

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-graduação em Psicologia

**EXPLORAÇÃO DO POTENCIAL DIDÁTICO DE UM
CONJUNTO DE ATIVIDADES AUXILIARES PARA O
ENSINO DA PROPORCIONALIDADE**

Lauro Lopes Pereira Neto

Dissertação de Mestrado

Área de concentração: Psicologia cognitiva
Recife, 1998

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão (Presidente)

Profa. Dra. Alina Galvão Spinillo

Profa. Dra. Verônica Gitirana

COORDENADOR DA PÓS-GRADUAÇÃO:

Prof. Dr. Luciano de Lemos Meira

Pereira Neto, Lauro Lopes

Exploração do potencial didático de um conjunto de atividades auxiliares para o ensino da proporcionalidade / Lauro Lopes Pereira Neto. – Recife : O Autor, 1998.

147 folhas : il., tab., fig., gráf., quadros.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Psicologia, 1998.

Inclui bibliografia e anexos.

1. Psicologia cognitiva – Aprendizagem da matemática. 2. Educação matemática – Matemática formal x matemática informal – Proporcionalidade. 3. Psicologia e cognição – Contextos sócio-culturais da aprendizagem. 4. Resolução de problemas de proporcionalidade – Estratégias e procedimentos. I. Título.

**159.953.5
153.43**

**CDU (2.ed.)
CDD (22.ed.)**

**UFPE
BC2006 – 434**

Ata da 9ª Defesa de Dissertação do Curso de Pós-Graduação em Psicologia da UFPE

Aos vinte e três dias do mês de março de mil e novecentos e noventa e oito, sala set do citadão andar do Centro de Filosofia e Ciências Humanas, teve lugar um sessão pública a que compareceram docentes e alunos do curso e demais pessoas interessadas, a 94ª Defesa de Dissertação do Curso de Pós-Graduação em Psicologia da UFPE, sendo examinando o métriando Lauro Lopes Ferreira Neto e examinadores os profs. drs. Jorge Jacácio da Rocha Galvão (presidente), Verônica Giti-rana Ferreira (examinador externo, do Centro de Educação da UFPE) e Luciano Rogério de Lemos Mpi-ra (examinador interno). A dissertação em julga-mento tem o título de "Exploração do Potencial Didático de um Conjunto de Atividades Auxiliares para o Ensino da Proporcionalidade" e recebeu orienta-ção do prof. Jorge J. da Rocha Galvão. Os trabalhos foram iniciados às 9:05h pelo presidente da Comissão julgadora que, em cumprimento a determinações regimentais, concedeu a palavra ao métriando, o qual apresentou um resumo da Dissertação em exame, repetindo o tempo pre-visto no Regimento Interno do Curso. Encerrada a apresentação o presidente passou a palavra à profa. Verônica Giti-rana, a qual propôs ao examinando questões relativas à dissertação que considerou pertinentes. Com a palavra, o métriando Lauro L. Ferreira Neto respondeu ao questiona-mento proposto, sem ultrapassar o tempo que o regimento Interno lhe concede. Semelhante pro-cedimento foi obedecido em face de questões apre-

CONFERE COM O ORIGINAL

Em 10/8/2006

VERA AMÉLIA F. PACHECO

Secretária

Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva

UFPE

sentadas pelos demais examinadores. Findo o exame,
o presidente suspendeu a sessão, permanecendo a
Comissão Examinadora em reunião privada com
objeto de proceder a avaliação da dissertação e
de sua defesa. Após intervalo de 35 minutos, a
sessão pública foi reaberta pelo presidente o qual
comunicou aos presentes o julgamento de cada ex-
aminador: prof. Veronica Giffrana - aprovada
mencas simplesmente. prof. Luciano Rogério de Almeida
Meira - aprovado, menção simplesmente e prof. Jorge
Crisó da Rocha Galvão - aprovado menção simplesmente.
Nada mais havendo a tratar, às 12:00 h o
presidente encerrou a sessão e eu VERA AMÉLIA
PACHECO, secretária desta Pós-Graduação, lavrei a
presente ata que vai por mim assinada, pelos
membros da Comissão Examinadora pelo exam-
inando e pelos demais presentes. Luciano Meira
V. Ferreira Jorge Galvão Galvão Maria das Dores S.L. Pereira
Flavio de Paula Galvão Galvão Suzana Pacheco Valéria Gonçalves
Vera Amélia F. Pacheco

**Ao meu filho Lauro Victor que nasceu no
mesmo dia em que recebi a confirmação
da seleção do mestrado, que esta lhe
inspire na busca do saber**

AGRADECIMENTOS

Esta foi, com certeza, a parte mais difícil de ser escrita. Como fazer referência a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esta tarefa fosse concluída? São muitas as pessoas e poucas as páginas, gostaria de antemão agradecer a todas as pessoas, que deram uma parcela de contribuição, mas que aqui não foram citadas.

Para efeito de organização, mas sem nenhum efeito de hierarquia dividirei meus agradecimentos em duas partes. Num primeiro momento falarei daqueles que compartilharam comigo as experiências acadêmicas e profissionais, e no segundo momento as pessoas de meu convívio afetivo e familiar. Tendo a plena consciência de que algumas delas poderiam ser citadas em ambos os momentos.

1ª parte

A Jorge Falcão, agradeço a oportunidade de aprender com você, coisas como: seriedade profissional, competência, planejamento, sensibilidade, compreensão. Lembro-me das nossas conversas que começavam com um “puxão de orelha” e terminavam com a frase: “tenho profunda confiança no seu **Fôlego Cognitivo**”. Nós sabemos o que isto significa, e principalmente, o que significou para mim naqueles momentos. Obrigado por tudo!

Analúcia Schliemann, primeiríssima orientadora, me refiro aqui não só ao início deste estudo, mas como orientadora das pesquisas onde eu fui bolsista de iniciação científica. À você Ana, “titia”, meu profundo agradecimento pela confiança depositada, pela paciência, incompreendida por muitos, pela oportunidade de me fazer crescer acadêmica e pessoalmente. Ana este trabalho tem a idade de seu afilhado. Lembra?

Aos professores do Mestrado em Psicologia, hoje curso de Pós-graduação em Psicologia – David, Graça, Alina, Lúcia, Luciano – que contribuíram para o meu crescimento e minha aprendizagem.

Não poderia esquecer de vocês! **Vera**, que me aturou enquanto bolsista de Iniciação e aperfeiçoamento, e pelos quatro anos como aluno do Mestrado, “obrigadú”. **Irani**, coração de ouro; **Elaine**, gente finíssima; **Ivo**, “meu caro Ivo”, meus sinceros agradecimentos. Eu consegui!

Daqueles que, como eu, batalharam dia-a-dia, (noite-a-noite) nos estudos, trago ótimas recordações e boas amizades. Da minha turma, **Suzana, Sandra, Kátia e Cristiane**, “gente conseguimos!” Aos meus colegas, que não fazem parte da minha turma, mas que tive a oportunidade de estudar junto, **Alex, Cláudia, Maria, Ana Paula, Mônica Lessa, Mônica “Paraíba”, Lúcia, Ana**, valeu por tudo!

Ao departamento de Psicologia e Orientação Educacional, agradeço especialmente aos professores: **Péricles**, pela confiança depositada em mim, ao promover minha primeira experiência em sala de aula; **Ana Célia**, que enquanto Chefe do Departamento soube compreender minhas ausências e sempre tinha uma palavra de confiança e incentivo a passar. Meu muito obrigado.

A todos que fazem o **Colégio Equipe**, agradeço não só pela oportunidade profissional, mas com certeza, pelas lições de vida, de humildade, de companheirismo, bem como, a sempre presente manifestação de competência e compromisso com a educação. Agradeço especialmente a **Florance**, que discretamente, teve um papel fundamental no desenrolar das minhas atividades e no encaminhamento da finalização deste trabalho. A **Jordão** (Jordan) um exemplo de competência, humildade e disposição para aprender, tudo isso lhe capacita a ser um excelente educador. Continue assim! Como bem diz **João**: “obrigado por tudo e por todas”.

Ao **CNPq**, pelo apoio financeiro em forma de bolsa, desde 1989, como bolsista de Iniciação Científica.

2ª Parte:

A minha família que teve um papel fundamental para o meu percurso, enquanto estudante e continua tendo, uma importância fundamental na minha vida.: Os meus pais, **Lauro Filho**, tuas orientações até hoje me fazem falta, profundas recordações e saudades, obrigado meu Pai. **Inez**, mainha, sempre depositando confiança e esperança a todos os momentos e decisões da minha vida. A meus irmãos, **Lauro Bruno**, **Lauro Breno** e **Thárcia** partilho com vocês essa vitória.

E finalmente, aquele agradecimento especial, às duas pessoas maravilhosas da minha vida, meu filhote, **Lauro Victor**, e minha esposa **Dôra**. Quando pensei em escrever esta parte da minha dissertação, pensei em citar muitas pessoas, mas sempre tinha em mente algumas perguntas: Quem esteve do meu lado todos os momentos? A quem eu dividi minhas angústias e meus desesperos? A quem eu fui ausente? Quem abdicou de suas próprias necessidades para que as minhas fossem supridas? Quem sempre me ajudou sem pedir nada em troca?

Vocês dois são os maiores interessados no meu sucesso e no meu crescimento. Muito obrigado pelo simples fato de existirem.

Lauro

RESUMO

Este estudo se propôs a analisar um conjunto de atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade, em sala de aula, como proposta para o ensino da proporcionalidade na escola, buscando proporcionar às crianças caminhos para que possam evoluir de um pensamento ou estratégia mais intuitiva, de alcance limitado, como é a estratégia escalar, para estratégias funcionais e para outras estratégias formalizadas, de aplicação mais eficiente e mais geral. Buscou-se investigar o efeito das atividades propostas na representação e resolução de problemas de proporcionalidade pelos participantes deste estudo. Participaram deste estudo 74 alunos, de ambos os sexos, da 5ª série do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade do Recife, divididos em dois grupos de 37 alunos, grupos controle e experimental, com idades variando entre 11 e 12 anos. Os dados foram coletados em três etapas, distribuídas da seguinte forma: inicialmente todos os sujeitos, (ambos os grupos) foram submetidos a um pré-teste (aplicação coletiva); os sujeitos do grupo experimental participaram dos encontros de intervenção com o experimentador, ocasião em que foram trabalhadas as atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade, enquanto que os sujeitos do grupo controle, que não participaram dos encontros de intervenção, participavam das atividades normais da escola, mas por serem alunos da 5ª série não receberam instrução formal sobre proporcionalidade; e finalmente todos os sujeitos, dos dois grupos, participaram de um pós-teste, semelhante ao pré-teste aplicado na primeira etapa. Os resultados obtidos indicam que: (1) os alunos do grupo experimental apresentaram desempenho diferenciado na resolução de problemas de proporção que lhes foram propostos, em relação ao grupo controle; (2) Tal desempenho caracterizou-se pela capacidade de propor estratégia formalizada para a resolução dos referidos problemas, estratégia no âmbito da qual pôde-se verificar compreensão diferenciada das relações envolvidas nestes problemas. Portanto, este estudo tem um caráter didático e sugere um conjunto de atividades que podem ser explorados como procedimento para o ensino da proporcionalidade nas escolas.

ABSTRACT

This study aimed to analyze a set of didactic activities concerning proportionality in the context of school classes of mathematics, trying to make easier to the participating pupils the passage from intuitive, limited strategies (like scalar strategies), to more performant and formal strategies. More specifically, we tried to investigate the effect of this set of activities in previous representation and problem solving initiatives showed by participating subjects. Seventy-four students formed the sample that took part of the study with ages varying from 11 to 12 years, all of them from a class of 5th level from Brazilian school system. This sample was composed by two groups, experimental (n=37) and control (n=37) groups, formed taking into account previous school performance in mathematics. Subjects from both groups were previously submitted to pre-tests; those from experimental group were submitted to one semester and a half of class activities, in special periods out of normal school schedule. Finally, both groups were submitted to a post-test, which showed that: 1. Pupils from experimental group showed a different profile in solving-problem activities concerning proportionality; 2. These students were able to make use of formal strategies in a semantic, sensefull way. These data showed that the set of activities proposed could be considered valuable in teaching proportionality in a conceptually rich way.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	04
RESUMO/ABSTRACT.....	05
ÍNDICE	06
CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO.....	08
 CAPÍTULO II: MÉTODO.....	 45
 CAPÍTULO III: ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	 59
 CAPÍTULO IV: CONCLUSÃO.....	 89
 BIBLIOGRAFIA.....	 98
 ANEXOS.....	 103
ANEXO 1.....	104
ANEXO 2.....	106
2.1. Tabelas ressaltando a tabuada.....	106
2.1.1 Tabuada de 3.....	107
2.1.2 Tabuada de 5.....	108
2.1.3 Tabuada de 7.....	109
2.1.4 Tabuada complexa com razão 4.....	110
2.1.5 Tabuada complexa com razão 7.....	111
 2.2. Problemas escalares do menor para o maior.....	 112
2.3. Problemas escalares do maior para o menor.....	114

2.4. Problemas escalares do maior para o menor com múltiplos não comuns.....	115
2.5. Problemas de compra mais vantajosa e comparação de grandezas físicas.....	116
2.6. Problemas de cálculo do valor unitário.....	117
2.7. Problemas funcionais complexos.....	117
ANEXO 3: ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL: CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS.....	118
ANEXO 4: ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL: TESTES DESCRITIVOS.....	121
ANEXO 5: ANÁLISE UNIDIMENSIONAL: TESTES INFERENCIAIS ESTATÍSTICOS.....	124
ANEXO 6: ÁRVORE DE DADOS – CHA.....	143

EXPLORAÇÃO DO POTENCIAL DIDÁTICO DE UM CONJUNTO DE ATIVIDADES AUXILIARES PARA O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da compreensão da proporcionalidade vem sendo uma área de pesquisa estudada e por diferentes abordagens. Dentre estas podemos destacar três:

* A Teoria Piagetiana acerca do Desenvolvimento Cognitivo, que procura, através do estudo do desenvolvimento do raciocínio proporcional, descrever o desenvolvimento cognitivo humano, que segundo Piaget , envolve uma sequência de transformações de estruturas cognitivas, as quais determinam os diversos estágios de desenvolvimento (Inhelder & Piaget, 1976; Piaget 1972) . Segundo esta abordagem, o pensamento operacional formal caracteriza-se pela constituição de um sistema combinatório, onde as operações envolvidas são de segundo grau, ou seja, operações sobre operações. Desta forma, a compreensão da proporcionalidade, que envolve uma relação de segundo grau, só poderia acontecer, após a aquisição pelo sujeito, das estruturas lógico-matemáticas que caracterizam o estágio das operações formais;

* Destacamos também algumas contribuições da Psicologia da Educação Matemática, que desenvolve pesquisas nas escolas buscando analisar as diferentes formas de ensino (formalmente institucionalizadas) da proporcionalidade (Carraher, Carraher, Schliemann & Ruiz, 1986; Carraher, Schliemann & Carraher, 1986; Carraher, Carraher & Schliemann, 1986; Carraher, Carraher & Schliemann, 1992; Leão, 1986; Spinillo & Bryant, 1991). Na escola brasileira, a proporcionalidade é ensinada nas 6^{as} e 7^{as} séries, onde as

crianças têm idades correspondentes ao estágio operacional formal, conforme proposto por Piaget, e obedecem à formalização do ensino do algoritmo da regra-de-três, ou seja, a compreensão da proporcionalidade, segundo a escola resumir-se-ia à aplicação do algoritmo da regra-de-três;

* Finalmente, uma Segunda vertente de estudos desenvolvidos pela Psicologia da Educação Matemática, que objetivam, especificamente, explorar e analisar as formas de raciocínio e resolução de problemas matemáticos desenvolvidos por sujeitos que utilizam a matemática, não formalizada institucionalmente, no dia-a-dia. Sujeitos estes que, segundo a perspectiva piagetiana, não poderiam compreender plenamente a proporcionalidade, pois sendo muito jovens não teriam adquirido as estruturas lógico-matemáticas para a sua compreensão; por outro lado, de acordo com a visão escolar tradicional, não poderiam resolver problemas nessa área, pois em sua maioria, são sujeitos precariamente escolarizados, sem conhecimento funcional do algoritmo escolar, (regra-de-três) necessário para a sua resolução. Pesquisas desenvolvidas nessa área (Carraher, Carraher & Schliemann, 1990; Carraher, 1986; Schliemann & Magalhães, 1986; Schliemann & Carraher, 1991; Schliemann, Pereira Neto e Moura, 1992) mostram, porém, que estes mesmos sujeitos conseguem compreender e utilizar a proporcionalidade na vida diária, pois exercendo atividades como a de pedreiro, pescador, cozinheira, vendedor de rua etc., estão constantemente utilizando cálculos matemáticos (não formalizados) que envolvem a compreensão de aspectos centrais da proporcionalidade.

1.1 A Proporcionalidade segundo a Teoria Piagetiana.

Alguns estudos da Psicologia do Desenvolvimento buscam investigar o desenvolvimento da proporcionalidade, a partir da concepção de que o homem se desenvolve cognitivamente pela aquisição progressiva e continuada de estruturas lógico-matemáticas, onde as transformações e a passagem de uma estrutura mais simples para uma estrutura mais complexa determinam e caracterizam estes diferentes estágios do desenvolvimento cognitivo.

Esta concepção é abordada mais detalhadamente por Piaget, mas existem outros estudiosos que também têm mostrado interesse pelo desenvolvimento da compreensão da proporcionalidade (Bruner, Oliver & Greenfield, 1966; Karplus & Peterson, 1970; Karplus, Karplus & Wollman, 1974; Karplus, 1981; Lovell, 1971). Por isso, torna-se conveniente uma discussão mais detalhada sobre os estágios de desenvolvimento da criança, a partir da perspectiva piagetiana, bem como uma revisão dos estudos desenvolvidos recentemente.

Piaget, em seus estudos (Inhelder & Piaget, 1976; Piaget 1972), procurou tratar a matemática como um forma de atividade humana, que envolve, por parte do sujeito, a construção de um conhecimento lógico-matemático implícito, que pode ser explicitado quando solicitados a resolver problemas que façam apelo a tal conhecimento. Piaget afirma que é o próprio sujeito que organiza sua atividade, e consegue chegar a mudanças por meio da evolução dessa organização, que configura o desenvolvimento cognitivo (Inhelder e Piaget, op. cit.). Segundo Piaget este desenvolvimento envolve uma sequência de transformações de estruturas cognitivas, sendo essas transformações a base dos diversos estágios do desenvolvimento. A passagem das operações concretas para as operações formais é uma das mudanças bastante discutidas, onde Piaget enfatiza a diferença entre o pensamento da criança e o pensamento do adolescente e do adulto como, respectivamente, pensamento operacional concreto e pensamento operacional formal. Em seus primeiros estudos, Piaget (op. cit.), sugeriu que as operações concretas seriam aquelas aplicadas a conteúdos concretos, enquanto as operações formais seriam aplicadas a conteúdos simbólicos e, de modo especial, à lógica verbal.

Inhelder e Piaget (op. cit.) estudando, especificamente, as operações formais apresentaram uma nova caracterização do pensamento formal, enfatizando não apenas a natureza verbal do mesmo, mas a partir de dois aspectos chave: a constituição de um sistema combinatório na verificação de hipóteses, onde todas as possibilidades são consideradas sistematicamente; e pelo fato de que as operações envolvidas são de segundo grau, ou seja, operações sobre operações, e não mais operações sobre a realidade.

Podemos destacar desta nova caracterização do pensamento formal os seguintes aspectos:

* observa-se no pensamento formal uma inversão da relação entre possibilidade e realidade _“a possibilidade deixa de ser um exemplo da realidade, como ocorre no pensamento operacional concreto, passando a realidade a constituir-se como um exemplo das possibilidades” (Inhelder e Piaget, op. cit., pp. 189);

* o pensamento é essencialmente hipotético-dedutivo _ “as conclusões são deduzidas de premissas relativas ao que é possível, sendo apenas posteriormente verificadas empiricamente”(pp. 189);

* “sua propriedade mais aparente é referir-se a elementos verbais, e não mais diretamente aos objetos”(pp.190) _ impõe-se uma nova lógica, a lógica proposicional, sobre a lógica de classes;

* “quando os objetos são substituídos por enunciados verbais superpomos uma nova lógica_ a das proposições_ à das classes e relações que se referem a esses objetos”.(pp. 191) A superposição da lógica proposicional sobre a lógica de classes exemplifica a natureza das operações formais como de segunda ordem, ou seja, operações sobre operações;

* a lógica proposicional é possível porque as proposições são analisadas dentro de uma consideração de todas as combinações possíveis, quer em relação a uma verificação empírica, quer em relação a problemas puramente verbais _ “é o número de operações possíveis que, inicialmente, distingue funcionalmente o pensamento formal do pensamento concreto, independentemente das questões de estruturas operatórias”.¹

Para Piaget, a compreensão plena da proporcionalidade pela criança é uma conquista tardia e constitui uma das características do estágio das operações formais (Inhelder e Piaget, op. cit.). Bruner, Oliver & Greenfield (1966) apresentaram um experimento simples que exemplifica bem a dificuldade, por parte das crianças, na aquisição da proporcionalidade. O experimento consiste em mostrar para a criança dois recipientes, um com capacidade para seis litros e outro para três litros, colocando-se no primeiro um litro de água e no outro meio litro; em seguida, o experimentador pergunta a criança se haverá um copo mais cheio do que o

¹ Para uma discussão mais detalhada das características do pensamento formal, ver Inhelder e Piaget 1976,

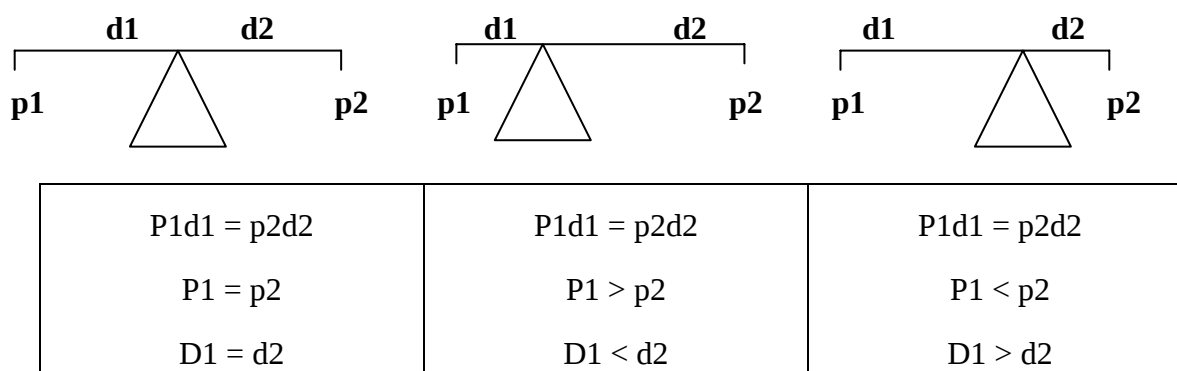
outro ou se os dois estão igualmente cheios. As crianças com idades de, aproximadamente, 4 anos tendem a dizer que o primeiro copo está mais cheio porque tem mais água. Com o avanço da idade, constata-se certa incoerência nas respostas das crianças, pois elas respondem que o primeiro copo está mais cheio porque tem mais água e, ao mesmo tempo, que é o mais vazio porque tem mais espaço para preencher. Esta incoerência entre o raciocínio das crianças só irá desaparecer quando esta conseguir observar a relatividade das quantidades, comparando não diretamente os espaços preenchidos e os não preenchidos, mas sim comparando as razões volume preenchido/volume total ou volume não preenchido/volume total.

O estabelecimento de uma relação entre relações constitui portanto a essência da compreensão de proporções e a esse modelo lógico-matemático corresponde, segundo Piaget, a compreensão plena da proporcionalidade, que é uma característica do período operacional formal.

Inhelder & Piaget (1976) desenvolveram estudos para enfocar o desenvolvimento do raciocínio proporcional e os mais conhecidos referem-se a dois fenômenos físicos: o equilíbrio da balança e a projeção das sombras. Um outro estudo, também importante na análise dos estágios refere-se à quantificação de probabilidades (Piaget & Inhelder, 1951).

A tarefa de equilíbrio da balança deriva de um modelo de equilíbrio físico, onde a relação entre as variáveis peso e distância entre o ponto de aplicação do peso e o ponto de apoio, é inversa: quanto maior a distância menor deve ser o peso. Nesta tarefa coloca-se um peso de um lado da balança e o sujeito terá que, utilizando outros pesos, reequilibrar a balança. Quando o peso (p_2) a ser colocado do outro lado é diferente do primeiro peso (p_1), a distância (d) terá que ser considerada de forma a manter a relação $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$, conforme ilustração abaixo:

Figura 1
Ilustração da tarefa de equilíbrio da Balança



Já a tarefa de projeção de sombras refere-se à proporção de caráter essencialmente geométrico. Enquanto na tarefa de equilíbrio da balança lida-se com um modelo de proporções de equilíbrio físico, na tarefa de projeção das sombras as proporções são de caráter ótico geométrico e traduzem as relações entre as distâncias e os diâmetros de círculos num fenómeno físico explicado pela óptica geométrica. A tarefa consiste em : alguns círculos de diâmetros diferentes são interpostos entre uma fonte luminosa e um plano de projeção; o tamanho de suas sombras é diretamente proporcional ao diâmetro desses círculos, e inversamente proporcional à distância existente entre a fonte luminosa e os círculos. Ao sujeito é pedido que utilizando dois círculos de diâmetros diferentes, encontre duas sombras que se cubram exatamente.

Os dados obtidos por Inhelder e Piaget (op. cit.) sobre o desenvolvimento da proporcionalidade, entrevistando crianças e adolescentes nessas tarefas, mostram a existência de quatro estágios principais no desenvolvimento do esquema de proporcionalidade. Tais estágios são igualmente detectados em outra tarefa, a de "Quantificação de Probabilidades". A tarefa consiste em apresentar para a criança uma sequência de itens onde, em cada um

destes, o sujeito tenha diante de si dois montes de cartas de baralho, todas iguais de um lado e podendo ter ou não uma cruz do outro lado. O experimentador mostra à criança a composição dos montes de cartas, quanto ao número de cartas em branco e cartas com uma cruz. O sujeito deverá indicar, dentre os montes de cartas, qual deles terá a maior probabilidade de apresentar uma carta com cruz ou se ambos possuíam a mesma probabilidade para tal evento.

Os resultados encontrados por Piaget fornecem subsídios interpretados por ele no sentido de confirmarem a existência de quatro estágios. No primeiro estágio a criança consegue estabelecer intuitivamente algumas das relações entre as variáveis envolvidas, sem mostrar qualquer tentativa de quantificação. A criança consegue compreender que, quanto maior o número de cruzes, maior é a probabilidade de retirarmos uma carta com cruz, mas não consegue identificar a importância do número de cartas em branco para a determinação da probabilidade de se retirar uma carta com cruz. No segundo estágio aparecem algumas tentativas de quantificação, ou seja, as crianças conseguem sistematizar e chegar a respostas corretas, porém só consideram uma variável. Por exemplo, num monte há duas cartas com cruz e três em branco e no outro há duas cartas com cruz e quatro em branco. Neste caso basta considerar o número de cartas em branco para acertar; porém quando o problema envolve a quantificação de duas variáveis as crianças não conseguem resolvê-lo. No terceiro estágio a criança já busca a quantificação das duas variáveis, no entanto, ainda não se observa uma quantificação proporcional pois, as comparações são feitas aditivamente e não multiplicativamente. Por exemplo, se em um monte há duas cartas com cruz e uma carta em branco e no outro três com cruz e duas em branco, o sujeito, considerando as duas variáveis e comparando-as aditivamente, responde que as probabilidades são iguais porque em ambos os montes há uma carta com cruz a mais do que as cartas em branco. O não domínio da proporcionalidade manifesta-se em sua dificuldade de tratar como diferentes uma carta em cinco e uma carta em três. Finalmente, no quarto estágio, a criança é capaz de estabelecer relações quantitativas entre as relações a partir de uma quantificação proporcional. Por exemplo, quando a criança compara dois montes, um com uma carta com cruz e duas em branco e outro com duas cartas com cruz e quatro em branco, ela começa a considerar que um

em três é equivalente a dois em seis logo, é capaz de compreender se há ou não igualdade de probabilidade de se retirar uma carta com cruz nos dois montes.

