

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
NUCLEARES

SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E
INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

GUSTAVO KOURY COSTA

RECIFE – PERNAMBUCO – BRASIL
NOVEMBRO – 2004

**SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E
INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

GUSTAVO KOURY COSTA

**SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E
INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tese submetida ao Programa de
Tecnologias Energéticas e Nucleares, do
Departamento de Energia Nuclear da
Universidade Federal de Pernambuco,
para a obtenção do título de Doutor em
Ciência. Área de Concentração:
Engenharia de Reatores.

ORIENTADORES:

PROF. DR. PAULO ROBERTO MACIEL LYRA

PROF. DR. CARLOS ALBERTO BRAYNER DE OLIVEIRA LIRA

RECIFE – PERNAMBUCO – BRASIL

NOVEMBRO – 2004

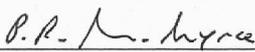
**SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS
COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Gustavo Koury Costa

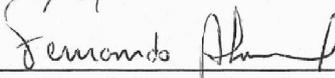
APROVADO EM: 16.11.2004

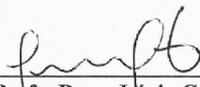
ORIENTADORES: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra
Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

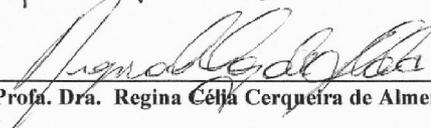
COMISSÃO EXAMINADORA:


Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra - DEMEC/UFPE

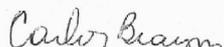

Prof. Dra. Ana Rosa Mendes Primo - DEMEC/UFPE


Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima - CRCN/CNEN


Prof. Dra. Lúcia Catabriga - DI/UFES


Prof. Dra. Regina Célia Cerqueira de Almeida - LNCC/RJ

Visto e permitida a impressão


Coordenador do PROTEN/DEN/UFPE

À minha esposa Flávia...
Ao amigo Arthur Fraser...
Ao amigo Paulo Lyra...

Dedico

AGRADECIMENTOS

Agradeço de coração...

Ao meu Deus e Senhor Jesus. A Ele toda honra e glória.

À minha esposa Flávinha, meu maior tesouro.

Ao meu pai Belmirando e à minha mãe Dulce, que já não está entre nós.

Aos pais de minha esposa, Flávio e Fátima, que são como pais para mim.

Ao meu grande amigo Arthur Fraser, sempre presente em tudo.

Ao meus orientadores Paulo e Brayner que acreditaram em mim desde o começo.

À professora Lúcia Catabriga, pela preciosa ajuda nas dificuldades.

À professora Regina Célia pelas correções detalhadas do texto.

Aos professores Ramiro, Fernando e Ana Rosa, pela ajuda valiosa.

Aos colegas do CEFET, em particular, à Luciana Lima e George Marinho.

Aos colegas do DEMEC pelas conversas animadas.

SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Autor: Gustavo Koury Costa

Orientadores :

Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra

Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

RESUMO

Muito embora os escoamentos de fluidos incompressíveis representem um caso particular dos escoamentos de fluidos em seu espectro mais amplo, os métodos numéricos e a formulação matemática para simulação de escoamentos compressíveis e incompressíveis apresentam particularidades próprias, de maneira que, geralmente não é possível abranger ambos os casos com apenas um modelo. Neste trabalho, parte-se de uma metodologia tipicamente compressível, modificada para a utilização de variáveis de pressão, e, através de uma ponderação dos parâmetros de estabilização, apresenta-se uma formulação simplificada que abrange desde escoamentos supersônicos de gases até escoamentos à baixas velocidades. O método é suficientemente flexível para permitir também a simulação de escoamentos de líquidos. Exemplos uni, bi e tridimensionais utilizando variáveis conservativas e de pressão, são apresentados e comparados com resultados publicados na literatura para fins de validação do método.

THREE DIMENSIONAL SIMULATION OF COMPRESSIBLE AND INCOMPRESSIBLE FLOWS THROUGH THE FINITE ELEMENT METHOD

Author: Gustavo Koury Costa

Advisers:

Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra

Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

ABSTRACT

Although incompressible fluid flows can be regarded as a particular case of a general problem, numerical methods and the mathematical formulation aimed to solve compressible and incompressible flows have their own peculiarities, in such a way, that it is generally not possible to attain both regimes with a single approach. In this work, we start from a typically compressible formulation, slightly modified to make use of pressure variables and, through augmenting the stabilising parameters, we end up with a simplified model which is able to deal with a wide range of flow regimes, from supersonic to low speed gas flows. The resulting methodology is flexible enough to allow for the simulation of liquid flows as well. Examples using conservative and pressure variables are shown and the results are compared to those published in the literature, in order to validate the method.

LISTA DE SÍMBOLOS

Grandezas físicas

ρ massa específica, kg/m^3

ν volume específico, m^3/kg

u_k k-ésima componente do vetor velocidade \mathbf{u} , m/s

M número de Mach

T temperatura absoluta, K

T_0 temperatura de estagnação, K

p pressão absoluta, N/m^2

e energia interna por unidade de massa, J/kg

h entalpia por unidade de massa, J/kg

E energia total (interna mais cinética) por unidade de massa, J/kg

k_c energia cinética por unidade de massa, J/kg

τ_{ij}^v componente do tensor de viscosidade τ^v , N/m^2

q_k k-ésima componente do fluxo de calor \mathbf{q} , $J/(m^2 s)$

κ condutibilidade térmica, $J/(s mK)$

g_k k-ésima componente do campo gravitacional \mathbf{g} , m/s^2

c_v calor específico à volume constante, $J/(kgK)$

c_p calor específico à pressão constante, $J/(kgK)$

Q fluxo de calor proveniente de uma fonte, $J/(sm^3)$

λ^v segundo coeficiente de viscosidade, $N(sm^2)$

μ^v viscosidade absoluta, $N(sm^2)$

x_k coordenada espacial, m

α coeficiente de expansão térmica à pressão constante, K^{-1}

β compressibilidade volumétrica à temperatura constante, $(N/m^2)^{-1}$

γ constante adiabática

Pr número de Prandtl

Outros símbolos

N_n número de nós do domínio espacial

N_e número de elementos do domínio espacial

Ω domínio espacial

I domínio temporal

Q domínio espaço-tempo.

Γ fronteira espacial

P fronteira espaço-temporal

m número de graus de liberdade por nó

t tempo

t_{max} limite superior do domínio temporal.

I matriz identidade $m \times m$

n_d número de dimensões espaciais

α_τ fator de ponderação da matriz de estabilização SUPG.

