliar a compreensão que a criança tem sobre este conceito. Segundo Correa e Spinillo (2004), este modo de tratar o ensino de conceitos lógico-matemáticos, no caso específico da divisão, apresenta algumas limitações, a saber: (a) reduz a matemática à execução de algoritmos, ignorando que esta fornece modelos para a representação e compreensão do mundo; (b) ignora as diferenças entre operação e algoritmo, haja vista que a operação refere-se às transformações realizadas sobre os números, quantidades, grandezas e medidas; enquanto que o algoritmo refere-se ao conjunto de procedimentos que conduz à execução de uma operação; (c) desconhece que, do ponto de vista psicológico, o processo de aquisição dos conceitos matemáticos envolvem invariantes operatórios, sistemas de representação e situações que conferem significados aos conceitos (VERGNAUD, 1990, 1997, 2003).

Face às questões discutidas anteriormente, constata-se que a essência do raciocínio multiplicativo se constitui progressivamente com base no desenvolvimento de algumas competências, dentre as quais destacam-se aquelas relativas à coordenação das relações entre, pelo menos, duas variáveis; ou entre duas grandezas ou quantidades; enquanto que o raciocínio aditivo desenvolve-se tendo como suporte os esquemas relativos às ações de juntar e separar. Em outras palavras, as competências cognitivas envolvidas quando a criança tem que lidar com a divisão enquanto operação matemática difere do ato social de partilhar (ação de distribuir) porque implica em prestar a atenção às relações entre as quantidades que estão sendo distribuídas (CORREA; SPINILLO, 2004). Os estudos empíricos apresentados e discutidos a seguir ilustram a complexidade que envolve o domínio do conceito da divisão por crianças.

2.1. As concepções iniciais das crianças

As pesquisas sobre divisão desenvolvidas com crianças, como documentado por Correa (1996), focalizam, basicamente, dois aspectos: as concepções iniciais sobre a divisão e as estratégias e procedimentos adotados na resolução de problemas.

Estudos sobre as concepções iniciais são menos freqüentes e investigam crianças que ainda não foram ensinadas sobre a divisão no contexto escolar (ANGHILERI, 1993; CORREA, 1996; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; KORNILAKI; NUNES, 1997). Os resultados desses estudos, de modo geral, mostram que a compreensão inicial das crianças baseia-se na noção de repartir (compartilhar), noção esta relacionada ao esquema de distribuição. Embora relevante e amplamente considerada na prática escolar, esta noção não garante a compreensão imediata das relações entre os termos da divisão (dividendo, divisor e quociente), haja vista que a idéia de divisão diferencia-se da ação de compartilhar.

Na ação de repartir (compartilhar), como anteriormente mencionado na Parte I, a atenção da criança volta-se para a distribuição de quantidades iguais entre cada receptor, o que leva à distribuição dos objetos a partir da correspondência um-a-um para cada conjunto, até que não exista nenhum elemento para ser distribuído ou até que não existam elementos suficientes para outra rodada de distribuição.

Entretanto, entender a divisão implica em compreender a relação existente entre seus termos: dividendo, divisor, quociente e resto, ou seja, exige do indivíduo uma compreensão que está para além da observação direta dos números ou objetos envolvidos em uma determinada conta ou problema. Na realidade, implica em uma comparação constante entre os elementos a serem divididos e o número de partes ou tamanho das partes em que o todo está sendo dividido, podendo o mesmo gerar um resto ou não. Compreender essas relações implica entender os invariantes operatórios que regem o conceito de divisão (NUNES; BRYANT, 1997). Este entendimento, entretanto, como documentado na literatura e no depoimento de professores do ensino fundamental, não é algo fácil para as crianças, como discutido a seguir, quando são apresentados alguns estudos que ilustram as dificuldades que emergem quando as crianças resolvem problemas e operações de divisão com e sem resto.

2.2. As dificuldades experimentadas com a divisão

Os estudos que investigam as estruturas multiplicativas, em especial a divisão, têm aumentado substancialmente nos últimos anos (BATISTA, 2002; BORBA; SELVA; SPINILLO; SOUSA, 2004; CALSA, 2002; CAMPBELL; FRASER, 1997; CORREA, 2000, 2001; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; CHARLES; NASON, 2000; DROUJKOVA, 2003; KORNILAKI; NUNES, 1997; KUMAGAI, 2000; LAMB; BOOKER, 2003; LAUTERT; SPINILLO, 1999, 2001, 2002, 2004a, 2004b; LI, 2001; LI; SILVER, 2000; MULLIGAN; WRIGHT, 2000, NUNES; BRYANT, 1997; SAIZ, 2001; SELVA, 1993, 1998; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004; SELVA; BORBA; STEEDMAN, 2004; SILVER; SHAPIRO; DEUTSCH, 1993; SPINILLO; LAUTERT, 2002; SQUIRE, 2002; SQUIRE; BRYANT, 2002; TSAMIR; TIROSH, 2000). No entanto, as formas de investigar este conceito são extremamente diversificadas. Uns investigam operações, outros problemas e ainda existem os que investigam operações e problemas em contextos específicos.

Analisando-se a literatura da área, é possível identificar-se quatro tipos de dificuldades que surgem quando crianças e adolescentes lidam com a divisão: (a) dificuldades relacionadas aos tipos de problemas; (b) dificuldades relacionadas aos suportes de representação; (c) dificuldades em compreender as relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante; (e) dificuldades em lidar com o resto. Neste estudo serão enfatizadas as duas últimas dificuldades por serem apontadas como as mais recorrentes nas crianças.

No que se refere às dificuldades relacionadas aos tipos de problemas, verifica-se que não existe na literatura uma posição de consenso entre os pesquisadores. Alguns estudos mostram que existem dois modelos intuitivos pertencentes às estruturas multiplicativas (divisão por partição e divisão por quotas) que governam o comportamento dos indivíduos de modo que problemas que violam tais modelos conduzem a maiores dificuldades na solução dos mesmos (CORREA, 1996; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; FISHBEIN; DERI; MARINO, 1985; KORNILAKI; NUNES, 1997; NUNES; BRYANT, 1997). Para esses autores, os problemas de partição são mais simples, porque a noção inicial que a criança tem sobre a divisão é decorrente da idéia de repartir (distribuir), estando a atenção da criança voltada para a distribuição de quantidades iguais. Esta noção seria compreendida desde muito cedo, uma vez que a criança realiza ações de repartir em situações sociais diversas, como por exemplo: dividir o lanche com os amigos, dividir bolinhas de gude para iniciar o jogo; devendo, portanto, os problemas de partição serem resolvidos com sucesso antes dos problemas de divisão por quotas.

Outros autores (e.g.; BROWN, 1981; NESHER, 1988; SELVA, 1993), apesar de não identificarem o efeito do tipo de problema no desempenho, apontam que problemas de divisão por quotas podem ser resolvidos com mais facilidade pelas crianças por conduzirem diretamente ao uso da estratégia de subtração repetida[10].

No que se refere às dificuldades relacionadas com suportes de representação (uso de papel e lápis, fichas e/ou objetos), verifica-se que os estudos não são conclusivos em relação às dificuldades apresentadas pelas crianças ao resolverem problemas de divisão, quando utilizam diferentes suportes de representação (LAUTERT, 2000; SELVA, 1998). Isto porque os estudos têm evidenciado percentuais de acertos semelhantes na situação gráfica (papel e

[10] Na estratégia de subtração repetida os indivíduos partem da quantidade total (dividendo) subtraindo a quantidade de elementos determinada pelo problema de divisão por quotas ou por eles estimada em problemas de divisão por partição.

lápis) e na situação concreta (objetos e fichas).

Os estudos conduzidos por Selva (1998) e por Lautert (1999, 2000) apontam que o material concreto não é um suporte de representação que facilite ou promova o desempenho de estratégias mais flexíveis e apropriadas de resolução, visto que muitas dessas estratégias se limitam a representação direta do enunciado problema. O uso de papel e lápis, ao contrário, permite uma maior flexibilidade para lidar com os dados do problema, gerando estratégias mais sofisticadas que contemplam, de forma mais efetiva, os elementos do problema.

Estudos recentes (BATISTA, 2002; BORBA; SELVA; SPINILLO; SOUSA, 2004; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004; SPINILLO, 2001) trazem à tona a idéia de que os suportes de representação desempenham papéis distintos durante o processo de resolução, não por serem material concreto ou suporte gráfico, mas por deixarem explícita a relação entre as quantidades presentes no enunciado dos problemas. Batista (2002) definiu esses materiais como sendo material concreto direto (carrinhos e caixinhas) e material concreto neutro (fichas, palitos). O material concreto direto indica de forma clara a que quantidades os objetos se referem, por exemplo, carrinhos podem representar o dividendo e caixinhas podem representar o divisor. O material concreto neutro, por outro lado, não indica de forma clara a que quantidades os objetos de um dado problema se referem, por exemplo, fichas podem tanto representar o dividendo quanto o divisor.

Importante ressaltar que, nestes estudos (BATISTA, 2002; BORBA; SELVA; SPINILLO; SOUSA, 2004; LAUTERT, 2000; LAUTERT; SPINILLO, 1999, SPINILLO, 2001; SELVA, 1998; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004), são sempre os examinadores e não a criança, quem indica o suporte a ser utilizado durante a resolução dos problemas. Talvez as dificuldades apresentadas pelas crianças nesses estudos pudessem estar relacionadas ao tipo de suporte representacional fornecido para resolver o problema que poderia não estar mobilizando *competências em ação* que lhes permitissem reorganizar-se no plano mental, considerando não apenas os invariantes operatórios, mas também a situação e o suporte de representação que ela acha pertinente para resolver o problema. No entanto, escolher o suporte representacional para resolvê-lo, não implica diretamente apresentar a resposta correta para o problema, pois a criança pode fazer uma escolha inadequada para resolver ou cometer outro tipo de erro relacionado à operação lógica por ela requerida no momento da resolução.

Em síntese, pode-se dizer que, se, por um lado, há controvérsias quanto às dificuldades relacionadas aos tipos de problemas (divisão por partição e divisão por quotas) ou em relação aos limites e possibilidades derivados do uso de diferentes suportes de representação; por outro lado, parece haver concordância quanto a, pelo menos, duas dificuldades: compreender as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e a dificuldade em lidar com o resto. A seguir apresentam-se alguns estudos empíricos que ilustram estas duas dificuldades.

2.2.1. Estudos que focalizam as relações inversas entre os termos da divisão

Vários autores (CORREA, 2000; CORREA, 2001; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; KORNILAKI; NUNES, 1997, SQUIRE, 2002) têm investigado a relação entre a ação de compartilhar e as noções iniciais que as crianças pequenas possuem sobre a divisão. O estudo de Correa, Nunes e Bryant (1998), com crianças inglesas de 5 a 7 anos (sem instrução formal sobre multiplicação e a divisão), moradoras de um bairro de classe socioeconômica baixa de Oxford, merece destaque por ser um estudo inédito que investiga a compreensão inicial das crianças acerca da divisão.

Esse estudo envolveu dois experimentos independentes que tinham por objetivo examinar se crianças pequenas são capazes de compreender as relações inversas entre o divisor-quociente em tarefas não-computacionais envolvendo problemas de divisão por partição (Experimento 1) e problemas de divisão por quotas (Experimento 2). Participaram desta investigação 120 crianças distribuídas em dois grupos. Sessenta crianças foram solicitadas a resolver oralmente problemas de divisão por partição que consistiam no cálculo da quantidade de comida a ser distribuída para um certo número de coelhos, e as outras sessenta crianças foram solicitadas a calcular, para quantos coelhos poderia ser distribuída uma determinada quota de alimento (divisão por quotas).

No Experimento 1, dois grupos de coelhos eram colocados em lugares diferentes de uma mesa, sendo que o número de coelhos de cada grupo variava: dois a quatro. Na frente de cada grupo era colocada a mesma quantidade de alimento a ser dividida entre os coelhos, algumas vezes 12 balas, outras vezes 24. As crianças, neste estudo, ao invés de serem perguntadas sobre quantas balas cada coelho iria ganhar em números; eram solicitadas a estimar quantas balas (das 12 ou 24) cada um dos coelhos receberia, isto é, se um dos coelhos de um determinado grupo receberia mais balas, a mesma quantidade ou menos balas que um coelho pertencente a outro grupo.

No Experimento 2, era dito que o examinador desejava convidar coelhos azuis e rosas para um piquenique, mas que ele não sabia quantos coelhos poderia convidar. Em seguida, o examinador apresentava uma ilustração, em um prato, de alguns blocos (2, 3 ou 4 blocos) que correspondia à quantidade de doces que deveriam ser dados respectivamente a cada coelho dos dois grupos. Cada criança era solicitada a estimar se eles convidariam o mesmo número de coelhos azuis e rosas ao piquenique ou se eles convidariam mais coelhos azuis ou mais coelhos rosas ao piquenique.

Nesse experimento, duas condições foram apresentadas às crianças: *mesma condição,* em que os blocos a serem dados aos coelhos nos dois grupos eram o mesmo, por exemplo, dois blocos vermelhos para cada coelho rosa e dois para cada coelho azul e; a *condição* *diferente,* em que o número de blocos a serem dados a cada coelho em ambos os grupos era diferente, por exemplo, dois blocos vermelhos para o coelho rosa e quatro para o coelho azul. O número de blocos a ser dado a cada coelho em cada grupo variou de dois a quatro.

Os resultados demonstram que as crianças menores, principalmente as de cinco anos, são capazes de fazer estimativas; porém ao realizar essa atividade, podem cometer dois tipos de erros: focalizar a atenção no tamanho do dividendo, esquecendo o divisor; ou focalizar a atenção no divisor, esquecendo o tamanho do dividendo. Por volta dos seis anos, esses erros tendem a diminuir e a criança passa a demonstrar uma compreensão qualitativamente superior em direção à compreensão dessas relações entre os termos envolvidos na operação de divisão.

Uma outra importante contribuição que se pode inferir a partir deste estudo, diz respeito ao delineamento de um quadro teórico acerca das concepções e do desenvolvimento da habilidade da criança em estabelecer comparações e julgamentos em relação à divisão nas tarefas não-computacionais.

Está documentado na literatura que, desde os cinco anos, as crianças têm uma compreensão explícita do princípio da correspondência e da equivalência entre quantidades (FRYDMAN; BRYANT, 1988). Entretanto, os resultados de Correa, Nunes e Bryant (1998) mostram que a noção inicial da criança sobre compartilhar não garante que a mesma compreenda de imediato a relação entre os termos da divisão, uma vez que as exigências impostas pelas situações de repartir (distribuir) e dividir não podem ser consideradas idênticas, em termos cognitivos. Nas situações cotidianas[11], por exemplo, a criança pode repartir “x” elementos a partir de procedimentos envolvendo correspondência termo-a-termo, ou seja, a criança distribui *um para você, um para mim, um para você, um para mim* e assim sucessivamente até esgotar o todo inicial. Já a divisão como operação multiplicativa, vai

[11] Este termo está sendo utilizado para enfatizar as situações de repartir que a criança encontra em sua vida diária, por exemplo, repartir as bolinhas de gude entre os participantes antes de iniciar o jogo.

requerer a compreensão das relações entre dividendo e divisor na determinação do valor do quociente a ser encontrado.

Kornilaki e Nunes (1997) encontraram resultados semelhantes com 128 crianças inglesas de 4 a 7 anos, ao lidarem com material concreto em situações de problemas de partição e de divisão por quotas que envolviam quantidades contínuas e descontínuas. Este estudo tinha por objetivo replicar o estudo de Correa (1995)[12] e ampliando-o ao domínio das quantidades contínuas, particularmente em relação a um tema pouco explorado e mais complexo: as frações. As autoras buscavam responder questões como, "[...] poderiam as crianças de seis anos compreender que um bolo dividido entre seis crianças resultaria em divisões menores do que o bolo dividido entre quatro crianças?" (KORNILAKI; NUNES, 1997, p. 2).

Esse estudo consistiu em dois experimentos, um com situações envolvendo problemas de partição e outro com situações envolvendo problemas de divisão por quotas. Procedendo da mesma forma que Correa, Nunes e Bryant (1998), era dito para a criança, por exemplo, que dois gatos pretos iriam dividir igualmente entre eles um bolo de peixe; e três gatos marrons iriam dividir igualmente entre eles outro bolo de peixe. O examinador apontava para um dos grupos (maior ou menor) e perguntava se os gatos dos dois grupos receberiam a mesma quantidade de bolo de peixe, quantidades diferentes ou menos bolo que os gatos pertencente ao outro grupo, em seguida, era solicitado aos participantes que justificassem a resposta dada.

Os resultados revelaram que as crianças possuem seus próprios esquemas de ação e estratégias que lhes permitem abordar diferentes situações aritméticas muito antes de serem

[12] Estudo desenvolvido na tese de doutoramento "Young children´s understanding of the division concept". University of Oxford sob a orientação de Peter Bryant resultando no artigo publicado em 1998 por Correa, Nunes e Byant.

expostas ao ensino formal, principalmente quando se considera o desempenho delas na tarefa de quantidades contínuas, nas quais a quantificação foi além da habilidade das crianças pequenas. Verificou-se, também, que as crianças podem raciocinar sobre o tamanho relativo das quotas das quantidades descontínuas e das frações das quantidades contínuas com a mesma facilidade. Embora as crianças apresentem essas facilidades, ao lidarem com quantidades contínuas e descontínuas, as autoras enfatizam que os problemas de divisão por quotas foram mais difíceis de serem resolvidos pelas crianças que os problemas de partição.

Os resultados derivados desses dois estudos indicam que as crianças, antes mesmo de serem formalmente instruídas sobre a divisão, já possuem concepções acerca da atividade de distribuir, no entanto esta noção inicial não permite que elas compreendam as relações envolvidas na divisão. Embora tanto o estudo de Correa, Nunes e Bryant (1998) como o de Kornilaki e Nunes (1997) ressaltem as relações entre os termos da divisão, um dos termos não foi contemplado nestas investigações: o resto. Como será que a criança estimaria as quantidades se restasse um ou mais elementos depois de realizada a divisão? Questões como esta geram a necessidade de compreender melhor não apenas as concepções iniciais das crianças em relação à divisão, mas também investigar mais sistematicamente a lógica subjacente à construção da noção de resto por parte da criança que está iniciando o aprendizado da divisão.

Apesar das experiências iniciais da criança não levar à compreensão dessas relações, isto não significa que elas não possam lidar com situações que envolvam a divisão antes de serem formalmente instruídas no contexto escolar. É possível supor, por exemplo, que se estimuladas a refletir sobre as relações entre os termos (dividendo, divisor, quociente e resto) as crianças apresentariam menos dificuldades em lidar com a divisão enquanto operação matemática, cujas relações de covariação entre os termos são essenciais para a compreensão das estruturas multiplicativas.

2.2.2. Estudos que focalizam o resto

Alguns estudos encontrados na literatura têm se preocupado em estudar a noção de resto de forma mais sistemática (BORBA; SELVA; SPINILLO; SOUSA, 2004; CARRAHER; SHLIEMANN, 1991; CAMPBELL; FRASER, 1997; DESFORGES; DESFORGES, 1980; LI, 2001; LI ; SILVER,1988, 2000; SELVA, 1993; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004; SELVA; BORBA; STEEDMAN, 2004; SILVER, 1988; SILVER; SHAPIRO; DEUTSCH, 1993; SPINILLO; LAUTERT, 2002).

Segundo Silver (1988), ao resolver uma operação de divisão, os estudantes aprendem a expressar o resto de diferentes formas. Por exemplo, o resultado da operação 50 ÷ 4 pode ser expresso como: 12.5, 12 1/2 ou ainda 12 R2. No entanto, as formas de expressar o resto nem sempre são incorporadas à solução de um problema. Na maioria das vezes, os estudantes experienciam dificuldades quando a computação é atrelada à solução do problema; observe o exemplo que ilustra esta dificuldade:

> Mary tem 100 castanhas as quais ela pode colocar dentro de recipientes que comportam exatamente 40 castanhas. (1) Quantos recipientes ela pode encher? (2) Quantos recipientes ela pode usar para colocar todas as castanhas? (3) Depois dela encher do mesmo modo os recipientes, quantas castanhas podem sobrar? (SILVER, 1988, p 127).

Para resolver este problema, o cálculo será sempre o mesmo, 100 ÷ 40; mas a resposta para cada uma das questões será diferente. Na pergunta (1), a resposta correta é **2**, uma vez que somente dois recipientes podem ser cheios e o resto, neste caso, pode ser ignorado. Na pergunta (2), a resposta correta é **3**, uma vez que se deve considerar a necessidade de um terceiro recipiente para colocar todas as castanhas mesmo que este último não esteja completo. Interessante observar que a resposta a esta questão não ocorre explicitamente na computação (cálculo). A resposta é construída conjuntamente entre os dados da computação matemática e a história da situação matemática apresentada. Portanto, nesta pergunta, o resto deve ser considerado na resposta final a ser dada. Na pergunta (3), a resposta correta é **20**, ou seja, pergunta-se especificamente sobre o resto, a quantidade de castanhas que não podem ser colocadas nos recipientes, pois o problema traz preestabelecida a quota que deve ser colocada nos recipientes.

Silver (1988) chama a atenção para o aspecto semântico do problema apresentado acima. Para o autor, três aspectos devem ser considerados na resolução de problemas aritméticos verbais: (a) a história do texto (b) a situação de história e, (c) o modelo matemático[13]. Responder ao problema implica, portanto, executar o cálculo (operação exigida pela história do problema – história do texto) e a partir da operação realizada (modelo matemático escolhido), interpretar o resultado tomando como referência as informações contidas na história do texto e na situação de história, ou seja, reorganizá-las de forma a expressar uma resposta matemática apropriada em função do conjunto de questões elaboradas pelo enunciado do problema que contempla tanto a história do texto como a situação de história.

Silver (1988) cita outro exemplo de problema que foi apresentado aos estudantes em 1983, no *Califórnia Assessement Program Mathemathics Test at* Grade *6,* o qual ilustra a dificuldade deles em lidar com o resto:

> Cento e trinta estudantes e professores da Escola Marie Curie vão a um piquenique. Cada ônibus escolar tem capacidade para comportar 50 passageiros. De quantos ônibus eles precisarão? (p.129)

Nesse exemplo, o autor verificou que a maioria dos estudantes americanos na faixa etária de 13 anos realiza o cálculo corretamente, mas comete o erro ao dar uma resposta

---

[13] Segundo Silver (1988), a história do texto refere-se às informações literais contidas no enunciado do problema que conduzem os indivíduos à escolha de um modelo matemático (algoritmo) mais apropriado para resolver o problema. Já a situação de história, refere-se à interpretação das informações contidas no enunciado com base no conhecimento de mundo dos indivíduos.

decimal: 2.6. Note-se que para resolver o problema, os estudantes necessitam refletir sobre a estrutura semântica do problema, interpretando-o, tomando como referência o conhecimento de mundo, ou seja, não é permitido que um ônibus seja fracionado, cortado em pedaços e mesmo assim continue circulando pelas ruas. Portanto, a resposta do cálculo matemático deverá ser reorganizada em função da estrutura semântica. O autor comenta que apenas 35% dos estudantes no Califórnia *Assessement Program Mathemathics Test at Grade 6* (1983) apresentaram a resposta adequada ao problema, ou seja, são necessários três ônibus para levar os estudantes e professores ao piquenique. Importante ressaltar que, não existe uma única resposta possível para esse problema, visto que um aluno pode dar várias respostas ou cada aluno dar uma resposta diferente, podendo, por exemplo, surgir o seguinte tipo de resposta: "serão necessários dois ônibus e duas Vans (com 15 lugares cada uma)". Além disso, como comentado na Parte I, a relação professor-aluno está subordinada a regras (implícitas e explicitas) e convenções que funcionam como cláusulas de um contrato (contrato didático). Neste caso, o desenvolvimento de competências para resolver problemas pode ser facilitado ou dificultado em função do contrato didático estabelecido. Se o contrato didático firmado pressupõe que "todo problema de matemática tem uma (e apenas uma) solução, e o professor é sempre capaz de chegar a tal solução" (DA ROCHA FALCÃO, 2003, p.19), dificilmente os alunos tentarão obter outras respostas e tentar entender o significado do resto.

Para Silver (1988), não é suficiente o aluno saber realizar o cálculo matemático exigido pelo enunciado, mas, sobretudo, é necessário que o aluno interprete as informações relevantes que aparecem no enunciado do problema. Tais informações podem exigir ou não que o estudante interprete o cálculo a fim de obter uma resposta que seja satisfatória ao problema proposto. Para que esta mudança ocorra, o contrato didático (as regras implícitas e explícitas) precisa ser renegociado a cada etapa de construção do conhecimento, visto que este contrato existe em função da aprendizagem dos alunos (SILVA, 1999).

Outra dificuldade apontada por Silver, Shapiro e Deutsch (1993) refere-se à falha na interpretação dos resultados computacionais atrelada à pergunta proposta no enunciado do problema. Segundo estes autores, o cálculo requerido para realização de problemas de divisão com resto não é a maior barreira para obter a resposta correta. O fracasso na solução deste tipo de problema está atrelado às falhas de interpretação dos resultados computacionais realizados pelos estudantes, ou seja, a *performance* é afetada pela dissociação entre o cálculo e a resposta considerada válida para resolver o problema. Para os autores, isso ocorre porque o mesmo algoritmo pode representar diferentes situações-problema, no entanto, a determinação correta da solução depende dos aspectos do contexto situacional e da quantidade envolvida no problema. Além disso, exige, por parte do estudante, a compreensão de que o resto é parte da quantidade inicial de elementos que foi distribuída.

Campbell e Fraser (1997) investigaram como alunos que se preparam para ser professores compreendem a noção de resto e de quociente. Neste estudo eram apresentadas a 21 futuros professores quatro questões: (1) “Se você divide 21 por 2, o que poderá ser o quociente? O que poderá ser o resto?”; (2) “Considerando $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$. Se você divide M por 15, o que poderá ser o quociente? O que poderá ser o resto?”; (3) “Supondo-se que lhe peçam para interpretar uma divisão com resto 10561/24. A calculadora poderia ajudá-lo? Como?” (4) Considerando-se o número 6 x 147+1, qual poderá ser o A (valor total)? (a) Se você divide A por 6, o que poderá ser o resto? O que poderá ser o quociente? (b) Se você divide A por 2, o que poderá ser o resto? O que poderá ser o quociente?” Os resultados mostraram que a divisão com resto nem sempre é evidente para os estudantes e que diferentes formas de expressão podem criar obstáculos para a compreensão dos elementos envolvidos na divisão.

Colocando-se em perspectiva os estudos citados (CAMPBELL; FRASER, 1997; SILVER, 1988; SILVER; SHAPIRO; DEUTSCH, 1993), pode ser verificado que a dificuldade dos estudantes e futuros professores encontra-se atrelada à noção de que o resto faz parte da quantidade inicial de elementos a ser distribuída e que a compreensão para esta noção está, de certa forma, subordinada às bases das relações que os indivíduos mantêm com o saber, neste caso específico, com a divisão com resto. Para estes aprendizes (estudantes e futuros professores), a instrução escolar não tem propiciado uma reflexão mais consistente sobre a relevância da noção do resto quando se realiza a divisão. As perguntas apresentadas aos estudantes nos problemas, em geral, não contemplam uma reflexão sobre a inclusão do resto na resposta do problema, o que leva à maioria deles a desconsiderá-lo, quando produzem a resposta.

Se por um lado, os estudos com adolescentes e adultos demonstram uma dificuldade em lidar com o resto durante a composição da resposta ao problema envolvendo situações cotidianas; por outro lado, os estudos com crianças (com e sem instrução sobre a divisão) enfatizam as dificuldades apresentadas por elas ao resolverem problemas escolares (LAUTERT, 2000; LI; SILVER, 2000; SELVA, 1998; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004; SELVA; BORBA; STEEDMAN, 2004).

Em seu estudo, Selva (1998) examinou se as escolhas das estratégias para lidar com o resto variavam em função dos tipos de problemas e/ou em função do material disponibilizado. Para tal, foram entrevistadas 108 crianças, com e sem instrução sobre a divisão, com idades entre 6 e 8 anos, alunas de escola particular da cidade do Recife. As crianças foram divididas em três grupos em função de três situações distintas: representação concreta (fichas), representação gráfica (papel e lápis) e, sem material (cálculo mental). Foram apresentados problemas com e sem resto a partir de duas histórias, cada uma contendo quatro problemas de divisão: dois de divisão por partição e dois de divisão por quotas.

A análise qualitativa revelou que as crianças ao resolverem os problemas de divisão com resto os separam em duas partes. Primeiro, escolhem a estratégia adequada para resolvêlos e, posteriormente, resolvem como lidar com o resto. A autora constatou que a escolha das estratégias para resolver o problema foi influenciada pelo tipo de problema (se partição ou divisão por quotas), enquanto que o modo de lidar com o resto foi visto como um problema independente que não estava relacionado aos tipos de problemas. Por outro lado, a análise quantitativa revelou que 42% das crianças de 6 anos não incluía o resto na sua resposta (errava a contagem, dava respostas aleatórias). Essa quantidade diminuiu à medida que a idade avançava, aos 7 (25.69%) e aos 8 anos (6.25%).

Ao analisar as respostas das crianças que mencionavam a existência do resto, Selva (1998) identificou seis estratégias de lidar com esse elemento: (1) a criança solicitava uma quantidade maior; (2) a criança aceitava que um dos grupos ficasse com mais elementos; (3) a criança removia o resto; (4) a criança formava grupos iguais, independentemente do enunciado do problema; (5) a criança refazia o problema; (6) criança dividia o resto em partes que pudessem ser distribuídas entre todos os grupos.

Os resultados demonstram que as crianças menores tendem a aceitar com maior freqüência a desigualdade das partes (estratégia 2 acima), enquanto que as crianças maiores, já instruídas sobre a divisão, optam ou pela remoção do resto (estratégia 3) ou por dividi-lo em partes que possam ser distribuídas entre todos os grupos (estratégia 6).

A autora observou que, a estratégia de remoção do resto foi utilizada de forma diferente pelas crianças com e sem instrução. As crianças sem instrução tendem a relacionar a remoção do resto ao enunciado do problema *"ele come logo"*, *"guarda na geladeira para comer depois"* (SELVA, 1998, p. 114); enquanto as crianças com instrução, principalmente as de oito anos, tratam o resto como um número isolado, sem fazer qualquer menção ao destino a ser dado para o mesmo, o que parece demonstrar um efeito da escolarização.

De modo geral, Selva (1998) verificou que o tipo de suporte utilizado na resolução dos problemas (papel e lápis e/ou fichas) influenciava a escolha de estratégias para lidar com o resto, sobretudo entre as crianças menores (seis anos). Na medida em que as crianças desenvolvem estratégias mais sofisticadas para lidar com a divisão, o tipo de suporte parece deixar de ser determinante quanto ao uso das estratégias.

Um estudo recente envolvendo intervenção com crianças cursando a 3ª e 5ª séries de uma escola pública do Recife foi conduzido por Selva, Borba, Braga e Couto (2004) com o objetivo de explorar a resolução de problemas de divisão com resto, o tratamento dado ao resto pelas crianças e sua representação em decimais. As 60 crianças investigadas foram distribuídas em três grupos que trabalhavam sob condições distintas durante a intervenção: grupo 1- resolveu os problemas usando fichas e a calculadora; grupo 2- resolveu os problemas utilizando papel e lápis e a calculadora, e o grupo 3 - resolveu os problemas propostos com manipulativos (material concreto: fichas) e papel/lápis. A análise dos resultados deste estudo está em andamento, entretanto os dados preliminares revelam que: (a) a maioria das crianças da 3ª série não está familiarizada com a calculadora; (b) o resto obtido por meio da resolução com manipulativos ou com papel e lápis não é facilmente percebido, principalmente pelas crianças menores; (c) a intervenção parece propiciar o levantamento de hipóteses sobre os números decimais por parte das crianças investigadas.

Em outro estudo Selva, Borba e Steedman (2004) investigaram se os tipos de problemas de divisão (partição e quotas) influenciava no tratamento dado ao resto. Neste estudo, 32 crianças de 2ª e 3ª séries foram solicitadas a resolver, em duas sessões, 16 problemas de divisão com resto usando fichas como apoio para a sua estratégia de resolução. As principais estratégias usadas pelas crianças das duas séries foram: subdividir o resto em partes suficientes para uma nova redistribuição; acrescentar elementos ao quociente ou ignorar os elementos do resto. Os resultados indicaram que o tratamento dado ao resto é influenciado pelo tipo de problema e que a estratégia de subdividir o resto foi típica dos problemas de partição; enquanto que e a estratégia de acrescentar elementos foi típica dos problemas de divisão por quotas. Não foram observadas diferenças na escolha das estratégias em função do tamanho do resto. As autoras salientam que este estudo reforça a importância de intervenções que favoreçam a análise, por parte das crianças, acerca das diferenças entre os tipos de problema.

A partir dos resultados destes estudos, duas hipóteses podem ser levantadas: as crianças têm dificuldade de perceber o resto como fazendo parte da quantidade de elementos que foi distribuída; as crianças têm dificuldades em estabelecer relações entre o resto e os demais elementos da divisão. Tais hipóteses não parecem ser excludentes, visto que conceber o resto como fazendo parte da quantidade de elementos que foi distribuída implica em estabelecer uma relação entre os termos. Isto porque o resto pertence ao todo e, como apontam os matemáticos, toda a operação de divisão possui um resto, sendo que, em alguns casos, esse resto é um conjunto cardinal igual a zero.

Essa forma de representar matematicamente o zero indica a ausência de elementos e isso pode gerar incompreensões com relação a esta noção. Portanto, faz-se necessário entender a forma como a criança, que está sendo formalmente instruída sobre a divisão, lida com o resto quando este está explícito na operação a ser realizada. Isto pode ajudar a compreender melhor o seu raciocínio quando realiza problemas de divisão, uma vez que o resto faz parte da quantidade inicial de elementos que está sendo distribuída. Este aspecto tem sido pouco explorado nas investigações envolvendo crianças com ou sem instrução sobre a divisão.

Lautert (2000) investigou *como* a criança representa graficamente a divisão e *o que* era representado (se os termos da divisão e/ou os procedimentos de resolução), tomando como ponto de partida uma operação ou problema de divisão. O estudo examinou quais elementos eram representados pelas crianças quando resolviam operações e problemas, não explorando a compreensão que tinham sobre a noção do resto. Porém, este é um fator importante a ser investigado, pois esta noção está imbricada no próprio conceito da divisão. O resto pertence à quantidade que foi inicialmente distribuída, não podendo ser desconsiderado quando se realiza essa operação.

Após apresentar as principais dificuldades das crianças que são apontadas na literatura sobre a divisão, uma questão emerge: quais as principais dificuldades que precisam ser superadas pelas crianças que estão iniciando o aprendizado formal da divisão e que podem interferir na compreensão deste conceito? Tomando como referência os estudos relatados, constata-se que as principais dificuldades residem em: (a) compreender que quando o dividendo é mantido constante quanto maior o número de partes menor o tamanho de cada parte (e vice-versa), ou seja, compreender a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes; (b) a dificuldade em lidar com o resto, ou seja, a criança precisa compreender que o resto nunca pode ser maior nem igual ao número de partes, pois do contrário, a quantidade remanescente terá que ser redistribuída e um novo resto será produzido.

Apesar das contribuições trazidas pelos vários estudos já realizados, verifica-se que poucos deles dizem respeito a intervenções com crianças[14]. Faz-se necessário, portanto, um estudo que, partindo das dificuldades das crianças documentadas na literatura, busque apresentar uma proposta de intervenção que contribua para a superação dessas dificuldades. Uma intervenção que, voltada para os invariantes operatórios da divisão, encoraje a criança a pensar, a analisar, a refletir sobre os termos da divisão (dividendo, divisor, quociente e resto) e suas relações; uma intervenção que forneça *feedback* com explicações sobre o que a criança realizou e sobre a forma como raciocinou, e que apresente contra-exemplos os quais gerem conflitos e levem a criança a superar tais dificuldades.

---

[14] Importante salientar que o estudo recente de Selva, Borba, Braga e Couto (2004) faz parte de um projeto de pesquisa mais amplo em andamento conduzido por Borba, Selva e Spinillo a respeito de **Como as crianças lidam com o resto em problemas de divisão?** financiado pelo PIBIC?CNPq?UFPE, 2004.

Em face disso, foi realizado um levantamento acerca das dificuldades das crianças com base nos resultados empíricos da área e elaborado um estudo de intervenção, buscando responder à seguinte questão: a explicitação dos princípios invariantes da divisão auxiliaria as crianças a superarem suas dificuldades, promovendo uma compreensão desse conceito? Antes, porém, de apresentar o estudo propriamente dito, discutem-se, a seguir, estudos de intervenção relativos à divisão, destacando-se suas características e os aspectos metodológicos (planejamento experimental) adotados.

PARTE III: Aspectos relevantes acerca de estudos de intervenção

A pesquisa em psicologia cognitiva, nos últimos vinte anos, tem avançado substancialmente no sentido de esclarecer as relações entre aprendizagem e desenvolvimento graças a uma ferramenta importante de ação: a intervenção. Conforme Spinillo (1994), estudos de intervenção têm ressaltado dois aspectos relevantes acerca do desenvolvimento e aquisição de habilidades cognitivas: (1) as crianças parecem ter uma lógica bem mais sofisticada que se imaginava, uma vez que os estudos de intervenção têm conseguido desenvolver, através de instruções específicas, conceitos que anteriormente eram considerados inacessíveis ao pensamento infantil; (2) as habilidades cognitivas variam em função de características das tarefas e das situações apresentadas aos participantes ou aprendizes, visto que os estudos que investigam o mesmo fenômeno cognitivo em diferentes situações apontam a existência de variações na *performance* de um mesmo indivíduo quando colocado em situações distintas. Esses dois aspectos, segundo a autora, sugerem que:

> [...] as aquisições cognitivas não podem ser consideradas fenômeno tudo-ou- nada, i. e., algo que o indivíduo possui ou não possui. Na realidade, habilidades cognitivas podem emergir em uma situação e não em outra. (SPINILLO, 1994, p. 43)

Se as habilidades cognitivas podem emergir em uma dada situação e não em outra, e se elas não são um fenômeno *tudo-ou-nada*, como os estudos de treinamento têm contribuído para esclarecer esta questão? Como se caracterizam os estudos de intervenção que têm propiciado aos indivíduos novas aquisições e auxiliado a superar as dificuldades experimentadas em relação a um dado conceito?

3.1. Como se caracterizam os estudos de intervenção

Segundo Spinillo (1999), os estudos de intervenção constituem um marco na trajetória da Psicologia, em especial na Psicologia Cognitiva. De modo geral, os estudos de intervenção estão subdivididos em dois contextos: os *estudos experimentais de intervenção,* abordando questões de natureza psicológica, que são os mais freqüentes; e os *estudos de intervenção em sala de aula* que se voltam para as práticas educacionais e para a aplicação de programas instrucionais. Segundo a autora, estes dois contextos diferem em relação a alguns aspectos: (1) quanto à relação adulto-criança, que se mostra mais controlada nas situações experimentais do que em situações de sala de aula, visto que estas apresentam interações pessoais múltiplas e mais complexas; (2) quanto à natureza da estrutura social que permeia cada um desses contextos, sendo o contexto de sala de aula envolvido por relações institucionais e de longa duração, o mesmo não ocorrendo em relação ao contexto experimental; (3) quanto à possibilidade de um tipo de assistência ser maior em um dado contexto do que em outro (*scaffolding* é mais apropriado em situações mais individualizadas e face-a-face do que em interações em sala de aula). Apesar dessas diferenças, existem aspectos comuns entre esses contextos: ambos investigam o nível de compreensão dos indivíduos ou a possibilidade de alterar o curso do desenvolvimento. Nos dois, os participantes são colocados como aprendizes e o adulto (em geral examinador/professor), como o instrutor.

Embora exista uma diversidade na maneira como os estudos de intervenção são realizados, a forma de assistência propiciada pelo adulto pode ser, de maneira geral, agrupada em duas grandes modalidades independente do contexto: *a autodescoberta e a instrução tutorada (instrução direta*[15]*).*

---

[15] Para maiores detalhes a respeito das formas de assistência do adulto em estudos de intervenção, consultar Garton (1992) e Brainerd (1987).

A *instrução tutorada* caracteriza-se por uma intervenção explícita de algo, em que o adulto tem um papel ativo no processo, chamando a atenção da criança para os aspectos relevantes que deseja ensinar, sem que isto restrinja o papel dos indivíduos-aprendizes neste processo. De acordo com Spinillo (1999), esse tipo de intervenção pode ocorrer de diferentes formas, podendo se apresentar de maneira isolada ou combinada: (a) os indivíduos podem ser colocados em uma situação onde observem o adulto resolvendo um problema, (b) são ensinadas regras e estratégias necessárias para compreensão de um dado conceito, (c) é dado um *feedback* positivo ou negativo (se está correto ou não) aos indivíduos sobre a forma como este resolveu a tarefa, (d) são dados modelos para orientar ou corrigir as ações executadas pelos os indivíduos, (e) são fornecidas explicações a respeito dos aspectos que regem cada questão apresentada a fim de que os indivíduos possam compreender os princípios e aspectos essenciais de um dado conceito.[16]

Por outro lado, a *autodescoberta* caracteriza-se por propiciar a ação e a manipulação ativa do indivíduo, evitando a imposição de estratégias por parte do adulto. Os indivíduos são encorajados a refletir, explorar, descobrir, antecipar os resultados de suas ações sobre um dado conceito sem que para isto o adulto forneça pistas de como ele deve resolver a tarefa proposta. Cabe ao adulto propor contra-argumentos que gerem conflitos e testem a segurança do raciocínio que está sendo adotado pelo aprendiz.

Colocando em perspectiva essas duas formas de assistência, verifica-se que elas “[...] não são puras, existindo, na realidade, uma multiplicidade de vias de acesso ao desenvolvimento e à aprendizagem que são acionadas durante a intervenção” (SPINILLO, 1999, p.68). Em outras palavras, existem aspectos na intervenção tutorada (direta) que se aproximam da autodescoberta, tais como: o fato de se considerar as hipóteses iniciais das crianças como ponto de partida para uma reflexão, o fato de se possibilitar descobertas por

---

[16] Intervenções deste tipo foram conduzidas tanto em sala de aula (SPINILLO, 2003) como em situações experimentais controladas (SPINILLO, 1995; SPINILLO, 2002).

parte dos indivíduos e o fato de também se apresentar contra-exemplos que permitam gerar conflitos cognitivos.

Embora exista uma aproximação entre essas formas de assistência, Brainerd (1987) chama a atenção para o fato de que os poucos estudos que comparam diretamente essas duas formas de intervenção (autodescoberta vs. instrução tutorada) ou não encontram diferenças entre elas ou quando identificadas, as diferenças apontam uma maior eficácia na forma de intervenção tutorada. Isto talvez ocorra porque a instrução tutorada (instrução direta) propicia uma maior reflexão sobre os princípios, as relações e as regras que regem um determinado conceito, reflexão esta que dificilmente seria realizada pelo indivíduo sem a intervenção direta do adulto. A intervenção tutorada, ainda, pode incluir aspectos relevantes da autodescoberta, quais sejam: as hipóteses como ponto de partida e os contra-argumentos que geram conflitos cognitivos os quais, de certa forma, auxiliam mais os indivíduos a compreenderem determinado conceito.

Seja por causa de um desses aspectos ou pela combinação de vários, o importante é que as situações de treinamento (intervenção) têm apontado o quanto os indivíduos são capazes de aprender e superar suas dificuldades desde que lhes sejam deliberadamente fornecidas instruções específicas. Isto pode ser evidenciado em diferentes estudos sobre conceitos matemáticos complexos, como por exemplo: proporção (SPINILLO, 1995; 2002; 2003), fração (BEZERRA; MAGINA; SPINILLO, 2002), álgebra (LESSA, 2005) e construção de gráficos (GUIMARÃES, 2002; SELVA, 2003).

3.1.1. O planejamento experimental em estudos de intervenção

Os estudos de intervenção, em geral, adotam um planejamento experimental que consiste basicamente em grupo experimental e grupo controle, os quais podem passar por duas ou três das seguintes etapas: pré-teste, intervenção e pós-teste. O pré-teste, aplicado a todos os participantes da pesquisa, tem por objetivo investigar as noções iniciais sobre o conhecimento que se deseja desenvolver; ou efetuar emparelhamento entre os participantes de modo que os grupos comparados se tornem homogêneos quanto a determinados aspectos considerados importantes para o que se deseja investigar. A intervenção (situação de treinamento ou processo interventivo) tem por objetivo fornecer instruções e explicações específicas sobre um conteúdo em particular ou fornecer contra-argumentos que objetivem gerar conflitos e testar a segurança do raciocínio utilizado pelo indivíduo, sendo fornecida apenas ao grupo experimental. O pós-teste, aplicado a todos participantes do estudo, o qual pode ou não ter as mesmas características do pré-teste, tem por objetivo avaliar se houve mudanças por parte dos participantes do grupo experimental que possam ser decorrentes da intervenção realizada. Ele avalia também se há diferenças entre este grupo e o grupo controle.

Spinillo (1994) chama a atenção para o fato de que nem todos os estudos de intervenção utilizam este delineamento experimental[17]. Alguns comparam apenas os resultados após a intervenção, sem que seja necessária a aplicação do pré-teste. Outros constróem planejamentos mais sofisticados, comparando diferentes tipos de intervenção: adotam mais de um grupo controle ou grupo experimental ou utilizam mais de um pós-teste para verificar a *"estabilidade e a transferência de aprendizagem"* (e.g.; CALSA, 2002; GUIMARÃES, 2002; SELVA, 2003).

Quanto à análise dos dados, em estudos de intervenção, verifica-se que as comparações ocorrem em duas direções: (1) uma análise horizontal que tem por objetivo comparar os grupos no pré-teste e no pós-teste; (2) uma análise vertical em que se compara um mesmo grupo no pré-teste e no pós-teste, com o objetivo de verificar se houve mudanças nas duas ocasiões de testagem e se as mudanças identificadas podem ser atribuídas à

[17] Maiores informações acerca de estudos experimentais podem ser obtidas em Campbell, D. T.; Stanley, J. C. **Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa**. São Paulo: EPU, 1979.

intervenção realizada. Esta análise vertical, segundo Spinillo (1994), também fornece informações acerca do conhecimento inicial que o indivíduo precisa apresentar para que a intervenção possa ser mais eficaz. Além disso, estudos de intervenção permitem esclarecer melhor a relação entre aprendizagem e desenvolvimento cognitivo, oferecendo também indicações sobre como se processam as mudanças no decorrer deste desenvolvimento.

3.1.2. A natureza das intervenções

Spinillo (1999) apontou elementos comuns entre os estudos que adotam metodologia de intervenção, tanto na aprendizagem de conceitos matemáticos (e.g.; BEZERRA; MAGINA; SPINILLO, 2002; SPINILLO, 1995, 1996, 2002, 2003; VASCONCELOS, 1998) como na aprendizagem de conceitos lingüísticos (e.g.; FERREIRA, 1999; LIMA; SPINILLO, 2003; MELO, 2002; MELO; REGO, 1998). Para a autora, um aspecto em comum que tem propiciado níveis mais sofisticados de desempenho nestes estudos, estaria relacionado à forma pela qual os conteúdos ou os conceitos são explorados neste tipo de metodologia. Os estudos envolvendo intervenção, de modo geral, têm privilegiado um conjunto de ações que são imprescindíveis para a compreensão de um determinado campo específico de saber, quais sejam:

∗ considerar como ponto de partida para uma discussão das hipóteses e noções iniciais das crianças;

∗ possibilitar que a criança reflita sobre a diferença entre as suas hipóteses e a dos outros;

∗ fornecer um *feedback* com explicações sobre o que a criança realizou e sob a forma que esta raciocinou;

∗ levar a criança a pensar, a analisar e a refletir sobre as diferentes formas possíveis de realizar uma determinada tarefa e sobre que princípios (matemáticos ou lingüísticos) são necessários para a compreensão do conceito que se deseja desenvolver;

∗ fornecer modelos, regras ou estratégias relevantes para compreensão da atividade a ser realizada;

∗ apresentar contra-exemplos que gerem conflitos entre a forma de pensar da criança e formas de pensar que se deseja que a criança desenvolva;

∗ guiar a atenção da criança para os aspectos relevantes relacionados à habilidade que se deseja desenvolver a partir do diálogo estabelecido entre criança e adulto, considerado fator importante desse processo.

Embora todos os aspectos citados possam ser considerados imprescindíveis para compreensão de um determinado conteúdo ou conceito, o uso de um ou mais aspectos combinados em uma investigação será acionado de forma justaposta ou entrelaçada, dependendo dos objetivos propostos na investigação a ser realizada.

3.2. Estudos de intervenção envolvendo o conceito de divisão

Estudos têm apontado as dificuldades que as crianças e adolescentes apresentam ao lidar com problemas e operações de divisão. Em um primeiro momento, é crucial realizar estudos que identifiquem as dificuldades enfrentadas pelos indivíduos com esse conceito; entretanto, em um segundo momento, o desafio maior está em propor formas de intervenção que visem superar as dificuldades encontradas. A partir da revisão da literatura, constatou-se que existem poucos estudos de intervenção voltados especificamente para a compreensão do conceito de divisão.

Dentre os estudos que investigam a divisão, um merece destaque por possibilitar a reflexão sobre os princípios epistemológicos da divisão baseados nas dificuldades das crianças. Este estudo foi realizado por D. Carraher (1992), com estudantes ingleses de 10 a 11 anos. O autor, em colaboração com T. Carraher e Schliemann, elaboraram um *software* educativo denominado *Dividir para conquistar*. Nesse *software*, existem letras que representam números de 0 até 9 e a tarefa dos estudantes consiste em descobrir os valores associados aleatoriamente às letras que correspondem aos objetos conceituais da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto. O jogo envolve os princípios básicos da divisão, isto é, o dividendo que envolve qualquer número o qual será dividido por outro (divisor), que resultará em um quociente, indicando o resultado da operação de divisão. No caso da divisão com resto, o quociente é chamado de quociente parcial, pois o dividendo não é totalmente dividido. Por exemplo, se o estudante escolhe como dividendo o número 15 e como divisor o número 7, o computador executará a divisão, mostrando na tela a letra ***T***, que corresponde ao quociente e a letra ***M*** que corresponde ao resto. O aluno, então, tenta raciocinar sobre os valores das letras e deve concluir que a letra ***T*** corresponde ao número ***2*** e a letra ***M*** corresponde ao número ***1***. Portanto, neste software, o estudante descobre certas propriedades, tais como: o resto tem que ser sempre menor que o divisor ou o valor do resto tem que ser acrescentado à multiplicação do divisor pelo quociente para que se possa achar o valor do dividendo.

O estudo mostrou que os estudantes são capazes de descobrir estas relações, no entanto, alguns tiveram dificuldades em lidar com o significado do resto. Observou-se, ainda, que alguns estudantes, espontaneamente, utilizaram a calculadora para conferir as operações por eles realizadas, além de confundirem a parte fracionária do quociente, na divisão normal, com o valor do resto da divisão por eles executada. Eles ficavam na dúvida sobre a diferença de resposta dada pelo *software* e a resposta dada pela calculadora. Portanto, o desafio para estes estudantes não foi fazer a divisão com resto, mas sim tentar derivar novas descobertas matemáticas a partir dos seus conhecimentos previamente aprendidos no contexto escolar.

Os estudantes, a partir desse *software*, passaram a levantar hipóteses acerca das propriedades matemáticas envolvidas no conceito de divisão. Essas hipóteses são derivadas de uma reflexão e de raciocínio lógico, em que o computador surge como mediador importante que "[...] consiste em propiciar um contexto simbólico em que os alunos podem raciocinar sobre as diversas idéias abstratas da matemática" (CARRAHER, 1992, p. 199).

Percebe-se que, neste estudo, a preocupação central dos autores foi criar um instrumento (*software* educativo) que favorecesse a compreensão dos pré-adolescentes sobre os princípios epistemológicos do desenvolvimento do conceito da divisão baseados nas dificuldades em lidar com os termos da divisão. Com este programa, foi possível manipular os valores do dividendo, divisor, quociente e resto, favorecendo a percepção dos participantes em relação às mudanças ocorridas nestes termos quando ocorria uma reorganização.

Embora o estudo D. Carraher (1992)[18] não tenha adotado um delineamento experimental clássico e nem tampouco tenha pretendido oferecer um treinamento para superação das dificuldades dos pré-adolescentes que se refere à divisão, o estudo fornece informações relevantes acerca de que intervenções poderiam ser proveitosas em uma investigação voltada especificamente para a superação das dificuldades com a divisão com resto, que é a temática central da presente investigação.

Recentemente, Calsa (2002) realizou uma *intervenção psicopedagógica construtivista* com alunos de 4ª série do ensino fundamental de três escolas públicas do Paraná, todas apresentando rendimento insatisfatório em matemática. O estudo examinou as relações entre a

---

[18] O delineamento experimental proposto por D. Carraher (1992) caracteriza-se por estudo de um único caso sem o grupo controle. Neste modelo de delineamento um único grupo é estudado apenas uma vez, seguido a um tratamento capaz de causar mudanças. Maiores informações sobre as vantagens e desvantagens deste tipo delineamento experimental podem ser obtidas em Campbell, D. T.; Stanley, J. C. **Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa**. São Paulo: EPU, 1979.

estruturas multiplicativas em provas piagetianas clássicas que envolviam relações matemáticas multiplicativas. A autora partiu da hipótese de que uma *intervenção psicopedagógica* c*onstrutivista* possibilitaria modificações nas estratégias de resolução de problemas multiplicativos diferentemente do uso rotineiro e sem significado dos algoritmos convencionais adotados na escola para exploração desse conceito.

Esse estudo teve como sujeitos 436 alunos submetidos a uma avaliação de desempenho em leitura e matemática. Cento e vinte alunos que obtiveram notas acima de 60% na prova de compreensão do texto e inferior a este percentual em matemática foram selecionados através de sorteio para participar da investigação. Do total dos 120 alunos que permaneceram na amostra de participantes, 60 foram sorteados para o Grupo Experimental e 60 para o Grupo Controle. Por conta das dificuldades em manter os horários para intervenção e da disponibilidade dos professores para a retirada dos alunos das salas, alguns alunos abandonaram a investigação, reduzindo a amostra para 45 alunos (GE) e 60 alunos (GC), perfazendo um total de 105 participantes. A média de idade dos alunos variava entre 10 anos e 4 meses (GC) e 10 anos e 6 meses (GE).

O grupo experimental (GE) foi dividido por sorteio em dois subgrupos: GE1 e GE2. Esta subdivisão foi realizada em função das características diferenciadas da *intervenção psicopedagógica construtivista* a ser realizada em cada um deles, considerando-se a ordem de apresentação (definida ou aleatória) da incógnita em problemas multiplicativos simples de multiplicação, divisão por partição e divisão por quotas.

O grupo controle e os dois grupos experimentais (GE1 e GE2) foram submetidos a um pré-teste e dois pós-testes (pós-teste 1- aplicado logo após a intervenção e pós-teste postergado - aplicado 15 dias após o pós-teste 1), sendo estes avaliados por meio de testes de problemas multiplicativos e três provas piagetianas clássicas (correspondência dupla e multiplicação, permutas e matrizes lógicas). Apenas os grupos experimentais foram submetidos às sessões de intervenção.

A *intervenção psicopedagógica construtivista* foi desenvolvida em três sessões semanais com duração de 60 minutos cada uma, perfazendo um total de nove sessões consecutivas. Esta foi desenvolvida em grupos de cinco alunos (GE1 e GE2), escolhidos por sorteio. A atividade desenvolvida na intervenção envolveu uma história em quadrinhos, que recebeu o nome de *"Contagem Decisiva"*. Nela os personagens resolviam situações-problema (tipo isomorfismo de medidas). As crianças deveriam resolver esses problemas vivenciando as ações e as decisões dos personagens. No enredo da história, um grupo de cinco amigos, vindos de outro planeta, enfrentava desafios matemáticos que precisavam ser resolvidos para salvar o seu planeta de uma invasão alienígena. Para a resolução dos problemas, as crianças tinham à disposição material de contagem (pinos de plástico), lápis preto, papel e giz colorido.

A ordem de apresentação da incógnita no enunciado e a continuidade na apresentação da história variavam em função do grupo experimental. Para o GE1, a apresentação da incógnita foi em uma ordem fixa (a/c. b/x), (a/c x/d) e (a/x. b/d), e para o GE2, as três posições da incógnita foram aleatórias, como se observam nos exemplos a seguir[19], na 1ª variação da posição da incógnita (CALSA, 2002, p.253):

> (P1) "Há! O Cameleano deve ter sabotado as armas! Ah! Ah!"
> (P2) "Eles estão a zero agora"
> (P3) "E quanto a nós?"
> (P2) "Nós temos ainda 5 armas com 6 raios cada!"
> (P1) "Quantos raios ao todo?"

Na 2ª variação da posição da incógnita, os mesmos personagens têm que resolver o seguinte problema (p.263):

> (P1) "Há! O Cameleano deve ter sabotado as armas! Ah! Ah!"
> (P2) "Eles estão a zero agora"

[19] Convenções adotadas: (P1) Personagem 1, (P2) Personagem 2, (P3) Personagem 3

> (P3) “E quanto à nós?”
> (P2) “Nós temos 30 raios e 5 armas! Quantos raios poderemos usar em cada arma?”
> (P1) “Faz a conta direitinho.”

Na 3ª variação da posição da incógnita, os mesmos personagens resolvem o seguinte problema (p.273):

> (P1) “Há! O Cameleano deve ter sabotado as armas! Ah! Ah!”
> (P2) “Eles estão a zero agora”
> (P3) “E quanto à nós?”
> (P2) “Nós temos ainda 5 armas com 6 raios cada!”
> (P1) “Quantas armas vamos precisar para usar todos os raios?”

Quanto à intervenção psicopedagógica, o primeiro dia foi marcado pelo estabelecimento de um contrato didático em que foram definidas as regras de funcionamento do grupo e as expectativas de comportamento de cada um, incluindo professor e alunos.

A intervenção realizada em todas as sessões obedeceu aos seguintes passos: (1) examinador apresentava a folha em quadrinhos (contendo a incógnita definida: GE1 ou incógnita aleatória: GE2) e pedia que os participantes lessem e comentassem com o grupo a sua interpretação para o problema, (2) estes, a partir da discussão realizada sobre o conteúdo do problema, elaboravam sua própria solução com auxílio dos materiais de contagem e, posteriormente, eram solicitados a relatar o que fizeram e o resultado que obtiveram; (3) ao final, eram solicitados a fazer um registro gráfico individual, valendo-se de desenho ou da escrita. Após cada três sessões, que ocorriam durante uma semana, o examinador solicitava dos participantes a escolha de um algoritmo matemático ensinado na escola que pudesse representar a solução do problema e que eles informassem o que o enunciado do problema estava propondo.

Durante a realização das tarefas, o examinador incentivava a participação dos membros do grupo, redirecionava o processo de resolução da tarefa, quando eles se afastavam do desafio proposto. Além disso, era estimulado o uso de outros materiais de contagem, incentivando os participantes a buscarem outras formas de solução e a apontarem possíveis contradições apresentadas em suas respostas.

Os resultados dessa investigação revelaram a eficácia do estudo de intervenção para o avanço na compreensão de problemas multiplicativos no ambiente escolar. O grupo experimental não apenas teve um aumento no número de acertos, como também apresentou modificações qualitativas importantes no processo de construção do esquema multiplicativo, incluindo formas de notação mais eficazes e novas estratégias de resolução. Além disso, os alunos do grupo experimental que iniciaram o experimento com notas mais baixas passaram a ter notas mais altas.

Calsa (2002) também verificou que houve um crescimento equivalente entre os dois grupos experimentais (GE1 e GE2), ambos parecem ter aprendido o mesmo tanto sobre o conteúdo, independente da ordem de apresentação da incógnita (aleatória ou definida) na aprendizagem de problemas multiplicativos. Estes resultados mostraram que, “[...] aliado ao processo de re-elaboração de estratégias intuitivas e convencionais, o exercício das habilidades técnicas aprendidas na intervenção transformou-as em recursos disponíveis para o uso estratégico de novas situações” (p. 134). Apesar do crescimento semelhante dos dois grupos experimentais quanto ao conteúdo, detectaram-se diferenças de comportamento que pareciam ser fruto do tipo de intervenção a que cada grupo foi exposto.

Verificou-se, ainda, um aumento significativo de soluções canônicas entre o pré-teste e o pós-teste 1 e sua manutenção no pós-teste aplicado após 15 dias (pós-teste postergado). Observou-se ainda que os problemas de partição apresentavam o menor número de respostas incorretas, tanto no grupo controle quanto no grupo experimental. Esse resultado corrobora com os resultados de estudos que apontaram os problemas de partição como os mais fáceis para as crianças por permitirem o uso de procedimentos de distribuição (CORREA; NUNES;

BRYANT, 1998; FISHBEIN; DERI; MARINO, 1985; KORNILAKI; NUNES, 1997; LAUTERT, 2000; VERGNAUD, 1983).

Quanto à resolução das provas piagetianas clássicas, os dois grupos foram bastante semelhantes. Este fato descarta a *intervenção psicopedagógica* como um fator de influência nas mudanças cognitivas ocorridas no grupo experimental. Segundo Calsa (2002), as variáveis (experiência física com o material e a situação experimental vivenciada pelos sujeitos) permitiram apenas mostrar o progresso dos alunos nas provas piagetianas clássicas. Vale ainda ressaltar que uma das grandes conquistas dos participantes dos grupos experimentais, segundo a autora, foi o refletir sobre os próprios erros, criando novas alternativas para a resolução dos problemas:

> O uso de diferentes estratégias de resolução e formas de notação para um mesmo problema parece ter facilitado a percepção das incoerências e das contradições das respostas dos sujeitos, abrindo caminho para a criação de outras alternativas de solução e tomada de consciência dos invariantes operatórios presentes nas situações-problema (CALSA, 2002, p.220).

Novamente, constata-se, a partir da afirmação acima, a importância de desenvolver um estudo de intervenção que leve a criança a refletir sobre os invariantes operatórios presentes no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Parece ser relevante realizar uma investigação que ofereça não apenas diferentes suportes representacionais (lápis e papel ou material concreto), mas, sobretudo, que ofereça a possibilidade de refletir sobre os invariantes matemáticos presentes em uma dada situação; intervenção esta voltada especificamente para a superação das dificuldades apresentadas pelas crianças quando resolvem problemas de divisão com e sem resto.

Calsa (2002) salienta que os alunos que obtiveram melhores resultados no grupo controle encontravam-se nas faixas médias e superiores no pré-teste. Isso levou a autora a comentar que os resultados não permitiam apontar quais os fatores que determinaram esse desempenho nem se um único fator foi determinante, pois a inserção dos alunos no ambiente escolar, as experiências informais com multiplicação, o contato do conteúdo da multiplicação oferecido nos testes (pré e pós-testes), as condições satisfatórias de leitura e a compreensão textual dos alunos propiciaram o desenvolvimento cognitivo:

> O nível de construção do conceito de multiplicação, em que os alunos se encontravam no primeiro teste, não exigiu uma intervenção desta natureza para dar continuidade ao processo. A construção cognitiva seguiu seu curso espontâneo mediante contatos com o conteúdo da multiplicação que os alunos tiveram e que teriam normalmente, mesmo não participando do experimento (p.133).

A partir desta afirmação, algumas questões aparecem: Quando a intervenção mostra-se eficaz? Por que ela é eficaz para crianças que não dominam determinados conceitos, sejam eles na área da linguagem sejam na área da matemática? Talvez as explicações para essas questões estejam atreladas à idéia de que a instrução escolar e o desenvolvimento cognitivo fundem-se não por serem sinônimas, mas por serem indissociáveis. O fluxo do desenvolvimento não pode ser explicado apenas em relação ao desenvolvimento da lógica infantil, mas como conseqüência de uma lógica associada à instrução escolar (LAUTERT, 2000). Isso vem ressaltar a importância de estudos de intervenção que se voltem para a superação das dificuldades apresentadas pelos participantes ao resolverem, por exemplo, problemas de divisão.

É importante salientar, no entanto, que a intervenção para ser eficaz, necessita além de situações que gerem conflitos cognitivos, oferecer também um *feedback* sobre a forma como a criança está raciocinando e fornecendo explicações a respeito dos aspectos que regem o conceito que está sendo explorado, a fim de que os indivíduos possam compreender seus princípios essenciais.

Embora o estudo de Calsa (2002) aponte um avanço significativo no que diz respeito à criação de uma intervenção que favoreça a vinculação necessária entre o conhecimento matemático (conceitos e representações) e as situações cotidianas que dão significados a este suposto saber sobre as estruturas multiplicativas; esta investigação, assim como outras (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; KORNILAKI; NUNES, 1997), não utilizam problemas de divisão com resto. Isto abre espaço para investigar uma área que tem sido pouco explorada, mas que é fundamental para compreensão de outros conceitos, como, por exemplo, frações e números decimais.

Verifica-se, na investigação proposta por Calsa (2002), que as crianças foram encorajadas a refletir, explorar e antecipar os resultados de suas ações sobre a atividade matemática que estava sendo focalizada, sem que o examinador (adulto) fornecesse pistas de como ela devia resolver a tarefa proposta. Isso evitou a imposição de estratégias, caracterizando-se a pesquisa, portanto, como estudo de intervenção por autodescoberta. Isso é ilustrado na passagem a seguir, em que um menino de 10 anos e 8 meses é solicitado a identificar a pergunta do problema de divisão por partição com a operação 56÷8:

> [...]‘56 dividido por 8’. O examinador solicitou a verificação dessa possibilidade com os objetos de contagem] ‘É uma possibilidade, mas que tal vocês resolverem o problema dos personagens com os materiais e depois a gente conversa sobre o resultado (p.176).

Nota-se, que o examinador incentivou as crianças do grupo a resolverem o problema com material de contagem para posteriormente discutir sobre o resultado e as estratégias adotadas na resolução. A antecipação da operação a ser realizada “56 dividido por 8” demonstra, segunda a autora, “[...] um exemplo de estratégia de fatos numéricos” acerca do problema apresentado. Entretanto não é garantia de que a criança irá resolver corretamente o problema, uma vez que o examinador revela que ela, durante 10 minutos, iniciou várias vezes a tarefa, parecendo sentir-se impossibilitada de resolvê-lo de uma forma diferente da operação aritmética escolhida anteriormente. Segundo a autora, a aparente dificuldade da criança em solucionar o problema, usando uma estratégia de resolução com os objetos de contagem, é uma conduta esperada, uma vez que estes suportes não “[...] influenciam diretamente a elaboração de algoritmos mentais ou convencionais, e vice-versa". (CALSA, 2002, p.176). Outros autores (BATISTA, 2002; BORBA; SELVA; SPINILLO; SOUSA, 2004; KOUBA, 1989; LAUTERT, 2000; SELVA, 1998; SELVA; BORBA; BRAGA; COUTO, 2004; SELVA; BORBA; STEEDMAN, 2004) também demonstraram os limites impostos pelo material concreto sobre o uso de estratégias mais eficazes para a resolução de problemas de divisão.

Quanto a essa questão, acredita-se que a intervenção não é o momento para se testar se a criança consegue ou não realizar uma dada tarefa usando determinado material de contagem, mas é um momento propício para que o examinador crie situações que gerem conflitos entre formas mais elementares de resolução e formas mais apropriadas e elaboradas. Isso, entretanto, não fica evidente nos extratos de protocolos apresentados por Calsa (2002). Em vista disso, pergunta-se: quais são os limites e possibilidades quando se realiza uma intervenção? Essa questão não pode ser respondida tomando como referência apenas um estudo, mas abre espaço para outros questionamentos referentes a "como" e "quando intervir" a fim de propiciar avanços cognitivos.

Colocando em perspectiva o estudo de D. Carraher (1992) e a intervenção de Calsa (2002), têm-se a certeza da necessidade de se refletir e interpretar as formas adotadas por crianças ou adolescentes na resolução de operações e problemas de divisão. Essa é uma tarefa complexa, porém essencial para a compreensão do raciocínio matemático e para propor alternativas para desenvolvê-lo a partir dos invariantes operatórios da divisão e das dificuldades que as crianças apresentam ao resolver problemas de divisão.

3.3. Pesquisas de intervenção como ferramenta para esclarecer as relações entre aprendizagem e desenvolvimento

Uma tentativa de esclarecer as possíveis relações entre aprendizagem e desenvolvimento ultrapassa o saber a respeito dos tipos de intervenção (tutorada ou autodescoberta), exigindo a compreensão sobre os processos cognitivos desencadeados pela intervenção proposta, ou seja, tentar descobrir o que a intervenção mobiliza no plano cognitivo. De acordo com Spinillo (1999), o mecanismo mobilizador acionado durante muitas das situações de intervenção refere-se à metacognição. Metacognição tem sido definida como a habilidade do indivíduo em tomar seu próprio pensamento como objeto de análise e reflexão, sendo um processo intelectual que envolve, dentre outros aspectos, a consciência sobre os atos e processos de conhecer e de raciocinar em uma dada situação (FLAVELL, 1999; SEMÉRIO; ANSELME; CHAHON, 1999). Esse mecanismo é responsável pela mudança qualitativa no pensamento dos indivíduos durante as situações de intervenção. Tal transformação ocorre porque eles são levados a pensar, a analisar e a refletir sobre suas formas de raciocinar e sobre os princípios e características que são essenciais na compreensão de um conceito ou habilidade que se deseja desenvolver.

Portanto, a metacognição tem um papel importante no processo de ensino-aprendizagem, por ser um mecanismo capaz de ativar processos de raciocínio, promover habilidades de gerenciamento cognitivo sobre os processos de resolução, auxiliar na identificação de inconsistências no raciocínio a fim de promover o redirecionamento do pensamento para formas mais apropriadas. Esse mecanismo parece ser ativado mais freqüentemente em situações tutoradas do que em situações de autodescoberta (SPINILLO, 1999, 2002).

Assim, pode-se afirmar que a metacognição é um mecanismo propiciador de desenvolvimento que, quando empregado a conhecimentos específicos (quer sejam matemáticos, lingüísticos ou pertencentes a outros domínios do conhecimento) pode gerar ganhos cognitivos importantes. A metacognição, por sua vez, depende, em muito, do papel do outro (professor ou pesquisador), visto que é desencadeada pela relação que se estabelece entre os participantes do processo.

Outro aspecto a ser considerado, quando se discutem os estudos de intervenção como ferramenta para esclarecer as relações entre aprendizagem e desenvolvimento, refere-se à especificidade dos elementos e princípios essenciais a conceitos e habilidades que se desejam desenvolver e que devem ser considerados pelos que idealizam uma situação de intervenção. Não basta saber apenas o conceito ou noção a desenvolver, deve-se conhecer a natureza do objeto de conhecimento, compreendendo os princípios e regras que os diferenciam ou aproximam de outros campos conceituais. Um outro fator a considerar, conforme afirmam Ausubel, Novak, Hanesian (1968) é o fato de que toda aprendizagem é influenciada, de alguma forma, pela estrutura cognitiva existente (conhecimentos prévios) e que esta estrutura cognitiva, a seu turno, pode ser modificada por intervenções que permitam estabelecer relações entre os novos materiais, idéias ou informações e aqueles já existentes na estrutura cognitiva. Essa idéia de estrutura prévia está em acordo com a noção de esquema e de estrutura pressuposta por Vergnaud (1990, 1997).

Na realidade, os estudos de intervenção mais recentes têm chamado a atenção para os limites e as possibilidades do pensamento infantil em relação a um domínio específico do conhecimento, para a natureza da assistência fornecida, para a natureza do objeto de conhecimento a ser desenvolvido e para as noções já construídas pelos aprendizes. Qualquer atividade a ser proposta deve considerar esses aspectos, pois do contrário, não conseguirá explicar as complexas relações entre aprendizagem e desenvolvimento.

CAPÍTULO 2

MÉTODO

4.1. Objetivos e natureza da intervenção proposta

Como discutido na fundamentação teórica, a compreensão da noção de divisão está ancorada na noção de partição, entretanto, esta noção inicial de distribuir em partes (partilhar) não garante a compreensão do conceito de divisão, pois esta, enquanto operação matemática, requer, do ponto de vista cognitivo: (a) a compreensão das relações de covariação entre os termos (relação inversa entre o divisor e o quociente, valor do quociente é sempre menor que o dividendo, resto sempre menor que o divisor); (b) a compreensão de que existe uma relação direta entre o valor do dividendo e do quociente; (c) a compreensão de que o valor do dividendo é resultante da multiplicação do quociente pelo divisor acrescentando-se o valor do resto; (d) a compreensão de que situações-problema de partição e divisão por quotas requerem tratamentos diferenciados. Esses aspectos referem-se aos princípios invariantes da divisão que é diferente do ato social de partilhar decorrente de um raciocínio aditivo, em que se acrescentam elementos a cada uma das partes até que não exista a possibilidade de fazer uma nova rodada de distribuição.

Considerando-se as dificuldades das crianças em resolver problemas de divisão e as noções de invariantes operatórios, elaborou-se um estudo que objetivou investigar o efeito de uma intervenção específica sobre a compreensão do conceito de divisão em crianças, focalizando duas dificuldades específicas freqüentemente experimentadas por crianças ao iniciarem a aprendizagem sobre essa operação no contexto escolar: (1) as relações inversas entre os termos da divisão (covariação entre o tamanho das partes e o número de partes quando o dividendo é mantido constante); (2) o significado do resto e sua relação com os demais termos da divisão (dividendo, divisor e quociente).