Karplus & Peterson (1970) consideram muito complicadas as tarefas utilizadas por Piaget, como, por exemplo, a de equilíbrio da balança e a de projeção de sombras, pois exigem dos sujeitos habilidades e conhecimentos prévios. Ele criou então a tarefa de cliques de papel-forma A. Nesta tarefa, seus resultados mostraram um percentual muito pequeno de sujeitos que apresentavam raciocínio proporcional. Em lugar disto, os sujeitos usavam o raciocínio aditivo e davam respostas de categoria intuitiva, ou seja, baseadas na sua percepção, ou melhor, nas estimativas visuais. Com o objetivo de aprofundar suas análises Karplus criou a tarefa de cliques de papel-forma B (Karplus, Karplus & Wollman, 1974). A diferença entre a versão original (forma A) e essa nova versão (forma B) está na maneira como é apresentado o problema, ou seja, na forma como é passada a instrução. Na forma A a figura do Sr. Grande e do Sr. Pequeno eram medidas por cliques de papel grandes na frente da criança, em seguida a figura do Sr. Grande era escondida e pedia-se à criança que descobrisse a altura do Sr. Grande utilizando, agora, cliques de papel pequenos. Na forma B, o sujeito recebia uma folha de papel com o desenho do Sr. Pequeno e a informação da altura dos dois bonecos, Sr. Grande e Sr. Pequeno, medidas anteriormente por botões. A tarefa dos sujeitos nesta nova versão continuava a mesma da versão original: descobrir a altura do Sr. Grande utilizando cliques de papel.

As respostas dos sujeitos foram classificadas em:

1. Intuitiva - respostas dadas ao acaso;
2. Aditiva - as respostas consideram apenas a diferença do tamanho, não há uma tentativa de estabelecer relações proporcionais;
3. Transicional - as respostas fazem referência a uma comparação concreta ou interação entre as partes, existe a tentativa de estabelecer relações proporcionais, mas incorretamente;
4. Proporcional- utilizam o raciocínio proporcional correto.

A classificação proposta por Karplus inicialmente parece corresponder à sequência de estágios descrita por Inhelder & Piaget (1976) e por Lovell (1971) sobre o desenvolvimento da criança quanto à proporcionalidade. Porém em estudos posteriores, Karplus (1981) afirma não concordar com a caracterização do desenvolvimento cognitivo através de estágios, e propõe uma análise de formas de raciocínio dos sujeitos. Ele identifica como formas de raciocínio a conservação, a seriação, o raciocínio aditivo, o raciocínio proporcional, entre outros. São essas formas, para Karplus, que exibem um desenvolvimento ou progressão temporal. Segundo Karplus (op. cit.) é possível fazer uma distinção entre nível concreto e nível formal através das aplicações das formas de raciocínio. A aplicação a nível concreto envolve objetos reais, propriedades diretamente observáveis e simples correspondências. Já o nível formal pode envolver hipóteses, abstrações, conceitos lógico-matemáticos. E ainda existiria uma área intermediária que não pode ser classificada nem como pensamento formal, nem como pensamento concreto.

A diferença entre Karplus e Piaget é que este propõe uma classificação de estágios a nível de desenvolvimento, enquanto aquele propõe uma classificação da aplicação das formas de raciocínio utilizadas pelos sujeitos. Isto é, o mesmo sujeito poderá apresentar desempenho em determinada tarefa a nível de pensamento formal e em outra tarefa a nível de pensamento concreto. Para Karplus esta discordância é normal, já que as diferentes tarefas podem exigir a aplicação de diferentes formas de raciocínio.

1.2. A Proporcionalidade Desenvolvida na Escola.

1.2.1. O algoritmo escolar

Na escola brasileira, a partir da 5ª série do primeiro grau, as crianças aprendem a utilizar o conceito de razão, visto como uma relação entre quantidades. Embora razão e fração apresentem diferenças quanto ao seu uso, é possível comparar razões como se fossem frações. Duas razões só poderão ser consideradas proporcionais se as frações em jogo forem equivalentes. Logo, quando nos depararmos com as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ saberemos de imediato que as razões não são proporcionais pois, as frações não são equivalentes.

Vergnaud (1983) afirma que as concepções de proporcionalidade dos estudantes são fortemente influenciadas por suas conceitualizações de frações e razões aprendidas na escola, onde razão seria um modo de falar de fração e proporção um modo de falar de equivalência de frações.

O conceito de fração, segundo Vergnaud (op.cit.), compreende duas relações fundamentais: a relação parte-todo e a relação parte-parte. Ele ressaltava algumas características básicas para a aquisição deste conceito, onde a criança deverá compreender que: um todo é sempre composto por elementos separados; uma fração implica em um determinado número de partes; o todo pode ser subdividido exaustivamente, mas não se pode subdividir parte do todo e ignorar as outras partes deste mesmo todo; existe uma relação entre o número de partes de um todo e as divisões desse todo, por exemplo, a criança terá que compreender que apenas uma divisão num todo é o bastante para transformar esse todo em duas partes; numa divisão as partes resultantes terão que estar quantitativamente iguais; a fração faz parte de um todo e pode ser um todo em si mesma, podendo ser subdividida; a soma das frações de um todo será sempre igual ao todo original.

Estas afirmações podem ser melhor compreendidas se fizermos uma analogia entre as relações parte-todo e parte-parte sugeridas por Vergnaud (op. cit.) para a aquisição do conceito de fração e a tarefa piagetiana de inclusão de classes.

Inicialmente Piaget não criou a tarefa de inclusão de classes² para tentar compreender especificamente a proporcionalidade, mas sim para compreender o desenvolvimento cognitivo das crianças e as estruturas de pensamento utilizadas por ela. O que tentamos fazer aqui, é uma analogia, pois a tarefa de inclusão de classes compreende uma relação parte-todo, onde o todo é composto pela soma de todas as suas partes. A tarefa consiste em mostrar para a criança dois conjuntos_ o conjunto A (com 5 rosas) e o conjunto A' (com 3 margaridas)_ pertencentes a um conjunto maior, o conjunto B (flores). Piaget descreve e propõe o problema

² Para uma melhor compreensão das tarefas piagetianas, bem como o método clínico piagetiano, ver Carraher (1982), onde esta realiza uma descrição resumida das mesmas.

da seguinte forma: "Dada uma classe A inclusa numa classe B, isto é, de modo que $CARD\ B = CARD\ A + CARD\ A'$ (em que A' não é nulo, o que significa que todos os A pertencem a classe B ou que são B e que nem todos os B pertencem ou são A) haverá mais A do que B ou mais B do que A?" (Piaget & Szeminska, 1975)

Ao questionar a criança formulando a pergunta: existe mais B do que A ou mais A do que B? Piaget procura investigar se esta consegue estabelecer uma reciprocidade entre os conjuntos, considerando A como um conjunto de rosas e B como o conjunto formado pelos conjuntos A (rosas) e A' (margaridas). Ou seja, se a criança compreende que B é um todo composto por partes (A e A'), onde a soma das partes deste todo é igual ao todo ($B = A + A'$). O que Piaget & Szeminska (1975) concluíram é que a criança só ira compreender estas relações parte-todo e parte-parte no estágio das operações concretas, estágio este em que se encontram as crianças que também conseguem compreender o conceito de fração segundo Vergnaud (1983).

Só mais tarde, estudando o desenvolvimento da proporcionalidade na criança, é que Piaget (1972) afirma que a noção de fração estrutura-se na fase das operações concretas e, a partir da aquisição desta noção, é que a criança poderá vir a desenvolver os conceitos de razão e proporção, que se estruturam numa fase posterior de raciocínio, correspondendo ao estágio das operações formais (Inhelder & Piaget, 1976).

Carraher & Schliemann (1992) desenvolveram um estudo sobre compreensão do conceito de razão por crianças de 5^a série, onde buscavam identificar e analisar a compreensão de fração como constituindo-se de uma relação de magnitude relativa entre o numerador e o denominador. Segundo estes autores, "no campo conceitual das estruturas aditivas, a magnitude relativa de dois números ou quantidades corresponde à diferença entre esses número, por exemplo: *Ana tem 3 bolas a mais que Maria*. No campo das estruturas multiplicativas, encontra-se um tipo bem diferente de magnitude relativa que é a magnitude relativa no sentido multiplicativo, por exemplo: *Ana tem 3 bolas para cada 2 bolas que Maria tem*.

A magnitude relativa está diretamente relacionada aos conceitos de razão e proporção e embora o currículo escolar só dê importância a estes conceitos no período que antecede a

adolescência, estudos já demonstraram que crianças com idades inferiores conseguem desenvolver primariamente os conceitos de proporção (Spinillo e Bryant, 1991; Spinillo, 1993) e de magnitude relativa (Carraher e Schliemann, 1992)

O modelo matemático de proporcionalidade mais comumente ensinado nas escolas brasileiras é a regra de três. As crianças aprendem a lidar com a regra de três na 6a. ou 7a. série e só voltam a ter contato novamente quando estão no segundo grau, onde lidam com problemas de proporções com fórmulas e gráficos em ciências e, mais especificamente, em física e química. A regra de três representa um modelo matemático poderoso e útil que pode ser facilmente representado pela seguinte expressão algébrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

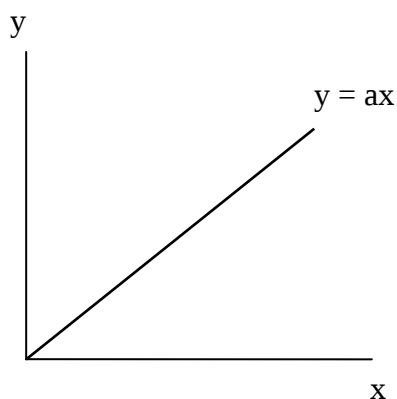
Essa expressão significa que, a partir do conhecimento de três valores a, b e c, poderemos encontrar um quarto valor, se estes envolverem proporcionalidade. Esta expressão é resolvida pelo processo de multiplicação cruzada:

$$a \times x = b \times c, \text{ então } x = (b \times c)/a$$

Por ser a regra de três um modelo muito simples e fácil de ser usada, pois envolve para sua resolução apenas o conhecimento da divisão e da multiplicação, que são aprendidos pela criança desde a 3a. série do primeiro grau, a escola não se preocupa em mostrar o significado que está por trás desta simples regra, ficando o uso da regra de três apenas um ação mecânica. O único significado que é ensinado na escola é se os valores nas variáveis envolvidas crescem juntos ou se quando um cresce o outro decresce. As crianças aprendem que se o valor de uma variável aumenta ao mesmo tempo que o valor da outra variável, então a proporção é direta e o problema pode ser resolvido diretamente. Mas se os valores de uma variável aumentam ao mesmo tempo em que os valores da outra variável diminuem, a proporção, agora, é inversa, ou seja, x e c terão suas posições trocadas (x vai para cima e c vai para baixo). Essa mudança terá de ser realizada antes que o procedimento de solução para encontrar o valor de x possa ser aplicado.

Na matemática isso é representado pela expressão funcional $y = cx$ (onde c é uma constante), para y e x diretamente proporcionais e pela expressão $y = c/x$, para y e x inversamente proporcionais.

Nas Ciências a proporcionalidade aparece mais freqüentemente sob a forma de funções que relacionam duas variáveis, dizendo-se que uma variável y é diretamente proporcional a uma variável x se $y = f(x)$ ou $y = ax$. Este tipo de função diretamente proporcional pode ser representado graficamente como uma linha reta passando pela origem em um gráfico cartesiano, como ilustrado abaixo:



Vergnaud (1983) sugere que para a compreensão da proporção existe um modelo situacional que representa de forma clara os caminhos percorridos para a compreensão das relações proporcionais de um problema. Esse modelo é chamado de modelo de isomorfismo de medidas. De acordo com este modelo de isomorfismo de medidas, a cada valor de uma variável corresponde um valor da outra variável, onde pode-se a partir daí estabelecer uma correspondência de um a muitos, ou seja, se temos na variável A um valor 1 que corresponde na variável B ao valor x , conseqüentemente, $n(1)$ irá corresponder a $n(x)$. Se os sujeitos utilizarem o modelo de isomorfismo de medidas como Vergnaud o descreve, então eles terão um conceito que compete com o procedimento ensinado na escola. Por exemplo:

Para o problema 1

Tenho 3 caixas de iogurte. Se cada caixa contém 4 iogurtes. Quantos iogurtes tenho?

$$\frac{4 \text{ iogurtes}}{1 \text{ caixa}} = \frac{x \text{ iogurtes}}{3 \text{ caixas}}$$

Se multiplicarmos os termos

$$X \text{ iogurtes} = \frac{4 \text{ iogurtes} \times 3 \text{ caixas}}{1 \text{ caixa}}$$

Pode-se observar uma forma simplificada da regra de três, que mostra que a multiplicação neste caso, não é uma composição binária, mas sim uma relação mais complexa, uma relação quaternária. (Vergnaud, 1991)

Porém, Vergnaud acredita que as crianças não necessitam deste conhecimento específico para resolverem problemas que envolvam o raciocínio proporcional, sendo as crianças capazes de resolverem problemas de proporcionalidade utilizando estratégias outras que não a ensinada na escola.

Vergnaud (1983, 1991), Noelting (1980) e outros encontraram, em seus estudos sobre proporção, diferentes tipos de respostas apresentadas por crianças ao solucionarem problemas de proporção, tais como:

* Soluções escalares, nas quais as variáveis são transformadas paralelamente, onde a representação matemática para a solução escalar mantém as variáveis separadas:

$$y : x$$

$$n(y) : n(x)$$

Utilizando o exemplo anteriormente citado:

Tendo 3 caixas de iogurte. Se cada caixa contém 4 iogurtes. Quantos iogurtes tenho?

Numa compreensão mais simplificada podemos representar este problema pelo seguinte esquema:

1 -----> 4

3 -----> x

Na verdade, segundo Vergnaud este esquema nada mais é do que uma tabela de correspondência entre dois tipos de quantidades (caixas de iogurtes e iogurtes). E uma solução escalar consiste em que cada variável permaneça independente da outra, os seus valores só se mantêm proporcionais pelo fato de que transformações paralelas são realizadas sobre ambas as variáveis. Por exemplo:

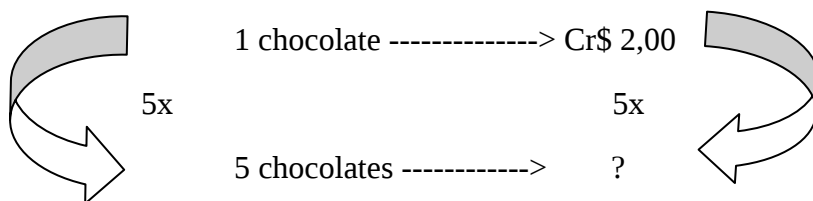
1 -----> 4

2 -----> 8

3 -----> 12

4 -----> 16

Essa tabela de correspondência traduz a concepção de Vergnaud sobre isomorfismo de medidas. Sendo assim, sempre que alguém realizar uma compra ou venda existirá um preço (que pode ser representado por x) que será colocado em correspondência com cada unidade do produto vendido. E, toda vez que houver um aumento no número de unidades haverá, proporcionalmente, um aumento no preço (se alguém compra 5 unidades, o preço será 5 vezes o preço da unidade_ se a unidade for igual a x , o preço será igual a $5x$). Vejamos um exemplo: no problema "Se Maria comprou 1 chocolate por R\$ 2,00, quanto irá gastar comprando 5 chocolates?", o preço da unidade é 2 reais e o que se pede é o preço de 5 unidades, logo se a unidade aumentou em 5 vezes, o preço irá aumentar 5 vezes, 5 vezes 2 reais será igual a 10 reais.



Vergnaud (1991) propõe uma análise vertical deste esquema, centrando sua atenção na noção de operador-escalar, que funciona nos problemas de isomorfismo de medidas com operadores multiplicativos.

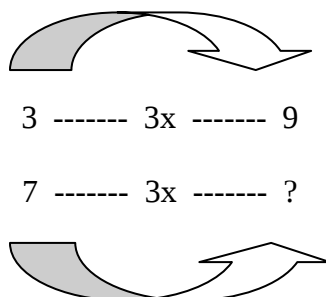
* Soluções funcionais, nas quais os valores de uma variável são tratados como uma função dos valores da outra e calculados pela multiplicação de uma constante pelo valor da variável independente:

$$x = f(y)$$

Nessa representação matemática, diferentemente da representação das soluções escalares, as duas variáveis são mantidas conectadas. Vergnaud propôs, para este tipo de solução, uma análise horizontal, centrando-se na noção de f operador-funcional que passa de uma categoria para outra. Por exemplo: 3 chocolates custam R\$ 9,00. Quanto custam 7 chocolates?

$$\begin{array}{ccc} 3 & \text{----- } f & \text{-----> } 9 \\ 7 & \text{----- } f & \text{-----> } x \end{array}$$

Para solucionarmos o problema teremos que encontrar o operador-funcional envolvido nas categorias:



Para Vergnaud (op. cit.), esta análise horizontal se situa em um nível conceitual mais elaborado e é, por outra parte, a razão das dificuldades encontradas pelas crianças para compreender a noção de função. Se a noção de correspondência não apresenta nenhuma dificuldade, em sua representação em forma de tabela, a análise desta correspondência em termos de funções torna-se muito mais delicada, pois implica não só uma noção de relação numérica, mas uma consciência de dimensões.

Além do modelo de isomorfismo de medidas Vergnaud descreve outros dois tipos de modelos que são: o produto de medidas, que consiste da composição cartesiana de dois espaços-medida, dentro de um terceiro, englobando um grande número de problemas referentes a área, volume, produto cartesiano e outros conceitos físicos. Por exemplo: "Qual a área de um retângulo que mede 7 metros de comprimento e 4,4 metros de largura?"; e a proporção múltipla, onde uma variável (M3) é proporcional a duas variáveis (M1 e M2) diferentes e independentes, onde as grandezas envolvidas têm seus próprios significados intrínsecos e nenhum deles pode ser reduzido ao produto dos outros. Por exemplo: "Se 4 operários constróem uma casa em 18 dias, trabalhando 6 horas por dia, quantos dias levarão 6 operários trabalhando 8 horas por dia?"

Passaremos agora a descrever alguns dos estudos sobre a compreensão da proporcionalidade desenvolvido pela Psicologia da Educação Matemática, visando avaliar o desempenho da escola enquanto formalizadora do ensino de proporção.

1.2.2. Alguns Estudos sobre a Proporcionalidade Desenvolvida na Escola

Carraher, Carraher, Schliemann & Ruiz (1986) desenvolveram um estudo em que procuravam investigar, empiricamente, o desenvolvimento da concepção de quantidades medidas por razões em estudantes cursando as 5^{as.}, 6^{as.} e 7^{as.} série do 1o. grau, utilizando dois conteúdos cotidianos, um envolvendo problemas sobre qual será a compra mais vantajosa e, o outro, envolvendo problemas sobre velocidades.

Na tarefa de compra mais vantajosa o examinador pedia ao sujeito que indicasse, entre duas possíveis compras, qual a mais vantajosa, pedindo-lhe que justificasse sua resposta.

Na tarefa de velocidade o sujeito, dispondo de diversas medidas de tempo e de distância percorridas por dois carrinhos que eram movimentados pelo experimentador em sua presença, devia indicar se os dois carrinhos tinham sido movimentados com a mesma velocidade ou não.

Na tarefa de compra mais vantajosa o desempenho dos sujeitos foi classificado de acordo com as seguintes categorias:

Nível 1 - as resposta dos sujeitos envolviam apenas uma variável e utilizavam, em suas soluções, comparações diretas.

Nível 2 - em suas respostas o sujeito procurava considerar ambas as variáveis simultaneamente, mas ainda não utilizavam conceitos quantitativos cuidadosamente.

Nível 3 - os sujeitos utilizaram estratégias corretas considerando as duas variáveis em questão.

Na tarefa de velocidades o desempenho dos sujeitos foram classificados nos seguintes níveis:

Nível 1 - os sujeitos desse nível apresentaram dois tipos de resposta: 1- a consideração de apenas uma variável, distância ou tempo, onde alguns sujeitos confundiam o significado de velocidade com a variável usada; 2- os sujeitos ignoravam os dados quantitativos, procuravam apenas observar a velocidade dos carrinhos, enquanto o experimentador movimentava-os;

Nível 2 - os sujeitos refletiam uma quantificação imprecisa da velocidade, mas consideravam ambas as variáveis;

Nível 3 - os sujeitos utilizavam uma quantificação aditiva incorreta;

Nível 4 - os sujeitos indicavam uma consideração precisa das duas variáveis, sendo observadas dois tipos de estratégias utilizadas pelos sujeitos: 1 - os sujeitos calculavam o número de centímetros por segundo, este tipo de estratégia poderia tanto refletir uma aprendizagem escolar, como uma compreensão de velocidade desenvolvida pela criança independentemente da escola; 2 - os sujeitos dividiam a distância pelo tempo para os dois

carros e comparavam os resultados, mesmo sendo uma estratégia correta, ela provavelmente, não resulta da aprendizagem escolar.

Os resultados obtidos nas duas tarefas, indicavam uma influência da escolarização sobre o desempenho dos sujeitos na tarefa de velocidades. Porém, na tarefa de compra mais vantajosa não se observou qualquer efeito da escolarização sobre o desempenho dos sujeitos.

Tais resultados alertavam para o fato de que alguns sujeitos, mesmo sendo capazes de aplicar o algoritmo escolar para encontrar a resposta correta não o faziam, sugerindo, naquele momento, a necessidade de uma investigação mais detalhada sobre o ensino da regra de três (que é o modelo tradicionalmente ensinado na escola para a compreensão da proporcionalidade). Embora os cálculos envolvidos na resolução da regra de três sejam bastante simples, o algoritmo da regra de três envolve um modelo matemático complexo e a escola não tem tido sucesso no ensino do mesmo e do seu uso e compreensão pelas crianças. Os autores concluem sugerindo um aprofundamento dos estudos, no que se refere ao ensino da proporção nas escolas, especificamente, o ensino da regra-de-três.

Carraher, Schliemann & Carraher (1986) apresentaram um estudo que procurava avaliar o desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes com diferentes níveis de escolarização quanto ao esquema de proporcionalidade, através de duas tarefas piagetianas: a do equilíbrio da balança e a da quantificação de probabilidades, observando a dificuldade relativa existente entre elas.

Os resultados mostraram que os sujeitos não utilizaram a instrução formalizada institucionalmente pela escola para solucionarem as tarefas, levando os autores a concluir que o algoritmo utilizado para a apresentação de um modelo matemático, como o das proporções, cristalizado na regra-de-três, não teria muita importância para a educação matemática. É possível que o modo como os modelos são ensinados seja mais importante que o algoritmo específico ao qual o modelo é aplicado. Como 50% dos sujeitos dessa pesquisa tentavam resolver o problema utilizando apenas uma variável, os autores sugerem que o ensino de proporções deva ser aliado a considerações sobre variáveis em situações diversas, com o objetivo de que os alunos aprendam a examinar tais variáveis afetando os resultados em um problema. A aprendizagem de um algoritmo matemático simples, como a regra-de-

três, será inútil se o aluno não souber como analisar e compreender as situações-problema, a fim de aplicar o algoritmo aprendido.

Carraher, Carraher & Schliemann (1986) desenvolveram um estudo onde procuravam verificar até que ponto é possível conseguir que adolescentes sejam capazes de resolver corretamente problemas de proporção através do ensino de um algoritmo que facilite a solução desses problemas e até que ponto essa aprendizagem em matemática estaria condicionada ao nível de desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Tal estudo consistia em submeter estudantes das 5as, 6as e 7as séries às seguintes tarefas:

a) tarefas com problemas de proporcionalidade desenvolvidos com contextos que são vistos na escola, perfazendo um total de 18 problemas, dos quais oito eram exemplos de isomorfismo de medidas, utilizando conteúdos diversos, um constituía um problema de proporção múltipla e nove eram exercícios de cálculos;

b) tarefas de transformação escalar, adaptada de Karplus e Peterson (1970), conhecida como a tarefa dos cliques de papel, tais tarefas foram apresentadas como Karplus e Peterson (1970) descreveram em seus estudos. A análise das respostas dos sujeitos também seguiu suas sugestões;

c) e as tarefas piagetianas de quantificação de probabilidades e equilíbrio da balança.

O baixo desempenho dos sujeitos encontrado nos resultados deste estudo despertou nos autores a preocupação em dedicar-se maior atenção ao ensino de problemas relacionados com estruturas multiplicativas na escola. Além do desempenho dos sujeitos nas tarefas piagetianas e na tarefa dos bonecos não ter sido encorajador, o desempenho diante das tarefas escolares foi muito abaixo do esperado, levando os autores a concluírem que a escola não vem aproveitando muito bem as habilidades lógico-matemáticas das crianças.

Para concluir os autores salientaram dois pontos principais:

* primeiro, é possível que o ensino da matemática atualmente esteja estimulando o estudante a tentar descobrir a operação correta, antes mesmo de compreender o significado do problema, de forma que não haveria uma compreensão do problema e a sua resolução tornar-se-ia uma ação mecânica;

* segundo, embora nem sempre fossem capazes de encontrar a resposta correta, as crianças, ao deparar-se com as tarefas piagetianas e a tarefa dos bonecos, buscavam respondê-las utilizando soluções baseadas no significado, diferente de quando respondiam os problemas escolares pois, eram problemas que ignoravam totalmente o significado.

Leão (1986) desenvolveu um estudo onde procurou por em evidência a questão da universalidade da teoria piagetiana, deixando claro que as estruturas cognitivas necessárias ao desenvolvimento do esquema de proporcionalidade existem, mas a influência sócio-cultural torna-se presente como um fator desencadeador da atualização dessas estruturas. Essa questão não é só discutida neste estudo, mas em muitos outros estudos transculturais de replicação dos estudos de Piaget, que contribuem para a avaliação da utilização da teoria piagetiana em outras culturas.

A autora propõe um objetivo mais geral que seria buscar uma comparação dos resultados dos sujeitos brasileiros, com os resultados obtidos por Noelting (1980) e por Karplus (1974 e 1979), como uma tentativa de esclarecer a influência da cultura no desenvolvimento cognitivo da criança. Além de outros objetivos específicos que procuravam investigar:

- * o conceito de proporção;
- * o tipo de raciocínio empregado na solução das tarefas de proporcionalidade;
- * a influência do ensino formal de proporção sobre o desenvolvimento do referido conceito;
- * a influência do tipo de tarefa em contextos diferentes sobre a solução de problemas de proporcionalidade;
- * a influência de razões com valores inteiros e fracionários sobre o desempenho nos problemas de proporção.

Participaram deste estudo dois grupos de sujeito: o grupo não-instruído, que ainda não tinha recebido instrução sobre proporção na escola, e o grupo instruído, que já havia aprendido a proporcionalidade em sua versão escolar. Os sujeitos foram submetidos às seguintes tarefas: cliques de papel-forma B (Karplus, Karplus & Wollman, 1974), que compreende um problema de busca do valor ausente e lida com razões fracionárias; suco de

laranja (Noelting, 1980) que refere-se a problemas de comparação; e problemas formais (elaborado pela autora) que são constituídos de quatro problemas de comparação_ sendo dois com razões inteiras e dois com razões fracionárias_ e quatro problemas de busca do valor ausente_ também dois com razões inteiras e dois fracionárias.

Os resultados dos sujeitos nas três tarefas mostraram um emprego elevado de estratégias aditivas nos dois grupos, sendo este emprego mais acentuado na tarefa dos cliques de papel. Considerando que os sujeitos do grupo não-instruído não tiveram acesso a instrução formal para o ensino de proporção na escola, pode-se afirmar que o raciocínio aditivo, neste tipo específico de sujeito, é o mais "natural". Porém, para o grupo instruído, que já havia recebido o ensino de proporção na escola, esse tipo de raciocínio levou a autora a concluir que a metodologia utilizada em sala de aula não está sendo eficaz em levar os estudantes ao uso do raciocínio proporcional.