δ_{ij} delta de Kronecker

Sub-índices e superíndices

e relativo ao elemento

i, j relativo ao nó

h, k relativo à coordenada espacial

n relativo ao tempo

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Representação esquemática do sistema de geração PWR.	19
Figura 3.1. Particionamento do domínio temporal.	43
Figura 3.2. Exemplo de particionamento do domínio espacial.	45
Figura 3.3 . Salto no tempo no instante .	46
Figura 3.4. Uma maneira de se definir as descontinuidades no tempo.	49
Figura 3.5. Aproximação constante no tempo.	52
Figura 3.6. Aproximação linear no tempo.	53
Figura 3.7. Representação no plano do vetor a .	57
Figura 4.1. Fatia espaço-tempo. Detalhe para o domínio.	81
Figura 4.2. Detalhes de um elemento adjacente à fronteira.	90
Figura 4.3. Decomposição da força.	93
Figura 4.4. Condições de simetria.	95
Figura 6.1. Esboço do trecho do tubo de choque contendo a membrana separadora.	113
Figura 6.2. Comportamento da solução numérica em função do passo de tempo global.	115
Figura 6.3. Comportamento da solução numérica em função do grau de refinamento da malha.	116
Figura 6.4. Variação da massa específica, pressão e temperatura em $t = 0,2s$.	117
Figura 6.5. Efeito da adição do operador de captura de descontinuidades no gráfico da variação de temperatura para variáveis de pressão em $t = 0,2s$.	118
Figura 6.6. O problema do choque oblíquo.	119

Figura 6.7. Variação relativa da solução em função das iterações no tempo (n) para o problema do choque oblíquo (variáveis de pressão).	120
Figura 6.8. Isoregiões de massa específica. Problema do choque oblíquo.	121
Figura 6.9. Variação da massa específica, pressão e temperatura ($x = 0,9$).	121
Figura 6.10. Captura do choque para o problema do choque oblíquo.	123
Figura 6.11. Malha não estruturada para o escoamento sobre o cilindro.	124
Figura 6.12. Isoregiões de massa específica e temperatura para o escoamento supersônico em torno de um cilindro (escalas à esquerda).	125
Figura 6.13. Variação do número de Mach ao longo da curvatura do cilindro e da reta $y=0$.	126
Figura 6.14. Variação relativa da solução em função das iterações no tempo (n) para o problema do escoamento supersônico ao redor de um cilindro.	127
Figura 6.15. Escoamento sobre uma placa.	128
Figura 6.16. Domínio espacial e malha utilizada para o problema do escoamento sobre a placa.	129
Figura 6.17. Variação relativa da solução em função das iterações no tempo (n) para o problema do escoamento sobre a placa plana.	130
Figura 6.18. Variação da massa específica ao longo da reta $x=1$ para o problema do escoamento sobre a placa plana.	130
Figura 6.19. Variação da temperatura ao longo da reta $x=1$ para o problema do escoamento sobre a placa plana.	131
Figura 6.20. Isolinhas do número de Mach para o problema do escoamento sobre a placa plana.	131

Figura 6.21. Esquema geométrico para o problema da cavidade.	133
Figura 6.22. Malha não estruturada para o problema da cavidade.	134
Figura 6.23. Variação relativa da solução em função das interações no tempo (n) ($Re=1,0$).	135
Figura 6.24. Vetores de velocidade e isolinhas de pressão para $Re = 1,0$.	136
Figura 6.25. Variação da componente vertical da velocidade em função de x . Os círculos representam (aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).	137
Figura 6.26. Variação da componente horizontal da velocidade em função de y . Os círculos representam(aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).	137
Figura 6.27. Variação relativa do vetor solução em função das interações no tempo. ($Re=400,0$).	139
Figura 6.28. Variação da componente horizontal da velocidade em função de y para $Re=400$. Os círculos representam(aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).	139
Figura 6.29. Variação da componente vertical da velocidade em função de x par $Re =400$. Os círculos representam (aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).	140
Figura 6.30. Vetores de velocidade e isolinhas de pressão para $Re = 400,0$.	140
Figura 6.31. Domínio e malha superficial para o problema do escoamento incompressível de ar sobre cilindro.	142
Figura 6.32. Variação relativa do vetor solução com as iterações no tempo para o problema do escoamento incompressível de ar sobre um cilindro.	142
Figura 6.33. Acima- isolinhas de pressão obtidas em um corte no centro vertical do domínio. Abaixo - isoregiões tri-dimensionais de pressão.	143

- Figura 6.34. Malha para o problema do escoamento subsônico sobre o cilindro. 144
- Figura 6.35. Isolinhas de pressão para $M=0,38$, $M=0,1$ e $M=0,01$ com $\alpha_T=1$, de cima para baixo. 145
- Figura 6.36. Isolinhas de pressão para $M=0,38$ e $M=0,1$ com $\alpha_T=0$, de cima para baixo. 146
- Figura 6.37. Variação relativa do vetor solução em função das iterações no tempo (\mathbf{n}), para $\alpha_T=1$. 146
- Figura B.1. Mapeamento bi e tri-dimensional dos elementos. As conectividades são representadas pelos números 1,2 e 3 circunscritos. 166

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	15
1.1. Aspectos gerais.....	15
1.2. Motivação.....	18
1.3. Objetivos.....	20
1.4. Organização.....	20
2. Equações básicas	22
2.1. As equações de Navier-Stokes	22
2.2. Forma quase linear das equações de Navier Stokes.....	29
2.3. Escoamentos não-viscosos.....	33
2.4. Escoamentos não viscosos incompressíveis.....	35
3. Escoamentos unidimensionais.....	39
3.1. Escoamentos não viscosos.....	39
3.2. O método de Galerkin descontínuo no tempo.....	42
3.2.1 Discretização do domínio.....	42
3.2.2 Considerações sobre a descontinuidade temporal.....	46
3.2.3 Aproximação por Elementos Finitos da equação de Euler.....	49
3.3. Aproximações constante e linear no tempo do vetor solução.....	51
3.4. A aproximação de Petrov-Galerkin.....	53
3.5. Extensão do método Petrov-Galerkin para mais de uma dimensão, o método SUPG e o operador de captura de descontinuidades.....	56
3.6. A função de perturbação Petrov-Galerkin	59

3.7. Uma forma simplificada para a matriz de estabilização para escoamentos compressíveis.....	69
3.8. A matriz de estabilização para escoamentos incompressíveis.....	71
3.9. Uma formulação para escoamentos compressíveis e incompressíveis.....	75
3.10. Extensão para escoamentos viscosos.....	76
3.11. Algumas considerações sobre os métodos semi-discretos.....	77
4. Escoamentos viscosos em mais de uma dimensão.....	80
4.1. A função de perturbação SUPG.....	83
4.2. Cálculo dos fluxos e operações nas fronteiras	89
4.2.1. O fluxo na fronteira.....	92
4.2.2. Condições de contorno naturais.....	94
4.2.3. Condições de contorno essenciais (ou de Dirichlet).....	96
5. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	97
5.1. Resolução pelo método Preditor- Multicorretor.....	97
5.1.1. Algoritmo para o método Preditor-Multicorretor.....	103
5.2. Matrizes e vetores elementares	105
5.2.1. Componentes nodais do vetor	107
5.2.2. Componentes elementares da matriz	109
5.3. Avanço no tempo e convergência para o estado permanente.....	110
6. Resultados numéricos.....	112
6.1. Observações iniciais.....	112
6.2. Tubo de choque.....	113
6.2.1. Influência do passo de tempo global.....	114