A intervenção proposta pode ser definida como sendo de natureza tutorada que se caracteriza pela instrução explícita de algo, em que o adulto (examinador) desempenha um papel ativo a fim de promover formas de raciocínio cada vez mais sofisticadas por parte do aprendiz. Isto não significa dizer que o aprendiz atue de forma passiva frente às ações e verbalizações do adulto, ao contrário, o aprendiz, é solicitado constantemente e desafiado a pensar sobre as intervenções do examinador, a natureza das atividades propostas e, sobretudo, sobre a sua forma de raciocinar em uma dada situação.

Ademais, a intervenção de natureza tutorada propicia formas efetivas de desenvolver e ampliar os limites do raciocínio dos sujeitos-aprendizes, evocando um processo cognitivo de maior importância para a aprendizagem: a metacognição. Este mecanismo tem sido considerado responsável pela mudança qualitativa na forma de raciocinar dos indivíduos porque impulsiona a reflexão e a tomada de consciência sobre as características e princípios que são essenciais para a compreensão de um dado conceito ou habilidade que se deseja desenvolver.

Sendo assim, considerando tais aspectos, a intervenção proposta ancorou-se nos seguintes pontos:

(1) dirigir a atenção da criança para os aspectos relevantes de uma dada situação, tornando-os explícitos;

(2) fornecer *feedback* acerca do acerto/erro da criança, corrigindo-a quando necessário. Tanto o *feedback* quanto as correções eram acompanhados de explicações e exemplos. Com isso procurava-se promover redefinições e re-organizações conceituais que permitissem a emergência de formas mais apropriadas de raciocínio. Os erros eram interpretados como indicadores do raciocinio das crianças;

(3) apresentar contra-exemplos e contra-argumentos, com o objetivo de gerar conflitos e desafios que levassem à reflexão e promovessem discussões acerca dos princípios invariantes da divisão que não podem ser violados;

(4) colocar o pensamento e as ações da criança em evidência, solicitando que a mesma explicitasse e refletisse sobre suas formas de raciocinar e proceder.

Além desses pontos norteadores, durante a intervenção, o examinador guiava-se por uma seqüência didática previamente elaborada que pode ser assim descrita:

(1) resolução de um problema pela criança;

(2) solicitação de explicações por parte da criança, procurando compreender, a partir de suas ações e justificativas, a perspectiva por ela adotada;

(3) apresentação de *feedback* por parte do examinador acerca da resolução dada pela criança, acompanhado de explicações das razões porque a resposta dada estava correta ou incorreta;

(4) apresentação da forma correta de proceder, por parte do examinador, seguida de explicações;

(5) explicitação de regras ou princípios gerais relativos aos invariantes da divisão que estavam sendo enfatizados na situação.

Do ponto de vista psicológico, no decorrer da intervenção, as crianças foram levadas a refletir sobre suas formas de raciocinar, sobre as ações realizadas e procedimentos adotados e acerca de suas explicações. As ações e intervenções do examinador tinham por objetivo propiciar a compreensão dos princípios invariantes da divisão que eram colocados em evidência através de situações-problema envolvendo a divisão por partição e divisão por quotas.

As atividades propostas durante a intervenção não enfatizavam o manejo do algoritmo canônico ou o uso de fatos multiplicativos, mas os princípios conceituais subjacentes à resolução de problemas matemáticos de divisão com resto e sem resto que podiam ser resolvidos através de estimativas e heurísticas diversas.

Assim sendo, as atividades propostas voltam-se para a explicitação dos princípios invariantes da divisão e não para o emprego do algoritmo canônico, uma vez que, do ponto de vista psicológico, “[...] a aquisição de um conceito não está dissociada das competências que permitem seu entendimento, nem das estratégias de resolução e das formas de representar os conceitos e as situações” (CORREA; SPINILLO, 2004, p.104). Esta forma de conceber as relações implícitas e/ou explícitas que estão atreladas às compreensões de um conceito matemático possibilitou a implementação de um conjunto de atividades de intervenção que explorassem e ampliassem o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em situações-problema envolvendo a noção de divisão, enquanto operação matemática.

4.2. Participantes

De 206 crianças, de ambos os sexos, com idades entre 8 anos e 4 meses e 15 anos e 10 meses (média de idade: 10 anos e 7 meses), inicialmente avaliadas em um pré-teste geral, foram selecionadas para participarem efetivamente deste estudo 100 crianças com idade inferior a 11 anos e 6 meses e que apresentaram um percentual de acertos inferior ou igual a 50%. Todas estas crianças eram alunas da 3ª série do ensino fundamental de duas escolas públicas da cidade do Recife (três turmas pertencentes à rede pública Estadual e quatro turmas pertencentes à rede pública Municipal) que tinham propostas de ensino semelhantes. A opção por investigar alunos de 3ª série do ensino fundamental deve-se ao fato de que é nesse período escolar que surge a maioria das dificuldades com a divisão.

As 100 crianças participantes foram alocadas em dois grupos: um Experimental (GE) e um de Controle (GC). Em cada grupo, as crianças foram emparelhadas quanto: (a) à idade, obtida através das fichas de matrícula; (b) ao histórico escolar: repetência; (c) ao desempenho apresentado no pré-teste geral.

O desempenho apresentado no pré-teste geral serviu para emparelhar as crianças dos dois grupos em função de quatro conjuntos de escores, a saber: (a) nenhum escore[20] nos problemas apresentados; (b) escores entre 1 e 4 pontos; (c) escores entre 5 e 8 pontos; (d) escores entre 9 e 12 pontos. O Quadro 1 fornece uma visão geral do número de participantes em cada grupo (GC e GE) em função dos escores obtidos.

Grupos	**Escores**			
	Zero	**1 a 4**	**5 a 8**	**9 a 12**
Controle (n= 50)	12	10	13	15
Experimental (n= 50)	12	10	12	16

Quadro 1. Número de participantes em cada subgrupo em função desempenho apresentado no pré-teste geral.

O Quadro 2 mostra as idades em meses (mínima, máxima e média) e o desvio padrão por grupo.

Grupos	**Idade em meses**			**Desvio padrão**
	mínima	**máxima**	**média**	
Controle	100	137	120.44	8.83
Experimental	102	136	119.32	8.33

Quadro 2. Média de idades (em meses) e desvio padrão por grupo (GC e GE).

[20] Escore refere-se à pontuação obtida na resolução dos problemas apresentados no pré e pós-teste gerais. A pontuação máxima no pré ou pós-teste gerais foi 24 pontos, sendo que a pontuação em cada problema variava de 0 a 2 pontos (ver Capítulo 3, Parte I - Sistema de Análise).

4.3. Planejamento Experimental

A presente investigação consistiu em: pré-teste (geral e específico), intervenção e pós-teste (geral e específico). O *pré-teste geral* foi aplicado coletivamente em duas sessões, tendo por objetivo selecionar os participantes da amostra, garantindo que apenas crianças com dificuldades com a divisão fossem efetivamente participantes deste estudo, e para possibilitar o emparelhamento dos grupos experimental e controle.

O *pré-teste específico* foi aplicado individualmente, uma semana após o pré-teste geral a ambos os grupos (GE e GC), tendo por objetivo avaliar a compreensão inicial da criança sobre a divisão, examinando as dificuldades específicas relativas a este conceito. Estas dificuldades são exploradas em diferentes tarefas que serão posteriormente descritas.

Após a aplicação do pré-teste específico, as crianças do grupo experimental participaram individualmente de um programa de *intervenção* sobre a noção de divisão enquanto operação matemática, realizado além de sua rotina escolar, durante o horário de aula. Esta intervenção foi realizada por um único examinador, em três sessões com um intervalo de dois a três dias entre elas. Às crianças do grupo controle não foi oferecido qualquer programa de intervenção, participando apenas das atividades didáticas sobre a divisão realizadas usualmente na sala de aula.

O *pós-teste específico* foi aplicado individualmente, três a quatro semanas após o pré-teste específico, tendo por objetivo comparar as crianças dos dois grupos entre si e as crianças de cada grupo em relação ao pré-teste específico quanto à compreensão dos princípios invariantes da divisão.

O *pós-teste geral* foi aplicado coletivamente em duas sessões, nove a dez semanas após o pré-teste geral, tendo por objetivo examinar a estabilidade dos conhecimentos possivelmente adquiridos pelo grupo experimental após a intervenção. O Quadro 3 apresenta uma visão geral do planejamento adotado.

Grupos	Pré-teste Geral (coletivo)	Pré-teste Específico (individual)	Intervenção	Pós-teste Específico (individual)	Pós-teste Geral (coletivo)
Controle	**1ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto **2ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto	**T1** – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão **T2** – Julgamento do significado do resto **T3** – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	-	**T1** – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão **T2** – Julgamento do significado do resto **T3** – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	**1ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto **2ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto
Experimental	**1ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto **2ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto	**T1** – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão **T2** – Julgamento do significado do resto **T3** – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	**1ª Sessão** Compreensão das relações inversas entre os termos **2ª Sessão** Compreensão do significado do resto **3ª Sessão** Compreensão de procedimentos corretos e incorretos de resolução	**T1** – Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão **T2** – Julgamento do significado do resto **T3** – Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	**1ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto **2ª Sessão** 6 problemas com resto e sem resto

Quadro 3. Visão geral do planejamento experimental adotado.

Como pode ser visto, as crianças do grupo controle participaram de seis sessões enquanto as crianças do grupo experimental participaram de nove sessões, das quais três eram relativas à intervenção.

Todas as crianças de ambos os grupos foram entrevistadas no pré-teste e pós-teste (geral e específico) durante o horário das aulas, sendo o pré e o pós-testes específicos aplicados individualmente em uma sala reservada por um mesmo examinador e o pré e pós-teste gerais aplicados coletivamente na sala de aula por um examinador e um auxiliar.

O *pré-teste e pós-teste específicos* consistiram na apresentação de três tarefas aplicadas em uma única sessão, cuja ordem de aplicação foi randomizada como mostra o Quadro 4.

Subgrupo	Ordem de aplicação das tarefas em cada subgrupo
A	Tarefa 1 - Tarefa 2 - Tarefa 3[21]
B	Tarefa 2 - Tarefa 3 - Tarefa 1
C	Tarefa 3 - Tarefa 1 - Tarefa 2
D	Tarefa 2 - Tarefa 1 - Tarefa 3
E	Tarefa 1 - Tarefa 3 - Tarefa 2
F	Tarefa 3 - Tarefa 2 - Tarefa 1

Quadro 4. Ordem de apresentação das tarefas no pré-teste e no pós-teste específicos.

As tarefas consistiam na apresentação de problemas de divisão por partição e divisão por quotas com resto e sem resto. Os pares numéricos nos problemas foram determinados a partir dos seguintes critérios: (a) manter o dividendo constante e inverter o valor do divisor e do quociente nos problemas que avaliam a compreensão das relações inversas entre o tamanho das partes e o número de partes (Problemas 3 e 9 do pré e pós-teste gerais e os problemas do pré e pós-teste específicos, Tarefa 1) e (b) obter resto de diferentes tamanhos, resto um ou diferente de um (dois ou três).

Os pares numéricos, em cada tarefa, foram os mesmos no pré-teste e pós-teste gerais e no pré-teste e pós-teste específicos, mudando-se apenas o nome dos personagens e os referentes do par numérico. Por exemplo, no pré-teste específico, na Tarefa 1 (Julgamento das relações inversas) apresenta-se o seguinte problema: "Rita e Maria foram a uma floricultura e cada uma comprou 21 margaridas. Rita quer colocar suas margaridas em 3 cestas e Maria quer colocá-las em 7 cestas. Quem vai ter cestas com mais margaridas, Maria ou Rita?" No Pós-teste Específico, este mesmo par numérico apareceu no seguinte problema: "Ivete e Diana

[21] Tarefa 1: Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão; Tarefa 2: Julgamento do significado do resto e Tarefa 3: Julgamento dos procedimentos incorretos de resolução.

foram a uma floricultura e cada uma comprou 21 rosas. Ivete quer colocar suas rosas em 3 vasos e Diana quer colocá-las em 7 vasos. Quem vai ter vasos com mais rosas, Ivete ou Diana?" Observe que os pares numéricos 21÷3 e 21÷7, no pré-teste (rosas e vasos) está associado a referentes diferentes daqueles no pós-teste (margaridas e cestas). Além disso, no pré-teste o nome dos personagens são Maria e Rita, enquanto, que no pós-teste os personagens são Ivete e Diana.

4.3.1. Pré-teste e Pós-teste Gerais

O pré-teste e pós-teste gerais envolveram cada um, doze problemas com e sem resto. Dez problemas se caracterizavam como problemas prototípicos escolares (cinco de divisão por partição e cinco de divisão por quotas) e dois problemas envolvendo as relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante (um de divisão por partição e um de divisão por quotas)[22].

Em cada sessão a criança foi solicitada a resolver individualmente seis problemas de divisão sendo estes apresentados em um livrinho. Cada livrinho continha uma folha de identificação e um problema por página com espaço para resolução e para a criança escrever a resposta (Anexos A e B).

A instrução dada pode ser assim resumida: *"Eu vou distribuir um livrinho contendo problemas que vocês irão resolver e um cartão vermelho que vocês irão colocar em cima do livrinho quando terminarem de resolver e escrever a resposta".* Em seguida, o examinador e o auxiliar entregavam o livro e o cartão vermelho para as crianças e somente depois que todas as crianças preenchessem a página de identificação o examinador começava a leitura dos

[22] Os problemas prototípicos foram construídos a partir de um levantamento realizado em livros didáticos de 2ª e 3ª séries (COLL; TEBEROSKY, 2000; LIBERMAN; WEY; SANCHEZ, 1997; MORI, 2002a e 2000b) e os problemas envolvendo relações inversas foram construídos a partir das reflexões advindas do estudo de Correa, Nunes e Bryant (1998).

problemas, um por vez, podendo os mesmos ser acompanhados pela criança. O cartão vermelho foi usado para que o examinador e o auxiliar pudessem visualizar quais as crianças que terminaram de resolver o problema e também para evitar que as mesmas copiassem a resolução do colega.

A ordem de apresentação dos problemas em cada sessão foi fixa para todos os participantes, decidida por um sorteio prévio, obedecendo à restrição de que os problemas envolvendo as relações inversas entre os termos[23] fossem inseridos como terceiro problema na seqüência apresentada em cada sessão. Isso foi feito porque tais problemas não eram tão familiares às crianças como o eram os problemas prototípicos escolares, acreditando-se que se tais problemas fossem inseridos primeiro poderiam desmotivar as crianças a prosseguir na realização do teste.

Material: Cartelas vermelhas (15cm x 15cm), lápis preto, borracha e livros contendo folha de identificação e um problema de divisão escrito em cada página, com espaço para resolução e a resposta.

4.3.2. Pré-teste e Pós-teste Específicos

O pré e pós-testes específicos consistiram na aplicação de três tarefas em uma única sessão, randomizadas como mostrado anteriormente no Quadro 4. A ordem de apresentação dos problemas nas três tarefas foi decidida por sorteio prévio. A seguir são descritas cada uma das tarefas apresentadas no pré e pós-testes específicos.

---

[23] Os problemas que envolviam as relações inversas entre os termos da divisão caracterizam-se por apresentar duas pessoas dividindo a mesma quantidade de objetos em um número “x” de partes (divisão por partição) ou dividindo a mesma quantidade em quotas preestabelecidas (divisão por quotas).

4.3.2.1. Tarefa 1 - Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão

A Tarefa 1 (T1) avaliou a compreensão da criança acerca das relações inversas entre quociente e divisor quando o dividendo é mantido constante, ou seja, avaliava se a criança compreende que um valor alto no divisor corresponde a um valor baixo no tamanho da parte (em problemas de divisão por partição) ou no número de partes formadas (em problemas de divisão por quotas) e vice versa, quando o dividendo é mantido constante.

Essa tarefa foi composta por seis problemas de divisão sem resto, sendo três problemas de divisão por partição e três de divisão por quotas. Os problemas envolviam dois personagens que estavam dividindo a mesma quantidade de objetos em um número "x" de partes ou, dividindo a mesma quantidade em quotas preestabelecidas (Anexos C e D). A instrução dada pode ser assim resumida: *"Eu vou ler um problema e gostaria que você respondesse a pergunta do problema. Você poderá usar lápis e papel ou, se desejar, poderá dizer que eu gravo".* Em seguida, o examinador apresentava o problema por escrito em uma cartela, ficando esta disponível durante toda a resolução. Tal medida visava controlar alguma dificuldade de leitura que a criança poderia apresentar e a minimizar o esforço da memória, uma vez que este poderia ser consultado quantas vezes fosse necessário pela criança. Após cada resposta, justificativas foram solicitadas, e nenhum *feedback* foi fornecido por parte do examinador.

Importante ressaltar que ora a resposta correta corresponde ao primeiro personagem ora ao segundo personagem, evitando-se assim, que a resposta correta incidisse sempre sobre o primeiro ou sobre o segundo personagem.

Material: Gravador, fita de áudio, cartelas retangulares de papelão (8 cm x 16 cm) contendo por escrito um problema de divisão por partição ou um problema de divisão por quotas, folhas de papel ofício, lápis e borracha.

4.3.2.2. Tarefa 2 - Julgamento do significado do resto

A Tarefa 2 (T2) avaliou a compreensão da criança sobre o significado do resto. Essa tarefa foi composta por seis problemas de divisão, sendo três problemas de divisão por partição e três de divisão por quotas, todos com resto (Anexos E e F). A instrução dada pode ser assim resumida: *"Eu dei um problema de divisão para uma criança e ela resolveu corretamente. Ela resolveu desse jeito. Eu vou ler o problema que ela resolveu e você irá responder algumas perguntas sobre esse problema".* O examinador, então, apresentava à criança uma cartela contendo por escrito o enunciado do problema com o procedimento de resolução, podendo a leitura ser realizada pela criança caso a mesma não apresentasse dificuldades. Logo após a leitura do enunciado foram feitas duas questões: uma referente ao enunciado do problema e outra referente ao significado do resto. Nenhum *feedback* foi fornecido por parte do examinador.

Material: Gravador, fita de áudio, cartelas retangulares de papelão (30 cm x 22 cm) contendo por escrito um problema de divisão por partição ou um problema de divisão por quotas com o respectivo procedimento de resolução.

4.3.2.3. Tarefa 3 - Julgamento de procedimentos incorretos de resolução

A Tarefa 3 (T3) avaliou a capacidade das crianças em identificar e analisar procedimentos incorretos de resolução que violam princípios invariantes da divisão[24]. Foram apresentados três tipos de erros apontados pela literatura, a saber: (a) violação do princípio da igualdade entre as partes; (b) resto maior do que o número de partes (em problemas de divisão por partição) ou do que o tamanho da parte (em problemas de divisão por quotas); (c) inserção do resto em uma das partes, violando assim, o princípio da igualdade entre as partes e o enunciado do problema. Ao todo, seis procedimentos incorretos foram apresentados, sendo três nos problemas de divisão por partição e três nos problemas de divisão por quotas. Os procedimentos incorretos eram apresentados de forma pictográfica nas cartelas (Anexos G e H).

O examinador inicialmente apresentava à criança uma cartela contendo, por escrito, o enunciado de um problema e dois cartões um com um procedimento correto de resolução e outro com um procedimento incorreto, dizendo: "*Eu dei esse problema para duas crianças resolverem. Elas resolveram, cada uma de um jeito. Esse cartão é como se fosse uma fotografia do jeito que a Maria resolveu o problema.* (o examinador mostrava a cartão contendo o procedimento de resolução da Maria). *E esse outro cartão foi o jeito de resolver do João.* (o examinador mostrava a cartão contendo o procedimento de resolução de João). *Lendo o problema e vendo o jeito de resolver das duas crianças,* (apontava para os cartões de Maria e de João) *você vai dizer quem fez errado, a Maria ou o João? Por quê?"* Os problemas eram lidos pelo examinador e pela criança quantas vezes fossem necessárias. Após a escolha das crianças, justificativas foram solicitadas, independente da escolha estar correta ou não. Nenhum *feedback* foi fornecido.

---

[24] Estes foram escolhidos com base na literatura (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; SILVER, SHAPIRO; DEUTSCH, 1993; LAUTERT, 2000) que aponta os erros possíveis de crianças e adolescentes cometerem.

Material: Gravador, fita de áudio, cartelas retangulares de papelão (8 cm x 16 cm) contendo por escrito um problema de divisão por partição ou um problema de divisão por quotas, cartelas retangulares de papelão (12 cm x 18 cm) contendo procedimentos de resolução corretos e incorretos.

O Quadro 5 fornece uma visão geral do número de problemas apresentados nas três tarefas (T1-T2-T3).

Tarefas	Tipos de problemas				Número total de problemas
	Divisão por partição		Divisão por quotas		
	Sem resto	Com resto	Sem resto	Com resto	
T1 - Julgamento das relações inversas entre os termos	3	0	3	0	6
T2 - Julgamento do significado do resto	0	3	0	3	6
T3 - Julgamento de procedimentos incorretos de resolução.	0	3	0	3	6

Quadro 5. Distribuição dos problemas em cada tarefa.

4.3.3. Intervenção

A intervenção oferecida apenas ao grupo experimental ocorreu em três sessões individuais, aplicadas em uma sala reservada, com duração media de 70 minutos cada. As sessões foram gravadas e transcritas, como ilustrado no protocolo apresentado no Anexo I.

A primeira sessão objetivou levar a criança a compreender as relações inversas entre o tamanho das partes e o número de partes quando o dividendo é mantido constante em problemas de divisão sem resto. A segunda sessão procurou levar a criança a refletir e compreender o significado do resto e a terceira sessão tinha por objetivo levar a criança a identificar e refletir sobre procedimentos corretos e incorretos de resolução adotados em problemas de divisão com resto e sem resto, contemplando, de forma conjunta, as dificuldades com as relações inversas e em lidar com o resto.

A ordem de apresentação das sessões foi fixa, iniciando-se por atividades mais familiares às crianças (problemas sem resto), seguido de atividades menos familiares (problemas com resto), para só então, apresentar situações provavelmente desconhecidas para as crianças, uma vez que envolviam pensar sobre procedimentos corretos e incorretos de resolução. Importante comentar que a terceira sessão englobava as duas dificuldades trabalhadas separadamente nas duas sessões anteriores. Esta sessão, portanto, era uma situação menos familiar e mais complexa.

4.3.3.1. Primeira Sessão: Compreensão das relações inversas entre os termos da divisão

Nesta sessão, duas atividades foram realizadas em que se procurou levar a criança a compreender que um valor alto no divisor corresponde a um baixo valor no tamanho das partes (em problemas de divisão por partição) ou no número de partes (em problemas de divisão por quotas) e vice-versa, quando o dividendo é mantido constante.

Em ambas as atividades, nesta primeira sessão, a criança não foi estimulada a operar com o algoritmo da divisão, e sim, levada a refletir sobre as transformações realizadas sobre os números, transformações essas essenciais para a compreensão do raciocínio multiplicativo. As atividades procuravam auxiliar a criança a direcionar seu pensamento de forma a antecipar o resultado da sua ação e ao mesmo tempo refletir sobre a plausibilidade do julgamento realizado.

A ordem de apresentação dos problemas foi fixa para todos os participantes da intervenção nas duas atividades. Primeiro foram apresentados problemas de divisão por partição e em seguida, problemas de divisão por quotas que são menos explorados no contexto escolar. As atividades realizadas são descritas a seguir.

Atividade 1: Mantendo o dividendo constante e aumentando/diminuindo o divisor

Na Atividade 1, o examinador apresentava, por escrito em uma cartela, um problema de divisão sem resto (um de divisão por partição e outro de divisão por quotas), solicitando que a criança o resolvesse, utilizando objetos disponibilizados (piões e caixas, copos e bandejas). O problema apresentado na cartela era denominado problema de base. A partir dele, o examinador realizava alterações no valor do divisor (aumento ou diminuição), mantendo o dividendo constante. A partir dessas transformações surgiam outros problemas derivados do problema de base, como ilustrado no Quadro 6.

Tipos de problemas	**Enunciados**
Partição	(P1) [25] Paulo comprou 24 piões e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de piões. Quantos piões ficarão em cada caixa? (Problema de Base) 24÷ 4 = 6 (0) <u>*Variação 1*</u>*: aumento do divisor, alterando o tamanho da parte.* (P1a) Paulo resolveu aumentar o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 4 caixas. Ele quer colocá-los agora em 6 caixas. Veja que aumentou o número de caixas. Antes eram 4 caixas e agora são 6 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê? 24÷ 6 = 4 (0) <u>Variação 2:</u> *diminuição do divisor, alterando o tamanho da parte.* (P1b) Paulo resolveu diminuir o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 6 caixas. Ele quer colocá-los agora em 2 caixas. Veja que diminuiu o número de caixas. Antes eram 6 caixas e agora são 2 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê? 24÷ 2 = 12 (0)

continua

[25] A letra P seguida de um número refere-se ao número dado ao problema de base. Quando seguido de uma letra (P1a ou P1b), refere-se ao número dado à variação realizada pelo examinador no problema de base.

Tipos de problemas	Enunciados
Quotas	(P2) Viviane preparou 18 copos de suco para o lanche e quer servir 6 copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? (Problema de Base) 18÷ 6 = 3 (0) *Variação 1: aumento do divisor, alterando o número de partes.* (P2a) Viviane resolveu aumentar a quantidade de copos nas bandejas. Ela não quer colocar mais 6 copos em cada bandeja. Ela quer colocar agora 9 copos em cada bandeja. Veja que aumentou o número de copos nas bandejas. Antes eram 6 copos em cada bandeja e agora são 9 copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou diminuir? Por quê? 18÷ 9 = 2 (0) Variação 2: *diminuição do divisor, alterando o número de partes.* (P2b) Viviane, agora, resolveu diminuir a quantidade de copos nas bandejas. Ela não quer colocar mais 9 copos em cada bandeja. Ela quer colocar agora 3 copos em cada bandeja. Veja que diminuiu o número de copos nas bandejas. Antes eram 9 copos em cada bandeja e agora são 3 copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou diminuir? Por quê? 18÷ 3 = 6 (0)

Quadro 6. Visão geral dos problemas apresentados na Atividade 1.

Após a resolução dos problemas (de base e os problemas dele derivados), procurava-se, através de entrevista clínica, obter explicações da criança acerca de como ela havia solucionado o problema. O examinador fornecia *feedback*, fornecia explicações sobre a resolução correta do problema e sobre os erros apresentados pela criança. A cada alteração realizada sobre o divisor (aumento ou diminuição), o examinador procurava levar a criança a refletir acerca do que acontece com o tamanho das partes (no problema de divisão por partição) ou com o número de partes (no problema de divisão por quotas) quando o dividendo é mantido constante. Após a resposta da criança acerca do fato de se haveria aumento ou diminuição das quantidades, o examinador solicitava que ela resolvesse a variação do problema usando os objetos disponíveis sobre a mesa e, após a resolução, solicitava que escrevesse a resposta do problema em uma folha de papel ofício.

Como comentado anteriormente, todas as respostas, explicações e ações da criança foram seguidas de correções e explicações por parte do examinador. Se, por exemplo, no problema de divisão por partição, a criança acertava, o examinador dizia: "*Isto mesmo! Se eu* *tenho a mesma quantidade de piões para distribuir e aumentar a quantidade de caixas, vai diminuir a quantidade de piões dentro das caixas", ou o contrário, se eu tenho a mesma quantidade de piões para distribuir e diminuir a quantidade de caixas, vai aumentar a quantidade de piões dentro das caixas."*

Ao final de cada atividade, envolvendo o problema de base e suas variações, o examinador fornecia um exemplo das relações inversas entre os termos da divisão próximo ao cotidiano das crianças: a divisão de bombons entre pessoas. O examinador apresentou uma situação hipotética em que ele e a criança tinham que dividir uma quantidade "x" de bombons. Por exemplo: *"Eu tenho 12 bombons* (examinador coloca sobre a mesa os bombons) *e nós vamos dividir eles para nós duas. Então vamos dividir, um para você, um para mim, um para você...* (o examinador divide o todo até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição). *"Você fica com seis e eu fico com seis. Mas aí chega uma amiga sua que também quer ganhar bombons. O que a gente faz?"* Em sua interação com a criança, o examinador ressaltava, tanto verbalmente como através de ações sobre os objetos, que com uma terceira pessoa, seria necessário uma redistribuição que acarretaria em uma diminuição no tamanho das partes. Ao final das intervenções e explicações, o examinador agrupava os bombons no centro da mesa e solicitava que a criança fizesse a redistribuição dos mesmos entre os três participantes (a criança, o examinador e o amigo imaginário) e explicitava: *"Se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e aumentar a quantidade de pessoas para ganhar os bombons ficará menos bombons para cada pessoa. Quando éramos só nós duas, você ficou com seis e eu com seis, agora, que somos nós três, cada uma ficou com quatro bombons. Então, ficaram menos bombons para cada uma. Ou pode acontecer o contrário: sua amiga diz que precisa ir embora e não quer levar os bombons. Então, nós iremos dividí-los novamente entre nós duas sempre cuidando para que cada uma fique com a mesma quantidade de bombons".* O examinador recolocava os bombons no centro da mesa e solicitava que a criança redistribuísse os mesmos entre eles. Em seguida, questionava-a sobre o que aconteceu: se, por exemplo, a criança acertava, ele dizia: *"Muito bem! Isto mesmo! Se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e tiver menos pessoas para ganhar os bombons, ficarão mais bombons para cada pessoa. Quando éramos nós três, cada uma ficou com quatro bombons, agora, que somos nós duas, cada uma ficou com seis bombons. Então, ficaram mais bombons para cada uma".*

Após as intervenções do examinador e as explicações oferecidas aquele explicitava o princípio geral focalizado na situação: *"quando o número de pessoas aumenta* (número de partes), *diminui a quantidade de bombons que cada um recebe* (tamanho da parte)*; e que quando diminui o número de pessoas* (número de partes), *aumenta a quantidade de bombons que cada uma recebe"* (tamanho da parte).

Atividade 2: Mantendo o dividendo constante e apresentando valores diferentes para o divisor

Diferentemente da atividade anterior, na Atividade 2, o examinador não apresentava um problema de base. A criança foi levada a desenvolver competências relativas à covariação inversa entre o divisor e o quociente quando o dividendo é mantido constante.

Os problemas caracterizavam-se por apresentar duas pessoas dividindo a mesma quantidade de objetos em um número "x" de partes (divisão por partição) ou dividindo a mesma quantidade em quotas preestabelecidas (divisão por quotas), como mostra o Quadro 7.

Tipos de problemas	Enunciados
Partição	(P3) Marcos e Isabel foram a uma papelaria e cada um comprou 30 lápis de cor. Marcos quer colocar seus lápis de cor em 5 estojos e Isabel quer colocá-los em 6 estojos. Quem vai ter estojos com mais lápis de cor, Isabel ou Marcos? Por quê? 30 ÷ 5 = 6 (0) 30 ÷ 6 = 5 (0) (P4) Eduardo e Ana foram a uma loja e cada um comprou 48 foguetes. Eduardo quer guardar seus foguetes em 6 caixas e Ana quer guardá-los em 8 caixas. Quem vai ter caixas com mais foguetes, Ana ou Eduardo? Por quê? 48 ÷ 6 = 8 (0) 48 ÷ 8 = 6 (0)
Quotas	(P5) Mário e Roberto foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 42 carrinhos. Mário quer guardar 6 carrinhos em cada caixa e Roberto quer guardar 7 carrinhos em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas, Mário ou Roberto? Por quê? 42 ÷ 6 = 7 (0) 42 ÷ 7 = 6 (0) (P6) Juliana e Clara foram à floricultura e cada uma comprou 36 rosas. Juliana quer colocar 9 rosas em cada vaso e Clara quer colocar 4 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos Clara ou Juliana? Por quê?" 36 ÷ 9 = 4 (0) 36 ÷ 4 = 9 (0)

Quadro 7. Visão geral dos problemas apresentados na Atividade 2.

A instrução dada pode ser assim resumida: *"Eu vou ler um problema e gostaria que você pensasse sobre ele e depois usasse esse material (objetos) para resolvê-lo"*. O examinador colocava sobre a mesa uma cartela com o enunciado do problema e duas cartelas com os nomes dos personagens que apareciam no enunciado, ficando o material e as cartelas disponíveis durante toda a entrevista. As cartelas com os nomes dos personagens contidos no enunciado dos problemas serviam de apoio à memória da criança e assim, evitava eventuais confusões quando da escolha do personagem.

Assim como na Atividade 1, o examinador na Atividade 2, guiava-se por uma seqüência didática previamente elaborada em que todas as respostas e ações da criança durante e após a resolução eram acompanhadas por intervenções por parte do examinador, no sentido de reafirmar a posição da criança quando correta e de corrigir, através de explicações, quando incorreta.

Após cada problema apresentado, o examinador explicitava para a criança o princípio geral de que existe uma relação inversa entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante, por exemplo: "*Se eu tenho a mesma quantidade de lápis de cor para distribuir e aumentar a quantidade de estojos vai diminuir a quantidade de lápis de cor dentro dos estojos, ou se eu tenho a mesma quantidade de lápis de cor para distribuir e diminuir a quantidade de estojos vai aumentar a quantidade de lápis de cor dentro dos estojos*".

Após as explicações e intervenções, a criança foi solicitada a escrever em uma folha de papel ofício a resposta do problema. Em seguida, semelhante ao que foi realizado no final da Atividade 1, o examinador apresentava o exemplo hipotético da divisão de bombons entre ele, a criança e a chegada de um amigo imaginário. Neste exemplo, procurava-se explicitar o princípio geral de que quando o número de pessoas aumenta, diminui a quantidade de bombons que cada uma recebe e que quando diminui o número de pessoas, aumenta a quantidade de bombons que cada uma recebe. Foram utilizados nesse exemplo hipotético dezoito bombons, sendo alguns oferecidos à criança ao final da sessão.

Material: Gravador, fita de áudio, cartelas retangulares de papelão (8 cm x 16 cm) contendo por escrito um problema de divisão por partição ou um problema de divisão por quotas, cartelas retangulares de papelão (4 cm x 6 cm) contendo o nome dos personagens presentes no enunciado, folhas de papel ofício, lápis preto, borracha, bombons, objetos e brinquedos em miniatura idênticos aos que aparecem no enunciado dos problemas (piões, caixas, copos, bandejas, lápis de cor, estojos, foguetes, carrinhos, rosas e vasos).

4.3.3.2. Segunda Sessão - Compreensão do significado do resto

Nesta segunda sessão, duas atividades foram realizadas as quais se procurou levar a criança a compreender significado do resto em problemas de divisão por partição e em problemas de divisão por quotas. Na Atividade 3, procurava-se levar a criança a compreender que ao alterar o valor do resto alteram-se os valores do dividendo, do quociente e do resto. A Atividade 4 objetivou levar a criança a refletir sobre o resto a partir das relações entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo não é alterado. As atividades realizadas são descritas a seguir.

Atividade 3: Mantendo o divisor constante e alterando o valor do resto

Seguindo o mesmo procedimento adotado na primeira sessão, os problemas foram apresentados por escrito em cartelas, acompanhados de material concreto como suporte para resolução. Nesta atividade também foram apresentados problemas de base, nos quais eram realizadas alterações no valor do resto, alterando, conseqüentemente, o valor do dividendo e/ou valor do quociente, surgindo, assim, outros problemas dele derivados (Quadro 8).

Tipos de problemas	Enunciados
Partição	(P7) Ana comprou 22 botões e quer colocá-los em 4 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de botões. Quantos botões ficarão em cada caixa? (Problema de Base) 22 ÷ 4 = 5 (2) Variação 1: *aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto um.* (P7a) (nome da criança) "E se a gente der mais três botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?" (examinador coloca mais três botões na mesa junto aos outros dois que estão fora das caixas) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 25 ÷ 4 = 6 (1) Variação 2: *aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto maior que um.* (P7b) (nome da criança) "E se a gente der mais cinco botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?" (examinador coloca mais cinco botões na mesa junto ao que está fora das caixas) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 30 ÷ 4 = 7 (2) Variação 3: *aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto igual a zero.* (P7c) (nome da criança) "E se a gente der dois botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?" (examinador coloca mais dois botões na mesa junto aos outros dois que estão fora das caixas) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 32 ÷ 4 = 8 (0)
Quotas	(P8) Ricardo comprou 17 apitos. Ele quer dar 5 apitos para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar apitos? (Problema de Base) 17 ÷ 5 = 3 (2) Variação 1: *aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto um* (P8a) (nome da criança) "E se a gente der mais quatro apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?" (examinador coloca mais quatro apitos na mesa junto aos outros dois que estão ao lado) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 21 ÷ 5 = 4 (1) Variação 2: *aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto maior que um* (P8b) (nome da criança) "E se a gente der mais seis apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?" (examinador coloca mais seis apitos na mesa junto ao que está ao lado) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 27 ÷ 5 = 5 (2) Variação 3: *aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto igual a zero* (P8c) (nome da criança) "E se a gente der mais três apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?" (examinador coloca mais três apitos na mesa junto aos outros dois que estão ao lado) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 30 ÷ 5 = 6 (0)

Quadro 8. Visão geral dos problemas apresentados na Atividade 3.

Como pode ser visto no Quadro 8, em ambos os problemas (partição e quotas) o aumento no valor do resto nos problemas de base levava a criança a realizar mais uma rodada de distribuição, obtendo, ao final: (a) resto igual a um; (b) resto maior que um; e (c) resto igual a zero, obtendo uma divisão exata.

Após a resolução dos problemas (de base e os problemas dele derivados), procurava-se, através de entrevista clínica, obter explicações da criança acerca de como ela havia solucionado o problema. O examinador fornecia *feedback* e explicações sobre a resolução correta do problema e sobre os erros apresentados pela criança. A cada alteração realizada sobre o resto (aumento), o examinador procurava levar a criança a refletir acerca do que acontece com os demais termos da divisão quando o resto se alterava.

A intervenção do examinador pode ser assim resumida: *"E se a gente der mais três botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?* (examinador colocava mais três botões na mesa junto aos outros dois que estão fora das caixas). Logo após perguntava: *"Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?* A criança foi levada a refletir que ao alterar o valor do resto alterava-se também: o valor do dividendo, o valor do quociente (tamanho das partes ou número de partes) e o valor do resto.

Em seguida, a exemplo do que ocorreu nas atividades anteriores, o examinador explicitava o princípio geral envolvido nesta atividade de que o resto nunca pode ser nem igual nem maior que o número de partes ou tamanho das partes. Em tais casos, os elementos do resto precisam ser redistribuídos igualmente entre as partes e um novo resto será produzido ou poderá ocorrer do problema tornar-se uma divisão exata (resto igual a zero).

Após resolver cada um dos problemas (de base e suas variações) o examinador solicitava que a criança escrevesse a resposta em uma folha de papel ofício. Essa resposta deveria conter o resultado final encontrado e a quantidade de elementos relativa ao resto.

Atividade 4: Mantendo o dividendo constante e alterando o valor do resto

Diferentemente da atividade anterior (Atividade 3), na Atividade 4, o examinador não apresentava um problema de base. A criança foi levada a desenvolver competências relativas à coordenação entre as variáveis que envolvem o resto, o tamanho das partes e o número de partes quando o dividendo não é alterado.

O examinador apresentava por escrito uma cartela contendo um problema de divisão com resto (divisão por partição e divisão por quotas) e mostrava com material concreto um procedimento incorreto de resolução adotado por outra criança para resolver o enunciado do problema apresentado na cartela. O Quadro 9 fornece uma visão geral dos problemas apresentados na Atividade 4, os erros envolvendo o resto salientados pelo examinador ao apresentar a resolução incorreta e o princípio geral explicitado em cada problema.

Tipos de problemas	**Enunciados**	**Erros salientados**	**Principio geral**
Partição	(P9) Carlos foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo? 28 ÷ 5 = 5 (3)	Não aceita a presença do resto e viola o princípio da igualdade entre as partes.	O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto.
	(P10) Maria tem 50 fivelas de cabelo e quer colocá-las em 8 saquinhos. Ela quer que cada saquinho tenha a mesma quantidade de fivelas. Quantas fivelas ela irá colocar em cada saquinho? 50 ÷ 8 = 6 (2)	O resto maior do que o número de partes, não faz outra rodada de distribuição.	O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto não pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.
	(P11) Luzia foi a uma loja de brinquedos e comprou 31 bonecas. Ela quer guardá-las em 6 saquinhos. Quantas bonecas ela irá guardar em cada saquinho? 31 ÷ 6 = 5 (1)	Não aceita a presença do resto, viola a igualdade das partes e o enunciado do problema; colocando a quantidade que sobra (resto) em outro saquinho.	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. Quando dividimos devemos cuidar para que cada uma das partes tenha a mesma quantidade e devemos prestar atenção no enunciado.
Quotas	(P12) Rodrigo comprou 29 skates. Ele quer dar 5 skates para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os skates? 29 ÷ 5 = 5 (4)	Não aceita a presença do resto, violando a igualdade das partes.	O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto.

‘

Tipos de problemas	Enunciados	Erros salientados	Principio geral
Quotas	(P13) Elena comprou 19 garrafas de refrigerante para a festa de aniversário de João. Ela quer servir 6 garrafas de refrigerante em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? 19 ÷ 6 = 3 (1)	O resto maior do que o tamanho da parte, não faz outra rodada de distribuição da quota preestabelecida.	O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto não pode ser nem igual e nem maior do que o tamanho da parte.
	(P14) Marta comprou 27 anéis. Ela quer guardar 6 anéis em cada porta-jóias. Quantos porta-jóias ela vai precisar? 27 ÷ 6 = 4 (1)	Não aceita a presença do resto, violando a igualdade entre as partes e a quota preestabelecida pelo enunciado do problema (coloca a quantidade que sobra em um porta-jóia).	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. Quando dividimos devemos cuidar para que cada uma das partes tenha a mesma quantidade e devemos prestar atenção no enunciado.

Quadro 9. Visão geral dos problemas, das formas incorretas de resolução e do princípio geral explicitado na Atividade 4.

A instrução dada pode ser assim resumida: *“Eu dei um problema de divisão para uma criança e ela resolveu desse jeito* (examinador resolve com os objetos concretos o problema apresentado). *Ela não fez uma distribuição correta. Eu quero que você descubra o erro que ela fez”.* As intervenções, explicações e correções do examinador seguem o mesmo padrão descrito nas atividades anteriores em que o examinador fornecia *feedback,* lançava desafios, solicitava explicações sobre as ações realizadas. Em seguida, o examinador explicitava o princípio geral envolvido na atividade realizada. Ao final das discussões e reflexões, a criança era solicitada a resolver corretamente com os objetos e escrever a resposta do problema em uma folha de papel ofício. Essa resposta deveria conter o resultado final encontrado e a quantidade de elementos relativa ao resto.

Material: Gravador, fita de áudio, cartelas retangulares de papelão (8 cm x 16 cm) contendo por escrito um problema de divisão por partição ou um problema de divisão por quotas, folhas de papel ofício, lápis preto, borracha, objetos e brinquedos em miniatura idênticos aos que aparecem no enunciado dos problemas (caixas, botões, bonecos, apitos, lápis de cor, estojos, garrafas de refrigerante, bandejas, *skates*, bonecas, saquinhos plásticos, fivelas de cabelo, anéis e porta-jóias).

4.3.3.3. Terceira Sessão - Compreensão dos procedimentos corretos e incorretos de resolução

Nesta sessão, duas atividades foram realizadas a fim de levar a criança a identificar e compreender os procedimentos corretos e incorretos de resolução adotados por crianças em problemas de divisão por partição e divisão por quotas (com resto e sem resto), levando-a a ser capaz de compreender a natureza do erro apresentado e a propor formas mais adequadas para a resolução.

Os procedimentos incorretos de resolução apresentados violam os princípios invariantes da divisão, a saber: (a) igualdade entre as partes; (b) o todo deve ser distribuído entre as partes até que não exista uma possibilidade de uma nova distribuição; (c) as relações inversas entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante; (d) resto deve ser sempre menor que o número de partes ou tamanho das partes; (e) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto. Tais procedimentos incorretos foram escolhidos porque representam aspectos fundamentais para compreensão do raciocínio multiplicativo, como, por exemplo, a noção de equivalência e a noção de covariação entre os termos da divisão.

Em ambas atividades, nessa sessão, os procedimentos corretos e incorretos eram apresentados de forma pictográfica nas cartelas. A criança foi estimulada a direcionar seu pensamento de forma a antecipar o resultado e ao mesmo tempo refletir sobre a plausibilidade do julgamento adotado.

Atividade 5: Identificando procedimentos de resolução mais adequados em problemas de divisão com resto

Na Atividade 5, o examinador apresentava uma cartela contendo, por escrito, o enunciado do problema de divisão com resto (partição ou quotas) e duas alternativas de resolução (uma correto e outra inadequada). A criança era solicitada a determinar, dentre as duas alternativas de resolução adotadas por duas crianças (Ana e Bruno), aquela que apresentava o processo mais adequado de resolução para o problema. O Quadro 10 fornece uma visão geral dos problemas apresentados na Atividade 5, o erro salientado nos procedimentos de resolução inadequados e o princípio geral explicitado em cada problema.

Tipos de problemas	Enunciados	Erros salientados	Princípio geral
Partição	(P15) Carlos comprou 34 foguetes e quer colocá-los em 6 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantos foguetes ele irá colocar em cada caixa? 34 ÷ 6 = 5 (4)	O procedimento de resolução apresentado na cartela "A[26]" viola o princípio da divisão igualdade entre as partes	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto
Quotas	(P16) Tia Elvira preparou 17 copos de suco para o lanche. Ela quer servir 3 copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? 17 ÷ 3 = 5 (2)	O procedimento de resolução apresentado na cartela "B" cria uma nova parte para inserir o resto.	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto.
Partição	(P17) Rita tem 47 bolas e quer colocá-las em 5 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantas bolas ela irá colocar em cada caixa? 47 ÷ 5 = 9 (2)	O procedimento de resolução na cartela "B" contraria o princípio de que o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.	O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.
Quotas	(P18) Uma fábrica produziu 23 barcos de brinquedo. O dono da fábrica quer colocar 5 barcos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar? 23 ÷ 5 = 4 (3)	O procedimento de resolução apresentado na cartela "A" viola o princípio da igualdade entre as partes e viola o enunciado do problema	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto

continua

[26] Convenções: cartela "A" contém o procedimento de resolução adotado por Ana e cartela "B" contém o procedimento de resolução adotado por Bruno.

Tipos de problemas	Enunciados	Erros salientados	Princípio geral
Quotas	(P19) Paulo vai colocar seus 43 lápis de cor em estojos. Em cada estojo serão colocados 8 lápis de cor. Quantos estojos ele irá precisará? 43 ÷ 8 = 5 (3)	O procedimento de resolução na cartela "A" contraria o princípio de que o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.	O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o tamanho da parte.
Partição	(P20) Eduardo comprou 30 carrinhos e quer guardá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele irá guardar em cada caixa? 30 ÷ 4 = 7 (2)	O procedimento de resolução apresentado na cartela "B" cria uma nova parte para inserir o resto.	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto.

Quadro 10. Visão geral dos problemas, dos tipos de erros salientados e do princípio geral explicitado na Atividade 5 .

A instrução dada pode ser assim resumida: *"Eu dei um problema para Ana e Bruno resolverem. Esse cartão é como se fosse uma fotografia do jeito que eles resolveram o problema. Eu vou mostrar o problema que eles resolveram e você irá dizer quem resolveu melhor, se foi a Ana ou se foi o Bruno"* (Anexo J). As intervenções do examinador seguem o mesmo padrão descrito anteriormente.

Após as intervenções do examinador e as explicações oferecidas pela criança aquele explicitada a razão de um procedimento estar mais adequado do que o outro e apresentava o princípio geral. Especial ênfase foi dada à necessidade de manter a igualdade entre as partes (tamanho das partes deve ser o mesmo); de redistribuir os elementos do resto de forma que este nunca resulte em uma quantidade maior e nem igual ao número de partes ou tamanho das partes e que o resto faz parte da quantidade que foi inicialmente dividida e, portanto, deve ser considerado na resposta. A criança foi solicitada a escrever a resposta do problema em uma folha de papel ofício. Essa resposta deveria conter o resultado final encontrado e a quantidade de elementos relativa ao resto.

Atividade 6: Refletindo sobre processos incorretos de resolução em problemas de divisão com resto e sem resto

Diferentemente da atividade anterior (Atividade 5), na Atividade 6, a criança não foi solicitada a comparar uma resolução correta com uma resolução menos adequada. Do ponto de vista psicológico, foi exigido da criança a identificação do tipo de erro evidenciado na resolução pictográfica e a resolução mais adequada do problema apresentado. O Quadro 11 fornece uma visão geral dos problemas apresentados na Atividade 6, o erro apresentado nos procedimentos de resolução inadequados e o princípio geral explicitado em cada problema.

Tipos de problemas	Enunciados	Erros salientados	Princípio geral
Partição	(P21) Carla foi à floricultura e comprou 23 rosas para dar às suas 4 professoras. Ela quer que cada professora receba a mesma quantidade de rosas. Quantas rosas cada professora vai receber? 23 ÷ 4 = 5 (3)	O procedimento de resolução viola o princípio da igualdade entre as partes.	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais.
Quotas	(P22) Marcos tem 28 helicópteros de brinquedo. Ele quer dar 5 helicópteros para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão receber helicópteros? 28 ÷ 5= 5 (3)	O procedimento de resolução ignora a quota preestabelecida no enunciado do problema	Ao resolver problemas de divisão devemos prestar atenção no enunciado.
Quotas	(P23) Mônica comprou 27 estrelinhas na loja de enfeites. Ela quer dar 8 estrelinhas para cada uma das suas amigas. Quantas amigas vão receber estrelinhas? 27 ÷ 8 = 3 (3)	O procedimento de resolução cria uma nova parte para inserir o resto e acrescenta elementos para manter a igualdade entre as partes.	Ao resolver problemas de divisão devemos prestar atenção no enunciado.
Partição	(P24) Débora comprou 29 bonecas para dar às suas 9 amigas. Ela quer que cada uma das amigas receba a mesma quantidade de bonecas. Quantas bonecas cada amiga vai receber? 29 ÷ 9 = 3 (2)	O procedimento de resolução viola o princípio de que o resto nunca pode ser igual ou maior que o número de partes.	O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem maior e nem igual ao número de partes.

continua

Tipos de problemas	Enunciados	Erros salientados	Princípio geral
Partição	(P25) Maria recebeu 32 livros para serem distribuídos entre 9 alunos. Quantos livros cada aluno irá receber? $32 \div 9 = 3$ (5)	O procedimento de resolução ignora o número de partes que o todo deve ser distribuído.	Ao resolver problemas de divisão devemos prestar atenção no enunciado.
Quotas	(P26) Raquel e Marta foram a uma loja e cada uma comprou 18 giz de cera. Raquel quer guardar 3 giz de cera em cada caixa e Marta quer guardar 6 giz de cera em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas, Raquel ou Marta? $18 \div 3 = 6$ (0) $18 \div 6 = 3$ (0)	O procedimento de resolução focaliza atenção no maior divisor, violando o princípio invariante das relações inversas entre o tamanho das partes e número de partes quando o dividendo é mantido constante.	Se eu tenho a mesma quantidade de objetos para dividir e colocar mais objetos nas caixas, eu vou ter menos caixas. Se eu colocar poucos objetos eu vou ter mais caixas.
Partição	(P27) Ana e Bruno foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 30 bolinhas. Ana quer colocar suas bolinhas em 5 caixas e Bruno quer colocá-las em 6 caixas. Quem vai ter caixas com mais bolinhas, Bruno ou Ana? $30 \div 5 = 6$ (0) $30 \div 6 = 5$ (0)	O procedimento de resolução focaliza a atenção no maior divisor, violando o princípio invariante das relações inversas entre tamanho das partes e o número de partes quando o dividendo é mantido constante.	Se eu tenho a mesma quantidade de objetos para dividir e colocar mais objetos nas caixas, eu vou ter menos caixas. Se eu colocar poucos objetos eu vou ter mais caixas.

Quadro 11. Visão geral dos problemas, dos tipos de erros salientados e do princípio geral explicitado na Atividade 6.

A instrução dada pode ser assim resumida: *"Eu pedi para Luana resolver um problema e ela resolveu desse jeito, ela errou o problema. Eu quero que você descubra qual foi o erro que ela fez"*. Em seguida, o examinador apresentava duas cartelas: uma com o enunciado do problema e outra contendo o procedimento de resolução inadequado que viola um dos princípios invariantes da divisão (Anexo L) e solicitava que a criança identificasse e corrigisse o erro evidenciado na cartela que apresentava a resolução. Explicações foram solicitadas seguindo os mesmos padrões das sessões anteriores em que após a resposta da criança o examinador fornecia *feedback,* lançava desafios, questionava-a sobre as ações realizadas e também fornecia verbalizações que deixavam claro para a mesma que sua resposta estava correta ou incorreta.

Semelhante ao ocorrido na Atividade 5, ao final foi explicitado o que havia de errado no procedimento de resolução apresentado e como fazer para corrigí-lo; enfatizando-se os princípios invariantes da divisão que estavam sendo violados e que a criança refletisse acerca da situações-problema (partição ou quotas). Assim, como na atividade anterior, especial ênfase foi dada à divisão eqüitativa das partes; relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes quando o dividendo é mantido constante; a necessidade de redistribuir os elementos do resto de forma que este nunca resulte em uma quantidade nem maior nem igual ao número de partes ou tamanho das partes; de que o resto faz parte da quantidade que foi inicialmente dividida, devendo ser considerado na resposta.

Material: Gravador, fita de áudio, cartelas retangulares de papelão (8 cm x 16 cm) contendo por escrito um problema de divisão por partição ou um problema de divisão por quotas e cartelas de papelão (10 cm x 16 cm) contendo procedimentos de resolução corretos e incorretos adotados em problemas de divisão, folhas de papel ofício, lápis preto, borracha.

Os Quadros 12, 13 e 14, a seguir, fornecem uma visão geral da intervenção realizada.

<table>
<tr><td colspan="3">1ª Sessão - Compreensão das relações inversas entre os termos da divisão
Conjunto de atividades e intervenções que teve por objetivo levar a criança a compreender as relações inversas entre tamanho das partes e número de partes quando o dividendo é mantido constante.</td></tr>
<tr><th>Atividades</th><th>Problemas</th><th>Materiais</th></tr>
<tr><td>Atividade 1
Mantendo o dividendo constante e aumentando/ diminuindo o divisor</td><td>(P1) Paulo comprou 24 piões e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de piões. Quantos piões ficarão em cada caixa? (Problema de Base)
$24 \div 4 = 6$ (0)

<u>Variação 1: aumento do divisor, alterando o tamanho da parte</u> (P1a) Paulo resolveu aumentar o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 4 caixas. Ele quer colocá-los agora em 6 caixas. Veja que aumentou o número de caixas. Antes eram 4 caixas e agora são 6 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê?
$24 \div 6 = 4$ (0)
<u>Variação 2: diminuição do divisor, alterando o tamanho da parte</u> (P1b) Paulo resolveu diminuir o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 6 caixas. Ele quer colocá-los agora em 2 caixas. Veja que diminuiu o número de caixas. Antes eram 6 caixas e agora são 2 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê? $24 \div 2 = 12$ (0)

(P2) Viviane preparou 18 copos de suco para o lanche e quer servir 6 copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? (Problema de Base) $18 \div 6 = 3$ (0)

<u>Variação 1: aumento do divisor, alterando o número de partes</u> (P2a) Viviane resolveu aumentar a quantidade de copos nas bandejas. Ela não quer colocar mais 6 copos em cada bandeja. Ela quer colocar agora 9 copos em cada bandeja. Veja que aumentou o número de copos nas bandejas. Antes eram 6 copos em cada bandeja e agora são 9 copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou diminuir? Por quê? $18 \div 9 = 2$ (0)
<u>Variação 2: diminuição do divisor, alterando o número de partes</u> (P2b) Viviane, agora, resolveu diminuir a quantidade de copos nas bandejas. Ela não quer colocar mais 9 copos em cada bandeja. Ela quer colocar agora 3 copos em cada bandeja. Veja que diminuiu o número de copos nas bandejas. Antes eram 9 copos em cada bandeja e agora são 3 copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou diminuir? Por quê?
$18 \div 3 = 6$ (0)</td><td>Cartelas (com enunciado), lápis e papel, piões, caixas, copos, bandejas</td></tr>
<tr><td>Atividade 2
Mantendo o dividendo constante e apresentando valores diferentes para o divisor</td><td>(P3) Marcos e Isabel foram a uma papelaria e cada um comprou 30 lápis de cor. Marcos quer colocar seus lápis de cor em 5 estojos e Isabel quer colocá-los em 6 estojos. Quem vai ter estojos com mais lápis de cor, Isabel ou Marcos? Por quê?
$30 \div 5 = 6$ (0) $30 \div 6 = 5$ (0)
(P4) Eduardo e Ana foram a uma loja e cada um comprou 48 foguetes. Eduardo quer guardar seus foguetes em 6 caixas e Ana quer guardá-los em 8 caixas. Quem vai ter caixas com mais foguetes, Ana ou Eduardo? Por quê?
$48 \div 6 = 8$ (0) $48 \div 8 = 6$ (0)
(P5) Mário e Roberto foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 42 carrinhos. Mário quer guardar 6 carrinhos em cada caixa e Roberto quer guardar 7 carrinhos em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas, Mário ou Roberto? Por quê?
$42 \div 6 = 7$ (0) $42 \div 7 = 6$ (0)
(P6) Juliana e Clara foram à floricultura e cada uma comprou 36 rosas. Juliana quer colocar 9 rosas em cada vaso e Clara quer colocar 4 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos Clara ou Juliana? Por quê?”
$36 \div 9 = 4$ (0) $36 \div 4 = 9$ (0)</td><td>Cartelas (com enunciado), lápis e papel, lápis de cor, estojos, foguetes, caixas, carrinhos, rosas e vasos</td></tr>
</table>

Quadro 12. Visão geral da 1ª Sessão de Intervenção.

2ª Sessão - Compreensão do significado do resto Conjunto de atividades e intervenções que teve por objetivo levar a criança a compreender significado do resto.		
Atividades	**Problemas**	**Materiais**
Atividade 3 Mantendo o divisor constante e alterando o valor do resto	**(P7)** Ana comprou 22 botões e quer colocá-los em 4 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de botões. Quantos botões ficarão em cada caixa? (Problema de Base) 22 ÷ 4 = 5 (2) Variação 1: aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto um **(P7a)** (nome da criança) “E se a gente der mais três botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?” (examinador coloca mais três botões na mesa junto aos outros dois que estão fora das caixas) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 25 ÷ 4 = 6 (1) Variação 2: aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto maior que um **(P7b)** (nome da criança) “E se a gente der mais cinco botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?” (examinador coloca mais cinco botões na mesa junto ao que está fora das caixas) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 30 ÷ 4 = 7 (2) Variação 3: aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto igual a zero **(P7c)** (nome da criança) “E se a gente der dois botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?” (examinador coloca mais dois botões na mesa junto aos outros dois que estão fora das caixas) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 32 ÷ 4 = 8 (0) **(P8)** Ricardo comprou 17 apitos. Ele quer dar 5 apitos para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar apitos? (Problema de Base) 17 ÷ 5 = 3 (2) Variação 1: aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto um **(P8a)** (nome da criança) “E se a gente der mais quatro apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?” (examinador coloca mais quatro apitos na mesa junto aos outros dois que estão ao lado) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 21 ÷ 5 = 4 (1) Variação 2: aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto maior que um **(P8b)** (nome da criança) “E se a gente der mais seis apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?” (examinador coloca mais seis apitos na mesa junto ao que está ao lado) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução? 27 ÷ 5 = 5 (2) Variação 3: aumenta o resto e, após nova rodada, obtém resto igual a zero **(P8c)** (nome da criança) “E se a gente der mais três apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?” (examinador coloca mais três apitos na mesa junto aos outros dois que estão ao lado) Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?*30 ÷ 5 = 6 (0)*	Cartelas (com enunciado), lápis e papel, botões, caixas, apitos, bonecos
Atividade 4 Mantendo o dividendo constante e alterando o valor do resto	**(P9)** Carlos foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo? 28 ÷ 5 = 5 (3) **(P10)** Maria tem 50 fivelas de cabelo e quer colocá-las em 8 saquinhos. Ela quer que cada saquinho tenha a mesma quantidade de fivelas. Quantas fivelas ela irá colocar em cada saquinho? 50 ÷ 8 = 6 (2) **(P11)** Luzia foi a uma loja de brinquedos e comprou 31 bonecas. Ela quer guardá-las em 6 saquinhos. Quantas bonecas ela irá guardar em cada saquinho? 31 ÷ 6 = 5 (1) **(P12)** Rodrigo comprou 29 skates. Ele quer dar 5 skates para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os skates? 29 ÷ 5 = 5 (4) **(P13)** Elena comprou 19 garrafas de refrigerante para a festa de aniversário de João. Ela quer servir 6 garrafas de refrigerante em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? 19 ÷ 6 = 3 (1) **(P14)** Marta comprou 27 anéis. Ela quer guardar 6 anéis em cada porta-jóia. Quantos porta-jóias ela vai precisar? 27 ÷ 6 = 4 (1)	Cartelas (com enunciado), lápis e papel, lápis de cor, estojos, fivelas, saquinhos plásticos, bonecas, skates, bonecos, estojos, garrafas de refrigerantes, bandejas, anéis e portas jóias

Quadro 13. Visão geral da 2ª Sessão de Intervenção.

3ª Sessão: Compreensão dos procedimentos corretos e incorretos de resolução Conjunto de atividades e intervenções que teve por objetivo levar a criança a identificar e compreender os procedimentos corretos e incorretos de resolução, enfatizando-se uma reflexão acerca dos princípios invariantes da divisão.		
Atividades	**Problemas**	**Materiais**
Atividade 5 Identificando procedimentos de resolução mais adequados em problemas de divisão com resto	**(P15)** Carlos comprou 34 foguetes e quer colocá-los em 6 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantos foguetes ele irá colocar em cada caixa? 34 ÷ 6 = 5 (4) **(P16)** Tia Elvira preparou 17 copos de suco para o lanche. Ela quer servir 3 copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? 17 ÷ 3 = 5 (2) **(P17)** Rita tem 47 bolas e quer colocá-las em 5 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantas bolas ela irá colocar em cada caixa? 47 ÷ 5 = 9 (2) **(P18)** Uma fábrica produziu 23 barcos de brinquedo. O dono da fábrica quer colocar 5 barcos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar? 23 ÷ 5 = 4 (3) **(P19)** Paulo vai colocar seus 43 lápis de cor em estojos. Em cada estojo serão colocados 8 lápis de cor. Quantos estojos ele irá precisará? 43 ÷ 8 = 5 (3) **(P20)** Eduardo comprou 30 carrinhos e quer guardá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele irá guardar em cada caixa? 30 ÷ 4 = 7 (2)	Cartelas com enunciado do problema e processos de resolução corretos/ incorretos e lápis e papel
Atividade 6 Refletindo sobre procedimentos incorretos de resolução em problemas de divisão com resto e sem resto	**(P21)** Carla foi à floricultura e comprou 23 rosas para dar às suas 4 professoras. Ela quer que cada professora receba a mesma quantidade de rosas. Quantas rosas cada professora vai receber? 23 ÷ 4 = 5 (3) **(P22)** Marcos tem 28 helicópteros de brinquedo. Ele quer dar 5 helicópteros para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão receber helicópteros? 28 ÷ 5= 5 (3) **(P23)** Mônica comprou 27 estrelinhas na loja de enfeites. Ela quer dar 8 estrelinhas para cada uma das suas amigas. Quantas amigas vão receber estrelinhas? 27 ÷ 8 = 3 (3) **(P24)** Débora comprou 29 bonecas para dar às suas 9 amigas. Ela quer que cada uma das amigas receba a mesma quantidade de bonecas. Quantas bonecas cada amiga vai receber? 29 ÷ 9 = 3 (2) **(P25)** Maria recebeu 32 livros para serem distribuídos entre 9 alunos. Quantos livros cada aluno irá receber? 32 ÷ 9 = 3 (5) **(P26)** Raquel e Marta foram a uma loja e cada uma comprou 18 giz de cera. Raquel quer guardar 3 giz de cera em cada caixa e Marta quer guardar 6 giz de cera em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas, Raquel ou Marta? 18 ÷ 3 = 6 (0) 18 ÷ 6 = 3 (0) **(P27)** Ana e Bruno foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 30 bolinhas. Ana quer colocar suas bolinhas em 5 caixas e Bruno quer colocá-las em 6 caixas. Quem vai ter caixas com mais bolinhas, Bruno ou Ana? 30 ÷ 5 = 6 (0) 30 ÷ 6 = 5 (0)	Cartelas com enunciado do problema e processos de resolução incorretos e lápis e papel

Quadro 14. Visão geral da 3ª Sessão de Intervenção.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DOS RESULTADOS

PARTE I: Pré-teste e Pós-teste Gerais

Esta parte consiste na apresentação dos resultados e da análise estatística referente ao pré e pós-testes gerais. O pré-teste geral teve por objetivo selecionar as crianças com dificuldades que comporiam a amostra e possibilitar o emparelhamento das crianças no grupo controle e no grupo experimental. O pós-teste geral, aplicado nove a dez semanas após o pré-teste geral, teve por objetivo examinar a estabilidade dos conhecimentos possivelmente adquiridos pelo grupo experimental após a intervenção.

5. Sistema de Análise

Dois sistemas distintos, porém análogos, foram utilizados para analisar o desempenho das crianças em problemas prototípicos (problemas tradicionais escolares) e em problemas envolvendo relações inversas.[27]

Os dois tipos de problemas (prototípicos e relações inversas) foram analisados com base na pontuação para a resolução de problemas matemáticos proposta por Brito, Lima, Alves e Rezi (1998), sendo feita as devidas adaptações. A pontuação proposta pelas autoras no estudo variava de zero a nove pontos dependendo da pergunta feita (e.g.; O que é dividido? Qual a relação entre fração e divisão?) ou do problema proposto. No caso específico da resolução de problemas, a pontuação variava de zero a três (zero: errado; um: operação correta e resposta errada, e dois: operação e resposta corretas).

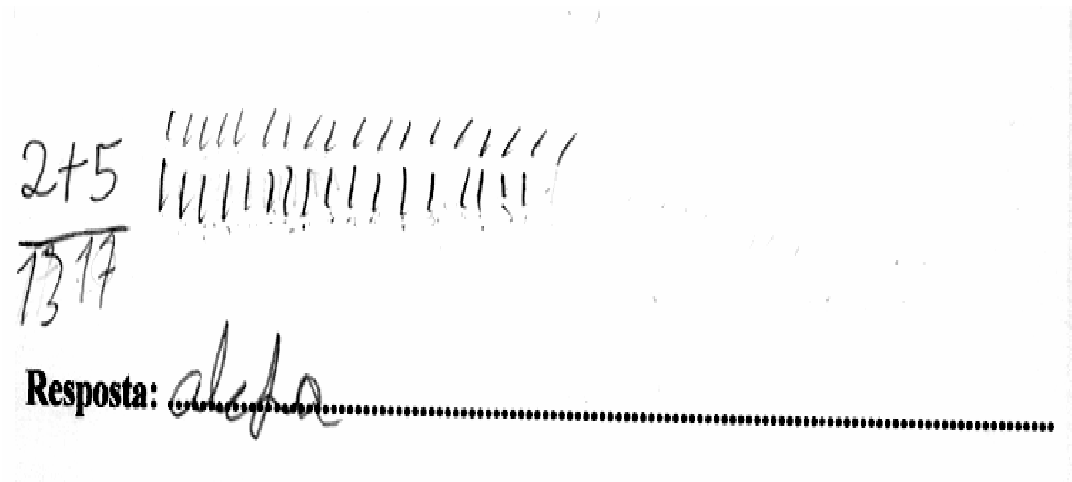
[27] Este último tipo de problema não é comum ao contexto escolar, mas tem sido utilizado em situações de pesquisa para investigar e avaliar a compreensão das crianças sobre as relações inversas, entre o divisor e o quociente quando o dividendo é mantido constante (CORREA, 1996; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; LAUTERT; SPINILLO, 2004a, 2004b).

5.1. Problemas Prototípicos

O desempenho nos problemas prototípicos foi analisado considerando-se a interpretação correta do enunciado verbal, a estratégia de resolução e a resposta oferecida. A análise contemplou os diferentes sistemas de representação adotados pelas crianças como estratégia de resolução (simbólico, pictográfico, icônico ou da combinação de ambos os sistemas). A seguir são descritas e exemplificadas as pontuações adotadas em função dos aspectos investigados: interpretação do enunciado, estratégia de resolução e resposta à pergunta do enunciado.

Pontuação – zero: a criança não resolve o problema ou interpreta de forma incorreta o enunciado verbal, podendo apresentar ou não encaminhamentos de resolução através de outras operações que não a divisão, adotando na maioria das vezes, adições e multiplicações. Exemplos:

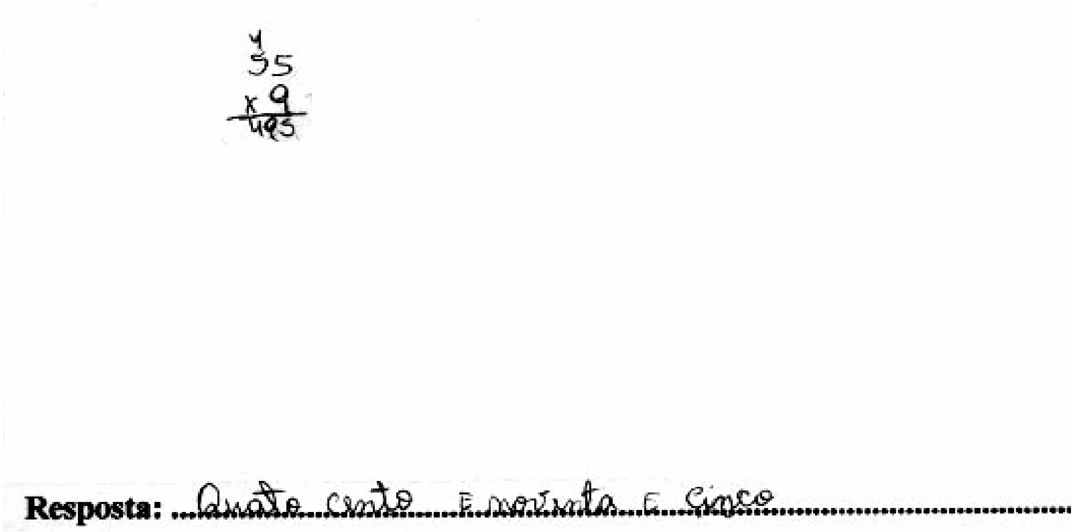
> ***Exemplo 1:*** Problema de divisão por partição (Vovó foi à livraria e comprou 25 cadernos para dar aos seus 7 netos. Ela quer que cada neto receba a mesma quantidade de cadernos. Quantos cadernos cada neto vai receber?)



(Reprodução do protocolo 13, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 4 meses, GC)

A criança interpreta de forma incorreta o enunciado do problema, não havendo uma conexão visível entre sua representação e o enunciado. A criança parece que inicia o encaminhamento através da adição, usando os números do dividendo. Entretanto, sua representação final não permite compreender sobre como essa resolução foi realizada.

Exemplo 2: Problema de divisão por quotas (Uma loja de brinquedos recebeu 55 pulseiras que serão vendidas em pacotes com 9 pulseiras em cada um. Quantos pacotes serão montados?)

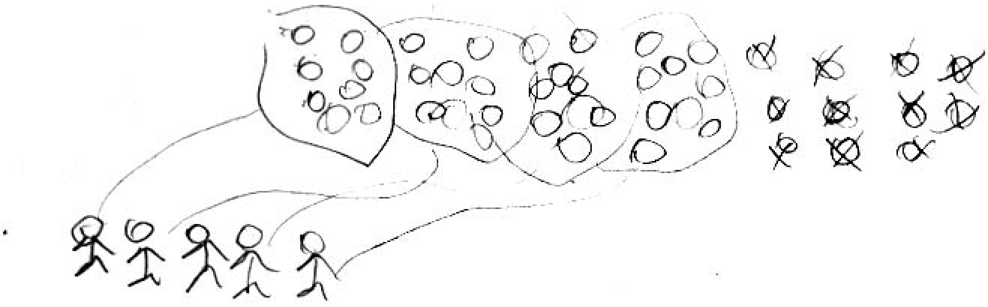


(Reprodução do protocolo 30, pré-teste, sexo feminino, 9 anos e 10 meses, GC)

A criança interpreta de forma inadequada, encaminhando o processo de resolução através da operação de multiplicação, como confirmado pelo resultado obtido.

Pontuação – um: a criança interpreta corretamente o enunciado verbal, considerando a divisão e erra a estratégia de resolução porque: (a) inverte os valores do divisor e do quociente presentes no enunciado; (b) produz um valor absurdo, produto da divisão dos valores presentes no enunciado; (c) arma a operação de divisão, mas não finaliza a resolução. Também recebem essa pontuação as estratégias corretas de resolução que, entretanto, apresentam respostas incorretas que denotam confusão entre o tamanho das partes e o número de partes ou porque não são acompanhadas de nenhuma resposta. Exemplos:

Exemplo 3: Problema de divisão por quotas (Marcelo comprou 35 livrinhos infantis. Ele quer dar 5 livrinhos para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os livrinhos?)