De uma maneira geral, os resultados indicaram que os problemas de comparação são resolvidos mais facilmente que problemas de valor ausente, e os problemas de razões fracionárias são mais difíceis que problemas de razões inteiras. Uma possível explicação para esses resultados está no fato de que os estudantes, independentemente de terem recebido instrução na escola sobre proporção, mantêm na vida diária contato com problemas de comparação e na maioria das vezes utilizam razões inteiras.

Um dado interessante encontrado nos resultados é o de que alguns sujeitos na tarefa dos problemas formais armavam corretamente o problema, porém erravam na sua resolução, principalmente nos problemas que envolviam números decimais. E outro dado interessante é que os sujeitos, após tentarem inutilmente resolver os problemas “à moda” da escola, passavam a fazê-lo por seus próprios caminhos, chegando assim à resposta correta. Isto levou a autora a concluir que a dificuldade não está em entender o problema, mas na operacionalização do mesmo, ou seja, a dificuldade está na utilização dos algoritmos ensinados pela escola.

Leão (op. cit.) apresentou duas conclusões principais para seus estudos: 1) A primeira é qualitativa, onde afirma que os resultados obtidos são muito semelhantes aos obtidos por Karplus (1974, 1979) e por Noelting (1980). Esta semelhança leva a acreditar numa

universalidade das estruturas cognitivas iniciais referentes ao conceito de proporção. Mas a autora atenta para o fato de que a "regra de três", que é o algoritmo utilizado pela escola para o ensino da proporcionalidade, apesar de ser um procedimento matemático muito simples, exige a compreensão de conceitos complexos. Logo, se o sujeito não desenvolveu as estruturas multiplicativas, não adianta ensinar-lhe a regra de três, pois não terá como assimilá-la. E pode também, em outro momento, ter desenvolvido as estruturas e não ter julgamento suficiente para saber quando utilizá-las; 2) A segunda é quantitativa, a partir de análises estatísticas, onde foi encontrada diferenças entre os seus dados e os dados obtidos por Karplus e Noelting. A reflexão sobre essas diferenças trazem importantes implicações para o ensino da proporcionalidade, como:

* o ensino da proporcionalidade deveria ser repensado, buscando-se adequar a seqüência natural de evolução da proporcionalidade com uma metodologia de ensino. Segundo Leão o ensino de proporcionalidade deveria começar com problemas de comparação com razões inteiras e, a seguir, com razões fracionárias, para depois virem os problemas de valor ausente com razões inteiras e, em seguida, com razões fracionárias;

* é importante ressaltar que o ensino da regra de três está sendo proposto em contexto estritamente escolar, ou seja, "está se processando num contexto puramente abstrato, fora da área de interesse vivencial dos alunos, sem ligações de ordem prática e sem interações entre problemas com diferentes conteúdos, o que vem dificultar a sua assimilação e uso, tornando-se, por conseguinte, facilmente esquecido".

1.3. Estudos sobre o desenvolvimento da proporcionalidade na vida diária.

Estudando sujeitos que, segundo a perspectiva piagetiana, não poderiam compreender a proporcionalidade, pois sendo muito jovens não teriam adquirido as estruturas lógico-matemáticas para a sua compreensão, e que por outro lado, de acordo com a visão escolar tradicional, não poderiam resolver problemas nessa área, pois em sua maioria, são sujeitos

precariamente escolarizados, sem conhecimento funcional do algoritmo escolar, (regra-de-três) necessário para a sua resolução, a Psicologia da Educação Matemática desenvolveu estudos que objetivavam, especificamente, explorar e analisar as formas de raciocínio e resolução de problemas matemáticos desenvolvidos por sujeitos que utilizam a matemática, não formalizada institucionalmente, no dia-a-dia

A partir destes estudos descobriu-se que, independentemente da escolarização, a proporcionalidade pode ser compreendida por meninos de rua, pedreiros, marceneiros, cozinheiras, entre outros, os quais utilizam constantemente cálculos matemáticos para resolver problemas no seu cotidiano.

Para melhor compreendermos esta nova análise faz-se necessário abrangermos o conjunto destes estudos.

Carraher, Carraher & Schliemann (1988), partindo do ponto de vista de que a atividade humana é organizada e aceitando a noção piagetiana de que as estruturas lógico-matemáticas podem ser concebidas como principais formas desta organização, ressaltaram várias questões que ainda não tinham sido esclarecidas, como: Em que a situação social influencia a organização da atividade? Que influência teria a adoção de sistemas convencionais, culturalmente desenvolvidos, sobre o pensamento lógico-matemático? Que relação existe entre o desenvolvimento intelectual e o momento histórico em que vive o aluno? Que relação existe entre as circunstâncias de vida sócio-econômicas e culturais e o desenvolvimento do pensamento?

Essas questões psicológicas têm imediatas implicações na educação, levantando-se questões como: O que fazer na escola se constatarmos que as crianças sabem mais matemática fora da escola do que em sala? O que ensinar na escola se as crianças já aprendem muito fora da sala de aula? Que explicações teremos para o fracasso escolar da criança se ela for bem sucedida nas tarefas cotidianas que envolvem estruturas lógico-matemáticas?

Os pesquisadores supracitados procuraram descrever estudos ressaltando várias situações, onde a matemática é aprendida fora da sala de aula, com a finalidade de provocar no professor a busca de maneiras de usar o conhecimento matemático da vida cotidiana de seus alunos, como base para a aprendizagem de novas formas de representação. Num destes

estudos, Carraher (1986) procurou analisar o conceito de proporcionalidade, investigando a natureza das habilidades matemáticas, não formalmente ensinadas, desenvolvidas na prática por profissionais de baixo nível sócio-econômico-escolar. O estudo consistia em mostrar aos sujeitos, mestres de obra e estudantes, plantas de uma construção com diferentes escalas e pedir a estes que, a partir do conhecimento da medida de uma parede, encontrassem a medida de outras paredes. As escalas foram classificadas em familiares (escalas que os mestres-de-obra utilizavam nas construções) e não-familiares (escalas que os mestres-de-obras não utilizavam nas construções). As escalas eram $1/100$, $1/50$ (conhecidas) e $1/40$, $1/33$ (desconhecidas). Este tipo de problema foi escolhido pois é simples e de fácil manejo entre os sujeitos, e por constituírem-se como problemas que têm a proporcionalidade como definição matemática.

Carraher (op. cit.) conclui que os mestres-de-obras, mesmo na ausência de escolaridade regular, desenvolvem estratégias gerais de solução de problemas que se assemelham ao esquema de proporcionalidade descrito por Inhelder & Piaget (1951; 1959).

As diferenças encontradas entre os tipos de estratégias utilizadas pelos mestres, em comparação com as estratégias utilizadas pelos estudantes, descrevem de forma diferenciada o processo de aprendizagem das operações aritméticas: os mestres, em suas respostas, buscavam a compreensão do problema e a identificação dos significados dos números; enquanto os estudantes apenas utilizavam regras para operar com números, regras estas transmitidas pela escola, sem a preocupação de desenvolver, nos alunos, a compreensão do problema ou, ao menos, a procura do significado dos números.

A autora concluiu que a escola, que deveria ser o ambiente mais recomendado para a aprendizagem de modelos gerais de resolução de problemas, nesta pesquisa não o foi, ou seja, os sujeitos escolarizados não resolveram os problemas da forma como fora ensinado na escola e quando o fizeram, seus modelos matemáticos não levavam em consideração o significado do problema, restringindo-se apenas a cálculos matemáticos. Enquanto que, na vida diária, a experiência de trabalho conseguiu ajudar na compreensão dos problemas e, o que é mais importante, os modelos matemáticos usados pelos sujeitos, que possuíam a experiência do

trabalho, estavam carregados de significado, ou seja, os sujeitos conseguiam entender o significado dos problemas e os resolviam a partir daí.

Schliemann e Magalhães (1990) desenvolveram um estudo que buscava analisar como sujeitos analfabetos podem utilizar a compreensão de relações proporcionais, adquiridas nas suas atividades do dia-a-dia, para resolverem problemas em contextos e situações diferentes das enfrentadas no cotidiano, mas que exigem um raciocínio proporcional para a sua solução.

Para este estudo foram utilizados como sujeitos cozinheiras pois, constituíam um grupo interessante para o estudo de transferência de modelos matemáticos. As cozinheiras se defrontavam com problemas de proporcionalidade no trabalho, independentemente de serem escolarizadas ou não, quando cozinham, pois: quando tentavam aumentar a quantidade de alimento a ser preparada com base em uma receita, necessariamente teriam que calcular o aumento dos ingredientes da receita proporcionalmente; também ao fazer compras estariam realizando transações comerciais e, neste tipo de atividade, o raciocínio proporcional torna-se indispensável.

Sabendo da necessidade do uso do modelo proporcional nas atividades do dia-a-dia para as cozinheiras, as autoras procuraram investigar se os sujeitos poderiam usar e transferir este modelo usado no dia-a-dia para outros contextos que envolvessem problemas completamente desconhecidos.

Os problemas eram apresentados em três contextos diferentes, mas eram semelhantes nas relações e quantidades envolvidas. Os contextos usados foram: a) preços de produtos para compra, este contexto é familiar ao sujeito pois, faz parte de suas atividades cotidianas, por exemplo: "Para comprar 2 kg de carne gasto 5 cruzados. Para comprar 3 kg de carne quanto vou precisar?"; b) receitas de cozinha, este contexto também faz parte das atividades do dia-a-dia das cozinheiras, por exemplo: "Para fazer massa de torta coloca-se 2 xícaras de farinha de trigo e 6 claras. Para se fazer uma torta com 3 xícaras de farinha de trigo, quantas claras vou precisar?"; c) fórmulas de remédio, que é um contexto desconhecido para os sujeitos, por exemplo: "um remédio para dor de cabeça é feito com 2 gramas de cafeína e 6 gramas de ácido. Se o laboratório colocar 3 gramas de cafeína, quanto de ácido deverá ser colocado?"

Os sujeitos foram divididos em três grupos, que se diferenciavam pela ordem em que eram apresentados os problemas. No grupo 1, primeiro foram apresentados oito problemas sobre receitas de cozinha e, logo depois, quatro problemas sobre preço de mercadorias. Numa segunda apresentação foram mostrados novamente os problemas de receitas e, depois, oito problemas de fórmulas de remédio. No grupo 2, foram apresentados quatro problemas sobre preço de mercadorias, depois oito sobre receita de cozinha e, finalmente, oito problemas sobre fórmulas de remédios. No grupo 3 foram apresentados oito problemas sobre fórmulas de remédios, depois quatro sobre preços de mercadorias, novamente foram apresentados os problemas sobre fórmulas de remédios e finalmente os oito problemas sobre receitas de cozinha.

A sequência (receita, preço, receita, fórmula) do grupo 1 foi utilizada para avaliar as habilidades dos sujeitos em resolverem problemas proporcionais sobre quantidades de ingredientes numa receita, antes e depois de resolverem problemas proporcionais sobre preços de mercadorias. Bem como, para analisar a possibilidade de transferência do modelo proporcional, usado para a solução dos problemas de preços, para os problemas de fórmulas de remédios, após os sujeitos terem oportunidade de transferir o modelo usado nos preços para as receitas.

A sequência (preço, receita, fórmula), grupo 2, serviu como controle para os possíveis efeitos da prática.

Finalmente, a sequência (fórmula, preço, fórmula, receita) grupo 3, serviu para avaliar as habilidades dos sujeitos em resolverem problemas proporcionais sobre contextos desconhecidos, antes e depois de resolverem problemas proporcionais sobre preços. Bem como, analisar os possíveis efeitos de transferência do uso do modelo proporcional nos problemas de preço para os problemas com contextos desconhecidos, sem a mediação dos problemas de receitas.

As autoras encontraram que a transferência do modelo proporcional, usado na solução de problemas em situações cotidianas de preços, foi mais utilizada na solução dos problemas com situações conhecidas do sujeito (receitas), do que nas soluções onde a situação era desconhecida do sujeito (fórmulas). Porém, quando a situação conhecida foi apresentada antes

da situação desconhecida, os sujeitos reconheceram a adequação do modelo mesmo não conhecendo o contexto utilizado.

Os resultados das respostas dos sujeitos mostraram que: mesmo sendo analfabetos, foram capazes de resolver problemas envolvendo uma mesma estrutura lógica, como foi o caso dos problemas de preços de mercadorias e de receitas de cozinha; e que apesar dos problemas diferirem quanto ao contexto em que estavam inseridos, os sujeitos foram capazes de identificar que os problemas, mesmo que contextualmente diferissem, constituíam-se como problemas matematicamente similares.

Os autores sugerem então que, quando os educadores estiverem ensinando a compreensão e a transferência de modelos matemáticos, tentem, inicialmente, familiarizar os estudantes sobre os diferentes contextos que envolvem um problema e o uso de um modelo relevante.

Schliemann & Carraher (1991) relataram um estudo onde procuravam investigar o desenvolvimento da compreensão das estruturas multiplicativas, contrastando as estratégias e concepções desenvolvidas dentro da escola com aquelas desenvolvidas fora da escola. Em segundo plano, buscavam evidências a respeito da prevalência dessas estratégias na população geral dos alunos.

Sabendo-se que as crianças são capazes de resolverem problemas matemáticos através de estratégias intuitivas, ou seja, estratégias que não são ensinadas na escola e sim, desenvolvidas no dia-a-dia das mesmas e que estes problemas matemáticos também podem ser resolvidos através de estratégias formais ou escolares, ou seja, estratégias desenvolvidas na escola, os autores levantam uma questão interessante: por que as estratégias intuitivas não são transformadas facilmente em estratégias formais?

A partir deste questionamento Schliemann e Carraher (op. cit.) propuseram-se a analisar as estratégias intuitivas utilizadas por crianças escolarizadas e não escolarizadas ao tentarem resolver diferentes tipos de problemas de proporcionalidade. Esta análise permitiria sugerir formas de ensino que, levando em consideração o tipo de pensamento das crianças, pudessem resolver a questão anteriormente levantada: transformar as estratégias intuitivas

(encontradas nas respostas das crianças) em estratégias formais, tentando assim, formular uma nova didática para o ensino da proporcionalidade.

O estudo desenvolveu-se em duas fases: da primeira fase participaram três grupos de 30 crianças cada. O primeiro grupo foi formado por crianças com idades variando de 10 à 14 anos, que trabalhavam como vendedores nas ruas do Recife. O segundo grupo formado por crianças de 11 à 14 anos de idade, cursando a 6a. série do primeiro grau de uma escola particular do Recife. O terceiro grupo composto por crianças de 12 à 14 anos, cursando a 7a. série do primeiro grau de uma escola particular do Recife. Os grupos de vendedores e 6a. série não haviam recebido instrução escolar sobre como resolver problemas de proporção, enquanto o grupo de 7a. série já havia recebido esta instrução. Da segunda fase participaram 36 crianças com escolarização irregular variando da 1a. à 4a. série do primeiro grau, os quais não haviam recebido instrução escolar de como resolver problemas de proporção mas, trabalhando como vendedores, possuíam contatos com tais problemas no dia-a-dia.

Na primeira fase utilizaram-se doze problemas envolvendo proporcionalidade, os quais foram apresentados individualmente aos sujeitos. Estes problemas foram classificados em três grupos: **o primeiro** formado por quatro problemas, onde a relação escalar era mais facilmente encontrada pois, a resposta correspondia a um múltiplo do valor conhecido na mesma variável, por exemplo: *10 chicletes custam três cruzados. Quantos chicletes posso comprar com 9 cruzados?* ; **o segundo** formado por quatro problemas, onde a relação funcional era mais facilmente encontrada, uma vez que os valores em uma variável eram múltiplos dos valores da outra, por exemplo: *3 canetas custam 9 cruzados. Quantas canetas posso comprar com 21 cruzados?*; e **o terceiro** formado por quatro problemas em que as duas relações, escalar ou funcional, não podem ser facilmente encontradas, visto que os números não se constituíam múltiplos entre si, por exemplo: *20 refrigerantes custam 9 cruzados. Quantos cruzados vou precisar para comprar 55 refrigerantes?* .

Na segunda fase foram utilizados nove problemas envolvendo proporcionalidade, utilizando-se o mesmo procedimento de coleta de dados desenvolvido na primeira fase. Esses problemas dividiam-se em três grupos: 3 problemas envolvendo relações escalares; três

problemas envolvendo relações funcionais; e três problemas onde nenhuma das relações fossem facilmente identificadas.

Os resultados das respostas das crianças indicaram que os esquemas utilizados pelos três grupos de sujeitos foram predominantemente, o esquema de isomorfismo de medidas e o cálculo do preço unitário. A regra de três raramente apareceu, mesmo no grupo de 7a. série que recebera a instrução pela escola de como resolver problemas de proporção através do uso da regra de três.

A estratégia escalar foi, predominantemente, a mais usada pelas crianças vendedoras e também no grupo das crianças escolarizadas, confirmando-se a hipótese de que as crianças possuem uma capacidade intuitiva para resolver problemas de proporção.

1.4. Da Pesquisa para a Sala de Aula

Após a revisão dos principais estudos realizados sobre a aquisição do conceito de proporcionalidade, Pereira Neto (1992) afirma que a escola não vem preparando bem os alunos para o desenvolvimento da compreensão matemática da proporcionalidade. O que encontramos é uma escola preocupada em ensinar regras de resolução de problemas, deixando de lado o mais importante que é mostrar o significado de tais modelos matemáticos e de como utilizá-los. As crianças saem da escola sabendo utilizar estas regras mecanicamente, porém quando os problemas aparecem em um contexto diferente do ensinado na escola, as crianças não conseguem resolvê-los. Ora, qual o valor de se ensinar regras sem antes explicar o significado do uso destas regras? Será que as crianças que receberam a instrução escolar sobre proporcionalidade na escola conseguiram, realmente, compreender algo mais acerca do conceito de proporcionalidade? Será que o conceito de proporcionalidade poderia ser desenvolvido melhor, se a escola adotasse uma didática de ensino onde as estratégias intuitivas, pára-escolares, que as crianças possuem, fossem ressaltadas e constituíssem o ponto de partida?

Segundo Pereira Neto (op. cit.), estes questionamentos na atual forma de ensino da proporcionalidade demonstram como está falho o sistema de ensino de proporcionalidade.

Carraher, Carraher & Schliemann (1988) afirmam que, para que as crianças venham a compreender o conceito de proporcionalidade, seria necessário mudar a concepção que a escola possui dos seus alunos, pois os estudos mostram que eles, mesmo sem escolarização, possuem a capacidade de compreensão e de resolução de problemas e, o que é mais importante, utilizam estratégias, dotadas de significado e compreensão de estruturas matemáticas, na resolução destes problemas.

A partir dos dados obtidos por estas pesquisas e das falhas acima citadas, Pereira Neto, Moura & Schliemann, (1995) desenvolveram um estudo que visava construir e testar, a partir dos dados de pesquisas já existentes, uma seqüência de tarefas para o ensino da proporcionalidade, ressaltando as estratégias utilizadas pelas crianças que resolvem problemas de proporção na vida diária, como vendedores, e que são as estratégias escalares, tentando, a partir delas, chegar a estratégias mais gerais como as estratégias funcionais.

Participaram do estudo 25 alunos de uma turma de 5a. série de uma escola pública do Recife, com idades entre 11 e 13 anos e que não haviam recebido instrução escolar sobre a resolução de problemas envolvendo o conceito de proporção. Os sujeitos foram divididos em grupo experimental e grupo controle. Todos os sujeitos submeteram-se a um pré-teste, antes de serem divididos em grupos, para que fosse avaliado o desempenho destes sujeitos diante de problemas de proporção. Os sujeitos foram submetidos a um pós-teste imediato e a um segundo pós-teste, realizado dois meses depois, para avaliar o desempenho de todos os grupos após os encontros.

As respostas dos sujeitos foram comparadas quanto ao número de acertos observando-se que, no grupo experimental, passou-se de 57% de acertos no pré-teste para 76% no pós-teste 1 e 60% no pós teste 2. A diferença entre o pré-teste e o pós-teste 1 foi significativa

($t=1,94$, $p<0,05$, unicaudal), mas a diferença entre o pré-teste e o pós-teste 2 não o foi ($t=1,67$, $0,05<p<0,10$, unicaudal). No grupo controle manteve-se o mesmo percentual de acertos de 42%. Quanto as estratégias de resolução utilizadas no pré-teste e no pós-teste observou-se que, no pré-teste, 21% dos problemas foram resolvidos de forma escalar e 14% pela estratégia funcional, no pós-teste 1 a estratégia escalar foi usada em 44% dos problemas e a funcional em 15% e, finalmente, no pós-teste 2, a estratégia escalar foi utilizada em 57% dos casos e a funcional em 15%..

Os autores concluíram que os sujeitos apresentaram uma aprendizagem em relação ao uso da estratégia escalar, que é uma estratégia carregada de significado, mas não houve maiores progressos com relação ao uso da estratégia funcional. Isto provavelmente se deu devido ao curto período em que a utilização desta estratégia foi enfatizada durante os encontros

A revisão minuciosa desses estudos nos revelam os seguintes fatos:

* Nas escolas o ensino da proporcionalidade resume-se ao ensino do algoritmo da regra-de-três, trabalhado de forma mecânica e sem significado, e quando estes sujeitos, que obtiveram a instrução formal sobre proporção na escola, ou seja, que aprenderam a utilizar a regra-de-três na escola, estão diante de problemas de proporção no dia-a-dia não utilizam a instrução formal, a regra-de-três, para resolvê-los;

* Em contrapartida, os estudos mostraram que crianças e até mesmo adultos que não tiveram acesso ao ensino formal de proporcionalidade na escola, mas que lidam com a matemática no dia-a-dia, trabalhando como vendedores, pipoqueiros, pedreiros ou marceneiros, conseguem resolver problemas de proporção com certas limitações, através de estratégias intuitivas, tais como as estratégias escalares e as funcionais;

* Outro dado importante é que, segundo Piaget, a compreensão do conceito de proporcionalidade envolve o estabelecimento de uma relação entre relações (relações de segunda ordem), onde esta compreensão se dá de forma lenta, sendo uma característica do

período operacional formal. Os estudos observaram que esta compreensão pode ocorrer bem mais cedo do que propunha Piaget, ou melhor, que o conceito de proporcionalidade pode ser compreendido antes mesmo de se iniciar o ensino formal pela escola (ver notadamente Spinillo, 1993.);

* Essa compreensão “primitiva” é observada em crianças vendedoras, que utilizam a estratégia escalar e a estratégia funcional para responderem problemas de proporcionalidade no dia-a-dia. Porém, essa compreensão se dá a nível mais simples, envolvendo relações simples. Por exemplo, a estratégia escalar é utilizada com sucesso pelas crianças quando estão envolvidas relações simples partindo de um par menor para uma par maior:

3 laranjas custam 10 centavos

9 laranjas custam ?

Neste caso o problema refere-se a uma relação do menor para o maior. Porém, quando essa relação se inverte, uma relação do maior para o menor, como por exemplo:

9 laranjas custam 30 centavos

3 laranjas custam ?

Observa-se uma dificuldade mais pronunciada em resolver através da estratégia escalar. Além disso, este tipo de estratégia envolve uma compreensão isolada das variáveis envolvidas, ou seja, as variáveis, por exemplo, item (laranjas) e preço, são relacionadas par-a-par e o procedimento de solução consiste em realizar transformações paralelas em ambos (itens e preços) de forma que se obtenha, no final, a relação desejada

3 laranjas → 0.10

6 laranjas → 0.20

9 laranjas → 0.30

Porém, quando o problema se apresenta de tal forma que as variáveis não mais possam ser manipuladas paralelamente para se obter a relação desejada, este tipo de estratégia deixa de ser eficiente, por exemplo;

3 laranjas custam 09 centavos

7 laranjas custam ?

Neste caso a transformação paralela das variáveis não é suficiente para solucionar o problema, exigindo assim uma compreensão das variáveis como estando relacionadas entre si, por exemplo

3 laranjas $\longrightarrow$.09

3 : 3 $\longrightarrow$.09 : 3

ou .09 : 3

1 laranja $\rightarrow$.03

7 laranjas $\rightarrow$.21

Só após a compreensão de que itens e preços envolvem uma relação com uma razão igual a 3, é que será possível descobrir o valor unitário e assim obter a relação desejada. Esse tipo de procedimento mais sofisticado é utilizado também pelas crianças vendedoras num nível mais elaborado de compreensão. Estas estratégias são aquelas a que já nos referimos anteriormente, as estratégias funcionais;

* Um outro fato importante a ser ressaltado são as sugestões de trabalho e de encaminhamento que estes estudos nos deixaram. Uma possibilidade interessante é utilizar esse conhecimento familiar aos sujeitos, envolvendo raciocínio escalar e funcional, que é um raciocínio rico em significado, como suporte semântico no ensino da regra-de-três, que é um algoritmo potente da matemática para a resolução de problemas de proporção, mas que é

pobre³ em significado, ou seja, é um procedimento usado pelas crianças escolarizadas, mas de forma mecânica, onde na verdade elas não compreendem o significado do seu uso.

Nas estratégias funcionais o sujeito passa a compreender as variáveis envolvidas no problema como estando relacionadas entre si. O sujeito ao calcular o valor unitário desta relação estará trabalhando com a razão existente entre as relações proporcionais, ou seja, ele estará encontrando uma constante "c" que quando relacionada com variáveis x e y diretamente proporcionais, implica uma relação diretamente proporcional: $y = cx$.

Apesar do procedimento da regra-de-três diferir, pois parte da representação de duas relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

onde, a partir do conhecimento de três valores a , b e c , pode-se encontrar um quarto valor, se estes envolverem proporcionalidade. Resolvendo-se o problema através do processo de multiplicação cruzada:

$$a \cdot x = b \cdot c, \text{ então } x = \frac{(b \cdot c)}{a}$$

O procedimento de calcular o valor unitário também dá conta do problema e apesar de ambos diferirem (regra-de-três vs cálculo do valor unitário) no procedimento de solução, ambos revelam aspectos complementares no contexto da proporcionalidade. A diferença forneceria um subsídio importante no que diz respeito à passagem do conhecimento informal (escalar e funcional) para um conhecimento formal (regra-de-três), baseando-se no fato de que: segundo a regra-de-três o valor ausente é encontrado a partir da equação proposta

anteriormente: $x = \frac{(b \cdot c)}{a}$

³ Neste caso “pobre” está relacionado ao ponto de vista conceitual-matemático, onde o algoritmo é considerado

enquanto o cálculo do valor unitário propõe que se ache inicialmente a constante que une funcionalmente a e c , uma constante k e para encontrar o valor ausente multiplique-se esta constante com o terceiro valor diretamente proporcional: $x = b \times k$.

Podemos concluir que, na verdade ambos os procedimentos dão conta do conceito de proporcionalidade, pois se $k = c/a$, na equação proposta pelo cálculo do valor unitário ($x = b \times k$) ao substituirmos o k teremos uma equação igual à equação proposta pela regra de três:

$$x = \frac{(b.c)}{a}$$

Neste caso, estamos diante de uma equação idêntica a utilizada na regra-de-três e que ~~tem como base uma compreensão semântica do problema, ou seja, uma equação construída a~~ partir de significados já disponíveis e trabalhados por sujeitos não escolarizados sobre o conceito de proporção.