6.2.2. Influência do grau de refinamento da malha.....	115
6.2.3. Influência do tipo de variável utilizado.....	116
6.3. Choque oblíquo	119
6.4. escoamento supersônico não viscoso ao redor de um cilindro.....	123
6.5. escoamento supersônico viscoso sobre uma placa plana	127
6.6. escoamento viscoso incompressível em uma cavidade	132
6.6.1. Resolução para $Re = 1,0$	135
6.6.2. Resolução para $Re = 400$	137
6.7. escoamento incompressível de ar em volta de um cilindro.....	140
6.7.1. escoamento incompressível de ar em volta de um cilindro com malha bi- dimensional.....	143
7. Conclusões.....	147
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	149
9. APÊNDICE A. Matrizes utilizadas nesta tese.....	156
10. APÊNDICE B. Funções de forma.....	166

1. INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1. Aspectos gerais

O ramo da ciência que estuda a utilização de métodos numéricos para resolução das equações diferenciais parciais encontradas na dinâmica dos fluidos tem recebido o nome de *Dinâmica dos Fluidos Computacional* (DFC), ou CFD (*Computational Fluid Dynamics*), em inglês. Dentro da DFC, os métodos para resolução de escoamento de fluidos têm se dividido basicamente em dois tipos: métodos para escoamentos incompressíveis e métodos para escoamentos compressíveis. No caso de escoamentos incompressíveis a massa específica é considerada constante. Sob a hipótese adicional de que a viscosidade também permanece constante, as equações de conservação de massa e de momento passam a ser independentes da equação de conservação de energia. Esta simplificação, no entanto, traz dificuldades próprias para a resolução numérica das equações, uma vez que, devido ao fato da massa específica ser considerada constante e não existir uma equação de estado relacionando pressão, massa específica e temperatura, a variação da pressão com o tempo fica indeterminada (MALISKA, 2004). No contexto de elementos finitos, por exemplo, formulações originalmente conhecidas como *penalty formulations* e *slightly compressible formulations* (BROOKS & HUGHES, 1982), onde o laplaciano da velocidade, originalmente igual a zero devido à restrição da massa específica constante, é modificado de forma a ser uma função da pressão absoluta, são exemplos de

tentativas de resolver o problema da falta de uma equação de estado. No entanto, em formulações incompressíveis, onde há o desacoplamento da equação resultante da conservação de energia, existe ainda o problema da necessidade de se satisfazer a condição matemática de Babuska-Brezzi¹ que, em termos gerais resulta na utilização de diferentes espaços de interpolação para as soluções aproximadas de velocidade e pressão² (MOREIRA, 1998). Trabalhos onde diferentes aproximações para velocidade e pressão são utilizadas, encontram-se citados, por exemplo, em BROOKS & HUGHES (1982). Finalmente, o uso de métodos estabilizados do tipo Petrov-Galerkin, permite a utilização de espaços de interpolação de igual ordem, ou seja, elimina a necessidade de se satisfazer a condição de Babuska-Brezzi (HUGHES et al., 1986). Exemplos de formulações em elementos finitos para problemas tipicamente incompressíveis utilizando formulações estabilizadas podem ser encontrados em FRANCA & FREY (1992) e BLANK et al. (1999). De qualquer forma, é bom lembrar que a condição de Babuska-Brezzi é aplicada apenas a problemas de formulação mista, que, no caso de escoamentos de fluidos, ocorrem quando a equação resultante da conservação da energia não é utilizada.

Em escoamentos compressíveis, por outro lado, não existe o problema da formulação mista e todas as equações resultantes dos balanços de massa, momentum e energia são utilizadas conjuntamente com uma equação de estado que relaciona pressão, massa específica e temperatura. Entretanto, escoamentos de gases a baixas velocidades podem ser considerados como incompressíveis, no sentido de que a variação da massa específica é desprezível, ao longo do escoamento (ANDERSON, 1989). Mesmo assim,

1 Ou “condição de Ladisenskaïa-Babuska-Brezzi (LBB)”

2 O equivalente em diferenças finitas é o problema originalmente conhecido como *checkerboard pattern* (ver, por exemplo, GOLUB et al., 1998 e MALISKA, 2004)

nestes casos, ainda existe uma variação da massa específica, de tal forma que é comum se ter como base formulações típicas para escoamentos compressíveis, desde que, de uma maneira ou de outra, se consiga resolver as equações para escoamentos com baixo número de Mach, onde alguns elementos das matrizes que multiplicam os termos convectivos das equações de Euler e Navier-Stokes, escritas na forma quase-linear, se tornam indefinidos, como será visto em momento oportuno. Neste caso, pode-se optar pelo pré-condicionamento da matriz resultante das equações discretizadas. Existem vários trabalhos que envolvem pré-condicionamento de formulações compressíveis para escoamentos a baixas velocidades (veja, por exemplo: CHOI & MERKLE, 1993 e NIGRO et al., 1998).

No contexto do método dos Elementos Finitos, formulações compressíveis que utilizam um método baseado nas linhas características das equações de Navier-Stokes³, também foram estendidas para abranger ambos os tipos de escoamento, através de uma técnica de divisão dos termos (*split*). Exemplos de tal abordagem podem ser encontrados em: ZIENKIEWICZ & CODINA (1995), ZIENKIEWICZ et al. (1995) e VÁZQUEZ (1998).

Alguns métodos que conseguem atender bem a todo o espectro de velocidades, bem como situações onde a massa específica não varia (como em escoamento de líquidos) fazem uso de uma espécie de ponderação entre a formulação incompressível e a compressível, em função de um parâmetro que indica o tipo de regime de escoamento (tradicionalmente, o número de Mach). Como exemplo, o leitor pode conferir os trabalhos de MITTAL & TEZDUYAR (1998) e HAUKE (1995), onde, no primeiro trabalho, duas formulações: uma incompressível e uma compressível são utilizadas no mesmo algoritmo,

3 Em inglês: “Characteristic Galerkin”.

existindo um parâmetro de troca que depende do número de Mach e, no segundo trabalho, uma única formulação compressível é utilizada, sendo que a ponderação ocorre na matriz de estabilização. É importante notar que, no caso do trabalho de HAUKE (1995), variáveis de pressão e de entropia são as únicas que podem ser utilizadas no caso de escoamentos incompressíveis, uma vez que as matrizes dos coeficientes das equações de Navier-Stokes, se tornam singulares no caso de variáveis conservativas. Neste caso, o problema está no comportamento da matriz de estabilização, que não é bem definida no limite da incompressibilidade. Neste sentido, WONG et al. (2001), por exemplo, propõem uma nova definição da matriz de estabilização para o caso de variáveis de entropia, bem definida para o limite da incompressibilidade, para o caso de escoamentos não viscosos. Este estudo segue o tipo de metodologia proposto por HAUKE (1995), onde uma formulação baseada em variáveis primitivas utilizando pressão é adotada. É proposto, no entanto, um novo tipo de ponderação dos termos de estabilização e de captura de descontinuidade, além de se utilizarem matrizes de estabilização simplificadas.