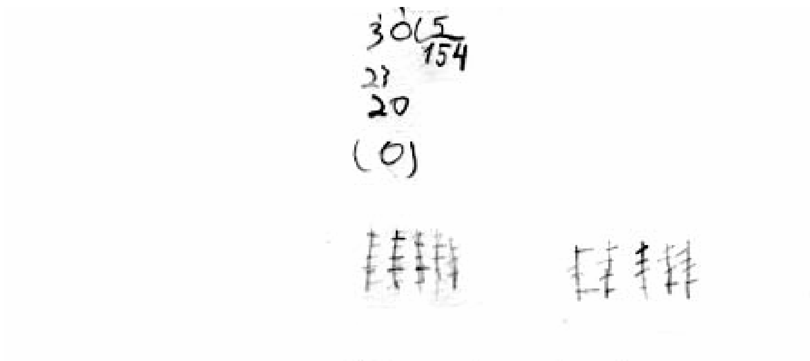


Resposta: cada um vai ganhar 8

(Reprodução do protocolo 28, pós-teste, sexo feminino, 10 anos e 5 meses, GC)

A criança interpreta corretamente o enunciado verbal considerando a divisão, entretanto, erra porque inverte os valores do divisor e do quociente, ou seja, ao invés de dar cinco livrinhos a cada amigo a criança divide a quantidade inicial entre cinco amigos. Verifica-se, portanto, que a criança trata este problema de divisão por quotas como sendo de divisão por partição e ao tentar resolvê-lo não distribui em quantidades iguais.

Exemplo 4: Problema de divisão por partição (Lúcia foi a uma loja e comprou 30 camisetas para dar aos seus 5 sobrinhos. Ela quer que cada sobrinho receba a mesma quantidade de camisetas. Quantas camisetas cada sobrinho vai receber?)

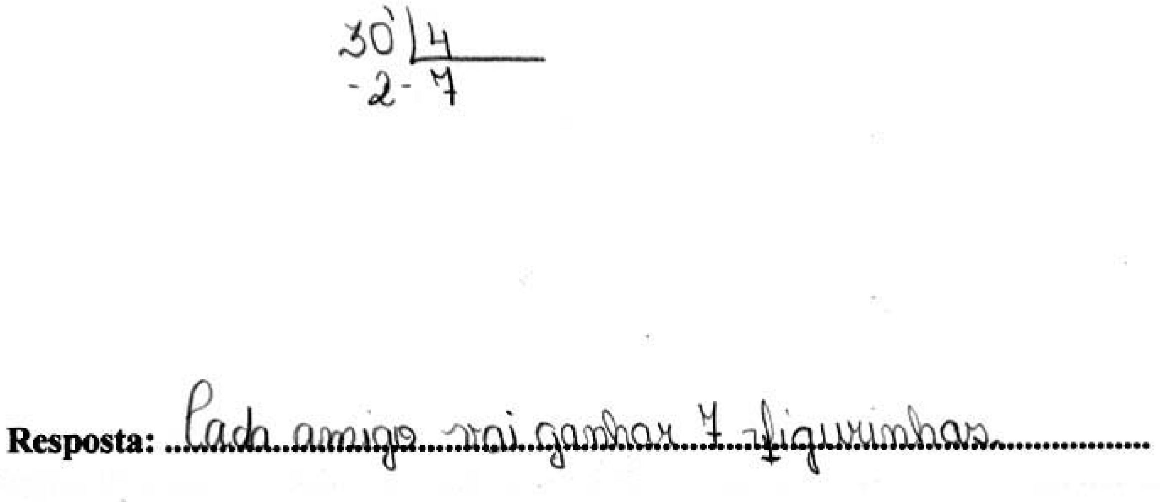


Resposta: 154 camiseta cada sobrinho

(Reprodução do protocolo 32, pré-teste, criança do sexo masculino, 10 anos e 3 meses, GC)

A criança interpreta corretamente o enunciado verbal considerando a divisão, entretanto, erra porque produz um valor absurdo, produto da divisão dos valores presentes no enunciado. A resposta apresentada confirma o resultado obtido, na qual o valor do quociente é maior do que o valor do dividendo apresentado no enunciado.

Exemplo 5: *P*roblema de divisão por quotas (Paulo comprou 30 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 4 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?)



30 | 4
-2- 7

Resposta: Cada amigo vai ganhar 7 figurinhas

(Reprodução do protocolo 120, pré-teste, criança do sexo feminino, 10 anos)

A criança interpreta corretamente o enunciado verbal considerando a divisão, apresenta estratégia de resolução correta, entretanto, apresenta resposta que denota confusão entre tamanho da parte e o número de partes.

Pontuação – dois: a criança interpreta corretamente o enunciado verbal, apresenta estratégia de resolução correta e explicita adequadamente a resposta. Também recebe essa pontuação a representação que apresenta somente a resposta correta possivelmente derivada de um cálculo mental e que explicita o referente para quantidade. Esta resposta pode ser acompanhada ou não do valor do resto. Exemplos:

Exemplo 6: Problema de divisão por partição (Ricardo comprou 57 bolinhas de gude para dar aos seus 8 amigos. Ele quer que cada amigo receba a mesma quantidade de bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude cada amigo vai receber?)

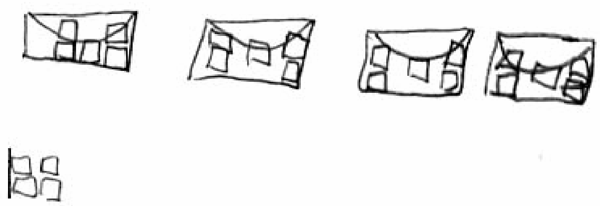
57 |8
56 7
(1)

Resposta: cada amigo irá ficar com 7 bolinhas de gude.

(Reprodução do protocolo 121, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 1 mês)

A criança interpreta corretamente o enunciado verbal, apresenta estratégia de resolução através do algoritmo escolar da divisão e explicita adequadamente a resposta para o enunciado do problema.

Exemplo 7: Problema de divisão por quotas (Laura comprou 24 selos. Ela quer guardar 5 selos em cada envelope. Quantos envelopes ela vai precisar?)



Resposta: envelopes

(Reprodução do protocolo 62, pós-teste, sexo masculino, 10 anos e 3 meses, GE)

A criança interpreta corretamente o enunciado verbal, adota a estratégia de resolução pictográfica e explicita a resposta para o enunciado do problema.

Exemplo 8: Problema de divisão por quotas (Lúcia comprou 27 margaridas. Ela quer colocar 3 margaridas em cada cesta. Quantas cestas ela vai precisar?)

Resposta: Lúcia vai precisar de 9 cestas.

(Reprodução do protocolo 101, pós-teste, sexo feminino, 8 anos e 9 meses)

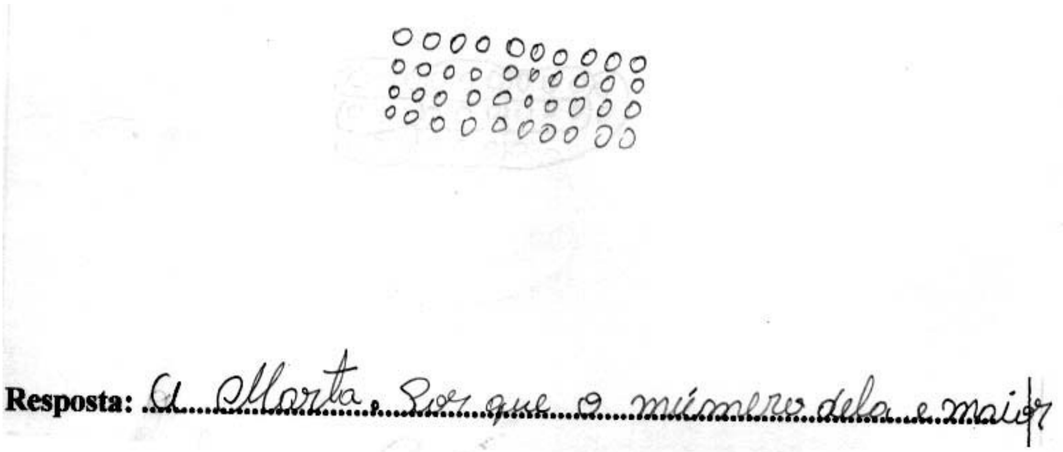
A criança apresenta resposta correta possivelmente derivada de um cálculo mental e apresenta o referente para a quantidade, ou seja, responde corretamente a pergunta do enunciado do problema.

5.2. Problemas de Relações Inversas

O desempenho nos problemas envolvendo relações inversas foi analisado considerando-se conjuntamente a resposta à pergunta apresentada no enunciado do problema e a justificativa fornecida pelas crianças. Ressalta-se que, diferentemente do sistema de análise anterior (problemas prototípicos), que envolvia a consideração das estratégias de resolução, o sistema utilizado para análise das relações inversas tinha por base comparar os valores dos divisores (uma vez que o dividendo foi mantido constante). A estratégia, quando apresentada, contribuía para compreender a justificativa oferecida pela criança. A seguir são descritas e exemplificadas as pontuações adotadas em função dos aspectos investigados: resposta à pergunta do enunciado e justificativa.

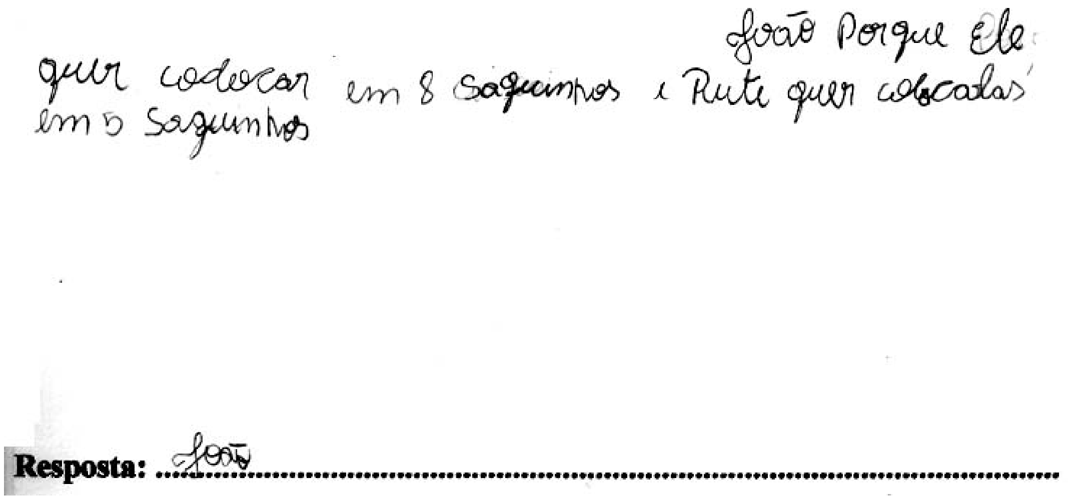
Pontuação-zero: a criança fornece a resposta incorreta à pergunta do enunciado do problema, com justificativa incorreta. Exemplos:

Exemplo 9: Problema de divisão por partição (Marta e Pedro foram a uma papelaria e cada um comprou 40 papéis de carta. Marta quer colocar seus papéis de carta em 8 envelopes e Pedro quer colocar seus papéis de carta em 5 envelopes. Quem vai ter envelopes com mais papéis de carta, Marta ou Pedro? Por quê?)



(Reprodução do protocolo 100, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 5 meses, GE)

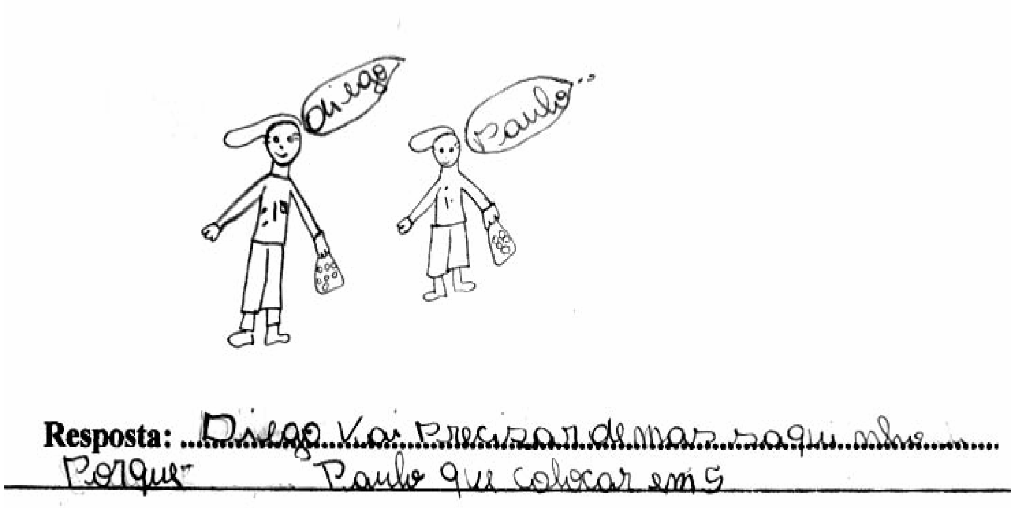
Exemplo 10: Problema de divisão por partição (Rute e João foram a uma banca de revista e cada um comprou 40 figurinhas. João quer colocar suas figurinhas em 8 saquinhos e Rute quer colocar suas figurinhas em 5 saquinhos. Quem vai ter saquinhos com mais figurinhas, Rute ou João? Por quê?)



(Reprodução do protocolo 47, pós-teste, sexo masculino, 8 anos e 4 meses, GC)

Em ambos os exemplos, as crianças apresentam respostas e justificativas incorretas, não conseguindo fazer o julgamento das relações inversas quando o dividendo é mantido constante. A atenção volta-se para um dos termos, nestes casos, o maior divisor.

*Exemplo 11: P*roblema de divisão por quotas (Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo? Por quê?)

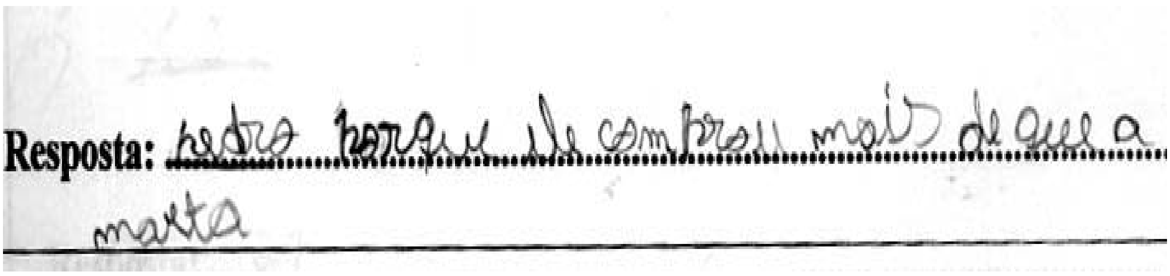


(Reprodução do protocolo 30, pós-teste, sexo feminino, 9 anos e 10 meses, GC)

A criança apresenta resposta e justificativa incorretas. Observe que ao invés de escrever Diogo a criança escreve Diego e representa a quantidade de bolinhas que cada um dos personagens irá colocar no saquinho. A atenção volta-se para um dos termos, neste caso, o maior divisor.

Pontuação – um: a criança fornece a resposta correta à pergunta do enunciado do problema podendo ou não fornecer uma justificativa. As justificativas, quando fornecidas, são incorretas e imprecisas. Exemplos:

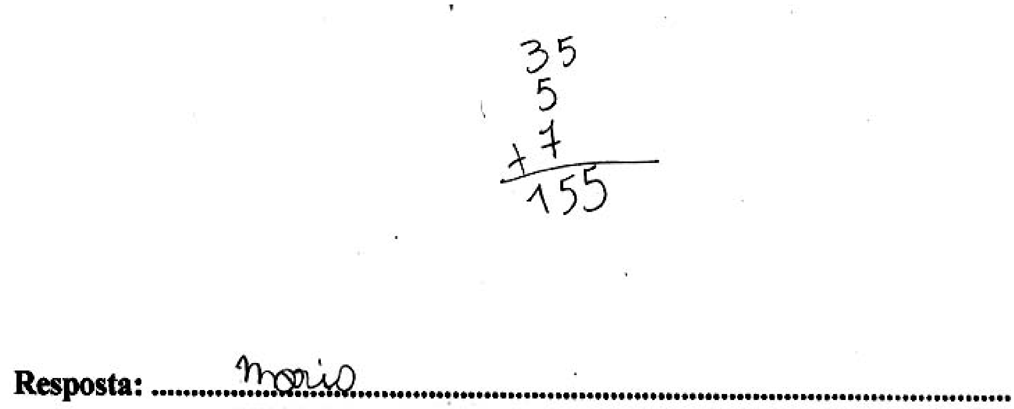
Exemplo 12: Problema de divisão por partição (Marta e Pedro foram a uma papelaria e cada um comprou 40 papéis de carta. Marta quer colocar seus papéis de carta em 8 envelopes e Pedro quer colocar seus papéis de carta em 5 envelopes. Quem vai ter envelopes com mais papéis de carta, Marta ou Pedro? Por quê?)



(Reprodução do protocolo 37, pré-teste, sexo masculino, 9 anos e 9 meses, GC)

A criança apresenta a resposta correta, ou seja, o personagem que terá envelopes com mais cartas é Pedro. Entretanto, a justificativa mostra-se incorreta, pois não fornece uma explicação adequada sobre as relações inversas entre o divisor e o quociente quando o dividendo é mantido constante. A atenção volta-se para um dos termos, neste caso, o valor do dividendo.

Exemplo 13: Problema de divisão por quotas (Mário e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 foguetes. Mário quer guardar 5 foguetes em cada saquinho e Paulo quer guardar 7 foguetes em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Mário ou Paulo? Por quê?)


35
5
+7
155

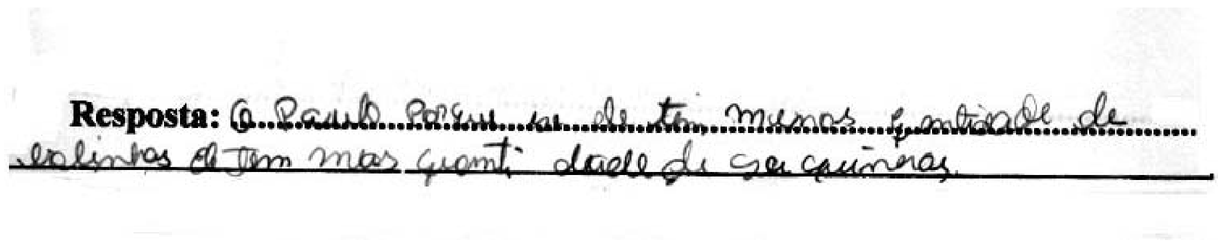
Resposta: mario

(Reprodução do protocolo 141, pré-teste, sexo masculino, 11 anos e 2 meses)

A criança apresenta resposta correta, entretanto, não explicita a justificativa para escolha do personagem e apresenta um procedimento de resolução incorreto.

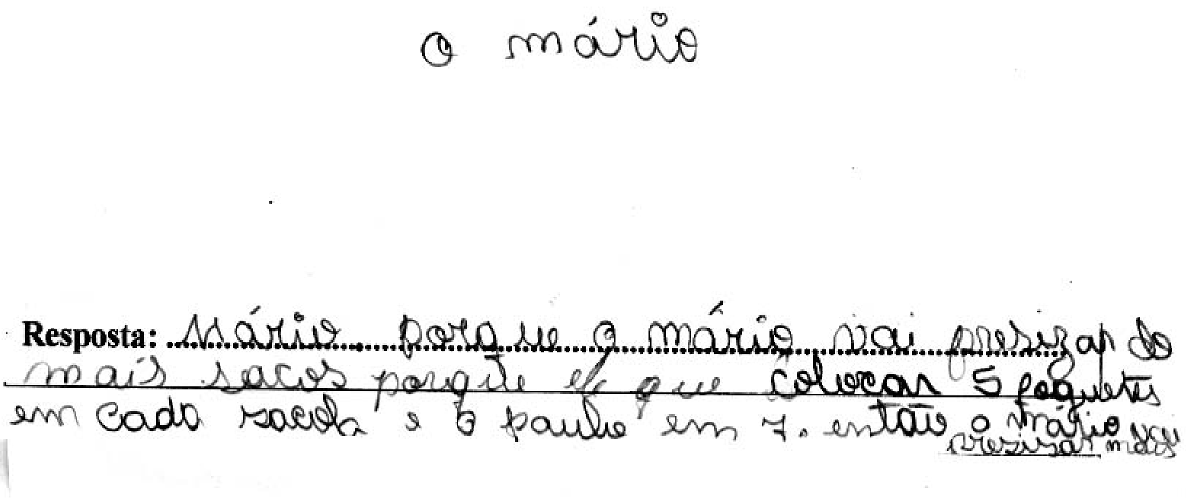
Pontuação - dois: a criança fornece a resposta à pergunta do enunciado do problema, fornecendo justificativa correta. Exemplos:

Exemplo 13: Problema de divisão por quotas (Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo? Por quê?)


Resposta: o Paulo porque ele tem menos quantidade de bolinhas e tem mas quanti dade di saquinhas

(Reprodução do protocolo 80, pós-teste, sexo feminino, 9 anos e 4 meses, GE)

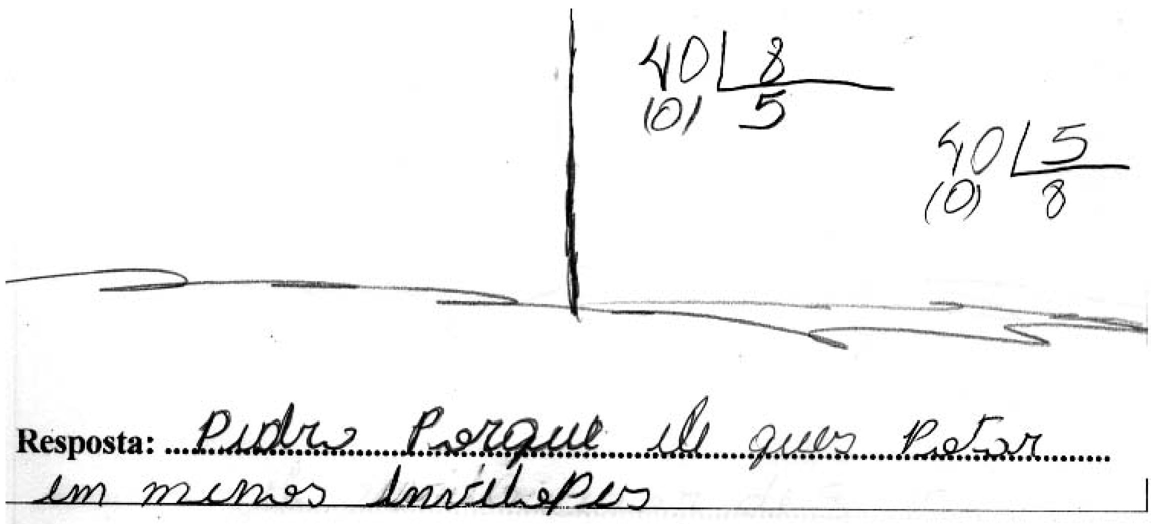
Exemplo 14: Problema de divisão por quotas (Mário e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 foguetes. Mário quer guardar 5 foguetes em cada saquinho e Paulo quer guardar 7 foguetes em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Mário ou Paulo? Por quê?)


o mário

Resposta: Mário porque o mário vai presizar de mais sacos porque ele que colocar 5 foguetes em cada saco e o paulo em 7. então o mário vai presizar mais

(Reprodução do protocolo 116, pré-teste, criança do sexo feminino, 9 anos e 8 meses)

Exemplo 15: Problema de divisão por partição (Marta e Pedro foram a uma papelaria e cada um comprou 40 papéis de carta. Marta quer colocar seus papéis de carta em 8 envelopes e Pedro quer colocar seus papéis de carta em 5 envelopes. Quem vai ter envelopes com mais papéis de carta, Marta ou o Pedro? Por quê?)


40 | 8
(0) 5

40 | 5
(0) 8

Resposta: Pedro Porque ele quer Botar em menos invelopes

(Reprodução do protocolo 123, pré-teste, criança do sexo masculino, 12 anos e 2 meses)

Exemplo 16: Problema de divisão por partição (Rute e João foram a uma banca de revista e cada um comprou 40 figurinhas. João quer colocar suas figurinhas em 8 saquinhos e Rute quer colocar suas figurinhas em 5 saquinhos. Quem vai ter saquinhos com mais figurinhas, Rute ou João? Por quê?)

Resposta: Rute Por que quando diminuirmos a qustidade de saquinhos aumenta a quantidade de figurinhos.

(Reprodução do protocolo 100, pós-teste, criança do sexo masculino, 10 anos e 5 meses, GE)

Observa-se nesses exemplos (13, 14, 15 e 16) que as crianças compreendem a relação inversa entre o divisor e o quociente quando o dividendo é mantido constante, uma vez que fornecem respostas corretas com justificativas que demonstram a compreensão das relações de covariação entre os termos da divisão.

Um total de 3672 problemas foi analisado (2472 no pré-teste e 1200 no pós-teste) e classificado a partir de julgamentos independentes de dois juizes cujo percentual de concordância no pré-teste foi de 92% e no pós-teste foi de 97.5%. Os julgamentos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada final.

5.3. Resultados

Os dados foram analisados a partir de dois tratamentos estatísticos. No primeiro tratamento, análise não-paramétrica, utilizaram-se os testes U de Mann- Whitney, para análise intergrupo, e o teste Wilcoxon, para análise intragrupo. No segundo tratamento, optou-se pela Análise Escalonar Multidimensional com Coeficiente de Monoticidade (MONCO) que constrói uma representação geométrica dos dados num espaço Euclidiano, de dimensionalidade mínima, em que as variáveis passam a ser representadas graficamente por pontos, cuja localização na projeção indica o grau de correlação entre elas, plotando-as de forma que a estrutura dos dados permanece inalterada. A correlação entre as variáveis será maior quanto mais próximos estiverem os pontos na projeção.

Optou-se pelos dois tratamentos estatísticos porque estes evidenciam as diferenças inter e intragrupos: (a) o primeiro compara as médias por postos, propiciando uma análise mais geral (Análise Não-Paramétrica); (b) o segundo (Análise Multidimensional) examina as relações entre todas as variáveis, como elas se estruturam e como as variáveis externas (grupo controle e grupo experimental) se relacionam com essa estrutura de dados, permitindo uma análise mais profunda, coadunando variáveis em uma única projeção que aponta com precisão as diferenças apresentadas no primeiro tratamento estatístico.

5. 3. 1. Análise Não-Paramétrica

Os dados foram analisados em função de duas variáveis: problemas prototípicos (típicos escolares) e problemas de relações inversas. Os problemas prototípicos são analisados em função do desempenho geral e do desempenho por tipo de problema (partição e quotas). Os problemas de relações inversas foram analisados apenas em função do desempenho geral, uma vez que foram apresentados apenas dois problemas, um de divisão por partição e um de divisão por quotas, em cada fase (pré e pós-testes).

Inicialmente, são apresentados conjuntamente os resultados gerais em função do desempenho no pré e no pós-teste. O desempenho geral apresentado no pré-teste foi adotado como um dos critérios para alocar as crianças nos grupos controle e experimental. Em seguida, são apresentados os resultados correspondentes às duas variáveis investigadas: problemas prototípicos e problemas de relações inversas[28].

[28] O grupo controle será denominado GC e o grupo experimental será denominado GE.

5.3.1.1. Desempenho geral

O desempenho geral no pré-teste e pós-teste gerais em relação aos grupos é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1- Freqüência e percentual (entre parênteses) de desempenho por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste gerais.

Pontuação	Grupo Controle (n= 600)		Grupo Experimental (n= 600)	
	Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
zero	**372** (62%)	**355** (59%)	**368** (61%)	**108** (18%)
um	**186** (31%)	**177** (30%)	**196** (33%)	**260** (43%)
dois	**42** (7%)	**68** (11%)	**36** (6%)	**232** (39%)

Em termos gerais, como pode ser observado na Tabela 1, no pré-teste, as crianças dos dois grupos apresentam desempenhos semelhantes, obtendo um percentual bastante elevado de respostas incorretas (62% e 61%, respectivamente controle e experimental) e um percentual pouco expressivo de respostas corretas, grupo controle 7% e grupo experimental 6%. O teste U de Mann-Whitney confirma que os grupos não diferem significativamente no pré-teste ($Z = -0.042$; $p = 0.967$).

No pós-teste, constata-se uma melhora no desempenho em ambos os grupos, entretanto, observa-se que as crianças que foram submetidas à intervenção apresentam um percentual maior de respostas corretas (GE: 39% e GC: 11%), de respostas que receberam um ponto (GE: 43% e GC: 30%) e um percentual menor de respostas incorretas (GE: 18% e GC: 59%) quando comparado ao desempenho das crianças do grupo controle. Esses resultados foram confirmados pelo teste U de Mann-Whitney que evidenciou diferença significativa entre o desempenho das crianças do grupo controle e do grupo experimental no pós-teste, observando-se um desempenho superior das crianças do grupo experimental em relação às crianças do grupo controle ($Z= -6.407$, $p = 0.000$).

Observa-se também, no pós-teste, que as crianças do grupo experimental reduziram o percentual de respostas incorretas de 61% para 18% e aumentaram o percentual de respostas que receberam pontuação um (interpretação correta do enunciado verbal considerando a divisão) de 33% para 43% e a pontuação dois (resposta correta) de 6% para 39%. Em contraste, as crianças do grupo controle, no pós-teste, apresentaram percentuais aproximados de respostas incorretas quando comparado ao pré-teste (62% e 59%, respectivamente) e uma melhora pouco expressiva no número de respostas corretas de 7% para 11%, respectivamente pré-teste e pós-teste.

Comparações entre o pré-teste e pós-teste em cada grupo foram feitas através do teste Wilcoxon. Como mostra a Tabela 1, não foram detectadas diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste das crianças do grupo controle ($Z = -1.373$; $p = 0.170$). Entretanto, no grupo experimental foram detectadas diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste ($Z = -5.948$; $p = 0.000$). Isso ocorreu porque no pré-teste havia um percentual elevado de respostas incorretas, e após a intervenção as crianças do grupo experimental ampliaram o percentual de respostas corretas e de respostas que receberam a pontuação um, demonstrando ter adquirido uma maior compreensão acerca das situações que envolvem a divisão, indicando um efeito positivo da intervenção realizada.

5.3.1.2. Problemas Prototípicos

Os problemas prototípicos são analisados em função do desempenho geral e do desempenho por tipo de problema (partição e quotas). A Tabela 2 ilustra o desempenho geral observado em ambos os grupos no pré-teste e no pós-teste.

Tabela 2- Freqüência e percentual (entre parênteses) de desempenho nos problemas prototípicos por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste gerais.

Pontuação	Grupo Controle (n= 500)		Grupo Experimental (n= 500)	
	Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
zero	**283** (56.6%)	**282** (56.4%)	**275** (55%)	**80** (16%)
um	**178** (35.6%)	**160** (32%)	**189** (37.8%)	**229** (45.8%)
dois	**39** (7.8%)	**58** (11.6%)	**36** (7.2%)	**191** (38.2%)

De modo geral, constata-se que as crianças de ambos os grupos no momento do pré-teste apresentam desempenhos bastante aproximados quando resolvem problemas prototípicos, embora as crianças do grupo controle apresentem um percentual maior de respostas incorretas (pontuação zero) do que as crianças do grupo experimental (56.6% e 55%, respectivamente).

Diferentemente do pré-teste, no pós-teste, observa-se que as crianças que foram submetidas à intervenção diminuíram o percentual de respostas incorretas (GE 16% e GC 56.4%), ampliaram o percentual de respostas corretas (GE 38.2% e GC 11.6%) e de respostas que receberam um ponto (GE 45.8% e GC 32%) quando comparados os percentuais apresentados pelas crianças do grupo controle. O teste U de Mann-Whitney aplicado aos dados no pré-teste e no pós-teste, separadamente, mostrou que no pré-teste não havia diferenças significativas entre os grupos ($Z = -0.174$; $p = 0.862$); enquanto que no pós-teste foram observadas diferenças significativas ($Z = -5.774$; $p = 0.000$), com vantagem para o grupo experimental.

Comparações entre o pré-teste e o pós-teste em cada grupo mostraram que as crianças do grupo experimental aumentaram o número de respostas corretas de 7.2% para 38.2% e diminuíram o percentual de respostas incorretas de 55% para 16%. Já as crianças do grupo controle continuam apresentando percentuais relativamente aproximados de respostas incorretas (56.6% e 54.6%, pré e pós-testes respectivamente) e apresentam um percentual melhor de respostas corretas de 7.8% para 11.6% quando comparado o pré-teste com o pós-teste. É possível que o aumento no percentual de respostas corretas apresentado pelo grupo controle esteja relacionado ao fato de que no segundo momento de testagem (pós-teste) as crianças apresentam a resposta para o enunciado do problema, haja vista que existe um percentual menor de respostas que receberam pontuação um (pré-teste: 35.6% e pós-teste: 32%) neste mesmo grupo. Como comentado no sistema de análise, as resoluções que não apresentam resposta para o enunciado não receberam a pontuação máxima (dois), porque faltam informações que expliquem a resposta da criança.

Embora se observe uma diferença entre o pré-teste e o pós-teste do grupo controle, esta diferença não foi significativa, como demonstrado pelo teste Wilcoxon ($Z = -0.662$; $p = 0.508$). Por outro lado, este mesmo teste aplicado ao grupo experimental revelou existir diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste ($Z= -5.948$; p 0.000). Como mostra a Tabela 2, as crianças que foram submetidas à intervenção (GE) apresentam um melhor desempenho no pós-teste, ampliando os percentuais de respostas corretas e de respostas com pontuação um (interpretação correta do enunciado verbal considerando a divisão) e, sobretudo, reduzindo o percentual de respostas incorretas, o que demonstra a eficácia da intervenção realizada.

Buscou-se investigar se o desempenho nos problemas prototípicos estaria associado ao tipo de problema (partição e quotas), sendo isso ilustrado na Tabela 3.

Tabela 3- Freqüência e percentual (entre parênteses) de desempenho em cada tipo de problema por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste gerais.

Pontuação	Grupo Controle (n= 250)				Grupo Experimental (n= 250)			
	Pré		Pós		Pré		Pós	
	Partição	Quotas	Partição	Quotas	Partição	Quotas	Partição	Quotas
zero	**138**	**145**	**137**	**145**	**130**	**145**	**40**	**40**
	(55.2%)	(58%)	(54.8%)	(58%)	(52%)	(58%)	(16%)	(16%)
um	**90**	**88**	**77**	**83**	**93**	**96**	**115**	**114**
	(36%)	(35.2%)	(30.8%)	(33.2%)	(37.2%)	(38.4%)	(46%)	(45.6%)
dois	**22**	**17**	**36**	**22**	**27**	**9**	**95**	**96**
	(8.8%)	(6.8%)	(14.4%)	(8.8%)	(10.8%)	(3.6 %)	(38%)	(38.4%)

Em termos gerais, observa-se no pré-teste que as crianças de ambos os grupos apresentam mais acertos nos problemas de divisão por partição (GC: 8.8% e GE: 10.8%) do que nos problemas de divisão por quotas (GC: 6.8% e GE: 3.6%) e apresentam um percentual maior e igual de respostas incorretas nos problemas de divisão por quotas (58% para ambos os grupos). O teste U de Mann-Whitney mostrou que não havia diferenças significativas entre os grupos quer nos problemas de divisão por partição (Z= -0.639; p = 0.523) quer nos problemas de divisão por quotas (Z= -0.177; p = 0.859).

No pós-teste, as crianças do grupo controle continuam apresentando o mesmo desempenho fraco que apresentavam no pré-teste. Essas crianças apresentam mais acertos nos problemas de divisão por partição (14.4%) do que nos problemas de divisão por quotas (8.8%) e tendem a apresentar percentuais maiores de respostas incorretas nos problemas de divisão por quotas (58%). Por outro lado, as crianças do grupo experimental aumentam o percentual de respostas corretas em ambos tipos de problemas (38% e 38.4%, respectivamente partição e quotas) e diminuem os percentuais de respostas incorretas (16% para ambas). O teste U de Mann-Whitney confirma esses resultados revelando diferenças significativas entre os grupos tanto nos problemas de divisão por partição (Z = - 4.923; p = 0.000) como nos problemas de divisão por quotas (Z= -5.702; p = 0.000), enfatizando o efeito positivo da intervenção desenvolvida.

Quando se compara, através do Wilcoxon, o desempenho do grupo controle no pré e no pós-testes, não se observa diferenças significativas em relação aos problemas de quotas (Z= -0.655; p = 0.512) nem em relação aos problemas de divisão por partição (Z= -0.620; p = 0.535). Em contraste, observa-se que as crianças do grupo experimental além de ampliar o percentual de respostas corretas e diminuir o percentual de respostas incorretas no pós-teste, passam a demonstrar um equilíbrio melhor no desempenho em relação aos tipos de problemas (partição e quotas). Esses resultados foram confirmados pelo teste Wilcoxon que identificou diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste em ambos tipos de problemas (partição Z= -5.681; p = 0.000 e quotas Z= -5.519; p = 0.000). Os resultados indicam que as crianças que foram submetidas à intervenção ampliaram o desempenho no pós-teste e que seus efeitos são semelhantes para ambos os tipos de problemas.

5.3.1.3. Problemas de Relações Inversas

A Tabela 4 mostra o desempenho nos problemas envolvendo as relações inversas no pré e no pós-testes gerais.

Tabela 4- Freqüência e percentual (entre parênteses) de desempenho nos problemas de relações inversas por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste gerais.

Pontuação	**Grupo Controle** (n= 100)		**Grupo Experimental** (n= 100)	
	Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
zero	**89** (89%)	**73** (73%)	**93** (93%)	**28** (28%)
um	**8** (8%)	**17** (17%)	**7** (7%)	**31** (31%)
dois	**3** (3%)	**10** (10%)	**0** (0%)	**41** (41%)

No pré-teste, constata-se que ambos os grupos apresentam um percentual relativamente aproximado e bastante expressivo de respostas incorretas (89% e 93%, respectivamente GC e GE). Nota-se, ainda, que apenas as crianças do grupo controle apresentam respostas corretas (3%) e um percentual maior, embora relativamente próximo, de respostas que receberam pontuação um quando comparado ao percentual de desempenho das crianças do grupo experimental (8% e 7%, respectivamente). Essas diferenças, entretanto, não foram significativas, como revela o teste U de Mann-Whitney (Z= -1.131; p = 0.258).

Por outro lado, observa-se que no pós-teste ocorre uma alteração do padrão apresentado no pré-teste. As crianças do grupo controle continuam apresentando um elevado percentual de respostas incorretas (GC 73% e GE 28%) e um percentual menor de respostas corretas (GC 10% e GE 41%) e de respostas que receberam pontuação um (GC 17% e GE 31%) quando comparado às crianças do grupo experimental. O teste U de Mann-Whitney evidenciou diferenças significativas entre os grupos (Z= -5.510; p = 0.000), com vantagem para o grupo experimental.

Quando comparado o desempenho do pré-teste com o pós-teste, constata-se que as crianças de cada grupo apresentaram um percentual maior de respostas corretas e de respostas que receberam pontuação um. As crianças do grupo experimental que não haviam acertado nenhum problema no pré-teste, passam a fazê-lo no pós-teste (41%). Estas, além de diminuir o percentual de respostas incorretas de 93% para 28%, passam a oferecer um percentual maior de respostas que receberam pontuação um (de 7% para 31%). Nota-se, também, que as crianças do grupo controle ampliam o percentual de respostas corretas (de 3% para 10%) e de respostas que receberam pontuação um (de 8% para 17%), e diminuíram o percentual de respostas incorretas (de 89% para 73%). O teste Wilcoxon revelou que as diferenças entre o pré-teste e o pós-teste são significativas tanto para o grupo experimental (Z= -5.829; p = 0.000) como para o grupo controle (Z= -3.125; p = 0.002).

Esses resultados indicam que ambos os grupos, no pós-teste, apresentam um desempenho melhor ao observado no pré-teste e que as crianças que foram submetidas à intervenção apresentam um desempenho mais expressivo do que aquelas que não foram submetidas.

5.3.2. Análise Multidimensional

O uso de análises escalonares multidimensionais[29] (MDS) têm sido utilizadas com maior freqüência nos últimos anos na área de psicologia (CANTER, 1977; 1983; COOMBS; DAWES; TVERSKY, 1970; DANCER, 1990; FOA, 1965; ROAZZI; MONTEIRO, 1995; ROAZZI; WILSON; FEDERICCI, 1995; ROAZZI; LOUREIRO; MONTEIRO, 1996; ROAZZI; DIAS, 2001) porque proporcionam uma representação espacial ou geométrica das relações entre um conjunto de variáveis plotadas em um único mapa, o que torna possível uma interpretação mais precisa acerca das distâncias entre as variáveis e suas inter-relações. O que importa é a estrutura subjacente às relações entre todas as variáveis, que não é possível de serem examinadas em estatísticas tradicionais, tanto paramétricas como não-paramétricas. Neste tratamento estatístico, os dados não são submetidos a nenhuma transformação, são tratados em sua forma bruta, respeitando suas particularidades qualitativas. Segundo Roazzi e Dias (2001, p. 157), a principal vantagem das análises escalonares multidimensionais (MDS) "[...] é possibilitar que o investigador quantifique e descreva de forma precisa fenômenos psicológicos extremamente complexos que não poderiam ser acessíveis através dos métodos de análises tradicionais."

---

[29] Maiores informações acerca da análise escalonar multidimensional (Multidimensional Scalogram Analysis) pode ser obtida em Shye (1985); Souza (1988); Bayley (1974); Bloombaum (1970); Borg e Lingoes (1987); Lingoes (1985); Guttman (1965) e Zvulun (1978).

Nesta investigação, a estrutura relacional refere-se à resolução de problemas envolvendo a operação de divisão. As questões norteadoras desta análise são: Existem diferenças nesta estrutura em função dos tipos de problemas: prototípicos (típicos escolares) e de relações inversas? Qual ou quais as mudanças propiciadas pela intervenção realizada?

Visando avaliar a estrutura relacional entre os diferentes problemas apresentados (pré e pós-testes) em função dos problema prototípicos e relações inversas, e dos tipos de problema (partição e quotas) foram realizadas análises multidimensionais denominadas Análise da Estrutura de Similaridade (*Similarity Structure Analysis* - SSA)[30]. Esta análise é considerada um escalonamento multidimensional não métrico, no qual o princípio fundamental é de proximidade. De acordo com Roazzi e Dias (2001, p 167) nesta análise os

> [...] pontos representando as variáveis são projetados num espaço, de modo que quanto maior for à correlação entre duas variáveis mais próximas elas se localizarão no espaço de projeção e vice-versa, criando-se, assim 'regiões de contigüidade ou regiões de descontinuidade' representando espacialmente as correlações entre os itens. As hipóteses iniciais são assim transformadas em hipóteses regionais, visto que se objetiva encontrar regiões de itens na configuração – SSA que correspondem aos elementos das facetas consideradas. Se para uma faceta um conjunto de regiões não é observado, então não existe evidência empírica por aquela faceta.

Importante ressaltar que os procedimentos do SSA diferem dos outros métodos MDS porque não impõe ortogonalidade nos dados, como ocorre, por exemplo, na análise fatorial. No caso da SSA, a estrutura dos dados emerge a partir dos próprios dados. (ROAZZI, 1995; ROAZZI; DIAS, 2001).

5.3.2.1. Resultados

A Tabela 5 ilustra o desempenho apresentado pelos grupos em cada um dos problemas nas duas fases (pré e pós-testes).

---

[30] Mais informações a este respeito ver Roazzi (1995, 1999)

Tabela 5 - Freqüência de desempenho em cada problema por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste gerais.

Tipos de problemas	Nº	Grupo Controle						Grupo Experimental					
		Pré			Pós			Pré			Pós		
		zero	um	dois	zero	um	dois	zero	um	dois	zero	um	dois
Partição	1	25	23	2	28	17	5	24	20	6	13	18	19
	3 RI	45	3	2	35	9	6	47	3	0	16	9	25
	5	27	19	4	28	18	4	28	21	1	7	28	15
	6	30	15	5	30	11	9	28	14	8	8	21	21
	8	26	14	10	27	14	9	22	19	9	5	20	25
	12	30	19	1	24	17	9	28	19	3	7	28	15
	Total	**183**	**93**	**24**	**172**	**86**	**42**	**177**	**96**	**27**	**56**	**124**	**120**
Quotas	2	27	22	1	29	18	3	29	20	1	11	33	6
	4	31	13	6	27	16	7	32	13	5	10	18	22
	7	28	20	2	27	20	3	28	22	0	7	19	24
	9 RI	44	5	1	38	8	4	46	4	0	12	22	16
	10	30	17	3	31	15	4	28	22	0	6	22	22
	11	29	16	5	31	14	5	28	19	3	6	22	22
	Total	**189**	**93**	**18**	**183**	**91**	**26**	**191**	**100**	**9**	**52**	**136**	**112**

Nota: RI = Problema de Relação Inversa

Em relação ao pré-teste, foi computado um SSA considerando como variáveis o desempenho nos 12 problemas do grupo controle e o desempenho nos 12 problemas do grupo experimental. A Figura 3 ilustra a projeção das relações entre este conjunto de variáveis no pré-teste.

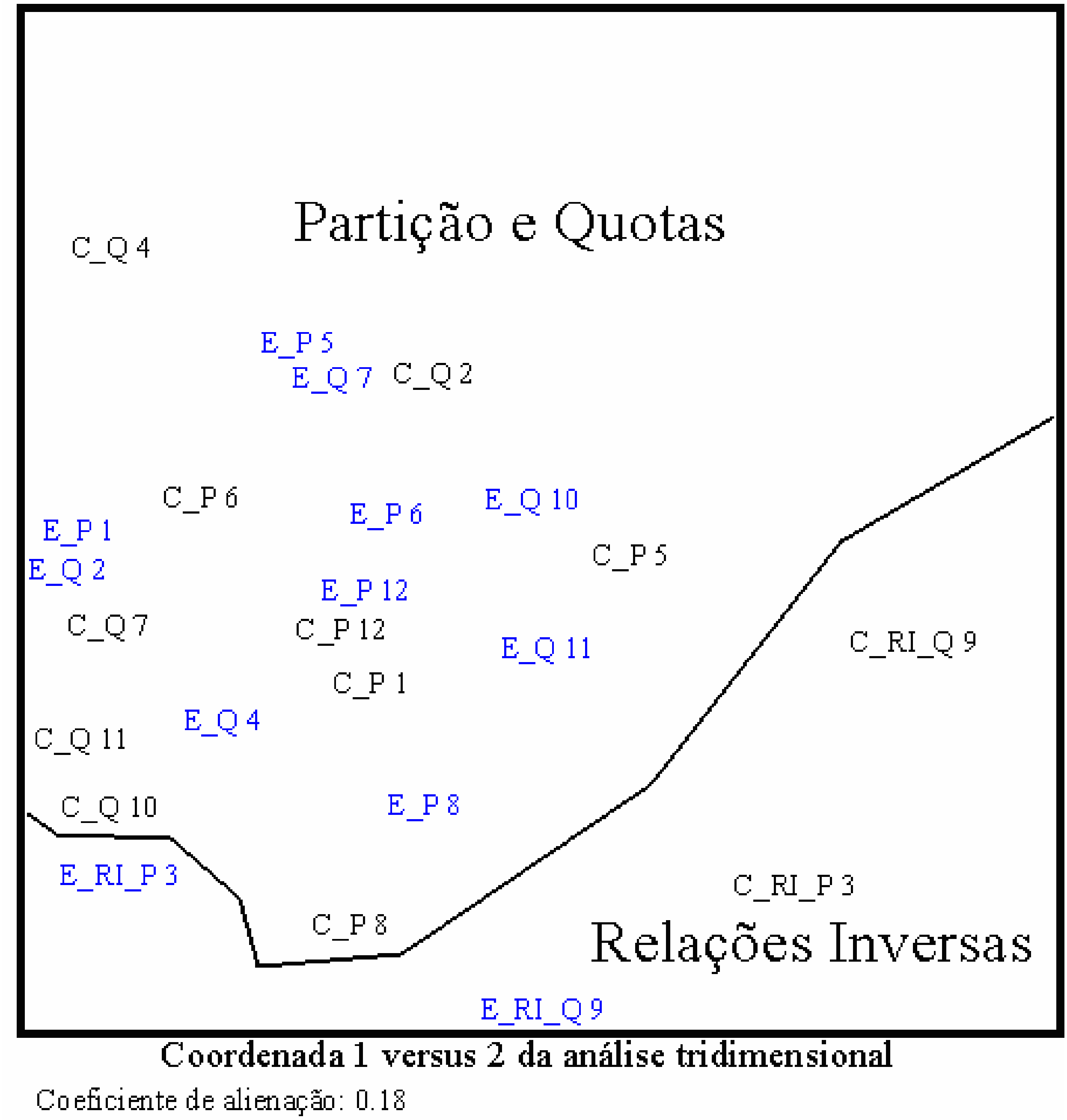


Figura 3. Análise SSA dos 12 problemas tanto do Grupo de Controle (C) como do Grupo Experimental (E) na fase de **Pré-teste**[31]**.**

Uma inspeção visual da projeção indica que não existe uma clara diferenciação estrutural entre o desempenho do grupo controle e o desempenho do grupo experimental no pré-teste. Não é possível localizar os dois grupos em regiões separadas na projeção. Por outro

[31] Convenções adotadas nas projeções: E = Grupo Experimental; C = Grupo de Controle; P = Problema de divisão por partição; Q = Problema de divisão por quotas e RI = Problema de relações inversas.

lado, quando se considera os tipos de problemas apresentados (prototípicos: partição e quotas, e os problemas de relações inversas), observa-se a existência de uma diferenciação entre eles, haja vista que os problemas de relações inversas (RI) encontram-se separados dos demais problemas na parte inferior da projeção. Considerando-se apenas os problemas prototípicos, observa-se que não existe uma clara diferenciação entre os problemas de divisão por partição e os problemas de divisão por quotas.

Com relação aos problemas prototípicos, observa-se que o problema 12 (partição)[32] aparece bem no centro do agrupamento com uma maior intercorrelação entre o desempenho do GE e do GC; enquanto que o problema 8 (partição)[33] aparece mais isolado dos demais (mais próximo à parte inferior da projeção), onde percebe-se uma correlação entre o desempenho dos dois grupos (GC e GE). Como pode ser observado na Tabela 5, as crianças apresentam um número elevado de respostas incorretas no problema 12 (partição), com apenas três respostas corretas no grupo experimental e uma resposta correta no grupo controle; enquanto que o problema 8 (partição) destaca-se por receber um número maior de respostas corretas por parte dos dois grupos (GC: 10 e GE: 9 respostas corretas) em relação a todos os problemas apresentados. Com base na projeção infere-se que o fato de um problema ser ou não difícil não estaria necessariamente associado aos tipos de problemas (partição e quotas), haja vista que nesta projeção o problema mais difícil e o mais fácil pertencem ao mesmo tipo de problema (divisão por partição). É possível que o fato do problema ser mais fácil ou mais difícil esteja atrelado ao tamanho do dividendo, uma vez que o problema 12 apresenta como dividendo o número 57 e o problema 8, como dividendo o número 28.

[32] Ricardo comprou 57 bolinhas de gude para dar aos seus 8 amigos. Ele quer que cada amigo receba a mesma quantidade de bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude cada amigo vai receber?

[33] Pedro comprou 28 carrinhos e quer colocá-los em 7 caixas. Ele quer que cada caixa receba a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?

Quando foram computadas no SSA as variáveis de desempenho nos 12 problemas, tanto do grupo controle como do grupo experimental, no pós-teste, constata-se uma alteração na estrutura (ver Figura 4).

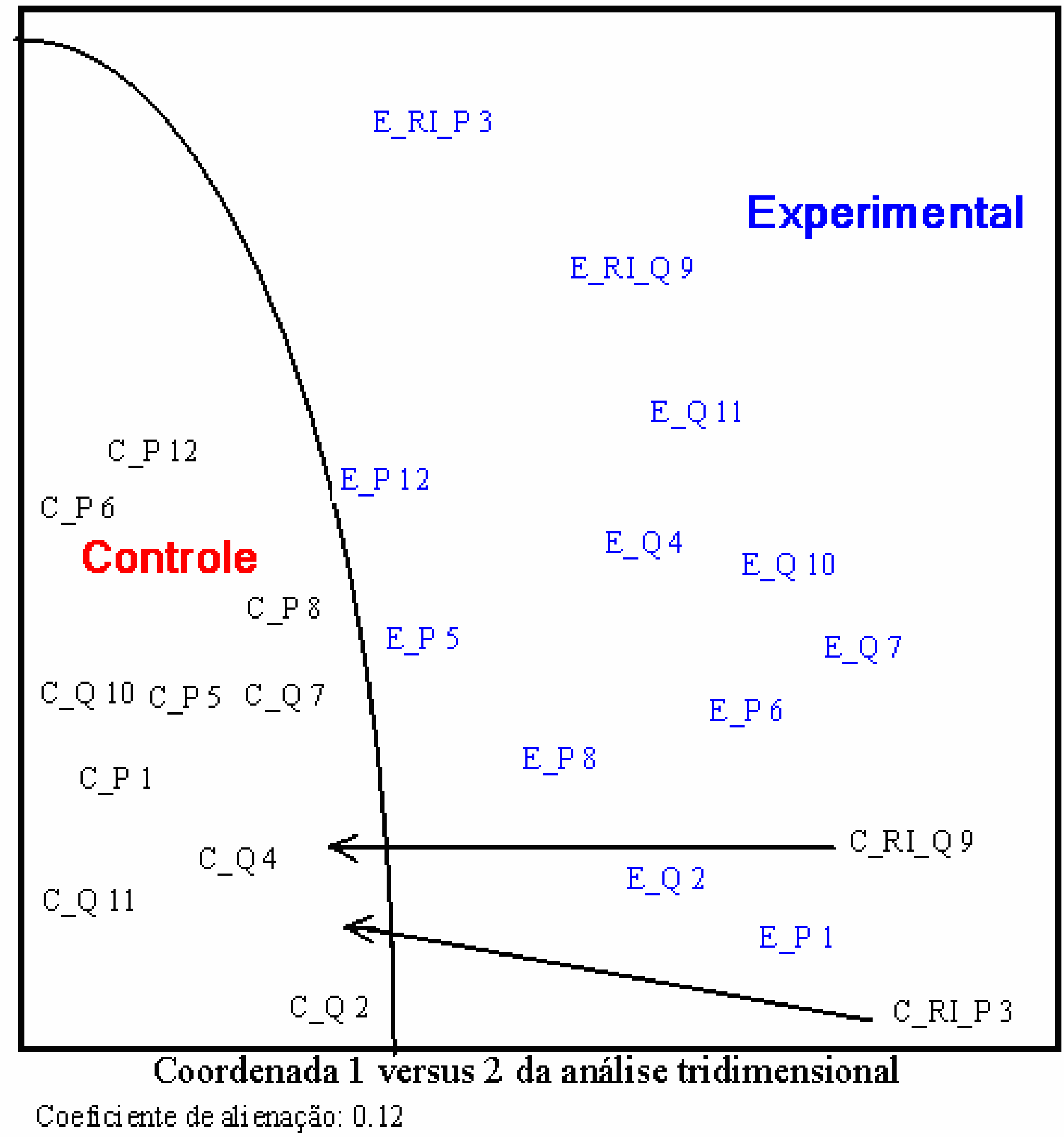


Figura 4. Análise SSA dos 12 problemas tanto do Grupo de Controle (C) como do Grupo Experimental (E) na fase de **<u>Pós-teste</u>**.

Uma inspeção visual da projeção indica que existe uma clara diferenciação estrutural de tipo axial entre o desempenho do grupo controle e do grupo experimental no pós-teste. Os problemas do grupo experimental encontram-se localizados em regiões claramente distantes do grupo controle indicando claramente o efeito da intervenção. Observa-se, na projeção relativa ao pós-teste das crianças do grupo experimental, que as localizações dos problemas se encontram separadas em duas regiões. Na parte superior encontram-se os problemas de relações inversas e na parte intermediária e inferior os problemas prototípicos, indicando que existe uma diferenciação entre eles. Isso talvez se explique pelo fato de que a intervenção teve um efeito maior sobre os problemas prototípicos (partição e quotas) do que sobre os problemas envolvendo as relações inversas. Observa-se, ainda, na região do grupo experimental, que os problemas de divisão por quotas se encontram mais associados entre si do que os problemas de divisão por partição, indicando que existe menos diferença entre este tipo de problema do que para os problemas de divisão por partição. Nota-se, também, que o problema 2 (quotas)[34] aparece afastado dos demais problemas de divisão por quotas e mais próximo ao problema 1 (partição)[35]. Como observado na Tabela 5, dentre os problemas prototípicos os problemas, 1 e 2 foram os problemas em que as crianças do grupo experimental tiveram certa dificuldade. É possível que isto esteja relacionado ao tamanho do divisor, haja vista que sete e nove foram os maiores divisores apresentados nos problemas prototípicos.

Em relação à projeção das crianças do grupo controle observa-se que o desempenho nos problemas encontra-se mais agrupado entre si do que no grupo experimental no que se refere aos problemas prototípicos (partição e quotas), indicando que há menos diferença de desempenho para esse tipo de problema do que para os problemas de relações inversas, os

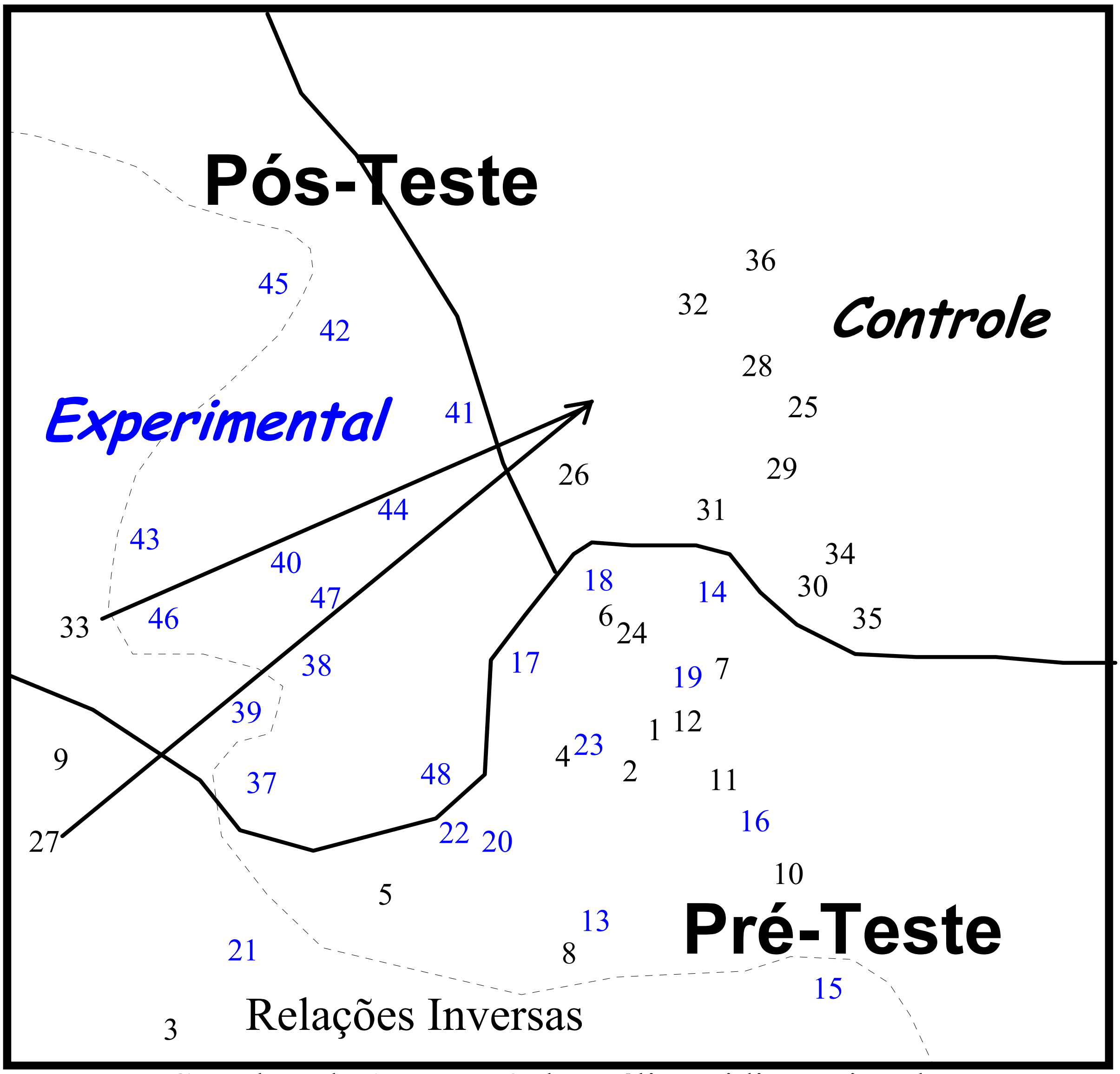
[34] Problema 2: divisão por quotas - Uma loja de brinquedos recebeu 55 ursinhos que serão vendidos em pacotes com 9 ursinhos em cada um. Quantos pacotes serão montados?
[35] Problema 1: divisão por partição - João foi a uma loja de brinquedo e comprou 25 aviões para dar aos seus 7 filhos. Ele quer que cada filho receba a mesma quantidade de aviões. Quantos aviões cada filho vai receber?

quais se encontram mais afastados e localizados na região do grupo experimental. O fato dos problemas de relação inversa do grupo controle aparecerem na região do grupo experimental pode ser atribuído ao fato de que as crianças do grupo controle melhoram o desempenho na segunda fase de testagem. Observa-se, ainda, que os problemas que apresentam restos maiores do que um (dois ou quatro) encontram-se mais associados entre si [problema 10 (quota); problema 5 (partição); problema 7 (quota) e problema 1 (partição)], indicando existir uma correlação maior entre eles. Como pode ser observado na Tabela 5, as crianças do grupo controle apresentam no pós-teste um desempenho inferior nos problemas com resto quando comparado aos problemas sem resto. Os dois problemas que apresentam resto (um) [problemas 2 quota e 12 partição)[36]], para as crianças do grupo controle, encontram-se afastados dos demais problemas indicando uma dissimilaridade entre os dois problemas. É possível que tal dissimilaridade esteja associada ao tamanho do dividendo. O que nos leva a inferir que o fato do problema ser ou não difícil não estaria necessariamente associado ao tipo de problema, haja vista que dois aspectos parecem influenciar no desempenho das crianças que não foram submetidas à intervenção: o tamanho do resto e o tamanho do dividendo.

Na Figura 5 foi computado, no mesmo mapa de projeção, o desempenho dos 12 problemas nas duas fases (pré e pós-testes) tanto do grupo controle como do grupo experimental.

---

[36] Problema 2: divisão por quotas - Uma loja de brinquedos recebeu 55 ursinhos que serão vendidos em pacotes com 9 ursinhos em cada um. Quantos pacotes serão montados?
Problema 12 : divisão por partição - Vovô comprou 57 canetinhas para dar as suas 8 netas. Ele quer que cada neta receba a mesma quantidade de canetinhas. Quantas canetinhas cada neta vai receber?



Coordenada 1 versus 2 da análise tridimensional

Coeficiente de alienação: 0.20

Figura 5. Análise SSA dos 12 problemas tanto do Grupo de Controle (C) como do Grupo Experimental (E) tanto na fase de **Pré-teste** como na fase de **Pós-teste**

Nota: Significado de cada um dos números que aparecem na Figura 5.

N°	Significado	N°	Significado	N°	Significado	N°	Significado
1	C_Pr_1p	13	E_Pr_1p	25	C_Po_1p	37	E_Po_1p
2	C_Pr_2q	14	E_Pr_2q	26	C_Po_2q	38	E_Po_2q
3	C_Pr_RI_P	15	E_Pr_RI_P	27	C_Po_RI_P	39	E_Po_RI_P
4	C_Pr_4q	16	E_Pr_4q	28	C_Po_4q	49	E_Po_4q
5	C_Pr_5p	17	E_Pr_5p	29	C_Po_5p	41	E_Po_5p
6	C_Pr_6p	18	E_Pr_6p	30	C_Po_6p	42	E_Po_6p
7	C_Pr_7q	19	E_Pr_7q	31	C_Po_7q	43	E_Po_7q
8	C_Pr_8p	20	E_Pr_8p	32	C_Po_8p	44	E_Po_8p
9	C_Pr_RI_Q	21	E_Pr_RI_Q	33	C_Po_RI_Q	45	E_Po_RI_Q
10	C_Pr_10q	22	E_Pr_10q	34	C_Po_10q	46	E_Po_10q
11	C_Pr_11q	23	E_Pr_11q	35	C_Po_11q	47	E_Po_11q
12	C_Pr_12p	24	E_Pr_12p	36	C_Po_12p	48	E_Po_12p

Uma inspeção visual da projeção (ver Figura 5) confirma as projeções anteriores de que não existem diferenças estruturais entre os grupos controle e experimental no pré-teste, ambos encontram-se agrupados em uma única região na parte inferior da projeção. Observa-se, novamente, que no pré-teste os problemas prototípicos e os problemas envolvendo relações inversas encontram-se separados dos demais problemas formando uma região demonstrando existir uma diferenciação entre estes dois tipos de problemas. Por outro lado, esta mesma projeção indica que por ocasião do pós-teste existe uma diferenciação mais acentuada entre os dois grupos (GC e GE), haja vista que os mesmo estão agrupados em duas regiões distintas na parte mediana, GE do lado esquerdo e GC do lado direito da projeção. O grupo experimental novamente encontra-se separado do grupo controle indicando claramente o efeito da intervenção, haja vista que o grupo experimental encontra-se agrupado entre si em uma única região, indicando que a intervenção teve um efeito positivo para os dois tipos de problemas (prototípicos e relações inversas), embora seja possível agrupá-los em regiões separadas: a dos problemas prototípicos (partição e quotas) e a dos problemas que envolvem relações inversas. Percebe-se também, no pós-teste que o problema 12 (partição, nº 48) aparece mais afastado dos demais problemas e mais próximo à região do pré-teste. Isto talvez ocorra porque as crianças apresentam um desempenho pior quando o par numérico[37] é grande (57÷8 =) e como já alegado a dimensão tamanho do dividendo e divisor parece influenciar no desempenho.

Nas projeções relativas ao grupo controle, no pós-teste, constata-se que as localizações entre as duas variáveis envolvendo problemas de relações inversas estão mais próximas entre si (nº 33 e nº 27) e localizadas na região dos problemas de relações inversas. Percebe-se, ainda, que o nº 33 [problema 9 (quota)] encontra-se na região do pós-teste; enquanto o problema nº 27 [problema 3 (partição) na região do pré-teste. Observa-se, também, que o nº 33 [problema 9 (quota)] e o nº 46 [problema 10 (quota)] mostram-se bastante associados entre

[37] Par numérico refere-se às quantidades presentes nos problemas (dividendo e divisor)

si. Isso talvez se explique pelo fato de que em ambos os problemas (9 e 10) o divisor cinco encontra-se presente. Nota-se, também, que os nº 34 (problema 10 quota), nº 30 (problema 6 partição) e nº 35 (problema 11 quota), no pós-teste, para as crianças do grupo controle, mostram-se bastante associados entre si e mais próximos da região do pré-teste. É possível que esta aproximação esteja relacionada ao fato desses três problemas terem como divisor o número cinco e que o desempenho nestes três problemas foi semelhante no pré-teste (ver Tabela 5).

Nesta investigação a "técnica das variáveis externas como pontos" foi utilizada para examinar a relação da variável grupo (controle e experimental) e fase (pré e pós-testes) com a estrutura de desempenho em problemas de divisão (ver Figura 6). Esta técnica possibilita integrar sub-populações nos mapas ou projeções MDS, por exemplo, permite localizar espacialmente variáveis externas (os dois grupos) como pontos representados na projeção SSA que permanece inalterada. Assim, no lugar de analisar diferentes mapas SSA, um para cada subgrupo, é produzido um único mapa integrado, representando, ao mesmo tempo, a estrutura desempenho em problemas de divisão e os dois subgrupos (controle e experimental). Após ter produzido o mapa SSA representando as correlações entre os vários problemas (variáveis desempenhos), os dois subgrupos (controle e experimental) ou fase (pré-teste e pós-teste), eram introduzidos no mesmo mapa sem que fosse modificada a localização das variáveis (desempenhos originais).

Para gerar um único mapa integrando todas informações (variáveis desempenhos e variáveis externas) foram criadas as duas variáveis "*dummy*" a partir da variável grupo. A variável grupo apresentava duas categorias, cada uma correspondendo a um grupo – 1 para grupo controle e 2 para grupo experimental. A partir desta única variável, foi construído duas variáveis dicotômicas tipo "*dummy variables*". Assim, a variável grupo controle é uma cópia da variável original grupo na qual a categoria 1 (grupo controle) permanece com a categoria 1 (sim) e a categoria 2 (grupo experimental) é modificada para 0 (não). De forma similar, a variável grupo experimental é uma cópia da variável original grupo na qual a categoria 2 (grupo experimental) é modificada para categoria 1 (sim) e a categoria 1 (grupo controle) é modificada para 0 (não). O princípio geral é que a variável externa precisa ser construída na mesma direção da variável interna desempenho em problemas de divisão. Assim, se as variáveis internas (desempenho) aumentam de negativo para positivo as variáveis externas precisam aumentar no mesmo sentido.

Quando foram computadas no SSA as variáveis externas (controle e experimental) e o desempenho dos problemas no pré-teste e no pós-teste, observa-se que a partição desta faceta é do tipo axial, na qual são distintas duas regiões (ver Figura 6).

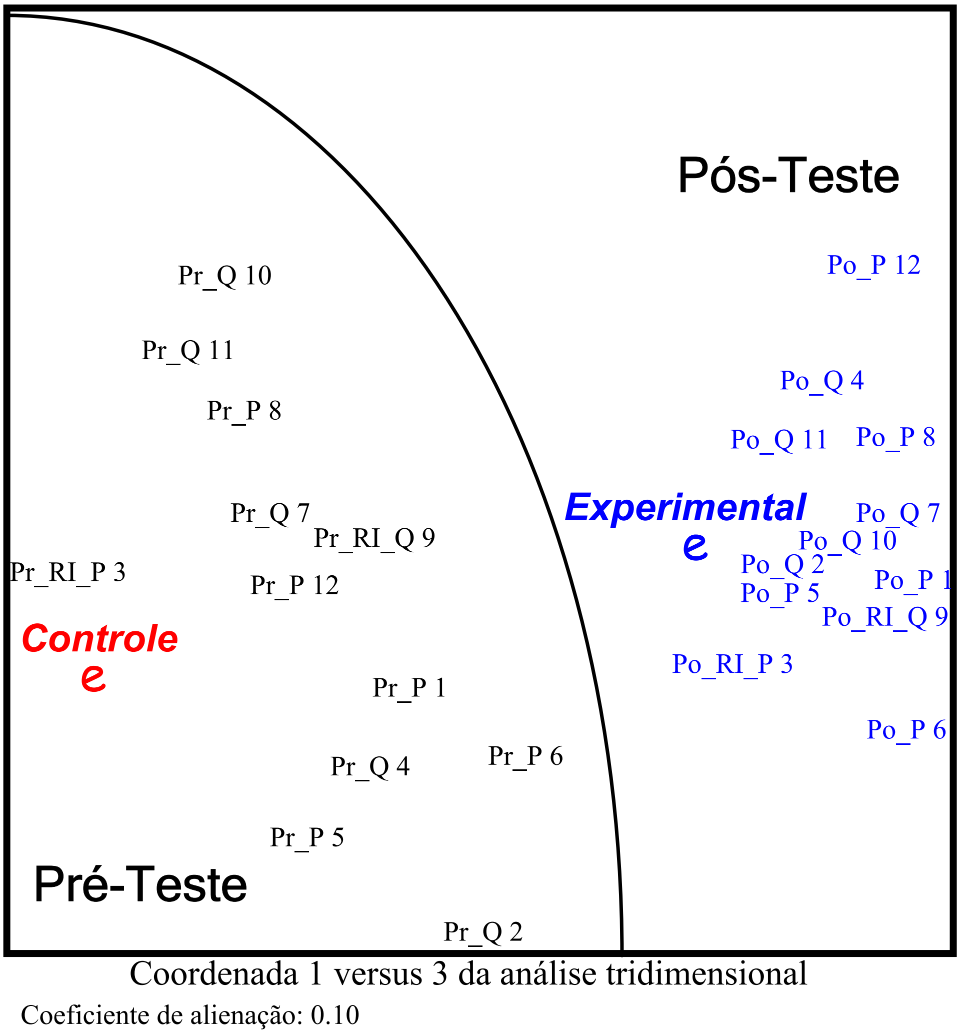


Figura 6. Análise SSA dos 12 problemas da fase de **<u>Pré-teste</u>** e dos 12 problemas da fase de **<u>Pós-teste</u>**, considerando como variáveis externas (e) os grupos Controle e Experimental.

Como pode ser observado, a análise da variável externa *grupo* mostrou haver diferenças de padrões entre os dois grupos: controle e experimental. Na projeção considerando o desempenho nos problemas de divisão observa-se que enquanto a variável externa grupo controle se localiza na região do pré-teste, a variável externa grupo experimental se localiza na região do pós-teste, indicando claramente o efeito positivo da intervenção. Observa-se que, se inspecionarmos o grau de proximidade entre os desempenhos, a distância entre as variáveis na região do pós-teste é menor, ou seja, o pós-teste encontra-se mais agrupado entre si. Este tipo de configuração indica a existência de um efeito interativo grupo e desempenho, confirmando a eficácia da intervenção realizada. Ademais, constata-se que nas projeções relativas ao desempenho dos problemas, no pós-teste, os dois tipos de problema (prototípicos e relações inversas) estão mais próximos entre si do que foi observado no pré-teste, indicando desta forma uma similaridade muito mais acentuada entre os dois tipos de problema no pós-teste.