A constante K , referida acima, é representativa do coeficiente de proporcionalidade e tem uma importância decisiva, em termos matemáticos, para a proporcionalidade, conforme demonstrado por Pezard (1985) com o raciocínio algébrico abaixo:

Se considerarmos apenas dois pares em correspondência (a, a') (b, b') , para os quais se

verifique a relação $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, teremos o seguinte:

$$\begin{array}{ll} a' = A \times a & \text{(O } A \text{ maiúsculo acima representa o coeficiente de} \\ b' = A \times b & \text{proporcionalidade).} \end{array}$$

Prosseguindo, é válido afirmar:

$$\begin{array}{ll} a'b = (A \times a) \times b & \text{ou seja: } a'b = A \ ab \\ b'a = (A \times b) \times a & \text{ou seja: } b'a = A \ ba \end{array}$$

Como $A \ ab = A \ ba$, podemos concluir que:

$a'b = b'a$

pobre por não deixar transparecer algumas relações de base essenciais para a compreensão da proporcionalidade

Temos portanto demonstrada a popular “**igualdade do produto em cruz**”. O interesse dessa igualdade reside no fato de que ela permite expressar a igualdade entre duas relações sem a necessidade de se considerar o valor (coeficiente de proporcionalidade A) dessas relações. Em termos da escola, essa relação é traduzida como: “*o produto dos extremos é igual ao produto dos meios*”; para uma relação qualquer do tipo $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ em que a propriedade acima se verifica, o professor então costuma afirmar: “*eis aí um exemplo de proporção*”. Ora, essa colocação não é de todo exata, pois podemos verificar que numa relação proporcional, pode-se permutar tanto os extremos quanto os meios: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

O objetivo desta dissertação de mestrado foi propor um conjunto de atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade, em sala de aula, buscando proporcionar às crianças caminhos para que possam evoluir de um pensamento ou estratégia mais intuitiva, de alcance limitado, como é a estratégia escalar, para estratégias funcionais e para outras estratégias formalizadas, de aplicação mais eficiente e mais geral, procurando-se manter todavia a compreensão da criança sobre as relações envolvidas nos problemas, e não apenas fornecer regras e modelos matemáticos de resolução de problemas de proporção. Para tal desenvolvemos um conjunto de atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade e promovemos encontros de intervenção com um experimentador. O objetivo final foi identificar em que medida este conjunto de atividades didáticas se sustenta como proposta didaticamente válida para o ensino da proporcionalidade na escola.

CAPÍTULO II

MÉTODO

O presente estudo teve como objetivo explorar um conjunto de atividades didáticas, em sala de aula, buscando proporcionar aos alunos situações que os auxiliassem a evoluir de um pensamento ou estratégia mais intuitiva, de alcance limitado, como é a estratégia escalar no âmbito das estruturas multiplicativas, para estratégias funcionais e para estratégias formalizadas, de aplicação mais eficiente e mais geral, como a regra-de-três e o cálculo do valor unitário. Tendo em vista tal objetivo, propôs-se o seguinte modelo metodológico para sua operacionalização:

2.1 Sujeitos:

Participaram do estudo 74 crianças cursando a 5ª. série do primeiro grau de uma escola particular da cidade do Recife, sujeitos estes que não haviam recebido ainda instrução formal sobre proporcionalidade. Este grupo foi composto por duas turmas de 5ª. série, A e B, com 37 alunos cada. Esta disposição escolar pré-existente foi aproveitada e, de forma aleatória, foram definidos os grupos controle (5ª. série B) e experimental (5ª. série A). Optando por esta formação natural dos grupos (controle e experimental) foram contudo realizadas verificações estatísticas, de forma a se ter assegurado o emparelhamento dos grupos, em relação à variável desempenho escolar prévio dos sujeitos, observando-se especificamente a média anual dos alunos na disciplina de matemática, obtida na série anterior. Desta forma, comparando-se a diferença de desempenho prévio dos alunos do grupo controle com os alunos do grupo experimental, não observou-se diferença significativa (U MANN-WITNEY bi-caudal = 593,0 , $p = 0,42$; T-Student = 0,99 , $p = 0,895$).

As variáveis intervenientes, idade e nível sócio-econômico, foram igualmente controladas, porém observou-se uma variável que diferenciava os sujeitos que compunham os

grupos. Os alunos diferenciavam-se quanto à origem escolar, ou seja, existiam alunos antigos provenientes da 4a. série primária da escola ora pesquisada e alunos “novatos”, recém ingressos nesta escola, provenientes de escolas outras da cidade do Recife.

Dos 37 alunos que compunham o grupo experimental 12 alunos eram “novatos”, enquanto no grupo controle apenas 9 eram novatos. Desta forma, verificações estatísticas foram realizadas focalizando-se os desempenhos dos alunos antigos e novatos. Tais verificações confirmaram uma diferença não-significativa quando comparados os alunos antigos com os alunos novatos do grupo experimental (U-MANN WHITNEY bi-caudal = 115,0 , $P = 0,2552$); uma diferença significativa a favor dos alunos antigos, quando comparados os desempenhos dos alunos antigos com os novatos do grupo controle (U-MANN WHITNEY bi-caudal = 59,0 , $P = 0,0221$); uma diferença significativa a favor dos alunos novatos do grupo experimental, quando comparados os desempenhos dos alunos novatos do grupo controle com os novatos do grupo experimental (U-MANN WHITNEY bi-caudal = 22,0 , $P = 0,0224$).

Desta forma confirma-se, estatisticamente, que o desempenho dos alunos novatos do grupo experimental é significativamente melhor que o dos alunos novatos do grupo controle. Porém, quando a verificação estatística não os identifica, comparando-se a diferença de desempenho de todos os alunos do grupo controle (antigos e novatos) com os alunos do grupo experimental (antigos e novatos) essa diferença passa a ser não significativa.

2.2 Material:

2.2.1. Lápis e folhas de papel contendo problemas envolvendo proporcionalidade, que no seu conjunto formavam os protocolos de pré e pós-testes (ver anexo 1);

2.2.2. Lápis e papel contendo problemas envolvendo proporcionalidade, utilizados nos encontros de intervenção, formando no seu conjunto as atividades didáticas propostas para a compreensão da proporcionalidade (ver anexo 2);

2.3. Procedimento:

Os sujeitos foram submetidos inicialmente a um pré-teste, que tinha como objetivo avaliar em que nível eles se encontravam, quanto ao tipo de estratégia utilizada na resolução de problemas de proporcionalidade e o procedimento utilizado pelo mesmo para a sua solução. Uma análise diferenciada da estratégia de solução e o procedimento utilizado pelos sujeitos fez-se necessário uma vez que buscávamos identificar como o sujeito pensou ao resolver problema envolvendo proporcionalidade, e quais as alternativas de solução encontradas por ele para solucionar o problema, ou seja, qual a estratégia utilizada. Tal interesse em identificar o procedimento matemático utilizado pelos sujeitos para confirmarem as suas estratégias decorre da constatação feita por Vergnaud (1990), segundo o qual o procedimento de solução utilizado para resolver um problema muitas vezes é pouco explicitado (teoremas em ação), ou evidencia níveis diversos de elaboração. (Vergnaud, op. cit.)

Tanto o pré-teste, como também o pós-teste, ao qual os sujeitos foram submetidos ao final das atividades didáticas propostas, foram constituídos por uma série de problemas de proporcionalidade, incluindo-se problemas que poderiam ser facilmente resolvidos através da estratégia escalar, e problemas que poderiam ser mais facilmente resolvidos se adotada a estratégia funcional (ver anexo 1).

Os problemas foram inicialmente elaborados com níveis presumidamente crescentes de dificuldade envolvendo a compreensão da proporcionalidade. As estruturas a partir das quais os problemas foram montados é que definem o nível de complexidade e a necessidade

de uma elaboração mais sistemática e complexa de uma estratégia de solução para os mesmos, podemos visualizá-las melhor no quadro abaixo:

Quadro 1
Estrutura dos problemas utilizados nos pré e pós-teste com as respectivas estruturas subjacentes.

PROBLEMAS ⁴	ESTRUTURA	ESTRATÉGIA PARA RESOLUÇÃO
1	3 Kg → R\$ 7,00 9 Kg → x	Escalar do menor para o maior
2	10 chicletes → R\$ 3,00 x → R\$ 9,00	Escalar do menor para o maior
3	2 Kg → R\$ 4,00 x → R\$ 1,00	Escalar ou funcional do maior para o menor
4	24 ovos → R\$ 6,00 06 ovos → x	Escalar ou funcional do maior para o menor
5 e 6 (emparelhamento)	50g → R\$ 2,00 250g → R\$ 4,50	3 potes ---> R\$ 1,50 7 potes ---> R\$ 4,00
9	12m → 3d x → 7d	Funcional do menor para o maior
10	06 borrachas → R\$0,24 10 borrachas → x	Funcional do menor para o maior

Na tentativa de propor um conjunto de atividades didáticas para o ensino da proporcionalidade foram levadas em consideração as formas de resolução e as estratégias utilizadas pelos sujeitos (identificadas no pré-teste) e, só a partir do conhecimento das habilidades e dificuldades iniciais dos sujeitos iniciou-se a intervenção. O detalhamento deste conjunto de atividades, bem como a descrição dos passos seguidos pelo experimentador, durante a intervenção será melhor abordado e exemplificado em sessão específica (ver sessão 2.3.1.).

⁴ Inicialmente os instrumentos de avaliação pré e pós-teste continham 10 problemas, porém observamos que os problemas 7 e 8 nada informavam, uma vez que todos os sujeitos responderam corretamente e utilizaram a mesma estratégia. Desta forma, optamos pela retirada dos mesmos da análise de dados.

Estes problemas foram escolhidos de forma que, inicialmente, pudessem ser resolvidos pela utilização de estratégias escalares. Gradativamente foram introduzidos problemas que eram mais facilmente resolvidos pela solução funcional e problemas que não poderiam ser facilmente resolvidos sem o uso de algoritmos escritos ou da máquina de calcular. Uma preocupação sempre presente durante os encontros, foi a de criar situações que permitissem às crianças a análise das relações entre os números, buscando identificar as semelhanças e desigualdades das relações, de forma que fosse permitido aos sujeitos desenvolverem novas estratégias, em lugar de receberem sugestões sobre como proceder. Para isso, a discussão permanente e a explicação sobre por que e como cada criança chega a um resultado foi incentivada todo o tempo.

Os problemas foram inicialmente apresentados aos sujeitos em forma de jogos, onde estes deveriam encontrar as respostas corretas e descrever a estratégia utilizada para a resolução do problema, a cada resposta correta eram computados pontos, permitindo aos sujeitos competir entre si. Porém, o demasiado entusiasmo dos sujeitos que acertavam, somado ao desconforto daqueles que não obtinham a resposta correta, tornou inviável a manutenção da apresentação em forma de jogos, uma vez que o tempo previsto para os encontros, constantemente, extrapolava o planejado, prevendo-se uma intervenção com um número de encontros três vezes maior do que o planejado.

Sendo assim, a proposta de se trabalhar com o contexto de jogos, não foi por completo abandonada, mas restringiu-se apenas aos encontros que finalizavam determinadas conquistas de aprendizagem, ou seja, aos encontros que determinavam a passagem de um conjunto de atividades envolvendo problemas de proporcionalidade mais simples para os mais complexos.

O grupo experimental foi dividido em 07 subgrupos, (5 subgrupos de 5 alunos e 2 com 6 alunos), subgrupos estes não-artificiais, de vez que correspondiam a agrupamentos

prévios naturais dos sujeitos. Em sua maioria estes sujeitos possuíam uma característica em comum, o fato de que estudavam juntos, na mesma escola, há alguns anos, característica esta que é identificada como uma característica marcante desta escola, ou seja, propor a iniciativa dos alunos para o trabalho em grupo. A formação destes grupos seguiu critérios definidos pelos próprios alunos, tais como: proximidade de moradia, condições de deslocamento, laços sócio-afetivos e familiares, bem como, desempenho escolar, compromisso com o estudo e responsabilidade com as tarefas. A característica principal dos subgrupos foi identificada, portanto, como sendo a de laços sócio-afetivos e familiares formando com isso 06 subgrupos. Desta característica diferenciavam-se os alunos novatos e aqueles alunos que, mesmo sendo antigos, não apresentavam, ainda, vínculos sócio-afetivos com os demais alunos da turma. Estes alunos foram distribuídos nos demais subgrupos, na tentativa de inseri-los nos grupos já formados, porém um sétimo subgrupo teve que ser composto com 05 alunos, dos quais 03 eram alunos novatos e 02 alunos antigos que tiveram seu acesso “negado” aos demais grupos.

Tínhamos como objetivo, ao trabalharmos com os alunos subdivididos em grupos, estimular a interação e o auxílio mútuo dos membros dos grupos na resolução dos problemas, incentivando-os a trabalharem coletivamente como em uma equipe, onde as diferentes concepções e formas de resolver os problemas pudessem ser confrontadas e eventualmente compartilhadas por todos do grupo, auxiliando-se mutuamente.

Durante os encontros e a apresentação dos problemas uma preocupação constante do experimentador foi a de não propor fórmulas, nem métodos de ensino, mas propor sim um *contrato de trabalho* com os sujeitos (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1988), segundo o qual, antes de responderem os problemas, os mesmos tentassem entender o que se está pedindo e construísem uma **notação**, que nada mais é do que uma representação esquematizada de um problema de proporção. Por exemplo, Suzana foi a feira e comprou 3

laranjas por 10 centavos. Quanto ela iria pagar por 9 laranjas? Uma possível representação deste problema poderia ser:

3 laranjas	—————→	10 centavos
9 laranjas	—————→	X (valor ausente)

A representação do problema foi o primeiro passo para a ampliação da compreensão da proporcionalidade como uma relação entre relações, ou seja, a compreensão do problema como uma relação de segundo grau. Segundo Pereira Neto, de Moura & Schliemann (1995) a representação do problema de proporcionalidade em forma de notação tanto pode ser viável para estratégias escalares, como para as funcionais.

Os encontros com o grupo experimental ocorreram uma vez por semana, durante 16 semanas, perfazendo um total de 16 encontros ou 16 horas de atividades. A duração deste trabalho de intervenção foi prevista para um semestre, considerando-se, também, o tempo necessário à aplicação e análise do pré-teste e do pós-teste. Porém, devido às programações escolares e às dificuldades de infra-estrutura às quais esta sujeito todo o pesquisador que se propõe a pesquisar em sala de aula, este tempo previsto foi extrapolado. Na verdade a duração do trabalho de intervenção, contando-se a aplicação do pré e pós-teste foi de três bimestres, ou um semestre e meio do calendário escolar.

2.3.1 Conjunto de atividades didáticas proposto para o ensino de proporcionalidade.

O objetivo geral ao propormos este conjunto de atividades didáticas para o ensino do conceito de proporcionalidade foi facilitar às crianças a compreensão e utilização de estratégias formalizadas, de aplicação tão eficiente quanto a regra de três, procurando favorecer a compreensão da criança sobre as relações envolvidas nos problemas. Nossa expectativa com isso foi conseguir, ao final do estudo, que as crianças, envolvidas nas

referidas atividades, fossem capazes de representar e solucionar problemas relativamente complexos de proporcionalidade, que necessitassem de estratégias formalizadas (como a regra de três ou o cálculo do valor unitário), mas que, diferentemente das crianças que recebem a instrução escolar-padrão sobre proporcionalidade (regra de três), demonstrassem a compreensão das relações envolvidas nos problemas.

Para isso foi desenvolvido um conjunto de atividades baseadas em problemas envolvendo proporcionalidade, com níveis crescentes de dificuldades. Estes problemas estavam subdivididos em quatro principais momentos, que representavam os quatro principais níveis de dificuldade (ver a descrição destes níveis no cap. 1 pp. 44 a 48). Estes momentos (passos) foram trabalhados ao longo dos 16 encontros propostos para a intervenção do experimentador, sendo destinados quatro encontros para cada momento (passo). Tais passos podem ser assim descritos:

1o. PASSO

Compreendeu ao todo quatro encontros e tinha como objetivos desenvolver atividades que possibilitassem aos sujeitos a compreensão da proporcionalidade como implicando numa relação entre as variáveis do problema. A proposta inicial foi trabalhar com o cálculo da tabuada contextualizada; a esta atividade foram destinados dois encontros, e consistia em expor as crianças a problemas que apresentavam em sua constituição uma tabela, onde podia-se encontrar a quantidade de produtos de um lado e os preços do outro. Porém, estes problemas só informavam acerca da primeira relação, o preço de um produto, por exemplo: 1 caderno custa 3 reais, solicitando-se à criança descobrir o valor de todos os outros cadernos. O grau de dificuldade aumentava para tabuadas de 5 e 7 até uma tabela mais complexa, onde necessitava-se a compreensão das relações entre as variáveis envolvidas para que a solução do problema fosse encontrada. (ver anexo 2, itens 2.1.1. a 2.1.5). O objetivo desta atividade era

fazer com que os sujeitos compreendessem que as variáveis envolvidas no problema encontravam-se relacionadas entre si (ver quadro ilustrativo 2, situação 1, à pág. seguinte);

2o. PASSO:

Buscou-se aqui, desenvolver as estratégias escalares de solução, tanto do menor para o maior, como do maior para o menor com valor ausente tanto na variável preço como na variável item (situação 2), conforme exemplificado no quadro ilustrativo 2 na página seguinte. Este procedimento buscava fornecer subsídios para que a criança compreendesse a relação existente entre as variáveis utilizando-se problemas com situações contextualizadas (ver anexo 2, itens 2.2 a 2.4).

O objetivo de trabalharmos esta diferenciação dos tipos de problemas (do menor para o maior e do maior para o menor) foi desenvolver nos sujeitos a compreensão de que a mudança da estrutura do problema (ver quadro ilustrativo 3) necessita, para a sua solução, uma mudança na tipo de raciocínio, pois as transformações paralelas (adicionando ou multiplicando) que envolvem a descoberta de números múltiplos, não mais são possíveis, o problema exige a compreensão de que estas transformações já foram realizadas e é preciso agora reverter o processo para descobrir o par de variáveis, ou o menor valor das variáveis que originou as transformações, ou seja, os múltiplos antecedentes.

Quadro 2

Situação 1 (referente ao 1o. passo)	Situação 2 (referente ao 2o. passo)
1 caderno ----- R\$ 3,00	1 ovo.....R\$
2 cadernos ----- R\$	3 ovos.....R\$ 12,00
3 cadernos ----- R\$	ovos.....R\$ 24,00
4 cadernos ----- R\$	9 ovos.....R\$
5 cadernos ----- R\$	12 ovos.....R\$
6 cadernos ----- R\$	ovos.....R\$ 60,00
7 cadernos ----- R\$	ovos.....R\$ 72,00
8 cadernos ----- R\$	21 ovos.....R\$
9 cadernos ----- R\$	ovos.....R\$ 96,00
10 cadernos ----- R\$	27 ovos.....R\$
	ovos.....R\$
	ovos.....R\$ 132,00
	36 ovos.....R\$

Quadro 3

Menor → Maior	Maior → menor
3 custam 10	12 custam 40
6 custam 20	9 custam 30
9 custam 30	6 custam 20
12 custam 40	3 custam 10

3o. PASSO:

Partindo de relações que envolvessem múltiplos de uso freqüente no dia-a-dia (por exemplo, a *dúzia* e seus múltiplos; a unidade de medida quilogramas com seus múltiplos e sub-múltiplos, como o *meio quilo*), passando por relações que envolvessem múltiplos menos usuais, buscou-se desenvolver nos sujeitos, a compreensão de relações que não envolvessem valores múltiplos entre si, ou seja, relações que exigissem um raciocínio mais elaborado, onde as transformações paralelas (estratégia escalar) não fossem mais eficientes para a resolução do problema (ver quadro ilustrativo 4).

Quadro 4

Quadro 4-A	Quadro 4-B
Relação do maior → menor com múltiplos comuns	Relação do maior → menor com múltiplos menos usuais
24 ovos → R\$ 6,00	1 cx. de tomate (28 kg) → R\$ 20,00
6 ovos → R\$?	7 kg de tomate → R\$?
ou	ou
2 kg de feijão → R\$ 4,00	1 cx. de chicletes (36 und.) → R\$ 30,00
$\frac{1}{2}$ kg de feijão → R\$?	9 chicletes → R\$?

Quadro 4-C

Relação do maior → menor envolvendo valores não múltiplos entre si
2 dúzias de laranja → R\$ 4,80
10 laranjas → R\$?

Este último tipo de problema necessita de um raciocínio mais sofisticado que estabeleça uma relação entre as variáveis e o valor unitário, como passo intermediário para o cálculo desejado:

2 dúzias de laranja	→	R\$ 4,80
1 laranja	→	R\$ 0,20
10 laranjas	→	R\$ 2,00

A partir desta realidade introduzimos os problemas de cálculo de compra mais vantajosa (ver anexo 2, item 2.5.), pois este tipo de problema não exige do sujeito a busca de um valor ausente, simplesmente são formuladas duas relações, produto-preço, em contexto de compra e pedido às crianças decidir qual compra foi mais vantajosa, por exemplo:

Num supermercado D. Carmem comprou 3 potes de margarina de 50g e pagou a quantia de R\$ 1,50, em outro supermercado D. Maria comprou 7 potes e pagou a quantia de R\$ 4,00. Em qual dos supermercados o pote de margarina custava mais barato?

O objetivo destas atividades foi promover a compreensão do sujeito de que nestes problemas as variáveis preços e itens não mais podem ser trabalhadas isoladamente, como na estratégia escalar, mas estão agora relacionadas, necessitando que o sujeito encontre a razão existente entre as duas variáveis preços e itens (Conforme quadro ilustrativo 5, à pág. seguinte). Com isso, introduzimos o cálculo do valor unitário, uma *variável didática* (Brousseau, 1983) considerada relevante para a compreensão da estratégia funcional.

Quadro 5

D. Carmem:	D. Maria:
3 potes → R\$1,50	7 potes → R\$4,00
1 pote → ?	1 pote → ?

4o. PASSO:

O passo final teve como objetivo propor atividades no sentido de operacionalizar a utilização da estratégia funcional, aqui representada pelo cálculo do valor unitário. Começando por problemas simples (ver anexo 2, item 2.6), tais como:

4 bombons custam 20 centavos. Quanto custa um bombom?

5 kg de arroz custam R\$2,00. Quanto custa 1 kg de arroz?

15 canetas custam R\$5,00. Quantas canetas compro com um real?

Objetivando chegar a compreensão de problemas mais complexos, onde o cálculo do valor unitário, apesar de não ter sido influenciado diretamente pelo experimentador, tornou-se essencial para a resolução do problema, já que a estrutura de apresentação do mesmo impossibilitava a utilização de uma estratégia escalar para solucioná-lo (ver anexo 2, item 2.7). Por exemplo:

Um pedreiro faz um muro de 12 metros de comprimento em 3 dias. Quantos metros ele iria construir se trabalhasse 7 dias?

Numa livraria meia dúzia de borrachas custam 24 centavos. Quanto irão custar 10

borrachas?

Ao final dos encontros foi realizado um pós-teste com todos os sujeitos, do grupo experimental (que participou dos encontros com o experimentador) e do grupo controle (que não participou dos encontros), uma vez que o objetivo deste estudo visava a comparação dos desempenhos dos dois grupos antes (pré-teste) e após (pós-teste) os encontros de intervenção, buscando analisar o efeito da intervenção e como esta repercutiu na performance dos sujeitos. Este tipo de análise foi apenas uma dentre outras formas a que recorreremos, conforme explicitado no capítulo seguinte, referente à análise dos resultados.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O presente estudo teve como objetivo explorar um conjunto de atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade, em sala de aula, buscando proporcionar aos alunos caminhos para que pudessem passar de um pensamento ou estratégia mais intuitiva, de alcance limitado, como é a estratégia escalar, para estratégias funcionais e para outras estratégias formalizadas, de aplicação mais eficiente e mais geral.

Os protocolos dos sujeitos que participaram do presente estudo, abrangendo as respostas dos sujeitos quando da aplicação dos pré e pós-teste, foram submetidos a duas abordagens diferentes, porém interdependentes de análise: uma análise descritiva multidimensional e uma análise descritiva-inferencial unidimensional. Convém contudo salientar que não se procedeu a uma análise compartimentalizada, buscando-se, ao contrário, a partir da análise multidimensional dos dados, enriquecer ou explicitar algum aspecto específico, com base em instrumentos inferenciais não-paramétricos.

Para a realização das análises multi e unidimensional, as respostas dos sujeitos sofreram uma análise classificatória prévia, segundo grade de categorização de variáveis, explicitada a seguir.

3.1. Grade de Categorização

As respostas dos sujeitos nos pré e pós-teste dos dois grupos, controle e experimental, foram classificadas segundo três instâncias de categorização: **tipo de resposta** (análise do protocolo em termos de acerto ou erro); **estratégia adotada**, (tipo de estratégia escolhida

pelos sujeitos para a resolução do problema); **procedimento de solução**, referente ao tipo de procedimento de solução escolhido pelo sujeito para levar a efeito sua estratégia de solução.⁵

Esta classificação serviu para todos os problemas que compunham os pré e pós-teste. Para as três instâncias de categorização foram detalhadas as modalidades de categorias, conforme podemos observar a seguir:

3.1.1 Instância de Categorização 1: Tipo de Resposta

Buscou-se aqui analisar o tipo de resposta dada pelos sujeitos quando da resolução dos problemas em termos basicamente de acerto/erro, conforme podemos observar no quadro 6, na página seguinte.

A categoria **correta** inclui as respostas corretas dos problemas, entendendo-se como tais: as respostas apenas numéricas, indicação da resposta do problema, sem uma explicação ou descrição do procedimento de solução; e as respostas apresentando cálculos para resolução e/ou procedimento de solução explícito.

A categoria **errada** inclui as respostas incorretas dos problemas, entendendo-se como tais: as respostas apenas numéricas incorretas, indicação da resposta do problema, sem uma explicação ou descrição do procedimento de solução; e as respostas apresentando cálculos para resolução e/ou procedimento de solução explícito que não chegava à resposta correta.

⁵ A diferenciação entre estratégia e procedimento de solução é melhor exemplificada no capítulo II, pp.51

Quadro 6

Descrição da categoria de análise Tipo de Resposta

Códigos Numéricos ⁶	Modalidades da Categoria	Descrição
01	Correta	Resposta correta, em termos do valor numérico fornecido, com ou sem explicação do procedimento de solução
02	Errada	Resposta errada, , em termos do valor numérico fornecido, com ou sem explicação do procedimento de solução
08	Erro de procedimento	A estratégia escolhida para a solução do problema foi correta, mas o sujeito aplica procedimento de solução iadequado.
09	Erro de interpretação	A estratégia escolhida para a solução do problema foi correta, mas o sujeito erra ao interpretar os dados do problema.
12	Não respondeu	problemas deixados em branco, ou tentativas com desistências.

As categorias **erro de procedimento** e **erro de interpretação** são subcategorias da categoria **errada**, incluindo sujeitos que na abordagem inicial do problema, construíram uma estratégia de solução adequada para o mesmo, mas que, durante o procedimento de solução ou interpretação dos dados do problema, incorreram em erro. A proposta de manter-se estas duas categorias deveu-se, tão somente, ao fato de podermos utilizá-las como dados qualitativos de análise individual, uma vez que o percentual de ocorrência destas categorias mostrou-se pouco expressivo, como veremos a seguir. (ver anexo 4)

⁶ Esta rotulação numérica remonta a uma classificação inicial que sofreu modificações posteriores, mas, por comodidade, foi conservada, acarretando numa descontinuidade dos rótulos numéricos.

A categoria **Não respondeu** inclui as ausências de respostas ou de procedimentos explícitos de solução, assim como tentativa de solução, com posterior desistência.