1.2. Motivação

Alguns dos motivos que levam ao desenvolvimento de uma formulação única para escoamentos compressíveis e incompressíveis estão baseados no fato que em muitas situações, os dois regimes estão presentes em um único problema. O escoamento em torno de uma aeronave que acelera gradualmente a partir do repouso até a velocidade supersônica é um exemplo típico de um escoamento externo que passa por vários estágios, partindo de

um escoamento tipicamente incompressível para um escoamento compressível. No caso, a velocidade da aeronave, ou melhor, a velocidade relativa entre o fluido e a aeronave, caracteriza em que regime de escoamento o problema se enquadra.

Um outro exemplo, agora no âmbito da engenharia nuclear, é o estudo de vazamentos em vasos contendo água pressurizada, onde co-existem vapor em regime compressível e água líquida em regime incompressível (MOREIRA, 1998). Neste caso, apesar de tratar-se de um escoamento bifásico, aspecto não abordado nesta tese, uma formulação que abranja ambos os regimes é bastante desejável. Ainda no tocante à questão nuclear, em uma só instalação podem existir diversos tipos de escoamentos, como os que ocorrem, por exemplo, na instalação PWR⁴ da usina de Angra II, ilustrada na Fig. 1.1. Podem ser observados os diferentes regimes existentes nos circuitos de água pressurizada (escoamento incompressível), vapor (escoamento compressível) e de refrigeração (escoamento incompressível). É muito conveniente que um mesmo código computacional possa ser utilizado para o estudo dos diferentes tipos de escoamento que surgem, como neste exemplo.

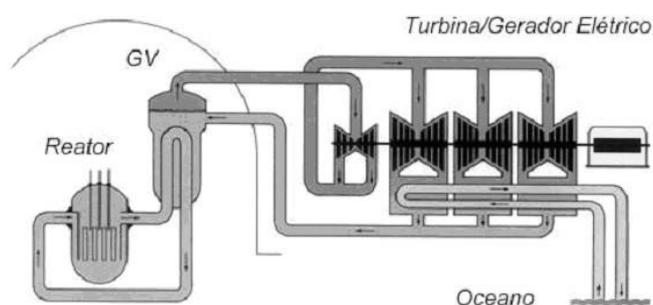


Figura 1.1. Representação esquemática do sistema de geração PWR (disponível, por ocasião da escrita desta tese, na página <http://www.abeunet.com.br/~vini/angra2.html>).

4 “Pressurised Water Reactor”

Tudo isso leva em conta que, em engenharia de reatores nucleares, o conhecimento detalhado da dinâmica dos escoamentos internos e externos tanto de líquido como de vapor e (ou) gás é fundamental principalmente no que diz respeito às trocas de calor que devem ocorrer nas instalações como um todo.

1.3. Objetivos

Os objetivos deste trabalho podem ser resumidos da seguinte maneira:

- A partir de uma formulação em elementos finitos para escoamentos compressíveis, através da utilização de variáveis de pressão, desenvolver um algoritmo que possa abranger tanto escoamentos compressíveis como incompressíveis.
- Através de exemplos numéricos e comparação com resultados de outros autores, efetuar uma análise crítica da metodologia utilizada, verificando suas vantagens e suas limitações.

1.4. Organização

Primeiramente as equações básicas para o escoamento de fluidos viscosos são apresentadas e as particularidades dos escoamentos compressíveis e incompressíveis são

discutidas (capítulo 2). A descrição detalhada do método de Galerkin descontínuo no tempo, bem como toda a formulação desenvolvida na tese é então apresentada no capítulo 3, onde se utiliza como ponto de partida, o problema não viscoso em uma única dimensão. As equações obtidas são estendidas para duas e três dimensões no capítulo 4, onde é feita uma discussão adicional sobre condições de contorno. Finalmente, os capítulos 5 e 6 apresentam a implementação numérica do algoritmo e os resultados obtidos. Segue-se as conclusões finais (capítulo 7) e os apêndices que contém as matrizes empregadas na tese bem como a obtenção analítica de vários parâmetros de importância.

2. EQUAÇÕES BÁSICAS

2.1. As equações de Navier-Stokes

Escoamentos de fluidos podem ser matematicamente modelados através das equações resultantes das leis de conservação de massa, momento e energia, dentro dos limites impostos pela hipótese do *continuum*. O conjunto de equações diferenciais não-lineares resultantes é conhecido como conjunto de equações de *Navier-Stokes*, sua obtenção podendo ser encontrada em vários livros de Mecânica dos Fluidos (ver, por exemplo: ANDERSON, 1995). Quando escritas em sua forma conservativa, utilizando-se a notação vetorial, estas equações são :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial x_k} - \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \quad (2.1)$$

onde n_d é o número de dimensões espaciais consideradas.

Para o caso geral, em três dimensões ($n_d=3$), o vetor \mathbf{U} e os termos de fluxo convectivo (\mathbf{F}_k) e difusivo (\mathbf{D}_k), e de fonte (\mathbf{S}) são dados por:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + p \delta_{1k} \\ \rho u_2 u_k + p \delta_{2k} \\ \rho u_3 u_k + p \delta_{3k} \\ (\rho E + p) u_k \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1k}^v \\ \tau_{2k}^v \\ \tau_{3k}^v \\ u_h \tau_{hk}^v - q_k \end{pmatrix}, \quad h=1 \dots n_d \quad (2.4)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_1 \\ \rho g_2 \\ \rho g_3 \\ \rho u_k g_k + \rho Q \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Nas equações (2.2) a (2.5), tem-se que:

ρ é a massa específica

p é a pressão absoluta

g_k é a k-ésima componente do campo gravitacional \mathbf{g}

Q é o fluxo de calor proveniente de uma fonte interna

q_k é k-ésima componente do fluxo de calor por unidade de massa \mathbf{q}

u_k é a k-ésima componente do vetor velocidade \mathbf{u}

E é a energia total por unidade de massa, ou seja, a soma das densidades de energia cinética k_c e interna e , dadas por:

$$k_c = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \quad (2.6)$$

$$e = c_v T \quad (2.7)$$

sendo c_v o calor específico do fluido à volume constante, onde é feita a hipótese de escoamento isoentrópico de um fluido caloricamente perfeito.