Observa-se, no pré-teste, que o problema 3 (relações inversas) e o problema 2 (quotas) estão quase expulsos da projeção. Isso ocorre porque as crianças de ambos grupos (GC e GE) nos dois problemas apresentam um número maior de respostas incorretas. No problema 3 (relações inversas partição) apenas duas respostas recebem pontuação dois no grupo controle e no problema 2 (quotas) apenas uma resposta em cada grupo está totalmente correta para este problema. Ao que parece o problema 2 (quota) e o problema 3 (RI partição) do pré-teste foram mais difíceis para as crianças, porque o primeiro apresenta um par numérico grande (55÷9=) e o segundo envolve a compreensão acerca das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Como base na projeção é possível inferir que dentre os problemas de relações inversas, os de partição parecem ser mais difíceis de resolver do que os problemas de quotas.

5.4. Comentários

Os resultados das duas análises (não-paramétrica e multidimensional) mostram que independente da dificuldade apresentada com a divisão (relações inversas ou lidar com o resto), as crianças que receberam a intervenção (grupo experimental) alcançaram um nível de compreensão mais sofisticado tanto nos problemas prototípicos como nos problemas de relações inversas quando comparadas às crianças do grupo controle, no pós-teste e quando comparadas as duas fases (pré e pós-testes).

Quanto ao desempenho, a análise multidimensional revelou que existe um padrão de desempenho distinto para os problemas envolvendo as relações inversas e os problemas prototípicos. Por outro lado, as crianças de ambos os grupos apresentaram um padrão muito semelhante ao resolver problemas prototípicos tanto no pré-teste como no pós-teste. Constatou-se que o fato de um problema ser mais fácil ou mais difícil não estaria necessariamente associado aos tipos de problemas (partição ou quotas), mas ao tamanho do dividendo ou do divisor.

Quanto ao tamanho do resto, a análise multidimensional mostra que apenas as crianças que não foram submetidas à intervenção apresentaram, no pós-teste, um padrão semelhante de desempenho (erram mais) quando os problemas apresentam resto maior do que um (dois ou quatro), o mesmo não sendo observado para as crianças do grupo experimental. Portanto, a intervenção foi eficaz para que a criança superasse a dificuldade de lidar com o valor do resto.

No que se refere aos problemas de relações inversas, tanto a análise não-paramétrica como as análises multidimensionais apontam que no pré-teste não existe diferenciação entre os grupos em relação a este tipo de problema; enquanto que na ocasião do pós-teste ambos os grupos melhoram apresentando alterações quanto ao desempenho. É possível que os resultados significativos apresentados pelo grupo controle, no pós-teste (análise não paramétrica), estejam relacionados a dois aspectos. Primeiro, as crianças do grupo controle, no momento do pré-teste geral foram as únicas que apresentaram respostas corretas, o que parece indicar a existência de algum conhecimento prévio acerca das relações inversas entre os termos. Segundo, é possível que esta melhora esteja relacionada ao fato das crianças terem sido submetidas ao pré-teste específico (Tarefa 1: relações inversas) no qual o examinador solicitava, em uma sessão individual, que a criança oferecesse uma justificativa para a resolução do problema, contribuindo, assim, para a compreensão das relações inversas sobre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante.

Outro dado interessante revelado pela análise dimensional refere-se ao fato dos problemas de relações inversas, tanto no pré-teste como no pós-teste, encontrarem-se separados dos problemas prototípicos. É possível que esse efeito esteja associado a dois aspectos: (i) a quantidade de problemas envolvendo as relações inversas é menor que a quantidade de problemas prototípicos; (ii) a quantidade de sessões propostas na intervenção não foi suficiente para que a criança passasse a compreender e dominar, do ponto de vista cognitivo, as relações existentes entre o divisor e o quociente quando o dividendo é mantido constante, uma vez que este parece ser o invariante operatório da divisão mais difícil. Ademais, os resultados obtidos apontam que o problema de divisão por partição envolvendo as relações inversas parece ser mais difícil da criança lidar do que o problema de divisão por quotas envolvendo essas relações.

Parte II: Tarefa 1- Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão

Considerando ser a presente pesquisa um estudo de intervenção, a Tarefa 1 foi aplicada tanto no pré-teste como no pós-teste a dois grupos de crianças: um grupo controle e um grupo experimental que foram descritos anteriormente. Assim, com a aplicação da presente tarefa pretendeu-se examinar se a intervenção fornecida ao grupo experimental auxiliaria as crianças a lidar com as relações inversas entre os termos da divisão, superando as dificuldades identificadas no pré-teste. Importante mencionar, como descrito no Capítulo 2, que parte da intervenção (Sessão 1) envolvia um conjunto de atividades que tinha por objetivo levar a criança a compreender as relações inversas entre os termos da divisão.

Porém, antes de apresentar os resultados obtidos, é necessário descrever o sistema de análise adotado na Tarefa 1.

6. Sistema de Análise

Os dados foram analisados em função de dois aspectos distintos, porém complementares: o desempenho (número de acertos) e a natureza das justificativas apresentadas.

A análise das justificativas tomou por base o princípio de covariação existente entre os termos da divisão, tendo-se em vista dois aspectos: (a) as possíveis relações que a criança estabelece entre os termos da divisão; (b) o grau de precisão e explicitude das justificativas. A combinação desses dois aspectos permitiu classificar as justificativas em três diferentes tipos que são descritos e exemplificados a seguir a partir de extratos de protocolo das crianças.

<u>Justificativa 1:</u> justificativas imprecisas, circulares, que não permitem identificar se alguma relação entre os termos da divisão foi estabelecida. Também foi incluída nesta categoria a ausência de justificativa[38]. Exemplos:[39]

Exemplo 17: Problema de divisão por quotas (Mário e Elena foram a uma floricultura e cada um comprou 24 rosas. Mário quer colocar 4 rosas em cada vaso e Elena quer colocar 6 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos para colocar todas as rosas, Elena ou Mário?)

C - "Mário."
E - "Por quê?"
C- (silêncio)
E - "Vamos ler novamente o problema." (examinador lê novamente o problema)
C- "Sei não, tia"
E- "Não tem nenhuma idéia?"
C- "Não."

(Reprodução do protocolo 42, pré-teste, sexo feminino, 11 anos e 4 meses, GC)

Exemplo 18: Problema de divisão por partição (Rita e Maria foram a uma floricultura e cada uma comprou 21 margaridas. Rita quer colocar suas margaridas em 3 cestas e Maria quer colocá-las em 7 cestas. Quem vai ter cestas com mais margaridas, Maria ou Rita?)

C - (demora a responder)
E - (lê novamente o enunciado do problema)
C - "Maria."
E - "Por quê?"
C- "Porque ela tem um número mais maior de margaridas." [sic]

(Reprodução do protocolo 1, pré-teste, criança do sexo feminino, 9 anos e 10 meses, GC)

No exemplo 17, a criança fornece o nome do último personagem apresentado no enunciado do problema e não consegue explicitar a razão de sua escolha. No exemplo 18, a criança retorna à questão apresentada no enunciado do problema, incorporando-a à pergunta do examinador: "Quem vai ter cestos com mais margaridas?" [criança responde] "ela [Maria] tem um número mais maior de margaridas." [sic]

[38] Ressalta-se que no total de 1200 respostas, apenas 9 respostas no pré-teste (1.5%) e 12 no pós-teste (2%) não apresentam justificativas.
[39] Convenções adotadas: (E) Examinador; (C) Criança.

<u>Justificativa 2:</u> justificativas que indicam alguma compreensão sobre as relações entre os termos da divisão, porém não expressam um entendimento a respeito das relações inversas. A criança considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos, confunde os valores do divisor e do quociente. Três variações foram identificadas:

Justificativa 2a → a criança confunde o tamanho da parte com o número de partes. Exemplo:

Exemplo 19: Problema de divisão por quotas (Mário e Elena foram a uma floricultura e cada um comprou 24 rosas. Mário quer colocar 4 rosas em cada vaso e Elena quer colocar 6 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos para colocar todas as rosas, Elena ou Mário?)

E- "Mário"
E- "Por quê?"
C- "Porque ele colocou as rosas em quatro vasos."

(Reprodução do protocolo 50, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 1 mês, GE)

Justificativa 2b → a criança focaliza a atenção no valor do dividendo apenas. Exemplo:

Exemplo 20: Problema de divisão por partição (Carlos e Ricardo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 28 carrinhos. Carlos quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Ricardo quer colocá-los em 7 caixas. Quem vai ter caixas com mais carrinhos, Ricardo ou Carlos?)

C- "Carlos" (passa a mão na cabeça)
E - "Por quê?"
C- "Porque.... quer botar em cada caixa vinte e oito carrinhos."
E- "Explica melhor, Lauro[40]"
C- (olha para a cartela e parece novamente ansioso, ficando em silêncio)
E- "Não sabe dizer?"
C- (faz que não sabe com a cabeça)

(Reprodução do protocolo 6, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 3 meses, GC)

Justificativa 2c → a criança focaliza a atenção no número de divisores (maior divisor) apenas. Exemplo:

---

[40] Os nomes das crianças foram substituídos por nomes fictícios, garantindo o sigilo da identidade dos participantes, conforme exigido pelo Comitê de Ética em pesquisa com seres humanos da UFPE.

Exemplo 21: Problema de divisão por partição (Eduardo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Eduardo quer guardar suas bolinhas em 5 caixas e Paulo quer guardá-las em 7 caixas. Quem vai ter caixas com mais bolinhas de gude, Eduardo ou Paulo?)

C- "Paulo."
E- "Por quê?"
C- "Porque ele colocou em sete caixas as bolas de gude e Eduardo colocou em cinco caixas."

(Reprodução do protocolo 50, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 1 mês, GE)

Justificativa 3: justificativas que demonstram a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão, expressando o princípio geral de que uma vez mantido constante o valor do dividendo, as relações entre o tamanho das partes e o número de partes são inversas. Exemplos:

Exemplo 22: Problema de divisão por quotas (Marcos e Paulo foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 18 bolinhas. Marcos quer guardar 3 bolinhas em cada caixa e Paulo quer guardar 6 bolinhas em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas para colocar todas as bolinhas, Paulo ou Marcos?)

C- "Marcos."
E- "Por quê?"
C- "Porque ele tem três bolinhas. Ele vai botar como se chama... dezoito bolinhas. Ele vai botar dezoito bolinhas em cada caixa....três bolinhas em cada caixa, aí ele vai precisar de maior número de caixas, porque vai botar pouquíssima bolinhas." [sic]

(Reprodução do protocolo 91, pós-teste, sexo feminino, 9 anos e 9 meses, GE)

Exemplo 23: Problema de divisão por quotas (Marcos e Paulo foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 18 bolinhas. Marcos quer guardar 3 bolinhas em cada caixa e Paulo quer guardar 6 bolinhas em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas para colocar todas as bolinhas, Paulo ou Marcos?)

C- "Marcos."
E- "Por quê?"
C- "Porque ele diminuiu a quantidade de canetas e se tem a mesma quantidade...e diminui a quantidade de...canetas, aumentou a quantidade de caixas."
E- "Como é Gabriel, não entendi!
C- "Se diminuir a quantidade de bolinhas dentro das caixas, aumenta a quantidade de caixas, se aumentar a quantidade de bolinhas dentro das caixas, ai vai diminuir a quantidade de caixas"

(Reprodução do protocolo 100, pós-teste, sexo masculino, 10 anos e 5 meses, GE)

Um total de 1200 justificativas (600 no pré-teste e 600 no pós-teste) foi analisado por dois juizes independentes cujo percentual de concordância foi de 90.6%. Os julgamentos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada final.

6.1. Resultados

Inicialmente são apresentados os resultados relativos ao desempenho e em seguida, os resultados relativos às justificativas. Tanto o desempenho como as justificativas foram analisados em função de três variáveis independentes: tipo de problema (partição e quotas), o grupo de crianças (controle e experimental) e a fase de aplicação da tarefa (pré-teste e pós-teste).

6.1.1. Desempenho

A Tabela 6 mostra o desempenho na Tarefa 1 em função do tipo de problema.

Tabela 6- Média de acertos (máximo: 3) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e do tipo problema no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 1.

Fases	Grupos	Tipos de problemas		Total
		Partição	Quotas	
Pré-teste	GC	**0.86** (1.069)	**1.10** (1.035)	**0.98** (1.052)
	GE	**0.98** (1.040)	**0.98** (1.116)	**0.98** (1.078)
	Total	**0.92** (1.055)	**1.04** (1.076)	**0.98** (1.065)
Pós-teste	GC	**0.84** (1.037)	**1.30** (1.233)	**1.07** (1.135)
	GE	**2.12** (1.081)	**2.16** (1.131)	**2.14** (1.106)
	Total	**1.48** (1.059)	**1.73** (1.182)	**1.61** (1.121)

No pré-teste, comparações entre os grupos em cada tipo de problema foram examinadas através de uma Análise de Variância a uma via, não sendo detectadas diferenças significativas entre os grupos tanto nos problemas de divisão por partição [$\underline{F}$ (1.98) = 0.324; $\underline{p}$ = 0.571] como nos problemas de divisão por quotas [F (1.98) = 0.311; p = 0.578]. Verifica-se, portanto, que no pré-teste os dois grupos apresentam desempenhos semelhantes no que se refere às relações inversas, tanto nos problemas de divisão por partição como nos problemas de divisão por quotas.

Foi realizada uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Problema (2: partição e quotas), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise produziu efeitos principais significativos para Fase [F (1.98) = 35.424; p = 0.000; média no pré: 0.98 e média no pós: 1.61] e para Grupo [F (1.98) = 12.698; p = 0.001; média no grupo controle: 1.03 e média no grupo experimental: 1.56].

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 25.957; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou que o número de acertos no grupo experimental foi superior ao número de acertos no grupo controle no pós-teste (p<.001, intergrupo) (média: 2.14 e média 1.07, respectivamente) e que o grupo experimental apresentou um desempenho superior no pós-teste (média. 2.14) quando comparado ao pré-teste (média 0.98) (p <.001, intragrupo). Essa interação é ilustrada na Figura 7.

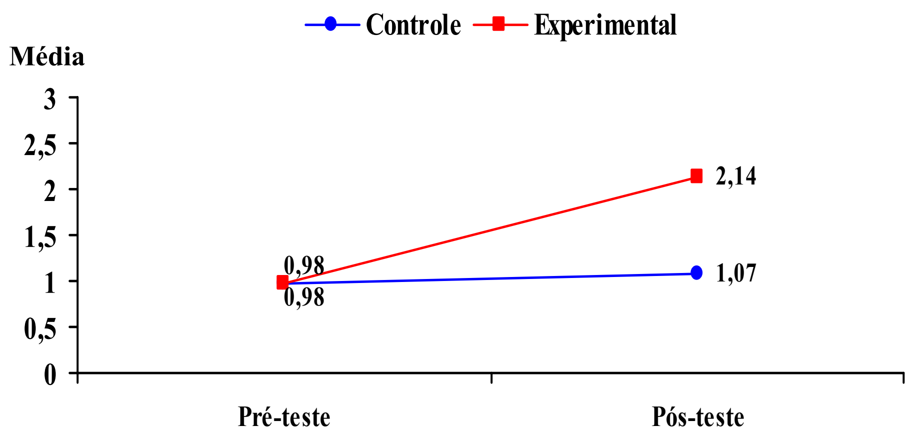


Figura 7. Interação Fase X Grupo (Tarefa 1 – Desempenho)

6.1.2. Justificativas

Inicialmente, as justificativas foram examinadas a partir de uma Análise de Variância[41], cuja distribuição é apresentada na Tabela 6 e na Tabela 7. Em seguida, colocou-se em destaque a Justificativa 2 que foi analisada de maneira específica. Esse destaque foi dado por duas razões: (a) a Justificativa 2 foi a mais freqüente; (b) essa justificativa expressa erros que a criança apresenta ao considerar a relação de covariação entre os termos quando o dividendo é mantido constante. A discussão conduzida a respeito da Justificativa 2 tomou por base uma análise de natureza qualitativa, não sendo aplicado nenhum teste estatístico sobre os dados nesta análise.

Tabela 7- Média de justificativas (máximo: 3) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e tipo de problema no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 1.

	Pré-teste			
	Controle		**Experimental**	
Justificativas	Partição	Quotas	Partição	Quotas
J1 (ausente ou imprecisa)	**0.58** (0.810)	**0.62** (0.901)	**0.62** (0.830)	**0.72** (0.834)
J2 (foco em um dos termos ou confunde ambos)	**2.02** (1.000)	**1.78** (1.148)	**2.04** (0.989)	**1.84** (0.976)
J3 (compreensão das relações inversas)	**0.40** (0.782)	**0.60** (0.948)	**0.34** (0.626)	**0.44** (0.760)
	Pós- teste			
J1 (ausente ou imprecisa)	**0.66** (1.081)	**0.80** (1.030)	**0.18** (0.438)	**0.22** (0.465)
J2 (foco em um dos termos ou confunde ambos)	**2.04** (1.160)	**1.50** (1.298)	**0.66** (1.022)	**0.64** (0.964)
J3 (compreensão das relações inversas)	**0.30** (0.678)	**0.70** (1.055)	**2.16** (0.997)	**2.14** (1.125)

[41] Para a utilização da Análise de Variância nas justificativas em todas as tarefas do pré e pós-testes específicos procedeu-se de maneira a transformar as variáveis ordinais em variáveis intervalares, analisadas separadamente. Tal transformação permite, por exemplo, que o teste estatístico compare o número total de Justificativa 1 oferecido no pré-teste com número total de Justificativa 1 oferecido no pós-teste.

Como mostra a Tabela 7, no pré-teste, no interior de cada justificativa comparou-se os dois grupos em relação a cada tipo de problema (partição e quotas) através de uma Análise de Variância a uma via[42]. Na Justificativa 1, os grupos não diferem significativamente em relação ao problema de divisão por partição [F (1.98) = 0.059; p = 0.808] nem tampouco em relação ao problema de divisão por quotas [F (1.98) = 0.332; p = 0.566]. O mesmo padrão de resultados foi observado em relação à Justificativa 2 {partição [F (1.98) = 0.010; p = 0.920] e quotas [F (1.98) = 0.079; p = 0.779]} e em relação à Justificativa 3 {partição [F (1.98) = 0.179; p = 0.673] e quotas [F (1.98) = 0.867; p = 0.354]}.

A Tabela 8 apresenta a distribuição das justificativas em função dos grupos e das fases.

Tabela 8- Média de justificativas (máximo: 3) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 1.

	Pré-teste			**Pós-teste**		
Justificativas	**GC**	**GE**	**Total**	**GC**	**GE**	**Total**
J1 (ausente ou imprecisa)	**0.60** (0.856)	**0.67** (0.832)	**0.64** (0.844)	**0.73** (1.056)	**0.20** (0.452)	**0.47** (0.754)
J2 (foco em um dos termos ou confunde ambos)	**1.90** (1.074)	**1.94** (0.983)	**1.92** (1.029)	**1.77** (1.229)	**0.65** (0.993)	**1.21** (1.111)
J3 (compreensão das relações inversas)	**0.50** (0.865)	**0.39** (0.693)	**0.45** (0.779)	**0.50** (0.867)	**2.15** (1.061)	**1.33** (0.964)

Os dados foram submetidos a uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Problema (2: partição e quotas), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise considerou como variável dependente cada uma das justificativas (Justificativa 1, Justificativa 2 e Justificativa 3), separadamente, tanto para os problemas de divisão por partição como para os problemas de divisão por quotas. Os resultados indicaram efeitos significativos para as três justificativas, como descrito a seguir:

[42] Um total de seis Análises de Variância foram aplicadas, duas no interior de cada um dos três tipos de justificativa.

Justificativa 1

Não se verificou efeito do Grupo [F (1.98) = 3.176; p = 0.078] nem do Problema [F (1.98) = 1.969; p = 0.164], no entanto, detectou-se um efeito principal em relação à Fase [F (1.98) = 5.826; p = 0.018]. Esse efeito caracterizou-se por uma diminuição na freqüência de Justificativa 1 no pós-teste (média: 0.47) quando comparada ao pré-teste (média: 0.64), como mostra a Tabela 7. Esse resultado sugere que após a intervenção as crianças do grupo experimental forneceram um menor número de justificativas imprecisas ou ausentes (Justificativa 1).

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 18.144; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 8).

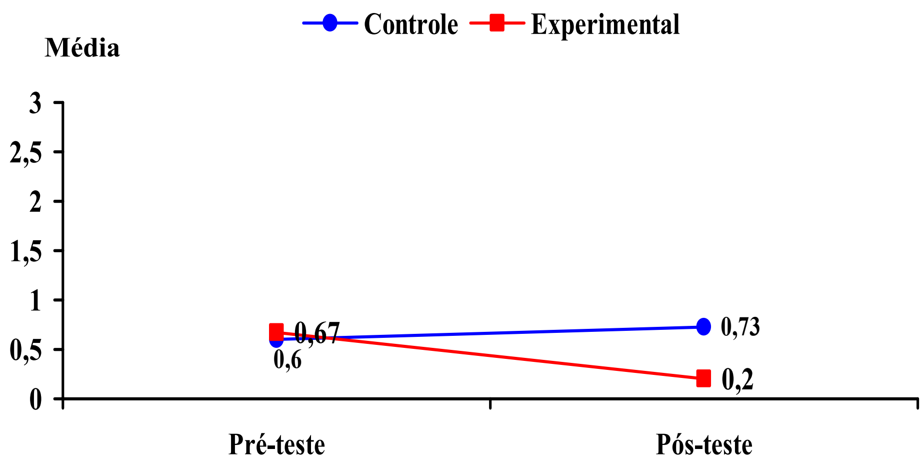


Figura 8. Interação Fase X Grupo (Tarefa 1 - Justificativa 1)

Essa interação mostra que a Justificativa 1 é menos freqüente no grupo experimental do que no grupo controle no pós-teste. Tomando esse resultado e o fato de haver uma diminuição de Justificativa 1 oferecida pelo grupo experimental quando se compara o pré-teste com o pós-teste, compreende-se que a intervenção foi eficaz de promover essa mudança qualitativa.

Justificativa 2

A Análise de Variância detectou efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 69.629; p= 0.000], ao Grupo [F (1.98) = 11.470; p = 0.001] e ao Problema [F (1.98) = 6.898; p= 0.010]. Verificou-se uma diminuição na freqüência de Justificativa 2 no pós-teste (média: 1.21) em relação ao pré-teste (média: 1.92) e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 1.30) em relação ao grupo controle (média: 1.84). Esses efeitos, como ilustra a Tabela 8, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um menor número de Justificativa 2.

O efeito do fator Problema ocorreu porque a Justificativa 2 foi mais observada em problemas de divisão por partição do que em problemas de divisão por quotas. A Tabela 7 mostra que, no pré-teste, as crianças de ambos os grupos fornecem mais Justificativa 2 nos problemas de divisão por partição. Entretanto, no pós-teste, as crianças que foram submetidas à intervenção passam a oferecer menos Justificativa 2 tanto para problemas de divisão por partição como nos de divisão por quotas; enquanto que as crianças do grupo controle continuam oferecendo mais a Justificativa 2 para os problemas de divisão por partição. É possível que esta mudança tenha ocorrido pelo fato da intervenção ter possibilitado à criança refletir igualmente sobre os tipos de problemas de divisão (partição e quotas).

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 46.465; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste ($p<.001$, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental ($p<.001$, intragrupo) (ver Figura 9).

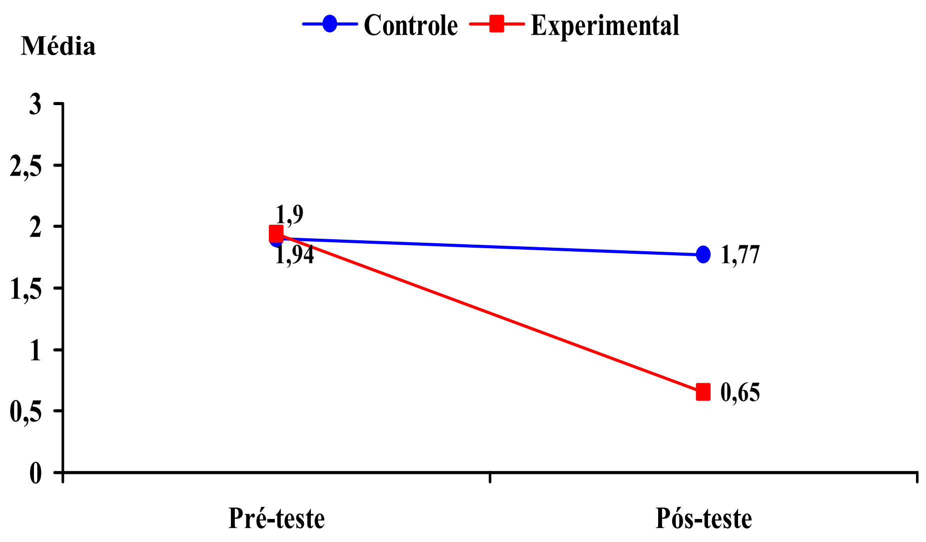


Figura 9. Interação Fase X Grupo (Tarefa 1 - Justificativa 2)

Essa interação mostra que as Justificativas 2 são substancialmente menos freqüentes no grupo experimental do que o grupo controle no pós-teste. Nota-se, também, a diminuição de Justificativa 2 do pré para o pós-teste no grupo experimental.

Justificativa 3

Identificaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 162.787; p = 0.000] e ao Grupo [F (1.98) = 37.996; p = 0.000], porém não em relação ao Problema [F (1.98) = 3.544; p = 0.063]. O efeito da Fase caracterizou-se por um aumento expressivo na freqüência de Justificativa 3 do pré-teste (média: 0.45) para o pós-teste (média: 1.33). O efeito do Grupo, por sua vez, caracterizou-se por um aumento expressivo de Justificativa 3 quando comparada a freqüência do grupo experimental (média: 0.50) com a freqüência do grupo controle (média: 1.27). Tais efeitos, como mostra Tabela 8, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um número maior de Justificativa 3 que expressa a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão.

A interação Fase x Grupo foi significativa [F (1.98) = 162.787; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré-teste e o pós-teste no grupo experimental (p<.001, intragrupo). Essa interação é ilustrada na Figura 10.

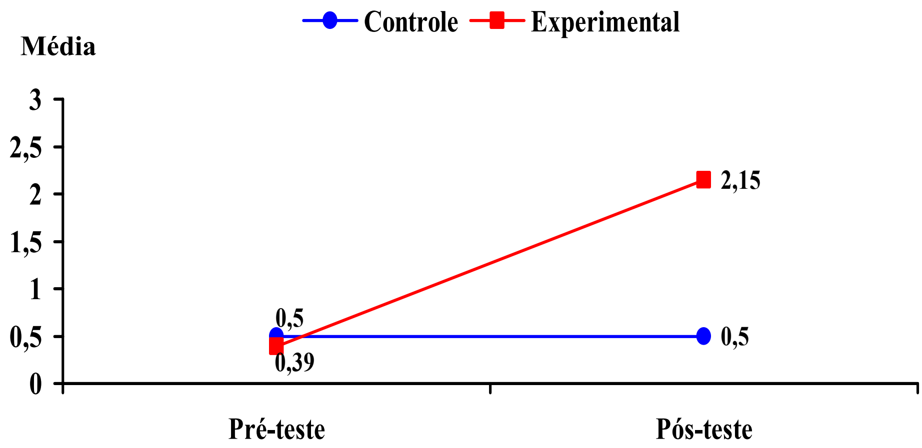


Figura 10. Interação Fase X Grupo (Tarefa 1 - Justificativa 3)

Verifica-se, a partir dessa interação, que a freqüência de Justificativa 3 no grupo experimental é maior do que no grupo controle no pós-teste. Observa-se, ainda, o aumento de Justificativa 3 no pós-teste em relação ao pré-teste no grupo experimental. De forma conjunta, esses resultados indicam que a intervenção favoreceu a compreensão da criança acerca das relações inversas existentes entre os termos da divisão.

6.1.3. Análise qualitativa da Justificativa 2

Como mencionado, a Justificativa 2 mereceu uma análise particular por ser a justificativa mais freqüente e por expressar as dificuldades que a criança apresenta com as relações inversas entre os termos da divisão. Enquanto a Justificativa 1 (imprecisa ou ausente) não permite compreender o raciocínio adotado pela criança ao lidar com as relações inversas, a Justificativa 2, por sua vez, permite compreender o raciocínio adotado e suas limitações, visto que tais justificativas revelam o tipo e erro experimentado pela criança, a saber: (i) considerar apenas um dos termos da divisão (dividendo ou divisor); (ii) considerar ambos os termos, confundindo os valores do tamanho da parte com o número de partes. A Tabela 9 fornece uma visão geral da distribuição dos diferentes tipos de erros que caracterizam a Justificativa 2.

Tabela 9 - Freqüência e percentual (entre parênteses) dos diferentes tipos de erros presentes na Justificativa 2 em ambos os grupos (GC e GE) no pré-teste e no pós-teste.

Fases	Grupos	Tipos de erros na Justificativa 2 **J2a** (confunde o tamanho da parte com o número de partes)	**J2b** (focaliza a atenção no valor do dividendo)	**J2c** (focaliza a atenção no maior divisor)
Pré-teste	**GC**	16 (4.2)	18 (4.7)	156 (40.6)
(n = 384)	**GE**	13 (3.4)	15 (3.9)	166 (43.2)
	Total	29 (7.6)	33 (8.6)	322 (83.8)
Pós-teste	**GC**	12 (5)	9 (4)	156 (64.4)
(n= 242)	**GE**	4 (1.6)	0 (0)	61 (25)
	Total	16 (6.6)	9 (4)	217 (89.4)

Nota-se, no pré-teste, que os percentuais de Justificativas J2a e J2b são relativamente próximos tanto no geral como em cada grupo de crianças. A maioria das respostas concentra-se na Justificativa 2c. Isso indica que o tipo de erro mais freqüente era focalizar a atenção no maior divisor que era fornecido no problema. O mesmo padrão de resultado é observado no pós-teste.

Entretanto, ao se comparar em cada grupo de crianças a freqüência de Justificativa 2 no pré e no pós-teste, nota-se que as crianças que participaram da intervenção (GE) reduziram o número de Justificativa 2c do pré-teste para o pós-teste; enquanto as crianças do grupo controle continuaram apresentando o mesmo número de Justificativa 2c no pré-teste e no pós-teste. A Justificativa 2b (atenção no valor do dividendo apenas) tende a diminuir do pré-teste para o pós-teste no grupo controle, estando ausente entre no pós-teste do grupo experimental.

De acordo com o exposto, pode-se dizer que a maior dificuldade das crianças reside em focalizar a atenção apenas no número do divisor (maior divisor), não considerando as relações deste com os demais termos da divisão. A intervenção foi capaz de auxiliar as crianças do grupo experimental a superar essas dificuldades.

6.1.4. Os avanços, permanências e regressões no emprego das justificativas no pré-teste e no pós-teste

Embora os dados sejam claros quanto aos ganhos das crianças do grupo experimental após a intervenção, é importante examinar a natureza dos avanços, as regressões identificadas e as permanências. Por avanço entende-se os casos de movimento de uma justificativa mais elementar no pré-teste para uma mais elaborada no pós-teste, por exemplo: da Justificativa 1 para a Justificativa 2, da Justificativa 2 para a Justificativa 3. Por regressão entende-se os casos de movimento de uma justificativa mais elaborada no pré-teste para uma mais elementar no pós-teste, por exemplo: da Justificativa 2 para a Justificativa 1, da Justificativa 3 para a Justificativa 2. Por permanência entende-se os casos em que a mesma justificativa é mantida tanto no pré-teste como no pós-teste.

A Tabela 10 apresenta a distribuição das justificativas em função dos avanços, das permanências e das regressões observadas quando se compara o pré-teste e o pós-teste.

Tabela 10 - Freqüência e percentual (entre parênteses) de avanços, permanências e regressões das justificativas nas duas fases na Tarefa 1.

Do pré para o pós-teste		Controle	Experimental
	J1 → J3	1 (0.5)	48 (22)
Avanços	J1 → J2	16 (7.5)	9 (4)
(n = 220)	J2 → J3	17 (8)	129 (58)
	Total[43]	**34 (11.3)**	**186 (62)**
	J1 → J1	43 (13)	10 (3)
Permanências	J2 → J2	151 (46)	56 (17)
(n = 330)	J3 → J3	32 (10)	38 (11)
	Total	**226 (75.3)**	**104 (34.7)**
	J3 → J1	8 (16)	1 (2)
Regressões	J3 → J2	10 (20)	0 (0)
(n = 50)	J2 → J1	22 (44)	9 (18)
	Total	**40 (13.3)**	**10 (3.3)**

De modo geral, os avanços são mais freqüentes no grupo experimental (62%) do que no grupo controle (11,3%); enquanto que os casos de permanência são mais freqüentes no grupo controle (75.3%) do que no experimental (34.7%). As regressões[44] foram raras nos dois grupos, especialmente entre as crianças do grupo experimental (3.3%).

As crianças do grupo controle continuam, no pós-teste, oferecendo Justificativa 2; isto é, continuam apresentando as mesmas dificuldades que experimentavam na primeira ocasião de testagem (pré-teste). As crianças do grupo experimental, por sua vez, apresentam avanços que se caracterizam por movimentos da Justificativa 2 para a Justificativa 3 (58%). Há poucos avanços da Justificativa 1 para as demais, como mostra a Tabela 10. Esses resultados sugerem

[43] Os percentuais apresentados nos totais para os avanços, permanências e regressões foram extraídos de n = 300.

[44] No momento, não se tem uma explicação para as regressões identificadas, visto que inúmeros fatores poderiam estar contribuindo para essas regressões: idiossincrasias, nível de motivação da criança. De qualquer forma, como documentado na literatura, regressões são difíceis de serem explicadas. No entanto, regressões passam a ser um problema para o pesquisador apenas quando muito freqüentes, o que não é o caso na presente investigação.

que a criança que em uma dada situação-problema oferece Justificativa 2 no pré-teste parece se beneficiar mais da intervenção do que quando oferece Justificativa 1. É possível que a Justificativa 2 indica a capacidade de atentar para os termos da divisão, incluindo-os no processo de resolução. Isso parece ser um primeiro passo para que avance para uma compreensão das relações inversas, o que ocorre quando tais relações são colocadas em evidência e tornam-se objetos de reflexão pela criança a partir da intervenção do adulto, como no caso da intervenção conduzida nesta pesquisa. Na Justificativa 1, por outro lado, a criança parece não atentar para os termos da divisão, sendo a intervenção de pouca ajuda.

Ao que parece, a natureza do avanço no grupo experimental mostra que as crianças deixam de focalizar a atenção em apenas um dos elementos presentes na situação-problema ou deixam de confundir os termos, passando a pensar sobre as relações inversas entre os termos da divisão. Em outras palavras, as crianças passam a compreender que um valor alto no divisor corresponde a um valor baixo no tamanho da parte (em problemas de divisão por partição) ou no número de partes formadas (em problemas de divisão por quotas) e vice-versa, quando o dividendo é mantido constante. Esses resultados sugerem que a intervenção auxiliou as crianças a tomar consciência da existência do invariante operatório da divisão (covariação entre os termos) que é crucial para o raciocínio da divisão enquanto operação matemática.

6.1.5. Relações entre o desempenho e as justificativas

O fato das justificativas terem, em certo sentido, um caráter hierárquico, sobretudo em relação à Justificativa 3 (nível de compreensão mais elaborado a respeito das relações inversas entre os termos da divisão), é interessante examinar se existiria alguma relação entre resposta correta e o tipo de justificativa, como ilustrado na Tabela 11.

Tabela 11- Freqüência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas e incorretas em cada justificativa na Tarefa 1.

Justificativas	Respostas	
	Correta	Incorreta
J1 (ausente ou imprecisa) (n = 220)	93 (42%)	127 (58%)
J2 (foco em um dos termos ou confunde ambos) (n = 626)	99 (16%)	527 (84%)
J3 (compreensão das relações inversas) (n = 354)	325 (92%)	29 (8%)

Em termos gerais, nota-se que a quase totalidade das Justificativas 3 (92%) é acompanhada de respostas corretas; enquanto a grande maioria das Justificativas 2 (84%) está associada a respostas incorretas. As Justificativas 1 podem tanto estar associadas a respostas corretas como incorretas. Na realidade, a ausência de justificativa não significa, necessariamente, uma dificuldade ou uma não compreensão da tarefa, podendo haver casos em que a criança sabe, porém não consegue explicitar verbalmente seu conhecimento. No entanto, são raros os casos em que o oposto ocorre, isto é, os casos em que a criança fornece uma justificativa mais elaborada e adequada, porém fornece uma resposta incorreta (resposta incorreta na Justificativa 3: 8%). Por outro lado, é possível pensar também que as respostas corretas nos casos em que a criança fornecia uma Justificativa 1 se devia a respostas ao acaso, visto que a falta de clareza e precisão de suas respostas podem estar relacionadas a uma incompreensão da criança acerca das relações inversas. Essas colocações explicam porque as Justificativas 1 tanto eram acompanhadas de respostas corretas como incorretas.

O fato da Justificativa 2 ser acompanhada de respostas incorretas parece ter uma explicação óbvia, visto que essas justificativas expressam as dificuldades que as crianças apresentam ao lidar com a divisão, como discutido anteriormente. O alto percentual de respostas corretas associado à Justificativa 3 mostra que as crianças que foram capazes de explicitar uma compreensão adequada acerca das relações inversas entre os termos, são também capazes de resolver com sucesso a situação-problema.

6.2. Comentários

O resultado mais importante derivado da aplicação da Tarefa 1 (Julgamento da Relações Inversas) foi que as crianças que participaram da intervenção alcançaram um nível de compreensão sobre as relações de covariação entre os termos da divisão mais elaborado do que as crianças do grupo controle, no pós-teste, considerando-se que em ambos os grupos as crianças apresentavam níveis semelhantes de dificuldades a respeito da divisão; e que as crianças do grupo experimental foram capazes de superar muitas das dificuldades experimentadas antes da intervenção.

O progresso das crianças que participaram da intervenção se expressou tanto em relação ao número de acertos quanto em relação às justificativas mais elaboradas. A intervenção propiciou o desenvolvimento de competências relativas à coordenação das relações entre os termos envolvidos na operação de divisão quer em relação a problemas de divisão por partição quer por divisão por quotas.

Merece destaque o fato da intervenção ter feito desaparecer a tendência da criança a considerar o tamanho do dividendo como um dos critérios adotados em seus julgamentos para avaliar as relações inversas entre os termos da divisão. Da mesma forma, merece destaque a persistência de um determinado tipo de erro entre as crianças do grupo experimental: algumas crianças, mesmo após a intervenção, continuaram focalizando a atenção no número de divisores. Embora no momento não se tenha uma explicação precisa para este fato, é possível que em termos do desenvolvimento conceitual, inicialmente, a criança concentre a atenção no valor do dividendo, em seguida no número de divisores até chegar à compreensão das relações existentes entre os termos da divisão. Essa possibilidade se apóia em dois pontos. Primeiro, as crianças que foram submetidas à intervenção deixam de adotar o valor do dividendo como critério de julgamento. Segundo, as crianças que mais se beneficiaram da intervenção foram as que estavam prestes a fazer a passagem da atenção focalizada no número de divisores (maior divisor) para a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão. É possível que, do ponto de vista cognitivo, a criança concentre sua atenção primeiro no maior valor apresentado na situação-problema (o valor do dividendo) e, em seguida, passe a pensar sobre o número de divisores, ancorando seu critério de julgamento no maior divisor.

Parte III: Tarefa 2 - Julgamento do significado do resto

Com a aplicação da presente tarefa pretendeu-se examinar se a intervenção fornecida ao grupo experimental auxiliaria as crianças a compreender o significado do resto, superando as dificuldades experimentadas. Importante ressaltar, como descrito no Capítulo 2, que parte da intervenção (Sessão 2) envolvia um conjunto de atividades que tinha por objetivo levar a criança a compreender o significado do resto.

Porém, antes de apresentar os resultados obtidos, é necessário descrever o sistema de análise adotado na Tarefa 2.

7. Sistema de Análise

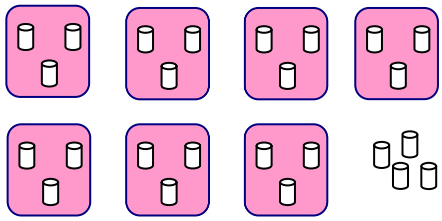
Semelhante à Tarefa 1, os dados foram analisados em função de dois aspectos distintos, porém complementares: o desempenho (número de acertos) e a natureza das respostas oferecidas. A análise das respostas considerou três aspectos: (a) o significado atribuído ao valor do resto (associado à matemática ou a situação-cotidiana); (b) violação dos invariantes operatórios da divisão; (c) o grau de precisão das respostas oferecidas. A combinação desses aspectos permitiu classificar as respostas em quatro diferentes tipos que são descritos e exemplificados a seguir a partir de extratos de protocolo das crianças.

Tipo 1 : ausência de resposta[45] ou respostas imprecisas em que não é possível identificar um significado matemático atribuído ao resto. Em geral, as respostas estão associadas aos aspectos gráficos pictóricos e/ou ao conhecimento físico. Exemplos:

---

[45] Ressalta-se que no total de 1200 respostas, apenas 13 no pré-teste (2.2%) e 6 no pós-teste (1%) apresentam ausência de resposta.

Exemplo 24: Problema de divisão por partição (Marcos tem 25 copos e quer colocá-los em 7 bandejas. Ele quer que cada bandeja tenha a mesma quantidade de copos. Quantos copos ele irá colocar em cada bandeja?)



E- “Quantos copos ele irá colocar em cada bandeja?”

C- “Uma.” [inaudível a última palavra]

E- “No problema que ela resolveu o que são esses copos ao lado?”

C- “Correção”

E- “Como assim?”

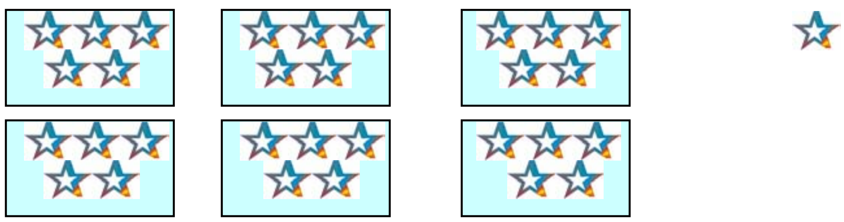
C- “Das bolas todas”

(Reprodução do protocolo 18, pré-teste, sexo masculino, 9 anos e 11 meses, GC)

A criança apresenta a resposta correta para o enunciado do problema e sua resposta para o significado do resto está associada ao conhecimento físico dos objetos.

<u>Tipo 2:</u> a resposta está associada a uma concepção que viola o princípio invariante da divisão a igualdade entre as partes.

Exemplo 25: Problema de divisão por quotas (Maria comprou 31 estrelinhas. Ela quer colocar 5 estrelinhas em cada caixa. Quantas caixas ela vai precisar?)



E- “Quantas caixas ela vai precisar?”

C- “Cinco.”

E- “No problema que ela resolveu o que é essa estrela ao lado?”

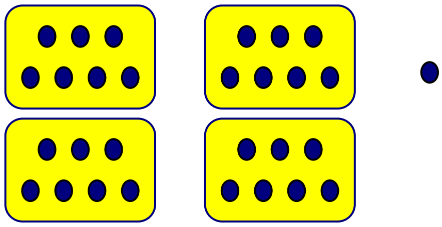
C- (Demorou a responder) “Mais uma”.

E- “Como assim, mais uma?”

C- “Se ela queria cinco estrelas em cada caixa, ela quer mais uma caixa para colocar a estrelinha” [refere-se à estrelinha que está ao lado, o resto].

(Reprodução do protocolo 18, pré-teste, sexo masculino, 9 anos e 11 meses, GC)

Exemplo 26: Problema de divisão por partição (João tem 29 bolas de gude e quer colocá-las em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de bolas de gude. Quantas bolas de gude ele irá colocar em cada caixa?)



E- "Quantas bolas de gude ele irá colocar em cada caixa?"

C- "Sete em cada."

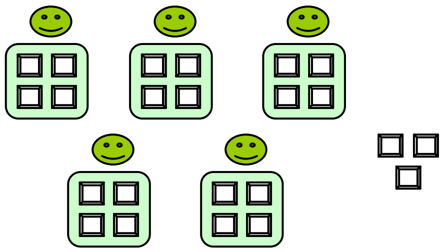
E- "No problema que ela resolveu o que é essa bola de gude ao lado?"

C- "Esse aqui ele esqueceu de botar."

(Reprodução do protocolo 37, pré-teste, sexo masculino, 9 anos e 9 meses, GC)

<u>Tipo 3:</u> a resposta para o significado do resto está associada a uma solução cotidiana.

Exemplo 27: Problema de divisão por partição (Tia Júlia comprou 23 livros para dar às suas 5 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de livros. Quantos livros cada sobrinha vai receber?)



E- "Quantos livros cada sobrinha vai receber?"

C- "Cada...quatro"

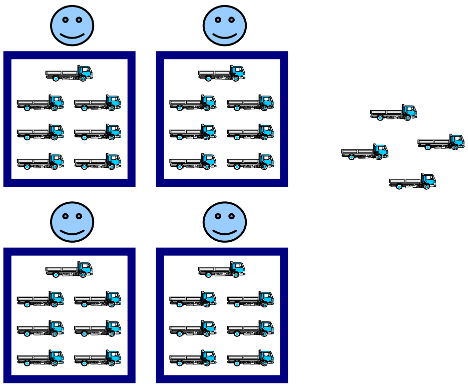
E- "No problema que ela resolveu o que são esses livros ao lado?"

C- "Esse três livros fica de fora. Assim se... a tia dela quiser dar pra algum amigo dela ou se quiser dar pra outro irmão, sei lá um sobrinho, para um [inaudível a última palavra]".

(Reprodução do protocolo 64, pré-teste, sexo feminino, 10 anos e 2 meses, GE)

A criança apresenta uma solução do cotidiano na qual a quantidade que sobra poderá ser distribuída para outra pessoa.

Exemplo 28: Problema de divisão por quotas (Juca comprou 32 caminhões. Ele quer dar 7 caminhões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os caminhões?)



E- "Quantos amigos vão ganhar os caminhões?"

C- "Sete."

E- "No problema que ela resolveu o que são esses caminhões ao lado?"

C- "Se colocar um nesses fica oito, botar um em cada um".

E- "E pode fazer isso?"

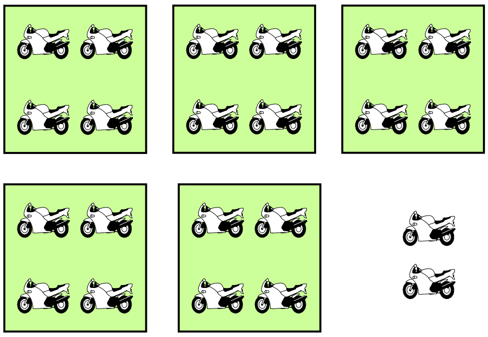
C- "Eu acho que pode."

(Reprodução do protocolo 16, pré-teste, sexo feminino, 10 anos, GC)

A criança não responde corretamente ao enunciado do problema e ao responder sobre o significado do resto expressa a noção de que as partes não podem ser divididas em quantidades diferentes, ou seja, a noção de igualdade não pode ser violada, nem que para isso altere o valor do tamanho da quota (dar mais um caminhão para cada amigo).

Tipo 4: a resposta está associada ao significado matemático na qual os princípios invariantes da divisão não podem ser violados. Esta definição é apresentada através da terminologia usada na matemática ("o resto", "o que sobrou", "a quantidade que sobra"), podendo a resposta estar acompanhada ou não da explicitação de um dos princípios invariantes da divisão, ou seja, as respostas variavam em função do grau de explicitude verbal apresentado, como ilustra os exemplos:

Exemplo 29: Problema de divisão por quotas (Luciano tem 22 motos de brinquedo. Ele quer guardar 4 motos em cada caixa**.** Quantas caixas ele irá precisar?)



E- "Quantas caixas ele irá precisar?"

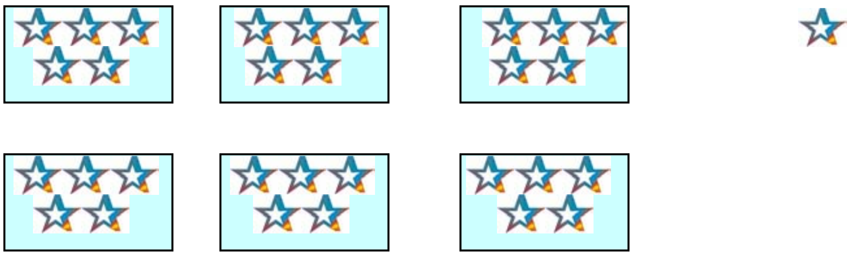
C- "Cinco".

E- "No problema que ela resolveu o que são essas motos ao lado?"

C- "O resto que não pode ficar dentro da caixa senão vai ficar a quantidade diferente".

(Reprodução do protocolo 59, pós-teste, sexo feminino, 9 anos e 5 meses, GE)

Exemplo 30: Problema de divisão por quotas (Maria comprou 31 estrelinhas. Ela quer colocar 5 estrelinhas em cada caixa. Quantas caixas ela vai precisar?)



E- "Quantas caixas ela vai precisar?"

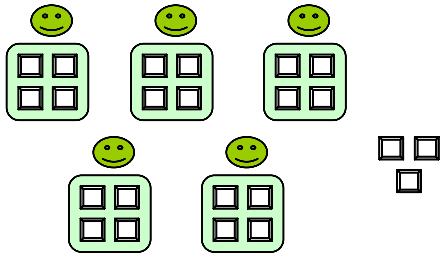
C- "De seis caixas"

E- "No problema que ela resolveu o que é essa estrela ao lado?"

C- É a sobra do que... como ela queria que cada caixa tenha a mesma quantidade ela não pode colocar essa estrelinha, porque senão não vai ficar a mesma quantidade.

(Reprodução do protocolo 48, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 1 mês, GC)

Exemplo 31: Problema de divisão por partição (Tia Júlia comprou 23 livros para dar às suas 5 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de livros. Quantos livros cada sobrinha vai receber?)



E- "Quantos livros cada sobrinha vai receber?"

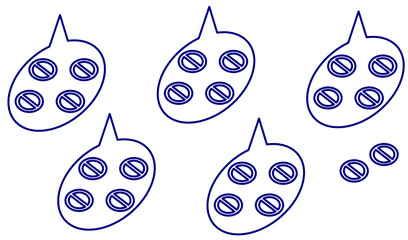
C- "Quatro"

E- "No problema que ela resolveu o que são esses livros ao lado?"

C- "Não deu pra botar, não deu pra dividir porque ela tinha cinco sobrinha e tinha vinte e três..., aí cada uma ficou com quatro, sobrou três."

(Reprodução do protocolo 79, pré-teste, sexo feminino, 11 anos, GE)

Exemplo 32: Problema de divisão por quotas (Vovó tem 22 botões. Ela quer guardar 4 botões em cada saquinho. Quantos saquinhos ela irá precisar?)



E- "Quantos saquinhos ela irá precisar?"

C- "Cinco"

E- "No problema que ela resolveu o que são esses botões ao lado?"

C- "Foi o que sobrou."

(Reprodução do protocolo 65, pré-teste, sexo feminino, 10 anos e 3 meses, GC)

As 1200 respostas oferecidas pelas crianças (600 no pré-teste e 600 no pós-teste) foram analisadas por dois juizes independentes cujo percentual de concordância foi de 91,1%. Os julgamentos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada final.

7.1. Resultados

Os dados foram analisados em função de duas variáveis: o tipo de problema (partição e quotas) e o tamanho do resto (pequeno, intermediário e grande). Inicialmente são apresentados os resultados relativos ao tipo de problema e em seguida, os resultados relativos ao tamanho do resto.

7.1.1. Tipos de problemas: partição e quotas

7.1.1.1. Desempenho

A Tabela 12 apresenta o desempenho na Tarefa 2 em função dos tipos de problemas.

Tabela 12- Média de acertos (máximo: 3) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e tipo de problema no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 2.

		Tipos de problemas		
Fases	**Grupos**	**Partição**	**Quotas**	**Total**
	GC	**1.66**	**1.64**	**1.65**
		(1.189)	(0.942)	(1.066)
Pré-teste	**GE**	**1.94**	**1.70**	**1.82**
		(1.077)	(1.055)	(1.066)
	Total	**1.80**	**1.67**	**1.74**
		(1.133)	(0.999)	1.066)
	GC	**2.14**	**1.88**	**2.01**
		(1.195)	(1.172)	(1.184)
Pós-teste	**GE**	**2.82**	**2.78**	**2.80**
		(0.438)	(0.465)	(0.452)
	Total	**2.48**	**2.33**	**2.41**
		(0.817)	(0.819)	(0.818)

A fim de averiguar estatisticamente as diferenças entre o número de acertos no pré-teste foram realizadas separadamente duas Análises de Variância a uma via, considerando-se o número de acertos como variável dependente, tanto para os problemas de divisão por partição como para os problemas de divisão por quotas, e o grupo (GC e GE) como variável independente. Os resultados não apontam diferenças significativas entre os grupos tanto nos problemas de divisão por partição [F (1.98) = 1.524; p = 0.220] como nos problemas de divisão por quotas [F (1.98) = 0.090; p = 0.765]. Esses resultados indicam que no pré-teste os dois grupos apresentam desempenhos semelhantes para identificar a resolução correta de problemas de divisão com resto, tanto nos problemas de divisão por partição como nos problemas de divisão por quotas.

Foi realizada uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Problema (2: partição e quotas), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise produziu efeitos principais significativos para Fase [F (1.98) = 87.113; p = 0.000; média no pré 1.74 e média no pós: 2.41] e Grupo [F (1.98) = 10.752; p = 0.001; média no grupo controle: 1.83 e média no grupo experimental: 2.31].

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 18.649; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou que o número de acertos no grupo experimental foi superior ao número de acertos no grupo controle no pós-teste (p <. 001) (médias: 2.80 e 2.01, respectivamente) e que ambos os grupos apresentaram um desempenho superior no pós-teste quando comparado ao pré-teste (p<.001) (grupo controle - média no pós: 2.01 e média no pré: 1.65; grupo experimental - média no pós: 2.80 e média no pré: 1.82). Não foram observadas diferenças significativas entre os grupos no pré-teste (p > .05). Essa interação é ilustrada na Figura 11.

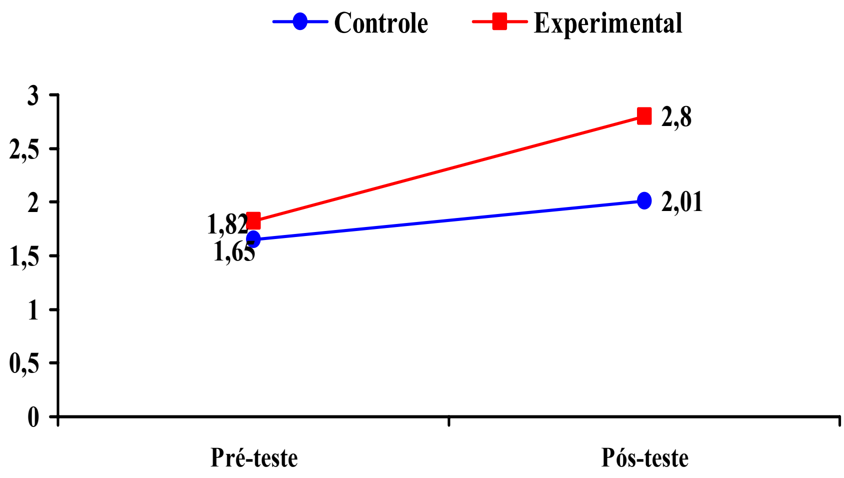


Figura 11. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 – Desempenho)

Considerando-se o aumento no número de acertos do pré-teste para o pós-teste no grupo experimental conclui-se que a intervenção foi capaz de propiciar uma melhora no desempenho das crianças.

7.1.1.2. Respostas

Inicialmente, os quatro tipos de respostas foram examinados a partir de uma Análise de Variância, cuja distribuição é apresentada na Tabela 13 e na Tabela 14.

Tabela 13 - Média de respostas (máximo: 3) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e tipo de problema no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 2.

	Pré- teste			
	Controle		**Experimental**	
Respostas	**Partição**	**Quotas**	**Partição**	**Quotas**
Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	**1.14** (1.143)	**1.06** (1.202)	**0.94** (1.150)	**0.96** (1.245)
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade)	**0.12** (0.385)	**0.14** (0.405)	**0.10** (0.303)	**0.02** (0.141)
Tipo 3 (solução cotidiana)	**0.26** (0.487)	**0.28** (0.640)	**0.40** (0.782)	**0.64** (0.875)
Tipo 4 (significado matemático)	**1.48** (1.266)	**1.52** (1.297)	**1.56** (1.343)	**1.38** (1.323)
	Pós- teste			
Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	**0.94** (1.236)	**0.88** (1.206)	**0.12** (0.594)	**0.10** (0.463)
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade)	**0.10** (0.303)	**0.12** (0.435)	**0.00** (0.000)	**0.00** (0.000)
Tipo 3 (solução cotidiana)	**0.28** (0.497)	**0.32** (0.683)	**0.02** (0.141)	**0.08** (0.274)
Tipo 4 (significado matemático)	**1.68** (1.332)	**1.68** (1.332)	**2.86** (0.606)	**2.82** (0.560)

Como mostra a Tabela 13, no pré-teste, no interior de cada tipo de resposta comparou-se os dois grupos em relação a cada tipo de problema (partição e quotas) através de uma Análise de Variância a uma via[46]. No Tipo 1, os grupos não diferem significativamente em relação ao problema de divisão por partição [F (1.98) = 0.761; p = 0.385] nem em relação ao problema de divisão por quotas [F (1.98) = 0.167; p = 0.684]. O mesmo padrão de resultados foi observado em relação ao Tipo 2 {partição [F (1.98) = 0.083; p = 0.774]} e quotas {[F (1.98) = 3.920; p = 0.51]} e em relação ao Tipo 4 {partição [F (1.98) = 0.94; p = 0.760] e quotas [F (1.98) = 0.285; p = 0.594]}. No Tipo 3, não foi detectado diferenças significativas nos problemas de divisão por partição [F (1.98) = 1.154; p = 0.285]; entretanto foi detectado

[46] Um total de oito Análises de Variância foram aplicadas, duas no interior de cada um dos quatro tipos de respostas.

diferenças entre os grupos nos problemas de divisão por quotas [$\underline{F}$ (1.98) = 5.513; $\underline{p}$ = 0.021]. Esses resultados mostram que os grupos não diferem significativamente em relação ao significado atribuído ao resto em problemas de divisão por partição quanto aos quatro tipos de respostas e apontam diferenças significativas apenas em relação aos problemas de divisão por quotas no Tipo 3 (solução cotidiana). Como pode ser observado, na Tabela 13 as crianças do grupo experimental oferecem mais respostas associadas a uma solução cotidiana para o resto em problemas de divisão por quotas do que as crianças do grupo controle. No momento, não se dispõe de uma explicação para este resultado.

A Tabela 14 apresenta a distribuição de respostas em função dos grupos e das fases.

Tabela 14 - Média de respostas (máximo: 3) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 2.

	Pré-teste			**Pós-teste**		
Respostas	**GC**	**GE**	**Total**	**GC**	**GE**	**Total**
Tipo 1	**1.10**	**0.95**	**1.03**	**0.91**	**0.11**	**0.51**
(imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	(1.173)	(1.198)	(1.186)	(1.221)	(0.589)	(0.905)
Tipo 2	**0.13**	**0.06**	**0.10**	**0.11**	**0.00**	**0.06**
(concepção que viola o princípio da igualdade)	(0.395)	(0.222)	(0.309)	(0.369)	(0.000)	(0.185)
Tipo 3	**0.27**	**0.52**	**0.40**	**0.30**	**0.05**	**0.18**
(solução cotidiana)	(0.564)	(0.829)	(0.697)	(0.590)	(0.208)	(0.399)
Tipo 4	**1.50**	**1.47**	**1.49**	**1.68**	**2.84**	**2.26**
(significado matemático)	(1.282)	(1.333)	(1.308)	(1.332)	(0.583)	(0.958)

Os dados também foram submetidos a uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Problema (2: partição e quotas), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise foi realizada considerando como variável dependente cada uma das respostas (Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3 e Tipo 4), separadamente, tanto para os problemas de divisão por partição como para os problemas de divisão por quotas. Os resultados indicaram efeitos significativos para os quatro tipos de respostas, como descrito a seguir:

Tipo 1

Identificaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 30.165; p = 0.000]e ao Grupo [F (1.98) = 6.802; p = 0.011], porém não em relação ao Problema [F (1.98) = 0.500; p = 0.481]. Verificou-se uma diminuição na freqüência de respostas ausentes e imprecisas (Tipo 1) no pós-teste (média: 0.51) em relação ao pré-teste (média: 1.03), e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 0.53) em relação ao grupo controle (média: 1.01). Esses efeitos, como ilustra a Tabela 14, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um número menor de respostas imprecisas, ausentes ou que contemplam aspectos gráficos (Tipo 1).

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 12.013; p = 0.001]. O Teste de Tukey revelou diferenças entre os grupos no pós-teste (p <.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p <.001, intragrupo) (ver Figura 12).

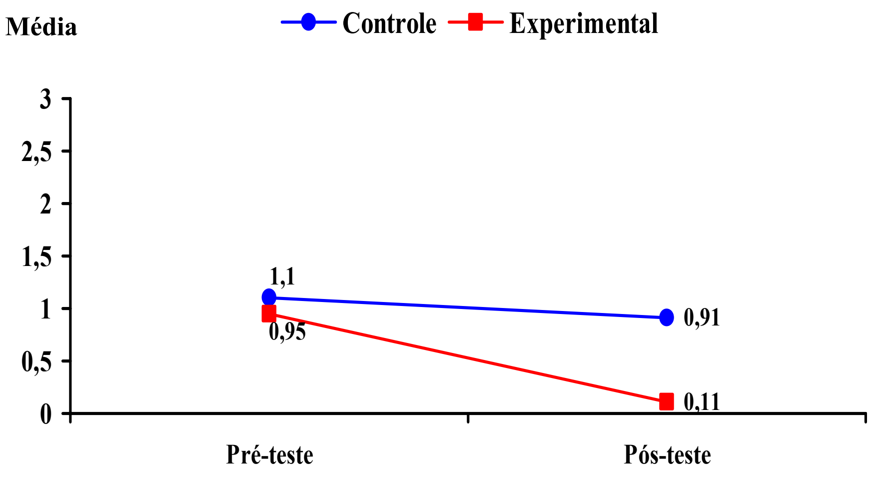


Figura 12. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 - Tipo 1)

Essa interação demonstra o quanto a freqüência de respostas imprecisas, ausentes ou que contemplam aspectos gráficos dada pelo grupo experimental é expressivamente menor do que no grupo controle no pós-teste.

Tipo 2

Não foram detectados efeitos significativos para Fase [F (1.98) = 3.267; p = 0.074] nem para o tipo de Problema [F (1.98) = 0.166; p = 0.684], no entanto, detectou-se um efeito principal em relação ao Grupo [F (1.98) = 4.191; p = 0.043]. Como pode ser visto na Tabela 13, as crianças que foram submetidas à intervenção não mais oferecem respostas Tipo 2 no pós-teste; enquanto que as crianças do grupo controle continuam oferecendo respostas na qual o significado do resto está associado a uma concepção que viola o princípio invariante da igualdade entre as partes ou tamanho das partes. Esse resultado sugere que a intervenção auxiliou as crianças a tomar consciência da existência do invariante operatório relativo à igualdade entre as partes.

Tipo 3

Não foram detectados efeitos significativos para Grupo [F (1.98) = 0.000; p = 1.000] nem para o tipo de Problema [F (1.98) = 3.722; p = 0.057], no entanto, detectou-se um efeito principal em relação à Fase [F (1.98) = 15.598; p = 0.000]. Esse efeito caracterizou-se por uma diminuição na freqüência de respostas do Tipo 3 (significado associado a uma solução cotidiana) no pós-teste (média: 0.18) quando comparada ao pré-teste (média: 0.40), como mostra a Tabela 14. Esse resultado sugere que após a intervenção as crianças do grupo experimental fornecem um menor número de respostas do Tipo 3 (significado associado a uma solução cotidiana).

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 20.141; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças entre os grupos no pós-teste (p <.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p <.001, intragrupo), como ilustra a Figura 13.

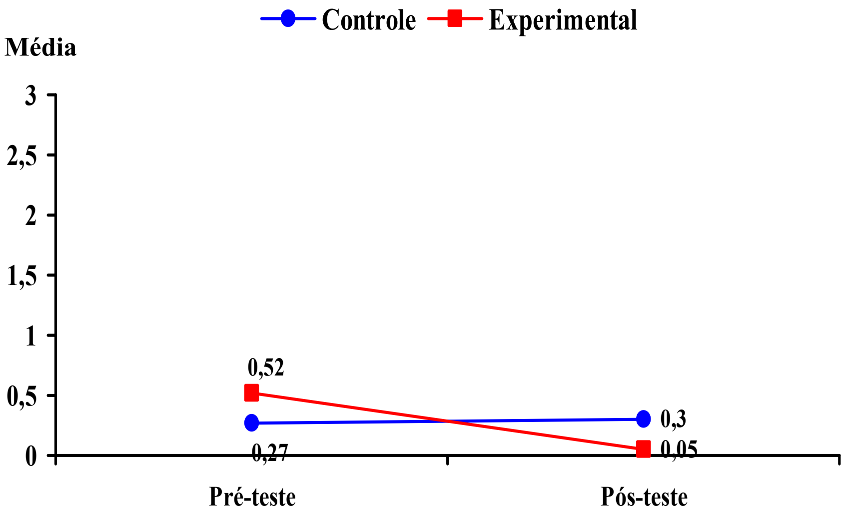


Figura 13. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 - Tipo 3)

Como mostra a Figura 13, essa interação demonstra que no pré-teste o grupo experimental apresenta uma freqüência maior de respostas associadas a uma solução cotidiana quando comparada a freqüência do grupo controle (médias: 0.52 e 0.27, respectivamente); enquanto que no pós-teste constata-se que o grupo experimental diminui expressivamente a freqüência de respostas associada a uma solução cotidiana.

Tipo 4

Identificaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 65.558; p = 0.000] e ao Grupo [F (1.98) = 7.505; p = 0.007], porém não em relação ao tipo de Problema [F (1.98) = 0.774; p = 0.381]. O efeito da Fase caracterizou-se por um aumento expressivo na freqüência de respostas Tipo 4 do pré-teste (média: 1.49) para o pós-teste (média: 2.26). O efeito do Grupo, por sua vez, caracterizou-se por um grande número de respostas associadas a um significado matemático (Tipo 4) quando comparada a freqüência do grupo experimental (média: 2.16) com à freqüência do grupo controle (média: 1.59). Esses efeitos, como mostra a Tabela 13, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um número maior de respostas associadas a um significado matemático (Tipo 4), expressando uma compreensão acerca do significado do resto.

A interação Fase X Grupo foi significativa [$\underline{F}$ (1.98) = 38.642; $\underline{p}$ = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 14).

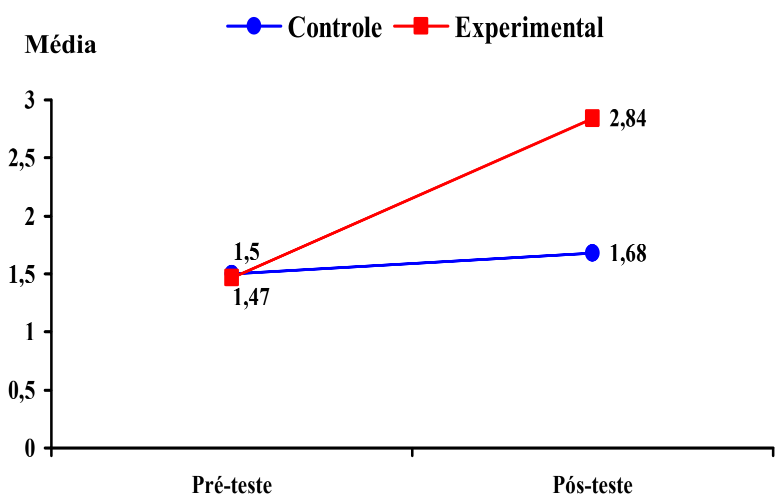


Figura 14. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 - Tipo 4)

Constata-se, a partir dessa interação, que a freqüência de respostas Tipo 4 dada pelo grupo experimental é maior do que a do grupo controle no pós-teste (médias: 2.84 e 1.68, respectivamente). Nota-se, ainda, o aumento na freqüência de respostas Tipo 4 no pós-teste (média: 2.84) em relação ao pré-teste (média: 1.47) no grupo experimental. De forma conjunta, esses resultados indicam que a intervenção auxiliou as crianças a compreender o significado do resto.

7.1.2. Tamanho do resto

Neste tópico são apresentados os resultados relativos à variável tamanho do resto, que se caracterizava da seguinte forma: resto pequeno (um elemento), resto intermediário (dois ou três elementos) e resto grande (quatro elementos).

7.1.2.1. Desempenho

A Tabela 15 apresenta o desempenho na Tarefa 2 em função do tamanho do resto.

Tabela 15- Média de acertos (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e tamanho do resto no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 2.

Fases	Grupos	Tamanho do resto[47] R 1 (resto pequeno)	R 2 (resto intermediário)	R3 (resto grande)	Total
Pré-teste	GC	**1.26** (0.777)	**1.16** (0.817)	**0.88** (0.718)	**1.10** (0.771)
	GE	**1.22** (0.815)	**1.38** (0.753)	**1.04** (0.638)	**1.21** (0.735)
	Total	**1.24** (0.796)	**1.27** (0.785)	**0.96** (0.678)	**1.16** (0.753)
Pós-teste	GC	**1.44** (0.760)	**1.42** (0.758)	**1.16** (0.817)	**1.34** (0.778)
	GE	**1.88** (0.328)	**1.88** (0.385)	**1.84** (0.370)	**1.87** (0.361)
	Total	**1.66** (0.544)	**1.65** (0.572)	**1.50** (0.594)	**1.61** (0.570)

No pré-teste, comparações entre os grupos em cada tamanho do resto (pequeno, intermediário e grande) foram examinadas através de uma Análise de Variância a uma via (totalizando três análises). Não foram identificadas diferenças significativas entre os grupos para cada um dos tamanhos do resto: pequeno [F (1.98) = 0.063; p = 0.802], intermediário [F (1.98) = 1.960; p = 0.165] e grande [F (1.98) = 1.388; p = 0.242]. Constata-se, portanto, que

[47] Resto pequeno será denominado R1, resto intermediário será denominado R2 e resto grande será denominado R3.

no pré-teste os dois grupos apresentam desempenhos aproximados quando o que está em evidencia é o tamanho do resto.

Foi realizada uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Condição (tamanho do resto) (3 : pequeno; intermediário e grande), sendo os últimos dois fatores (Fase e Condição) do tipo intra-sujeitos. Essa análise produziu efeitos principais significativos para Fase [F (1.98) = 87.113; p = 0.000], Grupo [F (1.98) = 10.752; p = 0.001] e Condição [F (2.97) = 9.255; p = 0.000; média resto pequeno: 1.45; média resto intermediário: 1.46 e média resto grande: 1.23]. Verificou-se um aumento no número de acertos no pós-teste (média: 1.61) em relação ao pré-teste (média: 1.16) e um número maior de acertos no grupo experimental (média: 1.54) em relação ao grupo controle (média: 1.22). Esses resultados devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental apresentam um número maior de acertos (Tabela 14).

Quanto ao efeito Condição (tamanho do resto) o Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre R3 vs. R1 (médias: 1.23 e 1.45; $p < .001$) e entre o R3 vs. R2 (médias: 1.23 e 1.46, $p < .001$). Esse efeito ocorreu porque as crianças de ambos os grupos, tanto no pré-teste como no pós-teste, apresentaram um número de acertos menor quando o resto é considerado grande (quatro elementos) (ver Tabela 14).

Foi observada uma interação significativa para Fase X Grupo [F (1.98) = 18.649; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou que o número de acertos no grupo experimental foi superior ao número de acertos no grupo controle no pós-teste ($p < .001$, intergrupo) (médias: 1.87 e 1.34, respectivamente) e que ambos os grupos apresentaram um desempenho superior no pós-teste quando comparado ao pré-teste ($p < .001$, intragrupo) (grupo controle - média no pós: 1.34 e média no pré: 1.10; grupo experimental - média no pós: 1.87 e média no pré: 1.21).

Não foram observadas diferenças significativas entre os grupos no pré-teste (p >.05). Essa interação é ilustrada na Figura 15.

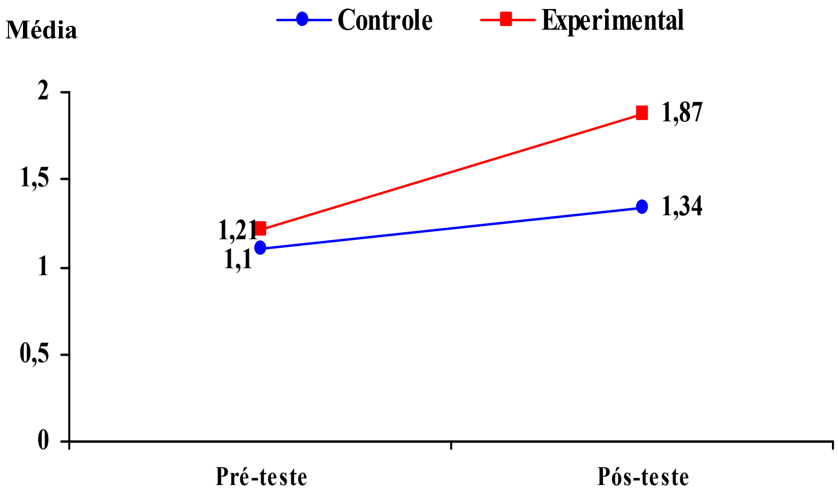


Figura 15. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 – Desempenho : tamanho do resto)

Considerando-se o aumento no número de acertos do pré para o pós-teste no grupo experimental, conclui-se que a intervenção foi capaz de propiciar uma melhora no desempenho das crianças quando o que está em evidência é o tamanho do resto.