3.1.2. Instância de categorização 2: Estratégia Adotada

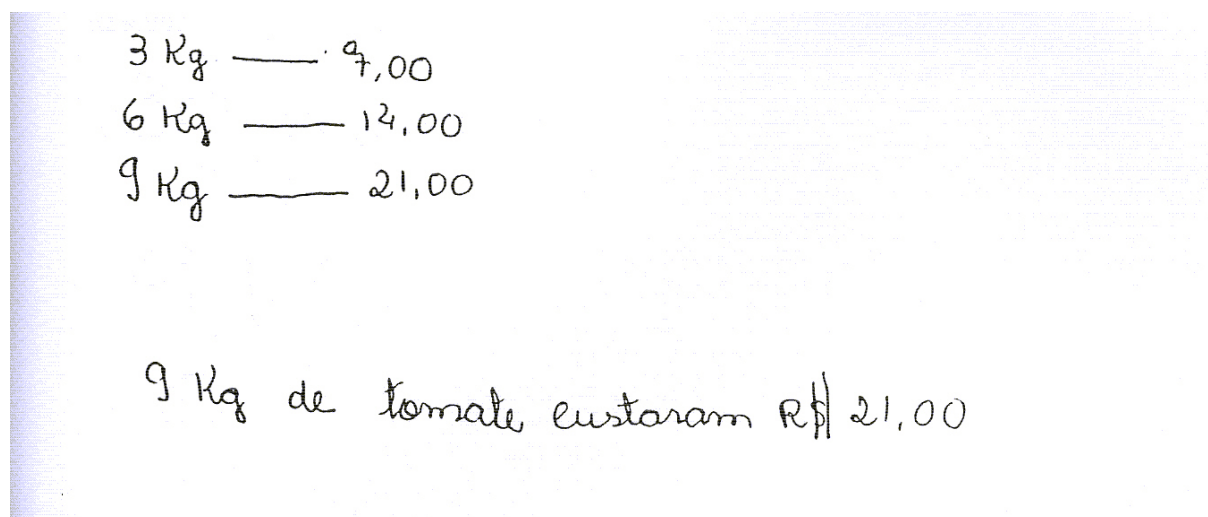
Tal instância teve como objetivo analisar o tipo de estratégia prévia escolhida pelos sujeitos para a resolução dos problemas, conforme detalhado no quadro 7, a seguir:

Quadro 7

Descrição da categoria de Análise - Estratégia Adotada

Códigos Numéricos	Modalidades da Categoria	Descrição
01	Escalar aditiva	Sujeitos que utilizam a estratégia escalar aditiva para encontrar a solução do problema
02	Escalar multiplicativa	Sujeitos que utilizam a estratégia escalar multiplicativa para encontrar a solução do problema
06	Funcional	Sujeitos que utilizam a estratégia funcional para encontrar a solução do problema
12	Aproximação	Sujeitos que encontram a solução do problema através de estratégias de aproximação, explícitas ou não
15	Não respondeu	Ausência de resposta explícita (registrada no protocolo)

As categorias **Escalar aditiva e multiplicativa** incluem as respostas dos sujeitos, que mobilizaram para a solução do problema uma estratégia de solução escalar, que se diferencia em estratégias aditivas e multiplicativas. Conforme exemplos 1 e 2 abaixo:

Figura 1**Exemplo de resposta Escalar aditiva****Problema 1. 3kg de tomate custam R\$ 7,00. Quanto custam 9kg de tomate?**

A estratégia escalar aditiva consiste em que cada variável permaneça independente da outra, os seus valores só se mantêm proporcionais pelo fato de que transformações paralelas são realizadas sobre ambas as variáveis. Segundo Vergnaud (1991) este tipo de estratégia corresponde a concepção de isomorfismo de medidas.

Já a estratégia escalar multiplicativa (ver figura 2 na pág. Seguinte) envolve uma concepção de operador-escalar, que funciona nos problemas de proporção como operadores multiplicativos. A criança, ao invés de realizar transformações paralelas, encontra o operador-escalar das variáveis para solucionar o problema.

Figura 2

Exemplo de Estratégia Escala Multiplicativa

Problema 2. 10 chicletes custam R\$ 3,00. Quantos chicletes posso comprar com R\$ 9,00?

Handwritten work showing the calculation of the number of candies that can be bought with R\$ 9.00, given that 10 candies cost R\$ 3.00. The work includes the text "30 chicletes" and two multiplication setups: $9 \overline{) 3}$ and $\begin{array}{r} 3 \\ \times 10 \\ \hline 30 \end{array}$.

A categoria **Funcional** inclui as respostas dos sujeitos que mobilizaram para a solução dos problemas um estratégia de solução funcional. Este tipo de estratégia caracteriza-se pelo fato de que os valores de uma variável são tratados como uma função dos valores da outra e calculados pela multiplicação de uma constante pelo valor da variável independente. Ou seja, na figura 3 (ver próxima página) a criança calcula a função $x = f(y)$, onde a f , que é o operador-funcional do problema, é igual a 4. Este tipo de estratégia se difere da estratégia escalar, pois aqui as variáveis são mantidas conectadas, o operador-funcional (f) passa de uma categoria para outra:

porém são indicações não-sistemáticas ou sem uma consistência que pudessem ser interpretadas como uma estratégia “conceitual” de solução. (ver exemplo 5)

Figura 4

Exemplo de Estratégia de Aproximação sem cálculos

Problema 5. Num supermercado D. Rita comprou um pote de café solúvel de 50g por R\$ 2,00, enquanto D. Marta comprou um pote de 250g por R\$ 4,50. Em qual dos supermercados tinha melhor preço?

D. Marta Era frq de cablog

Figura 5

Exemplo de Estratégia de Aproximação com registros numéricos

Problema 1. 3kg de tomate custam R\$7,00. Quanto custam 9kg de tomate? *21*

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 3 \\ \hline 21 \end{array}$$

A categoria **Não Respondeu** inclui as ausências de respostas explícitas (registradas no protocolo), ou seja, ausência completa de registros. Esta modalidade de categorização caracteriza-se pela desistência ou não tentativa de solução do problema. O problema é deixado em branco ou o sujeito desiste antes de chegar à resposta.

3.1.3. Instância de Categorização 3: Procedimento de Solução.

Buscou-se aqui analisar o tipo de procedimento de solução escolhido pelo sujeito para verificar a eficácia de sua estratégia de solução, conforme detalhado no quadro 8, a seguir:

Quadro 8

Descrição das categorias de análise- Procedimento de Solução

Códigos Numéricos	Modalidades da Categoria	Descrição
01	Cálculo do valor unitário	Calcular o valor da unidade, quantos compra com R\$ 1,00 ou quanto custa 1 item do produto
02	Cálculo da razão escalar	Calcular a constante K de determinada razão, num procedimento de solução escalar
03	Cálculo da razão funcional	Calcular a constante K de determinada razão, num procedimento de solução funcional
04	Cálculos sem explicação	Soma, multiplicação ou divisão dos dados do problema sem explicação.
07	Operação escalar	Opera escalarmente, somando ou subtraindo os termos do problema.
15	Emparelhamento	Procedimento de transformar umas das relações, até obter um emparelhamento das relações envolvidas no problema para posterior comparação.
17	Não explícito	Para os problemas com ausência de procedimento explícito.
21	Não responde	Ausência de resposta explícita (registrada no protocolo)

A categoria **Cálculo do Valor Unitário** descreve o procedimento de solução que envolve o cálculo da unidade, na tentativa de encontrar o valor ausente da relação

proporcional o sujeito encontra o valor da unidade, para a partir daí encontrar o valor desejado. Conforme figura 6:

Figura 6

Exemplo de cálculo do valor unitário

Problema 6. Num supermercado D.Carmem comprou 3 potes de margarina de 50g e pagou a quantia de R\$ 1,50, em outro supermercado D.Maria comprou 7 potes e pagou a quantia de R\$ 4,00. Em qual dos supermercados o pote de margarina custava mais barato?

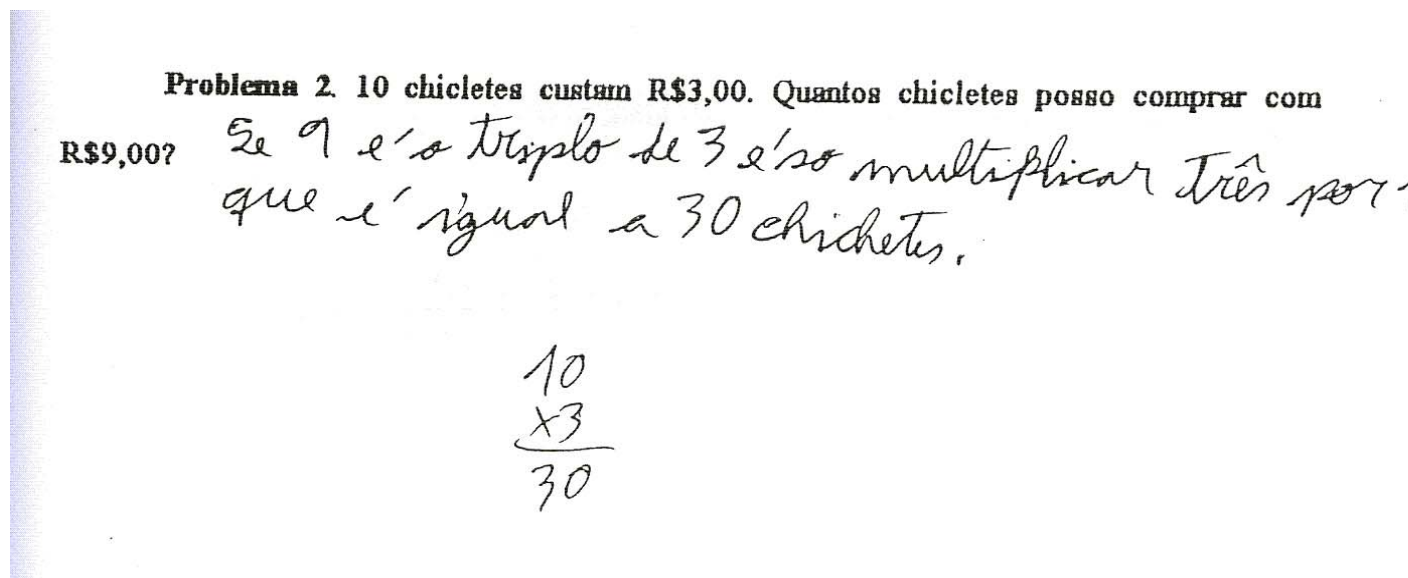
3		
50g	—	1,50
1p	—	0,50
7		
50g	—	4,00
1p	—	0,60

O supermercado de D.Carmem.

A categoria **Cálculo da Razão Escalar** descreve o procedimento de solução que envolve o cálculo de uma constante K de determinada razão, a partir da divisão de um dos lados da relação, caracterizando-se como um procedimento de solução envolvendo para tal uma estratégia escalar, conforme figura abaixo:

Figura 7

Exemplo de cálculo da razão escalar



A categoria **Cálculo da Razão Funcional** descreve o procedimento de solução que envolve o cálculo de uma constante K de determinada razão, porém considerando-se os dois lados da relação (preço e item) na tentativa de encontrar o valor ausente da relação proporcional, caracterizando-se como um procedimento de solução funcional, conforme figura 8:

A categoria **Cálculo sem Explicação** descreve o procedimento de solução dos sujeitos que resolvem os problemas segundo a estratégia de aproximação, “chute”, observando-se registros numéricos, porém desordenados e sem uma consistência “conceitual” identificável. (Ver figura 5, pág. 67)

A categoria **Operação Escalar** descreve o procedimento de solução dos sujeitos que utilizaram estratégias escalares (aditiva ou multiplicativa) para resolverem os problemas. Tal procedimento consiste em isolar as variáveis envolvidas nos problemas, para assim proceder as transformações paralelas em ambas (por exemplo: itens e preços) de forma que se obtenha, no final, a relação desejada (ver figuras 1 e 2 pág. 66)

Figura 8

Exemplo de cálculo da razão funcional

Problema 10. Numa livraria meia dúzia de borrachas custam 24 centavos. Quanto irão custar 10 borrachas?

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 6} \\ - 0 \overline{) 4} \end{array} \quad 24 \times 4 = 96$$

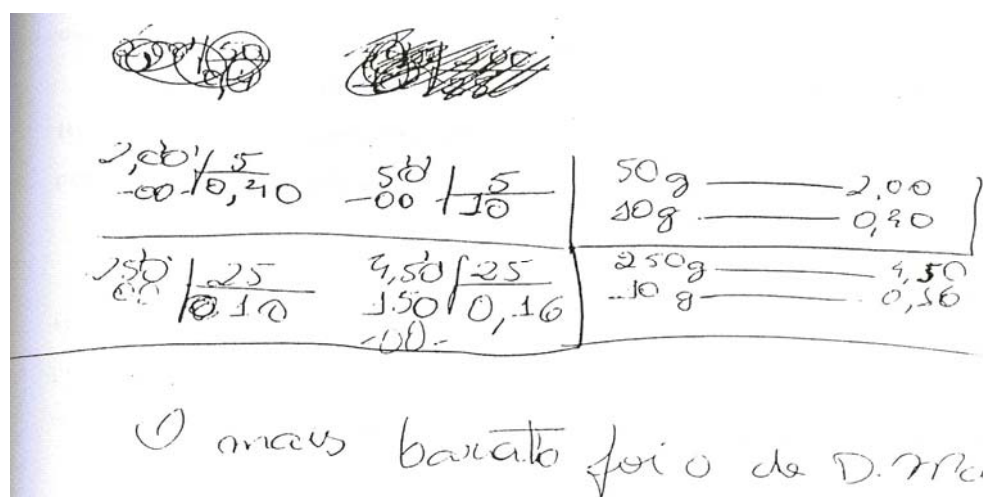
R - R\$ 0,40.

A categoria **emparelhamento** envolve a transformação de relações previamente definidas, com o objetivo de emparelhá-las para uma posterior comparação. A tarefa do sujeito é compreender que as variáveis se relacionam e encontrar a razão existente entre as duas variáveis, em ambas as relações. Esta categoria informa que a estratégia utilizada pelos sujeitos, que pode ser escalar ou funcional, tinha como objetivo emparelhar as relações envolvidas no problema, buscando uma posterior comparação das mesmas, conforme figura 9 a seguir:

Figura 9

Exemplo da categoria de emparelhamento

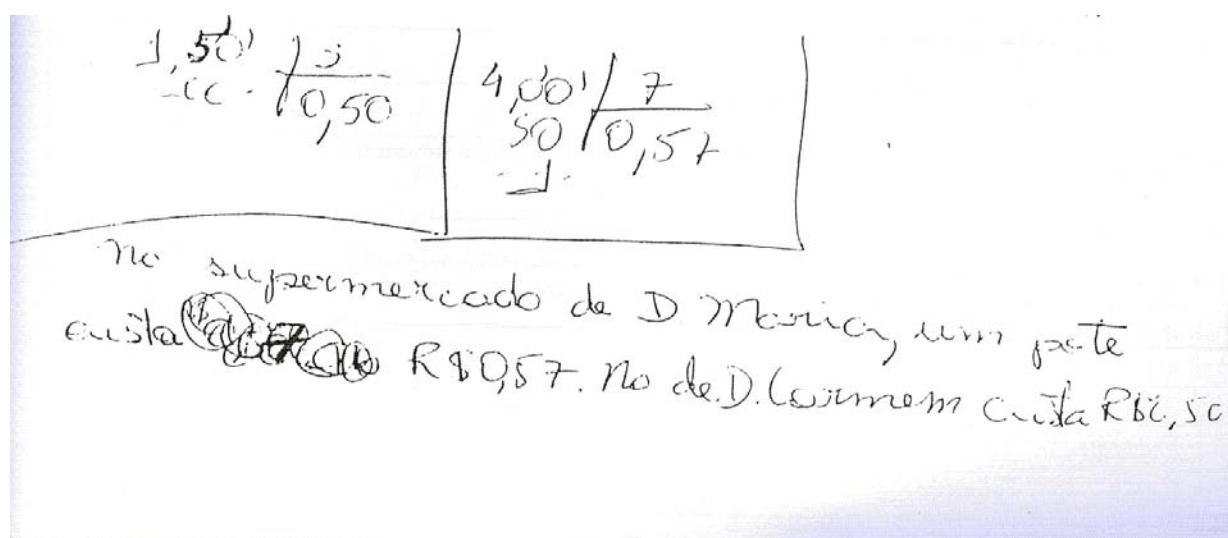
Problema 5. Num supermercado D.Rita comprou um pote de café solúvel de 50g por R\$ 2,00, enquanto D.Marta comprou um pote de 250g por R\$ 4,50. Em qual dos supermercados tinha melhor preço?



$2,00 \overline{) 5}$ $-00 \underline{10} $ $00 \underline{10} $ 00	$4,50 \overline{) 25}$ $-00 \underline{10} $ $150 \underline{100} $ 00	<table> <tbody> <tr> <td>50g</td> <td>—</td> <td>2,00</td> </tr> <tr> <td>10g</td> <td>—</td> <td>0,40</td> </tr> </tbody> </table>	50g	—	2,00	10g	—	0,40
50g	—	2,00						
10g	—	0,40						
<table> <tbody> <tr> <td>250g</td> <td>—</td> <td>4,50</td> </tr> <tr> <td>10g</td> <td>—</td> <td>0,18</td> </tr> </tbody> </table>			250g	—	4,50	10g	—	0,18
250g	—	4,50						
10g	—	0,18						

O mais barato foi o de D. Marta.

Problema 6. Num supermercado D.Carmem comprou 3 potes de margarina de 50g e pagou a quantia de R\$ 1,50, em outro supermercado D.Maria comprou 7 potes e pagou a quantia de R\$ 4,00. Em qual dos supermercados o pote de margarina custava mais barato?



$1,50 \overline{) 3}$ $-00 \underline{10} $ 00	$4,00 \overline{) 7}$ $50 \underline{10} $ 00
---	--

No supermercado de D. Maria, um pote custa R\$ 0,57. No de D. Carmem custa R\$ 0,50.

Esta categorização refere-se especificamente as respostas dos sujeitos aos problemas 5 e 6, problemas de compra mais vantajosa, onde o objetivo não é encontrar o valor ausente, as relações foram previamente definidas, cabendo ao sujeito compará-las

A categoria **Não Explícito**, caracteriza os problemas com ausência de procedimento explícito, identificando-se apenas respostas numéricas, mas com ausência completa de registros nos protocolos. Esta categoria de procedimento descreve uma categoria de estratégia de **Aproximação**.

Finalmente, a categoria **Não Responde** que descreve a estratégia de solução **Não Respondeu**. Esta categoria caracteriza-se pela desistência ou não tentativa de solução do problema. O problema é deixado em branco ou o sujeito desiste antes de chegar à resposta.

Podemos observar que as três instâncias aqui detalhadas estão interrelacionadas entre si, a cada resposta correspondendo um tipo de estratégia e, conseqüentemente, um procedimento de solução para a mesma. Desta forma, podemos construir um quadro de correspondência destas instâncias (quadro 9) para facilitar o entendimento das mesmas.

Quadro 9

Quadro de Correspondência das Categorias

Modalidades de categorias	Formas de Correspondência							
Tipo de resposta	Correta/errada							
Estratégia Adotada	Escalar Aditiva/Multiplicativa			Funcional			Aproximação	
Procedimento de solução	Cálculo da razão Escalar	Operador escalar	Emparelhamento	Cálculo do Valor Unitário	Cálculo da razão Funcional	Emparelhamento	Cálculo sem explicação	Cálculo Não-Explícito

Tendo em vista as modalidades de categorias acima explicitadas, seus detalhamentos, bem como o grau de correspondências entre elas, procedeu-se à realização de análises multi e unidimensionais, conforme detalhado nas sessões seguintes.

3.2. Análise Descritiva Multidimensional

Os dados obtidos no pós-teste, para os dois grupos (controle e experimental), foram inicialmente submetidos a análise descritiva multidimensional do tipo Classificação Hierárquica Ascendente, complementada por análise fatorial de correspondência ⁷

3.2.1 Classificação Hierárquica Ascendente

Trata-se de uma estratégia de análise que possibilita a visualização de uma eventual estrutura global, em termos de classes e sub-classes, para um conjunto complexo de dados, ou seja, um conjunto de informações oriundas de fontes diversas (variáveis diversas - respostas a vários itens, por exemplo), constituintes do instrumento de estudo proposto. Tal visualização global é por isso dita multidimensional, pois possibilita a reflexão sobre todo o acervo de

⁷ - Para realização desse tipo de análise, recorreu-se ao programa ANCORR (Analyse des correspondances) da bateria ADDAD (Association pour le développement de l'analyse de données), precedido pelo programa de preparação de dados DS-3, desenvolvido por Denys Corroyer. Para referência acerca dessas ferramentas de análise de dados, ver Bouroche & Saporta (1980), Fénelon (1981), Corroyer, Rouanet, Guyigues & Mathieu (1988) e Da Rocha Falcão (1997). A classificação Hierárquica Ascendente foi realizada com o programa CAH, da mesma bateria acima mencionada.

informações simultaneamente, ao invés da análise passo a passo, variável por variável, que caracteriza a análise unidimensional tradicional. A explicitação interpretativa da estrutura global acima referida é construída a partir da interpretação de elementos de resumo de informações denominados: Classes (Classificação Hierárquica Ascendente), completados por dados oriundos da AFC (Análise Fatorial de Correspondência) ⁸.

Podemos afirmar que foram utilizados dois tipos de análise multidimensional:

- a) uma análise principal, a Classificação Hierárquica Ascendente (Cluster Analysis), também denominada “Árvore” de classes. Este tipo de análise permite uma visualização global das variáveis possibilitando identificarmos os dados e consequentemente os sujeitos, compondo-se em grupos, ou melhor, agrupados em classes, em níveis descendentes de generalidade e abrangência:
- b) uma análise auxiliar, a Análise Fatorial de Correspondências, que nos fornecem fatores, modalidades de variáveis e as contribuições dessas modalidades para a composição dos fatores.

O uso das duas análises possibilita que as informações se complementem umas às outras, desta forma procederemos a descrição da análise multidimensional e sempre que possível relacionaremos as informações desta análise com as informações obtidas pela AFC.

O objetivo desta pesquisa visava a comparar os dois grupos de sujeitos (controle x experimental) propondo como hipótese que, após os encontros com o experimentador (atividades didáticas propostas), aplicando-se o pós-teste o grupo experimental apresentaria

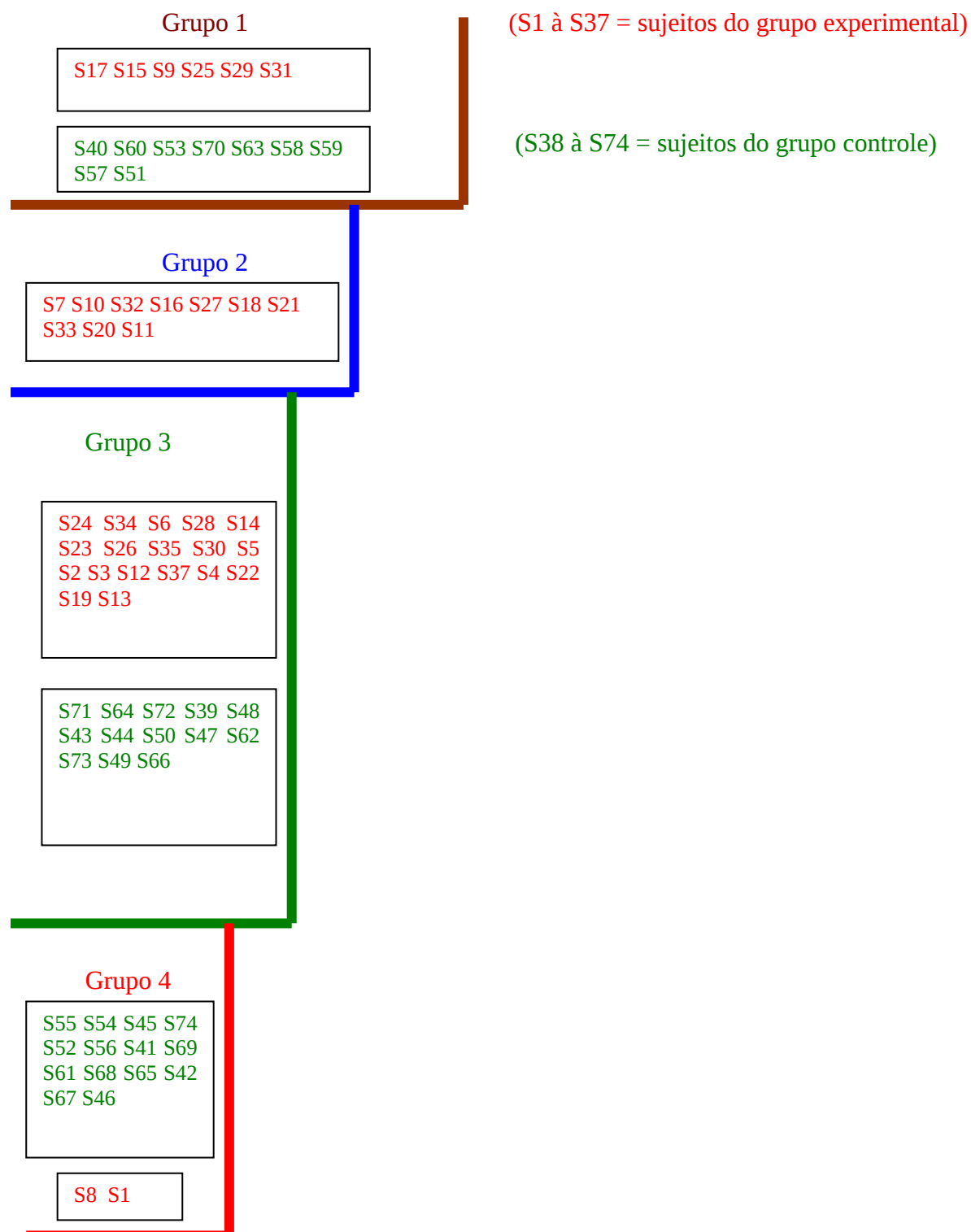
⁸ Para acesso a mais detalhes acerca de tal ferramenta, ver anexo 3

desempenho significativamente diferente do desempenho do grupo controle (cujos sujeitos não participaram dos encontros). Buscamos interpretar a análise multidimensional, tentando identificar os sujeitos que compõem cada uma das categorias principais, de que forma eles se correspondem e porque eles diferem dos demais sujeitos que compõem as demais classes da árvore.

A árvore de classificação proposta pelo instrumento de análise compõe-se de quatro principais classes (conforme ilustrado na figura 1, abaixo). Cabe salientar que tais agrupamentos foram construídos algoritmicamente pelo programa informatizado, com base no conjunto global de respostas de cada sujeito. Coube-nos, a partir de tais categorias, interpretar psicologicamente tais agrupamentos, o que explicitamos a seguir:

1. Numa análise inicial os sujeitos que compõem o primeiro grupo ou classe, estão misturados quanto ao grupo de origem (experimental x controle). Este grupo comporta 16 sujeitos, destes 06 são sujeitos do grupo experimental e 10 do grupo controle. Analisando em detalhes as produções destes sujeitos identificamos que os mesmos se assemelham pelo fato de responderem os problemas utilizando-se da estratégia **Aproximação** para a solução dos problemas, bem como os procedimentos de solução **Cálculo Sem Explicação e Não-Explícito**. Conforme descrito anteriormente (ver cap. 3 pp. 66 e 69), a ocorrência deste tipo de estratégia cruzada com tais procedimentos de solução, descrevem sujeitos que apresentam dificuldade de explicitar uma estratégia de solução ou mesmo ordenar coerentemente um procedimento de solução. A este tipo de estratégia denominou-se anteriormente, estratégia de “chute”, estratégia esta que envolve para a solução do problema um pensamento intuitivo e/ou estimativo e/ou de suposição.

Figura 10

Ilustração da árvore de classificação⁹

⁹ A árvore de dados original encontra-se no anexo 6

Quanto a modalidade de categoria **tipo de resposta** observou-se que: segundo a análise multidimensional de contribuição (ou AFC_ Análise fatorial de correspondência), à exceção dos problemas 9 e 10, esta modalidade de categoria pouco contribuiu para a formação do grupo, uma vez que a maioria dos sujeitos deram o mesmo tipo de resposta, incorreta. Podemos afirmar que o grau de contribuição desta modalidade de categoria para a formação dos grupos foi quase nula¹⁰. Isso confirma a observação encontrada pela análise da “árvore”, onde afirmamos que as modalidades de categoria que caracterizam os sujeitos deste grupo, são apenas a estratégia de **Aproximação** e os procedimentos de solução **Cálculo Sem Explicação** e **Não-Explícito**.

2. O segundo grande grupo, representado na figura 10 pela cor azul, é composto por 10 sujeitos, todos do grupo experimental, que após a análise multidimensional observamos que estes caracterizam-se por:

- apresentarem tipo de resposta correto (01) para todos os problemas:
- para os problemas 1,2,3,4 e 5, em sua maioria absoluta, utilizaram a estratégia **escalar aditiva** e o procedimento de solução **Cálculo do valor unitário**;
- para os problemas 6, 9 e 10, em sua maioria absoluta, os sujeitos utilizaram a estratégia **funcional** e o procedimento de solução **Calculo da Razão funcional**.