Assim:

$$E = e + k_c \quad (2.8)$$

τ_{hk}^v é a componente do tensor das tensões viscosas τ^v .

A fim de se possibilitar a resolução das equações de Navier-Stokes, são necessárias algumas relações adicionais, conhecidas como *equações constitutivas*. Considere-se, primeiramente o fluxo de calor \mathbf{q} . De acordo com a lei de Fourier para a condução de calor em um fluido isotrópico, sendo T a temperatura absoluta, pode-se escrever:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (2.9)$$

onde κ é a condutibilidade térmica do fluido e ∇T é o gradiente da temperatura.

No tocante às tensões viscosas, duas hipóteses serão feitas: a primeira é que o fluido é Newtoniano e a segunda é que a relação de Stokes entre a viscosidade absoluta e o segundo coeficiente de viscosidade⁵ é válida (fluidos como água e ar podem ser bem modelados dentro destas características). Assim, é possível escrever para os componentes do tensor τ^v :

$$\tau_{kh}^v = \mu^v \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right) + \lambda^v \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{kh} \quad (2.10)$$

sendo que:

$$\lambda^v = -\frac{2}{3} \mu^v \quad (\text{hipótese de Stokes}) \quad (2.11)$$

5 λ^v : originalmente: *second viscosity coefficient*, em Inglês.

Nas equações (2.10) e (2.11), μ^v é a viscosidade absoluta, λ^v é o segundo coeficiente de viscosidade e δ_{kh} é o delta de Kronecker.

Para uma dedução detalhada das equações (2.10) e (2.11), veja, por exemplo, SCHLICHTING (1979).

Substituindo-se as relações obtidas para o fluxo de calor e para as tensões viscosas nas equações de Navier-Stokes (2.1), obter-se-á um sistema de equações diferenciais composto por cinco equações e seis variáveis: ρ , p , ρu_1 , ρu_2 , ρu_3 e ρE , onde E é função da velocidade e da temperatura. Para se obter os valores da pressão, necessita-se de mais uma equação, no caso, uma equação de estado. Em se tratando de um gás perfeito, o uso da lei dos gases perfeitos fornece esta equação adicional:

$$p = \rho R T \quad (2.12)$$

Ainda, para o caso de gases perfeitos, é possível relacionar a viscosidade absoluta com a temperatura através da lei empírica de Sutherland (veja, por exemplo, ANDERSON, 1995), reproduzida na Eq. (2.13) para unidades do SI (μ em kg/ms e T em K):

$$\mu^v = \frac{(1,4578 \times 10^{-6}) T^{1.5}}{(T + 110,4)} \quad (2.13)$$

A condutibilidade térmica do gás ideal pode ser relacionada com a viscosidade

através do número de Prandtl, considerado constante e aproximadamente igual a 0,75 para gases a temperaturas moderadas:

$$Pr = \frac{\mu^v c_p}{\kappa} \quad (2.14)$$

As equações (2.12), (2.13) e (2.14) são válidas para gases perfeitos. Para líquidos, a seguinte equação relacionando pressão, massa específica e temperatura pode ser utilizada⁶ (veja, por exemplo BROOKS & HUGHES, 1982):

$$p = p_{ref} + \beta(\rho - \rho_{ref}) \quad (2.15)$$

onde p_{ref} e ρ_{ref} são valores constantes de referência para a pressão e a massa específica, respectivamente e β é o coeficiente de compressibilidade isotérmica dado por:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) \quad (2.16)$$

sendo v o volume específico.

Uma outra opção é fazer uso da seguinte equação, obtida com o auxílio das relações termodinâmicas de Maxwell (WARK, 1995):

⁶ Quando tal relação entre a massa específica e a pressão é utilizada, é comum referir-se ao escoamento como *quase-incompressível*.

$$c_v = c_p - \frac{\alpha^2 T}{\beta \rho} \quad (2.17)$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica à pressão constante e é dado por:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right) \quad (2.18)$$

Observação:

- É possível mostrar que, no caso de gases perfeitos, os coeficientes α e β são iguais a T^{-1} e p^{-1} , respectivamente. A substituição destes valores na Eq. (2.17) resulta na equação dos gases perfeitos (2.12).

Em escoamentos de líquidos a variação da massa específica é, geralmente, muito pequena, de modo que é comum se assumir a massa específica ρ como constante. Desta maneira, particularizam-se as equações de Navier-Stokes para o caso de escoamentos incompressíveis, ou seja, escoamentos onde as variações de massa específica são desprezíveis⁷. Sob a hipótese adicional de que a viscosidade dinâmica permanece constante com a temperatura, ocorrerá o desacoplamento da equação de conservação da energia, formando um sistema com quatro equações e quatro variáveis (p , u_1 , u_2 e u_3). Formulações numéricas que têm como ponto de partida este novo conjunto de equações têm suas próprias peculiaridades e não serão objeto desta tese. Para maiores detalhes, o

⁷ Escoamentos de gases com velocidades inferiores a Mach 0.3, sem grandes variações de temperatura, também podem ser considerados escoamentos incompressíveis (ver ANDERSON, 1989).

leitor pode consultar, por exemplo: GRESHO & SANI (2000). Ainda é possível tratar escoamentos incompressíveis, com formulações numéricas que se baseiam nas equações completas de Navier-Stokes, comumente utilizadas para escoamentos compressíveis e vice-versa. Neste trabalho, partir-se-á de uma formulação tipicamente compressível, procurando-se, a partir daí, abranger também o caso da incompressibilidade.

2.2. Forma quase linear das equações de Navier Stokes

É possível escrever o conjunto de equações (2.1) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_k^u \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{K}_{kh}^u \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_h} \right) - (\mathbf{B}^u \mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

onde as matrizes Jacobianas \mathbf{A}_k^u , que representam a variação dos fluxos convectivos \mathbf{F}_k em relação às variáveis conservativas \mathbf{U} , são dadas por:

$$\mathbf{A}_k^u = \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{U}} \quad (2.20)$$

e as matrizes de difusão \mathbf{K}_{kh}^u , são tais que:

$$\mathbf{D}_k = \sum_{h=1}^{n_d} \mathbf{K}_{kh}^u \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_h} \quad (2.21)$$

Ainda referindo-se à Eq. (2.19), o conjunto de variáveis \mathbf{U} pode ser sempre escrito como um produto matriz vetor $\mathbf{B}^u \mathbf{U}$, onde a matriz \mathbf{B}^u não é unicamente definida (SHAKIB, 1988).

A forma quase-linear das equações de Navier-Stokes, dada pela Eq.(2.19) pode ser escrita em função de qualquer conjunto de variáveis \mathbf{Y} , desde que o Jacobiano:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Y}} \quad (2.22)$$

seja definido.