7.1.2.2. Respostas

A Tabela 16 apresenta a distribuição das respostas em função do tamanho do resto (pequeno, intermediário e grande) apresentado nos itens[48].

[48] Itens referem-se a cada um dos problemas apresentados às crianças.

Tabela 16 - Média de respostas (máximo: 2) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e tamanho do resto no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 2.

	Controle			Experimental		
Respostas	**R1**	**R2**	**R3**	**R1**	**R2**	**R3**
Pré- teste						
Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	**0.70** (0.814)	**0.70** (0.863)	**0.80** (0.881)	**0.66** (0.848)	**0.60** (0.808)	**0.64** (0.827)
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade)	**0.10** (0.364)	**0.14** (0.405)	**0.02** (0.141)	**0.06** (0.240)	**0.02** (0.141)	**0.04** (0.198)
Tipo 3 (solução cotidiana)	**0.08** (0.274)	**0.16** (0.468)	**0.30** (0.505)	**0.28** (0.607)	**0.30** (0.580)	**0.46** (0.613)
Tipo 4 (significado matemático)	**1.12** (0.918)	**1.00** (0.926)	**0.88** (0.895)	**1.00** (0.926)	**1.08** (0.944)	**0.86** (0.881)
Pós- teste						
Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	**0.64** (0.851)	**0.58** (0.810)	**0.60** (0.881)	**0.06** (0.314)	**0.08** (0.396)	**0.08** (0.340)
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade)	**0.14** (0.405)	**0.08** (0.274)	**0.00** (0.000)	**0.00** (0.000)	**0.00** (0.000)	**0.00** (0.000)
Tipo 3 (solução cotidiana)	**0.08** (0.274)	**0.16** (0.468)	**0.36** (0.631)	**0.00** (0.000)	**0.00** (0.000)	**0.10** (0.303)
Tipo 4 (significado matemático)	**1.14** (0.926)	**1.18** (0.941)	**1.04** (0.903)	**1.94** (0.314)	**1.92** (0.396)	**1.82** (0.482)

Como mostra a Tabela 16, no pré-teste, no interior de cada tipo de resposta comparou-se os dois grupos em relação ao tamanho do resto (pequeno, intermediário e grande) através de uma Análise de Variância a uma via[49]. Os resultados dessas análises mostrou haver diferenças significativas apenas na resposta Tipo 3 (significado do resto associado a uma solução cotidiana) quando o resto é pequeno (R1), como ilustra o Quadro 15.

[49] Um total de doze Análises de Variância foram aplicadas, três no interior de cada um dos tipos de resposta.

Respostas	Tamanho do resto	Significância
Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	R1	[F (1.98) = 0.058; p = 0.810]
	R2	[F (1.98) = 0.358; p = 0.551]
	R3	[F (1.98) = 0.877; p = 0.351]
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade)	R1	[F (1.98) = 0.421; p = 0.518]
	R2	[F (1.98) = 3.920; p = 0.051]
	R3	[F (1,98) = 0.338; p = 0.562]
Tipo 3 (solução cotidiana)	R1	**[F (1.98) = 4.504; p = 0.036]**
	R2	[F (1.98) = 1.,764; p = 0.187]
	R3	[F (1.98) = 2.,028; p = 0.158]
Tipo 4 (significado matemático)	R1	[F (1.98) = 0.424; p = 0.517]
	R2	[F (1.98) = 0.183; p = 0.670]
	R3	[F (1.98) = 0.013; p = 0.911]

Nota: R1 (resto pequeno), R2 (resto intermediário) e R3 (resto grande)

Quadro 15. Resultados estatísticos da Análise de Variância a uma via (Tarefa 2).

Esses resultados mostram que, no pré-teste, os grupos não diferem significativamente em relação ao significado atribuído ao resto quando este é considerado intermediário ou grande nos quatro tipos de respostas. Como consta na Tabela 15, quando o resto é considerado pequeno as crianças do grupo experimental oferecem mais respostas associadas a uma solução cotidiana do que as crianças do grupo controle.

A Tabela 17 apresenta a distribuição das respostas em função dos grupos e das fases.

Tabela 17 - Média de respostas (máximo: 2) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo no pré-teste e no pós-teste considerando-se o tamanho do resto na Tarefa 2.

	Pré-teste			**Pós-teste**		
Respostas	**GC**	**GE**	**Total**	**GC**	**GE**	**Total**
Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos)	**0.73** (0.853)	**0.63** (0.828)	**0.68** (0.841)	**0.61** (0.847)	**0.07** (0.350)	**0.34** (0.599)
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade)	**0.09** (0.303)	**0.04** (0.193)	**0.07** (0.248)	**0.07** (0.226)	**0.00** (0.000)	**0.04** (0.113)
Tipo 3 (solução cotidiana)	**0.18** (0.416)	**0.35** (0.600)	**0.27** (0.508)	**0.20** (0.458)	**0.03** (0.101)	**0.12** (0.280)
Tipo 4 (significado matemático)	**1.00** (0.913)	**0.98** (0.634)	**0.99** (0.773)	**1.12** (0.923)	**1.89** (0.397)	**1.50** (0.660)

Os dados foram submetidos a uma Análise de Variância a três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Condição (3: resto pequeno, resto intermediário e resto grande), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos (Fase e Condição). Essa Análise de Variância foi realizada, separadamente, considerando como variável dependente cada um dos tipos de respostas (Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3 e Tipo 4) para cada um dos tamanhos do resto (R1, R2 e R3). Os resultados indicaram efeitos significativos para os quatro tipos de respostas, como descrito a seguir:

Tipo 1

Verificaram-se efeitos principais em relação à Fase [$\underline{F}$ (1.98) = 30.165; $\underline{p}$ = 0.000] e ao Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 6.802; $\underline{p}$ = 0.011], porém não em relação à Condição (tamanho do resto) [$\underline{F}$ (2.97) = 0.548; $\underline{p}$ = 0.580]. Observou-se uma diminuição na freqüência de respostas ausentes e imprecisas (Tipo 1) no pós-teste (média: 0.34) quando comparada ao pré-teste (média: 0.68) e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 0.35) em relação ao grupo controle (média: 0.67). Esses efeitos, como ilustra a Tabela 17, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental ofereceram um número menor de respostas imprecisas, ausentes ou que contemplam aspectos gráficos (Tipo 1).

A interação Fase X Grupo foi significativa [$\underline{F}$ (1.98) = 12.013; $\underline{p}$ = 0.001]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste ($p<.001$, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental ($p<.001$, intragrupo) (ver Figura 16).

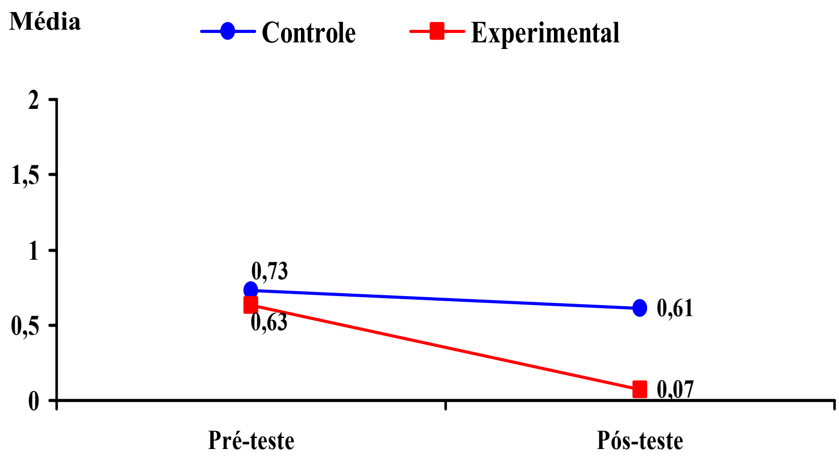


Figura 16. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 - Tipo 1: tamanho do resto)

Essa interação demonstra uma baixa na freqüência de respostas do Tipo 1 (imprecisa, ausente ou que contempla aspectos gráficos) em ambos os grupos no pós-teste, considerando-se os três tamanhos de resto. Nota-se, ainda, que a freqüência de respostas do Tipo 1 oferecida pelo grupo experimental é expressivamente menor do que no grupo controle no pós-teste.

Tipo 2

Não foram detectados efeitos significativos para Fase [$\underline{F}$ (1.98) = 3.267; $\underline{p}$ = 0.074] e Condição (tamanho do resto) [$\underline{F}$ (2.97) = 2.782; $\underline{p}$ = 0.067], no entanto, detectou-se um efeito principal em relação ao Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 4.191; $\underline{p}$ = 0.043]. Como mostra a Tabela 16, o grupo experimental no pós-teste, não oferece respostas do Tipo 2 para os três tamanhos de resto; enquanto que o grupo controle continua oferecendo resposta associada a uma concepção que viola o princípio de igualdade entre as partes ou tamanho entre as partes quando o resto é pequeno (R1) e intermediário (R2). Esse resultado aponta que a intervenção foi capaz de auxiliar as crianças a tomar consciência da existência do invariante operatório (igualdade entre as partes ou tamanho das partes) que precisa ser respeitado durante o raciocínio multiplicativo.

Tipo 3

Detectaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 15.598; p = 0.000] e em relação à Condição (tamanho do resto) [F (2.97) = 10.827; p = 0.000; média no resto pequeno: 0.11; média no resto intermediário: 0.15 e média no resto grande: 0.31], porém não em relação ao Grupo [F (1.98) = 0.000; p = 1.000]. O efeito Fase caracterizou-se por uma diminuição na freqüência de respostas Tipo 3 no pós-teste (média: 0.12) quando comparada ao pré-teste (média: 0.27), como mostra a Tabela 17. Esse resultado sugere que após a intervenção as crianças do grupo experimental forneceram um menor número de respostas associadas a uma solução cotidiana.

O Teste de Tukey revelou que na Condição existem diferenças significativas apenas entre R3 vs. R2 (médias: 1.15 e 1.30; p <.001) e entre R3 vs. R1 (médias: 1.15 e 1.30; p <.001). Como pode ser constatado na Tabela 16, é provável que essa diferença ocorreu porque as crianças do grupo controle continuam associando o significado do resto a uma solução cotidiana independente do tamanho do resto; enquanto as crianças que foram submetidas à intervenção deixam de oferecer essa resposta para o resto pequeno e intermediário e diminuem este tipo de resposta (Tipo 3) para o resto grande na ocasião do pós-teste.

A interação Fase x Grupo foi significativa [F (1.98) = 20.141; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 16).

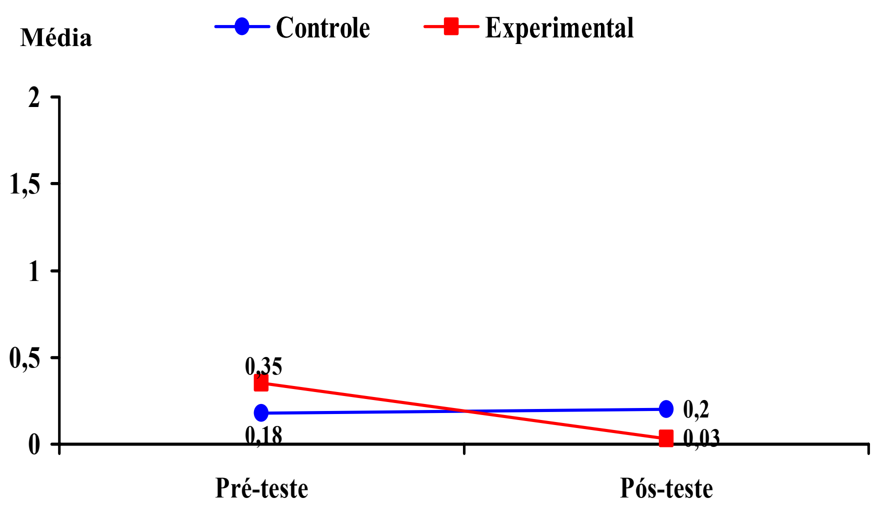


Figura 17. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 - Tipo 3: tamanho do resto)

Observa-se que no pré-teste as crianças do grupo experimental apresentam uma freqüência maior de respostas associadas a uma solução cotidiana do que as crianças do grupo controle (médias: 0.35 e 0.18, respectivamente); enquanto que no pós-teste constata-se o oposto (grupo experimental média: 0.03 e grupo controle média: 0.20). Nota-se, ainda, que as crianças do grupo experimental diminuem a freqüência de respostas do Tipo 3 quando comparado o pré-teste (média: 0.35) com o pós-teste (média: 0.03).

Tipo 4

Verificaram-se efeitos principais em relação à Fase [$\underline{F}$ (1.98) = 65.558; $\underline{p}$ = 0.000], ao Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 7.505; $\underline{p}$ = 0.007] e em relação à Condição (tamanho do resto) [$\underline{F}$ (2.97) = 8.000; $\underline{p}$ = 0.001; média no resto pequeno: 1.30; média no resto intermediário: 1.30 e média no resto grande: 1.15]. O efeito da Fase caracterizou-se por um grande número de respostas Tipo 4 do pré-teste (média: 0.99) para o pós-teste (média: 1.50). O efeito do Grupo, por sua vez, caracterizou-se por um grande número de respostas associadas a um significado matemático (Tipo 4) quando comparada a freqüência do grupo experimental (média: 1.44) com a freqüência do grupo controle (média: 1.06). Esses efeitos, como mostra a Tabela 17, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um número maior de respostas associadas a um significado matemático (Tipo 4), expressando uma compreensão acerca do significado do resto.

O Teste de Tukey revelou que na Condição (tamanho do resto) foram significativas as diferenças entre R3 vs. R2 (médias: 1.15 e 1.30; $p < .001$) e entre R3 vs. R1 (médias: 1.15 e 1.30; $p < .001$). Como pode ser observado na Tabela 16, as crianças dos dois grupos oferecem um número menor de respostas do Tipo 4 quando o resto é grande.

Detectou-se uma interação significativa para Fase X Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 38.642; $\underline{p}$ = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste ($p<.001$, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental ($p<.001$, intragrupo), como ilustra a Figura 18.

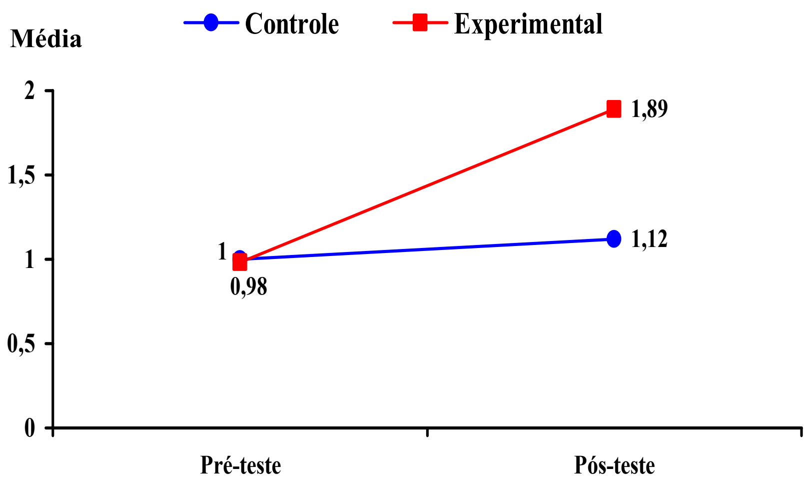


Figura 18. Interação Fase X Grupo (Tarefa 2 - Tipo 4: tamanho do resto)

Observa-se que a freqüência de respostas Tipo 4 no grupo experimental é maior no grupo controle no pós-teste (médias: 1.89 e 1.12, respectivamente). Constata-se, também, o aumento de respostas Tipo 4 no pós-teste (média: 1.89) em relação ao pré-teste (média: 0.98) no grupo experimental. Embora o grupo controle aumente a freqüência desse tipo de resposta do pré para o pós (média no pré 1.00 e média no pós 1.12), esta não foi significativa.

7.1.3. Os avanços, permanências e regressões no emprego das respostas no pré-teste e no pós-teste.

Ainda que os dados sejam evidentes quanto aos ganhos das crianças do grupo experimental após a intervenção, é importante examinar a natureza dos avanços, as regressões identificadas e as permanências. A Tabela 18 apresenta a distribuição das respostas em função dos avanços, das permanências e das regressões observadas quando se compara o pré-teste e o pós-teste.

Tabela 18 - Freqüência e percentual (entre parênteses) de avanços, permanências e regressões das respostas nas duas fases na Tarefa 2.

Do pré para o pós-teste		Controle	Experimental
	T1 → T2	5 (3)	0 (0)
	T1 → T3	9 (5)	1 (0.5)
	T1→T4	21 (12)	87 (48)
Avanços	T2→T3	1 (0.5)	1 (0.5)
(n = 181)	T4→T4	1 (0.5)	4 (2)
	T3 →T4	5 (3)	46 (25)
	Total[50]	**42 (14)**	**139 (46.33)**
	T1	75 (19)	7 (2)
	T2	5 (1.3)	0 (0)
Permanências	T3	16 (4)	3 (1)
(n = 394)	T4	141 (35.7)	147 (37)
	Total	**237 (79)**	**157 (52.33)**
	T3 →T1	5 (20)	3 (12)
	T3 → T2	1 (4)	0 (0)
Regressões	T2 → T1	6 (24)	1 (4)
(n = 25)	T4 → T1	5 (20)	0 (0)
	T4 → T 3	4 (16)	0 (0)
	Total	**21 (7)**	**4 (1.33)**

[50] Os percentuais apresentados nos totais para avanços, permanências e regressões foram extraídos de n = 300.

A Tabela 18 mostra que os avanços são mais freqüentes no grupo experimental (46.33%) do que no grupo controle (14%); enquanto que os casos de permanência são mais freqüentes no grupo controle (79%) do que no grupo experimental (52.33%). As regressões foram raras tanto no grupo controle (7%) como no grupo experimental (1.33%).

Enquanto o grupo controle se caracteriza por uma estabilidade entre o pré-teste e o pós-teste; o grupo experimental apresenta avanços que se caracterizam por movimentos da resposta Tipo 1 para Tipo 4 (48%) e do Tipo 3 para a resposta Tipo 4 (25%). Esses resultados sugerem que a criança que em uma dada situação-problema oferece resposta do Tipo 1 e do Tipo 3 no pré-teste parece se beneficiar mais da intervenção do que quando oferece a resposta do Tipo 2. Talvez isso ocorra porque respostas Tipo 3 indicam que a criança centra atenção na igualdade entre as partes, noção esta que parece anteceder a compreensão do significado do resto.

No caso da resposta do Tipo 1, o fato da criança focalizar a atenção nos aspectos irrelevantes da situação-problema (aspectos físicos, gráficos ou resposta imprecisa) não significa necessariamente que não perceba a igualdade entre as partes; haja vista que nesse caso específico, o procedimento de resolução apresentado sob a forma de representação pictográfica poderia estar influenciando na resposta dada. Esta possibilidade apóia-se também no fato de que na resposta do Tipo 2, a criança parece não considerar o princípio da igualdade entre as partes, sendo a intervenção de pouca ajuda. É possível que para compreender o significado matemático atribuído ao resto seja necessário tomar consciência primeiro da existência do invariante relativo à igualdade entre as partes.

7.1.4. Relações entre o desempenho e as respostas

O fato das respostas apresentarem, em certo sentido, um caráter hierárquico, sobretudo em relação à resposta do Tipo 4 (nível de compressão mais sofisticado a respeito do significado do resto), é interessante examinar se existiria alguma relação entre resposta correta e o tipo de resposta oferecido pela criança, como ilustrado na Tabela 19.

Tabela 19- Freqüência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas e incorretas por tipo de resposta na Tarefa 2.

Tipos	Respostas	
	Correta	Incorreta
Tipo 1 (ausente imprecisa ou que contempla aspectos gráficos) (n = 307)	**137** (45%)	**170** (55%)
Tipo 2 (concepção que viola o princípio da igualdade) (n = 30)	**11** (37%)	**19** (63%)
Tipo 3 (solução cotidiana) (n = 114)	**65** (57%)	**49** (43%)
Tipo 4 (significado matemático) (n = 749)	**612** (82%)	**137** (18%)

De modo geral, a maioria das respostas corretas está associada à resposta Tipo 4 que expressa a compreensão do significado do resto (82%), enquanto que a maioria das respostas incorretas está associada às respostas Tipo 2 (63%). As respostas do Tipo 1 podem tanto estar associadas a respostas corretas como a incorretas. Como comentado anteriormente em relação à Tarefa 1, a ausência de resposta não significa necessariamente, uma dificuldade ou uma não compreensão da tarefa, podendo haver casos em que a criança sabe, entretanto não consegue explicitar adequadamente este conhecimento. Os casos em que as crianças oferecem uma resposta mais elaborada e apresentam uma resposta incorreta são menos freqüentes (resposta incorreta no Tipo 4: 18%). Por outro lado, é possível pensar que as respostas corretas acompanhadas de respostas mais elementares (Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3) ocorram porque nesta tarefa o procedimento de resolução encontra-se representado sob a forma pictográfica na cartela o que facilitaria a resposta correta por parte da criança.

Nas respostas cuja concepção de resto está associada a uma solução cotidiana (Tipo 3), observa-se um percentual maior de respostas corretas (57%) do que de respostas incorretas (43%). Isto talvez ocorra porque o pensamento da criança está ancorado apenas no princípio da igualdade entre as partes.

O fato da resposta Tipo 2 ser acompanhada por um número maior de respostas incorretas (63%) do que respostas corretas (37%) justifica-se pelo fato que essas respostas expressam as dificuldades que a criança apresenta ao lidar com o resto.

O percentual expressivo de respostas corretas associado à resposta do Tipo 4 mostra a capacidade de explicitar uma compreensão acerca do significado do resto e a capacidade de compreender o procedimento de resolução adotado para uma determinada situação-problema envolvendo a divisão com resto.

7.2. Comentários

O resultado mais importante derivado da Tarefa 2 (Julgamento do significado do resto) foi que as crianças que receberam intervenção alcançaram um nível de compreensão sobre o significado do resto mais elaborado do que as crianças do grupo controle no pós-teste. Isto foi observado não apenas em relação ao número de acertos, mas também, em relação às respostas fornecidas tanto em relação aos tipos de problemas (partição e quotas) como em relação aos tamanhos do resto (pequeno, intermediário e grande).

Apesar das semelhanças entre os dois grupos de crianças no pré-teste, apenas as crianças do grupo experimental apresentaram progressos em atribuir um significado matemático ao resto quando comparado o pré-teste com o pós-teste. Importante salientar que tal progresso não ficou circunscrito ao uso da terminologia matemática (‘o resto’, ‘o que sobrou’). Na realidade, as crianças do grupo experimental passaram a explicitar verbalmente invariantes operatórios relevantes para a compreensão da divisão enquanto operação matemática, por exemplo: a igualdade entre as partes e o resto não ser maior que o número de partes ou o tamanho das partes. Diferentemente, as crianças do grupo controle permaneceram, de modo geral, oferecendo respostas imprecisas sobre o significado do resto ou tendiam a associá-lo a uma solução cotidiana ou a uma solução que viola o princípio da igualdade entre as partes.

Em relação ao número de acertos, observou-se que ambos os grupos apresentaram um avanço significativo (desempenho) quando comparado o pré-teste com o pós-teste tanto em relação ao tipo de problema como em relação ao tamanho do resto.

Quanto ao tamanho do resto, merece ser comentado o fato das crianças de ambos os grupos, tanto no pré-teste como no pós-teste, apresentarem um número de acertos menor de respostas mais elementares quando o resto é grande. Isto talvez ocorra porque a atenção recai sobre o valor do quociente, apresentado na representação pictográfica que permite a redistribuição do resto, desconsiderando a situação-problema. Ao que parece a idéia de redistribuição do resto ocorre apenas quando a criança pode estabelecer comparações entre o tamanho do resto e o número de partes ou tamanho das partes formadas.

Merece destaque, também, o fato da intervenção ter feito desaparecer as respostas que associam o significado do resto à violação do invariante operatório da divisão, a igualdade entre as partes. Da mesma forma que se destaca o fato das crianças do grupo controle continuarem em suas respostas associando o significado do resto a uma solução cotidiana. É possível que do ponto de vista cognitivo seja mais elementar tentar inserir o resto nas partes ou propor que ele seja retirado de uma situação-problema do que tentar refletir sobre o seu significado no processo de resolução.

Em síntese, os resultados mostram consistentemente que após a intervenção as crianças do grupo experimental passaram a apresentar respostas mais explícitas do que antes da intervenção para os três tamanhos de resto, demonstrando compreender as relações entre o resto e os demais elementos presentes na operação de divisão, o mesmo não sendo observado com as crianças do grupo controle que tendem a oferecer respostas associando o significado do resto aos aspectos irrelevantes da situação-problema, a uma solução cotidiana (em geral, descartá-lo) ou a violar o princípio da igualdade entre as partes.

Parte IV: Tarefa 3 - Julgamento dos procedimentos incorretos de resolução

Com a aplicação da presente tarefa pretendeu-se examinar se a intervenção fornecida ao grupo experimental auxiliaria as crianças a identificar e a analisar erros quando são mostrados procedimentos incorretos de resolução que violam princípios invariantes da divisão. Importante mencionar, como descrito no Capítulo 2, que parte da intervenção (Sessão 3) envolvia um conjunto de atividades que tinha por objetivo levar a criança a identificar e compreender os procedimentos corretos e incorretos de resolução a partir de uma situação de interação que promovesse a reflexão dos participantes acerca dos princípios invariantes da divisão.

Em seguida, antes de apresentar os resultados obtidos, é necessário descrever o sistema de análise adotado na Tarefa 3.

8. Sistema de Análise

Semelhantes às Tarefas 1 e 2, os dados foram analisados em função de dois aspectos distintos, porém complementares: o desempenho (número de acertos) e a natureza das justificativas.

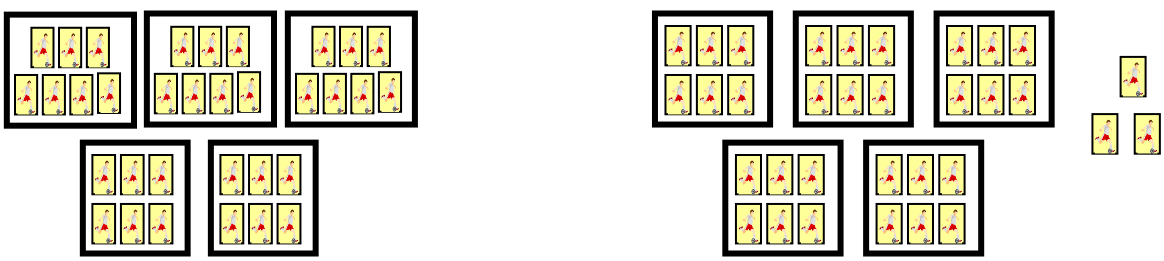
O desempenho foi analisado em função do número de acertos apresentados em cada tipo de problema (partição e quotas) e em função dos tipos de procedimento incorretos de resolução apresentados às crianças (Erro I – violação da igualdade; Erro II - resto maior que o número de partes ou tamanho das partes e Erro III – insere o resto em uma nova parte). Esses três tipos de procedimento incorretos de resolução foram selecionados com base na literatura que aponta os possíveis erros das crianças quando realizam problemas ou operações de divisão (NUNES; BRYANT, 1996; LAUTERT, 2000; LAUTERT; SPINILLO, 2002; SILVER; SHAPIRO; DEUTSCH, 1993; SELVA, 1993; YEPING, 2001).

As justificativas foram analisadas com base nos princípios invariantes da divisão que são violados no procedimento incorreto de resolução apresentado em cada item. As justificativas foram categorizadas tendo em vista dois aspectos: (i) se a criança detecta o erro apresentado no item; (ii) o grau de precisão e explicitude das justificativas. A combinação desses dois aspectos permitiu classificar as justificativas em três diferentes tipos que são descritos e exemplificados a seguir.

Justificativa 1: a criança não detecta o erro apresentado na cartela, fornecendo justificativas imprecisas, circulares que não contemplam aspectos relevantes da situação-problema. Em geral, são oferecidas justificativas que focalizam a atenção nos aspectos gráficos ou que remetem as situações cotidianas. Também foi incluída nesta categoria ausência de justificativa[51]. Exemplos:

Erro I Na cartela de Maria o resto é inserido em mais de uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes.

> ***Exemplo 33:*** Problema de divisão por partição (Mário ganhou 33 figurinhas de jogadores de futebol e tinha 5 envelopes. Ele queria colocar o mesmo número de figurinhas em cada envelope. Quantas figurinhas ele vai colocar em cada envelope?)



Maria **João**

[51] Importante mencionar que no total de 1200 respostas, apenas 18 respostas no pré-teste (3%) e 13 respostas no pós-teste (2.7%) não apresentam justificativas.

E- “Quem fez errado?”

C- (pensa) “João”

E- “Por quê?”

C- “Porque o quadradinho... tá mais pequeno que...o dela tá maior e tem mais. ..o dele tá menor e tem pouco”.

(Reprodução do protocolo 11, pré-teste, sexo masculino, 10 anos e 8 meses, GC)

No exemplo 33 a justificativa encontra-se fundamentada nos aspectos gráficos, pictóricos, ou seja, sua atenção volta-se para a percepção da figura.

Erro II Na cartela de João o valor do dividendo não é totalmente distribuído, violando o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao número de partes.

Exemplo 34: Problema de divisão por partição (Gustavo tem 32 moedas antigas e quer colocá-las em 6 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de moedas. Quantas moedas ele irá colocar em cada caixa?)

João **Maria**

E- “Quem fez errado?”

C- “João” (aponta para a cartela)

E- “Por quê?”

C- (silêncio)

E- “Por que você me disse que foi o João que fez errado?”

C- “Porque ele tem mais do que ela.”

E- “Explica melhor.”

C- (silêncio)

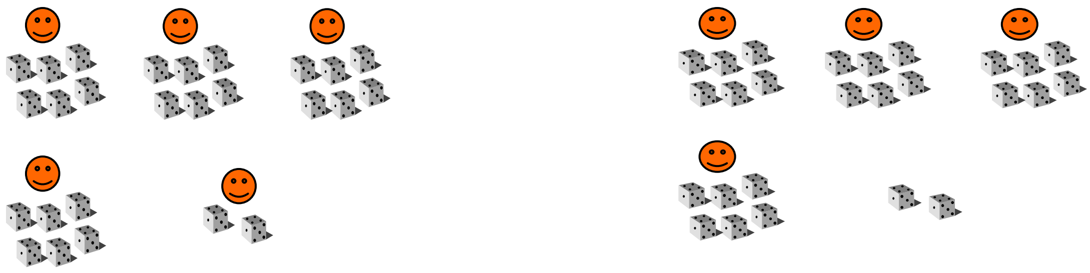
E- “Como assim ele tem mais?”

C- (faz que não sabe com a cabeça)

(Reprodução do protocolo 55, pré-teste, sexo feminino, 9 anos e 10 meses, GC)

<u>Erro III</u> Na cartela de Maria o resto é inserido em uma parte, violando o princípio da igualdade entre as partes e alterando o tamanho das partes.

Exemplo 35: Problema de divisão por quotas (Marisa comprou 26 dados. Ela quer dar 6 dados para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os dados?)



Maria **João**

E- "Quem fez errado?"

C- "João" (aponta para a cartela)

E- "Por quê?"

C- "Porque ele dividiu os dadinhos para os amigos dele e ela não quer dividir."

(Reprodução do protocolo do protocolo 2, pós-teste, sexo masculino, 11 anos e 2 meses, GC)

<u>Erro I</u> Na cartela de Maria o resto é inserido em mais de uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes.

Exemplo 36: Problema de divisão por quotas (Roberto foi a uma loja e comprou 38 aviões. Ele quer dar 5 aviões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar aviões?)

Maria **João**

E- "Quem fez errado?"

C- "Maria."

E- "Por quê?"

C- "Porque menina sabe menos do que menino... [E: Mais alto não estou ouvindo] Porque eu acho que foi o João, porque ele entende mais dessas coisas do que a Maria. Porque, vê, aqui tá quatro e aqui tá sete."

E- "Então, por que ela errou?"

C- "Porque ela é uma menina não pode estar brincando de avião."

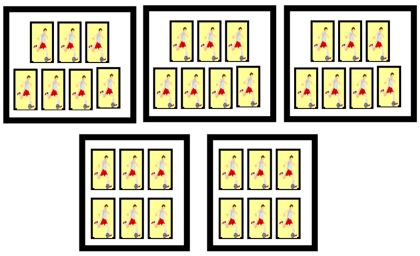
(Reprodução do protocolo 86, pré-teste, sexo feminino, 9 anos e 11 meses, GE)

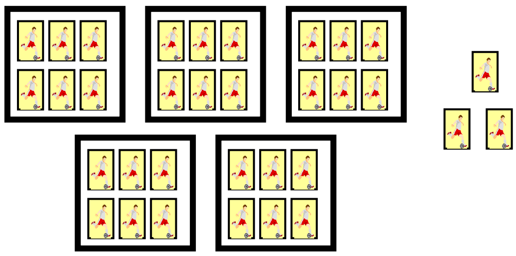
No exemplo 36 a justificativa apresentada expressa estereótipos relativos à questão de gênero presentes na sociedade, por exemplo, a idéia de que alguns tipos de brinquedos são para meninos e outros para meninas. Verifica-se, também a idéia de que meninos sabem mais do que meninas.

Justificativa 2: a criança não detecta o erro matemático apresentado no item e focaliza atenção em apenas um aspecto da situação-problema (ora no valor do dividendo, ora no valor do divisor ou no valor do resto). Na maioria das vezes, volta-se para o valor do resto. Exemplos:

Erro I Na cartela de Maria o resto é inserido em mais de uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes.

Exemplo 37: Problema de divisão por partição (Mário ganhou 33 figurinhas de jogadores de futebol e tinha 5 envelopes. Ele queria colocar o mesmo número de figurinhas em cada envelope. Quantas figurinhas ele vai colocar em cada envelope?)





Maria **João**

E- "Quem fez errado?"

C- "João"

E- "Por quê?"

C- "Porque o dele sobrou três."

(Reprodução do protocolo 29, pré-teste, sexo feminino, 10 anos, GC)

A criança não detecta o erro apresentado no item e sua justificativa encontra-se fundamentada no valor do resto.

<u>Erro II</u> Na cartela de Maria o valor do dividendo não é totalmente distribuído, violando o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao tamanho da parte.

Exemplo 38: Problema de divisão por quotas (Marta comprou 36 balões. Ela quer dar 7 balões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar balões?)

Maria **João**

E- "Quem fez errado?"

C- "Eu acho a Maria."

E- "Por quê?"

C- "Porque a Maria tem trinta e quatro balões e o João tem mais. Eu acho."

(Reprodução do protocolo 55, pré-teste, sexo feminino, 9 anos e 10 meses, GE)

A criança apresenta justificativa que focaliza a atenção no valor do dividendo, ou seja, volta-se para a quantidade total de objetos que está sendo distribuída, sem atentar para o princípio invariante que está sendo violado (resto maior que o tamanho das partes).

<u>Erro III</u> Na cartela de João o resto é inserido em uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes e alterando o número de partes.

Exemplo 39: Problema de divisão por partição (Tia Ema foi a uma loja e comprou 29 ursinhos para dar as suas 7 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de ursinhos. Quantos ursinhos cada sobrinha vai receber?)

João **Maria**

E- "Quem fez errado?"

C- "Maria"

E- "Por quê?"

C- "Porque a de Maria sobrou e o de João não sobrou."

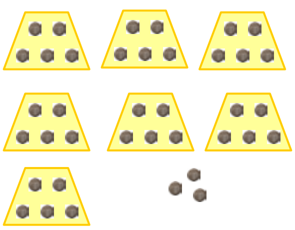
(Reprodução do protocolo 61, pré-teste, sexo feminino, 9 anos e 8 meses, GE)

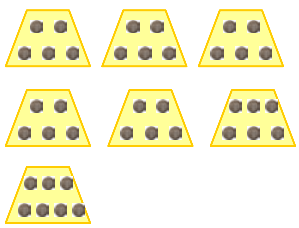
No exemplo 39 a criança não detecta o erro apresentado (resto inserido em uma parte) e sua justificativa se baseia no valor do resto.

<u>**Justificativa 3:**</u> a criança detecta o erro matemático apresentado na cartela, expressando a compreensão dos princípios invariantes da divisão: a igualdade entre as partes e que o resto não pode ser nem maior nem igual ao número de partes ou ao tamanho das partes. Importante salientar que as justificativas oferecidas variavam em função do grau de explicitude verbal apresentado. Exemplos:

<u>**Erro I**</u> Na cartela de Maria o resto é inserido em uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes.

Exemplo 40: Problema de divisão por quotas (Guga ganhou 38 moedas antigas. Ele quer colocar 5 moedas em cada saquinho. Quantos saquinhos ele vai precisar?)





João **Maria**

E- "Quem fez errado?"

C- (olha as representações) Maria

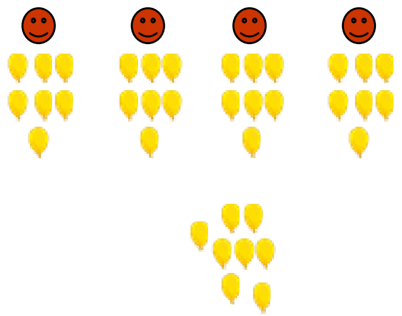
E- "Por quê?"

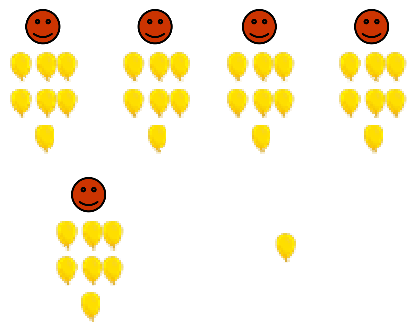
C- Porque ela não distribuiu em quantidades iguais e ele distribuiu. Ele botou cinco em cada saquinho. Ela colocou cinco em cada saquinho e no último colocou oito....Oito não! Sete."

(Reprodução do protocolo 69, pós-teste, sexo feminino, 9 anos e 10 meses, GE)

<u>Erro II</u> Na cartela de Maria o valor do dividendo não é totalmente distribuído, violando o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao tamanho da parte.

Exemplo 41: Problema divisão por quotas (Marta comprou 36 balões. Ela quer dar 7 balões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar balões?)





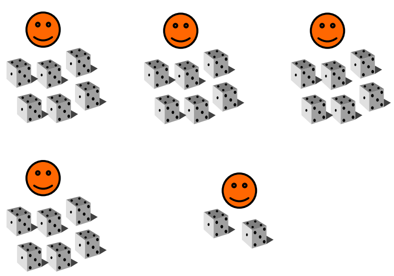
Maria **João**

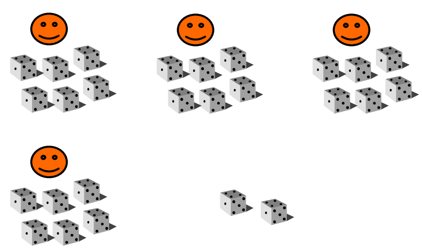
E- “Quem fez errado?”
C- “Maria”
E- “Por quê?”
C- “Porque (pára, pensa e fica olhando para as representações) Porque ela só deu .... os quatro amigos e ficou faltando um amigo que a quantidade.... era oito e dava para ela fazer outro amigo...dar a outro amigo.”
E- “Explica melhor”
C- “Porque Maria... fez errado. Porque ela fez quatro amigos, deu quatro amigos os balões e ficou um amigo sem receber ai ela tinha oito quantidade... ela dava sete e sobrava um.”

(Reprodução do protocolo 46, pré-teste, sexo feminino, 8 anos e 8 meses, GC)

<u>Erro III</u> Na cartela de Maria o resto é inserido em uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes e alterando o tamanho da parte.

Exemplo 42: Problema de divisão por quotas (Marisa comprou 26 dados. Ela quer dar 6 dados para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os dados?)





Maria **João**

E- “Quem fez errado?”

C- (conta e olha para as representações das cartelas) “A Maria”

E- “Por quê?”

C- “Porque ela disse que queria dar a mesma quantidade e o resto ela deu pra um amigo. Se ela quer que cada amigo receba a mesma quantidade, ela não vai poder dar... for igual...se o resto for igual ou mais que ela pode dar. Pra um ela deu seis, pra outro ela deu seis, para outro ela deu seis, pra outro ela deu seis e pra um ela deu dois. E ela não pode dividir assim. Ela tem que dividir em quantidades iguais.”

(Reprodução do protocolo 100, pós-teste, sexo masculino, 10 anos e 5 meses, GE)

<u>**Erro III**</u> Na cartela de Maria o resto é inserido em uma parte, violando o principio da igualdade entre as partes e alterando o número de partes.

Exemplo 43: Problema de divisão por partição (Tia Ema foi a uma loja e comprou 29 ursinhos para dar as suas 7 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de ursinhos. Quantos ursinhos cada sobrinha vai receber?)

João **Maria**

E- “Quem fez errado?”

C- (olha as representações) “João”

E- “Por quê?”

C- “Porque Maria deu quatro para cada um... para cada uma das sobrinhas e João ele deu também, mas ele... não pode ficar uma sobrinha só com uma, tem que ser tudo igual. E Maria fez tudo certo”.

(Reprodução do protocolo 48, pré-teste, sexo masculino 10 anos e 1 mês, GC)

Nos exemplos 40, 41, 42, 43 observa-se que as crianças detectam o invariante operatório que está sendo violado em cada item e explicitam verbalmente a compreensão sobre invariantes operatórios da divisão que precisam ser respeitados no processo de resolução.

Um total de 1200 justificativas (600 no pré-teste e 600 no pós-teste) foi analisado por dois juizes independentes cujo percentual de concordância foi de 93%. Os julgamentos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada final.

8.1. Resultados

Dois aspectos foram considerados na análise: o desempenho (número de acertos) e as justificativas. No primeiro momento são apresentados os resultados relativos aos tipos de problemas. No segundo momento são apresentados os resultados relativos aos tipos de procedimentos incorretos de resolução que viola princípios invariantes da divisão (Erro I: violação da igualdade entre as partes; Erro II: resto maior que o número de partes ou tamanho das partes; Erro III: insere o resto em uma nova parte violando a igualdade entre as partes ou o tamanho das partes).

8.1.1. Tipos de problemas: partição e quotas

8.1.1.1. Desempenho

A Tabela 20 apresenta o desempenho na Tarefa 3 em função dos tipos de problemas.

Tabela 20- Média de acertos (máximo: 3) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e do tipo de problema no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3.

Fases	Grupos	Tipos de problemas		Total
		Partição	**Quotas**	
Pré-teste	**GC**	**1.74** (1.084)	**1.58** (0.928)	**1.66** (1.006)
	GE	**1.64** (0.942)	**1.58** (0.971)	**1.61** (0.957)
	Total	**1.69** (1.013)	**1.58** (0.950)	**1.64** (0.981)
Pós-teste	**GC**	**1.72** (1.107)	**1.68** (1.115)	**1.70** (1.111)
	GE	**2.98** (0.141)	**2.96** (0.198)	**2.97** (0.170)
	Total	**2.35** (0.624)	**2.32** (0.657)	**2.34** (0.641)

No pré-teste, comparações entre os grupos em cada tipo de problema foram examinadas através de uma Análise de Variância a uma via, não sendo detectadas diferenças significativas entre os grupos tanto nos problemas de divisão por partição [F (1.98) = 0.242; p = 0.624] como nos problemas de divisão por quotas [F (1.98) = 0.000; p = 1.000]. Verifica-se, portanto, que no pré-teste os dois grupos apresentam desempenhos semelhantes no que se refere à identificação de procedimentos incorretos de resolução, tanto nos problemas de divisão por partição como nos problemas de divisão por quotas.

Foi realizada uma Análise de Variância em três vias tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Problema (2: partição e quotas), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise produziu efeitos principais significativos para Fase [F (1.98) = 59.697; p = 0.000; média no pré: 1.64 e média no pós: 2.34] e para Grupo [F (1.98) = 20.994; p = 0.000; média do grupo controle: 1.68 e média do grupo experimental: 2.29].

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 53.069; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou que o número de acertos no grupo experimental foi superior ao número de acertos no grupo controle no pós-teste ($p < .001$, intergrupo) (média: 2.97 e média 1.70, respectivamente) e que o grupo experimental apresentou um desempenho superior no pós-teste (média. 2.97) quando comparado ao pré-teste (média 1.61.) ($p < .001$, intragrupo). Não foram identificadas diferenças significativas entre os grupos no pré-teste nem tampouco entre o pré-teste e o pós-teste no grupo controle ($p > .05$). Essa interação é ilustrada na Figura 19.

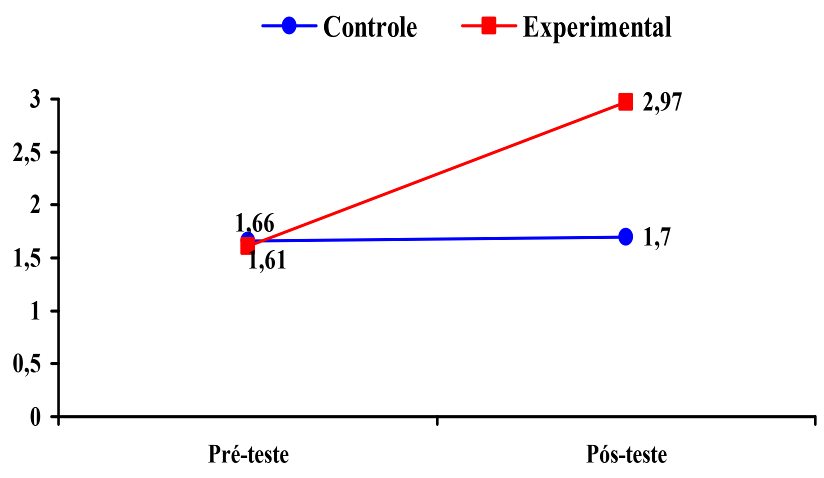


Figura 19. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 – Desempenho)

Considerando-se o aumento no número de acertos do pré para o pós no grupo experimental, conclui-se que a intervenção foi capaz de propiciar uma melhora no desempenho das crianças.

8.1.1.2. Justificativas

Inicialmente, justificativas foram examinadas a partir de uma Análise de Variância. A distribuição das justificativas em função dos grupos (GC e GE), dos tipos de problemas (partição e quotas) e das fases (pré-teste e pós-teste) é apresentada na Tabela 21.

Tabela 21- Média de justificativas (máximo: 3) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e do tipo de problema no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3.

	Pré- teste			
	Controle		**Experimental**	
Justificativas	**Partição**	**Quotas**	**Partição**	**Quotas**
J1 (ausente ou imprecisa)	**1.22** (1.166)	**1.40** (1.143)	**1.16** (1.076)	**1.18** (1.024)
J2 (foca atenção em apenas um aspecto)	**0.70** (0.974)	**0.76** (0.938)	**0.86** (0.926)	**0.90** (0.839)
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados)	**1.08** (1.192)	**0.84** (1.149)	**0.98** (1.020)	**0.92** (1.007)
	Pós- teste			
J1 (ausente ou imprecisa)	**1.08** (1.140)	**1.06** (1.096)	**0.06** (0.240)	**0.06** (0.240)
J2 (foca atenção em apenas um aspecto)	**0.74** (1.026)	**0.90** (1.035)	**0.02** (0.141)	**0.02** (0.141)
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados)	**1.18** (1.240)	**1.04** (1.212)	**2.92** (0.274)	**2.92** (0.274)

No pré-teste, no interior de cada justificativa comparou-se os dois grupos em relação à cada tipo de problema (partição e quotas) através de uma Análise de Variância a uma via[52]. Na Justificativa 1, os grupos não diferem significativamente em relação ao problema de divisão por partição [F (1.98) = 0.072; p = 0.790] nem tampouco em relação ao problema de divisão por quotas [F (1.98) = 1.028 ; p = 0.313]. O mesmo foi observado em relação à Justificativa 2 {partição [F (1.98) = 0.709 ; p = 0.402] e quotas [F (1.98) = 0.619; p = 0.433]} e em relação à Justificativa 3 {partição [F (1.98) = 0.203; p = 0.653] e quotas [F (1.98) = 0.137; p = 0.712]}. Esses resultados confirmam que as crianças dos dois grupos não diferem significativamente em relação às justificativas.

A Tabela 22 apresenta a distribuição das justificativas em função dos grupos e das fases.

[52] Um total de seis Análises de Variância foram aplicadas, duas no interior de cada um dos três tipos de justificativa.

Tabela 22- Média de justificativas (máximo: 3) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3.

	Pré-teste			**Pós-teste**		
Justificativas	**GC**	**GE**	**Total**	**GC**	**GE**	**Total**
J1	**1.31**	**1.17**	**1.24**	**1.07**	**0.06**	**0.57**
(ausente ou imprecisa)	(1.155)	(1.050)	(1.102)	(1.118)	(0.240)	(0.679)
J2	**0.73**	**.88**	**0.81**	**0.82**	**0.02**	**0.42**
(foca atenção em apenas um aspecto)	(0.956)	(0.883)	(0.919)	(1.031)	(0.141)	(0.586)
J3	**0.96**	**0.95**	**0.96**	**1.11**	**2.92**	**2.02**
(expressa compreensão dos invariantes violados)	(1.171)	(1.016)	(1.092)	(1.226)	(0.274)	(0.750)

Os dados foram submetidos a uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Problema (2: partição e quotas), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise foi realizada considerando como variável dependente cada uma das justificativas (Justificativa 1, Justificativa 2 e Justificativa 3), separadamente, tanto para os problemas de divisão por partição como para os problemas de divisão por quotas. Os resultados indicaram efeitos significativos para as três justificativas, como descrito a seguir:

Justificativa 1

Detectaram-se efeitos principais em relação à Fase [$\underline{F}$ (1.98) = 65.891; $\underline{p}$ = 0.000] e ao Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 13.258; $\underline{p}$ = 0.000], porém não em relação ao tipo de Problema [$\underline{F}$ (1.98) = 0.603; $\underline{p}$ = 0.439]. Verificou-se uma diminuição na freqüência de Justificativa 1 no pós-teste (média: 0.57) em relação ao pré-teste (média: 1.24) e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 0.62) em relação ao grupo controle (média: 1.19). Isso, como ilustra a Tabela 22, deve-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um menor número de justificativas imprecisas ou ausentes (Justificativa 1).

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 27.365; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 20).

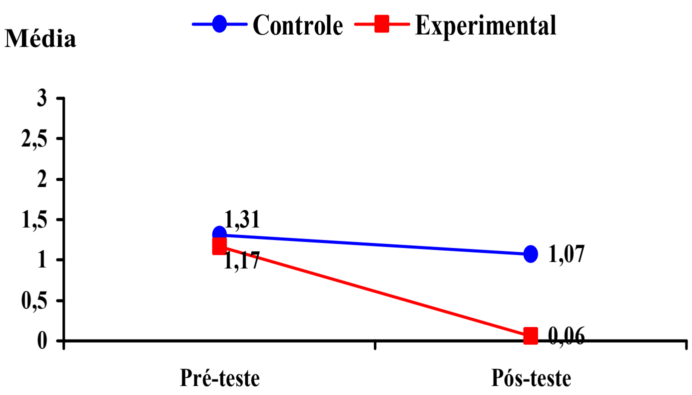


Figura 20. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 - Justificativa 1)

Essa interação demonstra o quanto a freqüência de Justificativa 1 é expressivamente menor no grupo experimental do que no grupo controle no pós-teste. Tomando esse resultado e o fato de haver uma diminuição de Justificativas 1 oferecidas pelo grupo experimental quando se compara o pré-teste com o pós-teste, compreende-se que a intervenção diminuiu o número de Justificativa 1 (imprecisas ou ausentes) no grupo experimental no pós-teste.

Justificativa 2

Identificaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 21.724; p = 0.000] e ao Grupo [F (1.98) = 6.694; p = 0.011], porém não em relação ao tipo de Problema [F (1.98) = 1.309; p = 0.255]. Houve uma diminuição na freqüência de Justificativa 2 no pós-teste (média: 0.42) em relação ao pré-teste (média: 0.81) e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 0.45) em relação ao grupo controle (média: 0.78). Esses efeitos, como ilustra a Tabela 21, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um menor número de Justificativa 2.

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 33.068; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 21).

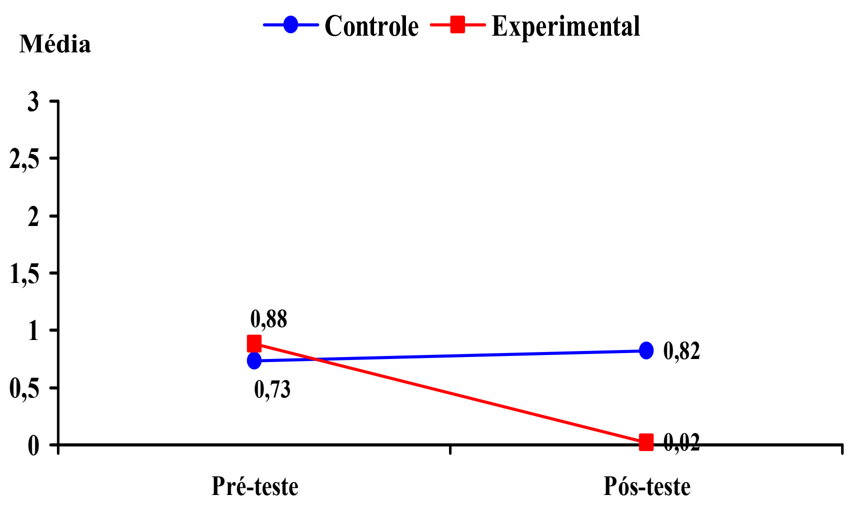


Figura 21. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 - Justificativa 2)

Essa interação demonstra o quanto a freqüência de Justificativas 2 é expressivamente menor no grupo experimental do que no grupo controle no pós-teste, notando-se, também, uma diminuição no grupo experimental quando se compara o pré e o pós-testes.

Justificativa 3

Detectaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 200.826; p = 0.000], ao Grupo [F (1.98) = 26.556; p = 0.000] e ao tipo de Problema [F (1.98) = 5.885; p = 0.017]. O efeito da Fase caracterizou-se por um aumento expressivo na freqüência de Justificativa 3 do pré-teste (média: 0.96) para o pós-teste (média: 2.02). O efeito do Grupo, por sua vez, caracterizou-se por um aumento expressivo de Justificativa 3 quando comparada a freqüência do grupo experimental (média: 1.94) com a freqüência do grupo controle (média: 1.04). Tais efeitos, como mostra Tabela 22, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um número maior de Justificativa 3 que expressam a compreensão dos princípios invariantes da divisão.

O efeito do fator Problema ocorreu porque a Justificativa 3 foi mais freqüente em problemas de divisão por partição (média: 1.54) do que em problemas de divisão por quotas (média: 1.43). Como ilustra a Tabela 21, apenas as crianças do grupo controle continuam apresentando uma freqüência maior de Justificativa 3 nos problemas de partição no pós-teste; enquanto que as crianças que foram submetidas à intervenção (GE) apresentam médias iguais em ambos tipos de problemas (média: 2.92).

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 148.010; p < .000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 22).

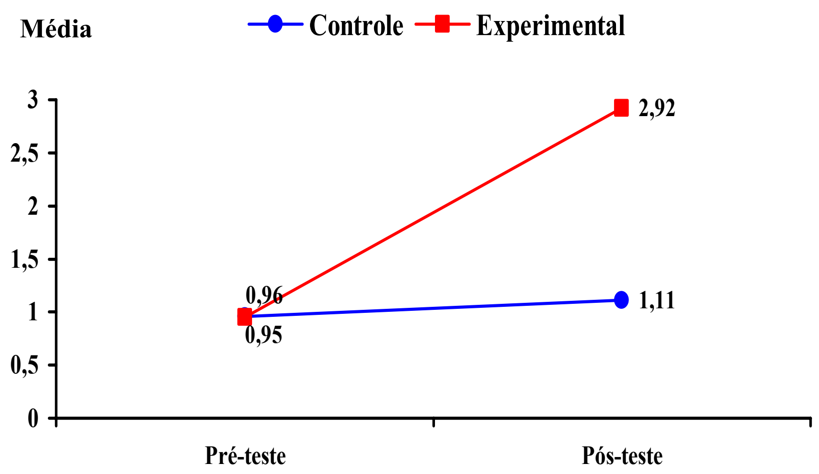


Figura 22. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 - Justificativa 3)

Observa-se, a partir dessa interação, que a freqüência de Justificativa 3 é maior no grupo experimental do que a no grupo controle no pós-teste, notando-se, ainda, um aumento dessa freqüência no grupo experimental quando se compara o pré e o pós-testes. De forma conjunta, esses resultados indicam que as crianças do grupo experimental parecem ter superado a tendência a considerar os aspectos irrelevantes ou apenas um dos aspectos da situação-problema em seus julgamentos, passando a estabelecer relações entre os termos da divisão.

8.1.2. Tipos de procedimentos incorretos de resolução

Três tipos de procedimentos incorretos foram investigados: Erro I: violação da igualdade entre as partes; Erro II: resto maior que o número de partes ou tamanho das partes; Erro III insere o resto em uma nova parte violando a igualdade entre as partes ou o tamanho das partes. Inicialmente são apresentados os resultados relativos ao desempenho e em seguida, os resultados relativos aos tipos de justificativas.

8.1.2. Desempenho

A Tabela 23 apresenta o desempenho na Tarefa 3 em função dos tipos de procedimentos incorretos de resolução.

Tabela 23 - Média de acertos (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e do tipo de procedimento incorreto apresentado nos itens no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3.

Fases	Grupos	Tipos de procedimentos incorretos			
		Erro I (violação da igualdade)	**Erro II** (resto maior)	**Erro III** (insere o resto)	**Total**
Pré-teste	**GC**	**1.04** (0.832)	**1.40** (0.670)	**0.88** (0.799)	**1.11** (0.767)
	GE	**0.92** (0.778)	**1.26** (0.723)	**1.04** (0.925)	**1.07** (0.809)
	Total	**0.98** (0.804)	**1.33** (0.697)	**0.96** (0.864)	**1.09** (0.788)
Pós-teste	**GC**	**0.98** (0.869)	**1.34** (0.772)	**1.08** (0.877)	**1.13** (0.839)
	GE	**1.96** (0.198)	**2.00** (0.000)	**1.98** (0.141)	**1.98** (0.113)
	Total	**1.47** (0.534)	**1.67** (0.386)	**1.53** (0.771)	**1.56** (0.476)

No pré-teste comparações entre os grupos em cada tipo de procedimento incorreto de resolução (Erro I, Erro II e Erro III) foram examinados através de uma Análise de Variância a uma via. Os resultados das Análises de Variância a uma via (totalizando três análises) não identificaram diferenças significativas entre os grupos para cada um dos tipos de procedimento incorretos: Erro I [F (1.98) = 0.555; p = 0.458], Erro II [F (1.98) = 1.008; p = 0.318] e Erro III [F (1.98) = 0.857; p = 0.357]. Constata-se, portanto, que no pré-teste os dois grupos apresentam desempenhos aproximados para identificar procedimentos incorretos de resolução que violam princípios invariantes da divisão.

Foi realizada uma Análise de Variância em três vias tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Condição (3: Erro I, Erro II e Erro III), sendo os últimos dois fatores (Fase e Condição) do tipo intra-sujeitos. Essa análise produziu efeitos principais significativos para Fase [F (1.98) = 59.697; p = 0.000], Grupo [F (1.98) = 20.994; p = 0.000] e Condição [F (2.97) = 14.623; p = 0.000; média no Erro I: 1.23; média no Erro II: 1.50 e média no Erro III: 1.25]. Verificou-se um aumento no número de acertos no pós-teste (média: 1.56) em relação ao pré-teste (média: 1.09) e um número maior de acertos no grupo experimental (média: 1.53) em relação ao grupo controle (média: 1.12). Esses resultados como mostra a Tabela 23, devem-se ao fato de que, após a intervenção, as crianças do grupo experimental apresentam um número maior de acertos nos três tipos de procedimento incorretos de resolução.

Quanto ao efeito Condição o Teste de Tukey revelou que existem diferenças significativas entre Erro I vs. Erro II (médias: 1.23 e 1.50, $p < .001$) e entre o Erro II vs. Erro III (médias: 1.50 e 1.25, $p < .001$). Como pode ser observado, na Tabela 22, as crianças de ambos os grupos, tanto no pré-teste como no pós-teste, apresentam um desempenho melhor para identificar e analisar o Erro II (resto maior que o número de partes ou tamanho das partes). Constata-se, portanto, que o Erro II é mais fácil de ser identificado pelas crianças.

Foi observada uma interação significativa para Fase X Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 53.069; $\underline{p}$ = 0.000]. O Teste de Tukey revelou que o número de acertos no grupo experimental foi superior ao número de acertos no grupo controle no pós-teste ($p < .001$) (média: 1.98 e média: 1.13, respectivamente) e que o grupo experimental apresentou um desempenho superior no pós-teste (média: 1.98) quando comparado ao pré-teste (média: 1.07.) ($p < .001$). Não foram identificadas diferenças significativas entre os grupos no pré-teste nem tampouco entre o pré-teste e o pós-teste no grupo controle ($p > .05$). Essa interação é ilustrada na Figura 23.

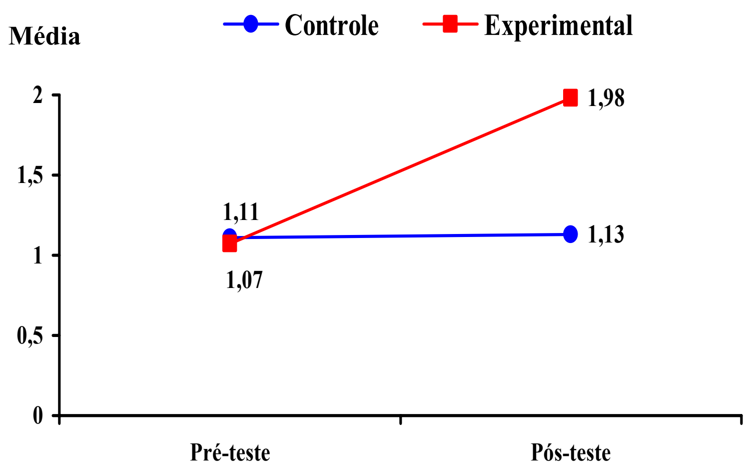


Figura 23. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 – Desempenho: procedimento incorreto)

Considerando-se o número de acertos apresentado pelo grupo experimental no pós-teste quando comparado ao pré-teste, compreende-se que a intervenção propiciou uma melhora no desempenho das crianças. As crianças do grupo experimental após intervenção alcançaram um nível maior de compreensão sobre princípios invariantes que são relevantes para o raciocínio multiplicativo, independente do tipo de erro que está sendo evidenciado na situação-problema.

8.1.2.2. Justificativas

A Tabela 24 apresenta a distribuição das justificativas em função dos tipos de procedimento incorretos de resolução (Erro I, Erro II e Erro III), dos grupos (controle e experimental) e das fases (pré-teste e pós-teste).

Tabela 24 - Média de justificativas (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) por tipo de procedimento incorreto de resolução no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3.

	Pré- teste					
	Controle			**Experimental**		
Justificativas	**Erro I**	**Erro II**	**Erro III**	**Erro I**	**Erro II**	**Erro III**
J1 (ausente ou imprecisa)	**0.78** (0.932)	**0.90** (0.839)	**0.94** (0.843)	**0.76** (0.822)	**0.70** (0.647)	**0.88** (0.799)
J2 (foca atenção em apenas um aspecto)	**0.66** (0.895)	**0.30** (0.505)	**0.50** (0.763)	**0.76** (0.797)	**0.44** (0.611)	**0.56** (0.787)
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados)	**0.56** (0.884)	**0.80** (0.857)	**0.56** (0.760)	**0.48** (0.762)	**0.86** (0.806)	**0.56** (0.787)
	Pós- teste					
J1 (ausente ou imprecisa)	**0.58** (0.785)	**0.86** (0.857)	**0.70** (0.863)	**0.06** (0.240)	**0.04** (0.283)	**0.02** (0.141)
J2 (foca atenção em apenas um aspecto)	**0.72** (0.882)	**0.38** (0.635)	**0.54** (0.813)	**0.04** (0.198)	**0.00** (0.000)	**0.00** (0.000)
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados)	**0.70** (0.886)	**0.76** (0.870)	**0.76** (0.894)	**1.90** (0.364)	**1.96** (0.283)	**1.98** (0.141)

Nota: Erro I (violação da igualdade); Erro II (resto maior) e Erro III (insere o resto)

A fim de se verificar estatisticamente as diferenças entre as justificativas, no pré-teste foram realizadas separadamente uma série de Análises de Variância a uma via considerando como variável dependente cada uma das justificativas (Justificativa 1, Justificativa 2 e Justificativa 3), separadamente, tanto para o Erro I, como para o Erro II e para o Erro III, tendo como variável independente o grupo. A Análise de Variância a uma via para cada uma das justificativas (J1, J2 e J3) nos três tipos de erros (totalizando nove análises de variância) não revelou diferenças significativas entre os grupos, como mostram os resultados, apresentados no Quadro 16.

Justificativas	Tipos de Erros	Significância
J1 (ausente ou imprecisa)	I	[F (1.98) = 0.073; p = 0.910]
	II	[F (1.98) = 1.782 ; p = 0.185]
	III	[F (1.98) = 0.133; p = 0.716]
J2 (foca atenção em apenas um aspecto)	I	[F (1.98) = 0.348; p = 0.556]
	II	[F (1.98) = 1.558; p = 0.215]
	III	[F (1.98) = 0.150; p = 0.699]
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados)	I	[F (1.98) = 0.235; p = 0.629]
	II	[F (1.98) = 0.130; p = 0.720]
	III	[F (1.98)= 0.000; p = 1.000].

Nota: Erro I (violação da igualdade); Erro II (resto maior) e Erro III (insere o resto)

Quadro 16. Resultados estatísticos da Análise de Variância a uma via (Tarefa 3).

Esses resultados confirmam que os grupos não diferem significativamente em relação às justificativas oferecidas para cada um dos três tipos de procedimentos incorretos.

A Tabela 25 apresenta a distribuição das justificativas em função dos grupos e das fases.

Tabela 25- Média de justificativas (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3 considerando-se o tipo de procedimento incorreto de resolução.

Justificativas	Pré- teste			Pós- teste		
	GC	GE	Total	GC	GE	Total
J1 (ausente ou imprecisa)	**0.87** (0.871)	**0.78** (0.756)	**0.83** (0.814)	**0.71** (0.835)	**0.04** (0.221)	**0.38** (0.528)
J2 (foca atenção em apenas um aspecto)	**0.49** (0.721)	**0.59** (0.732)	**0.54** (0.727)	**0.55** (0.777)	**0.01** (0.066)	**0.28** (0.422)
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados)	**0.64** (0.834)	**0.63** (0.785)	**0.64** (0.810)	**0.74** (0.883)	**1.95** (0.263)	**1.35** (0.573)

Os dados foram submetidos a uma Análise de Variância a três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Fase (2: pré-teste e pós-teste) e Condição (3: Erro I, Erro II e Erro III), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos (Fase e Condição). Essa Análise de Variância foi realizada, separadamente, considerando como variável dependente cada uma das justificativas (Justificativa 1, Justificativa 2 e Justificativa 3) para cada um dos Erros (Erro I, Erro II e Erro III). Os resultados indicaram efeitos significativos para os três tipos de justificativas, como descrito a seguir:

Justificativa 1

Identificaram-se efeitos principais em relação à Fase [$\underline{F}$ (1.98) = 65.891; $\underline{p}$ = 0.000] e ao Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 13.258; $\underline{p}$ = 0.000], porém não em relação à Condição [$\underline{F}$ (2.97) = 1.649; $\underline{p}$ = 0.198]. Verificou-se uma diminuição na freqüência de Justificativa 1 no pós-teste (média: 0.38) em relação ao pré-teste (média: 0.83) e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 0.41) em relação ao grupo controle (média: 0.79). Esses efeitos, como ilustra a Tabela 25, devem-se ao fato de que após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um menor número de justificativas imprecisas ou ausentes (Justificativa 1) para os três procedimentos incorretos de resolução.

A interação Fase X Grupo foi significativa [F (1.98) = 27.365; p = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo) (ver Figura 24).

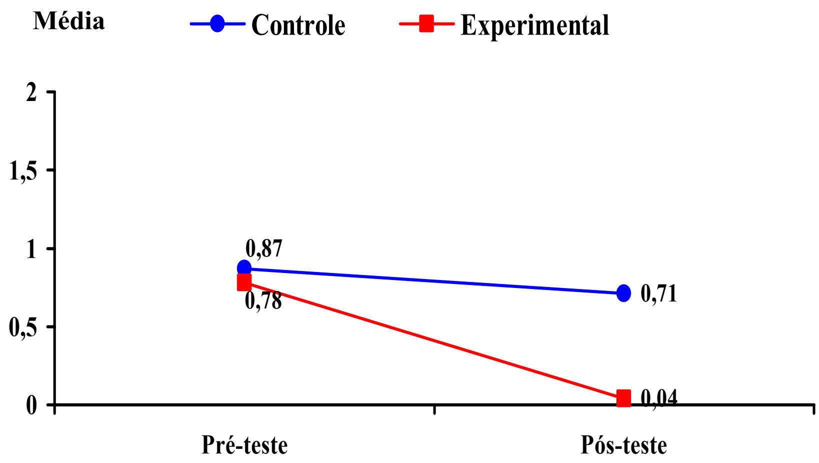


Figura 24. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 - Justificativa 1: procedimento incorreto)

Observa-se uma diminuição na freqüência de Justificativa 1 (imprecisas ou ausentes) pelo grupo experimental no pós-teste, considerando-se os três procedimentos incorretos de resolução. Nota-se, ainda, que a freqüência de Justificativa 1 no grupo experimental é expressivamente menor do que no grupo controle no pós-teste. Isso indica que a intervenção teve um efeito positivo acerca da mudança na natureza das justificativas oferecidas.

Justificativa 2

Detectaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 21.724; p = 0.000], ao Grupo [F (1.98) = 6.694; p = 0.011] e em relação à Condição [F (2.97) = 11.544; p = 0.000; média no Erro I: 0.54; média no Erro II: 0.28 e média no Erro III: 0.40]. O efeito Fase caracterizou-se por uma diminuição na freqüência de Justificativa 2 no pós-teste (média: 0.28) quando comparada ao pré-teste (média: 0.54) e uma menor freqüência no grupo experimental (média: 0.30) em relação ao grupo controle (média: 0.52). Esse efeito Fase detectado pela Análise de Variância deve-se exclusivamente às crianças do grupo experimental que após a intervenção diminuem consideravelmente a freqüência de Justificativa 2 para o Erro I e não mais utilizam esta para os Erros II e III (ver Tabela 23).

Quanto ao efeito Condição o Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os três tipos de procedimentos incorretos de resolução: Erro I vs Erro II (médias: 0.55 e 0.28; p <.001), Erro I vs Erro III (médias: 0.55 e 0.40; p<.01) e Erro III vs. Erro II (médias: 0.40 e 0.28; p<.05). É bastante provável que essa diferença ocorreu porque as crianças do grupo experimental diminuem a freqüência de Justificativa 2 nos três tipos de erros no pós-teste (ver Tabela 23).

Foi observada, também, uma interação significativa para Fase X Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 33.068; $\underline{p}$ = 0.000]. O Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (p<.001, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (p<.001, intragrupo). A Figura 25 ilustra essa interação.

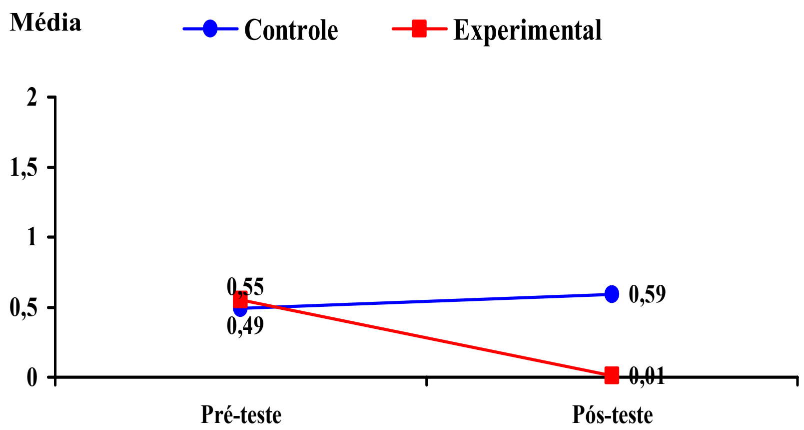


Figura 25. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 - Justificativa 2 : procedimento incorreto)

Essa interação demonstra uma diminuição na freqüência de Justificativa 2 oferecida pelo grupo experimental no pós-teste, considerando-se os três tipos de erros. Nota-se, ainda, que a freqüência de Justificativa 2 é expressivamente menor no grupo experimental do que no grupo controle no pós-teste.

Justificativa 3

Verificaram-se efeitos principais em relação à Fase [F (1.98) = 200.826; p = 0.000], ao Grupo [F (1.98) = 26.556; p = 0.000] e em relação à Condição [F (2.97) = 6.111; p = 0.003; média no Erro I: 0.91; média no Erro II: 1.10 e média no Erro III: 0.97].