Podemos observar uma característica específica deste grupo de sujeitos que o diferencia do grupo de sujeitos que compõe o primeiro grupo; para todos os problemas podemos identificar uma estratégia de solução definida, seja ela escalar ou funcional,

¹⁰ Para uma melhor visualização das médias de contribuição de cada modalidade de categoria para a formação dos grupos ver anexo 4)

diferenciando-se do primeiro grupo que apresentava uma ausência de estratégia explícita. Ou seja, enquanto no primeiro grupo os sujeitos apresentavam dificuldade de explicitar uma estratégia de solução, ou mesmo ordenar coerentemente um procedimento de solução, os sujeitos do segundo grupo apresentaram, para todos os problemas, uma clareza em relação a escolha da estratégia e quanto ao procedimento de solução.

3. O terceiro grande grupo, representado na figura 10 pela cor verde, foi composto por 32 sujeitos, dos quais 19 do grupo experimental e 13 do grupo controle. Este grupo de sujeitos caracterizam-se por uma configuração heterogênea de modalidades de categorização:

- para os problemas 1, 2, 3, 4 e 5 não conseguimos observar uma homogeneidade, ao contrário os dados caracterizam-se pela heterogeneidade de modalidades de categorias, estratégia e procedimento de solução;
- porém, para os problemas 6, 9 e 10 observa-se uma discreta homogeneidade quanto as modalidades de categorias: para a variável **tipo de resposta** _correta; para a variável **estratégia** _ funcional; e para a variável **procedimento de solução** _cálculo da razão funcional.

Podemos observar que:

- este grupo não possui uma caracterização homogênea ou que o descreva fielmente;
- a modalidade de categoria tipo de resposta , segundo a análise multidimensional de contribuição (AFC), a exceção dos problemas 6, 9 e 10, pouco contribuiu para a formação deste grupo, uma vez que a maioria dos sujeitos apresentaram a mesma resposta, correta.

Tais dados nos levam a concluir que os sujeitos para estes problemas, mesmo diferenciando-se nas modalidades de categorias estratégia e procedimento de solução,

apresentaram uniformidade quanto ao tipo de resposta, correta (01); sendo assim podemos observar que, neste grupo, os sujeitos do grupo controle e experimental, apresentaram bom desempenho se compararmos a modalidade tipo de resposta, entre o pré e o pós teste. Isso é confirmado pela análise estatística unidimensional inferencial, que comparando o número de acertos dos sujeitos entre o pré e o pós-teste encontrou diferença significativa a favor do pós-teste para o grupo experimental (Wilcoxon, $Z = -3,4294$; $P = 0,0006$) e para o grupo controle (Wilcoxon, $Z = -3,9462$; $P = 0,0001$). Ou seja, ambos os grupos (controle e experimental) melhoraram se comparados os desempenhos destes no pré e pós-teste.

4. Finalmente, o quarto grupo, representado na figura 10 pela cor vermelha, é composto por 16 sujeitos dos quais 14 do grupo controle e apenas dois sujeitos do grupo experimental. Este grupo de sujeitos caracteriza-se por:

- para os problemas 1, 2, 3, 4 e 5 as modalidades de categorias que se destacam são as estratégias de solução escalar aditiva e multiplicativa, com procedimentos de solução cálculo da razão escalar e operação escalar;
- para os problemas 6, 9 e 10, as modalidades de categorias que se destacam são estratégia de aproximação, com procedimentos de solução cálculo sem explicação e Não-Explícito.

A partir das informações obtidas do cruzamento das análises multidimensionais, CAH e AFC, podemos observar que:

- ✓ primeiro grupo pode ser classificado como sendo um grupo “fraco”, uma vez que caracteriza-se por apresentar estratégia de solução do tipo **Aproximação** e respostas incorretas; o segundo grupo pode ser classificado como sendo um grupo “forte”, uma vez que as respostas aos problemas foram corretas e as estratégias de

solução foram mais elaboradas, do tipo **Escalar Aditiva** e **Funcional**; O terceiro grupo pode ser classificado como sendo um grupo de desempenho “médio”, uma vez que não apresentava uma homogeneidade quanto as estratégias adotadas para os problemas, porém apresentaram um bom desempenho quanto ao tipo de resposta correta; e finalmente o quarto grupo, que podemos classificar como sendo um grupo médio-fraco, uma vez que para os problemas de solução mais fácil identificou-se um bom desempenho e uma escolha adequada das estratégias, porém quanto aos problemas de solução mais complexa, apresentavam estratégia de solução do tipo Aproximação.

- ✓ Os grupos 1 e 3 se assemelham pelo fato dos sujeitos que os compõem serem heterogêneos quanto ao grupo de origem (controle e experimental), ou seja, tanto no primeiro grupo, de desempenho mais fraco, quanto no terceiro grupo, de desempenho médio, são formados por sujeitos do grupo controle e experimental. Portanto, podemos afirmar que apesar de diferirem qualitativamente_ enquanto um apresenta fraco desempenho, o outro apresenta desempenho médio_ os dois grupos se assemelham pelo fato de estarem representados por sujeitos do grupo controle e experimental igualmente;
- ✓ Os grupo 2 e 4 se assemelham por possuírem certa homogeneidade quanto aos sujeitos que os compõe, ou seja, o segundo grupo é composto exclusivamente por sujeitos do grupo experimental, enquanto o quarto grupo é composto por sujeitos, em sua maioria absoluta, por sujeitos do grupo controle. Na verdade, estes grupos se opõem diametralmente, por dois motivos: pelo grupo de origem, experimental e controle; e pelo desempenho dos sujeitos, “forte” para o segundo grupo (experimental) e médio/fraco para o quarto grupo (controle).

- ✓ As informações obtidas pela AFC confirmam que as categorias que mais contribuíram para a composição dos eixos fatoriais, conseqüentemente, para a formação dos grupos, formam as categorias de estratégia adotada e procedimento de solução. A categoria tipo de resposta apresentou pouca contribuição, a exceção dos problemas 6, 9 e 10; Conseqüentemente, podemos identificar que os problemas também contribuíram para a formação dos grupos uma vez que observa-se uma tendência geral dos grupos de apresentarem estratégia e procedimentos de solução específicas para determinados problemas. Podemos identificar os problemas 6, 9 e 10 como sendo os problemas que desencadearam uma maior diversidade de respostas, estratégias e procedimentos de solução, diferenças estas definitivamente cruciais para a diferenciação dos desempenhos dos sujeitos e, conseqüentemente, para a distribuição dos mesmos nos quatro grandes grupos.
- ✓ Desta forma podemos identificar os problemas 6, 9 e 10 como os problemas onde os sujeitos apresentaram maior dificuldade, uma vez que os sujeitos do primeiro grupo e do quarto, sujeitos classificados como fracos e médio-fracos, nestes problemas apresentaram estratégia de Aproximação para a sua solução; enquanto os sujeitos do segundo e terceiro grupos, apresentaram estratégia de solução funcional para a solução dos mesmos, conseqüentemente, estes grupos estão classificados como forte e Médio/forte, respectivamente.

Estas observações por se só explicam as diferenças que caracterizam a formação dos grupos na “árvore” de classes, bem como comprovam a classificação qualitativa dos referidos grupos. Contudo, podemos reforçar estas observações ao aplicarmos aos dados algumas análises unidimensionais.

3.3. Análise Descritiva-Inferencial Unidimensional

Este tipo de análise tem como objetivo detalhar as observações identificadas a partir da análise multidimensional anteriormente descrita. A partir das categorias de análise já explicitadas, foram realizadas as seguintes comparações:

1. Analisando-se o desempenho dos sujeitos quanto ao número de acertos nos problemas, observa-se que, ao compararmos o grupo controle com o grupo experimental no pré-teste encontramos uma diferença não significativa (U de Mann-Whitney, $Z = -1,4377$, $p = 0,1505$), porém ao compararmos os grupos no pós-teste observamos que o desempenho dos grupos são significativamente diferentes, com melhor desempenho para o grupo experimental (U de Mann-Whitney bi-caudal, $Z = -2,1067$, $p = 0,0351$). Tal dado reforça as observações realizadas na análise multidimensional: apesar dos dois grupos (experimental e controle) crescerem, ou seja, quando comparados os seus desempenhos no pré e pós-teste apresentaram diferença significativa¹¹, o grupo experimental apresentou um desempenho final melhor que o grupo controle, confirmado pela análise unidimensional e pela composição dos grupos na “árvore”. O grupo qualificado como forte foi composto por sujeitos do grupo experimental, enquanto os grupos qualificado como fraco e médio-fraco compunham-se, em sua maioria, por sujeitos do grupo controle;

¹¹ O desempenho dos grupos, quando comparados isoladamente, apresentou diferença significativa para o grupo experimental (Wilcoxon, $Z = -3,4294$; $P = 0,0006$) e para o grupo controle (Wilcoxon, $Z = -3,9462$; $P = 0,0001$),

Cruzando-se os dados dos dois grupos (controle e experimental) quanto à modalidade de categoria tipo de resposta, encontramos que os grupos não diferiram significativamente ao resolverem os problemas no pré-teste (ver as análises estatísticas descritas no anexo 5). Porém quando comparamos o desempenho dos grupos no pós-teste observamos que eles diferem significativamente, a favor do grupo experimental, quando do seu desempenho ao resolver o problema 9 (Qui-quadrado, $\chi^2=7,05595$, $p= 0,00790$), conforme tabela 1 abaixo:

Tabela 1

Qui-quadrado dos grupos de sujeitos para o problema 9 no pós-teste, quanto ao tipo de resposta

	Correta 1	Errada ¹² 3, 8, 9	Total
Experimental 1	29	8	37 50,0
Controle 2	18	19	37 50,0
Total	47 63,5	27 36,5	74 100,0

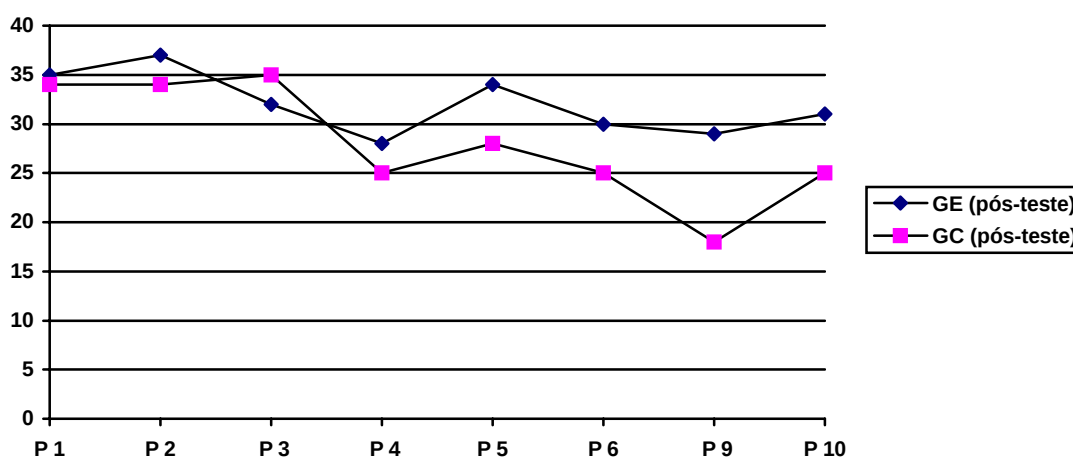
Tal observação é confirmada e fortalece-se quando observamos que na análise multidimensional AFC, as modalidades da categoria Tipo de Resposta apresentaram pouca contribuição para a formação dos grupos, a exceção dos problemas 6, 9 e 10, o que confirma

¹² As modalidades de categorias 8 e 9, erro de procedimento e erro de interpretação, foram inseridas na categoria maior erro, uma vez que sua permanência como modalidade poderia comprometer a confiabilidade do teste, pois apresentavam efetivo menor que 5.

o problema 9 como forte contribuinte para a diferenciação dos desempenhos dos grupos no pós-teste. Poderemos ter uma visualização melhor destes dados ao observarmos o gráfico 1, que descreve o desempenho dos grupos controle e experimental no pós-teste, quando comparados os números de acertos dos grupos, por problema:

Gráfico 1

Desempenho dos grupos controle e experimental no pós-teste, em termos do número absoluto médio de acertos por problema.



Podemos observar que, à exceção do problema 3, o desempenho do grupo experimental foi melhor do que o desempenho do grupo controle, principalmente no problema 9; esta diferença é observada com maior ênfase, confirmando assim as informações obtidas pelo cruzamento dos dados dos grupos controle e experimental, quanto às modalidades da categoria Tipo de Resposta;

2. Cruzando-se os dados dos dois grupos (controle e experimental) quanto às modalidades da categoria “Estratégia Adotada” encontramos que:

- ♦ **no problema 4**, observou-se diferença significativa nas respostas dos grupos, tanto no pré-teste (Qui-quadrado, $\chi^2 = 19,07592$, $p = 0,00029$), quanto no pós-teste

(Qui-quadrado, $\chi^2 = 32,19048$, $p < 0,00001$), conforme detalhado nos tabelas 2 e 3 abaixo:

Tabela 2

Qui-quadrado dos grupos de sujeitos para o problema 4 no pré-teste, quanto a estratégia adotada

	Escalar Aditiva 1	Escalar Multiplicativa 2	Funcional 6	Aproximação 12	Total
Experimental 1	1	7	18	11	37 52,1
Controle 2	4	5	2	23	34 47,9
Total	5 7,0	12 16,9	20 28,2	34 47,9	71 100,0

Tabela 3

Qui-quadrado dos grupos de sujeitos para o problema 4 no pós-teste, quanto a estratégia adotada

	Escalar Aditiva 1	Escalar Multiplicativa 2	Funcional 6	Aproximação 12	Total
Experimental 1	12	2	13	10	37 50,0
Controle 2	2	19	1	15	37 50,0
Total	14 18,9	21 28,4	14 18,9	25 33,8	74 100,0

Podemos observar que no pré-teste os sujeitos do grupo experimental utilizaram com maior frequência a estratégia funcional para resolver o problema, enquanto os sujeitos do grupo controle utilizaram com maior frequência a estratégia de aproximação. Durante o pós-teste observamos que os sujeitos do grupo experimental utilizaram com maior frequência as estratégias escalar aditiva e funcional, enquanto os sujeitos do grupo controle apresentaram com maior frequência as estratégias escalar multiplicativa e aproximação.

- ♦ **no problema 9**, encontramos uma diferença não significativa nas respostas dos grupos, no pré-teste (Qui-quadrado, $\chi^2 = 1,30773$, $p = 0,52003$), enquanto que no pós-teste encontramos uma diferença significativa (Qui-quadrado, $\chi^2 = 19,56795$, $p = 0,00006$), conforme tabelas 4 e 5 abaixo:

Tabela 4

Qui-quadrado dos grupos de sujeitos para o problema 9 no pré-teste, quanto a estratégia adotada

	Escalar Aditiva 1	Funcional 6	Aproximação 12	Total
Experimental 1	5	12	20	37 52,1
Controle 2	7	13	14	34 47,9
Total	12 16,9	25 35,2	34 47,9	71 100,0

Tabela 5

Qui-quadrado dos grupos de sujeitos para o problema 9 no pós-teste, quanto a estratégia adotada

	Escalar Aditiva 1	Funcional 6	Aproximação 12	Total
Experimental 1	3	28	6	37 50,0
Controle 2	8	9	20	37 50,0
Total	11 14,9	37 50,0	26 35,1	74 100,0

Podemos observar que durante o pré-teste os dois grupos utilizaram as estratégias funcional e de aproximação de forma semelhante, porém no pós-teste observamos que os sujeitos do grupo experimental utilizaram com maior frequência a estratégia funcional, enquanto os sujeitos do grupo controle utilizaram a estratégia de aproximação.

Observamos com esses dados que, mais uma vez, a composição dos problemas influenciou no desempenho dos grupos: nos problemas “mais fáceis” de resolver (problemas 1, 2, 3 e 4, ver descrição dos problemas quanto a estrutura, cap. 2 pp. 49) não se observou diferença significativa quando comparadas as respostas dos grupos experimental e controle no pré-teste e no pós-teste, à exceção do problema 4, onde essa diferença que já era significativa no pré-teste, ficou mais evidente no pós-teste; nos problemas “mais difíceis” de resolver (problemas 5, 6, 9 e 10) observou-se uma diferença não significativa, quando comparadas as respostas dos sujeitos no pré-teste, e quando comparadas as respostas dos grupos no pós-teste observam-se diferenças significativas no problema 9.

Podemos concluir que, as informações obtidas nas análises estatísticas acima, confirmam e validam as observações obtidas nas análises multidimensionais, uma vez que:

- Os grupos controle e experimental diferem quantitativamente e qualitativamente quanto aos seus desempenhos no pós-teste. Confirma-se assim a proposta deste projeto que visava identificar após a apresentação do pós-teste uma diferença significativa entre os grupos experimental (grupo este que havia participado dos encontros com o experimentador) e grupo controle (grupo este que não participou dos encontros);

- Os sujeitos dos grupos controle e experimental apresentaram bom desempenho quando da resolução dos problemas 1, 2, 3 e 4, considerados problemas mais facilmente resolvidos a partir da estratégia escalar, tanto no pré, como no pós-teste. Porém, para os problemas 5, 6, 9 e 10 observou-se desempenhos diferentes, quando comparados os grupos, experimental e controle, no pós-teste. Confirma-se assim que os problemas que não são facilmente resolvidos pela estratégia escalar simples (ver detalhamento das estruturas dos problemas no cap. 2 pp. ??), necessitam, para a sua solução, de uma estratégia mais complexa e formalizada, como o é a regra-de-três, e o cálculo do valor unitário (proposto pelo experimentador durante os encontros). Os dados mostram que para esses problemas, principalmente o problema 9, os sujeitos do grupo experimental apresentaram bom desempenho, desempenho este já não identificado nos sujeitos do grupo controle;

- A observação final, acerca dos dados analisados multi e unidimensionalmente, confirma a existência de diferenças entre os grupos experimental e controle. Diferenças estas qualitativas e quantitativas, uma vez que os sujeitos diferem tanto pelo número de acertos, como pelo tipo de estratégia adotada para a resolução dos problemas. Esta diferenciação valida a proposta inicial do estudo, ou seja, um conjunto de atividades didáticas para o ensino da proporcionalidade.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÃO

Inicialmente discutiremos as conclusões empíricas encontradas, relacionando-as às perspectivas teóricas aludidas no capítulo de introdução. Em seguida, serão analisadas as implicações pedagógicas deste estudo. E finalmente, apontaremos sugestões para futuras pesquisas, que venham a complementar e ratificar as questões e conclusões levantadas pelos dados desta pesquisa.

4.1. Conclusões Empíricas

Este estudo se propôs a analisar um conjunto de atividades didáticas como proposta para o ensino da proporcionalidade na escola, procurando investigar se os alunos que participaram deste estudo, foram capazes de representar e solucionar problemas relativamente complexos de proporcionalidade, que envolvam para a sua solução a utilização de estratégias formalizadas (algoritmos escolares). Buscou-se principalmente analisar em que medida este conjunto de atividades didáticas se sustenta como proposta didaticamente válida para o ensino da proporcionalidade na escola; esta foi a preocupação fundamental deste estudo.

Os resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste, para ambos os grupos, controle e experimental, foram comparados a fim de observarmos a evolução dos sujeitos quanto às modalidades das categorias tipo de resposta, estratégia adotada e procedimento de solução. Para isto, foram utilizadas as análises multi e unidimensionais, análises estas diferentes, mas

interdependentes. Para as respostas dos sujeitos do grupo experimental obtidas durante os encontros, onde foram realizadas as atividades didáticas, seguiu-se uma análise qualitativa dos mesmos com o objetivo de detalharmos os passos seguidos durante os encontros e descrevermos as situações-problema identificadas nesta atividade.

No que se refere aos resultados obtidos na análise multidimensional, para as respostas dos sujeitos dos grupos controle e experimental, durante o pós-teste evidenciou-se a composição de quatro grandes grupos. Estes grupos foram classificados qualitativamente como: grupo fraco, grupo médio/fraco, grupo médio/forte e grupo forte.

O grupo fraco foi formado por sujeitos que apresentaram estratégia de solução Aproximação, popularmente chamada, no ambiente escolar de “chute”. O grupo médio/fraco caracteriza-se por sujeitos que apresentaram bom desempenho e melhor articulação conceitual na escolha das estratégias para os problemas mais fáceis, mas quando os problemas apresentavam complexidades, ou seja, eram mais difíceis, eles também apresentavam estratégia de solução do tipo Aproximação. O grupo médio/forte caracteriza-se por sujeitos que apresentaram bom desempenho quanto ao tipo de resposta, mas não apresentavam homogeneidade quanto a estratégia de solução adotada. Já o grupo forte foi composto por sujeitos que apresentaram respostas corretas com estratégias e procedimentos de solução coerentes e com articulação conceitual.

Estes grupos não diferem entre si apenas pela classificação fraco, médio ou forte. A evidência mais importante, a ser descrita nestes resultados, está na composição dos grupos quanto à origem dos sujeitos. Os grupos classificados como fraco e médio/forte são compostos por sujeitos, tanto do grupo controle quanto do grupo experimental, enquanto estes diferem qualitativamente, são semelhantes pela heterogeneidade dos sujeitos que os compõe, sujeitos dos grupos controle e experimental. Enquanto isso, os grupos fraco e forte, são compostos

exclusivamente por sujeitos do grupo controle e experimental, respectivamente. Desta forma, evidencia-se que um subgrupo de sujeitos do grupo experimental, apresentou melhor desempenho ao resolver os problemas no pós-teste, em contraposição ao subgrupo de sujeitos do grupo controle. A partir deste resultados foram propostas análises unidimensionais que confirmaram esta diferença qualitativa dos sujeitos dos dois grupos como sendo significativa. Ou seja, o desempenhos dos sujeitos dos grupos controle e experimental, quando da aplicação do pós-teste foram significativamente diferentes. Isto confirma e evidencia os resultados obtidos na análise multidimensional, levando-nos a conclusão de que os sujeitos do grupo experimental, grupo que participou das atividades didáticas propostas neste estudo, apresentaram desempenho melhor, ao final das atividade, comparado ao desempenho dos sujeitos do grupo controle.

Os resultados revelaram outras informações essenciais para as nossas conclusões. Os problemas propostos no pós-teste, poderiam ser divididos em dois tipos: problemas facilmente solucionados pela estratégia escalar e problemas que necessitavam de uma estratégia mais complexa e formal para a sua solução (ver cap. II, pp. 49) . A partir da análise multidimensional AFC (análise fatorial de correspondência) identificamos que os problemas que mais contribuíram para composição dos grupos nos eixos fatoriais, foram os problemas 6, 9 e 10, problemas que necessitavam de uma estratégia formalizada para a sua solução. E que os sujeitos que conseguiram solucioná-los, de forma satisfatória e consistente conceitualmente, foram os grupos forte e médio/forte. Desta forma, concluímos que uma vez que o grupo médio/forte é composto por sujeitos, tanto do grupo experimental como controle, o que mais contribuiu para a diferenciação significativa dos sujeitos do grupo controle e experimental, foram os desempenhos dos sujeitos do grupo experimental quando da apresentação dos problemas 6, 9 e 10.

Baseado nestes resultados procedemos a análises unidimensionais, buscando observar o desempenho dos grupos quanto as modalidade de categorias tipo de resposta e estratégia adotada. Encontrou-se que os grupos, no pós-teste, apresentaram desempenhos significativamente diferentes para o problema 9, referindo-se tanto ao tipo de resposta quanto a estratégia adotada.

A partir das evidências acima levantadas podemos concluir que:

- Os grupos controle e experimental diferiram quantitativamente e qualitativamente quanto aos seus desempenhos no pós-teste. Confirmando-se assim a hipótese de partida que propunha evidenciar diferença significativa entre os grupos experimental e grupo controle, após os encontros de intervenção;

- Os sujeitos dos grupos controle e experimental apresentaram bom desempenho quando da resolução dos problemas 1, 2, 3 e 4, considerados problemas mais facilmente resolvidos a partir da estratégia escalar, tanto no pré, como no pós-teste. Porém, para os problemas 5, 6, 9 e 10 observou-se desempenhos diferentes, quando comparados os grupos, experimental e controle, no pós-teste. Confirmando-se que os problemas que não são facilmente resolvidos pela estratégia escalar simples, necessitam, para a sua solução, de uma estratégia mais complexa e formalizada, como o é a regra-de-três, e o cálculo do valor unitário. Os dados mostram que para esses problemas, principalmente o problema 9, os sujeitos do grupo experimental apresentaram bom desempenho, desempenho este já não identificado nos sujeitos do grupo controle;

Desta forma podemos afirmar que o objetivo principal deste estudo foi alcançado, ao final das atividades as crianças do grupo experimental conseguiram utilizar as estratégias formalizadas, de aplicação tão eficiente quanto a regra de três, mantendo, todavia, a

compreensão das mesmas sobre as relações envolvidas nos problemas. Ou seja, as crianças foram capazes de representar e solucionar problemas relativamente complexos de proporcionalidade, que necessitassem de estratégias formalizadas (como a regra de três ou o cálculo do valor unitário), mas que, diferentemente das crianças que recebem a instrução formal na escola, sobre proporcionalidade (regra de três), desenvolveram uma compreensão das relações envolvidas nos problemas. As crianças foram capazes de utilizar uma estratégia formalizada, o cálculo do valor unitário, quando da apresentação de problemas que a exigisse, e quando da apresentação de problemas mais simples utilizaram as estratégias mais simples (escalar).

Os resultados deste estudo confirmam as afirmações de Karplus (1981) quando propõe uma classificação do desenvolvimento cognitivo a partir da identificação das formas de raciocínio utilizadas pelos sujeitos. Ou seja, para Karplus (op. cit.) um mesmo sujeito será capaz de apresentar desempenho em determinada tarefa a nível de pensamento formal e em outra tarefa a nível de pensamento concreto. Observamos características semelhantes nas respostas dos nossos sujeitos, ao longo dos problemas encontramos sujeitos que desenvolveram compreensão diferenciada acerca da proporcionalidade, quando o problema exigia para a sua solução um raciocínio formalizado (regra-de-três ou cálculo do valor unitário) os sujeitos assim o faziam, mas quando de um problema mais simples que bastava para a sua solução utilizar uma estratégia mais simples (escalar), os sujeitos, que antes utilizaram um raciocínio mais complexo, se utilizam de raciocínios mais simples para a sua solução.

Desta forma, podemos concluir que ao resolverem os problemas de proporcionalidade crianças se utilizam de raciocínios tanto formais quanto concretos, dependendo do tipo de tarefa e do nível de dificuldade e complexidade dos problemas. Esta conclusão confronta-se com as afirmações de Inhelder & Piaget (1976) quando afirmam que “a compreensão da

proporcionalidade pela criança é uma conquista tardia e constitui uma das características do estágio das operações formais.

Vale ressaltar que os sujeitos que compõe este estudo estavam cursando a 5a. série do Ensino Fundamental com idades entre 11 e 12 anos , desta forma podemos identificar que estes sujeitos apresentaram, ao final do estudo, uma compreensão diferenciada sobre proporcionalidade. Estes resultados vêm a confirmar as afirmações de Spinillo (1993); Spinillo & Bryant (1991); Pereira Neto, de Moura & Schliemann (1995); Carraher & Schliemann (1992). Segundo estes autores crianças são capazes de lidar com problemas de proporção em idades inferiores, ou seja, em idades que não representam o estágio das operações formais, segundo a abordagem piagetiana, mas que mesmo assim conseguem desenvolver uma compreensão acerca da proporcionalidade.

O modelo matemático de proporcionalidade mais comumente ensinado nas escolas brasileiras é a regra-de-três, onde as crianças aprendem a lidar com o mesmo nas 6a. e 7a. séries do Ensino Fundamental. Estudos sobre a compreensão da proporcionalidade desenvolvida por crianças em idades escolares, que já haviam recebido instrução formal sobre proporcionalidade (Carraher, Carraher & Schliemann, 1982, 1984, 1985, 1988; Carraher, Carraher, Schliemann & Ruiz, 1986; Carraher, Schliemann & Carraher, 1986; Schliemann & Carraher, 1991; Pereira Neto, 1992; Pereira Neto, de Moura & Schliemann, op.cit.) constataram que crianças que aprenderam a resolver problemas de proporcionalidade na escola, raramente utilizam o algoritmo formal (regra-de-três) que lhes foram ensinado e, quando o fazem, fazem-no de forma mecânica e sem compreensão sobre as relações envolvidas nos problemas.