Desta forma, observando-se que:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_k} \quad (2.23)$$

é possível se escrever a Eq. (2.19) para qualquer conjunto de variáveis \mathbf{Y} :

$$\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{K}_{kh} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_h} \right) - (\mathbf{B} \mathbf{Y}) = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

Na Eq. (2.24), tem-se, à semelhança da Eq. (2.19):

$$\mathbf{A}_k = \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \mathbf{D}_k = \sum_{h=1}^{n_d} \mathbf{K}_{kh} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}_h}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{B} \mathbf{Y} \quad (2.25)$$

onde \mathbf{B} , novamente, não possui uma única definição.

Note-se que, para $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$ a Eq. (2.24) se transforma na Eq. (2.19).

As seguintes relações, facilmente deriváveis das equações acima são bastante úteis:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^u \mathbf{A}_0 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_{kh} = \mathbf{K}_{kh}^u \mathbf{A}_0 \quad (2.27)$$

Para o caso particular, onde \mathbf{Y} representa o conjunto de variáveis primitivas escritas em termos da pressão:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ T \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

a matriz \mathbf{A}_0 é dada por:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial p} & \frac{\partial \rho}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho}{\partial u_2} & \frac{\partial \rho}{\partial u_3} & \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial p} & \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial u_2} & \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial u_3} & \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial T} \\ \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial p} & \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial u_1} & \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial u_2} & \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial u_3} & \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial T} \\ \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial p} & \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial u_1} & \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial u_2} & \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial u_3} & \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial T} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial p} & \frac{\partial(\rho E)}{\partial u_1} & \frac{\partial(\rho E)}{\partial u_2} & \frac{\partial(\rho E)}{\partial u_3} & \frac{\partial(\rho E)}{\partial T} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Para se obter as diversas derivadas contidas na matriz \mathbf{A}_0 , dada pela Eq. (2.29), faz-se uso das relações de Maxwell da termodinâmica (veja, por exemplo, WARK (1995)). Este mesmo procedimento também pode ser encontrado em HAUKE (1995). Assim, é possível se escrever:

$$\frac{\partial e}{\partial p} = \frac{\beta p - \alpha T}{\rho}, \quad \frac{\partial e}{\partial T} = c_p - \frac{\alpha p}{\rho} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \rho \beta, \quad \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\rho \alpha \quad (2.31)$$

A matriz Jacobiana \mathbf{A}_0 , pode então ser escrita como:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \rho\beta & 0 & 0 & 0 & -\rho\alpha \\ \rho\beta u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha u_1 \\ \rho\beta u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha u_2 \\ \rho\beta u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha u_3 \\ e_1^p & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & e_4^p \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Valores para os coeficientes e_1^p e e_4^p e expressões para as demais matrizes da Eq. (2.24) são encontrados no Apêndice A. A nomenclatura usada e as matrizes foram obtidas de HAUKE (1995).

2.3. Escoamentos não-viscosos

Em muitos casos pode-se obter uma boa aproximação do escoamento real desprezando-se a viscosidade do fluido e a condutibilidade térmica. Desta maneira, o sistema de equações (2.1) é bastante simplificado, reduzindo-se às equações de *Euler*:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} - \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad k = 1 \dots n_d \quad (2.33)$$

Seguindo-se o modelo da Eq. (2.24), pode-se escrever a Eq. (2.33) da seguinte maneira:

$$A_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + A_k \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_k} - (\mathbf{B} \mathbf{Y}) = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \quad (2.34)$$

Para $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$, a Eq. (2.34) se transforma em:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_k^u \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} - (\mathbf{B}^u \mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \quad (2.35)$$

Observação:

- Muitas vezes as forças gravitacionais são desprezíveis e não existe geração interna de calor. De fato, na grande maioria dos escoamentos, as trocas de calor mais significativas ocorrem na fronteira. Quanto às forças gravitacionais, em domínios onde as variações de altura geométrica são desprezíveis e (ou) a massa específica é relativamente pequena, estas podem ser desconsideradas. Este será o caso nos exemplos desta tese e portanto, assumir-se-á tacitamente que $\rho Q = 0$ e $\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$, ou seja:

$$\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

2.4. Escoamentos não viscosos incompressíveis

Considere-se as equações de Euler sem o termo de fonte escritas para o caso uni-dimensional. Sejam \mathbf{U} e \mathbf{Y} os dois conjuntos de variáveis dados pelas expressões (2.2) e (2.28), respectivamente. Utilizando-se o conjunto de variáveis conservativas \mathbf{U} , no caso uni-dimensional estas equações se reduzem a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho E \end{pmatrix} + \mathbf{A}^u \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

onde:

$$\mathbf{A}^u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a^2 - u_1^2 - \bar{e}_1 \bar{y} & u_1(2 - \bar{y}) & \bar{y} \\ u_1 e_2^c & e_3^c - \bar{y} u_1^2 & u_1 e_4^c \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

No caso de se utilizarem as variáveis de pressão \mathbf{Y} , tem-se:

$$\mathbf{A}_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ T \end{pmatrix} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

onde as matrizes \mathbf{A}_0 e \mathbf{A} são dadas por:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \rho\beta & 0 & -\rho\alpha \\ \rho\beta u_1 & \rho & -\rho\alpha u_1 \\ e_1^p & \rho u_1 & e_4^p \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho\beta u_1 & \rho & -\rho\alpha u_1 \\ \rho\beta u_1^2 + 1 & 2\rho u_1 & -\rho\alpha u_1^2 \\ u_1 e_2^p & e_3^p + \rho u_1^2 & u_1 e_4^p \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Os diversos parâmetros encontrados nas matrizes definidas pelas equações (2.38), (2.40) e (2.41) são definidos no apêndice A.

Em um escoamento hipotético totalmente incompressível, os coeficientes β e α são iguais a zero; ou seja, o fluido não se comprime por maior que seja a pressão hidrostática aplicada e não se expande qualquer que seja o aumento de temperatura. É claro que esse fluido é inexistente, pois mesmo os líquidos, naturalmente considerados como substâncias incompressíveis, possuem valores definidos (embora pequenos) para estes coeficientes. Desta feita, é suficiente considerar o escoamento incompressível (e esta será uma definição, a partir deste momento, adotada) como um escoamento onde $\beta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow 0$.