O efeito da Fase caracterizou-se por um aumento expressivo na freqüência de Justificativa 3 do pré-teste (média: 0.64) para o pós-teste (média: 1.35). O efeito do Grupo, por sua vez, caracterizou-se por um aumento expressivo de Justificativa 3 quando comparados o grupo experimental (média: 1.29) e o grupo controle (média: 0.69). Isso ocorreu porque após a intervenção, as crianças do grupo experimental oferecem um número maior de Justificativa 3 que demonstram a compreensão dos princípios invariantes da divisão nos três tipos de erros investigados (ver Tabela 25).

Tabela 26- Média de justificativa 3 (máximo: 2) e o desvio padrão (entre parênteses) em função do grupo e procedimento incorreto de resolução no pré-teste e no pós-teste na Tarefa 3.

Fases	**Grupos**	**Procedimentos incorretos de resolução**			**Total**
		Erro I	**Erro II**	**Erro III**	
	GC	**0.56**	**0.80**	**0.56**	**0.64**
Pré-teste		(0.884)	(0.857)	(0.760)	(0.834)
	GE	**0.48**	**0.86**	**0.56**	**0.63**
		(0.762)	(0.806)	(0.787)	(0.785)
	GC	**0.70**	**0.76**	**0.76**	**0.74**
Pós-teste		(0.886)	(0.870)	(0.894)	(0.883)
	GE	**1.90**	**1.96**	**1.98**	**1.95**
		(0.364)	(0.283)	(0.141)	(0.263)

Nota: Erro I (violação da igualdade); Erro II (resto maior) e Erro III (insere o resto)

O Teste de Tukey revelou que na Condição foram significativas as diferenças entre Erro I vs. Erro II (médias: 0.91 e 1.10; $p < .001$) e entre o Erro II vs. Erro III (médias: 1.10 e 0.97, $p < .001$). É provável que essas diferenças ocorreram porque as crianças do grupo controle tendem a oferecer mais Justificativa 3 no Erro II; enquanto as crianças que foram submetidas a intervenção ampliam este tipo de justificativa a todos os tipos de erros. Ao que parece as crianças que não foram submetidas a intervenção (grupo controle), tendem a pensar na redistribuição do resto, somente, quando elas podem estabelecer comparações entre o resto e o tamanho das partes e o número de partes formadas.

Foram observadas interações significativas para Fase x Grupo [$\underline{F}$ (1.98) = 148.010; $\underline{p}$ = 0.000] e para Fase X Condição [$\underline{F}$ (2.97) = 5.737; $\underline{p}$ = 0 .004]. Em relação à interação Fase X Grupo, o Teste de Tukey, revelou diferenças significativas entre os grupos no pós-teste (média no grupo experimental: 1.95 e média no grupo controle: 0.74; $p < .001$, intergrupo) e entre o pré e o pós-testes no grupo experimental (média no pré: 0.63 e média no pós: 1.95; $p < .001$, intragrupo). A Figura 26 ilustra essa interação.

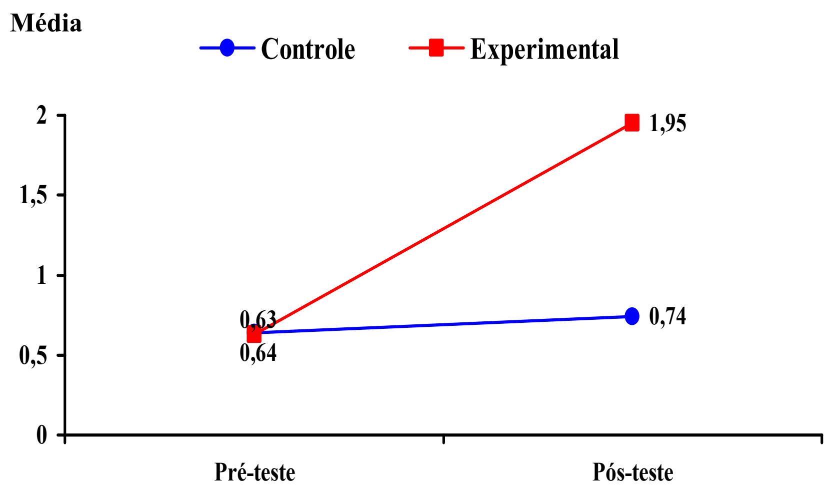


Figura 26. Interação Fase X Grupo (Tarefa 3 - Justificativa 3: procedimento incorreto)

Verifica-se, a partir dessa interação, que a freqüência de Justificativa 3 é maior no grupo experimental do que no grupo controle. Nota-se, também, que as crianças do grupo experimental ampliam o número de Justificativa 3 (expressam a compreensão dos invariantes) do pré-teste para o pós-teste. Tais resultados indicam que após a intervenção as crianças desenvolveram uma habilidade metagonitiva importante para aprendizagem da matemática e que esta habilidade não se restringe a um único tipo de erro, haja vista que as crianças melhoram nos três tipos de erros investigados (ver Tabela 26)

O Teste de Tukey revelou que na interação Fase X Condição existem diferenças significativas entre o três erros investigados quando comparada a freqüência do pré-teste com o pós-teste (Erro I- média no pré: 0.52 e média no pós: 1.30, $p < .001$, Erro II- média no pré: 0.83 e média no pós: 1.36; $p < .05$ e Erro III- média no pré: 0.56 e média no pós: 1.37, $p < .0001$). Não foram observadas diferenças significativas entre os tipos de erros no pré-teste nem em relação ao pós-teste ($p > .05$). A Figura 27 ilustra essa interação.

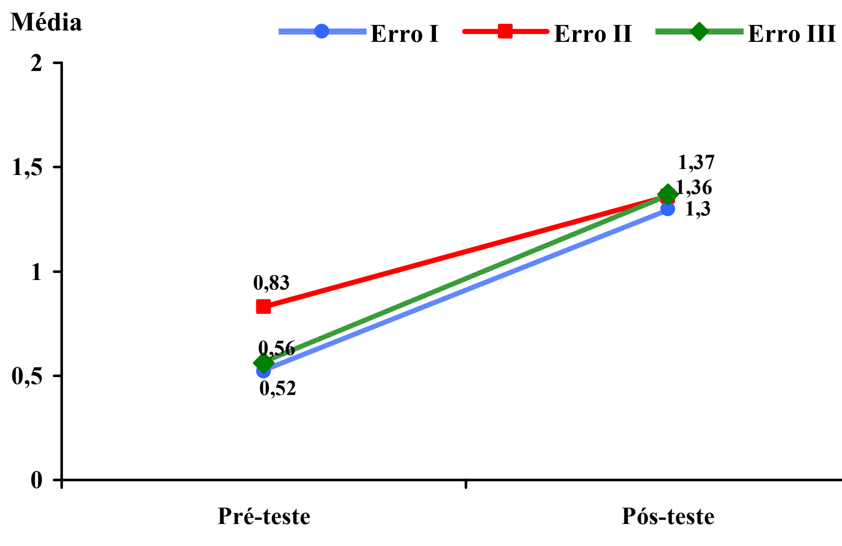


Figura 27. Interação Fase X Condição (Tarefa 3 - Justificativa 3: procedimento incorreto)

Observa-se um aumento na freqüência de Justificativa 3 no pós-teste para os três tipos de erros. Os resultados obtidos consistentemente mostram que após a intervenção, as crianças do grupo experimental não apenas identificam os invariantes da divisão presentes na situação-problema como passam a apresentar justificativas mais explicitas do que antes da intervenção nos três tipos de procedimentos incorretos de resolução que violam princípios invariantes da divisão, o mesmo não sendo observado com as crianças do grupo controle que tendem a manter o raciocínio ancorado na noção de igualdade entre as partes ou em aspectos irrelevantes da situação-problema.

8.1.3. Os avanços, permanências e regressões no emprego das justificativas no pré-teste e no pós-teste.

Embora os dados sejam evidentes quanto aos ganhos das crianças do grupo experimental após a intervenção, é importante examinar em relação às justificativas, a natureza dos avanços, as regressões identificadas e as permanências. Esses dados são apresentados na Tabela 27.

Tabela 27 - Freqüência e percentual (entre parênteses) de avanços, permanências e regressões das justificativas nas duas fases na Tarefa 3.

Do pré para o pós-teste		**Controle**	**Experimental**
	J1 → J3	14 (5)	110 (43)
Avanços	J1 → J2	29 (11.5)	1 (0.5)
(n = 256)	J2 → J3	15 (6)	87 (34)
	Total	**58 (19.4)**	**198 (66)**
	J1	88 (27.5)	6 (1.5)
Permanências	J2	46 (14)	1 (0.3)
(n = 318)	J3	82 (25.7)	95 (31)
	Total	**216 (72)**	**102 (34)**
	J3 → J1	7 (27)	0
Regressões	J3 → J2	7 (27)	0
(n = 26)	J2 → J1	12 (46)	0
	Total	**26 (8.6)**	**0 (0)**

Em termos gerais, os avanços são mais freqüentes no grupo experimental (66%) do que no grupo controle (19.4%); enquanto que os casos de permanência são mais freqüentes no grupo controle (72%) do que no grupo experimental (34%). As regressões foram raras e ocorreu apenas no grupo controle (8.6%). Como já mencionado nas tarefas anteriores, é difícil fornecer uma explicação apropriada para as regressões identificadas.

As crianças do grupo controle, no pós-teste, continuam apresentando as mesmas dificuldades que experimentavam no pré-teste, uma vez que permanecem oferecendo Justificativas 1 (27.5%) e Justificativas 2 (14%). As crianças do grupo experimental, por sua vez, apresentam avanços que se caracterizam por movimentos da Justificativa 1 para a Justificativa 3 (43%) e da Justificativa 2 para Justificativa 3 (34%), ou seja, vão da percepção de apenas aspectos irrelevantes da situação ou apenas um aspecto da situação-problema à percepção das relações existentes entre os termos da divisão. Esses resultados sugerem que as crianças que foram submetidas à intervenção passam a tomar consciência da existência dos invariantes operatórios da divisão.

8.1.4. Relações entre o desempenho e as justificativas

O fato das justificativas terem, em certo sentido, um caráter hierárquico, sobretudo em relação à Justificativa 3 (nível de compreensão mais elaborado a respeito dos invariantes operatórios da divisão), é interessante examinar se existiria alguma relação entre resposta correta e o tipo de justificativa oferecido pela criança, como ilustrado na Tabela 28.

Tabela 28- Freqüência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas e incorretas em cada justificativa na Tarefa 3.

Justificativas	**Respostas**	
	Correta	**Incorreta**
J1 (ausente ou imprecisa) (n = 361)	**174** (48%)	**187** (52%)
J2 (foca atenção em apenas um aspecto) (n = 245)	**28** (11%)	**217** (89%)
J3 (expressa compreensão dos invariantes violados) (n = 594)	**591** (99.5%)	**3** (0.5%)

Em termos gerais, nota-se que a quase totalidade das Justificativas 3 (99.5%) é acompanhada de respostas corretas; enquanto que a grande maioria das justificativas 2 (89%) está associada as respostas incorretas.

Nos casos em que a criança fornece uma justificativa mais elaborada e adequada são raras as respostas incorretas (resposta incorreta na Justificativa 3: 0.5%). Por outro lado, as respostas corretas nos casos em que a criança fornecia uma Justificativa 1 podem ser tidas como respostas ao acaso, visto que a falta de clareza e precisão de suas respostas colocam em evidência uma dificuldade em detectar e analisar os invariantes operatórios da divisão. Essas colocações explicam porque as Justificativas 1 tanto eram acompanhadas de respostas corretas (48%) como incorretas (52%). Ademais, a ausência de justificativa nem sempre está relacionada à dificuldade ou falta de compreensão da criança no que se refere à tarefa, podendo, algumas vezes, indicar muito mais uma impossibilidade de explicitação do conhecimento já construído do que a falta deste.

As Justificativas 2 são acompanhadas de um elevado percentual de respostas incorretas (89%). Isso ocorre porque a criança não detecta o princípio invariante da divisão que está sendo focalizado no item e centra a atenção em apenas um dos aspectos da situação-problema (ora no valor do dividendo, ora no valor do divisor ou no valor do resto).

O alto percentual de respostas corretas associado à Justificativa 3 (99.5%) merece destaque, pois sugere que as crianças que apresentam uma resposta correta têm uma compreensão maior acerca dos princípios invariantes da divisão que precisam ser considerados durante o raciocínio multiplicativo. Tais resultados corroboram com as discussões tecidas anteriormente acerca do desempenho e das justificativas oferecidas pelas crianças.

8.2. Comentários

O resultado mais importante derivado da aplicação da Tarefa 3 (Julgamento dos procedimentos incorretos de resolução) foi que as crianças que receberam intervenção alcançaram um nível de compreensão mais elaborado acerca dos princípios invariantes da divisão do que as crianças do grupo controle, no pós-teste, e que essa compreensão se manifesta na capacidade da criança em identificar com sucesso procedimentos incorretos de resolução. Isso foi observado não apenas em relação ao número de acertos, mas também em relação às justificativas.

Apenas as crianças do grupo experimental apresentaram progressos significativos para detectar e analisar os procedimentos incorretos de resolução quando comparado o pré-teste com o pós-teste, apesar do conhecimento inicial avaliado pelo pré-teste ter se mostrado semelhante para os dois grupos.

A análise dos tipos de procedimentos incorretos de resolução revela que o Erro II é mais fácil de ser identificado pelas crianças. Isso talvez ocorra porque no Erro II o resto é colocado em evidência (resto maior que o número de partes ou tamanho das partes); é possível que do ponto de vista cognitivo a idéia de redistribuição dos elementos presentes no resto somente apareça quando a criança tem a sua disposição, no resto, um número suficientemente grande de elementos para serem distribuídos. Em outras palavras, a idéia de redistribuição do resto ocorre apenas quando a criança pode estabelecer comparações entre o tamanho do resto e o número de partes ou tamanho das partes formadas, tendo como critério âncora o princípio de igualdade entre as partes.

Outro aspecto interessante diz respeito aos tipos de problemas e às justificativas. Observou-se que antes da intervenção os grupos ofereciam mais justificativas que expressam a compreensão dos invariantes da divisão nos problemas de divisão por partição e que, após a intervenção, apenas as crianças do grupo controle continuaram oferecendo mais Justificativa 3 (expressam a compreensão dos invariantes da divisão) para os problemas de divisão por partição. Esses resultados são uma forte indicação de que as crianças do grupo controle continuam fundamentadas apenas no princípio de igualdade entre as partes, que está explícito na situação-problema; enquanto que as crianças que foram submetidas à intervenção ampliam essa noção atentando para outros princípios invariantes da divisão que devem ser observados.

Ao que parece a noção de quota é secundária à idéia de partição, porque a idéia de partição salienta que o número de partes tem que ser distribuído em quantidades iguais e não chama atenção para o fato de que estas partes devam ser mantidas constantes e fixas. O que leva a inferir que, do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo, a noção de igualdade entre as partes é o primeiro invariante da divisão a ser percebido pela criança.

Os resultados obtidos com as crianças do grupo experimental, após a intervenção, parecem indicar que o desenvolvimento cognitivo não pode ser explicado apenas em relação ao progresso isolado e espontâneo da lógica infantil, mas como conseqüência de uma lógica associada à instrução. Em outras palavras, uma vez ocorrida a explicitação e a reflexão sobre os princípios invariantes norteadores de determinados conceitos, as noções iniciais evoluem para formas que não podem ser mais separadas da própria instrução, haja vista que as crianças do grupo experimental após intervenção alcançaram um nível maior de compreensão sobre princípios invariantes que são relevantes para o raciocínio multiplicativo, independente do tipo de erro que está sendo evidenciado na situação-problema. Apenas as crianças que foram submetidas à intervenção tiveram progressos entre o pré e o pós-testes para identificar e analisar os princípios invariantes da divisão que estavam sendo violados nos itens. Isso porque foram levadas a desenvolver uma habilidade cognitiva que superpassa as idéias âncoras que direcionam inicialmente seu pensamento, como, por exemplo, a noção de igualdade entre as partes, permitindo as crianças, por outro lado, a considerar a existência de outros princípios invariantes para o conceito de divisão.

Parte V: Comparações entre as tarefas que compõem o pré e o pós-testes específicos quanto às respostas mais elaboradas

Nesta parte, os resultados obtidos nas três tarefas que compõem o pré-teste e o pós-teste específicos (Tarefa 1: relações inversas; Tarefa 2: significado do resto; Tarefa 3 procedimentos incorretos de resolução) são colocados em perspectiva com vistas a uma comparação entre eles. Comparações foram feitas em relação às respostas mais elaboradas oferecidas pelas crianças de ambos os grupos (controle e experimental) em cada tarefa[53]. A opção por examinar apenas a resposta mais elaborada em cada tarefa, em detrimento das demais, deveu-se a três razões: (i) os sistemas de análise nas tarefas eram distintos e uma forma de torná-los análogos e passíveis de uma comparação era tomar apenas a resposta mais elaborada; (ii) a resposta mais elaborada expressa a compreensão acerca dos princípios invariantes da divisão; (iii) comparar as tarefas em função da resposta mais elaborada permite examinar em qual das três tarefas, antes e depois da intervenção, as crianças apresentam uma compreensão mais sofisticada da divisão.

9. Resultados

A distribuição das respostas mais elaboradas é apresentada na Tabela 29.

[53] As justificativas referentes à Tarefa 1 (Julgamento das relações inversas) e a Tarefa 3 (Julgamentos dos procedimentos incorretos de resolução) e as respostas referentes à Tarefa 2 (Julgamento do significado do resto) que demonstram a compreensão acerca dos princípios invariantes da divisão serão, a partir deste momento, denominadas respostas mais elaboradas.

Tabela 29 - Média de respostas mais elaboradas (máximo: 6) e desvio (entre parênteses) em função do grupo e das tarefas (T1, T2 e T3) no pré-teste e no pós-teste.

Fases	Grupos	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Total
Pré -teste	**GC**	**1.00** (1.28)	**3.00** (2.46)	**1.92** (2.25)	**1.97** (2.00)
	GE	**0.78** (1.09)	**2.94** (2.59)	**1.90** (1.85)	**1.87** (1.84)
Pós-teste	**GC**	**1.00** (1.37)	**3.36** (2.59)	**2.22** (2.39)	**2.19** (2.12)
	GE	**4.30** (1.85)	**5.68** (1.11)	**5.84** (0.47)	**5.27** (1.14)
	Total	**1.77** (1.40)	**3.75** (2.19)	**2.97** (1.74)	

Os dados no pré-teste foram analisados separadamente através de três análises de variância a uma via, considerando-se o número de respostas elaboradas como variável dependente e os grupos (GC e GE) como variável independente. A Análise de Variância a uma via não detectou diferenças significativas entre os grupos em cada uma das tarefas: Tarefa 1 [F (1.98) = 0.856; p = 0.357], Tarefa 2 [F (1.98) = 0.014; p = 0.906] e Tarefa 3 [F (1.98) = 0.002; p = 0.961].

Os dados foram submetidos a uma Análise de Variância em três vias, tendo como fatores Grupo (2: controle e experimental), Tarefa (3: Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3), Fase (2: pré-teste e pós-teste), sendo os últimos dois fatores do tipo intra-sujeitos. Essa análise produziu efeitos principais significativos para Fase [F (1.98) = 353.579; p = 0.000], Tarefa [F (2.97) = 36.313; p = 0.000] e Grupo [F (1.98) = 36.746; p = 0.000].

O efeito Fase caracterizou-se por um aumento expressivo de respostas mais elaboradas do pré-teste (média: 1.92) para o pós-teste (média: 3.73). O efeito Grupo, por sua vez, pode ser atribuído a um número maior de respostas mais elaboradas no grupo experimental (média: 3.57) do que no grupo controle (média: 2.08). Esses resultados (ver Tabela 29) devem-se quase que exclusivamente às crianças do grupo experimental que, após a intervenção, demonstram uma maior compressão acerca dos princípios invariantes da divisão que estão contemplados nas respostas mais elaboradas.

Com relação ao efeito principal Tarefa, o Teste de Tukey revelou diferenças significativas entre as três tarefas (média na Tarefa 1: 1.77; média na Tarefa 2: 3.75 e média na Tarefa 3: 2.97; $p<.001$). Ambos os grupos nas duas fases apresentam uma freqüência maior de respostas elaboradas na Tarefa 2 (significado do resto) do que na Tarefa 1 (relações inversas).

Foram detectadas interações significativas para Fase X Grupo [F (1.98) = 272.850; p = 0.000], Tarefa X Fase [F (2.97) = 3.991; p = 0.022] e Tarefa X Fase X Grupo [F (2.97) = 4.330; p = 0.016]. Não foram detectadas diferenças significativas para a interação Tarefa X Grupo [F (2.97) = 1.707; p = 0.187].

Na interação Fase X Grupo o Teste de Tukey revelou que foram significativas as diferenças entre os grupos no pós-teste ($p < .001$, intergrupo) e entre o pré-teste e o pós-teste no grupo experimental ($p < .001$, intragrupo). A Figura 28 ilustra essa interação.

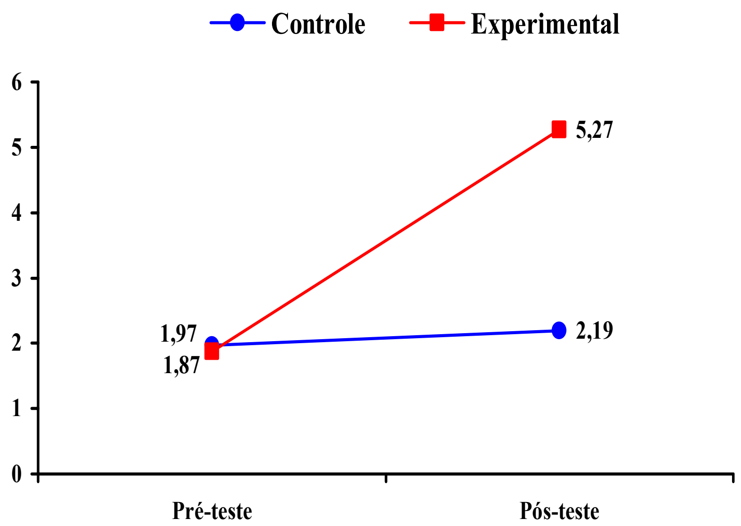


Figura 28. Interação Fase X Grupo (Respostas mais elaboradas nas três tarefas)

Essa interação demonstra que a freqüência de respostas mais elaboradas no grupo experimental (média: 5.27) é maior do que no grupo controle (média: 1.87) no pós-teste. Observa-se, também, que há um aumento de respostas elaboradas do pré-teste (média: 1.87) para o pós-teste (média: 5.27) no grupo experimental; enquanto esse mesmo aumento não é estatisticamente significativo em relação ao grupo controle (média no pré 1.97 e média no pós 2.19). Mais uma vez, evidencia-se que a intervenção propiciou o desenvolvimento de uma compreensão mais apropriada de divisão.

Quanto ao efeito interativo Tarefa X Fase o Teste de Tukey revelou que foram significativas as diferenças: (a) entre o pré-teste e o pós-teste nas três Tarefas ($p < .001$); (b) entre Tarefa 1 vs Tarefa 2 no pré-teste e no pós-teste ($p < .001$); (c) entre Tarefa 1 vs Tarefa 3 no pré-teste e no pós-teste ($p < .001$); (d) entre Tarefa 2 vs. Tarefa 3 no pré-teste ($p < .001$) e no pós-teste ($p < .01$). A Figura 29 ilustra essa interação.

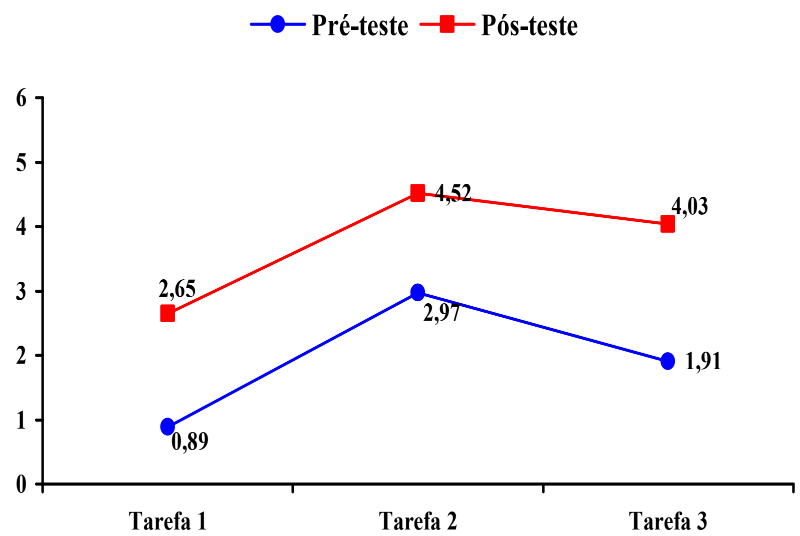


Figura 29. Interação Tarefa X Fase (Respostas mais elaboradas nas três tarefas)

Como mostra a Figura 29, essa interação demonstra o quanto à freqüência de respostas mais elaboradas nas três tarefas é superior no pós-teste quando comparado ao pré-teste. Esses efeitos, como mostra Tabela 29, devem-se quase que exclusivamente à melhora do grupo experimental que após a intervenção amplia a média de respostas elaboradas nas três tarefas.

Observa-se que as respostas elaboradas, tanto no pré-teste como no pós-teste, concentram-se muito mais na Tarefa 2 – significado do resto (médias: 2.97 e 4.52, respectivamente) do que na Tarefa 1- relações inversas (médias: 0.89 e 2.65, pré e pós-testes, respectivamente).

Quanto ao efeito Tarefa X Fase X Grupo, o Teste de Tukey revelou diferenças significativas para cada uma das três tarefas entre os grupos no pós-teste ($p < .001$, intergrupo) e entre pré-teste e o pós-teste no grupo experimental ($p < .001$, intragrupo). Não foram detectadas diferenças significativas entre os grupos no pré-teste nas três tarefas nem tampouco entre o pré e o pós-teste no grupo controle em cada tarefa (ver Figura 30).

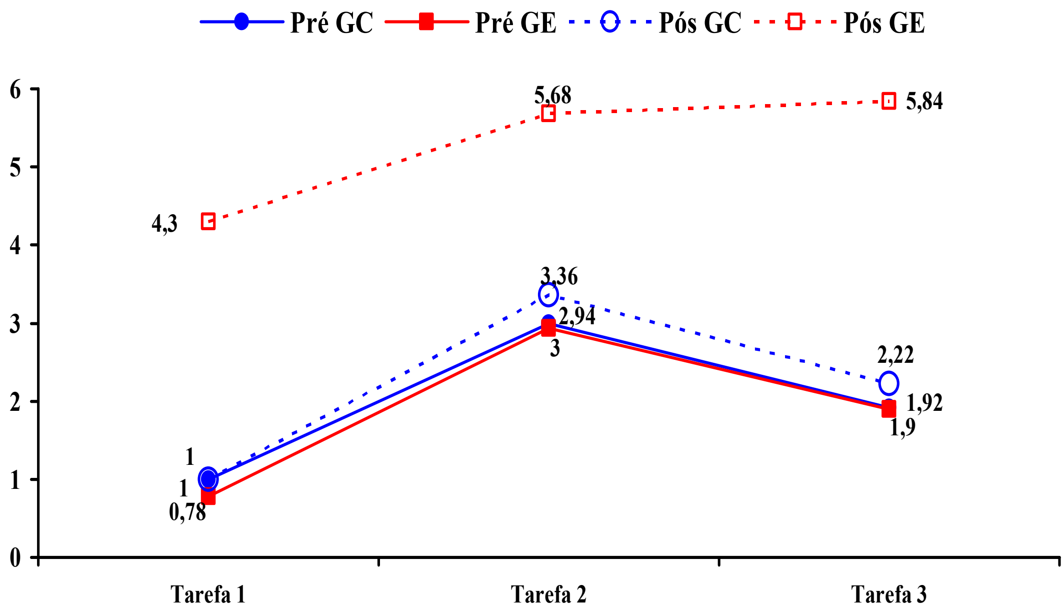


Figura 30. Interação Tarefa X Fase X Grupo (média de respostas mais elaboradas)

Verifica-se que a freqüência de resposta mais elaborada oferecida pelo grupo experimental é maior do que o grupo controle, no pós-teste. Apenas as crianças submetidas à intervenção aumentam o número de respostas elaboradas do pré-teste para o pós-teste. Nota-se também, que no pós-teste, o grupo experimental tende a aproximar as médias de respostas mais elaboradas na Tarefa 2 (significado do resto) e na Tarefa 3 (procedimentos incorretos de resolução). Embora o grupo controle tenha um aumento na freqüência de respostas elaboradas na Tarefa 2 (médias: pré 3.00 e pós 3.36) e na Tarefa 3 (médias: pré 1.92 e pós 2.22), tais diferenças não foram significativas. Portanto, essa interação deve-se às crianças que foram submetidas à intervenção que superaram a tendência em considerar os aspectos irrelevantes, passando a atentar, nas três tarefas, para as relações entre os termos da divisão.

9.1. Comentários

Os dados mais interessantes derivados da comparação entre as tarefas referem-se à possibilidade de: (i) identificar que tarefa mostra-se mais complexa e que tarefa mostra-se mais acessível para as crianças; (ii) identificar em que tarefa o avanço é mais expressivo e em que tarefa o avanço é menos expressivo.

De modo geral, a Tarefa 1 (relações inversas) foi a mais difícil em relação à emergência de respostas elaboradas que expressam uma compreensão acerca dos invariantes da divisão. Esta dificuldade, identificada no pré-teste, persiste mesmo entre algumas das crianças que foram expostas à intervenção. Ao que parece, a intervenção não foi suficiente para que todas as crianças do grupo experimental passassem a compreender as relações inversas entre o quociente e o divisor quando o dividendo é mantido constante. Assim, compreender as relações inversas é algo complexo e difícil de ser alcançado mesmo quando intervenções específicas são fornecidas acerca dessas relações. Diante disso, é necessário pensar em como tornar a intervenção proposta mais eficiente no sentido de garantir uma compreensão das relações inversas por um número maior de crianças. Algumas possibilidades, nesta direção, são levantadas na conclusão final deste trabalho.

Por outro lado, a Tarefa 2 (significado do resto) foi a mais fácil no que diz respeito às respostas elaboradas. À primeira vista, tal resultado parece ser incongruente com a literatura na área, visto que diversos autores apontam que crianças têm dificuldades em lidar com o resto. Como explicar, então, esse resultado? Uma possível explicação para isso é que na Tarefa 2 a criança, diferentemente do que ocorre quando resolve problemas de divisão, é explicitamente solicitada a pensar sobre o resto. Isto é, por não ser evidenciado ou explicitado em situações de aprendizagem, em geral, as crianças tendem a ignorar o resto ou inserí-lo em alguma das partes, por acreditar que por ser pequeno é algo que não tem grande relevância para a resolução do problema. Na Tarefa 2, ao contrário, o examinador leva a criança a atribuir um papel mais expressivo ao resto no processo de resolução. Isso explicaria o fato das crianças do grupo controle terem tido progresso, mesmo sem receberem intervenção alguma. Ao olhar as crianças do grupo experimental, nota-se que a apresentação da tarefa no pré-teste associada à intervenção produziram um progresso ainda mais expressivo no pós-teste. Isso significa que colocar o resto em evidência pode ser recurso didático importante e que a dificuldade em lidar com ele pode ser facilmente superada através de situações deste tipo. Isso será discutido em maiores detalhes na conclusão.

A Tarefa 3 (procedimento incorreto de resolução) apresentou um nível de dificuldade intermediário quando comparada à maior dificuldade na Tarefa 1 e a menor dificuldade na Tarefa 2. É dificuldade intermediária porque a criança tem que lidar com o resto e com a igualdade entre as partes e isso é mais difícil que lidar de forma explícita e isolada com o resto apenas. Na situação da Tarefa 2 tanto o resto como a igualdade entre as partes eram inseridos em uma situação mais ampla (procedimentos de resolução corretos e incorretos) que requeria da criança julgar a situação como um todo, sem que um aspecto fosse colocado em evidência, como ocorreu na Tarefa 2. Além disso, nesta tarefa, as crianças não precisam lidar com as relações de covariação, como ocorria na Tarefa 1.

A partir desses comentários parece que há níveis distintos de dificuldades que emergem em cada uma das tarefas propostas. A maior dificuldade da criança é em lidar e compreender as relações inversas entre os termos da divisão. Essa dificuldade é difícil de ser superada, parecendo resistir, em certo sentido, à intervenção. Já as dificuldades em lidar com o resto parecem ser mais facilmente superadas.

CONCLUSÕES E

DISCUSSÕES

CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

As conclusões derivadas dos principais resultados obtidos nesta investigação são apresentadas e discutidas em três blocos: as dificuldades experimentadas pelas crianças, o efeito da intervenção conduzida sobre a compreensão da criança a respeito da divisão e as relações entre a pesquisa em Psicologia e a Educação Matemática.

As dificuldades iniciais das crianças com a divisão

As dificuldades das crianças com a divisão foram tratadas em três diferentes planos. O primeiro plano caracterizou-se por um mapeamento das dificuldades a partir de uma revisão da literatura na área, tomando por base os resultados de pesquisas realizadas nos últimos anos no Brasil e no exterior. Este mapeamento permitiu identificar as principais dificuldades, fossem elas de natureza epistemológica (decorrentes da complexidade inerente ao conceito de divisão), de natureza psicológica (decorrentes do próprio desenvolvimento da criança em termos de esquemas cognitivos), de natureza didática (decorrentes da maneira como a escola ensina a divisão), ou, ainda, decorrentes de uma combinação destes três aspectos.

Em um segundo plano, as dificuldades foram inseridas nas tarefas adotadas nas ocasiões de pré-teste e de pós-teste deste estudo que tinham por objetivo avaliar os participantes quanto ao conhecimento que apresentavam sobre a divisão. Neste sentido, as dificuldades documentadas na literatura passaram, então, a fazer parte do perfil das crianças investigadas nesta pesquisa. Em um terceiro plano, as dificuldades foram inseridas na intervenção proposta neste estudo, constituindo as atividades apresentadas pelo examinador, cujo propósito não era mais o de avaliar as crianças, mas propiciar situações de instrução que desenvolvessem formas mais sofisticadas e apropriadas de lidar com a divisão.

Em se tratando de um estudo de intervenção, é importante compreender quais as dificuldades iniciais experimentadas pelas crianças e se tais dificuldades foram superadas com a intervenção. Na primeira parte deste capítulo final serão discutidas as dificuldades identificadas no pré-teste geral e nos pré-testes específicos.

As dificuldades no pré-teste geral

O pré-teste geral teve por objetivo selecionar um conjunto de crianças que, de fato apresentassem dificuldades com a divisão. A incidência de um número elevado de respostas incorretas e de respostas que receberam pontuação um, tanto nos problemas prototípicos (típicos escolares) como nos problemas que envolvem relações inversas, no pré-teste geral, demonstra que as crianças que participaram da amostra apresentavam um conhecimento bastante elementar quanto à compreensão acerca dos invariantes da divisão. Estas crianças, apesar de já instruídas sobre a divisão no contexto escolar, continuavam apresentando sérias dificuldades em relação a este conceito. Isso indica que a instrução escolar não tem auxiliado a criança a compreender a divisão enquanto operação matemática, como documentam diversos autores (CALSA, 2002; CORREA; SPINILLO, 2004; LAUTERT, 2000; LAUTERT; SPINILLO, 1999, 2001, 2002; LI,2001; LI; SILVER, 2000; NUNES; BRYANT, 1997; SAIZ, 2001; SELVA, 1998).

O pré-teste geral permitiu, ainda, compor os grupos controle e experimental de tal forma que as crianças alocadas em cada um destes grupos fossem equivalentes quanto às dificuldades que apresentavam a respeito da divisão. No entanto, além de garantir cuidados de natureza experimental, o pré-teste geral permitiu identificar aspectos interessantes quanto ao desempenho das crianças ao resolverem problemas de divisão com resto e sem resto.

Como descrito em capítulos anteriores, o pré-teste geral envolveu dois tipos de problemas: problemas prototípicos semelhantes àqueles apresentados no contexto escolar; e problemas de relações inversas que não requeriam, necessariamente, o uso de cálculos numéricos e que envolviam a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Diferenças no desempenho e em formas de resolução foram identificadas na análise dos dados no pré-teste geral quanto a esses problemas. Observou-se, por exemplo, um melhor desempenho nos problemas prototípicos do que nos problemas de relações inversas. Três explicações são levantadas para este resultado.

Uma primeira explicação é que os problemas prototípicos são familiares às crianças, visto que a escola adota sistematicamente problemas deste tipo. Os problemas de relações inversas, por sua vez, são usados apenas em contexto de pesquisa, sendo pouco familiares.

Uma segunda explicação é que, no caso dos problemas prototípicos, a resposta para o problema pode ser obtida a partir de representações convencionais (algoritmo canônico) ou não convencionais (grafismos icônicos, pictográficos ou a combinação de diferentes sistemas de representação); enquanto que nos problemas de relações inversas quando o dividendo é mantido constante, as relações de covariação entre os termos não são tão evidentes e nem passíveis, pelo menos aos olhos das crianças, de serem representadas graficamente, parecendo que se estabelecem apenas ao nível de operações mentais.

Entretanto, uma terceira explicação pode ser levantada, considerando-se outros aspectos que poderiam ter dificultado o desempenho nos problemas de relações inversas, como por exemplo, o fato de que eles requeriam da criança estabelecer uma relação entre o dividendo e o divisor relativo a um dos personagens do problema, estabelecer esta mesma relação quanto ao outro personagem e, então, proceder a uma comparação entre o produto derivado dessas relações e as duas relações prévias. Isso parece ser muito mais complexo do que resolver problemas de divisão prototípicos em que comparações dessa ordem não são requeridas. Na realidade, as resoluções requeridas para problemas de relações inversas se assemelham, em certo sentido, à resolução de problemas de proporção do tipo comparação, que envolvem comparações de segunda ordem que se caracterizam por comparações entre duas relações de primeira ordem (SPINILLO; BRYANT, 1991; SPINILLO, 1992, 1993, 1995). Isso parece ser mais difícil, porque as noções de covariação não são construídas isoladamente, pois constituem organizações de conjuntos em que todos os elementos são solidários e se equilibram entre si, como afirmado por Piaget (1969).

As dificuldades nas três tarefas no pré-teste específico

O objetivo das tarefas que fizeram parte do pré-teste específico foi examinar dificuldades específicas relacionadas aos invariantes da divisão. De modo geral, os resultados obtidos mostraram que as dificuldades das crianças se concentram em dois blocos:

(i) <u>dificuldades em lidar com o resto.</u> Dentre as diferentes maneiras de lidar com o resto em operações de divisão inexata, as mais elementares parecem ser a tentativa da criança em inserir o resto em uma das partes em que o todo foi dividido; ou, então, propor que o resto seja retirado do processo de resolução. Na realidade, a criança não atenta para o significado do resto na divisão. Tais resultados confirmam os achados dos estudos desenvolvidos por vários pesquisadores (SILVER, 1988; SILVER; SHAPIRO; DEUTSCH, 1993; LAUTERT; SPINILLO, 2002; SELVA, 1998; SELVA; BORBA; STEEDMAN, 2004) que mostram que as formas de expressar o resto nem sempre são incorporadas à solução de um problema e que parece ser mais elementar ignorá-lo do que inserí-lo no processo de resolução.

(ii) <u>dificuldades com as relações inversas.</u> As crianças têm dificuldades em lidar com as relações de covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante (CORREA, 2000; CORREA, 2001; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; KORNILAKI; NUNES, 1997, SQUIRE, 2002). Esta parece ser uma das maiores dificuldades das crianças, a qual, inclusive, parece ser difícil de ser superada, como discutido adiante. Ao realizar o julgamento das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante, as crianças erram porque consideram apenas um dos elementos da divisão (dividendo ou divisor). O erro mais freqüente é concentrar a atenção no tamanho do divisor (maior divisor) e esquecer o tamanho do dividendo. Esses resultados estão de acordo com pesquisas anteriores que mostram que a criança ao estabelecer as relações de covariação entre os termos focaliza a atenção no dividendo e esquece o tamanho do divisor ou focaliza atenção no divisor e esquece o tamanho do dividendo (CORREA, 1996; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; SQUIRE, 2002).

Essas dificuldades foram incorporadas à intervenção proposta e avaliadas nos pós-testes específicos (Tarefa 1: Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão, Tarefa 2: Julgamento do significado do resto e Tarefa 3: Julgamento dos procedimentos incorretos de resolução) nos dois grupos de crianças, como discutido a seguir.

O papel da intervenção na superação das dificuldades

Independente da dificuldade apresentada (relações inversas quando o dividendo é mantido constante ou formas de lidar com o resto), o grupo experimental alcançou níveis de compreensão mais sofisticados sobre os invariantes operatórios da divisão do que o grupo controle, apesar das crianças em ambos os grupos haverem apresentado o mesmo nível de dificuldade com a divisão na ocasião dos pré-testes. Isso foi observado não apenas em relação ao desempenho (número de acertos), mas também, em relação às justificativas e às respostas mais elaboradas fornecidas pelas crianças ao explicitarem as bases de seu raciocínio.

O avanço das crianças do grupo experimental não ficou circunscrito apenas aos pós-testes específicos (pós-testes na Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3) que além de envolverem tarefas que guardavam certa semelhança com as situações apresentadas na intervenção, haviam sido aplicados logo após a intervenção (três a cinco dias após a intervenção). O avanço se estendeu, também, ao pós-teste geral que era distinto das situações de intervenção e que havia sido aplicado muito depois da intervenção (aplicado oito a dez semanas após o pré-teste específico). Isso indica que a intervenção teve um papel fundamental sobre a compreensão das crianças acerca dos invariantes operatórios da divisão, gerando certa estabilidade e amplitude na forma de raciocinar da criança.

Dado o papel facilitador da intervenção nesse estudo, cabe analisar os aspectos nela presentes que propiciaram os avanços identificados nas crianças do grupo experimental. Esta análise pode ser realizada em duas direções: sobre aspectos gerais norteadores da interação entre o adulto e a criança e sobre aspectos específicos relativos ao conceito de divisão.

No que concerne aos aspectos gerais, destaca-se o fato de que o adulto propiciava discussões e reflexões de natureza metacognitiva que levavam a criança a refletir acerca dos seus processos de resolução, de sua forma de raciocinar frente a uma dada situação-problema. Explicações eram sistematicamente fornecidas por parte do examinador que direcionava a atenção da criança para os aspectos relevantes da situação. Necessário comentar que a importância da metacognição enquanto ferramenta cognitiva facilitadora para desencadear processos de aprendizagem em situações de instrução tem sido enfatizada por vários autores (FLAVELL, 1999; SEMINÉRIO; ANSELME; CHATON, 1999; SPINILLO, 1999, 2003). Este mecanismo, como comentado nas seções teóricas desta pesquisa, desempenha papel decisivo na construção do conhecimento.

No que concerne aos aspectos específicos diretamente relacionados ao conceito de divisão, verifica-se que a intervenção proposta tomou por base a perspectiva de Vergnaud (1990, 1997, 2003) de que uma única situação é insuficiente para abarcar todas as facetas e peculiaridades de um dado conceito, sendo necessário examinar um mesmo conceito à luz de diversas situações. Esta idéia foi posta em ação na intervenção ao se apresentar atividades variadas que versavam tanto sobre os invariantes operatórios da divisão como sobre as dificuldades específicas que as crianças experimentam, conforme documentado na literatura e observado nos pré-testes nesse estudo, em particular as dificuldades em lidar com o resto e as dificuldades em lidar com as relações inversas entre os termos da divisão. Neste sentido, a intervenção proposta pode ser entendida como um exemplo de uma situação de instrução que procurou colocar em ação pressupostos importantes de uma abordagem teórica que possui afiliação clara com a Psicologia e com a Educação.

No entanto, dada a complexidade da divisão e a complexidade da cognição humana, é possível pensar que a intervenção, apesar de facilitadora, pode não ter gerado um quadro homogêneo de ganhos a respeito da divisão. Em outras palavras, é necessário saber se a intervenção teve um mesmo efeito sobre a superação das dificuldades das crianças ou se beneficiou determinado aspecto mais que outro. Uma questão dessa ordem tem relações com o próprio desenvolvimento da compreensão do conceito de divisão pois, como discutido no capítulo em que os resultados das três tarefas são discutidos de forma conjunta, parece existir uma progressão na aquisição de formas de raciocinar mais sofisticadas e na superação das dificuldades experimentadas.

Antes de tentar caracterizar esta progressão é necessário indicar quais as dificuldades que foram superadas e quais as que, apesar de superadas, de certa forma, resistiram ao papel facilitador da intervenção.

(i) <u>dificuldades em lidar com o resto.</u> A idéia inicial da criança era de que o resto não pertence ao problema, devendo, portanto, ser desconsiderado no processo de resolução. Quando considerado, o resto era entendido como algo a ser inserido em uma das partes, ainda que isso violasse o princípio da igualdade entre as partes. Após a intervenção, as crianças passaram a atribuir um significado ao resto na divisão. Acredita-se que as intervenções do examinador durante a interação com a criança que colocavam o resto em evidência (chamando a atenção da criança diretamente sobre o resto, aumentando o tamanho do resto) tenham levado a criança a compreender que aquele conjunto de elementos fazia parte do processo de divisão, que mantinha estreitas relações com os outros termos da divisão e que as formas de lidar com o resto deveriam obedecer aos princípios invariantes da divisão. É possível supor que apresentar o resto com muitos elementos seja uma estratégia didática interessante para levar a criança a atentar para o resto na divisão, como ocorreu durante a intervenção. A dificuldade em lidar com o resto parece ser passível de ser superada através de atividades como aquelas propiciadas às crianças do grupo experimental.

(ii) <u>dificuldades com as relações inversas</u>. Lidar com as relações de covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante parece ser uma das maiores dificuldades das crianças, sendo mais difícil de ser superada do que as dificuldades em lidar com o resto. Isso não significa que progressos não tenham sido identificados, pelo contrário, observou-se que a intervenção fez desaparecer a tendência da criança em considerar o tamanho do dividendo como um dos critérios de julgamento para avaliar as relações de covariação entre os termos da divisão. No entanto, um determinado tipo de erro parece persistir entre as crianças mesmo após a intervenção: concentrar a atenção apenas no número de divisores. É possível que em termos do desenvolvimento conceitual, inicialmente a criança concentre a atenção no valor do dividendo, em seguida no número de divisores até chegar à compreensão das relações existentes entre os termos da divisão. Essa possibilidade, como comentado na análise dos resultados da Tarefa 1, apóia-se, primeiro, no fato de que as crianças que foram submetidas à intervenção deixam de adotar o valor do dividendo como critério de julgamento; segundo, as crianças que mais se beneficiaram da intervenção foram as que estavam prestes a fazer a passagem da atenção focalizada no número de divisores (maior divisor) para a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão.

Colocando em perspectiva esses dois tipos de dificuldade, observa-se que compreender as relações de covariação entre os termos da divisão é mais complexo do que compreender o significado do resto. Isso talvez ocorra porque o resto é mais evidente do que as relações inversas. Enquanto o resto pode ser representado por objetos concretos manipuláveis ou por representações diversas (simbólicas, pictográficas ou icônicas) que o tornam mais facilmente um objeto de análise; as relações inversas possuem um caráter abstrato, sendo o resultado de uma comparação realizada mentalmente que não pode ser tomada para análise de maneira tão evidente e direta quanto o resto.

Apesar de ser de difícil compreensão para as crianças, o resto parece ser uma dificuldade que pode ser superada através de situações que o coloque em evidência, como por exemplo, a Tarefa 2. Vale lembrar que na Tarefa 2 as crianças do grupo controle tiveram um melhor desempenho no pós-teste do que no pré-teste em relação à maneira de lidar com o resto. Isso ocorreu porque o examinador ao aplicar a tarefa chamava a atenção da criança sobre o resto, bem com o tamanho do resto levava a criança a ter que considerá-lo. Desta forma, mesmo sem a intervenção, as crianças do grupo controle foram capazes de passar a considerar o resto em suas respostas. No entanto, as crianças do grupo experimental tiveram um desempenho muito mais expressivo que as crianças do grupo controle, indicando que situações de instrução como aquelas oferecidas durante a intervenção são, de fato, mais proveitosas no sentido de propiciarem uma compreensão mais efetiva sobre o resto.

A intervenção proposta, as pesquisas na área e o desenvolvimento da compreensão do conceito de divisão

Se por um lado estudos de intervenção podem auxiliar a responder o quanto o curso do desenvolvimento cognitivo pode ser influenciado por situações de aprendizagem (BRAINERD, 1987; SYLVA, 1997; SPINILLO, 1999); por outro lado, estudos de intervenção podem auxiliar também a compreender como se caracteriza o desenvolvimento de um dado conceito (BRYANT, 1990). A presente investigação sugere alguns dados sobre o desenvolvimento do conceito de divisão, ainda não indicados na literatura na área.

O desenvolvimento da compreensão sobre o resto

Se por um lado é amplamente documentado nas pesquisas na área que a noção de igualdade entre as partes é o primeiro invariante da divisão a ser compreendido pela criança (CORREA, 1996; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998); por outro lado a relação entre esta compreensão e o significado do resto não é aspecto apontado na literatura. Entretanto, os dados obtidos nesta investigação sugerem que para compreender o significado do resto é importante que a criança tome consciência da existência da igualdade entre as partes e da necessidade de não violar este princípio. A criança que ao se deparar com o resto tiver em mente o princípio da igualdade entre as partes terá que re-significar este resto, desistindo da idéia de inserí-lo em um das partes já existentes ou da idéia de criar uma nova parte para inserí-lo, visto que tais alternativa violam o princípio da igualdade entre as partes.

Um outro aspecto que merece ser destacado nesse desenvolvimento é que a idéia de redistribuição dos elementos do resto parece emergir quando a criança estabelece comparações entre o tamanho do resto e o número/tamanho das partes, tendo como âncora o princípio da igualdade entre as partes. O presente estudo traz como contribuição a possibilidade de partindo de um conhecimento anterior (igualdade entre as partes) presente na idéia de divisão que a criança traz, avançar na direção da superação de uma dificuldade: lidar com o resto. Conforme Ausubel, Novak, Hanesian (1968), toda aprendizagem é afetada, de alguma forma, pela estrutura cognitiva já existente.

O desenvolvimento da compreensão sobre as relações inversas

As dificuldades com as relações inversas são documentadas desde muito tempo e por muitos estudiosos da área (CORREA, 2000; CORREA, 2001; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; KORNILAKI; NUNES, 1997, SQUIRE, 2002). Pelo apresentado neste estudo, a criança, inicialmente, concentra-se no valor do dividendo e só posteriormente se volta para o divisor; para, então, chegar à compreensão das relações existentes entre os termos da divisão. Compreender a relação de covariação presente na divisão requer considerar que ao se dividir o dividendo em muitas partes, obtém-se partes cada vez menores (e vice versa). Este princípio foi apresentado à criança durante a intervenção tanto na resolução de situações-problema como no fechamento da atividade quando fornecia um exemplo de divisão de bombons entre ela, o examinador e uma outra pessoa hipotética, levando-a a uma compreensão das relações inversas entre o divisor e o quociente quando o dividendo é mantido constante.

A explicitação verbal das crianças ao explicar e justificar

Solicitar dos participantes explicações de como procedeu ao resolver uma situação-problema ou solicitar justificativas a respeito de julgamentos realizados é procedimento bastante utilizado na pesquisa em Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo. Em muitos estudos, a progressão identificada a respeito de determinado fenômeno cognitivo é caracterizada também pelo grau de explicitação verbal que acompanha os procedimentos de resolução e os julgamentos realizados (e.g.; SPINILLO; SIMÕES, 2002; LAUTERT; SPINILLO, 2001). Em outras palavras, explicitar as bases de raciocínio pode ser considerado, em certo sentido, indicador de uma progressão, de uma aquisição mais elaborada em relação a um dado conhecimento. Como afirmam Spinillo e Simões (2002, p. 543):

> [...] é plausível supor que a explicitação verbal de um conhecimento possa indicar uma aquisição mais elaborada. Os pesquisadores encontram-se, pois, num dilema: se ao mesmo tempo é preciso ser cauteloso ao se extrair conclusões sobre o que expressam as explicitações verbais de crianças (a criança pode saber mais do que aquilo que explicita); por outro lado, as explicitações podem, também, ser indicadoras de um domínio conceitual (a criança sabe, mostra que sabe e como sabe).

Tal posição está em acordo com a proposta de Karmiloff-Smith (1992) que confere papel relevante à explicitação verbal no desenvolvimento cognitivo. Para ela, a criança que além de fazer julgamentos apropriados também explica, apresenta uma capacidade elaborada de representação de seu próprio conhecimento. Assim, de acordo com a autora, a explicitação verbal de um conhecimento indica uma fase mais elaborada na representação deste conhecimento, pois permite tornar verbalmente explícito aquilo que está implícito nas representações procedimentais.

Em certo sentido, é possível aproximar esta perspectiva daquela apresentada por Vergnaud (1990, 1997; 2003) no que diz respeito aos teoremas em ação e aos teoremas propriamente ditos. Para ele, os teoremas em ação não se caracterizam como um teorema no sentido convencional, uma vez que se referem às competências que os indivíduos mobilizam em algumas situações e que são poucos explicitados. As justificativas e respostas mais elaboradas demonstram uma mudança de natureza qualitativa de transformação de um conhecimento intuitivo para um conhecimento explícito.

Os dados obtidos no presente estudo, ou pelo menos da forma como analisados, indicam que as crianças que foram submetidas à intervenção apresentaram desempenhos e justificativas mais elaboradas do que as crianças do grupo controle. O aumento de justificativas mais elaboradas (expressam a compreensão sobre as relações inversas) apresentada pelas crianças do grupo experimental pode ser considerado um indicador de um domínio maior do que aquele apresentado por crianças que sabem, mas que, no entanto, não são capazes de explicitar. Como afirmado por Karmilof-Smith (1992), a explicitação verbal de um conhecimento que indica uma fase mais elaborada na aquisição de um dado conceito, pois possibilita tornar verbalmente explícito algo que se encontra implícito.

Da pesquisa em Psicologia para a sala de aula: algumas implicações educacionais

De maneira geral, três aspectos derivados desta pesquisa podem ser considerados como implicações derivadas da pesquisa em Psicologia para a sala de aula.

Primeiro, assumindo a perspectiva de que a toda aprendizagem ocorre sobre algo, sendo necessário considerar os domínios específicos do conhecimento nas situações de ensino (Da Rocha Falcão, 1997, 1999, 2003). Em sendo assim, é possível compreender a idéia de invariantes como instâncias definidoras dos conceitos que, pertencendo a domínios específicos do conhecimento, precisam ser considerados nas situações de ensino. Essa idéia foi adotada no presente estudo em que os invariantes da divisão foram colocados em evidência tanto nas ocasiões de avaliação do conhecimento das crianças (pré e pos testes) como nas atividades que faziam parte da intervenção proposta.

Segundo, a exemplo da interação desenvolvida entre o adulto e a criança durante as sessões de intervenção realizadas neste estudo, o professor poderia propor situações de ensino que colocassem em evidência tanto as formas da pensar dos alunos como os invariantes do conceito que deseja ensinar, criando situações diversificadas que pudessem contemplar várias facetas do conceito. A sala de aula deveria ser um ambiente de discussão em que atividades metacognitivas tivessem papel importante nas situações didáticas em que o pensamento e as ações dos alunos sejam sistematicamente colocados em evidência por parte do professor que estimulasse os alunos a explicitar e refletir sobre suas formas de raciocinar e proceder (SPINILLO, 2003).

Terceiro, a presente investigação apóia a idéia de que, partindo dos erros e dificuldades das crianças, é possível auxiliá-los a superar dificuldades e desenvolver formas de raciocinar mais apropriadas. De acordo com Pinto (2000), a análise do erro pode ser uma estratégia didática interessante a ser desenvolvida em sala de aula. Segundo a autora, não existe conhecimento matemático que não tenha passado por erros antes de ser consolidado. Nessa perspectiva, este aspecto foi considerado nesta investigação, em especial nas situações em que as crianças tanto eram solicitadas a identificar procedimentos incorretos de resolução como também a refletir acerca da natureza do erro evidenciado na situação-problema. Esta estratégia pode tornar-se um recurso didático poderoso para o ensino da divisão nas séries iniciais, uma ferramenta, que inserida em um ambiente propicio de discussões e reflexões, possibilitaria enfatizar os aspectos que são centrais para a compreensão da divisão: os invariantes operatórios presentes no raciocínio multiplicativo.

Além dessas implicações de natureza mais geral, algumas implicações especificamente voltadas para o ensino da divisão podem ser sugeridas. Em relação à dificuldade da criança em lidar com resto pode-se sugerir que no contexto escolar as crianças sejam simultaneamente apresentadas a situações-problema que envolvam tanto a divisão sem resto como divisão com resto. Ao colocar o resto em evidência, sobretudo resto com valores grandes, é dada à criança a possibilidade de estabelecer relações entre o número de partes e o tamanho das partes, sendo esta noção essencial para a compreensão da divisão enquanto operação matemática.

Em relação à dificuldade da criança em lidar com as relações inversas, situações didáticas poderiam ser apresentadas em que o professor, se utilizando de divisão sem resto, deixasse claro que o dividendo precisa ser mantido constante. Ele poderia propor atividades em que envolvesse o aumento e a diminuição do quociente e do divisor quando o dividendo é mantido constante, explicitando as relações inversas entre os termos. Semelhante, ao apresentado nesta investigação poderia se solicitar que a criança, a partir de uma situação-problema, ela própria e não apenas o adulto aumentasse ou diminuísse o quociente ou o divisor e contar o que ocorre, quando mantido o dividendo constante, por exemplo: construir com as crianças um jogo em que regras fossem previamente estabelecidas para ajudá-las a pensar mais sistematicamente sobre as relações de covariação entre os termos, haja vista ser este o invariante operatório mais difícil de ser superado pelas crianças.

É possível comentar que a instrução escolar não privilegia a reflexão sobre os invariantes operatórios presentes no raciocínio multiplicativo, não contribuindo para que a criança dê um salto qualitativo em direção à distinção existente entre a ação de compartilhar e a divisão enquanto operação matemática. A instrução acerca dos invariantes operatórios da divisão enquanto operação matemática deveria preceder ao ensino do algoritmo utilizado para representar a divisão.

Pesquisas futuras

Uma questão interessante seria investigar se a intervenção conduzida individualmente neste estudo seria bem sucedida se conduzida no contexto de sala de aula. Uma investigação desta natureza poderia fornecer mais informações acerca do ensino, da aprendizagem e da seqüência didática mais adequada para o contexto escolar.

Outra questão relevante a ser investigada diz respeito a diferentes procedimentos incorretos de resolução. Na presente investigação, o ponto de partida para a reflexão do erro foi a representação pictográfica ou a representação com materiais manipulativos. Será que a reflexão acerca do algoritmo canônico aplicado incorretamente levaria a criança à compreensão dos invariantes operatórios da divisão? Adotando-se um planejamento semelhante, poderia ser apresentados às crianças duas situações: um procedimento com o uso correto do algoritmo e um outro procedimento com o uso incorreto do algoritmo, com um determinado tipo de erro, por exemplo, o resto maior do que o tamanho das partes.

Uma outra investigação seria comparar o desempenho das crianças em problemas prototípicos e em problemas de relações inversas considerando-se os tipos de problemas, divisão por partição e divisão por quotas. Por exemplo, comparar o desempenho de problemas prototípicos de divisão por partição com os problemas de relações inversas de divisão por partição.

Uma quarta possibilidade seria examinar o significado do resto e a forma como a criança lida com este em situações-problema de faz de conta, na qual o examinador mostra uma solução correta de divisão com resto e em seguida, comenta que esqueceu de colocar outros elementos sobre a mesa e pede para que a criança pense em como resolver a situação. Por exemplo: Depois de apresentar um problema em que são distribuídos livros entre várias sobrinhas e de questionar a criança sobre o significado do resto o pesquisador (examinador) diz: “Se ao invés de três livros ao lado (quantidade de elementos do resto), houvesse mais seis livros, como ficaria a divisão dos livros entre as sobrinhas? O que muda na resolução?” Haveria diferenças entre o significado atribuído ao resto e as ações implementadas pela criança?

REFERÊNCIAS

ANGHILERI, J. The language of multiplication and division. In: DURKIN, K; SHIRE, B. (Orgs.). **Language in Mathematical Education. Research and Practice.** Buckingham, Philadelphia: Open University Press, 1993. p. 95 - 104.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Educational Psychology: A cognitive view**. New York: Holt Rinelhart and Winson, 1968.

BATISTA, A. M. S. B. **A influência dos suportes de representação na resolução de problemas com estruturas multiplicativas.** 2002. 180 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Pós - Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

BAYLEY, K.D. Interpreting smallest space analysis. **Sociológical Methods & Research**, v.3, n.1, p. 3-29, 1974.

BEVERIDGE, M. Educational implementation and teaching: school knowledge and psychological theory. In: SMITH; L.; DOCKRELL, J.; TOMLINSON, P. (Orgs.). **Piaget, Vygotsky and beyond.** London: Routledge, 1997. p. 21-35.

BEZERRA, F.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. G. How to promove children's understanding of fractions? An exploratory study. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 26th, 2002, Norwich: United Kingdom. **Proceedings of the 26th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education.** Norwich: UEA Norwich, 2002, v. 2, p. 89-96.

BLOOMBAUM, M. Doing smallest space analysys. **Journal of Conflict Resolution,** 14, p.409- 416, 1970.

BORBA, R. E. S. R.; SELVA, A. C. V.; SPINILLO, A. G. **Como crianças lidam com o resto em problemas de divisão?** Recife: PIBIC/ CNPq/UFPE, 2004. 17 p. (Projeto de pesquisa)

BORBA, R. E. S. R.; SELVA, A. C. V.; SPINILLO, A. G.; SOUSA, N. A. Influência de representações e de significados da divisão em problemas com resto. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife: Brasil. **Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática** (Trabalho completo). Recife, 2004, 1 CD-ROM.

BORG, I.; LINGOES, J.C. **Multidimensional similarity structure analysis**. New York: Springer, 1987.

BRAINERD, C. J. Modifiability of cognitive development. In: MEADOWNS, S. (Org.). **Development thinking. Aproaches to children's cognitive development.** London: Methuem, 1987. p. 26-66.

BRITO, M. R. F. Contribuições da psicologia educacional à educação matemática. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Psicologia da Educação Matemática. Teoria e Pesquisa.** Florianópolis: Insular, 2001. p. 49-67.

BRITO, M. R. F.; LIMA, V. S.; ALVES, E. V.; REZI, V. Conceito de divisão e suas aplicações: um estudo com estudantes normalistas. In: Congresso Estadual Paulista sobre a Formação de Professores, 5, 1998, São Paulo: Brasil. **Anais do V Congresso Estadual Paulista sobre a Formação de professores: Formação do educador e avaliação.** (Trabalho completo). São Paulo: UNESP, 1998, 1 CD-ROM.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique dês mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.7, n 2, p- 33-116. 1986.

BROWN, M. Numbers operations. In: HART, K. M. (Org.). **Children's Understanding of Mathematics.** John Murray, 1981. p.11-16.

BRYANT, P. Empirical evidence for causes in development. In: BUTTERWORTH, G.; BRYANT, P. **Causes of development. Interdisciplinary perspectives**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.1990.

CALSA, G. C. **Intervenção psicopedagógica e problemas aritméticos no ensino fundamental**. 2002. 285 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pós - Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CAMPBELL, S.; FRASER, S. On preservice teachers' understandings of division with remainder. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 21th, 1997, Lahti: Finland. **Proceedings of the 21h Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**.Lahti: University of Helsinki, 1997, v. 1, p. 177-184.

CAMPBELL, D. T.; STANLEY, J. C. **Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa**. Tradução Renato Alberto T. Di Dio. São Paulo: EPU, 1979. 138 p.

CANTER, D. **The psychology of place.** London: Architectural Press, 1977.

CANTER, D. The potential of Facet Theory for Applied Social Psychology. **Quality and Quantity,** 17, p.35-67, 1983.

CARRAHER, D. W. A aprendizagem de conceitos matemáticos com o auxílio de computador. In: ALENCAR, E. S. (Org.). **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem.** São Paulo: Cortez Editora, 1992. p. 169-201.

CARRAHER, D. W.; SHLIEMANN, A. D. **Teachers´ Guide to Divide and Conquer Software**. New York: Sunburst Communications, 1991.

CHARLES, K.; NASON, R. Step skipping during the solution of partitive quotient fraction problems. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 24th, 2000, Hiroshima: Japan. **Proceedings of the 24th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education.** Japan: Hiroshima University, 2000, v. 2, p. 169-176.

COLL, C.; TEBEROSKY, A. **Aprendendo matemática**. São Paulo: Atica, 2000. 264 p.

COOMBS, C.H.; DAWES, R.M.;TVERSKY, A. **Mathematical psychology: An elementary introduction.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970.

CORREA, J. A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. In: NOVAES M. H.; BRITO M. R. F. (Orgs.). **Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica.** Rio de Janeiro: Editora Xenon, Coletâneas da ANPEPP, v. 1, n. 5, p. 151-165, 1996.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão pela criança. In: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE PSICOLOGIA, 30, 2000, Brasília. **Anais XXX Reunião Anual de Psicologia. Psicologia no Brasil: diversidade e desafios.** (Resumos). Brasília: Universidade de Brasília/Finatec, 2000. p. 22.

CORREA, J. A influência dos modos de divisão partitiva e por quotas nos procedimentos de cálculo oral utilizados por crianças. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2001, Curitiba. **Anais I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática** (Trabalhos Completos). Curitiba: Editora da Universidade Tuiti do Paraná, 2001, v 1, p.71-80.

CORREA, J.; NUNES, T.; BRYANT, P. Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. **Journal of Educational Psychology,** Estados Unidos da América, v. 90, n. 2, p. 321-329,1998.

CORREA, J.; SPINILLO, A. G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. PAVANELLO, R. M. (Org.). **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula.** São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, 2004. p. 103-127.

CORREIA, M.; CAMPOS, H. R. Psicologia escolar: história, tendências e possibilidades. In: YAMAMOTO, O. H.; NETO, A. C. (Orgs.). **O psicólogo e a escola: Uma introdução ao estudo da psicologia escolar**.Natal: EDUFRN, 2004. p.137-186.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. In: DIAS, M. G.; SPINILLO, A. G. (Orgs.). **Tópicos em psicologia cognitiva.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1996. p. 143-167.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. Lenguaje algebraico: un enfoque psicológico. **Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas**. Barcelona, n. 14, p. 25-38, outubre 1997.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. Contribuições da Psicologia para a didática de conteúdos específicos. **Arquivos Brasileiros de Psicologia. Psicologia Cognitiva e Interdisciplinaridade**. Rio de Janeiro, v. 51, n. 1, p.75- 90, jan./mar. 1999.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. **Psicologia da Educação Matemática. Uma introdução**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.103 p.

DANCER, L.S. Introduction to facet theory and its applications. **Applied Psychology: An International Review - Special Issue: Facet Theory,** v. 39, n. 4, p. 365-377, 1990.
DESFORGES, A.; DESFORGES, C. Number-based strategies of sharing in young children. **Education Studies**. v. 6, n. 2, p.97-109, june 1980.

DROUJKOVA, M. A. The role of metaphors in development of multiplicative reasoning of a young child. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 27th, 2003, Norwich: United Kingdom. **Proceedings of the 27th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Honolulu: Hawai, 2003, v. 1, p. 213.

FERREIRA, A. L. **Produção e consciência metalingüística de textos em crianças: um estudo de intervenção.** 1999. 119 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1999.

FERREIRA, A. L.; SPINILLO, A. G. Desenvolvendo a habilidade de produção de textos em crianças a partir da consciência metatextual. In: MALUF, M. R. **Metalinguagem e aquisição da escrita: contribuições da pesquisa para a prática da alfabetização.** São Paulo: Casa do Psicólogo, 2003.p. 119-148.

FISHBEIN, E.; DERI, M. ; NELLO, M. S.; MARINO, M. S. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for research in Mathematics Education**. Estados Unidos da América, v.16, n. 1, p.3-17,1985.

FLAVELL, J. H. **Desenvolvimento cognitivo**. Porto Alegre: Art Médica, 1999.

FOA, U.G. New developments in facet design and analysis. **Psychológical Review.** 72, p 262 - 274, 1965.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: FRANCHI, A.; SILVA, B. A.; FREITAS, J. L. M.; PAIS, L. C.; MARANHÃO, Mª C. S. A.; DAMM, R. F.; IGLIORI, S. B. C.; MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999. p. 155-195 (Série Trilhas).

FRANCHI, A; SILVA, B. A.; FREITAS, J. L. M.; PAIS, L. C.; MARANHÃO, Mª C. S. A.; DAMM, R. F.; IGLIORI, S. B. C.; MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999. 212 p (Série Trilhas).

FREITAS, J. L. M. Situações Didáticas. In: FRANCHI, A; SILVA, B. A. ; FREITAS, J. L. M.; PAIS, L. C.; MARANHÃO, Mª C. S. A.; DAMM, R. F.; IGLIORI, S. B. C.; MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, **1999.** p. 65- 88 (Série Trilhas).

FRYDMAN, O.; BRYANT, P. Sharing and the understanding of number equivalence by young children. **Cognitive Development.** v. 3 , p.323 - 339, 1988.

GARTON, A. F. **Social interaction and the development of language and cognition**. Hove: Lawrence Erlbaum Associates.1992.

GUIMARÃES, G. L. **Interpretando e construindo gráfico de barras**. 2002. 265 f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva)-Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

GUTTMAN, L. A General nonmetric technique for finding the smallest co-ordinate space for a configuration. **Psychometrika.** 33, p. 469-506, 1965.

KARMILOFF-SMITH, A. **Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science.** Massachusetts: MIT Press, 1992. 234 p.

KORNILAKI, E.; NUNES, T. What do young children understand about division? In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 21th, 1997, Lahti: Finland.**Proceedings of the 21h Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Lahti: University of Helsinki, 1997, v.1, p. 242.

KOUBA, V. L. Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. **Journal for Research in Mathematics Education.** Estados Unidos da América, v.20, n.2, p.147- 158, 1989.

KUMAGAI, K. Development of concepts for division in third grade teaching experiments: from the viewpoint of the dual nature of concepts and symbolizing process. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 24th, 2000, Hiroshima: Japan. **Proceedings of the 24th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Japan: Hiroshima University, 2000, v. 3, p. 191-198.

LAMB, J.; BOOKER, G. The impact of theachers' understanding of division on students' division knowledge In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 27th, 2003, Norwich: United Kingdom. **Proceedings of the 27th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Honolulu: Hawai, 2003, v. 1, p. 207.

LAUTERT, S. L. **A representação de operações e problemas de divisão em crianças: da linguagem matemática oral para outras formas de representação**. 2000. 152 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Pós - Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como as crianças representam a operação de divisão: da linguagem matemática oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia da SBP** (Sociedade Brasileira de Psicologia)., Ribeirão Preto, v. 7, n. 1, p.23-36, 1999.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Definindo a divisão e resolvendo problemas de divisão: as múltiplas facetas do conhecimento matemático. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2001, Curitiba. **Anais I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática (Trabalhos Completos).** Curitiba: Editora da Universidade Tuiti do Paraná, 2001, v 1, p.61-69.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. Brasília, v.18, n. 3, p. 237-246, 2002.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Inverse relations between division terms: A difficulty children are able to overcome. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 28th, 2004, Bergen: Norway **Proceedings of the 28h Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education.** Bergen University College, 2004a, v.1, p. 397.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como as crianças lidam com as relações inversas em problemas de divisão. In: Encontro Nacional de educação Matemática, 8, 2004, Recife: Brasil. **Anais VII Encontro Nacional de Educação Matemática** (Trabalho completo). Recife, 2004b, 1 CD-ROM.

LESSA, M. M. L. Aprender álgebra em sala de aula: contribuições de uma seqüência didática**. 2005. 187 f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Pós - Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.**

LIBERMAN, M. P; WEY, R. L. M.; SANCHEZ, L. B. **Fazendo e compreendendo matemática 3ª série.** São Paulo: Solução, 1997.

LIGOES, J. C. The multivariate analysis of quantitative data. Multivariate. **Behavioral Research**. n 3, p.61-94, 1985.

LI,Y. Does the acquisition of mathematical knowledge make students better problem solvers? An examination of third graders´solutions of division-with-remaider (DWR) problems. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 23th, 2001, Columbus. **Proceedings of the 23th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**, OH: Eric, 2001, p. 501- 508.

LI, Y.; SILVER, E. A. Can younger students succeed where older students fail? Na examination of third graders'solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. **Journal of Mathematical Behavior**. n. 19, p. 233- 246, 2000.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T. ; GITIRANA, V. **Representando adição e subtração. Contribuição da Teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.74p.

MELO, K. L. R. **Compreendendo as relações entre consciência gramatical e habilidades de leitura e de escrita: Um estudo de Intervenção.** 2002. 161 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

MELO, K. L. R.; REGO, L. B. Inovando o ensino da ortografia na sala de aula. **Cadernos de Pesquisa da Fundação Carlos Chaga**. n.105, p.110-134, 1998.

MORI, I. **Viver e aprender matemática 2ª série.** 15ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2002a. 208p.
MORI, I. **Viver e aprender matemática 3ª série.** 9ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2002b.240p.

MULLIGAN, J.; WRIGHT, R. Interview-based assessesment of early multiplication and division. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 24th, 2000, Hiroshima: Japan. **Proceedings of the 24th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Japan: Hiroshima University, 2000, v. 4, p. 17-24.

NESHER, P. Multiplicative school word problems: theorical approaches and empirical findings. In: HIEBERT, M. ; BEHR, J. (Orgs.). **Number concepts and operations in the middle grades.** National Council for Teachers of Mathematics, 1988.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 244 p.

NUNES, T.; CAMPOS, T. Mª M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas.** 1ª Edição. São Paulo: PROEM, 2001.178 p.