Os resultados obtidos no presente estudo mostram que os sujeitos, após os encontros de intervenção, onde foram realizadas atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade, foram capazes de lidar com problemas de proporcionalidade complexos e

desenvolverem uma estratégia formalizada para a resolução dos problemas. mas que, diferentemente das crianças que recebem a instrução escolar formal sobre a proporcionalidade (regra-de-três), possuem a compreensão das relações envolvidas nos problemas. São crianças capazes de utilizar uma estratégia formalizada (o cálculo do valor unitário), mas quando questionadas podem “dar um passo atrás” e visualizar e compreender as relações envolvidas nos problemas, não se limitando apenas à aplicação de uma regra ou modelo matemático de resolução de problemas de proporcionalidade.

4.2. Implicações pedagógicas

Este estudo tem um caráter didático e sugere um conjunto de atividades que podem ser explorados como procedimento para o ensino da proporcionalidade nas escolas.

A partir das afirmações de Pereira Neto (1992), Pereira Neto, de Moura & Schliemann (1995), de que a escola não vem preparando bem os alunos para a compreensão da proporcionalidade, uma vez preocupada em ensinar regras de resolução de problemas, deixando de lado o mais importante que é mostrar o significado de tais modelos e de como utilizá-los. Este estudo surge como uma proposta didática para o ensino da proporcionalidade, onde o conhecimento prévio do aluno deva ser explorado e preservado, constituindo-se como ponto de partida para a construção de um conhecimento formalizado acerca da proporcionalidade, como o é a regra-de-três e o cálculo do valor unitário. A preocupação não é descartar o modelo pedagógico ora vigente nas escolas como ferramenta de ensino da proporcionalidade (regra-de-três), na verdade a proposta final é desenvolvermos uma compreensão nos alunos donde possam, a partir de compreensões informais e mais primitivas (estratégias escalares) elaborar um conhecimento algorítmico, como a regra-de-três e o cálculo do valor unitário, tendo como base uma compreensão semântica do problema, ou seja,

uma compreensão construída a partir de significados já disponíveis e trabalhados pelos próprios alunos no ambiente escolar.

4.3. Sugestões para Futuros Estudos

A partir dos dados obtidos surge a necessidade de novos estudos para investigar alguns aspectos:

(1) Recordemos que este estudo propôs-se trabalhar com sujeitos da 5a. série de uma escola particular do Recife, onde os sujeitos se inseriam numa classe sócio-econômica-cultural específica. Uma sugestão é que este estudo seja replicado para situações outras que difiram da original, tais como: trabalhar com sujeitos de escolas públicas, municipais e estaduais e trabalhar com o ensino de proporcionalidade para adultos.

(2) Apesar de respeitar-se o ambiente escolar, a composição das turmas e as dificuldades enfrentadas por um professor em sala de aula, devemos ressaltar que o presente estudo foi realizado propondo-se uma intervenção com os alunos, onde a figura do professor foi substituída por um experimentador sem experiência com a regência de sala e sem formação acadêmica que o habilite a ensinar matemática. A sugestão seria desenvolver estudos que buscassem observar o desempenho de professores que houvessem recebido instrução prévia acerca do conjunto de atividades didáticas proposta neste estudo, num contexto real de ensino de proporcionalidade. Observando ao final o desempenho dos alunos que participaram do processo de ensino.

(3) A proposta inicial deste estudo foi abordarmos um conjunto de atividades didáticas envolvendo problemas de proporcionalidade, como suporte para a construção de uma

seqüência didática para o ensino da proporcionalidade. Estudos posteriores poderiam remontar os passos e as atividades aqui propostas e proceder a construção de uma seqüência didática para o ensino da proporcionalidade, onde conste notadamente: a caracterização de estágios temporalmente encadeados; Objetivos intermediários e propostas de avaliações de desempenho para tais objetivos; objetivo final, bem como a avaliação do mesmo.

BIBLIOGRAFIA

Bouroche, J.M. & Saporta, G. (1980) L'analyse des données? . Paris, PUF.

Brousseau, G. (1983) Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques.

Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.4 n°. 2.

Bruner, J.S., Oliver, R.R. & Greenfield, P.M. (1966) Studies in Cognitive Growth. New York, John Wiley.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (1992) A Compreensão de Frações como Magnitude Relativa. Psicologia: Teoria e Pesquisa, Brasília, vol. 8, No. 1, pp. 67-78

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D.(1992) A Compreensão de Frações como Magnitude Relativa. In Psicologia: teoria e pesquisa, Brasília, Vol. 8, N°. 1, pp. 67-78

Carraher, T.N. (1982) O Método Clínico e os Exames Piagetianos. 1a.edição, UFPE, Ed. Universitária. Recife.

Carraher, T.N. (1986) Passando da planta para a construção: um trabalho de mestre. In Carraher, T.N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. Na Vida Dez, na Escola Zero. São Paulo, Cortez.(1988).

Carraher, T.N. (1986). From Drawings to Buildings: Working With Mathematical Scales. International Journal of Behavioural Development, 9, 527-544.

Carraher, T.N., Carraher, D. W. & Schliemann, A.D. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: desenvolvimento cognitivo e aprendizagem. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67(157), 586-602.

- Carraher, T.N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1982). Na Vida, Dez; na Escola, Zero: Os contextos culturais da Educação Matemática. Cadernos de Pesquisa,
- Carraher, T.N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1988). Na Vida Dez, na Escola Zero. São Paulo, Cortez.
- Carraher, T.N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1988). Na Vida Dez, na Escola Zero. São Paulo, Cortez.
- Carraher, T.N., Carraher, D. W., Schliemann, A.D. & Ruiz, E.L.R. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades medidas por razões. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67(155), 93-107.
- Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1984). Can Mathematics teachers teach proportions? In P. Damerow, M. Dunkley, B. Nebres & B. Werry (Eds.) Mathematics for All, Paris, UNESCO, Science and Technology Education Document Series No. 20.
- Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the Streets and in Schools. British Journal of Developmental Psychology, 3, 21-29.
- Carraher, T.N., Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: uma análise de tarefas piagetianas. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67(156), 367-379.
- Carraher, T.N., Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: uma análise de tarefas piagetianas. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67(156), 367-379.
- Corroyer, D., Rouanet, H., Guigues, J.L. & Mathieu, J. (1988). Apport de l'outil informatique dans l'enseignement d'un champ conceptuel spécifique: les premières notions statistiques. Relatório final de contrato – Ministério da Pesquisa e do Ensino Superior (N. 86J00119), Paris, França.

- Da Rocha Falcão, J.T. (1997) Introdução à análise descritiva multidimensional como ferramenta de análise de dados em Psicologia. In Da Rocha Falcão, J. T. Análise de dados em ciências humanas: introdução conceitual às ferramentas de análise estatística (manual em preparação)
- Fénelon, J.P. (1981). Qu'est-ce que l'analyse des données? Paris, Lefonen.
- Fennema e Carpenter (1991). Cognitively Guided Instruction. Wisconsin Center for Education Research, School of Education, University of Wisconsin-Madison.
- Inhelder, B. & Piaget, J. (1976). Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente. Editora Pioneira, São Paulo, (ed. original 1955)
- Karplus, E.F., Karplus, R. & Wollmann, W. (1974) Intellectual Development Beyond Elementary School IV. Ratio: The Influence of Cognitive Style. Scholl Science and Mathematics. 74, 476-482.
- Karplus, R. & Peterson, R.P. (1970) Intellectual Development Beyond Elementary School II, Ratio e Survey, Science Curriculum Improvement Study, University of California, Berkeley.
- Karplus, R. (1981). Education and formal thought: A modest proposal. In I.E. Siegel, D.M. Brodzinsky & R.M. Golinkoff (Ed.) New Directions in Piagetian Theory and Practice. Hillsdale, NJ, Erlbaum.
- Karplus, R. (1981). Education and formal thought: A modest proposal. In I.E. Siegel, D.M. Brodzinsky & R.M. Golinkoff (Ed.) New Directions in Piagetian Theory and Practice. Hillsdale, NJ, Erlbaum.
- Leão, M.L.M.C. (1986) Proporção: Escolarização e formas de raciocínio em diferentes contextos. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Psicologia, UFPE, Recife.
- Lovell, K. (1971) Some Aspects or the Growth of the Concept of a Function. In Roszkopf, M., Steffe, L. & Tabak (ed.) Piagetian Cognitive Development. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

- Noelting, G. (1980) The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I-Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11, 217-253.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I-Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11, 217-253.
- Pereira Neto, L. L. (1992) A Compreensão do Conceito de Proporcionalidade: Uma revisão dos estudos desenvolvidos na Psicologia do Desenvolvimento, na escola e nas pesquisas sobre proporcionalidade na vida diária. Monografia não-publicada para obtenção do grau de Bacharel em Psicologia, apresentado ao Departamento de Psicologia da UFPE.
- Pereira Neto, L.L., Moura, A N. & Schliemann, A D. (1995). Proportionality: From Intuitive Understanding to Solution Strategies. Proceddings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (vol.1, pp.249), Recife.
- Pézard, M. (1985) Une expérience d'enseignement à la proportionnalité aux élèves instituteurs. Tese de doutorado de IIIº Ciclo. Paris, Université de Paris-VII
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951) A Origem da Idéia do Acaso na Criança. Record Cultural, Rio de Janeiro.
- Piaget, J. & Szemisnka (1975) A Gênese do Número na Criança. 2a. ed., Zahar. Rio de Janeiro.
- Piaget, J. (1972) Intellectual Evolution from Adolescence to Adulthood. In Human Develop. 15: 1-12.
- Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1991) Proporcionalidade da compreensão intuitiva à formalização matemática. Relatório de Pesquisa não-publicado, financiado pelo CNPq; Mestrado em Psicologia, UFPE, Recife.
- Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1991) Proporcionalidade: da compreensão intuitiva à formalização matemática. Relatório de pesquisa, financiado pelo CNPq. Mestrado em Psicologia, UFPE, Recife.

- Schliemann, A.D. & Magalhães, V.P. (1990). Proportional reasoning: From shops, to kitchens, laboratories, and, hopefully, schools. Proceedings of the XIV International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Oaxtepec, México.
- Schliemann, A.D., Pereira Neto, L.L. & Moura, A.C.N. (1992) Desenvolvimento de um Experimento de Ensino para a Melhoria da Instrução Escolar da Proporcionalidade. Relatório de pesquisa, financiado pelo CNPq. Mestrado em Psicologia, UFPE, Recife.
- Schubauer-Leoni, M.-L., Perret-Clermont, A.N. (1988) Las interacciones sociales en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos en el niño. IN: Mugny, G., Perez, J.A. (1988) Psicología social del desarrollo cognitivo. Barcelona, Anthropos.
- Spinillo, A. (1993) Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. IN: Schliemann, A.D., Carraher, D.W., Spinillo, A., Meira, L. & Da Rocha Falcão, J.T. (1993) Estudos em psicologia da educação matemática. Recife, Editora Universitária.
- Spinillo, A. G. & Bryant, P.. (1991) Children's Proportional Judgements: The importance of "half". Child Development, 62, 427-440.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh e M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics: Concepts and Process. New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh e M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes. New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics, pp. 141-161.
- Vergnaud, G. (1991) El Niño, las Matemáticas y la Realidad. México, Trillas.

ANEXOS

ANEXO 1

1. Problemas propostos para o pré e pós-teste

1.1. Problemas escalares do menor para o maior

Problema 1. 3 kg de tomate custam R\$7,00. Quanto custam 9 kg de tomate?

Problema 2. 10 chicletes custam R\$3,00. Quantos chicletes posso comprar com R\$9,00?

1.2. Problemas escalares do maior para o menor

Problema 3. Num supermercado 2 kg de feijão custam R\$4,00. Quanto posso comprar com R\$1,00?

Problema 4. Numa granja duas dúzias (24) de ovos custam R\$6,00. Quanto custam meia dúzia (6) de ovos?

1.3. Problemas de compra mais vantajosa

Problema 5. Num supermercado D.Rita comprou um pote de café solúvel de 50g por R\$ 2,00, enquanto D. Marta comprou um pote de 250g por R\$ 4,50. Em qual dos supermercados tinha melhor preço?

Problema 6. Num supermercado D. Carmem comprou 3 potes de margarina de 50g e pagou a quantia de R\$ 1,50, em outro supermercado D. Maria comprou 7 potes e pagou a quantia de R\$ 4,00. Em qual dos supermercados o pote de margarina custava mais barato?

1.4. Problemas funcionais simples

Problema 7. 4 bombons custam 20 centavos. Quanto custa um bombom?

Problema 8. 5 kg de arroz custam R\$2,00. Quanto custa 1 kg de arroz?

1.5. Problemas funcionais complexos

Problema 9. Um pedreiro faz um muro de 12 metros de comprimento em 3 dias. Quantos metros ele iria construir se trabalhasse 7 dias?

Problema 10. Numa livraria meia dúzia de borrachas custam 24 centavos. Quanto irão custar 10 borrachas?

ANEXO 2 (Problemas a serem trabalhados durante os encontros)**2.1. Tabela ressaltando a tabuada****2.1.1. Tabuada de 3.**

Numa livraria o vendedor precisa fazer uma tabela de preços para as cadernos de 100 folhas.

Ele sabe que um caderno custa R\$ 3,00.

Tente completar a tabela com o preço de cada quantidade de cadernos.

1 caderno ----- R\$ 3,00

2 cadernos ----- R\$

3 cadernos ----- R\$

4 cadernos ----- R\$

5 cadernos ----- R\$

6 cadernos ----- R\$

7 cadernos ----- R\$

8 cadernos ----- R\$

9 cadernos ----- R\$

10 cadernos ----- R\$

2.1.2. Tabuada de 5

Numa outra livraria o vendedor precisa fazer uma tabela com os preços dos cadernos de 200 folhas. Cada caderno custa 5 cruzeiros.

Tente completar a tabela com o preço de cada quantidade de cadernos.

1 caderno ----- R\$ 5,00

2 cadernos ----- R\$

3 cadernos ----- R\$

4 cadernos ----- R\$

5 cadernos ----- R\$

6 cadernos ----- R\$

7 cadernos ----- R\$

8 cadernos ----- R\$

9 cadernos ----- R\$

10 cadernos ----- R\$

2.1.3. Tabuada de 7.

Numa outra livraria o vendedor precisa fazer uma tabela com os preços dos cadernos de 300 folhas. Cada caderno custa 7 cruzeiros.

Tente completar a tabela com o preço de cada quantidade de cadernos.

1 caderno ----- R\$ 7,00

2 cadernos ----- R\$

3 cadernos ----- R\$

4 cadernos ----- R\$

5 cadernos ----- R\$

6 cadernos ----- R\$

7 cadernos ----- R\$

8 cadernos ----- R\$

9 cadernos ----- R\$

10 cadernos ----- R\$

2.1.4. Tabuada complexa com razão 4.

Uma loja que vende ovos fez uma tabela com os preços mas estão faltando alguns números. Complete a tabela para ajudar o dono da loja:

1 ovo.....	R\$
3 ovos.....	R\$0,12
ovos.....	R\$ 0,24
9 ovos.....	R\$
12 ovos.....	R\$
ovos.....	R\$ 0,60
ovos.....	R\$ 0,72
21 ovos.....	R\$
ovos.....	R\$ 0,96
27 ovos.....	R\$
ovos.....	R\$
ovos.....	R\$ 1,32
36 ovos.....	R\$

2.1.5. Tabuada complexa com razão 7.

Uma loja que vende ovos fez uma tabela com os preços mas estão faltando alguns números. Complete a tabela para ajudar o dono da loja:

1 ovo.....	R\$
2 ovos.....	R\$ 0,14
ovos.....	R\$ 0,21
ovos.....	R\$ 0,42
9 ovos.....	R\$
12 ovos.....	R\$ 0,84
18 ovos.....	R\$
ovos.....	R\$ 1,68
30 ovos.....	R\$
36 ovos.....	R\$ 2,52

2.2. Problemas escalares do menor para o maior em contexto de compra.

Problema 1. 13 borrachas custam R\$6,00. Se você tiver R\$18,00 quantas borrachas pode comprar?

Problema 2. Na livraria 6 caixas de lápis de cor custam R\$13,00. Quanto você tem que pagar para comprar 18 caixas?

Problema 3. 6 cadernos custam R\$9,00. Se você quer comprar 24 cadernos, quantos reais você precisa?

Problema 4. Na livraria 3 caixas de lápis de cera custam R\$20,00. Quanto você tem que pagar para comprar 12 caixas?

Problema 5. 20 bombons custam R\$3,00. Se você tiver R\$12,00 quantas bombons pode comprar?

Problema 6. 4 caixas de chocolate custam R\$9,00. Quanto você tem que pagar para comprar 12 caixas?

Problema 7. 9 picolés custam R\$4,00. Se você tiver R\$8,00 quantas picolés pode comprar?

Problema 8. 8 chocolates custam R\$5,00. Se você tiver R\$20,00 quantas chocolates pode comprar?

2.3. Problemas escalares do maior para o menor com múltiplos comuns.

Problema 1. Duas dúzias de ovos (24 ovos) custam R\$6,00. Quanto você tem que pagar para comprar 6 ovos?

Problema 2. Três dúzias de bananas custam R\$5,00. Quanto você tem que pagar para comprar uma dúzia e meia?

Problema 3. Num supermercado D. Maria comprou 2 kg de feijão e pagou R\$4,00. Quanto ela teria pago se comprasse apenas $\frac{1}{2}$ kg de feijão?

Problema 4. Num supermercado D. Carmem comprou 1 kg de tomate e pagou R\$1,20. Quanto ele deveria pagar se tivesse comprado 250 gramas de tomate?

Problema 5. Um pedreiro faz um muro de 24 metros em 8 dias. quantos dias ele irá gastar para fazer um muro de 6 metros?

2.4. Problemas escalares do maior para o menor com múltiplos não comuns.

Problema 1. Na CEASA uma caixa de tomate, que possui 28 kg, é vendida a R\$20,00. Se pudessemos comprar apenas 7 kg de tomates, quanto iríamos gastar?

Problema 2. Um pintor utiliza 32 latas de tintas par pintar 60 metros de muro. Quantos metros ele poderá pintar utilizando apenas 9 latas de tinta?

Problema 3. 15 abacaxis custam R\$ 30,00. Quantos abacaxis posso comprar com R\$410,00?

Problema 4. Numa livraria 12 lápis de cor custam R\$2,00. Quantos lápis de cor você poderia comprar com R\$0,50?

Problemas escalares do maior para o menor numa relação não múltipla

Problema 1. Um marceneiro consegue fazer 30 cadeiras em 15 dias. Quantos dias ele irá gastar para fazer apenas 8 cadeiras?

Problema 2. NA CEASA duas dúzias de laranja custam R\$ 4,80. Quanto você irá pagar para comprar apenas 10 laranjas?

2.5. Problemas de compra mais vantajosa e comparação de grandezas físicas

Problema 1. Num supermercado D. Carmem comprou 3 potes de margarina de 50g e pagou a quantia de R\$1,50. Em outro supermercado D. Maria comprou 7 potes e pagou a quantia de R\$ 4,00. Em qual dos supermercados o pote de margarina custava mais barato?

Problema 2. Numa livraria Carlos comprou 3 cadernos da marca Tilibra com 100 folhas e pagou R\$15,00. Em outra livraria Marcos comprava 5 cadernos da mesma marca que a de Carlos e pagava R\$28,00. Em qual das livrarias o caderno Tilibra de 100 folhas custava mais barato?

Problema 3. Num supermercado D. Rita comprou um pote de café solúvel de 50g por R\$2,00, enquanto D. Marta comprou um pote de 250g por R\$ 4,50. Qual das duas economizou mais, D. Rita ou D. Marta?

Problema 4. Na prateleira de um supermercado havia exposto um pacote de 300g de queijo fatiado custando R\$1,50. Neste mesmo supermercado, 1 kg do queijo “inteiro” custava R\$4,50. Se você tivesse que comprar um quilo de queijo, o que seria mais barato comprar: o queijo fatiado ou o queijo inteiro?

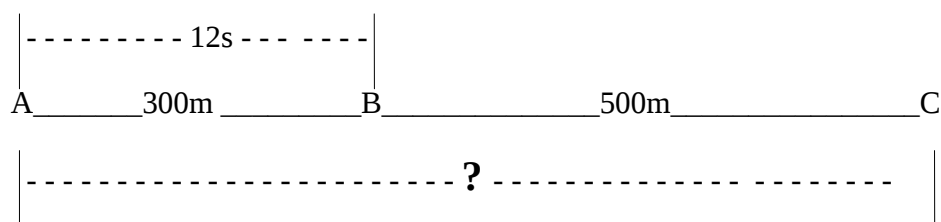
Problema 5. O carro de André percorre 180 quilômetros em 3 horas. O carro de João percorre 450 quilômetros em 8 horas. Qual o carro mais veloz?

Problema 6. Uma turma de carregadores descarrega 22 volumes de um caminhão em 2 horas. Outra turma descarrega 45 volumes em 3 horas. Alguma das duas turmas trabalha mais rápido do que a outra ou as duas trabalham iguais?

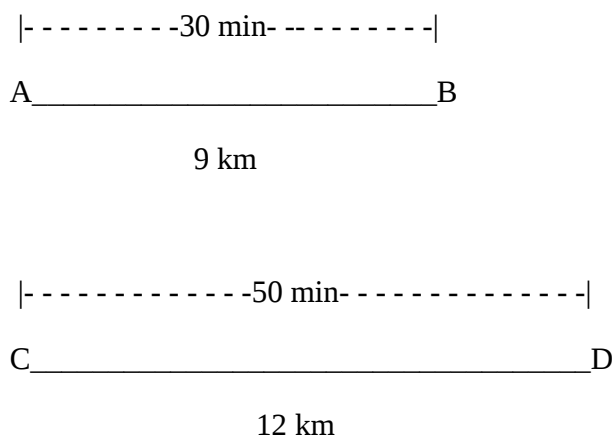
Problema 7. Um supermercado oferece dois tipos de caldos de carne (Knor ou Maggi, por exemplo). O caldo de Knor custa R\$0,27 e pesa 30 gramas, o caldo Maggi custa R\$0,36 e pesa 50 gramas. Qual dos dois tipos é mais vantagem comprar ou ambos saem pelo mesmo custo?

Problema 8. Dona Neuza consegue costurar 30 vestidos em 9 dias. Já Dona Creuza consegue costurar, em 12 dias, 50 vestidos. Qual das duas costureiras costura mais rápido ou ambas costuram com a mesma rapidez?

Problema 9. Um veículo com velocidade constante de 80 km por hora vai do ponto A ao ponto B em 12 segundos. Quanto tempo ele irá gastar para percorrer a distância do ponto A ao ponto C utilizando a mesma velocidade constante de 80 Km/h?



Problema 10. Um trem X percorre uma distância A-B em 30 minutos, em velocidade constante. Um outro trem Y percorre a distância C-D em 50 minutos, em velocidade constante. Qual dos trens foi mais veloz ou ambos se deslocaram com a mesma velocidade?



2.6. Problemas de cálculo do valor unitário

Problema 1. 9 bolas custam R\$18,00. Quanto custa uma bola?

Problema 2. 3 cadernos custam R\$12,00. Quanto custa um caderno?

Problema 3. 4 bombons custam R\$0,20. Quanto custa um bombom?

Problema 4. 5kg de arroz custam R\$2,00. Quanto custa 1 kg de arroz?

Problema 5. 15 laranjas custam R\$5,00. Quantos ovos compro com R\$1,00?

Problema 6 21 doces custam R\$3,00. Quantos doces compro com R\$1,00?

Problema 7. 15 canetas custam R\$ 5,00. Quantas canetas posso comprar com R\$1,00?

Problema 8. Um operário produz 350 pares de sapatos em uma semana de trabalho de 5 dias. Quantos pares de sapatos ele produz por dia?

Problema 9. A distância entre duas cidades é de 2400 km, uma empresa de ônibus faz esse percurso entre as duas cidades em 4 dias. Quantos quilômetros são percorridos por dia?

Problema 10. Numa fábrica uma máquina produz em 8 horas de trabalho 2560 peças de metal. Quantas peças de metal são produzidas por hora?

2.7. Problemas funcionais complexos

Problema 1. Um operário produz 300 pares de sapatos em 16 dias de trabalho. quantos dias serão necessários para que se possa produzir 800 pares de sapatos?

Problema 2. Um pedreiro consegue levantar um muro de 16 metros de comprimento em 6 horas. Quantos metros de muro ele será capaz de levantar gastando 36 horas?

Problema 3. Um pintor gasta para pintar um muro de 12 metros de comprimento 3 latas de tintas. Quantos metros ele poderia pintar se tivesse 7 latas de tintas?

Problema 4. Numa livraria meia dúzia de borrachas custam R\$0,24. Quanto você pagaria se tivesse que comprar 10 borrachas?

Problema 5. Um agricultor consegue colher 300 sacos de arroz plantando em 15 Hectares de terra fértil. Quantos Hectares ele terá que plantar para obter 800 sacos de arroz?

Problema 6. Para uma padaria fazer um bolo de noiva ela utiliza 16 ovos para 6 quilos de farinha de trigo. Quantos ovos serão necessários se fossem utilizados 20 quilos de farinha de trigo?

Problema 7. Um carro percorreu 146 quilômetros em 2 horas. Continuando com a mesma velocidade, quantos quilômetros percorreria em 9 horas?

Problema 8. Uma torneira leva 2 horas para encher um tanque de 17 litros. Trabalhando por 6 horas e meia quantos litros encherá?

Problema 9. Um pedreiro gasta 12 horas para construir um muro de 3m^2 . Quantas horas irá gastar para construir um muro de 7m^2 ?

Problema 10. Numa fábrica uma máquina produz 480 peças de metal em 3 horas. Quantas peças ela produzirá trabalhando 7 horas?

ANEXO 3 : ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL: considerações teóricas

Utilizamos algumas perguntas e respostas, conforme descrito por Lessa (1996), abordando algumas considerações teóricas sobre a análise multidimensional, que poderão facilitar o entendimento desta análise de dados usada na dissertação.

1) Em que consiste, em termos breves, uma análise descritiva multidimensional?

Trata-se de uma ambiente de análise em que os dados de uma pesquisa são “olhados” sob diversas perspectivas de forma simultânea, a partir da multiplicidade de dimensões representadas e associadas num plano fatorial. Esse tipo de análise permite, portanto, vislumbrar uma estrutura global para a nuvem de dados, nuvem esta que poderá ser analisada sob mais de um ponto-de-vista (ou seja, em função de cada um dos fatores extraídos)

2) Qual a principal vantagem desta análise sobre a análise unidimensional clássica?

Uma análise unidimensional permite constatar uma associação entre duas dimensões, enquanto que a análise multidimensional permite constatar a associação de várias dimensões simultaneamente. Por exemplo: Para verificar se existe alguma relação entre o tipo de resposta e a estratégia utilizada no pós-teste nos dois grupos (experimental e controle), inicialmente deve-se observar cada uma das relações isoladamente, para em seguida, observando os dois histogramas, inferir a associação entre as duas dimensões (tipo de resposta e estratégia adotada). Portanto a análise unidimensional permite constatar associações, mas sempre em termos de uma dimensão com outra por cada vez, enquanto que no plano fatorial da análise multidimensional, diversas dimensões são associadas simultaneamente.

3) Em que consiste um fator enquanto ferramenta de resumo de informação? Qual a importância da idéia de projeção para a compreensão do fator? Qual a informação o fator resume?

O fator é uma reta que passa através do ponto típico (ou ponto de menor variância) de uma nuvem de informações oriundas de várias fontes, e recebe as projeções dessas fontes. Cabe ao programa uma busca da melhor orientação possível para esse fator de forma a que tais projeções deformem as informações o mínimo possível. Por exemplo:

Na projeção A, tem-se um fator que respeita muito mais a forma original da nuvem do que a projeção proposta em B. Disso resulta que o fator proposto na Projeção A perde ou deforma menos informação do que o fator proposto na projeção B. Assim uma análise multidimensional constrói uma nuvem complexa, buscando em seguida os melhores redutores de informação, que são os fatores.