A seguir, é apresentado o que ocorre nas equações (2.37) e (2.39) no limite da incompressibilidade, ou seja, quando $\beta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow 0$ (reescritas de uma outra forma, com as matrizes completas):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho E \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \infty & u_1 \left(2 - \frac{0}{0} \right) & \frac{0}{0} \\ \mp \infty & e_3^c - \left(\frac{0}{0} \right) u_1^2 & u_1 \left(\frac{0}{0} + 1 \right) \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho u_1 & \rho c_p \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ T \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 \\ 1 & 2\rho u_1 & 0 \\ u_1 & \rho(e_1 + u_1^2) & \rho c_p u_1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

A Eq.(2.43) pode ser escrita como o seguinte sistema de equações reduzido:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \rho u_1 & \rho c_p \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ T \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\rho u_1 & 0 \\ \rho(e_1 + u_1^2) & \rho c_p u_1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

onde a primeira derivada espacial da velocidade é igual a zero, $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$.

Vê-se claramente que alguns elementos da matriz A^u , na Eq. (2.42) se tornam indefinidos no limite da incompressibilidade, o que não ocorre no caso da matriz A , na Eq. (2.43). Por outro lado, a matriz A_0^{-1} , presente na formulação com variáveis de pressão, se torna singular. A idéia é, portanto, explorar os benefícios das variáveis de pressão, ao mesmo tempo em que se neutralizam os efeitos da deficiência de posto da matriz A_0 .

Uma forma ligeiramente diferente de se escrever o conjunto de equações (2.33), sem o termo de fonte, é a seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Y})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k(\mathbf{Y})}{\partial x_k} = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \quad (2.45)$$

Aqui, enfatiza-se que $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{Y})$ e $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{Y})$. A Eq. (2.45) apresenta vantagens do ponto de vista numérico em relação à Eq. (2.34), como será visto no próximo capítulo. É possível se desenvolver um método baseado na Eq. (2.45) que se comporte bem no limite da incompressibilidade (HAUKE, 1995). Além do mais, o número de graus de liberdade é preservado, o que não acontece na forma *quase-linear*⁸ (veja a Eq. (2.43)).

Desta maneira, as equações de Navier-Stokes serão consideradas na sua forma conservativa (Eq. (2.1)), ao passo que o vetor solução será baseado em variáveis de pressão (Eq. (2.28)). Este tipo de abordagem foi utilizada por HAUKE (1995) e será a adotada nesta tese.

8 É comum referir-se à Eq. (2.24) como escrita em sua forma quase-linear, muito embora, rigorosamente falando, esta definição só se aplica às equações de Navier-Stokes.

3. ESCOAMENTOS UNIDIMENSIONAIS

3.1. escoamentos não viscosos

Escoamentos de fluidos são essencialmente tridimensionais. Neste sentido, os escoamentos bi ou uni-dimensionais são simplificações que, às vezes, podem representar com uma boa aproximação a realidade. No caso específico de escoamentos em uma única dimensão, poucas são as aplicações que podem ser aproximadas desta maneira. No entanto, muitas conclusões importantes do ponto de vista da modelagem em si, podem ser obtidas desta aproximação.

Neste capítulo, inicia-se com as equações de Euler uni-dimensionais sem termo de fonte e, a partir dessa exposição, toda a metodologia utilizada nesta tese é apresentada. A extensão para as equações de Navier-Stokes é efetuada sem maiores detalhes, uma vez que as principais dificuldades na abordagem do problema compressível e incompressível são comuns aos problemas regidos pelas equações de Euler e de Navier-Stokes.

Considere-se o problema modelado pelas equações de Euler, em uma dimensão, sem o termo de fonte:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

onde: $x \in]x_0, x_1[$, $t \in]0, t_{max}[$.

A função $U(x, t)$, na Eq. (3.1) deve satisfazer ainda as seguintes condições de contorno e inicial:

$$U(x_0, t) = g(t) \quad (3.2)$$

$$U(x, t_0) = U_0(x) \quad (3.3)$$

A forma variacional da Eq. (3.1) pode, então, ser definida como: *encontrar* $U(x, t)$, *suficientemente regular, tal que:*

$$\int_0^{t_{max}} \int_{x_0}^{x_1} W \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (3.4)$$

onde $W = W(x, t)$ é uma função de peso homogênea, continuamente diferenciável em $]x_0, x_1[$.

Com estas hipóteses, o teorema fundamental do cálculo variacional garante a equivalência entre a forma forte, dada pela Eq. (3.1) e a forma fraca, dada pela Eq. (3.4)..

Efetuando-se a integração por partes das derivadas de U e de F , obtém-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} [W U]_0^{t_{max}} dx - \int_0^{t_{max}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial W}{\partial t} U dx dt - \int_0^{t_{max}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial W}{\partial x} F dx dt + \int_0^{t_{max}} [W F]_{x_0}^{x_1} dt = 0 \quad (3.5)$$

A resolução pelo método dos elementos finitos da Eq. (3.5), envolve a discretização do vetor solução U tanto no espaço quanto no tempo.

Em formulações do tipo semi-discretas, por outro lado, a derivada temporal do vetor solução U não é integrada por partes, sendo a aproximação no tempo efetuada por diferenças finitas. Observa-se que, neste caso, é necessário que a solução aproximada seja contínua no tempo, ou seja, a solução U é aproximada por uma função \hat{U} , que possui, pelo menos, continuidade C^0 no tempo e no espaço. Referências à este tipo de abordagem são encontradas, por exemplo, em ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1991) e GRESHO & SANI (2000). Métodos descontínuos no tempo, por sua vez, admitem que a aproximação \hat{U} possa apresentar descontinuidades nas fronteiras temporais dos elementos. Esta característica torna estes métodos bastante apropriados para problemas onde os nós espaciais se deslocam com o tempo, como em situações de fronteira móvel. Isso é possível, uma vez que não existe a necessidade de continuidade entre as soluções em dois níveis temporais n e $n+1$ (ver, por exemplo, TEZDUYAR et al.(1992)).

Nesta tese, será utilizado o método de *Galerkin descontínuo no tempo*⁹, que tem sido bastante referenciado nestes últimos anos (SHAKIB (1988), ALIABADI & TEZDUYAR (1995) e HAUKE(1995)).

9 Originalmente : “time discontinuous Galerkin”

3.2. O método de Galerkin descontínuo no tempo

3.2.1 Discretização do domínio

A solução da Eq. (3.5): $U \in \mathbb{R}^m | U = U(x, t)$, é definida em um domínio espaço-temporal Q , ou seja: $(x, t) \in Q$, onde:

$$Q = \Omega \times I \quad (3.6)$$

$$\Omega \subset \mathbb{R} \quad (3.7)$$

$$I =]0, t_{max}[\subset \mathbb{R}^+ \quad (3.8)$$

Nas equações (3.6) a (3.8), Q representa o domínio espaço-tempo definido pelos subdomínios espacial e temporal Ω ($\Omega =]x_0, x_1[$ para o caso unidimensional) e I .

Tome-se, agora, uma partição aproximada de Q , a qual será denominada: \hat{Q} . Esta partição, por sua vez, é composta de uma subdivisão exata do intervalo I e de um particionamento aproximado do subdomínio espacial Ω , como será visto a seguir.