PAIS, L. C. **Didática da matemática. Uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 127 p.

PIAGET, J. **Seis estudos em Psicologia.** 3ª Edição. Tradução Maria Alice Magalhães D' Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1969. 148 p.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática. Estudo do erro no ensino da matemática elementar.** São Paulo: Papirus, 2000. 182 p.

RESNICK, L. B.; FORD, W. W. **The psychology of mathematics for instruction.** Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1981. p.3-8.

ROAZZI, A. Categorização, formação de conceitos e processos de construção de mundo: procedimentos de classificações múltiplas para o estudo de sistemas conceituais e sua forma de análise através de métodos multidimensionais. **Cadernos de Psicologia**. n.1, p.1-27, 1995.

ROAZZI, A. pesquisa Básica em Psicologia Cognitiva e sua relação com a Psicologia social. **Arquivos Brasileiros de Psicologia**. v.4, n.51, p. 7-38, 1999.

ROAZZI, A.; MONTEIRO, C.M.G. A representação social da mobilidade profissional em função de diferentes contextos urbanos e suas implicações para a evasão escolar. **Arquivos Brasileiros de Psicologia.** v. 3, n. 47, p.39-73. 1995.

ROAZZI, A., LOUREIRO, C.; MONTEIRO, C.M.G. Problemas psicossociais e influências na prática escolar: Investigações sobre vandalismo no contexto da escola pública. In: WECHSLER, S. M. (Org.), **Psicologia escolar: Pesquisa, formação e prática**. Campinas, SP: Alínea Editora, 1996. p. 203-236.

ROAZZI, A.; WILSON, M.; FEDERICCI, F. Exploring the social representation of fear in children: A social class comparison. In: JOOP J.; HOX, P. S; MELLEMBERG G.J. (Eds.), **Facet Theory: Theory and content**, Zeist: SETOS, 1995. p. 187-196.

ROAZZI, A; DIAS, M. G. B. Teoria das Facetas e avaliação na pesquisa social transcultural: explorações no estudo do juízo moral. In: Conselho Regional de Psicologia – 13ª Região PB/RN (Org.). **A diversidade da avaliação psicológica: Considerações teóricas e práticas**, João Pessoa: Idéia, p. 157-190, 2001.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou dificuldade para dividir. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática. Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, p. 156-183, 2001

SANTOS, C. S. G. Atuação do psicólogo Escolar/Educacional e habilidades Sociais: uma relação necessária. In: CORREIA, M (Org.). **Psicologia e Escola. Uma pareceria necessária.** São Paulo: Alínea, 2004. p. 83-100.

SELVA, A. C. V. **A influência de diferentes tipos de representação na resolução de problemas de divisão.** 1993. 134 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1993.

SELVA, A. C. V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas e divisão. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa,** Campinas: Papirus, 1998. p 95-119.

SELVA, A. C. V. **Gráficos de barras e materiais manipulativos: analisando dificuldades e contribuições de diferentes representações no desenvolvimento da conceitualização matemática em crianças de seis a oito anos.** 2003. 268 f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

SELVA, A. C. V.; BORBA, R. E. S; BRAGA, J. T.; COUTO, T. S. Como calculadora pode ser usada em sala de aula: um estudo exploratório. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife: Brasil. **Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática** (Trabalho completo). Recife, 2004, 1 CD-ROM.

SELVA, A. C. V.; BORBA, R. E. S; STEEDMAN, L. H. S. Explorando a resolução de problemas de divisão com resto por crianças de 2ª e 3ª séries. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife: Brasil. **Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática** (Trabalho completo). Recife, 2004, 1 CD-ROM.

SEMÉRIO, F. P.; ANSELME, C. R.; CHAHON, M. Metacognição um novo paradigma. **Arquivos Brasileiros de Psicologia. Psicologia Cognitiva e Interdisciplinaridade**. Rio de Janeiro, v. 51, n. 1, p.110-126, jan./mar. 1999.

SHYE, S **Multiple Scaling**. Amsterdam: North-Holland, 1985.

SILVA, B. A. Contrato didático. In: FRANCHI, A; SILVA, B. A. ; FREITAS, J. L. M.; PAIS, L. C.; MARANHÃO, Mª C. S. A.; DAMM, R. F.; IGLIORI, S. B. C.; MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64 (Série Trilhas).

SILVER, E. A. Solving story problems involving division with remaiders: the importance of semantic processing and referential mapping. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 10th, 1988, Dekalb: North Illinois. **Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chaper of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** North Illinois University,1988, p. 127-133.

SILVER E. A.; SHAPIRO, L. J.; DEUTSCH, A. Sense making and the solution of division problems involving remainders: an examination of middle school students solution processes and their interpretations of solutions. **Journal for Research in Mathematics Education**. Estados Unidos da América, v. 24, n. 2, p.117- 135, 1993.

SOUZA, J. **Métodos Estatísticos nas Ciências Psicossociais. Métodos de escalagem psicossocial: Uni e Multidimensinal.** Brasília: Thesaurus, 1988. v.5.

SPINILLO, A. G. Estudos de treinamentos e variações experimentais. **Temas em Psicologia da SBP** (Sociedade Brasileira de Psicologia). São Paulo, v. 3, p.43-58, 1994.

SPINILLO, A. G.Can young children learn how to reason proportionally? An intervention. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 19th, 1995, Recife: Brasil. **Proceedings of the 19th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995, v. 3, p. 192-199.

SPINILLO, A. G. O conceito de chance em situações de julgamento e de construção. In: NOVAES, Mª H.; BRITO, M.R. F. (Orgs.). **Psicologia na Educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica.** Coletânea da ANPEPP, v. 1, n. 5, p.167-186, 1996.

SPINILLO, A. G. As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção. **Arquivos Brasileiros de Psicologia. Psicologia Cognitiva e Interdisciplinaridade**. Rio de Janeiro, v. 51, n. 1, p.55- 74, jan./mar. 1999.

SPINILLO, A. G. **O papel dos referentes e dos mediadores na compreensão dos conceitos de divisão.** Recife: PIBIC/ CNPq/UFPE , 2001 (Relatório de pesquisa).

SPINILLO, A. G. O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. **Psicologia reflexão e crítica.** Porto Alegre, v.15, n.3, p. 475- 487, 2002.

SPINILLO, A. G. Ensinando Proporção a crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. **Boletim GEPEM**, n. 43, p.11- 48, agost/dez. 2003.

SPINILLO, A. G.; BRYANT, P. Children's proportional judgments: the importance of 'half'. **Children Development**, 62, p. 427- 440.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Representations and solving procedures in word division problems: comparing formal and informal knowledge in children. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 26th, 2002, Norwich United kingdom. **Proceedings of the 26th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education.** Norwich: UEA Norwich, 2002, v. 1, p. 318.

SPINILLO, A. G; MAGINA, S. Alguns 'mitos' sobre matemática e suas conseqüências para o ensino fundamental. In: Pavanello, Mª R. **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental**. Coleção SBEM, v. 2, p. 7-35, 2004.

SPINILLO, A. G; SIMÕES, P. U. O desenvolvimento da consciência metatextual em crianças: questões conceituais, metodológicas e resultados de pesquisa. **Psicologia reflexão e crítica.** Porto Alegre, v.16, n.3, p. 537- 546, 2003.

SQUIRE, S. Children's misunderstanding of an inverse relation. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 26th, 2002, Norwich: United Kingdom. **Proceedings of the 26th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Norwich: UEA Norwich, 2002, v. 1, p. 319.

SQUIRE, S.; BRYANT, P. The influence of sharing of children´s initial concept of division. **Journal for Experimental Child Psychology**. v. 81, p.1- 43, 2002.

SYLVA, K. Psychological theory that 'works' in the classroom. In: SMITH, L.; DOCKREEL, J.; TOMLINSON, P. **Piaget, Vygotsky and beyond. Future issues for developmental psychology and education** (Ed.). New York: Routledge.1997. p. 60-64.

TSAMIR, P.; TIROSH, D. Intuitive beliefs and undefined operations: the cases of division by zero. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 24th, 2000, Hiroshima: Japan. **Proceedings of the 24th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education**. Japan: Hiroshima University, 2000, v. 4, p. 233-264.

VASCONCELOS, L. Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa,** Campinas: Papirus, 1998. p 53-72.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M.; ROMBERG, T. A. (Orgs.). **Addition and Subtraction: A cognitive perspective**. New Jersey: Lawrence Earlbaum, 1982. p 39-59; 141-161.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisition of mathematics: Concepts and process.** London: Academic Press, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matematicas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica.** v. 1, n. V, 76-90, 1986.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**. v. 10, n. 13, p. 133 -170, 1990.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escula primaria.** Traducción Luis Ortega Segura. México: Trillas, 1991. 275 p.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Orgs.). **Learning and teaching mathematics. An international perspective.** Hove: Psychology Press Ltd, Publishers, 1997. p. 5-28.

VERGNAUD. G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org.). **Por que ainda há quem não aprende? A teoria.** Rio de Janeiro: Vozes, 2003. p 21-64.

ZVULUN, E. Multidimensional Scalogram Analysis: the method and its applications. In: SLYE, S. (Org.). **Theory Construction and Data Analysis in the behavioural.** London: Jossey-Bass Publishers, 1978.

ANEXOS

Anexo A - Problemas apresentados no pré-teste geral

ATIVIDADE 1 (1ª sessão) Nome:... Professora: ....
(1) Vovó foi à livraria e comprou 25 cadernos para dar aos seus 7 netos. Ela quer que cada neto receba a mesma quantidade de cadernos. Quantos cadernos cada neto vai receber? Resposta: ....
(2) Uma loja de brinquedos recebeu 55 pulseiras que serão vendidas em pacotes com 9 pulseiras em cada um. Quantos pacotes serão montados? Resposta: ....
(3) Marta e Pedro foram a uma papelaria e cada um comprou 40 papéis de carta. Marta quer colocar seus papéis de carta em 8 envelopes e Pedro quer colocar seus papéis de carta em 5 envelopes. Quem vai ter envelopes com mais papéis de carta, Marta ou Pedro? Por quê? Resposta: ....
(4) Laura comprou 27 rosas. Ela quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos ela vai precisar? Resposta: ....
(5) Maria comprou 34 margaridas e quer colocá-las em 8 cestas. Ela quer que cada cesta tenha a mesma quantidade de margaridas. Quantas margaridas ela vai colocar em cada cesta? Resposta: ....
Lúcia foi a uma loja e comprou 30 camisetas para dar aos seus 5 sobrinhos. Ela quer que cada sobrinho receba a mesma quantidade de camisetas. Quantas camisetas cada sobrinho vai receber? Resposta: ....
ATIVIDADE 1 (2ª sessão) Nome:... Professora: ....
(7) Paulo comprou 30 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 4 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas? Resposta: ....
(8) Pedro comprou 28 carrinhos e quer colocá-los em 7 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa? Resposta: ....
(9) Mário e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 foguetes. Mário quer guardar 5 foguetes em cada saquinho e Paulo quer guardar 7 foguetes em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Mário ou Paulo? Por quê? Resposta: ....
(10) Márcio comprou 24 piões. Ele quer dar 5 piões para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar piões? Resposta: ....
(11) Joana comprou 35 figurinhas da Turma da Mônica. Ela quer dar 5 figurinhas para cada uma das suas amigas. Quantas amigas vão ganhar figurinhas? Resposta: ....
(12) Ricardo comprou 57 bolinhas de gude para dar aos seus 8 amigos. Ele quer que cada amigo receba a mesma quantidade de bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude cada amigo vai receber? Resposta: ....

Quadro 17: Visão geral dos problemas no pré-teste geral

Anexo B - Problemas apresentados no pós-teste geral

ATIVIDADE 2 (1ª sessão) Nome:.. Professora: ....
(1) João foi a uma loja de brinquedo e comprou 25 aviões para dar aos seus 7 filhos. Ele quer que cada filho receba a mesma quantidade de aviões. Quantos aviões cada filho vai receber? Resposta: ....
(2) Uma loja de brinquedos recebeu 55 ursinhos que serão vendidos em pacotes com 9 ursinhos em cada um. Quantos pacotes serão montados? Resposta: ....
(3) Rute e João foram a uma banca de revista e cada um comprou 40 figurinhas. João quer colocar suas figurinhas em 8 saquinhos e Rute quer colocar suas figurinhas em 5 saquinhos. Quem vai ter saquinhos com mais figurinhas, Rute ou João? Por quê? Resposta: ....
(4) Lúcia comprou 27 margaridas. Ela quer colocar 3 margaridas em cada cesta. Quantas cestas ela vai precisar? Resposta: ....
(5) Maria comprou 34 rosas para dar a suas 8 professoras. Ela quer que cada professora receba a mesma quantidade de rosas. Quantas rosas cada professora vai receber? Resposta: ....
(6) Roque foi a uma loja e comprou 30 bonés para dar a seus 5 sobrinhos. Ele quer que cada sobrinho receba a mesma quantidade de bonés. Quantos bonés cada sobrinho vai receber? Resposta: ....
ATIVIDADE 2 (2ª sessão) Nome:.. Professora: ....
(7) Mariana comprou 30 garrafas de refrigerante. Ela quer colocar 4 garrafas de refrigerante em cada caixa. Quantas caixas ela vai precisar? Resposta: ....
(8) João tem 28 moedas e quer colocá-las em 7 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de moedas. Quantas moedas ele vai colocar em cada caixa? Resposta: ....
(9) Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo? Por quê? Resposta: ....
(10) Laura comprou 24 selos. Ela quer guardar 5 selos em cada envelope. Quantos envelopes ela vai precisar? Resposta: ....
(11) Marcelo comprou 35 livrinhos infantis. Ele quer dar 5 livrinhos para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar livrinhos? Resposta: ....
(12) Vovô comprou 57 canetinhas para dar as suas 8 netas. Ele quer que cada neta receba a mesma quantidade de canetinhas. Quantas canetinhas cada neta vai receber? Resposta: ....

Quadro 18: Visão geral dos problemas no pós-teste geral

Anexo C - Tarefa 1- Pré-teste Específico:

Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão

Tipos de problemas	Enunciados
Partição	**(PP1[54])** Rita e Maria foram a uma floricultura e cada uma comprou 21 margaridas. Rita quer colocar suas margaridas em 3 cestas e Maria quer colocá-las em 7 cestas. Quem vai ter cestas com mais margaridas, Maria ou Rita? 21÷ 3 = 7 (0) 21÷ 7 = 3 (0) Resposta: Rita
Partição	**(PP2)** Eduardo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Eduardo quer guardar suas bolinhas em 5 caixas e Paulo quer guardá-las em 7 caixas. Quem vai ter caixas com mais bolinhas de gude, Eduardo ou Paulo? 35 ÷ 5 = 7 (0) 35 ÷ 7 = 5 (0) Resposta: Eduardo
Partição	**(PP3)** Carlos e Ricardo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 28 carrinhos. Carlos quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Ricardo quer colocá-los em 7 caixas. Quem vai ter caixas com mais carrinhos, Ricardo ou Carlos? 28 ÷ 4 = 7 (0) 28 ÷ 7 = 4 (0) Resposta: Carlos
Quotas	**(PQ4)** Ana e Pedro foram a uma papelaria e cada um comprou 32 canetinhas. Ana quer guardar 4 canetinhas em cada estojo e Pedro quer guardar 8 canetinhas em cada estojo. Quem vai precisar de mais estojos, Ana ou Pedro? 32 ÷ 4 = 8 (0) 32 ÷ 8 = 4 (0) Resposta: Ana
Quotas	**(PQ5)** Mário e Elena foram a uma floricultura e cada um comprou 24 rosas. Mário quer colocar 4 rosas em cada vaso e Elena quer colocar 6 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos para colocar todas as rosas, Elena ou Mário ? 24 ÷ 4 = 6 (0) 24 ÷ 6 = 4 (0) Resposta: Mário
Quotas	**(PQ6)** Luana e Marta foram a uma banca de revista e cada uma comprou 18 figurinhas das Super Poderosas. Luana quer colar 3 figurinhas em cada caderno e Marta quer colar 6 figurinhas em cada caderno. Quem vai precisar de mais cadernos para colar todas as figurinhas, Luana ou Marta? 18 ÷ 3 = 6 (0) 18 ÷ 6 = 3 (0) Resposta: Luana

Quadro 19: Visão geral dos problemas na Tarefa 1 no pré-teste específico

[54] As duas primeiras letras referem-se à estrutura: problema de divisão por partição (PP) ou problema de divisão por quotas (PQ) e o valor numérico colocado após as letras refere-se ao número dado no conjunto da investigação a este problema. Este cuidado foi tomado para garantir o sorteio dos problemas a serem apresentados a cada um dos participantes na Tarefa 1.

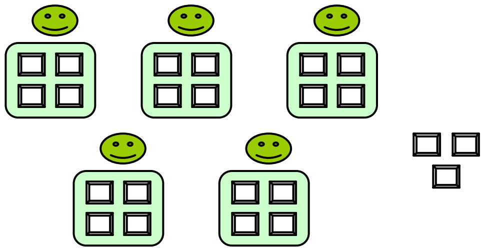
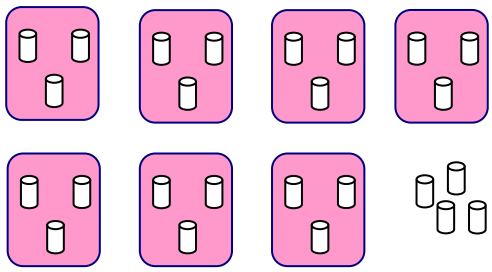
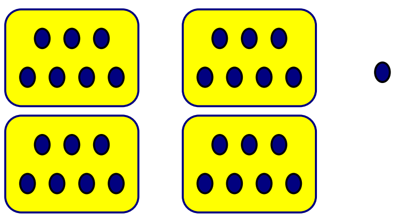
Anexo D - Tarefa 1- Pós-teste Específico:

Julgamento das relações inversas entre os termos da divisão

Tipos de problemas	Enunciados
Partição	**(PP1)** Ivete e Diana foram a uma floricultura e cada uma comprou 21 rosas. Ivete quer colocar suas rosas em 3 vasos e Diana quer colocá-las em 7 vasos. Quem vai ter vasos com mais rosas, Ivete ou Diana? 21÷ 3 = 7 (0) 21÷ 7 = 3 (0) Resposta: Ivete
Partição	**(PP2)** Rodrigo e Pedro foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 35 aviões. Rodrigo quer colocar seus aviões em 5 caixas e Pedro quer colocá-los em 7 caixas. Quem vai ter caixas com mais aviões, Pedro ou Rodrigo? 35 ÷ 5 = 7 (0) 35 ÷ 7 = 5 (0) Resposta: Rodrigo
Partição	**(PP3)** Luciano e Isabel foram a uma papelaria e cada um comprou 28 canetinhas. Luciano quer colocar suas canetinhas em 4 estojos e Isabel quer colocá-las em 7 estojos. Quem vai ter estojos com mais canetinhas, Luciano ou Isabel? 28 ÷ 4 = 7 (0) 28 ÷ 7 = 4 (0) Resposta: Luciano
Quotas	**(PQ4)** João e Bruna foram a uma floricultura e cada um comprou 32 margaridas. João quer colocar 4 margaridas em cada cesta e Bruna quer colocar 8 margaridas em cada cesta. Quem vai precisar de mais cestas, Bruna ou João? 32 ÷ 4 = 8 (0) 32 ÷ 8 = 4 (0) Resposta: João
Quotas	**(PQ5)** Gustavo e Otávio foram a uma banca de revista e cada um comprou 24 figurinhas de jogadores de futebol. Gustavo quer colar 4 figurinhas no caderno e Otávio quer colar 6 figurinhas no caderno. Quem vai precisar de mais cadernos para colar todas as figurinhas, Gustavo ou Otávio? 24 ÷ 4 = 6 (0) 24 ÷ 6 = 4 (0) Resposta: Gustavo
Quotas	**(PQ6)** Marcos e Paulo foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 18 bolinhas. Marcos quer guardar 3 bolinhas em cada caixa e Paulo quer guardar 6 bolinhas em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas para colocar todas as bolinhas, Paulo ou Marcos? 18 ÷ 3 = 6 (0) 18 ÷ 6 = 3 (0) Resposta: Marcos

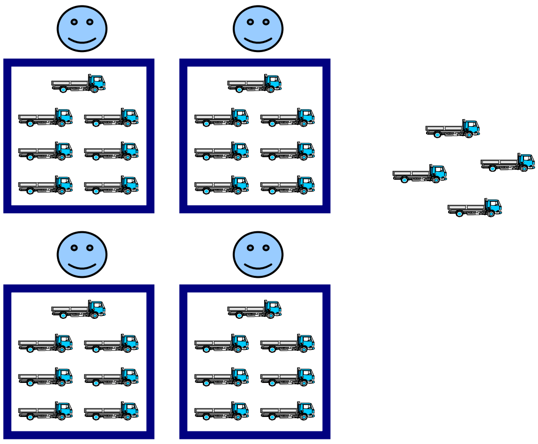
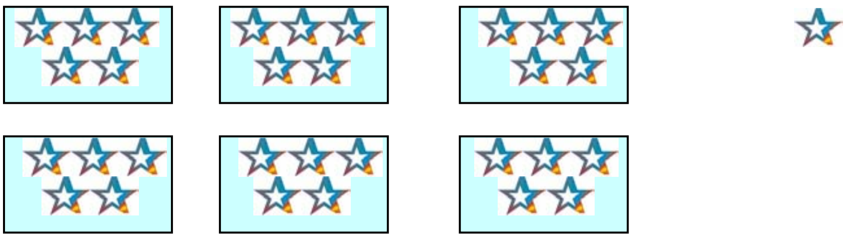
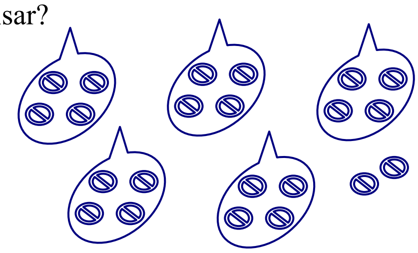
Quadro 20: Visão geral dos problemas na Tarefa 1 no pós-teste específico

Anexo E - Tarefa 2 - Pré-teste Específico: Julgamento do significado do resto

Tipos de problemas	**Enunciados**
Partição	**(PP1[55])** Tia Júlia comprou 23 livros para dar às suas 5 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de livros. Quantos livros cada sobrinha vai receber?  O que são esses livros ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que são esses livros ao lado?
Partição	**(PP2)** Marcos tem 25 copos e quer colocá-los em 7 bandejas. Ele quer que cada bandeja tenha a mesma quantidade de copos. Quantos copos ele irá colocar em cada bandeja?  O que são esses copos ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que são esses copos ao lado?
Partição	**(PP3)** João tem 29 bolas de gude e quer colocá-las em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de bolas de gude. Quantas bolas de gude ele irá colocar em cada caixa?  O que é essa bola de gude ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que é essa bola de gude ao lado?

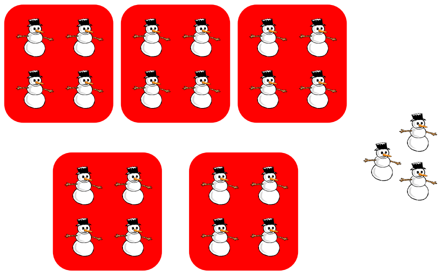
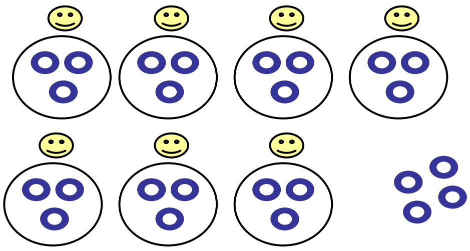
continua

[55] As duas primeiras letras referem-se aos tipos de problemas: problema de divisão por partição (PP) ou problema de divisão por quotas (PQ) e o valor numérico colocado após as letras refere-se ao número dado no conjunto da investigação a este problema na Tarefa 2.

Tipos de problemas	Enunciados
Quotas	**(PQ4)** Juca comprou 32 caminhões. Ele quer dar 7 caminhões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os caminhões?  O que são esses caminhões ao lado? Ou no problema que ela resolveu o que são esses caminhões ao lado?
Quotas	**(PQ5)** Maria comprou 31 estrelinhas. Ela quer colocar 5 estrelinhas em cada caixa. Quantas caixas ela vai precisar?  O que é essa estrelinha ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que é essa estrelinha ao lado?
Quotas	**(PQ6)** Vovó tem 22 botões. Ela quer guardar 4 botões em cada saquinho. Quantos saquinhos ela irá precisar?  O que são esses botões ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que são esses botões ao lado?

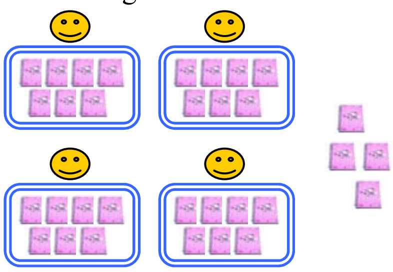
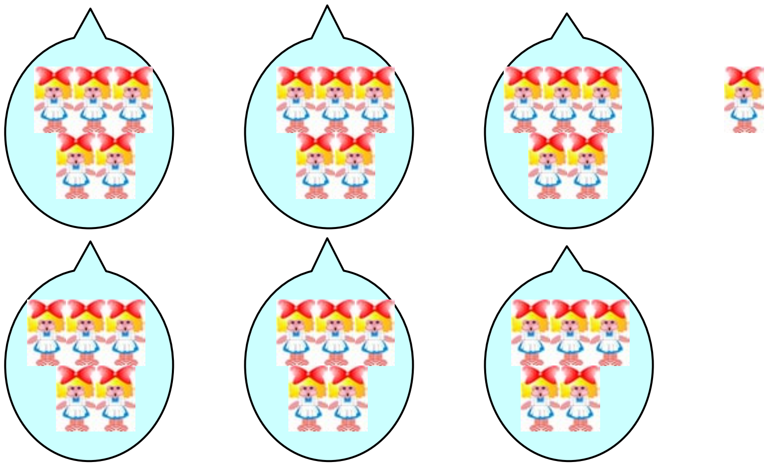
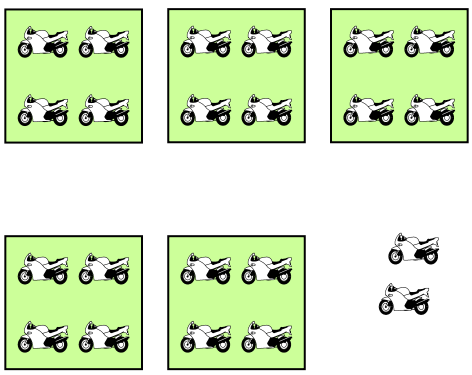
Quadro 21: Visão geral dos problemas na Tarefa 2 no pré-teste específico.

Anexo F - Tarefa 2 - Pós-teste Específico: Julgamento do significado do resto

<table>
<tr><th>Tipos de problemas</th><th>Enunciados</th></tr>
<tr><td>Partição</td><td>(PP1) Débora comprou 23 bonecos e quer colocá-los em 5 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de bonecos. Quantos bonecos ela irá colocar em cada caixa?

O que são esses bonecos ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que são esses bonecos ao lado?</td></tr>
<tr><td>Partição</td><td>(PP2) Tia Maria comprou 25 pulseiras para dar a suas 7 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de pulseiras. Quantas pulseiras cada sobrinha vai receber?

O que são essas pulseiras ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que são essas pulseiras ao lado?</td></tr>
<tr><td>Partição</td><td>(PP3) Rita tem 29 lâmpadas e quer colocá-las em 4 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de lâmpadas. Quantas lâmpadas ela irá colocar em cada caixa?

O que é essa lâmpada ao lado? Ou, no problema que ela resolveu o que é essa lâmpada ao lado?</td></tr>
</table>

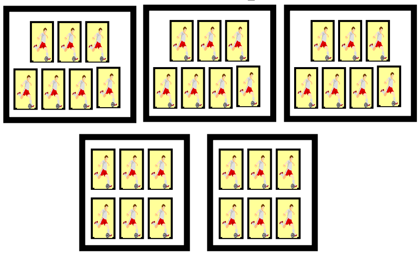
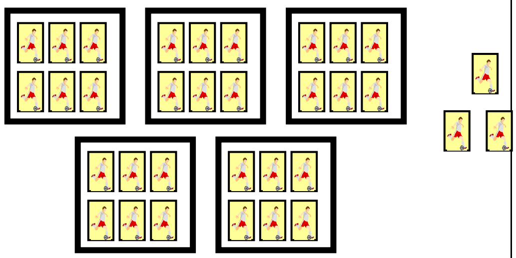
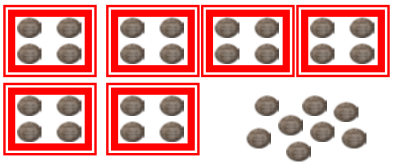
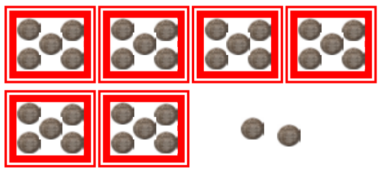
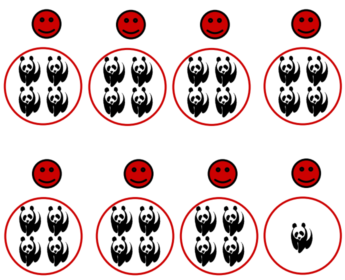
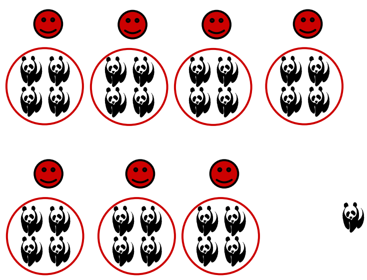
continua

Tipos de problemas	Enunciados
Quotas	**(PQ4)** A professora Ana comprou 32 cadernos. Ela quer dar 7 cadernos para cada um dos seus alunos. Quantos alunos vão ganhar os cadernos?  O que são esses cadernos ao lado? Ou no problema que ela resolveu o que são esses cadernos ao lado?
Quotas	**(PQ5)** Sabrina comprou 31 bonecas. Ela quer colocar 5 bonecas em cada saquinho. Quantos saquinhos ela irá precisar?  O que é essa boneca ao lado? Ou no problema que ela resolveu o que é essa boneca ao lado?
Quotas	**(PQ6)** Luciano tem 22 motos de brinquedo. Ele quer guardar 4 motos em cada caixa**.** Quantas caixas ele irá precisar?  O que são essas motos ao lado? Ou no problema que ela resolveu o que são essas motos ao lado?

Quadro 22: Visão geral dos problemas na Tarefa 2 no pós-teste específico.

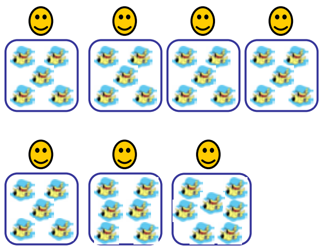
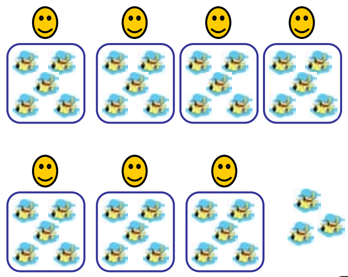
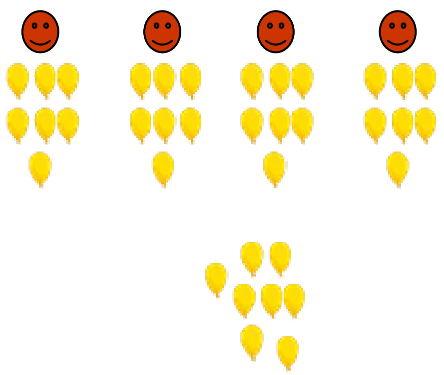
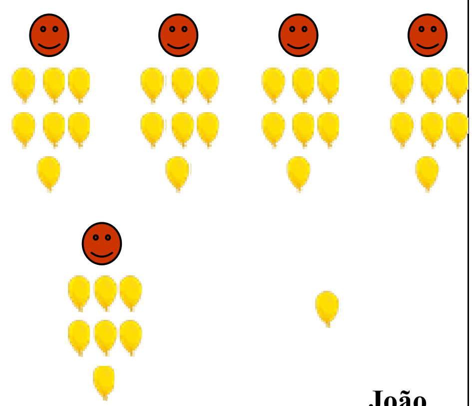
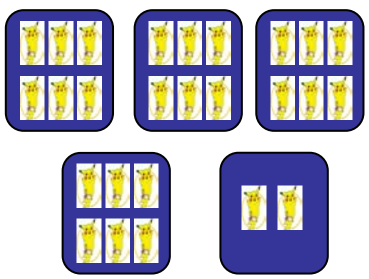
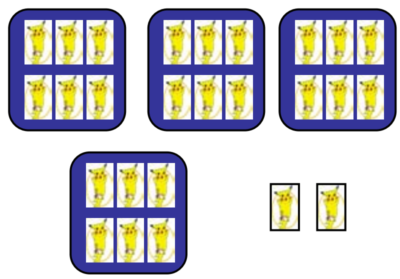
Anexo G - Tarefa 3 - Pré-teste Específico:

Julgamento de procedimentos incorretos de resolução

Tipos de problemas	**Enunciados**
Partição	**(PP1)**[56] Mário ganhou 33 figurinhas de jogadores de futebol e tinha 5 envelopes. Ele queria colocar o mesmo número de figurinhas em cada envelope. Quantas figurinhas ele vai colocar em cada envelope?   **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio da igualdade entre as partes
Partição	**(PP2)** Gustavo tem 32 moedas antigas e quer colocá-las em 6 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de moedas. Quantas moedas ele irá colocar em cada caixa?   **João** **Maria** **Erro:** A cartela de João viola o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao número de partes.
Partição	**(PP3)** Tia Ema foi a uma loja e comprou 29 ursinhos para dar as suas 7 sobrinhas. Ela quer que cada sobrinha receba a mesma quantidade de ursinhos. Quantos ursinhos cada sobrinha vai receber?   **João** **Maria** **Erro:** A cartela de João viola o principio da igualdade entre as partes, criando uma nova parte para inserir o resto

continua

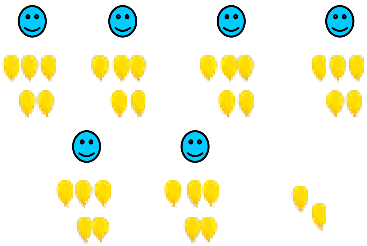
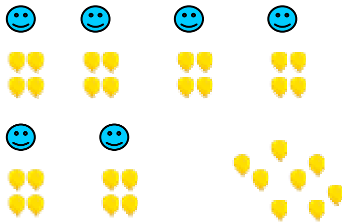
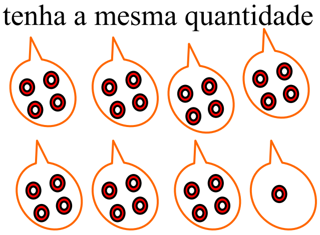
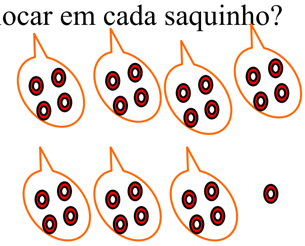
[56] As duas primeiras letras referem-se aos tipos de problemas: problema de partição (PP) ou problema de quotas (PQ) e o valor numérico colocado após as letras refere-se ao número dado no conjunto da investigação a este problema na Tarefa 3.

Tipos de problemas	Enunciados
Quotas	**(PQ4)** Roberto foi a uma loja e comprou 38 aviões. Ele quer dar 5 aviões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar aviões?   **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio da igualdade entre as partes
Quotas	**(PQ5)** Marta comprou 36 balões. Ela quer dar 7 balões para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar balões?   **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao tamanho da parte.
Quotas	**(PQ6)** Paulo ganhou 26 figurinhas Pokemons. Ele quer colar 6 figurinhas em cada página do álbum. Quantas páginas do álbum ele vai usar?   **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio da igualdade entre as partes, criando uma nova parte para inserir o resto, violando o tamanho da parte.

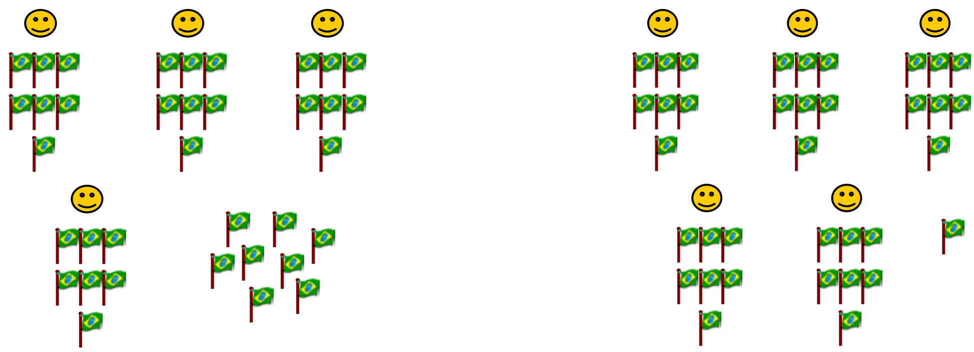
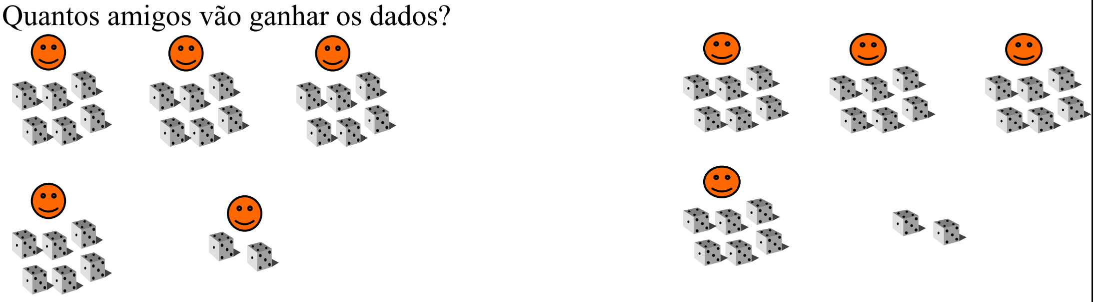
Quadro 23: Visão geral dos problemas na Tarefa 3 no pré-teste específico.

Anexo H - Tarefa 3 - Pré-teste Específico:

Julgamento dos procedimentos incorretos de resolução

Tipos de problemas	**Enunciados**
Partição	**(PP1)** Maria ganhou 33 figurinhas das Super Poderosas e tinha 5 envelopes. Ela queria colocar o mesmo número de figurinhas em cada envelope. Quantas figurinhas ela vai colocar em cada envelope?   **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio da igualdade entre as partes.
Partição	**(PP2)** Vovó comprou 32 balões para dar as suas 6 netas. Ela quer que cada neta receba a mesma quantidade de balões. Quantos balões cada neta vai receber?   **Maria** **João** **Erro:** A cartela de João viola o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao número de partes.
Partição	**(PP3)** Paula tem 29 ioiôs e quer colocá-los em 7 saquinhos. Ela quer que cada saquinho tenha a mesma quantidade de ioiôs. Quantos ioiôs ela irá colocar em cada saquinho?   **João** **Maria** **Erro:** A cartela de João viola o principio da igualdade entre as partes, criando uma nova parte para inserir o resto

continua

Tipos de problemas	Enunciados
Quotas	**(PQ4)** Guga ganhou 38 moedas antigas. Ele quer colocar 5 moedas em cada saquinho. Quantos saquinhos ele vai precisar?  **João** **Maria** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio da igualdade entre as partes.
Quotas	**(PQ5)** Juliana comprou 36 bandeirinhas. Ela quer dar 7 bandeirinhas para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar as bandeirinhas?  **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio de que o resto não pode ser nem maior e nem igual ao tamanho da parte.
Quotas	**(PQ6)** Marisa comprou 26 dados. Ela quer dar 6 dados para cada um de seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os dados?  **Maria** **João** **Erro:** A cartela de Maria viola o principio da igualdade entre as partes, criando uma nova parte para inserir o resto, violando o tamanho da parte.

Quadro 24: Visão geral dos problemas na Tarefa 3 no pós-teste específico

Anexo I – Transcrição completa das três sessões de intervenção de um participante

1ª Sessão da Intervenção

Início: 14 horas e 14 minutos **Término:** 15 horas e 40 minutos

Atividade 1: Mantendo o dividendo constante e aumentando/diminuindo o divisor

E-"Eu vou ler um problema e gostaria que você usasse esse material para resolvê-lo" (entrega o material e coloca uma cartela com o problema em frente à criança)

C- (lê o problema) "Paulo comprou vinte e quatro piões e quer colocá-los em quatro caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de piões. Quantos piões ficarão em cada caixa?"

E- "Quantos piões ele comprou? Olha no probleminha."

C- "Vinte e quatro"

E- "Então faz"

C- (começa a retirar os piões de dentro do saquinho) "Têm quantos piões tem?" [sic]

E- "Tem muito mais do que vinte e quatro. Tem que pegar os vinte e quatro piões."

C- (resolve o problema com os objetos como mostra a foto abaixo)

E- "Pronto? Explica para mim como foi que você fez."

C- "Botei...botei três piões em cada caixa. Seis piões em cada caixa."

E- "Seis piões em cada caixa. Você distribuiu os piões em quantidades iguais e ficaram seis piões em cada caixa. Então vamos responder a pergunta do problema. Quantos piões ficarão em cada caixa?" (pausa) "Ficarão...(pausa) quantos?"

C- "Seis"

E- "Seis piões em cada caixa"

C- (escreve a resposta na folha de ofício: 6 piões em cada caixa)

E- "Gabriel[57], o Paulo resolveu aumentar a quantidade de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em quatro caixas. Ele quer colocá-los agora em seis caixas. Veja que aumentou a quantidade de caixas. Antes eram quatro caixas, agora são seis caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir?"

C- "Vai diminuir"

E- "Muito bem!Por que vai diminuir?"

---

[57] O nome da criança foi substituído por um nome fictício, garantindo o sigilo da identidade dos participantes, conforme exigido pelo Comitê de Ética em pesquisa com seres humanos da UFPE.

C- “Porque vai ter que tirar das outras caixas para fazer igual as outras.

E- “Exatamente. Se eu tenho a mesma quantidade de piões para distribuir e aumentar a quantidade de caixas, vai diminuir a quantidade de piões dentro das caixas. E se eu tenho a mesma quantidade de piões para distribuir e diminuir a quantidade de caixas vai... (pausa) Vai aumentar a quantidade de...

C- “Piões”

E- “Piões dentro das caixas. Então, faz para nós vermos.”

C- “Aumentar?”

E- “É vamos dividir os piões, agora, em seis caixas.”

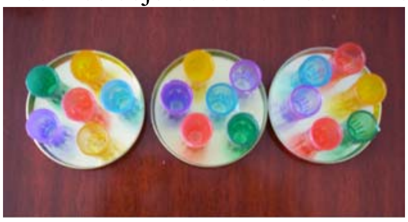
C- (resolve com os objetos como mostra a foto abaixo)

E- “Pronto! Quantos piões ficarão em cada caixa, agora?”
C- “Quatro”
E- “Quatro! Se eu tenho a mesma quantidade e aumentar a quantidade de caixas vai?
C- “Vai diminuir...”
E- “A quantidade de piões que estão dentro das caixas. Muito bem! Então vamos responder ao probleminha.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 4 piões em cada caixa).
E- “Gabriel, o Paulo resolveu diminuir a quantidade de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em seis caixas. Ele quer colocá-los agora em duas caixas. Veja que vai diminuir a quantidade de caixas. Ele quer colocar os piões em duas caixas. Antes eram seis caixas e agora são duas caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir?”
C- “Vai aumentar.”
E-“Muito bem!Por quê?
C- “Porque vai ter que trazer mais para ficar igual, as duas caixas.”
E- É! Mas, vai diminuir por quê? Porque...”
C- “Vai tirar as duas caixas.”
E- “Vai diminuir as caixas. Se vai diminuir as caixas vai aumentar?
C- “Aumentar os piões.”
E- “Os piões dentro das caixas.”
C- “Aumentar os piões dentro das caixas”
E- “Muito bem! Se eu tenho a mesma quantidade de piões para distribuir e diminuir a quantidade de caixas...”
C- “Vai aumentar.”
E- “Vai aumentar a quantidade de piões. E se eu tenho a mesma quantidade de piões para distribuir e aumentar a quantidade de caixas vai?
C- “Diminuir os piões.”
E- “Vai diminuir os piões dentro das caixas. Muito bem! Então, faz! Vamos colocar eles em duas caixas.
C- “Pode pegar esses? (refere-se aos piões que estão nas caixas)
E- “Pode. É a mesma quantidade de piões, só que nós vamos usar agora duas caixas.”
C- (resolve com os objetos como mostra a foto na próxima página)

E- “Quantos piões ficarão em cada caixa?”
C- “Doze piões”
E- “Doze piões em cada caixa. Muito bem! Então, diminuiu a quantidade de caixas...”
C- “Aumentou a quantidade de piões.”
E- “Muito bem! E se eu aumentar a quantidade de caixas...”
C- “Vai diminuir os piões.”
E- “Muito bem!”
C- (escreve a resposta: 12 piões em cada caixa)
E- “Gabriel, eu tenho seis bombons (examinador coloca sobre a mesa os bombons) e vamos dividir eles entre nós dois. Então, vamos dividir eles entre nós dois (o examinador divide o todo até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição).Você fica com três e eu fico com três, mas aí chega um colega seu de aula que também quer ganhar bombons. O que a gente faz? (pausa) O que a gente vai fazer?
C- “Colocar dois bombons para cada um”
E- “A gente vai dividir com ele. A gente vai dividir os bombons com ele. Então, se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e aumentar a quantidade de pessoas vai?
C- “Diminuir os bombons.”
E- “A quantidade de bombons. Muito bem! Isso mesmo! Quando era só nós dois, você tinha três e eu tinha...”
C- “Três.”
E- “Três. Agora, que somos nós três, eu, você e o seu amigo, cada um ficou com...”
C- “ Dois bombons.”
E- “Cada um ficou com dois bombons. Então, ficaram (pausa) menos.”
C- “Menos bombons.”
E- “Menos bombons para cada pessoa, por quê? Tinha mais...”
C- “Mais pessoas”
E- “Muito bem! Só que o seu amigo diz que vai embora. Ele não quer os bombons. Então, nós iremos dividí-los novamente entre nós dois. Sempre cuidando para que fique a mesma quantidade de bombons para cada um. Então, você vai ficar com quantos?”
C- (criança divide os bombons) Três
E- “Você vai ficar com três e eu vou ficar com?”
C- “Três”
E- “Três. O que aconteceu?”
C- “Diminuiu a quantidade de pessoas e aumentou a quantidade de bombons.”
E- “Muito bem! Isto mesmo! Se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e tiver menos pessoas para ganhar os bombons, ficarão?”
C- “Mais bombons ”
E- “Mais bombons para cada pessoa. Quando era nós três, você tinha dois bombons, agora, que somos só nós dois, cada uma ficou com mais bombons. Então, diminuiu a quantidade de pessoas.”
C- “E aumentou a quantidade de bombons.”
E- “Muito bem! Gabriel, eu vou dar outro problema para você resolver. Você pode ler se desejar e eu gostaria que você usasse esse material para resolvê-lo.” (coloca os objetos sobre a mesa)
C- (lê o problema) “Viviane preparou dezoito copos de suco para o lanche e quer servir seis copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?”
E- (coloca os objetos referentes ao problema sobre a mesa) “Quantos copos ela preparou para o lanche?”
C- “Dezoito”
E- “Então, nós vamos pegar os dezoito copos.”

C- (separa os dezoito copos)
E- "Então, faz o probleminha agora. Separou os dezoito copos?!
C- (resolve o problema com os objetos como mostra a foto abaixo)

E- "Quantas bandejas ela vai precisar?"
C- "Seis bandejas."
E- "Explica para mim como você fez."
C- "Eu dividi três copos para cada bandeja."
E- "Ah! Tu colocastes...Mas no problema podia colocar três copos em cada bandeja? O que dizia no problema?
C- "Coloca seis copos em cada bandeja."
E- "Ah! Eu tenho que colocar seis copos em cada bandeja. Então, eu quero saber quantas bandejas ela vai precisar; mas ela disse quantos copos ele vai colocar em cada bandeja. Então, você tem que prestar atenção no probleminha, no que o problema está pedindo. Então, vamos fazer o que o problema está pedindo. Tem que ser seis copos em cada bandeja."
C- (resolve novamente o problema com os objetos como mostra a foto abaixo)



E- "Quantas bandejas ela vai precisar?"
C- "Três."
E- "Três bandejas. Muito bem! Então, Gabriel, quando a gente está fazendo um problema devemos prestar atenção no enunciado do problema, o que está dizendo o problema, senão a gente termina respondendo.."
C- "Errado"
E- "Errado. Então, vamos escrever a nossa resposta. Quantas bandejas ela vai precisar?"
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 3 bandejas)
E- "Gabriel, a Viviane resolveu aumentar a quantidade de copos nas bandejas. Ela não quer colocar mais seis copos em cada bandeja. Ela quer colocar agora nove copos em cada bandeja. Veja que aumentou a quantidade de copos dentro das bandejas. Antes eram seis copos em cada bandeja e agora são nove copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou diminuir?"
C- "Vai aumentar"
E- "Eu vou ter mais bandejas? Se eu for botar nove copos em cada bandeja eu vou ter mais bandejas?" (pausa) "Ela quer botar nove copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou vai diminuir?"
C- "Diminuir"
E- "Muito bem! Por que vai diminuir a quantidade de copos...Vai diminuir a quantidade de bandejas? Por que vai diminuir?"
C- "Porque vai aumentar a quantidade de copos."
E- "Muito bem!Vai aumentar a quantidade de copos nas bandejas, vai diminuir a quantidade de bandejas. Então, faz para nós vermos.
C- (resolve com os objetos como mostra a foto abaixo)

E- “Quantas bandejas ela vai precisar?”
C- “Duas”.
E- “Então, se eu tenho a mesma quantidade de copos para distribuir nas bandejas e aumentar a quantidade de copos em cada bandeja, vai diminuir...”
C- “Vai diminuir a quantidade de copos” (fala bem baixinho a última palavra)
E- “Se eu aumentar a quantidade de copos, vai diminuir a quantidade de?
C- “Bandejas”
E- “Muito bem! Se eu tenho a mesma quantidade de copos para distribuir nas bandejas e diminuir a quantidade de copos nas bandejas.... vai?”
C- “Aumentar a quantidade de bandejas.”
E- “Muito bem! Vamos responder!” (refere-se a resposta do problema proposto: Quantas bandejas ela vai precisar?)
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 2 bandejas)
E-“Gabriel, a Viviane resolveu diminuir a quantidade de copos nas bandejas. Ela quer colocar agora três copos em cada bandeja. Veja que diminuiu a quantidade de copos nas bandejas. Antes eram nove copos em cada bandeja e agora são três copos em cada bandeja. A quantidade de bandejas vai aumentar ou diminuir?”
C- “Vai aumentar.”
E- “Muito bem! Por quê?”
C- “Porque vai diminuir a quantidade de copos.”
E- “Isso mesmo, se eu tenho a mesma quantidade de copos para distribuir e diminuir a quantidade de copos em cada bandeja, vai aumentar a quantidade..... de bandejas. E se eu tenho a mesma quantidade de copos para distribuir e aumentar a quantidade de copos nas bandejas vai?
C- “Diminuir as bandejas.”
E-“Muito bem! Então, vamos fazer.”
C- (resolve o problema com os objetos como mostra a foto abaixo)

E- “Quantas bandejas ela vai precisar?”
C- “Seis bandejas”
E- “Muito bem! Seis bandejas. Então, vamos escrever a nossa resposta: quantas bandejas ele vai precisar?”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 6 bandejas)
E- “Gabriel! Eu tenho doze bombons (examinador coloca sobre a mesa os bombons) e nós vamos dividir eles entre nós dois. Então, vamos dividir eles entre nós dois. Sempre cuidando para que cada um fique com a mesma quantidade. Porque quando a gente divide, devemos dividir em quantidades iguais (o examinador e a criança dividem o todo até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição). Você ficou com quantos?”
C- “Com seis.”
E- “E eu fiquei com ?”
C- “Seis.”
E- “E eu fiquei com seis. Mas aí chega um colega teu de aula que também quer ganhar bombons. O que a gente faz?” (pausa) “O que a gente faz primeiro?”
C- (silêncio)

E- “Nós vamos dividir com ele”.
C- (distribui os bombons)
E- “O que aconteceu?”
C- “Cada um ficou com quatro bombons.”
E- “Humm! E por que a gente ficou com quatro bombons?”
C- “Porque aumentou a quantidade de pessoas e diminuiu o número.....a quantidade de bombons.”
E- “Muito bem! Então, se eu tenho a mesma quantidade de bombons para distribuir e aumentar a quantidade de pessoas para ganhar os bombons ficará?”
C- “Menos bombons.”
E- “Menos bombons para cada pessoa. Quando eram só nós dois, você ficou com seis e eu fiquei com seis. Agora que somos nós três, cada um ficou com...”
C- “Quatro.”
E- “Quatro! Então, ficaram...”
C- “Menos bombons.”
E- “Menos bombons para cada um. Muito bem! Só que o seu amigo diz que vai embora. Ele não quer os bombons. Então, nós vamos dividi-los novamente entre nós dois. Sempre cuidando para que cada um fique com a mesma quantidade de bombons. Vamos ver! Resolve.”
C- (criança divide os bombons)
E- “O que aconteceu?”
C- “Diminuiu a quantidade de pessoas e aumentou a quantidade de bombons.”
E- “Muito bem, Gabriel! Se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e tiver menos pessoas para ganhar os bombons... ficarão?”
C- “Mais bombons ”
E- “Mais bombons para cada pessoa. Quando era nós três, você ficou com quatro, eu fiquei com quatro e seu amigo ficou com quatro. Agora, que somos só nós dois, cada uma ficou com ....”
C- “Quatro”
E- “Quatro?”
C- “Seis!”
E- “Seis bombons. Então, ficaram....”
C- “Mais bombons.”
E- “Mais bombons para cada pessoa. Muito bem!”

Atividade 2: Mantendo o dividendo constante e apresentando valores diferentes para o divisor

E- “Vamos ler o probleminha.”
C- (lê o problema) “Marcos e Isabel foram a uma papelaria e cada um comprou trinta lápis de cor. Marcos quer colocar seus lápis de cor em cinco estojos e Isabel quer colocá-los em seis estojos. Quem vai ter estojos com mais lápis de cor, Isabel ou Marcos?”
E- “Quem vai ter os estojos com mais lápis de cor?”
C- (silêncio) “Marcos.”
E- “Por que você acha que é Marcos?”
C- “Porque ele diminuiu a quantidade de....de estojos”
E- “E se ele diminui a quantidade de estojos...”
C- “Aumenta a quantidade de lápis.”
E- “Muito bem! Vamos resolver.” (entrega o material e coloca uma cartela com o problema em frente à criança) “Trinta lápis de cor. Separa trinta lápis de cor”
C- (começa a resolver o problema com o material)
E- “Então, coloca. Distribui os lápis de cor nas caixas...nos estojos.”
C- (continua resolvendo com o material)
E- “Quantos lápis de cor o Marcos colocou em cada estojo?.”
C- “Quatro lápis de cor.”

E- “Quatro?”
C- (conta dentro dos estojos) “Seis lápis de cor.”
E- “Seis lápis de cor. Tem que falar mais alto, Gabriel, senão o gravador não vai gravar.” (pausa) “Em quantos estojos a Isabel guardou os lápis de cor”
C- “Em seis estojos.”
E- “Seis estojos. Então vamos pegar os trinta lápis de cor da Isabel e vamos pegar cinco estojos. Sempre cuidando para que fique a mesma quantidade de lápis de cor em cada estojo. Quando a gente divide... divide em quantidades iguais.”
C- (continua resolvendo com o material como mostra a representação abaixo)

E- “Quantos lápis de cor a Isabel guardou em cada estojo?
C- “Cinco”
E- “Cinco lápis de cor em cada estojo. Ela guardou cinco lápis de cor em cada estojo. E o Marcos guardou quantos?”
C- “Seis.”
E- “Então, quem vai ter estojos com mais lápis de cor, a Isabel ou o Marcos?
C- “Marcos”
E- “Por que o Marcos vai ter os estojos dele com mais lápis de cor?”
C- “Porque ele tem menos estojos”.
E- “Se ele tem menos estojos...”
C- “Aumenta a quantidade de lápis”
E- “ Muito bem! Então, se eu tenho a mesma quantidade de lápis de cor para distribuir e aumentar a quantidade de estojos, vai ?
C- “Diminuir a quantidade de lápis.”
E- “Muito bem! Diminuir a quantidade de lápis de cor dentro de cada estojo. Se eu tenho a mesma quantidade de lápis de cor para distribuir e diminuir a quantidade de estojos... vai?
C- “Aumentar a quantidade de lápis.”
E- “Muito bem! Então, vamos escrever a nossa resposta.
C- (escreve a resposta na folha de ofício: Marcos por que ele tem menos quantidade de estojos)
E- (entrega outro problema para a criança ler e resolver)
C- (lê o problema) “Eduardo e Ana foram a uma loja e cada um comprou quarenta e oito foguetes. Eduardo quer guardar seus foguetes em seis caixas e Ana quer guardá-los em oito caixas. Quem vai ter caixas com mais foguetes, Ana ou Eduardo?”
E- “Quem vai ter caixas com mais foguetes, Ana ou Eduardo?”
C- “O Eduardo.”
E- “Por que o Eduardo?”
C- “Porque ele tem menas quantidade de caixas” [sic]
E- “E se ele tem menos quantidade de caixas, ele vai botar...”
C- “Vai aumentar a quantidade de foguetes.”
E- Muito bem!” (entrega os objetos para criança resolver) “Quantos foguetes?”
C- “Quarenta e oito”
E- “Quem tu vais fazer primeiro? O Eduardo ou o Paulo? (pausa) Qual deles?”
C- “Eduardo.”(criança separa a quantidade de foguetes necessária para resolver o problema)
E- “Vamos distribuir os foguetes. Separou os quarenta e oito?! Agora, distribui eles nas caixas.”
C- (coloca os foguetes nas caixas)

E- “Quantos foguetes Eduardo vai colocar em cada caixa?”
C- “Oito.”
E- “Oito foguetes. Agora, vamos fazer a Ana. Quantas caixas?”
C- “Oito.”
E- “Então, vamos pegá-las.”
C- (coloca sete foguetes nas caixas e deixa duas sem colocar)
E- “Quantos tu estás colocando em cada caixa?”
C- “Sete.”
E- “Eu posso dar essa quantidade? Tem duas caixinhas sem nada.”
C- (silêncio – mexe nas caixinhas tirando foguetes)
E- “ O que você está fazendo? Diz para mim o que você está fazendo?”
C-“Botando a mesma quantidade”
E- “Hum. Está tirando das caixinhas os que estão a mais?!”
C- (coloca seis em cada caixinha)
E- (conta a quantidade de foguetes) “Tem quarenta e oito! Tem oito ainda sobrando. Como você pode fazer?” (pausa) “Não dá para colocar mais um em cada caixinha?”
C- (silêncio)
E- “Quantas caixinhas ela tem?”
C- (conta baixinho)
E- “E quantos foguetes tem sobrando?”
C- “Oito”.
E- “Oito. Não dá para colocar um foguete em cada caixinha? Dá ou não dá?”
C- “Dá.”
C- (termina de resolver com os objetos, a resolução pode ser vista na representação abaixo)

E- “Quantos foguetes a Ana colocou em cada caixinha?”
C- “Seis.”
E- “E quantos foguetes colocou o Eduardo?” (pausa) “Conta!”
C- “Oito.”
E- “Então, quem vai ter caixas com mais foguetes, a Ana ou Eduardo?”
C- “Eduardo.”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele tem menos caixinhas e mais foguete...” (sic)
E- “Dentro das caixas! Então, se eu tenho a mesma quantidade de foguetes para dividir e aumentar a quantidade de caixas, vai ...”
C- “ Diminuir a quantidade de foguetes...”
E- “Dentro das caixas. E se eu tenho a mesma quantidade de foguetes para dividir e diminuir a quantidade de caixas!?”
C- “Vai ter mais foguetes dentro das caixas.”
E- “Vai aumentar a quantidade de foguetes dentro das caixas. Muito bem! Então vamos escrever. Quem vai ter as caixas com mais foguetes?
C- (escreve a resposta na folha de ofício: Eduardo por que ele tem menos quantidades de caixas)
E- (entrega outro problema para a criança ler e resolver)

C- (lê o problema) “Mário e Roberto foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou quarenta e dois carrinhos. Mário quer guardar seis carrinhos em cada caixa e Roberto quer guardar sete carrinhos em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas, Mário ou Roberto?” (pensa) “Roberto.”
E- “Por que tu achas que é o Roberto?”
C- “Porque ele quer guardar em sete (pausa prolongada) porque ele quer guardar nas caixinhas.”
E- “Qual a pergunta do problema? O que está dizendo o problema? Quem vai precisar de mais caixas? Quem vai precisar de mais caixas, eu acho que não é o Roberto. Eu acho que é o Mário que vai precisar de mais caixas. Quantos carrinhos o Mário vai guardar em cada caixa?”
C- “Seis.”
E- “Quantos o Roberto vai guardar?”
C- “Sete.”
E- “ Quem está guardando menos carrinhos?”
C- “O Mário”
E- “Se eu tenho menos carrinhos em cada caixa eu preciso de... mais caixas ou menos caixas? Se eu coloco poucos carrinhos...” (pausa) “Se diminuo a quantidade de carrinhos, eu preciso de?”
C- “Mais caixas.”
E- “Se eu diminui os carrinhos eu vou precisar de mais caixas. Então, quem vai precisar de mais caixas, o Mário ou o Roberto?”
C- “O Mário”
E- “Mas, por quê?
C- “Porque ele vai diminuir.”
E- “A quantidade de carrinhos que ele vai colocar em cada caixa. Se ele vai diminuir a quantidade de carrinhos em cada caixa ele vai...”
C- “Aumentar a quantidade de caixas”
E- Muito bem! E o Roberto, tem mais carrinhos?”
C- “Tem mais carrinhos” (repete junto com examinador)
E- “Se ele tem mais carrinhos ele precisa de...”
C- “Menos caixas”.
E- “Menos caixas. Vamos fazer para nós vermos.” (entrega os objetos) Quarenta e dois carrinhos. Qual você vai fazer primeiro,o Mário ou o Roberto?”
C- “Roberto”
E- “Então, vamos fazer o Roberto. Separa quarenta e dois carrinhos para depois a gente fazer.”
C- (separa os 42 carrinhos)
E- “Deu! Então, vamos ver. Quantos carrinhos o Roberto queria colocar em cada caixa?”
C- “Sete carrinhos.”
E- “Então, vamos colocar em cada caixa sete carrinhos para descobrir quantas caixas ele vai precisar.”
C- (coloca sete carrinhos nas caixas até esgotar a quantidade total: 42 carrinhos)
E- “Quantas caixas o Roberto precisou?”
C- “Seis caixas.”
E- “Agora vamos fazer o Mário.”
C- (separa os carrinhos)
E- “Se não pegar a quantidade certa, vai ficar certo o problema?”
C- “Não!”
E- “Não! Então, tem que pegar a quantidade certa. Vamos ver.”
C- (separa os 42 carrinhos)
E- “Quantos carrinhos ele quer colocar em cada caixa?”
C- “Seis”
E- “Então, vamos pegar seis carrinhos para colocar em cada caixa.”
C- (coloca seis carrinhos nas caixas até esgotar a quantidade total: 42 carrinhos. A representação abaixo, mostra essa distribuição)

E- “Quantas caixas o Mário precisou?”
C- “Sete caixas.”
E- “E quantas caixas precisou o Roberto?”
C- “Seis.”
E- “Quem vai precisar de mais caixas, o Mário ou o Roberto?”
C- “O Mário.”
E- “Por que o Mário?”
C- “Porque ele diminuiu a quantidade de carrinhos.”
E- “Ah! Fala mais perto do gravador.”
C- “Porque ele diminuiu a quantidade de carrinhos, aí aumentou a quantidade de caixas.”
E- “Muito bem! Então, se eu tenho a mesma quantidade de carrinhos para distribuir e diminuir a quantidade de carrinhos nas caixas, vai...”
C- “Aumentar a quantidade de caixas.”
E- “E se eu tenho a mesma quantidade de carrinhos para distribuir e aumentar a quantidade de carrinhos dentro das caixas, vai...
C- “Diminuir a quantidade de caixas”
E- “Muito bem! Vamos escrever a resposta.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: Mário por que ele tem menos quantidade de carrinhos)
E- “Vamos ver esse outro problema. Esse é o último”. (entrega a cartela contendo o enunciado do problema)
C- (lê o problema) “Juliana e Clara foram a floricultura e cada uma comprou trinta e seis rosas. Juliana quer colocar nove rosas em cada vaso e Clara quer colocar quatro rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos Clara ou Juliana?”
E- “Quem vai precisar de mais vasos, a Clara ou a Juliana?”
C- “Clara.”
E- “Por que a Clara?”
C- “Porque ela tem menas quantidades de rosas. Não! Tem” (pausa). “Ela quer colocar menos rosas do que Juliana.” [sic]
E- “Hum! Se ela quer colocar menos rosas do que a Juliana?
C- “Vai aumentar os vasos.”
E- Muito bem! Então, vamos fazer para nós vermos.” (entrega os objetos) “Quem você vai fazer primeiro?’
C- “A Clara”
E- “Então, faz a Clara primeiro. Quantas rosas ela comprou?”
C- “Trinta e seis.”
E- “Então, vamos separar trinta e seis rosas para fazer.”
C- (separa as rosas)
E- “Então, vamos colocar as rosas da Clara.”
C- (coloca três rosas em cada vaso até esgotar as rosas)
E- “Quantos vasinhos ela usou?
C- “Quantas rosas?
E- “Quantos vasinhos ela usou?”
C- “Doze”
E- “Quantas rosas tu pegastes?”
C- “Trinta e seis.”

E- “Trinta e seis? Vamos ver?!
C- (conta as rosas em voz baixa junto com o examinador) “Trinta e seis”
E- “Quantas rosas ela queria colocar em cada vaso? A Clara.”
C- “Quatro.”
E- “Quatro rosas! E quantas rosas tu usastes?”
C- “Três.”
E- “E podia usar três?”
C- “Não”
E- “Prestou atenção no problema?”
C- “Não”
E- “E se a gente não prestar atenção no problema, a gente termina...”
C- “Errando.”
E- “Errando. Então, vamos colocar quatro rosas em cada vaso.”
C- (coloca quatro rosas em cada vaso até esgotar o total: 36 rosas)
E- “Quantos vasos ela vai precisar?”
C- “Nove”
E- “Viu como dá diferente! Quantos tu tinhas dito antes?
C- “Doze.”
E- “Doze e agora deu nove. Então, Gabriel quando a gente está fazendo um problema a gente tem que prestar atenção. Se a gente não estiver prestando atenção no que está fazendo, nos dados do probleminha, a gente termina errando. Não é que você não saiba! Você não trabalhou com as quantidades que estavam no problema. Não adianta só distribuir em quantidades iguais. Tem que prestar atenção no problema, porque ele pode estar pedindo que a gente coloque uma determinada quantidade. Então, a gente tem que cuidar.” (pausa) “Vamos ver, agora, a Juliana. Quantas rosas a Juliana comprou?”
C- “Trinta e seis.”
E- “Então, vamos separar trinta e seis. E cuidar realmente para pegar trinta e seis, porque senão vai dar errado.”
C- (separa as rosas que irá distribuir)
E- “Deu?! Então, vamos fazer. Quantas rosas ela quer colocar em cada vaso?”
C- “Nove”
E- “Nove. Então, vamos pegar exatamente nove rosas, para não ter perigo de errar.”
C- (começa a coloca nove rosas em cada vaso)
E- “Quantas ela quer colocar em cada vaso?”
C- “Nove.”
E- “E quantas tu estás colocando? Aqui tem nove, aqui tem nove e aqui? ”
C- (aumenta a quantidade de rosa no vaso)
E- “Tem que prestar atenção, senão erra!”
C- (continua resolvendo o problema com os objetos)
E- “Quantas rosas tu tinhas pego?!”
C- “Trinta e sete.”
E- “E o problema vai sair certo?”
C- “Não.”
E- “Eu vou dizer que ela tinha, quatro vasos e sobrou uma rosa. E não sobra rosas! Então, Gabriel eu tenho que prestar atenção no que estou fazendo. Se eu prestar atenção no que estou fazendo eu não vou errar. Sempre que eu estiver bem atento ao trabalhinho, eu não erro.”
C- (a foto abaixo mostra a representação final realizada com os objetos)

E- “Então, vamos ver Gabriel, quem vai precisar de mais vasos, a Clara ou a Juliana?”
C- “A Clara.”
E- “Por que a Clara vai precisar de mais vasos?”
C- “Porque ela colocou menos.”
E- “Menos o quê?”
C- “Menos rosas.”
E- “Se ela colocou menos rosas em cada vaso...”
C- “Vai aumentar os vasos.”
E- “Muito bem! Então, se eu tenho a mesma quantidade de flores para dividir e diminuir a quantidade de flores em cada vaso vai aumentar a quantidade de...”
C- (silêncio)
E- “Se eu diminuir a quantidade de flores vai aumentar a quantidade de...”
C- “De vasos.”
E- “De vasos. Se eu tenho a mesma quantidade de flores para dividir e diminuir a quantidade de vasos, vai...”
C- “Aumentar a quantidade de rosas.”
E- “E se eu tenho a mesma quantidade de flores para dividir e aumentar a quantidade de flores nos vasos ,vai...”
C- “Diminuir os vasos”
E- “Vai diminuir os vasos. Muito bem! Então vamos escrever a resposta.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: Clara por que ela tem menos quantidade de rosas em cada vaso) [sic]
E- “Gabriel, eu tenho dezoito bombons (examinador coloca sobre a mesa os bombons) e nós vamos dividir eles entre nós dois. Divide até que não exista uma possibilidade de uma nova rodada de distribuição.
C- (divide os bombons)
E- “Você fica com nove e eu fico com nove, mas daí chega um coleguinha da sua sala que também quer ganhar bombons. O que a gente faz?”
C- (silêncio)
E- “Nós vamos dividir com ele. É isso?”
C- “É” (divide os bombons entre três) “Cada um vai ficar com seis.”
E- “Muito bem! Cada um de nós vai receber seis bombons. Então, o que aconteceu com os bombons?”
C- “Aumentou a quantidade de pessoas e diminuiu a quantidade de bombons.”
E- “Muito bem! Se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e aumentar a quantidade de pessoas para ganhar os bombons ficará menos bombons para cada pessoa. Quando era só nós dois, você ficou com nove e eu fiquei com nove, agora, que somos nós três, cada uma ficou com seis bombons. Então, ficaram...”
C- “Menos bombons”
E- “Menos bombons para cada pessoa. Muito bem! Só que seu amigo vai embora, ele não quer mais os bombons. E nós vamos dividir eles novamente entre nós dois. Sempre cuidando para que cada uma fique com a mesma quantidade de bombons”. (divide junto com a criança os bombons) “Você vai ficar com nove e eu vou ficar com nove. O que aconteceu?”
C- “Diminuiu a quantidade de pessoas e aumentou a quantidade de bombons.”

E- “Muito bem! Isso mesmo! Se eu tenho a mesma quantidade de bombons para dividir e tiver menos pessoas para ganhar os bombons, ficarão mais bombons para cada pessoa. Quando eram nós três, você ficou com seis, eu fiquei com seis e teu colega com seis. Agora, que somos nós dois cada um ficou com...”
C- “Nove”
E- “Nove bombons. Então, ficaram...”
C- “Menas quantidade de pessoas e mais quantidades de bombons.” [sic]
E- “Muito bem! Então, quando o número de pessoas aumenta, diminui a quantidade de bombons que cada uma recebe e que quando diminui o número de pessoas...”
C- “Aumenta a quantidade de bombons.”
E- “Que cada uma recebe.” (pausa) “Quando um aumenta outro diminui, então tem uma relação inversa. Se aumenta a quantidade de caixas, diminui a quantidade de objetos dentro das caixas. E se diminui a quantidade de objetos dentro das caixas, aumenta a quantidade de...”
C- “Aumenta a quantidade de caixas.”
E- “Aumenta a quantidade de caixas. Muito bem!"