Convém ainda ressaltar que o fator reúne melhor a dispersão em torno do ponto de tipicidade, do que qualquer outra variável tomada isoladamente. Em função disso, o pesquisador pode interpretar o fator, enriquecendo a descrição dos dados, pois: (a) todos os elementos podem ser visualizados conjuntamente, com a localização de um elemento podendo ser considerada em relação a todos os demais; (b) Os elementos podem ser utilizados para a elaboração da

interpretação do fator; (c) inversamente, os elementos podem ser repensados em função do fator.

- 4) A análise fatorial produz fatores em ordem decrescente de poder de síntese de informação. Em que o fator 1 se distingue dos seguintes (2,3,4 etc)?

Conforme já citado anteriormente, pode-se dispor na análise multidimensional de tantas perspectivas de análise quantos forem os planos fatoriais gerados. O plano fatorial pode ser constituído pelos eixos principais (1 e 2), ou pelos eixos 3 e 4, 1 e 3, 2 e 3, e assim por diante. O que difere um fator de outro é a sua percentagem da variância (ex.: 20%). O fator 2 explicará um pouco menos (ex.: 14%), o fator 3 ainda menos (9%) e assim por diante.

- 5) Em que consiste um plano fatorial? Qual a métrica desse plano (ou seja, no plano básico, o ponto a está a uma certa distância da interseção dos eixos 1 e 2? Esta distância oa é expressa em termos de que unidade de medida?

Se considerarmos que a distância de um elemento em relação ao ponto de tipicidade (o) representa o afastamento ou desvio desse elemento em relação a um padrão, podemos assimilar esse desvio ao conceito de variância (Reuchilin, 1976, p.98) Sendo assim, num plano fatorial: (a) as distâncias de cada elemento em relação ao baricentro¹³ (ou ponto de tipicidade) expressam a contribuição desse elemento a variância global¹⁴ da nuvem de pontos; (b) a distância da projeção de tal ponto sobre um dos eixos em relação ao baricentro é proporcional à contribuição desse elemento. Portanto a métrica desta distância é expressa em termos de variância.

- 6) O que representa o ponto de interseção no plano fatorial? O que representa um sujeito muito próximo do ponto de interseção? E uma modalidade de categorias de respostas?

O ponto de interseção, que é justamente o baricentro antes referido, representa um ponto médio ou típico, ou seja, aquele ponto que melhor resume uma nuvem de informação, segundo Benzencri, citado por Fenelon (1981), o ponto típico “(...) está para a nuvem multidimensional de informações assim como a média está para uma distribuição unidimensional de frequências “. Assim o baricentro poderia ser entendido como o sujeito ou modalidade de resposta padrão, banal, multidimensionalmente típico. Portanto, o sujeito ou modalidade de resposta muito próximo do ponto de interseção é aquele sujeito ou modalidade que menos contribuiu para aquela diferenciação propiciada pelo plano fatorial considerado.

- 7) O que significa contribuição acima da média de contribuições do eixo?

¹³ Em um plano ou em um sólido tridimensional, o ponto que sozinho representa, fisicamente, todo o corpo, é o centro de gravidade: tal corpo, apoiado sobre esse ponto ou apoiado por ele, permanecerá em equilíbrio, pois o somatório de forças, no referido ponto é nulo; por analogia, o ponto de tipicidade da nuvem é frequentemente denominado centro de gravidade ou baricentro.

¹⁴ Variância global se refere à variância explicada pelo plano fatorial, havendo ainda um resíduo não abarcado por este, denominado variância não-explicada. A variância total abarca a variância global mais a variância não-explicada.

Para a obtenção dessa média, divide-se o valor global 100 (em %) pelo total de sujeitos e modalidades de respostas. Por exemplo, nesse estudo, o total de sujeitos foi 74, então a contribuição média dos sujeitos foi de 1,35% (100 dividido por 74) e o total de modalidades foi 113, então a contribuição média das modalidades foi aproximadamente 0,884% (100 dividido por 113). Portanto, quando se diz “as modalidades que aparecem no plano fatorial são aquelas cuja contribuição foi igual ou acima da média”, isto indica que só foram consideradas, no caso deste estudo, os sujeitos que tiveram uma contribuição igual ou acima de 1,35% , e as modalidades de respostas que tiveram uma contribuição igual ou acima de 0,884%.

ANEXO 4 –Análise Multidimensional: testes descritivos

CONTRIBUIÇÃO MÉDIA A CONSIDERAR (CTR): **8,84**

1-	!	J1	!	QLT	POID	INR!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!
	1!	PROC!		81	28	3!	44	5	0!	-32	2	0!	177	74	4!
	2!	PROC!		81	12	8!	-104	5	0!	75	2	0!	-418	74	10!
	3!	1RE1!		180	37	1!	107	157	1!	-22	6	0!	-35	17	0!
	4!	1RE3!		134	2	11!	-1421	115	12!	427	10	2!	374	8	1!
	5!	1RE9!		50	1	11!	-1666	38	4!	-218	1	0!	901	11	2!
	6!	1ES1!		550	10	8!	971	326	27!	-412	59	8!	693	166	24!
	7!	1ES2!		323	9	9!	364	40	3!	628	117	16!	-747	166	25!
	8!	1ES1!		450	21	6!	-649	444	24!	-75	6	1!	-12	0	0!
	9!	1PR1!		475	7	9!	1228	321	30!	315	21	3!	789	133	21!
	10!	1PR2!		275	9	9!	356	35	3!	675	126	18!	-644	114	17!
	11!	1PR4!		271	18	6!	-572	263	16!	-84	6	1!	-55	2	0!
	12!	1PR7!		328	4	10!	275	8	1!	-1695	300	49!	433	20	3!
	13!	1PR1!		68	3	11!	-941	64	7!	-55	0	0!	-232	4	1!
	14!	2RE1!		83	39	0!	48	82	0!	6	1	0!	-3	0	0!
	15!	2RE3!		83	1	11!	-1717	82	9!	-217	1	0!	100	0	0!
	16!	2ES1!		451	13	8!	559	150	11!	-311	46	6!	728	255	33!
	17!	2ES2!		184	14	8!	100	5	0!	389	77	9!	-446	101	13!
	18!	2ES6!		86	1	11!	691	7	1!	-2192	66	12!	991	13	3!
	19!	2ES1!		275	13	8!	-693	230	18!	-3	0	0!	-305	45	6!
	20!	2PR1!		501	7	9!	1323	373	35!	270	16	2!	727	113	18!
	21!	2PR2!		206	14	7!	91	4	0!	405	89	11!	-455	112	14!
	22!	2PR4!		139	9	9!	-584	102	9!	-133	5	1!	-329	32	5!
	23!	2PR7!		355	6	10!	-257	13	1!	-1097	233	35!	751	109	18!
	24!	2PR1!		112	3	10!	-1090	105	11!	228	5	1!	-175	3	0!
	25!	3RE1!		44	36	1!	31	9	0!	-41	16	0!	-44	19	0!
	26!	3RE3!		91	2	11!	-820	38	4!	680	26	5!	678	26	5!
	27!	3RE8!		5	1	11!	-570	4	0!	51	0	0!	120	0	0!
	28!	3RE9!		43	1	11!	1648	37	4!	412	2	0!	533	4	1!
	29!	3RE1!		5	1	11!	140	0	0!	-442	3	0!	-400	2	0!
	30!	3ES1!		260	10	9!	802	207	18!	-259	22	3!	313	31	5!
	31!	3ES2!		416	7	9!	-143	4	0!	-1284	351	53!	-530	60	9!
	32!	3ES6!		92	11	8!	125	6	1!	412	67	9!	-215	18	3!
	33!	3ES1!		372	12	8!	-691	202	16!	577	141	18!	263	29	4!
	34!	3PR1!		220	8	9!	717	131	12!	-16	0	0!	592	89	14!
	35!	3PR2!		80	3	10!	345	11	1!	-825	60	10!	-329	10	2!
	36!	3PR3!		295	6	10!	675	80	8!	927	150	23!	-609	65	11!
	37!	3PR4!		99	6	10!	-701	86	8!	200	7	1!	191	6	1!
	38!	3PR5!		13	1	11!	539	8	1!	232	1	0!	327	3	1!
	39!	3PR7!		418	8	9!	-106	3	0!	-1231	354	52!	-514	62	10!
	40!	3PR1!		290	8	9!	-810	167	15!	637	103	15!	281	20	3!
	41!	4RE1!		257	29	3!	275	191	6!	161	65	3!	-20	1	0!
	42!	4RE3!		241	10	9!	-789	200	17!	-343	38	5!	-101	3	0!
	43!	4RE8!		47	1	11!	-411	5	1!	-91	0	0!	1236	42	8!
	44!	4RE9!		69	1	11!	466	3	0!	-2164	64	12!	406	2	0!
	45!	4ES1!		357	8	9!	1007	237	22!	155	6	1!	702	115	18!
	46!	4ES2!		257	11	8!	-40	1	0!	-769	234	31!	236	22	3!
	47!	4ES6!		392	8	9!	539	68	6!	942	207	31!	-707	117	18!
	48!	4ES1!		374	14	8!	-832	353	26!	31	0	0!	-196	20	2!
	49!	4PR1!		396	6	10!	1171	265	25!	344	23	3!	748	108	17!
	50!	4PR2!		59	5	10!	191	5	1!	-624	54	9!	46	0	0!

1-	! J1 !	QLT	POID	INR!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!
51!	4PR3!	392	8	9!	539	68	6!	942	207	31!	-707	117	18!
52!	4PR4!	159	5	10!	-539	40	4!	-404	23	4!	-832	96	16!
53!	4PR5!	47	1	11!	-411	5	1!	-91	0	0!	1236	42	8!
54!	4PR7!	219	6	10!	-141	4	0!	-1026	204	31!	244	12	2!
55!	4PR1!	303	9	9!	-998	275	24!	276	21	3!	162	7	1!
56!	5RE1!	74	34	2!	114	67	1!	-33	5	0!	-15	1	0!
57!	5RE3!	128	6	10!	-553	53	5!	439	34	5!	485	41	7!
58!	5RE1!	385	1	11!	-968	13	1!	-2816	109	20!	-4383	263	50!
59!	5ES1!	421	9	9!	988	291	25!	-402	48	7!	525	82	12!
60!	5ES2!	155	6	10!	134	3	0!	-785	119	18!	-405	32	5!
61!	5ES6!	183	6	10!	559	54	5!	424	31	5!	-748	98	16!
62!	5ES1!	618	18	6!	-714	411	26!	436	153	15!	259	54	6!
63!	5ES1!	385	1	11!	-968	13	1!	-2816	109	20!	-4383	263	50!
64!	5PR2!	86	1	11!	1090	16	2!	1303	23	4!	-1847	47	9!
65!	5PR4!	55	3	10!	3	0	0!	769	52	9!	-193	3	1!
66!	5PR5!	40	1	11!	1422	28	3!	896	11	2!	314	1	0!
67!	5PR7!	56	1	11!	-1040	15	2!	-246	1	0!	1714	40	8!
68!	5PR1!	499	20	6!	592	351	20!	-376	141	13!	-85	7	1!
69!	5PR1!	535	15	7!	-831	397	29!	376	81	9!	315	57	7!
70!	5PR2!	385	1	11!	-968	13	1!	-2816	109	20!	-4383	263	50!
71!	6RE1!	13	30	3!	63	11	0!	17	1	0!	-8	0	0!
72!	6RE3!	115	6	10!	-578	65	6!	109	2	0!	499	48	8!
73!	6RE8!	179	3	11!	865	54	6!	213	3	1!	-1293	121	22!
74!	6RE9!	88	1	11!	-423	5	1!	-1663	77	14!	459	6	1!
75!	6ES1!	152	4	10!	719	54	6!	-849	75	12!	465	23	4!
76!	6ES2!	133	4	10!	454	22	2!	-999	104	17!	-270	8	1!
77!	6ES6!	323	14	7!	615	205	15!	55	2	0!	-463	116	14!
78!	6ES1!	612	18	6!	-712	431	26!	339	97	10!	314	84	9!
79!	6PR3!	61	1	11!	899	11	1!	854	10	2!	-1706	40	8!
80!	6PR4!	41	3	10!	-48	0	0!	677	40	7!	-68	0	0!
81!	6PR5!	179	3	11!	865	54	6!	213	3	1!	-1293	121	22!
82!	6PR7!	122	2	11!	1020	59	6!	309	5	1!	996	57	10!
83!	6PR1!	363	16	7!	497	168	11!	-489	163	18!	-216	32	4!
84!	6PR1!	583	15	7!	-854	444	31!	266	43	5!	395	95	11!
85!	9RE1!	409	25	4!	373	242	10!	310	167	11!	-2	0	0!
86!	9RE3!	466	11	8!	-963	367	30!	-456	82	11!	-202	16	2!
87!	9RE8!	125	3	10!	448	18	2!	-829	61	10!	725	46	8!
88!	9ES1!	269	5	10!	390	24	2!	-861	116	18!	910	129	21!
89!	9ES2!	18	1	11!	246	1	0!	-901	11	2!	-684	6	1!
90!	9ES6!	570	20	6!	552	304	17!	493	243	22!	-151	23	2!
91!	9ES1!	551	14	7!	-945	483	35!	-335	61	7!	-109	6	1!
92!	9PR1!	182	2	11!	847	41	4!	-1539	135	23!	326	6	1!
93!	9PR3!	441	14	8!	375	72	5!	707	255	31!	-474	114	15!
94!	9PR4!	382	10	8!	-888	272	23!	-489	83	11!	-280	27	4!
95!	9PR5!	136	2	11!	1055	47	5!	-1397	82	14!	380	6	1!
96!	9PR7!	244	9	9!	540	80	7!	86	2	0!	765	161	24!
97!	9PR1!	140	4	10!	-1099	126	13!	82	1	0!	356	13	2!
98!	10RE!	326	30	3!	293	267	7!	73	17	1!	116	42	2!
99!	10RE!	398	6	10!	-1444	364	35!	-94	2	0!	432	33	5!
100!	10RE!	422	2	11!	57	0	0!	-1012	59	10!	-2523	364	66!

1	!	J1	!	QLT	POID	INR	!	1#F	COR	CTR	!	2#F	COR	CTR	!	3#F	COR	CTR	!	
101	!	10RE	!	30		1	11	!	555	9	1	!	-85	0	0	!	-881	22	4	!
102	!	10RE	!	71		1	11	!	-1865	48	5	!	1170	19	3	!	586	5	1	!
103	!	10ES	!	44		1	11	!	-749	8	1	!	-1510	31	6	!	637	6	1	!
104	!	10ES	!	500		25	4	!	493	423	17	!	-46	4	0	!	-206	74	5	!
105	!	10ES	!	408		14	8	!	-822	345	26	!	101	5	1	!	339	58	7	!
106	!	10ES	!	71		1	11	!	-1865	48	5	!	1170	19	3	!	586	5	1	!
107	!	10PR	!	195		2	11	!	269	3	0	!	-2075	182	32	!	479	10	2	!
108	!	10PR	!	264		21	6	!	470	233	13	!	162	28	2	!	-59	4	0	!
109	!	10PR	!	217		4	10	!	-1251	190	19	!	-411	20	3	!	241	7	1	!
110	!	10PR	!	426		3	11	!	240	4	0	!	-756	41	7	!	-2291	380	68	!
111	!	10PR	!	117		1	11	!	1282	46	5	!	85	0	0	!	1595	71	13	!
112	!	10PR	!	194		9	9	!	-620	115	10	!	342	35	5	!	385	44	7	!
113	!	10PR	!	71		1	11	!	-1865	48	5	!	1170	19	3	!	586	5	1	!
	!		!			1000	!			1000	!			1000	!			1000	!	

```
1AXE HORIZONTAL( 1)--AXE VERTICAL( 2)--TITRE:FICHER CR,, PAR DS3.10
```

NOMBRE DE POINTS : 113

==ECHELLE : 4 CARACTERE(S) = .195 1 LIGNE = .081

[illegible]

```

!          9PR1    4ES13RE8      PROC    10RE6ES6          ! 2
01
+-----1PR1-----1ES1-----PROC1RE1-----10ES3PR1-----+ 3
01
!          10RE          1PR44RE8      !          10RE          ! 2
01
2RE31RE9          !          ! 0
01
!          5PR7          !          2ES13ES1          ! 0
01
!          9ES14RE34PR4      !          5PR1    5ES1          ! 0
01
!          10PR9RE3          !    3RE1          1ES1          ! 0
01
!          9PR4          !          6PR1          ! 0
01
!          !    4PR2          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          4ES25ES2          ! 1
01
!          !    3PR2    6ES1          ! 2
01
!          !    9ES2          ! 0
01
!          4PR710RE    6ES2          ! 0
01
!          2PR7!          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          3ES23PR7          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          !          9PR5          ! 0
01
!          10ES          !          9PR1          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          6RE9      !    1PR7          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          !          ! 0
01
!          !    10PR          ! 0
01
!          !    4RE9    2ES6          ! 0
01

```

!	!	!	0
01			
!	!	!	0
01			
!	!	!	0
01			
!	!	!	0
01			
!	!	!	0
01			
!	!	!	0
01			
!	!	!	0
01			
!	5RE1	!	2
01			
+	-----+	-----+	0
01			

NOMBRE DE POINTS SUPERPOSES : 19

10ES(10RE)	10PR(10RE)	4PR3(4ES6)	9PR3(1PR2)	2PR2(2ES2)	6ES1(5PR1)
6PR5(6RE8)	2RE1(PROC)	6RE1(PROC)	2ES1(1ES1)	3RE1(PROC)	5RE1(1RE1)
2PR4(1PR4)	4PR5(4RE8)	10PR(5ES2)	9RE8(3PR2)	9ES1(3PR2)	5ES1(5RE1)
5PR2(5RE1)					

1AXE HORIZONTAL(1)--AXE VERTICAL(3)--TITRE:FICHER CR,, PAR DS3.10

NOMBRE DE POINTS : 113

==ECHELLE : 4 CARACTERE(S) = .195 1 LIGNE = .081

[illegible]

!		PROC2ES29PR36ES6	!	2
01				
!		3ES23PR7	!	0
01				
!		! 1PR2 3PR3	!	0
01				
!		! 9ES2 4ES6	!	1
01				
!		! 1ES25ES6	!	0
01				
!	4PR4	! 10RE	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	6RE8	!
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	6PR3	!
01				
!		!	5PR2	!
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	10PR	!
01				
!		!	!	0
01				
!		!	!	0
01				
!		!	10RE	!
01				
!		!	!	0
01				

ANEXO 5: ANÁLISE UNIDIMENSIONAL

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

ACERTPOS número de respostas corretas no pós-test
with ACERTPRE Número de respostas corretas no pré-test

Mean Rank	Cases
16,67	24 - Ranks (ACERTPRE LT ACERTPOS)
7,00	5 + Ranks (ACERTPRE GT ACERTPOS)
	8 Ties (ACERTPRE EQ ACERTPOS)
	--
	37 Total
Z = -3,9462	2-Tailed P = ,0001

- - - - - Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test

ACERTPOS número de respostas corretas no pós-test
with ACERTPRE Número de respostas corretas no pré-test

Mean Rank	Cases
16,92	25 - Ranks (ACERTPRE LT ACERTPOS)
12,17	6 + Ranks (ACERTPRE GT ACERTPOS)
	3 Ties (ACERTPRE EQ ACERTPOS)
	--
	34 Total
Z = -3,4294	2-Tailed P = ,0006

- - - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test
 ANÁLISE FOCALIZADA NO GRUPO = 1 (EXPERIMENTAL)

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
 by PROCEDE procedência dos sujeitos

Mean Rank Cases

17,60	25	PROCEDE = 1	alunos antigos
21,92	12	PROCEDE = 2	alunos novos
	--		
	37	Total	

		Exact	Corrected for ties	
U	W	2-Tailed P	Z	2-Tailed P
115,0	263,0	,2672	-1,1379	,2552

DIFERENÇA NÃO-SIGNIFICATIVA.

- - - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

ANÁLISE FOCALIZADA NO GRUPO = 2 (CONTROLE)

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
by PROCEDE procedência dos sujeitos

Mean Rank Cases

20,81	27	PROCEDE = 1	alunos antigos
11,56	9	PROCEDE = 2	alunos novos
	--		
	36	Total	

U	W	Exact 2-Tailed P	Corrected for ties Z	2-Tailed P
59,0	104,0	,0215	-2,2882	,0221

DIFERENÇA SIGNIFICATIVA.

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)

ALUNOS NOVOS DO GRUPO CONTROLE

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	5,00	1	10,0	11,1	11,1
	6,60	2	20,0	22,2	33,3
	6,90	1	10,0	11,1	44,4
	7,20	1	10,0	11,1	55,6
	7,30	1	10,0	11,1	66,7
	7,50	1	10,0	11,1	77,8
	8,70	2	20,0	22,2	100,0
	99,00	1	10,0	Missing	
	Total	10	100,0	100,0	

Mean 7,167 Minimum 5,000 Maximum 8,700

Valid cases 9 Missing cases 1

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)

ALUNOS NOVOS DO GRUPO EXPERIMENTAL

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	6,90	1	8,3	8,3	8,3
	7,20	1	8,3	8,3	16,7
	7,50	2	16,7	16,7	33,3
	8,10	2	16,7	16,7	50,0
	8,50	1	8,3	8,3	58,3
	8,70	1	8,3	8,3	66,7
	8,90	1	8,3	8,3	75,0
	9,00	2	16,7	16,7	91,7
	10,00	1	8,3	8,3	100,0
	Total	12	100,0	100,0	
Mean	8,283	Minimum	6,900	Maximum	10,000
Valid cases	12	Missing cases	0		

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)

ALUNOS VELHOS DO GRUPO CONTROLE

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	6,60	1	3,7	3,7	3,7
	7,10	1	3,7	3,7	7,4
	7,20	1	3,7	3,7	11,1
	7,40	2	7,4	7,4	18,5
	7,50	3	11,1	11,1	29,6
	7,60	1	3,7	3,7	33,3
	7,70	2	7,4	7,4	40,7
	7,80	1	3,7	3,7	44,4
	7,90	2	7,4	7,4	51,9
	8,00	1	3,7	3,7	55,6
	8,20	4	14,8	14,8	70,4
	8,30	1	3,7	3,7	74,1
	8,50	1	3,7	3,7	77,8
	8,60	1	3,7	3,7	81,5
	8,70	1	3,7	3,7	85,2
	8,80	1	3,7	3,7	88,9
	9,20	2	7,4	7,4	96,3
	9,40	1	3,7	3,7	100,0
	Total	27	100,0	100,0	
Mean	8,011	Minimum	6,600	Maximum	9,400
Valid cases	27	Missing cases	0		

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)

ALUNOS VELHOS GRUPO EXPERIMENTAL

Value Label	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	6,00	1	4,0	4,0	4,0
	6,50	1	4,0	4,0	8,0
	6,70	1	4,0	4,0	12,0
	7,00	1	4,0	4,0	16,0
	7,30	2	8,0	8,0	24,0
	7,40	1	4,0	4,0	28,0
	7,50	1	4,0	4,0	32,0
	7,60	2	8,0	8,0	40,0
	7,80	3	12,0	12,0	52,0
	7,90	1	4,0	4,0	56,0
	8,10	3	12,0	12,0	68,0
	8,20	2	8,0	8,0	76,0
	8,40	1	4,0	4,0	80,0
	8,50	1	4,0	4,0	84,0
	8,90	1	4,0	4,0	88,0
	9,30	2	8,0	8,0	96,0
	9,40	1	4,0	4,0	100,0
	Total	25	100,0	100,0	
Mean	7,868	Minimum	6,000	Maximum	9,400
Valid cases	25	Missing cases	0		

- - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
 by PROCEDE procedência dos sujeitos
 COMPARAÇÃO NO GRUPO EXPERIMENTAL DE NOVOS X ANTIGOS

Lembrete: postos menores para escores menores; consequentemente, média dos
 postos menor para
 aquele grupo com escores menores

Mean Rank Cases

17,60	25	PROCEDE = 1	alunos antigos
21,92	12	PROCEDE = 2	alunos novos
	--		
	37	Total	

U	W	Exact 2-Tailed P	Corrected for ties Z	2-Tailed P
115,0	263,0	,2672	-1,1379	,2552

obs: DIFERENÇA NÃO-SIGNIFICATIVA

- - - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
by PROCEDE procedência dos sujeitos

Mean Rank Cases

20,81	27	PROCEDE = 1	alunos antigos
11,56	9	PROCEDE = 2	alunos novos
	--		
	36	Total	

		Exact	Corrected for ties	
U	W	2-Tailed P	Z	2-Tailed P
59,0	104,0	,0215	-2,2882	,0221

- - - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
by GRUPO grupo de sujeitos

GRUPO EXP. X CONTROLE NO INTERIOR DO GRUPO DE ALUNOS ANTIGOS
Mean Rank Cases

25,20	25	GRUPO = 1	experimental
27,70	27	GRUPO = 2	controle
	--		
	52	Total	

		Corrected for ties	
U	W	Z	2-Tailed P
305,0	630,0	-,5962	,5510

- - - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
by GRUPO grupo de sujeitos

GRUPO EXP. X CONTROLE NO INTERIOR DO GRUPO DE ALUNOS NOVOS

Mean Rank Cases

13,67	12	GRUPO = 1	experimental
7,44	9	GRUPO = 2	controle
	--		
	21	Total	

U	W	Exact 2-Tailed P	Corrected for ties Z	2-Tailed P
22,0	67,0	,0227	-2,2838	,0224

- - - - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)
by GRUPO grupo de sujeitos

Mean Rank Cases

38,97	37	GRUPO = 1	experimental
34,97	36	GRUPO = 2	controle
	--		
	73	Total	

		Corrected for ties	
U	W	Z	2-Tailed P
593,0	1259,0	-,8065	,4200

t-tests for independent samples of GRUPO grupo de sujeitos

Variable	Number of Cases	Mean	SD	SE of Mean
NOTA Nota em Matemática 4a. série (94)				
experimental	37	8,0027	,875	,144
controle	36	7,8000	,881	,147

Mean Difference = ,2027

Levene's Test for Equality of Variances: F= ,018 P= ,895

t-test for Equality of Means					95%
Variances	t-value	df	2-Tail Sig	SE of Diff	CI for Diff
Equal	,99	71	,327	,206	(-,207; ,613)
Unequal	,99	70,92	,327	,206	(-,207; ,613)

I39	--*	--*	*--*	*---	!
	!	!	!	!	!
I23	---	!	!	!	!
		!	!	!	!
I26	-----	!	!	!	!
		!	!	!	!
I35	---*	----	!	!	!
	!		!	!	!
I48	---		!	!	!
			!	!	!
I43	---*	**--	*---	!	!
	!	!	!	!	!
I30	----	!	!	!	!
		!	!	!	!
I44	-----		!	!	!
		!	!	!	!
I5	-----		!	!	!
			!	!	!
I2	-----			!	!
				!	!
I3	-----*		*-----	!	!
	!		!	!	!
I50	-*	----	!	!	!
	!		!	!	!
I47	--		!	!	!
			!	!	!
I12	*	--*	----	*---	!
	!	!	!	!	!
I36	-	!	!	!	!
		!	!	!	!
I62	---		!	!	!
			!	!	!
I37	--*	----	!	!	!
	!		!	!	!
I73	---				!
					!
I4	-----*		*-----	*-----	!
		!	!	!	!
I22	-----		!	!	!
			!	!	!
I49	-----*		!	!	!
		!	!	!	!
I19	-----			!	!
				!	!
I66	-----			*	!
				!	!
I13	-----				!
					!
I55	-*	*		*	*
	!	!	!	!	!
I54	---	!	!	!	!
		!	!	!	!
I45	----		!	!	!
			!	!	!
I74	-----		!	!	!
			!	!	!
I52	-----				!
					!
I56	--*	--*		*-----	*
	!	!		!	!
I41	---	!		!	!
		!		!	!
I69	---*	--		!	!
	!			!	!
I61	----			!	!
				!	!
I68	-----*		*-----	!	!
		!	!	!	!
I65	-----		!	!	!
			!	!	!
I42	-----*				!
					!

I67	-----	!	!
I46	-----	*	!
I8	-----	*	!
I1	-----	!	!