2ª Sessão da Intervenção

Início: 13 horas e 2 minutos **Término:** 13 horas e 59 minutos

Atividade 3: Mantendo o divisor constante e alterando o valor do resto

E- “Tu vais fazer um probleminha usando o material. Lê para mim o problema.” (entrega a cartela contendo o enunciado do problema)
C- (lê o problema) “Ana comprou vinte e dois botões e quer colocá-los em quatro caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de botões. Quantos botões ficarão em cada caixa?”
E- “Então, vamos fazer usando os botões e usando as caixas. Faz o probleminha!”
C- (separa vinte e dois botões)
E- “Separou os vinte e dois?! Então, agora, faz o problema.”
C- (resolve o problema com os objetos) “Eu coloquei cinco botões em cada caixa.” (ver representação abaixo)

E- “E?!”
C- “Sobrou dois.”
E- “Esses dois botões que sobraram, o resto, eles podem sair fora do nosso trabalho?”
C- “Não.”
E- “Não! Por quê?”
C- “Porque tá certo, que ela queria a mesma quantidade. [sic]
E- “Mas você deu a mesma quantidade de botões para cada caixa. Mas, se eu tirar esses dois botões da nossa representação, eu tenho os vinte e dois botões?”
C- (silêncio)

E- “Não! Então, o resto, a quantidade de botões que sobrou, faz parte da quantidade inicial de botões que a gente começou a distribuir. Então, não posso deixar de representar o resto e de falar nele na minha resposta. Então, quantos botões ficarão em cada caixa?”
C- “Tem que colocar esses também, né?” (refere-se aos dois botões que estão fora das caixas)
E- “Mas se eu colocar, vai ficar quantidades diferentes! Quando a gente divide a gente tem que dividir em quantidades...”
C- “Iguais.”
E- “Iguais. Então, esses aqui vão ser o...”
C- “O resto.”
E- “O resto. Então, quantos botões ficarão em cada caixa”
C- “Cinco.”
E- “E sobraram?
C- “Dois.”
E- “Dois! Então escreve a resposta.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: ficaram 5 botões em cada caixa e sobro dois botões) [sic]
E- “Gabriel, E se a gente der mais três botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?” (coloca mais três botões na mesa junto aos outros dois que estão fora das caixas. Ver representação na próxima página)

C- “Cada um receberá seis”
E- “Seis botões. O que muda na resolução? O que vai mudar na resolução?”
C- “Vai colocar mais um em cada um.”
E- “Será que é só isso que vai mudar?”
C- “Vai sobrar?”
E- “Vai sobrar quantos?”
C- (silêncio)
E- “Mudou o resto?”
C - (faz que sim com a cabeça)
E- “Mudou! Mudou a quantidade de botões dentro das caixas?”
C- “Mudou.”
E- “E a quantidade total de botões, também mudou?”
C- “Mudou.”
E- “Então, mudaram três coisas. Então, o resto, a quantidade de botões que sobrou, não pode ser nem maior nem igual que o número de partes ou tamanho da parte, quando isso ocorre os elementos que estão presentes no resto precisam ser distribuídos igualmente entre todas as partes e um novo resto vai ser produzido ou poderá ocorrer da operação não ter resto. Então, faz para nós vermos.
C- (criança resolve com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- “Vamos ver o que mudou na resolução, agora.”
C- “A quantidade de botões, o resto.”
E- “Que quantidade de botões?”
C- “Seis em quatro caixas.”
E- “Ah! A quantidade de botões dentro das caixas.”
C- “O resto.”

E- “A quantidade de botões dentro das caixas. E a quantidade total de botões? Quantos botões eu tenho agora? Eu tinha vinte e dois, coloquei mais três ficaram quantos?”
C- “Vinte cinco.”
E- “Vinte e cinco botões. Então, ficaram vinte e cinco botões. Então, mudou a quantidade total de botões, mudou o resto e mudou a quantidade de botões dentro das caixas. O resto pode sair da nossa resolução?
C- “Não”
E- “Não! Porque ele faz parte da quantidade inicial de botões que começamos a distribuir.
C- (escreve a resposta na folha de ofício: ficaram 6 botões em cada caixa e sobrou um botão)
E- "Gabriel! E se a gente der mais cinco botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?” (coloca mais cinco botões na mesa junto ao botão que está fora das caixas. Ver representação abaixo)

C- “Vai ficar sete.”
E- “Vai ficar sete. O que muda na resolução?”
C- “Muda a quantidade de botões dentro das caixas, muda a quantidade total e muda....o resto.”
E- “Muito bem! Então, o resto nunca pode ser nem maior nem igual ao número de partes. Quando isso ocorre os elementos que estão presentes no resto precisam ser redistribuídos igualmente entre as partes e um novo resto vai ser produzido ou poderá ocorrer da operação não ter resto. Então, vamos colocar para nós vermos.
C- (criança resolve com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- “Muito bem! O que mudou então?
C- “Ficou sete botões e aumentou a quantidade total.”
E- “De botões.”
C- “De botões e sobrou dois.”
E- “E mudou o?”
C- “O resto.”
E- “Resto! Muito bem! Então, vamos escrever a resposta. Escreve a resposta.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: ficaram 7 botões em cada caixa e sobro 2] [sic]
E- “E o resto ele poderia sair da nossa representação?”
C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque nos estamos representando com ele.”
E- “Porque ele faz parte da quantidade inicial de botões que a gente começou a distribuir” (pausa) “Gabriel! E se a gente der mais dois botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas?” (coloca mais dois botões na mesa junto aos dois botões que estão fora das caixas. Ver representação na próxima página)

C- “Cada uma vai ficar com oito.”
E- “Oito botões. O que muda na resolução?”
C- “A quantidade de botões dentro das caixas aumenta, a quantidade total de botões aumenta. E o resto.”
E- “E o resto vai mudar! Vai ter resto?
C- “Não.”
E- “Não. Então, o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes, quando isso ocorre os elementos presentes no resto precisam ser redistribuídos igualmente entre as partes e um novo resto será produzido ou pode ocorrer da operação não ter resto. Então, coloca para nós vermos.
C- (criança resolve com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- “Essa operação vai ter resto?”
C- “Não.”
E- “Não! Então, quantos botões ficarão em cada caixa?”
C- “Oito.”
E- “Oito botões. Então, vamos escrever a resposta.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: ficaram 8 botões em cada caixa)
E- “Quando não sobra preciso comentar sobre o resto?
C- (faz que não com a cabeça)
E- “Não! Eu preciso comentar sobre o resto quando tem o resto.” (entrega outro problema para a criança ler)
C- (lê o problema) “Ricardo comprou 17 apitos de brinquedo. Ele quer dar 5 apitos para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar apitos?”
E- (entrega os apitos) "Então, vamos ver quantos amigos vão ganhar os apitos. Faz com os objetos”.
C- (começa a resolver com os objetos separando os apitos)
E- (continua entregando os objetos) “Esses são os amigos.”
C- (termina de resolver com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- “Quantos amigos vão ganhar os apitos?”
C- “Três.”
E- “Explica para mim como você fez.”
C- “Eu dividi cinco...dividi cinco apitos... e dei para cada um cinco.”
E- “E sobraram?”
C- “Dois.”
E- “Esses dois apitos que sobraram eles poderiam sair fora da nossa representação? O resto?”

C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele faz parte da representação.”
E- “Mas, por que ele faz parte da representação?”
C - “Porque ele faz parte....ele faz parte dos dezessete.”
E- “Ah! Se eu tirar os dois apitos eu não terei os dezessete apitos, eu terei quantos?”
C- “Quinze.”
E- “Quinze apitos. Muito bem! Então, vamos escrever a nossa resposta. E não esquece de escrever sobre o resto”
C- (começa a escrever)
E- “Então, quantos amigos vão ganhar os apitos?”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 3 amigos vão ganha apitos e 2 apitos sobro) [sic]
E- “E se a gente der mais quatro apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos? Se der mais quatro apitos. Vai ter mais amigos ou fica a mesma quantidade de amigos?” (coloca mais quatro apitos na mesa junto aos dois apitos que estão na mesa separados. Ver representação abaixo)

C- “Vai ter mais amigos.”
E- “Mais quantos?”
C- “Um.” (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- “Mais um amigo. O que muda na resolução?”
C- “Muda a quantidade de amigos, muda a quantidade de (pausa) apitos e muda o resto.”
E- “Muito bem! Está certo. Então, o resto nunca pode ser nem maior e nem..”
C- “Menor”
E- “Menor ele pode! Se sobrar um pode! Menor ele pode ser. Ele não pode ser nem maior e nem igual ao número de partes ou tamanho das partes, quando isso ocorre os elementos presentes no resto precisam ser redistribuídos igualmente e um novo resto será produzido ou pode ocorrer da operação não ter resto. Neste caso, quantos sobraram?”
C- “Um.”
E- “E o resto pode sair fora da nossa representação?”
C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele faz parte dos apitos.”
E- “Porque ele faz parte da quantidade de apitos que a gente começou a distribuir. Então, o que mudou na resolução?”
C- “ Aumentou a quantidade de apitos, a quantidade de amigos e a quantidade do resto.”
E- “Muito bem! Vamos escrever a resposta.”
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 4 amigos vão ganha e sobro 1 apito) [sic]
E- “Se a gente der mais seis apitos para o Ricardo: um , dois, três, quatro, cinco, seis apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos?” (coloca mais seis apitos na mesa junto aos outros dois que estão separado na mesa como se pode ver na representação abaixo)

C- "Vai precisar de mais amigos."
E- "Quantos?"
C- "Um." (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- "Mais um amigo. Então, o resto nunca pode ser nem maior e nem.."
C- "Igual."
E- "Igual ao tamanho das partes ou ao número de partes, quando isso ocorre os elementos presentes no resto precisam ser redistribuídos e um novo resto poderá ser produzido ou poderá acontecer da operação não ter resto.
E- "O que mudou na resolução?"
C- "Mudou a quantidade de apitos, mudou a quantidade de apitos para cada amigo."
E- "Aumentou?"
C- "Não! Ficou a mesma!"
E- "Então, o que mudou?"
C- "Mudou a quantidade de amigos, a quantidade de apitos."
E- "O que mais?"
C- "E o resto."
E- "E o resto. Também mudou o resto. Agora, a gente tem dois no resto. Esses dois aqui, eles podem sair da nossa representação?"
C- "Pode!"
E- "Se eu tirar esses dois, eu vou ter a quantidade de apitos que eu comecei a distribuir?"
C- "Não!"
E- "Não! Eles não podem sair da nossa representação, eu tenho que mencionar eles na minha resposta. Ele faz parte da resposta."
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 5 amigos vão ganha apitos e sobro 2) [sic]
E- "Gabriel, se a gente der mais três apitos para o Ricardo, será que ele vai ter mais amigos para dar os apitos ou fica a mesma quantidade de amigos? " (coloca mais três apitos na mesa junto aos outros dois que estão separados na mesa, como ilustra a figura na próxima página)

C- "Vai ter mais amigos para dar os apitos." (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo)

E- "O que muda na resolução, agora?"
C- "Muda a quantidade de amigos, muda a quantidade de apitos e o resto."
E- " Então, o resto, a quantidade de apitos que sobrou, não pode ser nem igual e nem maior do que a quantidade que é para dar a cada amigo. Quantos eram para dar para cada amigo?"
C- "Cinco."
E- " Aqui está igual a quantidade que era para dar a cada amigo. Não pode ser nem maior e nem igual e quando isso ocorre os elementos presentes no resto precisam ser redistribuídos e um novo resto vai ser produzido ou pode acontecer da operação não ter resto. Nesse caso aqui, não teve resto. Então, quantos amigos vão ganhar os apitos, agora?"
C- "Seis."
E- "Seis amigos vão ganhar apitos. Então, vamos escrever a resposta."
C- (escreve a resposta na folha de ofício: 6 amigos vão ganha apitos).

Atividade 4: Mantendo o dividendo constante e alterando o valor do resto

E- "Gabriel, eu dei um problema para uma criança resolver e ela fez o problema errado, ela não acertou. Você vai ler o problema e eu vou fazer como a criança fez o problema e você vai me dizer o que ela errou."
C- (lê o problema) "Carlos foi a uma papelaria e comprou vinte e oito lápis de cor e quer colocá-los em cinco estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor . Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?"
E- (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo) "Ela fez desse jeito e errou. O que foi que ela errou?"

C- "Ele deu seis para todos...para quatro e só um ficou com menos, ficou com cinco."
E- "Quantos têm nesse aqui?"
C- "Cinco."
E- "E nesse?"
C- "Cinco."
E- "Por que ela errou? Por que ela fez errado?"
C- "Ela só colocou em três estojos cinco e os outros três, seis. Ela queria que cada um recebesse a mesma quantidade."
E- "Muito bem! Então, ela não distribuiu em quantidades iguais. Ela distribuiu em quantidades..."
C- "Diferentes."
E- "E quando a gente divide, tem que dividir em..."
C- "Quantidades iguais."
E- "Como podemos resolver o problema para ficar certo."
C- "Nós podemos tirar e representar." (resolve corretamente o problema com os objetos)
E- "Então, você tirou um lápis de cor de cada caixa [estojo] que estava com seis lápis de cor.
C- "Humm!"

E- “ E esses três lápis de cor o que eles são?”
C- “O resto.”
E- “E o resto ele pode sair fora da nossa representação?”
C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele faz parte da quantidade que nós dividimos.”
E- “Quantos lápis de cor ela dividiu?”
C- “Vinte e oito.”
E- “ Se a gente tirar esses três lápis de cor, quantos lápis de cor ficará na mesa?”
C- “Vinte e cinco.”
E- “Então, o resto ele faz parte da quantidade inicial de lápis de cor que a gente começou a distribuir. Por isso que ele tem que estar representado. Então, o todo é constituído do número de partes, número de caixinhas, multiplicado pelo tamanho da parte, a quantidade de lápis de cor, mais o resto. Então, cinco vezes cinco?”
C- (silêncio) “Vinte e cinco.”
E- “Mais três do resto?”
C- “ Vinte e oito.”
E- “Que foi a quantidade de lápis de cor que a gente começou a distribuir. Então, quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?”
C- “Cinco.”
E- “Cinco?
C- “Cinco lápis de cor... e vai sobrar três”.
E- “Humm! Ah! Eu tenho que mencionar o resto.” (apresenta a cartela contendo o próximo problema)
C- “Maria tem cinqüenta fivelas de cabelo e quer colocá-las em oito saquinhos. Ela quer que cada saquinho tenha a mesma quantidade de fivelas. Quantas fivelas ela irá colocar em cada saquinho?”
E- (resolve com os objetos, como mostra a representação abaixo) “Ela fez assim. O que foi que ela errou?”

C- “Pode consertar?” (refere-se a resolver corretamente o problema com os objetos)
E- “Primeiro, diz por que foi que ela errou.”
C- “Porque ela não deu a mesma quantidade para dois. Nove saquinhos.”
E- “Nove saquinhos!Vamos contar para ver se tem nove saquinhos: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito. Quantas fivelas tem em cada saquinho?”
C- “Cinco”
E- “Tem cinco fivelas em cada saquinho!”
C- (silêncio)
E- “Então, ela distribuiu a mesma quantidade. Se tem cinco aqui, cinco, cinco, cinco, cinco, cinco, cinco, cinco. Ela deu a mesma quantidade. O que foi que ela errou?”
C- (silêncio) “Ela não colocou...não colocou as oito fivelas.”
E- “Como assim? Explica melhor, eu não entendi, (pausa) Ah! No problema dizia que era oito fivelas?! Não! Maria tem cinqüenta fivelas e quer colocá-las em oito saquinhos.”
C- “Ah!”
E- “Ela colocou em oito saquinhos.”
C- “Ai tem quarenta.” (refere-se as quantidades que estão dentro dos saquinhos)
E- (continua contando com as quantidades que estão no resto) Tem quarenta e um, quarenta e dois, quarenta e três, quarenta e quatro, quarenta e cinco, quarenta e seis, quarenta e sete, quarenta e oito,

quarenta e nove... cinqüenta. Aqui na mesa tem cinqüenta fivelas. O que foi que ela fez errado? Vamos ver juntos."

C- "Ela não guardou o resto."

E- "Ah! O que tem o resto."

C- "Ela não usou."

E- "Ah! Mas o que está acontecendo com o resto? Era para ele estar aqui? Qual o problema com o resto?"

C- Por que se ela coloca o resto dentro de um saquinho vai ficar diferente... para os outros saquinhos."

E- "Como assim, vai ficar diferente?"

C- "Vai mudar a quantidade."

E- "Fala mais alto!"

C- "Vai mudar a quantidade que tem dentro dos saquinhos." (resolve com os objetos)

E- "O que foi que você fez com o resto?"

C- "Eu usei."

E- "Então, o que tinha o resto dela? Ele estava..."

C- "Mais."

E- "Maior do que o número de saquinhos e quando isso ocorre..."

C- "Tem que dividi."

E- "Tem que dividir, fazer uma nova rodada de distribuição e um novo resto será produzido. Então, o resto não pode ser maior e nem...

C- "Igual."

E- "Igual ao número de partes ou tamanho da parte, quando isso ocorre tem que continuar a distribuição e foi o que você fez. E quantas fivelas sobraram?

C- "Duas"

E- "Então, quantas fivelas ela irá colocar em cada saquinho?

C- "Seis e vai sobrar duas."

E- "E o resto ele pode sair fora da nossa representação?"

C- "Não!"

E- "Por quê?"

C- "Porque nós começamos a representar com eles, o número."

E- "São cinqüenta fivelas! Se eu tirar o resto eu vou ter cinqüenta fivelas?"

C- "Não!"

E- "Eu vou ter quarenta e oito fivelas. Muito bem! (entrega a cartela contendo o próximo problema)

C- (lê o problema) "Luzia foi a uma loja de brinquedos e comprou trinta e uma bonecas. Ela quer guardá-las em seis saquinhos. Quantas bonecas ela irá guardar em cada saquinho?"

E- (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo) "Ela fez assim. O que foi que ela errou?"

C- (silêncio)

E- "O que foi que ela errou?"

C- "Ela botou....ela colocou mais uma boneca em um saquinho."

E- "Então, quantos saquinhos ela tinha que usar?"

C- "Seis saquinhos."

E- "Seis saquinhos. E quando ela colocou uma boneca em um saquinho ela deu quantidades..."

C- "Iguais." (fala bem baixinho)

E- "Ela deu quantidades iguais?! Quantos tem aqui?" (aponta para um saquinho)

C- "Um."

E- "E aqui quantos têm?" (aponta para outro saquinho)
C- "Cinco."
E- "Então, ela deu quantidades diferentes. Ela podia ter dado....colocado uma bonequeinha dentro de um saquinho?"
C- "Não!"
E- "Por quê?"
C- "Porque ele queria dividir em quantidades iguais e ela [inaudível] ela só queria pegar seis saquinhos."
E- "E essa boneca, o que nós vamos fazer?"
C- " Vai usar ela como resto."
E- "Ah! Como resto. Ela pode sair fora da nossa representação?"
C- "Não!"
E- "Por quê?"
C- "Porque ela faz parte do número que dividiu."
E- "Que número?"
C- "Trinta e um."
E- "Ah! Ela faz parte da quantidade inicial de bonecas, que a gente começou a distribuir. Então, quando a gente divide a gente tem que dividir em quantidades..."
C- "Iguais."
E- "Quando a gente divide tem que distribuir em quantidades iguais. Então, quantas bonecas ela irá guardar em cada saquinho?"
C- "Cinco."
E- "Cinco bonecas?!"
C- "E vai sobrar uma."
E- "Cinco bonecas e vai sobrar uma. Muito bem! (entrega cartela contendo o próximo problema)
C- (lê o problema) "Rodrigo comprou vinte e nove skates. Ele quer dar cinco skates para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar skates?
E- (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo) "Ela fez assim. O que foi que ela fez errado?"

C- "Ela boto cinco amigos seis skates, e um amigo boto cinco. Boto seis para cada um e um boto cinco." [sic]
E- "Então, por que ela errou?"
C- "Por que não tinha a quantidade igual."
E- "Ela prestou atenção no problema? Quantos skates era para dar para cada amigo?"
C- "Cinco."
E- "Ela deu cinco para cada amigo?"
C- "Não! Para um ela deu seis."
E- "Ela deu quantidades diferentes. Então, como a gente pode fazer para resolver corretamente o problema."
C- (resolve corretamente com os objetos o problema)
E- "Quantos amigos vão ganhar os skates?"
C- "Cinco."
E- "Cinco amigos vão ganhar os skates?!
C- "E sobrarão quatro skates."
E- "E sobrarão quatro skates. Então, tem que distribuir em quantidades iguais [Final do lado A da fita cassete. O examinador solicita que a criança repita] "Explica para mim por que ela errou o problema dos skates"

C- “Ela não dividiu em quantidades iguais.”
E- “Ela não dividiu em quantidades iguais, ela continuou a divisão e não dividiu em quantidades iguais. Então, quantos amigos vão ganhar skates?”
C- “Cinco e vai sobrar quatro skates.” [sic]
E- “Quatro skates. Muito bem!Então quando a gente divide, a gente tem que dividir em quantidades...”
C- “Iguais.”
E- “O todo inicial é constituído do número de partes, multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto. Então, cinco vezes cinco.”
C- “Quinze.”
E- “Cinco vezes cinco.”
C- “Vinte.”
E- “Cinco vezes cinco?”
C- (silêncio) “Vinte e cinco.”
E- “Vinte e cinco mais quatro, que é o resto...”
C- “Vinte e nove.”
E- “Vinte e nove. (entrega a cartela contendo o próximo enunciado)
C- (lê o problema) “Elena comprou dezenove garrafas de refrigerante para festa de aniversário de João. Ela quer servir seis garrafas de refrigerante em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?”
E- (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo) “ Ela fez assim. O que foi que ela errou? (pausa) O que foi que ela errou?”

C- “Ela não pegou mais bandejas.”
E- “Explica melhor.”
C- (silêncio)
E- “Por que ela errou?”
C- “Porque ela não usou o resto.”
E- “Como assim, ela não usou o resto? Explica melhor o que tem o resto.”
C- “Ele tem mais do que..”
E- “Ele tem mais do quê?”
C- “O número de bandejas.”
E- “O número de bandejas? Têm mais garrafas do que do que o número de bandejas?”
C- (silêncio)
E- “O que houve com o resto?”
C- “Ela não representou.”
E- “Ela não representou o quê?”
C- “Ela não usou o resto. Ela tem que representar, dar mais uma rodada.”
E- “Ah!”
C- “Dar mais uma bandeja.”
E- “Ah! Muito bem! Ela tem que colocar a quantidade que sobrou em mais uma bandeja. Porque o resto não pode ser nem maior e nem...”
C- “Igual.”
E- “Igual ao tamanho da parte ou ao número de partes, quando isso ocorre os elementos que estão presentes no resto precisam ser redistribuídos. Ela não fez uma nova rodada de distribuição. Então, o resto aqui está maior do que a quantidade de garrafinhas que é para colocar em cada bandeja. Foi por isso que ela errou. Então, por que ela errou?”
C- “Por que ela colocou (pausa) ela não deu mais uma rodada e tem um número maior de garrafas...”

E- "No resto. Então, o resto está maior do que a quantidade de garrafas que era para colocar em cada bandeja. Então, quantas bandejas ela vai precisar?"
C- "Três."
E- "Três?!"
C- "Três e vai sobrar uma garrafa."
E- "Essa uma garrafa, poderia sair fora da representação?"
C- "Não!"
E- "Por quê?"
C- "Porque ela faz parte do número que nós estamos dividindo."
E- "Que número é esse?"
C- "O dezenove."
E- "Dezenove. Então, o resto faz parte da quantidade de garrafas que a gente começou a distribuir, por isso que ele tem que estar presentes na nossa representação." (entrega a cartela contendo próximo enunciado)
C- (lê o problema) "Marta comprou vinte e sete anéis. Ela quer guardar seis anéis em cada porta jóia. Quantos porta jóias ela vai precisar?"
E- "Vou mostrar como ela fez (resolve com os objetos como mostra a representação abaixo) "Ela disse que vai precisar de cinco porta jóias. Ela fez errado. O que foi que ela errou?"

C- (silêncio) Ela não...ela não...ela deu todas quantidades iguais."
E- "Deu todas quantidades iguais?
C- (conta) "Deu quatro para cada."
E- (interrompe) "Para ser todas iguais, tem que ser essa aqui junto (refere-se a um dos porta jóias que contém três anéis). Ela deu todas iguais?"
C- "As quatro iguais e uma ela não deu igual."
E- "Então, por que ela errou?"
C- "Porque ela não deu igual."
E- "Ela não deu a mesma quantidade para cada porta jóia."
C- (repete o final da frase junto com o examinador e continua) ela queria que recebesse todos a mesma quantidade."
E- "E quantos anéis era para colocar em cada porta jóia?"
C- "Seis."
E- "E ela colocou seis anéis em cada porta jóia?"
C- "Cinco, mas só que nesse.."
E- (interrompe) "Então, ela não....Ela colocou ou ela não colocou?! Ela colocou em todos seis?"
C- "Não!"
E- "Não! Ela não colocou. Em um porta-jóia ela colocou..."
C- "Três anéis."
E- "Três anéis. Ela podia colocar...no problema?
C- "Não!"
E- "O que ela tinha que ter feito? Como é que ela pode resolver o problema para ficar certo?"
C- "Botar esse aqui no resto". (refere-se aos três anéis que estão dentro do porta-jóia)
E- "Ah! Esses três anéis que estão no porta jóia vão ser o resto."
C- (resolve corretamente com os objetos)
E- "Então, quantos porta jóias ela vai precisar?"
C- "Quatro."
E- "Quatro e sobraram..."
C- "Três."

E- "Três o quê? Porta -jóia?
C- "Não! Anéis."
E- "Então, quantos porta- jóias ela vai precisar?"
C- " Quatro."
E- "E sobraram?"
C- "Três anéis."
E- "Três anéis. Então, quando a gente divide a gente tem que dividir em quantidades iguais. E o resto ele pode sair fora da nossa representação?"
C- "Não!"
E- "Por quê?"
C- "Porque ele faz parte do número que nós estamos dividindo, vinte e sete.
E- "Muito bem! Isso mesmo!

3ª Sessão da Intervenção

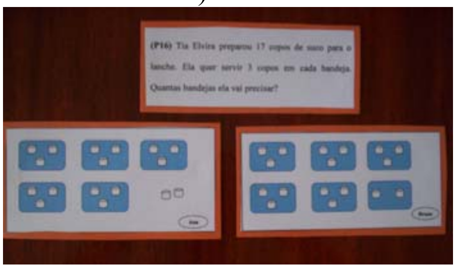
Início: 13 horas e 13 minutos **Término:** 14 horas e 3 minutos

Atividade 5: Identificando procedimentos de resolução mais adequados em problemas de divisão com resto

E- "Eu dei um problema para Ana e Bruno resolverem. Esse cartão é como se fosse uma fotografia do jeito que eles resolveram o problema. Eu vou mostrar o problema que eles resolveram e você irá dizer quem resolveu melhor, se foi a Ana ou se foi o Bruno. Quem resolveu melhor?" (mostra a cartela contendo o enunciado do problema e as cartelas com as representações conforme foto que segue)

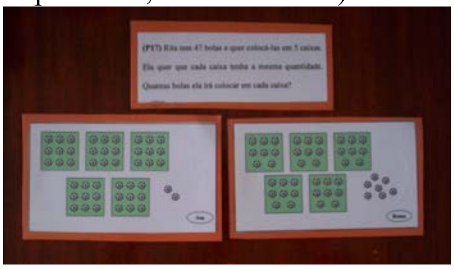
C- (lê o problema) "Carlos comprou trinta e quatro foguetes e quer colocá-los em seis caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de foguetes.Quantos foguetes ele irá colocar em cada caixa?"
E- "Quem resolveu melhor a Ana ou o Bruno?"
C- (silêncio) "O Bruno."
E- "Por que o Bruno resolveu melhor?"
C- "Porque ele deu a mesma quantidade para cada caixa."
E- "E a Ana por que não fez uma boa distribuição?"
C- "Porque ela...quatro caixas ela botou seis e duas ela não colocou."
E- "Então, por que ela não fez uma boa distribuição?"
C- "Porque ela não dividiu em quantidades iguais."
E- "Muito bem! Então, quando a gente distribui a gente tem que dividir em quantidades..."
C- "Iguais."
E- "Então, o todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho da parte mais o resto. Então, seis vezes cinco?"
C- "Trinta."
E- "Mais quatro."

C- “Trinta e quatro.”
E- “Trinta e quatro, que foi a quantidade de foguetes que ela começou a trabalhar. E o resto ela poderia não ter desenhado?”
C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele faz parte da quantidade que ela começou a distribuir.”
E- “Muito bem! Então, quantos foguetes ele irá colocar em cada caixa?”
C- “Cinco.”
E- “E sobrarão?”
C- “Quatro.”
E- “Quatro. Eu tenho que falar do resto na minha resposta. Lembra disso?!” (entrega cartelas do próximo enunciado, como ilustra a foto abaixo)



C- (lê o problema) “Tia Elvira preparou dezessete copos de suco para o lanche. Ela quer servir três copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?
E- “Quem fez a melhor distribuição, a Ana ou o Bruno?”
C- (silêncio) “A Ana.”
E- “Por que a Ana fez a melhor distribuição?”
C- “Porque ela dividiu todos...em quantidades iguais e o Bruno não! Ele dividiu...cinco bandejas. Ele botou...três copos e em uma, ele só colocou dois.”
E- “Então, por que ele errou?”
C- “Ele não dividiu em quantidades iguais.”
E- “Ele dividiu em quantidades diferentes. O Bruno prestou atenção no problema?”
C- “Não!”
E- “Quantos copos era para servir em cada bandeja?”
C- “Três.”
E- “Três copos em cada bandeja. Ele poderia ter colocado o resto em uma bandeja?”
C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque o resto não era três?!”
E- “Só se o resto fosse três que ele poderia colocar?!”
C- (faz que sim com a cabeça)
E- “Então, quando a gente divide a gente tem que dividir em quantidades...”
C- “Iguais.”
E- “Iguais. E o todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho da parte mais o resto. Cinco vezes três?”
C- (silêncio) “Doze” (fala bem baixinho)
E- “Quinze! Mais dois?”
C- “Dezessete.”
E- “Dezessete que foi a quantidade inicial que a gente começou a distribuir. E o resto ele poderia sair fora da nossa representação?”
C- “Não!”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele faz parte da quantidade que nós começamos a dividir.”
E- “Quanto foi essa quantidade?”
C- “Dezessete.”
E- “Dezessete. Muito bem! Então, quantas bandejas ela vai precisar?”

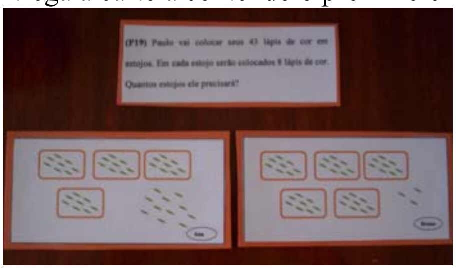
C- “Cinco e dois copos...”
E- “Vão!?”
C- “Sobrar.”
E- (entrega as cartelas do próximo problema, ver foto abaixo)



C- (lê o problema) “Rita tem quarenta e sete bolas e quer colocá-las em cinco caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantas bolas ela irá colocar em cada caixa?”
E- “Quem fez a melhor distribuição a Ana ou o Bruno?”
C- (silêncio) “A Ana.”
E- “Por que a Ana fez a melhor distribuição?”
C- “Porque ela deu em quantidades iguais.”
E- “Para todas as caixas.”
C- “Para todas as caixas.”
E- “E o Bruno, por que ele não fez uma boa distribuição?”
C- “Porque ele deu...ele deu oito bolas para cada caixa e sobrou...sete, dava pra ela dar mais outra distribuição, redistribuir.”
E- “Redistribuir?! Então, porque ele errou?”
C- “Porque ela não redistribuiu o resto.”
E- “Ah! Ele não redistribuiu o resto. O resto não pode ser maior..”
C- “Nem igual.”
E- “Quando isso ocorre?”
C- “Tem que dividir.”
E- “Tem que continuar a distribuição. Muito bem! Então, o todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes ou tamanho da parte. Então, quantas bolas ela irá colocar em cada caixa?”
C- “Nove...e vai sobrar duas bolas.”
E- “E vai sobrar duas bolas.” (entrega as cartelas do próximo problema. Ver foto abaixo)

C- (lê o problema) “Uma fábrica produziu vinte e três barcos de brinquedo. O dono da fábrica quer colocar cinco barcos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar?”
E- “Quem fez a melhor distribuição?”
C- “Bruno.”
E- “Por que o Bruno fez a melhor distribuição?”
C- “Porque ele dividiu em quantidades iguais.”
E- “E também ele representou o resto. E a Ana por que não fez uma boa distribuição?”
C- “Porque em um ela botou quatro e outros ela botou cinco. Um ela botou quatro e outro ela botou quatro. Ela dividiu errado. Ela não dividiu corretamente.”
E- “Ela não dividiu corretamente. Explica melhor. O que foi que ela errou? Por que ela não?”
C- “Porque ela não dividiu a mesma quantidade.”
E- “A Ana, prestou atenção no problema?”

C- “Não!”
E- “Quantos barcos era para colocar em cada caixa?”
C- “Cinco.”
E- “Ela também não prestou atenção no problema. Além de ela não distribuir em quantidades iguais ela não prestou atenção no probleminha. Quando a gente faz um probleminha de divisão ou qualquer outro problema a gente tem que prestar atenção no enunciado do problema, no que diz o enunciado do problema. Então, o todo tem que ser distribuído em quantidades...”
C- “Iguais.”
E- “Iguais. Então, o todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho da parte mais o resto. Então, quatro vezes cinco?”
C- “Vinte.”
E- “Mais três do resto?”
C- “Vinte e três.”
E- “Qual foi a quantidade de barcos que ele tinha para distribuir? Então, quantas caixas ele vai precisar?”
C- “Quatro e vai sobrar três barcos.” [sic]
E- “Muito bem! Isso mesmo! (entrega a cartela contendo o próximo enunciado. Ver foto abaixo)



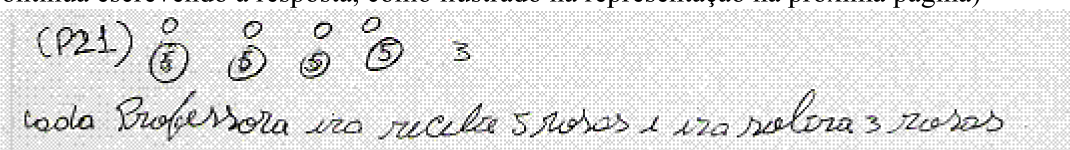
C- (lê o problema) “Paulo vai colocar seus quarenta e três lápis de cor em estojos. Em cada estojo serão colocados oito lápis de cor. Quantos estojos ele precisará?”
E- “Quem fez a melhor distribuição?”
C- (silêncio) “O Bruno.”
E- “Por que o Bruno fez a melhor distribuição?”
C- “Porque ele deu oito, que era a quantidade que ele tinha que dividi. Oito lápis para cada estojo e sobram três.”
E- “E a Ana por que ela não fez uma boa distribuição?”
C- “Ela usou menos estojos e não deu o resto”.
E- “Explica melhor.”
C- “Ela não redistribuiu o resto.”
E- “Hum!Como assim?”
C- “Era para ela... o resto...era para ela ver se tinha mais do que a quantidade ou a mesma quantidade do que estava sendo dividido, aí tem mais do que aqui.”
E- “Aqui nas caixinhas.”
C- “Nós temos que colocar esses.” (refere-se a quantidade que está no resto)
E- “Os que estão no resto? Colocar numa caixa?”
C- “Num estojo.” (enquanto fala a criança resolve corretamente com os objetos)
E- “Ah! Muito bem! É isso mesmo! O todo ele tem que ser dividido em quantidades iguais até que não exista a possibilidade de continuar a divisão. Então, quando isso ocorre os elementos que estão presentes no resto tem que ser redistribuídos, ou seja, o resto não pode ser nem maior e nem...”
C- “Igual.”
E- “E nesse caso aqui o resto era...”
C- “Maior.”
E- “Maior do que a quantidade que era para colocar em cada estojo. Muito bem!” (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo)

C- (lê o problema) “Eduardo comprou trinta carrinhos e quer guardá-los em quatro caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele irá colocar em cada caixa?”
E- “Quem fez a melhor distribuição?”
C- “A Ana.”
E- “Por que a Ana fez a melhor distribuição.”
C- “Porque ela fez a mesma...as quantidades iguais e sobrou o resto.”
E- “E o Bruno, por que foi que ele errou?”
C- “Ele colocou a mesma quantidade que a Ana colocou , mas ele não representou o resto. Ele colocou o resto aqui e têm que ser iguais, botou sete nas outras caixas....nas outras quatro caixas e ele coloco mais uma caixa.” [sic]
E- “Muito bem! Então, ele não prestou atenção e colocou o resto dentro de uma caixa. Quando ele colocou o resto dentro de uma caixa, ele colocou quantidades...”
C- “Diferentes.”
E- “Diferentes. E quando a gente divide, a gente tem que dividir em quantidades iguais.”
C- “Iguais.”
E- “Ele prestou atenção no problema?”
C- “Não!”
E- “Quantas caixas era para ele usar?”
C- “Quatro.”
E- “E quantas caixas o Bruno usou?”
C- “Cinco.”
E- “Se ele tivesse prestado atenção ele não iria errar o problema. Então, quantos carrinhos ele irá guardar em cada caixa?”
C- “Sete carrinhos.”
E- “Sete carrinhos”
C- “E vai sobrar dois carrinhos.”
E- “Muito bem! Então, o todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto. Então, quatro vezes sete?”
C- (silêncio)
E- “Vinte e oito.” Mais dois?
C- “Trinta.”
E- “Trinta.”

Atividade 6: Refletindo sobre procedimentos incorretos de resolução em problemas de divisão com resto e sem resto

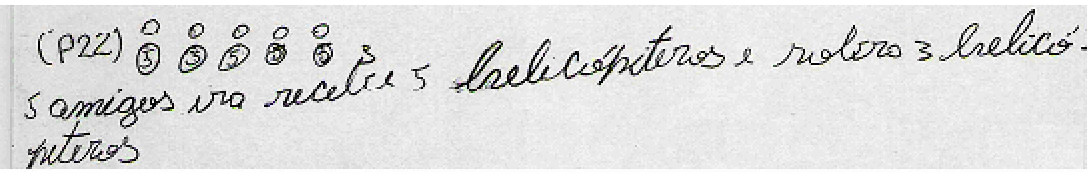
E- “Eu pedi para Luana resolver um problema e ela resolveu desse jeito. Ela errou o problema. Eu quero que você descubra qual foi o erro que ela fez. Lê o problema. (entrega cartela contendo o enunciado e a resolução do problema. Ver foto abaixo)

C- (lê o problema) “Carla foi à uma floricultura e comprou vinte e três rosas para dar às suas quatro professoras. Ela quer que cada professora receba a mesma quantidade de rosas. Quantas rosas cada professora vai receber?”
E- “Por que ela errou?”
C- “Ela deu quatro...três professoras ela deu a mesma quantidade. E só uma ela não deu a mesma quantidade.” [sic]
E- “Então, por que ela errou?”
C- “Porque ela não deu a mesma quantidade.”
E- “Ela deu quantidades...”
C- “Diferentes.”
E- “Ela deu quantidades diferentes para cada professora. E quando a gente divide, a gente pode dar quantidades diferentes para cada pessoa?”
C- “Não!”
E- “A gente tem que distribuir em quantidades iguais. Então, vamos fazer agora a resposta certa.Você que vai fazer o problema certo, agora.”
C- (criança começa a resolver o problema na folha de ofício)
E- “Você está dando a mesma quantidade para cada professora?”
C- “Ah! Eu tô fazendo [inaudível]
E- “É para você fazer certo, agora! Tá dando a mesma quantidade para cada professora?”
C- (silêncio)
E- “Você vai fazer certo, agora. Como você vai fazer!?”
C- (continua resolvendo o problema)
E- “Então, quantas rosas cada professora vai receber?”
C- “Cinco.”
E- “Então, escreve: ‘cada professora vai receber cinco rosas’.”
C - (continua escrevendo a resposta, como ilustrado na representação na próxima página)



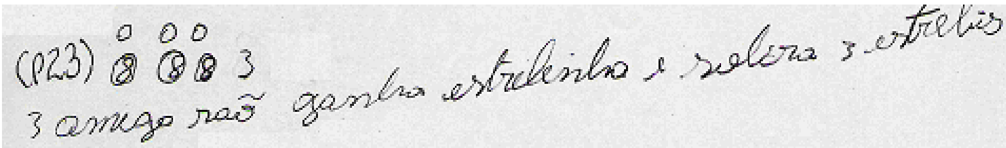
E- “Nós temos que falar do resto?”
C- “Temos.”
E- “Por quê?”
C- “Porque ele faz parte da quantidade.”
E- “Que quantidade?”
C- “Dos vinte e três.”
E- “Que nós começamos a distribuir.” (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo)

C- (lê o problema) "Marcos tem vinte e oito helicópteros de brinquedo. Ele quer dar cinco helicópteros para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão receber helicópteros?"
E- "O que foi que ela errou?"
C- "Ela não deu a quantidade de helicópteros que estava pedindo".
E- "Ah! Ela não prestou atenção no problema. O que ela fez? Ela dividiu em quantidades iguais. Ela desenhou os vinte e oito helicópteros, mas ela não prestou a atenção no probleminha. Quantos helicópteros era para dar para cada um?"
C- "Cinco."
E- "Cinco. E ela não deu cinco, ela deu quantos?"
C- "Quatro."
E- "Quatro. Então foi por isso que ela errou. Ela não prestou a atenção no problema, então, tem que prestar atenção. Então, vamos fazer certo."
C- (criança começa a resolver o problema na folha de ofício)
E- "Quantos tu já destes?
C- "Cinco."
E- "Só destes cinco?"
C- (conta a quantidade que distribuiu) "Vinte"
E- "Vinte. Dá para dar para mais um amigo?"
C- "Dá." (continua a resolver como ilustrado na representação abaixo)



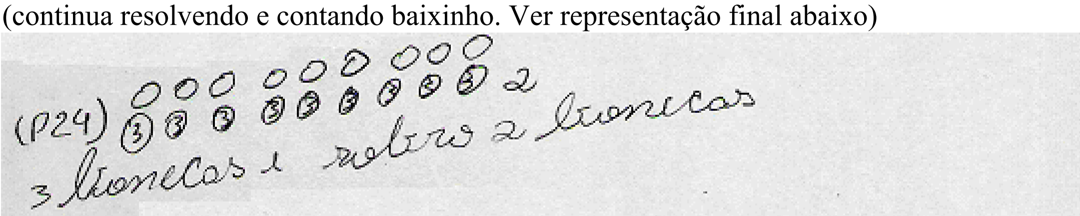
E- "Quantos amigos vão receber os helicópteros?"
C- (silêncio)
E- "Quantos?"
C- "Cinco."
E- "Cinco o quê?"
C- "Amigos, vão receber cinco helicópteros."
E- "Cinco amigos vão receber cinco helicópteros e?
C- "E sobrará três helicópteros."
E- "Muito bem!" (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo) "Lê para mim."

C- (lê o problema) “Mônica comprou vinte e sete estrelinhas na loja de enfeites. Ele quer dar oito estrelinhas para cada uma das suas amigas. Quantas amigas vão receber estrelinhas?
E- “ O que foi que ela errou?”
C- (silêncio - olha para a representação)
E- “O que ela fez errado?”
C- (silêncio- olha para a representação)
E- “Por que ela errou?”
C-“Porque ela colocou...ela só tinha vinte e sete estrelinha e aqui ela colocou trinta e duas estrelinhas.” [sic]
E- “Então, por que ela errou?”
C- “Porque ela não prestou atenção no problema.”
E- “Ela não prestou atenção no problema. Se ela tivesse prestado atenção no problema ela iria fazer certo. Ela cuidou para dar a mesma quantidade, mas esqueceu de cuidar que tinha que dar...”
C- “Dá a quantidade que os amigos pedia.”
E- “Que o problema pedia. Então, vamos fazer agora certo o problema. Faz como vai ficar o problema.”
C- “Oito.”
E- “Então, dá para cada amiga oito.”
C- (começa a resolver o problema na folha de ofício)
E- “A quantas amigas tu estas dando?”
C- [inaudível]
E- “Seis! Quantas ela tem?” (refere-se a quantidade de amigas que estão na cartela representada pela outra criança)
C- “Quatro.”
E- “E ela não prestou atenção no problema. E você prestou atenção no problema?” (pausa) “Também está errando porque não prestou atenção no problema. Como é que a gente pode fazer? Eu tenho que ir contando quantos eu estou dando.” (pausa) “ Quantos eu tenho aqui?” (aponta para representação)
C- “Oito.”
E- “Eu tenho que ir somando para ver quantos dá. Oito mais oito?”
C- “Dezesseis.”
E- “Dezesseis mais oito? Eu tenho que ir contando para ver quantos eu vou dar. Quanto dá aqui? Soma para você ver. Soma para ver! Quantos você já deu nesses três?”
C- “Vinte e quatro.”
E- “Vinte e quatro. Quantos são?”
C- “Vinte e sete.”
E- “Dá para dar para mais um?”
C- “Não!”
E- “Então, o que você vai fazer? A gente não vai desenhar?” (pausa) “Ou vai desenhar” (pausa) “Tem quantas estrelinhas ai? Vinte e quatro a gente já usou. Vinte e cinco, vinte e seis...”
C- “Vinte e sete.” (representa a quantidade que sobra)
E- “Três estrelinhas. Viu se agente não prestar atenção a gente faz como a Luana. A gente sai dando...”
C- “Errado.”
E- “Errado. Porque a gente vai dando a mesma quantidade, mas tem que prestar atenção no problema, quantas ele está dizendo que é para dar. Quantas amigas vão receber estrelinhas?”
C- “Três.”
E- “E sobrarão?”
C- “Três.”
E- “Três o quê?”
C- “Estrelinhas.”
E- “Então, vamos escrever a resposta do problema”.
C- (ver representação realizada abaixo)



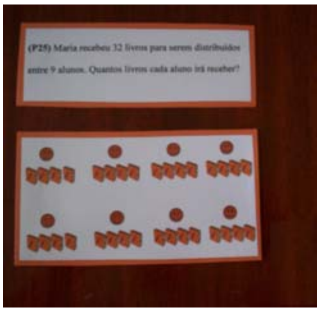
E- (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo)

C- (lê o problema) “Débora comprou vinte e nove bonecas para dar às suas nove amigas. Ela quer que cada uma das amigas receba a mesma quantidade de bonecas.Quantas bonecas cada amiga vai receber?”
E- “O que foi que ela errou?”
C - (silêncio- olha a representação) “Ela não redistribuiu para as amigas.”
E - “Então, por que ela errou?”
C- “Porque ela não redistribuiu o resto”
E- “O resto.”
C- “O resto está maior do que a quantidade de...quantidade de bonecas que era para dividir para cada uma..”
E- “Do que a quantidade de amigas! Ela podia dar mais uma rodada. Ela podia dar mais uma boneca para cada uma das amigas. Por isso que ele [resto] está maior. Então, o todo deve ser distribuído em quantidades iguais até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser maior e nem...”
C- “Igual.”
E- “Igual.”(pausa) “Então quantas vão ficar? Ela vai dar mais uma?” (pausa) “Quantas vão ficar, se ela vai dar mais uma?”
C- “Três.”
E- “Então, faz.”
C- (começa a resolver o problema na folha de ofício)
E- “Quantas tu já destes?”
C- “Nove.”
E- “Tu destes só nove?”
C- “A boneca?”
E- “E quantas tu já destes?”
C- “Nove.”
E- “Três, seis, nove...”
C- (continua resolvendo e contando baixinho. Ver representação final abaixo)

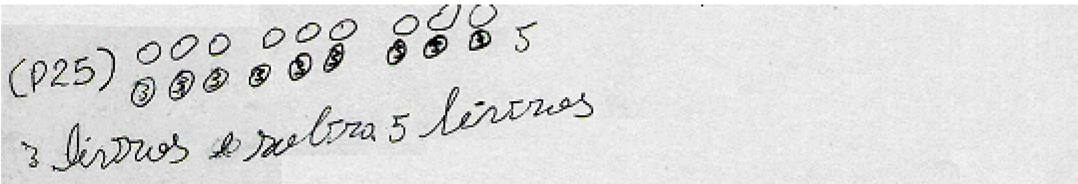


E- “Quantas bonecas são?”
C- “ Já dei vinte e sete.”
E- “E são quantas?”

C- “Vinte e nove.”
E- “Sobraram duas. Então, qual é a resposta? Quantas amigas...quantas bonecas cada amiga vai receber?
C- “Três bonecas e vai sobrar duas bonecas.”
E- (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo)

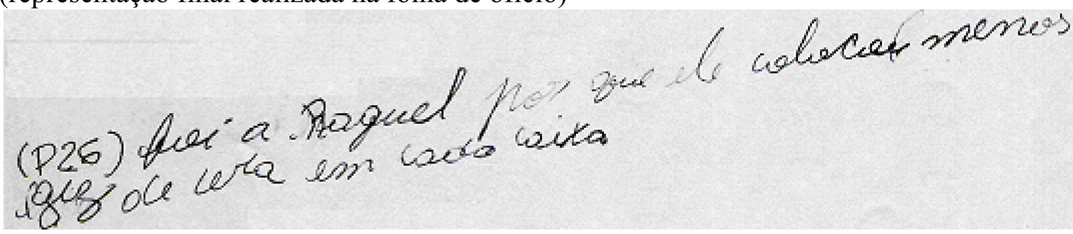


C- “Maria recebeu trinta e dois livros para serem distribuídos entre nove alunos. Quantos livros cada aluno irá receber?”
E- “Ela fez errado! O que ela errou?”
C- (silêncio - olha para a representação) “Ela dividiu em oito.
E- “E em quantos era para dividir?”
C- “Em nove.”
E- “Então, por que ela errou?”
C- “Era para dividir em nove alunos, só que ela...dividiu em oito alunos.”
E- “Muito bem! Ela não prestou atenção?”
C- “No problema.”
E- “No problema. E quando a gente está fazendo um problema, a gente tem que prestar atenção no enunciado, o que está pedindo o problema para a gente fazer. Então vamos fazer certo aqui. A quantos alunos ela tem que distribuir os livros?”
C- “Nove.” (começa a resolver o problema)
E- “Quantos livros tu já tens aqui? (chama atenção da criança para contar a quantidade)
C- “Trinta e dois.”
E- “Tem trinta e dois? Eu acho que não! Conta de novo.”
C- (conta - baixinho)
E- “Vamos ver: três, seis, nove, doze.... quinze, dezoito, dezenove, vinte, vinte e um...”
C- “Vinte e quatro...vinte e sete.”
E- “Quantos livros são?”
C- “Trinta e dois.”
E- “Trinta e dois. Quantos ainda tem?
C- “Cinco.”
E- “Cinco! Dá para fazer outra rodada de distribuição?”
C- “Não!”
E- “E aí?”
C- “Vai ficar para o resto.”
E- “Vai ficar para o resto. Por quê?
C- “Porque se eu vou colocar mais um livro em cada. Cinco alunos vão receber quatro...[inaudível] e o resto só vai receber quatro.”
E- “Três livros! Então eles não vão ganhar a mesma quantidade. Eles vão ganhar quantidades diferentes. E quando a gente divide a gente tem que dividir em quantidades...”
C- “Iguais.”
E- “Iguais. Então, qual é a resposta? Quantos livros cada amigo irá receber?” (pausa) “Três livros e sobra...”
E- “E sobram cinco livros. Muito bem!”
C- (ver na próxima página a representação final realizada na folha de ofício)



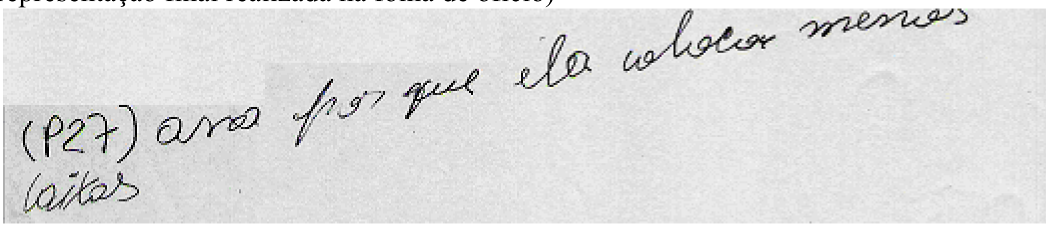
E- (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo)

C- (lê o problema) "Raquel e Marta foram a uma loja e cada uma comprou dezoito giz de cera. Raquel quer guardar três giz de cera em cada caixa e Marta quer guardar seis giz de cera em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas Raquel ou Marta?"
E- "Ela disse que foi a Marta, porque ela guardou mais giz de cera nas caixas. Ela errou! Não foi a Marta." (pausa) "Está errado. Quem vai precisar de mais caixas, a Raquel ou a Marta?"
C- "Raquel."
E- "Por que a Raquel vai precisar de mais...caixas?"
C- "Porque a quantidade dela é menos." [sic]
E- "Como assim? Explica melhor."
C- "Ela quer colocar três giz de cera em cada caixa. Ai vai ficar: três, mais três, mais três, mais três, mais três e mais três. Seis caixas."
E- "Vai aumentar a quantidade de caixas. Muito bem! Então, se eu tenho a mesma quantidade de objetos para dividir e colocar mais objetos nas caixas, eu vou ter..."
C- "Menos caixas."
E- " E se colocar poucos objetos nas caixas, eu vou ter mais..."
C- "Caixas."
E- "Então, quando aumenta o número de caixas diminui..."
C- "A quantidade de lápis."
E- "E quando diminui a quantidade de lápis..."
C- "Aumenta a quantidade de caixas."
E- "Muito bem!"
C- (começa a escrever a resposta)
E- Raquel! Por quê?"
C- (continua escrevendo a resposta)
E- "Colocou é com a letra 'u'."
C- (continua escrevendo a resposta)
E- "Ela colocou menos..." (pausa) "É lápis ou giz de cera?"
C- (continua escrevendo a resposta)
E- "Isso! Muito bem!"
C- (representação final realizada na folha de ofício)



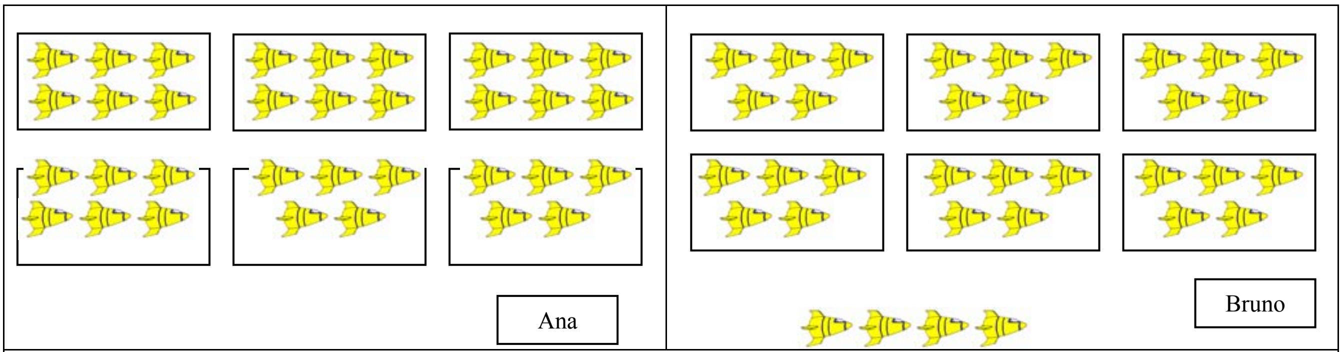
E- (entrega as cartelas do próximo enunciado. Ver foto abaixo.)

C- (lê o problema) “Ana e Bruno foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou trinta bolinhas. Ana quer colocar suas bolinhas em cinco caixas e Bruno quer colocá-las em seis caixas. Quem vai ter caixas com mais bolinhas, Bruno ou Ana?” (silêncio) “Ana!”
E- “Muito bem! Por que a Ana vai ter as caixas dela com mais bolinhas?”
C- “Porque ela tem menos quantidade (pausa) ela tem a mesma quantidade, mas quando diminui a quantidade de caixas aumenta a quantidade de bolinhas.”
E- “Muito bem! Isso mesmo! O olha, aqui, o que ela tinha escrito. Que iria ser o Bruno, porque ele usou mais caixas. Se ele usou mais caixas ele tem...”
C- “Menos...menas quantidade de bolas.” [sic]
E- “Dentro das caixas. Muito bem! Por que ele vai ter menos quantidade de bolas dentro das caixas?”
C- “Porque ele colocou mais caixas.”
E- “Muito bem! É isso mesmo! Se eu tenho a mesma quantidade de objetos para dividir e colocar mais objetos nas caixas, eu vou ter...”
C- “Menas...quantidade de caixas.” [sic]
E- “E se colocar poucos objetos nas caixas?”
C- “Eu vou ter mais caixas”
E- “Muito bem!”
C- (representação final realizada na folha de ofício)



Anexo J – Atividade 5: Identificando procedimentos incorretos de resolução mais adequados em problemas de divisão com resto

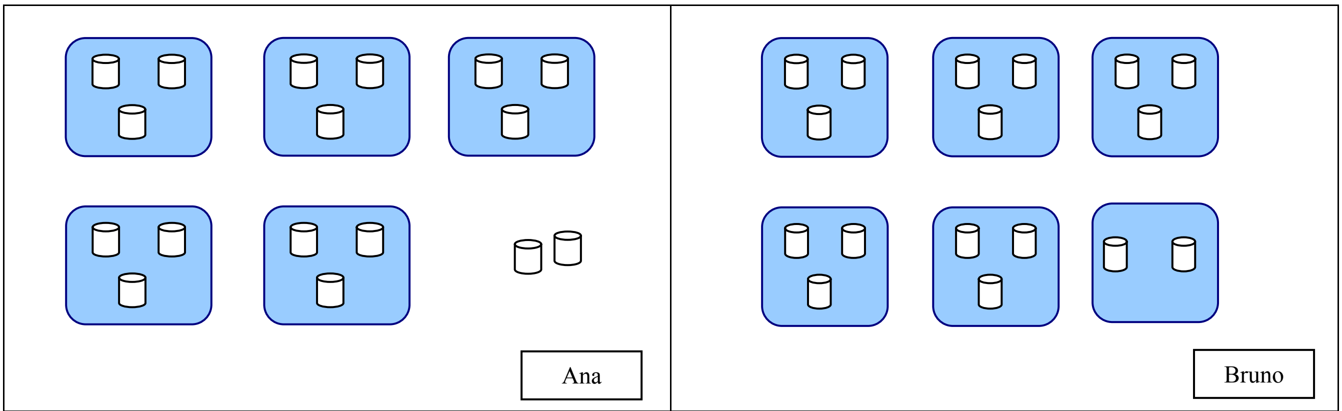
(P15) Carlos comprou 34 foguetes e quer colocá-los em 6 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantos foguetes ele irá colocar em cada caixa? [divisão por partição: 34 ÷ 6 = 5 (4)]



Erro: O procedimento de resolução apresentado na cartela de "Ana" viola o princípio da divisão igualdade entre as partes

Princípio geral : O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto

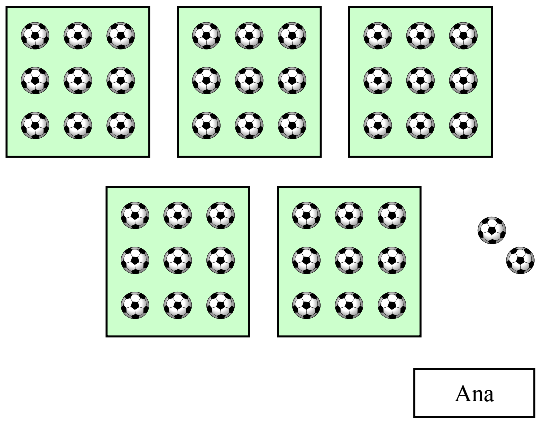
(P16) Tia Elvira preparou 17 copos de suco para o lanche. Ela quer servir 3 copos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar? [divisão por quotas 17 ÷ 3 = 5 (2)]

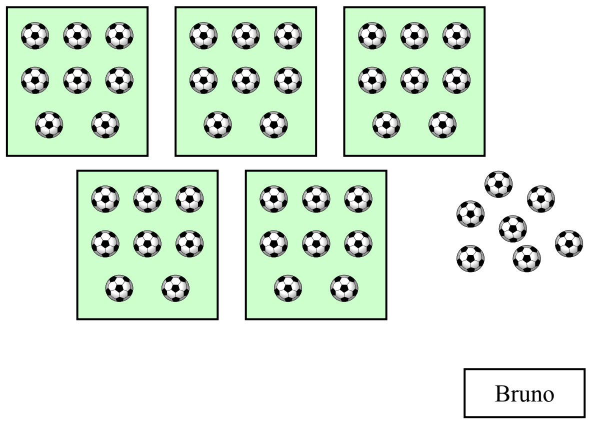


Erro: O procedimento de resolução apresentado na cartela de "Bruno" cria uma nova parte para inserir o resto.

Princípio geral: O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto.

(P17) Rita tem 47 bolas e quer colocá-las em 5 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantas bolas ela irá colocar em cada caixa? [divisão por partição 47 ÷ 5 = 9 (2)]

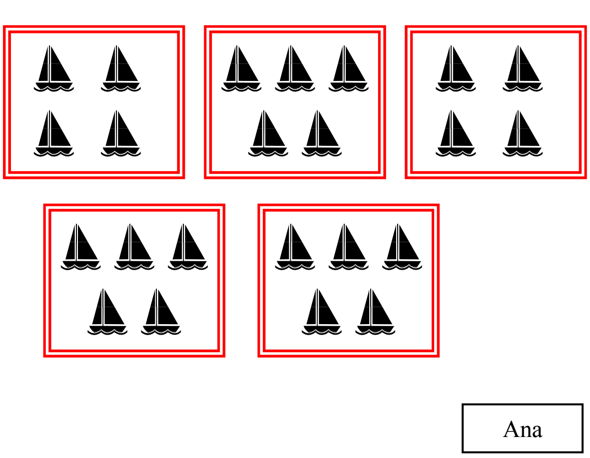


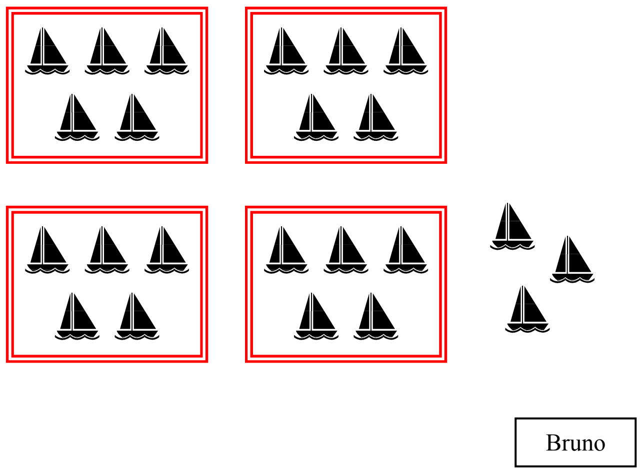


Erro: O procedimento de resolução na cartela de “Bruno” contraria o princípio de que o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.

Princípio geral: O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.

(P18) Uma fábrica produziu 23 barcos de brinquedo. O dono da fábrica quer colocar 5 barcos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar? [divisão por quotas 23 ÷ 5 = 4 (3)]

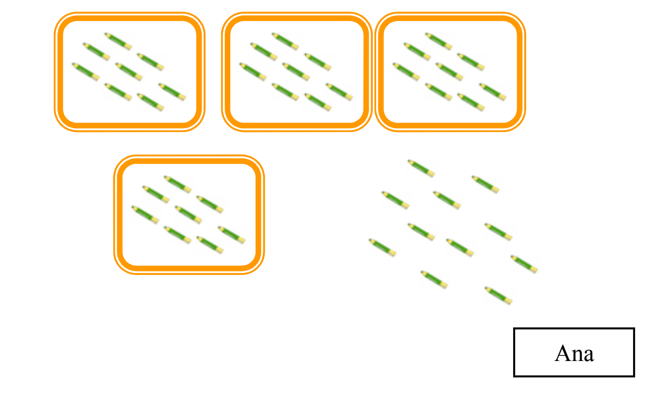


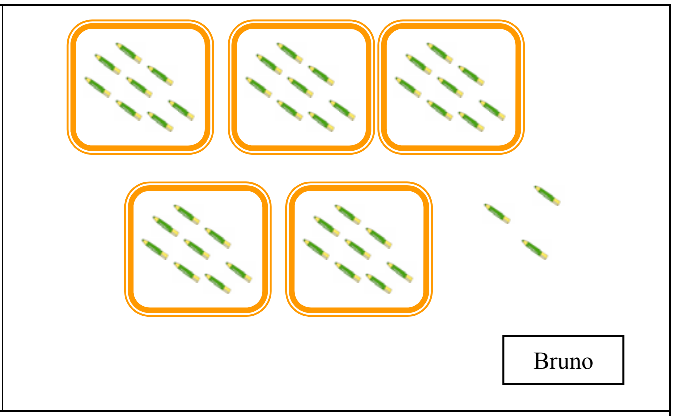


Erro: O procedimento de resolução apresentado na cartela de “Ana” viola o princípio da igualdade entre as partes e viola o enunciado do problema

Princípio geral: O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto

(P19) Paulo vai colocar seus 43 lápis de cor em estojos. Em cada estojo serão colocados 8 lápis de cor. Quantos estojos ele vai precisar? [divisão por quotas: 43 ÷ 8 = 5 (3)]

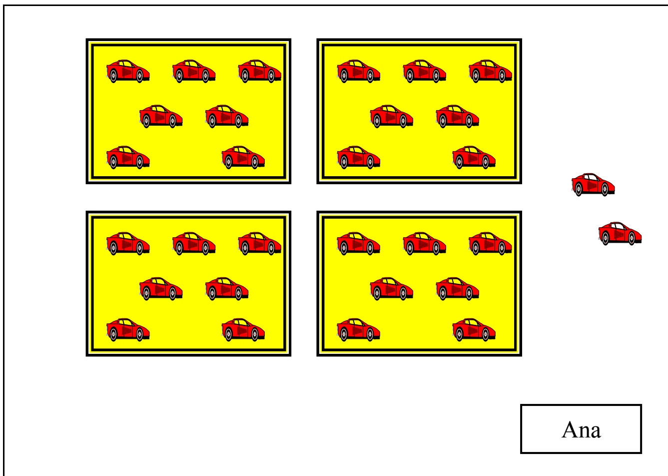


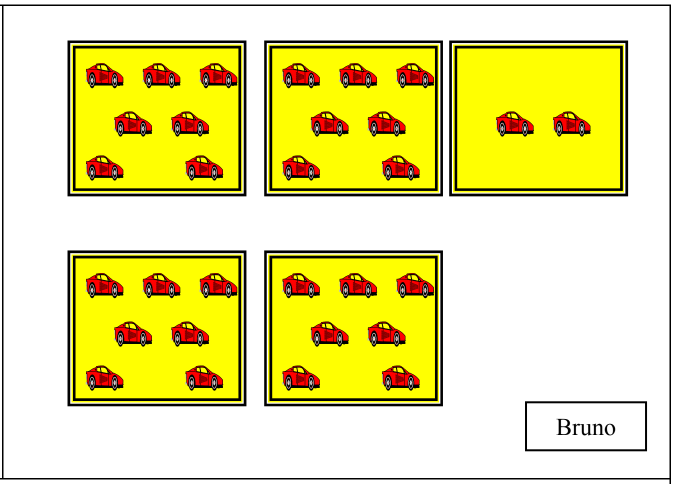


Erro: O procedimento de resolução na cartela “Ana” contraria o princípio de que o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o número de partes.

Princípio geral : O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem igual e nem maior que o tamanho da parte.

(P20) Eduardo comprou 30 carrinhos e quer guardá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele irá guardar em cada caixa? [divisão por partição: 30 ÷ 4 = 7 (2)]

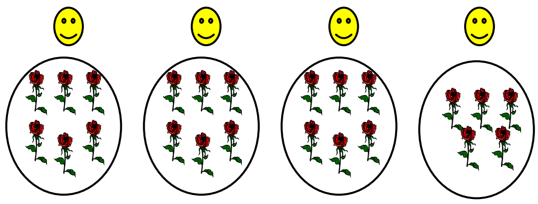
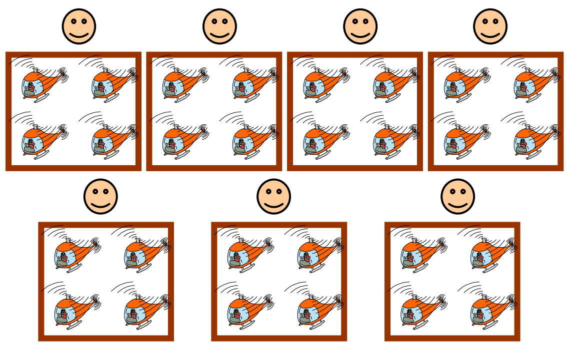
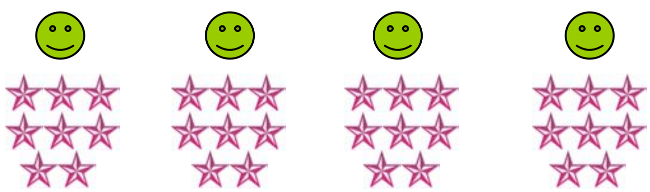




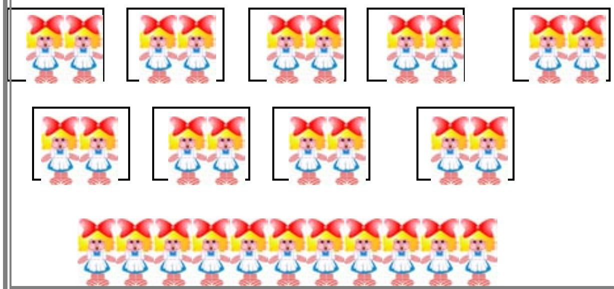
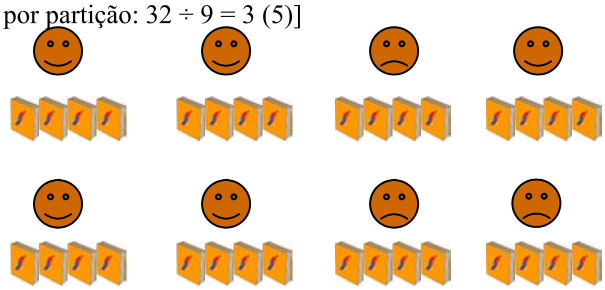
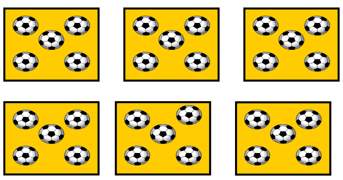
Erro: O procedimento de resolução apresentado na cartela “Bruno” cria uma nova parte para inserir o resto.

Princípio geral: O todo deve ser distribuído em quantidades iguais. O todo inicial é constituído do número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto.

Anexo L – Atividade 6: Refletindo sobre procedimentos incorretos de resolução em problemas de divisão com resto e sem resto

Enunciados	**Erros enfatizados**	**Princípio geral**
(P21) Carla foi à floricultura e comprou 23 rosas para dar às suas 4 professoras. Ela quer que cada professora receba a mesma quantidade de rosas. Quantas rosas cada professora vai receber? [divisão por partição: 23 ÷ 4 = 5 (3)] 	O procedimento de resolução viola o princípio da igualdade entre as partes.	O todo deve ser distribuído em quantidades iguais.
(P22) Marcos tem 28 helicópteros de brinquedo. Ele quer dar 5 helicópteros para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão receber helicópteros? [divisão por quota: 28 ÷ 5= 5 (3)] 	O procedimento de resolução ignora a quota preestabelecida no enunciado do problema	Ao resolver problemas de divisão devemos prestar atenção no enunciado
(P23) Mônica comprou 27 estrelinhas na loja de enfeites. Ela quer dar 8 estrelinhas para cada uma das suas amigas. Quantas amigas vão receber estrelinhas? [divisão por quota 27 ÷ 8 = 3 (3)] 	O procedimento de resolução cria uma nova parte para inserir o resto e acrescenta elementos para manter a igualdade entre as partes.	Ao resolver problemas de divisão devemos prestar atenção no enunciado

continua

(P24) Débora comprou 29 bonecas para dar às suas 9 amigas. Ela quer que cada uma das amigas receba a mesma quantidade de bonecas. Quantas bonecas cada amiga vai receber? [divisão por partição: 29 ÷ 9 = 3 (2)] 	O procedimento de resolução viola o princípio de que o resto nunca pode ser igual ou maior que o número de partes	O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição, ou seja, o resto nunca pode ser nem maior e nem igual ao número de partes.
(P25) Maria recebeu 32 livros para serem distribuídos entre 9 alunos. Quantos livros cada aluno irá receber? [divisão por partição: 32 ÷ 9 = 3 (5)] 	O procedimento de resolução ignora o número de partes que o todo deve ser distribuído.	Ao resolver problemas de divisão devemos prestar atenção no enunciado.
(P26) Raquel e Marta foram a uma loja e cada uma comprou 18 giz de cera. Raquel quer guardar 3 giz de cera em cada caixa e Marta quer guardar 6 giz de cera em cada caixa. Quem vai precisar de mais caixas, Raquel ou Marta? [divisão por quota: 18 ÷ 3 = 6 (0) 18 ÷ 6 = 3 (0)]  **Resposta:** Foi a Marta, porque ela guardou mais giz de cera nas caixas.	O procedimento de resolução focaliza atenção no maior divisor, violando o princípio invariante das relações inversas entre o tamanho das partes e número de partes quando o dividendo é mantido constante.	Se eu tenho a mesma quantidade de objetos para dividir e colocar mais objetos nas caixas, eu vou ter menos caixas. Se eu colocar poucos objetos eu vou ter mais caixas.
(P27) Ana e Bruno foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 30 bolinhas. Ana quer colocar suas bolinhas em 5 caixas e Bruno quer colocá-las em 6 caixas. Quem vai ter caixas com mais bolinhas, Bruno ou Ana? {divisão por partição: 30 ÷ 5 = 6 (0) 30 ÷ 6 = 5 (0)]  **Resposta:** Foi o Bruno, porque ele usou mais caixas.	O procedimento de resolução focaliza a atenção no maior divisor, violando o princípio invariante das relações inversas entre tamanho das partes e o número de partes quando o dividendo é mantido constante.	Se eu tenho a mesma quantidade de objetos para dividir e colocar mais objetos nas caixas, eu vou ter menos caixas. Se eu colocar poucos objetos eu vou ter mais caixas.

Quadro 25: Visão geral dos problemas, dos tipos de erros evidenciados e o princípio geral explicitado na Atividade 6.