Primeiramente, divide-se o intervalo I em $N-1$ subintervalos iguais¹⁰ $I_n =]t_n, t_{n+1}[$,

¹⁰ Apesar da Fig. 3.1 mostrar uma situação geral, outras possibilidades existem para o tipo de descontinuidade no tempo, como será visto adiante. Desta forma, I_n não é, obrigatoriamente aberto em seus dois extremos t_n e t_{n+1} (STILLER, 1999).

como mostra a Fig. 3.1.



Figura 3.1. Particionamento do domínio temporal

Observe-se que o particionamento do subdomínio temporal é tal que:

$$I = \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right) \cup \{t_1, t_2, \dots, t_{(N-1)}\} \quad (3.9)$$

Observação:

- A divisão em partes iguais de I não é uma exigência do método, sendo a divisão uniforme no tempo adotada apenas por simplificação.

Para cada intervalo de tempo I_n , o subdomínio Ω^n é dividido aproximadamente em N_e elementos $\hat{\Omega}_e^n$, definidos de tal forma a se ter:

$$\hat{\Omega}^n = \left(\sum_{e=1}^{N_n} \hat{\Omega}_e^n \right) \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{(N_n-1)}\} \quad (3.10)$$

onde N_n é o número de nós do subdomínio espacial $\hat{\Omega}^n$.

Da Eq. (3.10), vê-se que $\hat{\Omega}_e^n$ é uma região aberta. No caso unidimensional, onde a fronteira do elemento é formada por apenas dois pontos, ou seja:

$$\Gamma_e^n = \{x_e^n, x_{e+1}^n\} \quad (3.11)$$

o subdomínio elementar $\hat{\Omega}_e^n$ é dado por:

$$\hat{\Omega}_e^n =]x_e^n, x_{e+1}^n[\quad (3.12)$$

Semelhantemente, a fronteira do subdomínio espacial $\hat{\Omega}^n$, é denominada $\hat{\Gamma}^n$ e, no caso unidimensional, é formada pelos dois pontos extremos :

$$\hat{\Gamma}^n = \{x_0, x_1\} \quad (3.13)$$

A Fig. 3.2 mostra um exemplo de particionamento dos subdomínios $\hat{\Omega}^{n-1}$ e $\hat{\Omega}^n$. Devido à descontinuidade no tempo, a posição dos nós pode variar entre os instantes t_{n-1} e t_n , porém deve permanecer constante dentro da fatia espaço-tempo. Esta característica faz do método Galerkin descontínuo no tempo particularmente apropriado para situações onde haja deformação temporal de Ω (TEZDUYAR et al., 1992) como, por exemplo,

problemas onde a fronteira é móvel. Nesta tese, muito embora o subdomínio espacial seja referenciado como $\hat{\Omega}^n$, indicando o particionamento específico para o intervalo I_n , este não sofrerá mudanças com o tempo, ou seja:

$$\hat{\Omega}^0 \equiv \hat{\Omega}^1 \equiv \dots \equiv \hat{\Omega}^N \equiv \hat{\Omega} \quad (3.14)$$

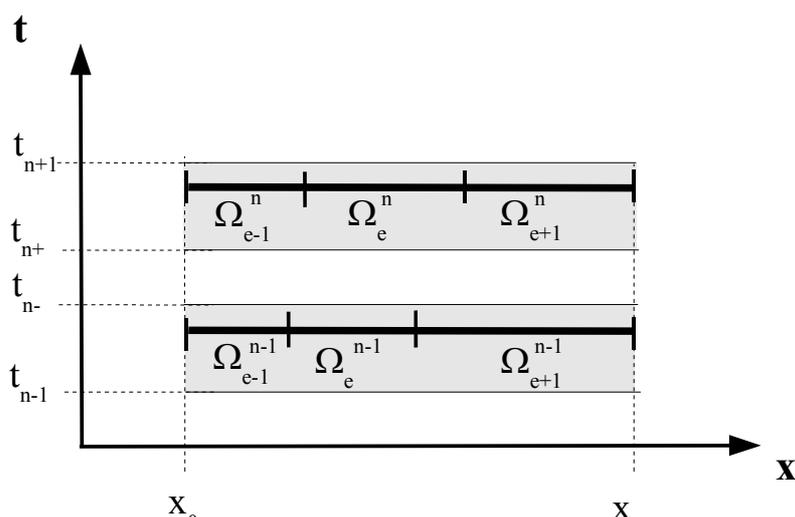


Figura 3.2. Exemplo de particionamento do domínio espacial.

Observação:

- Para o caso unidimensional, onde o subdomínio espacial se constitui em um segmento de reta, o particionamento é exato, isto é: $\hat{\Omega}^n \equiv \Omega^n$. Em duas e três dimensões, só em casos particulares é possível particionar Ω de maneira exata. Assim, ao longo desta tese, o particionamento espacial será sempre referenciado como $\hat{\Omega}$, indicando o caso mais geral onde ocorre uma

aproximação ao subdomínio Ω .

Finalmente, define-se o elemento espaço tempo como:

$$\hat{Q}_e^n = \hat{\Omega}_e^n \times I_n \quad (3.15)$$

e a fatia espaço-tempo como:

$$\hat{Q}^n = \hat{\Omega}^n \times I_n \quad (3.16)$$

Desta maneira, a partição aproximada do domínio Q é dada por:

$$\hat{Q} = \left(\bigcup_{n=0}^{N-1} \hat{Q}^n \right) \cup \{t_1, t_2, \dots, t_{(N-1)}\} \quad (3.17)$$

3.2.2 Considerações sobre a descontinuidade temporal

O método de Galerkin descontínuo no tempo busca aproximar a solução U da Eq. (3.5) por \hat{U} , que possa apresentar uma descontinuidade entre cada fatia espaço-tempo. A Fig. 3.3 ilustra, através de uma função escalar u , esta particularidade do método. As descontinuidades temporais devem ser levadas em consideração na integração da derivada de U em relação ao tempo na Eq. (3.4).

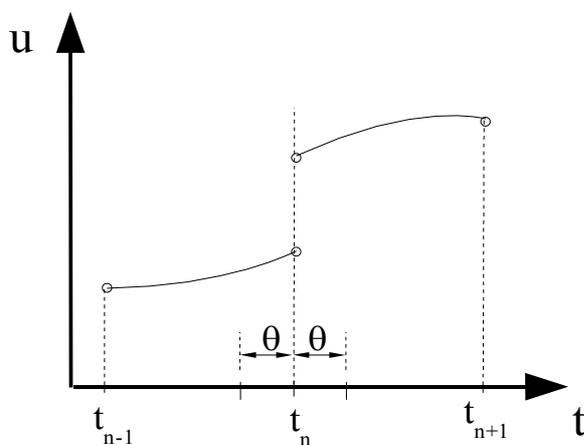


Figura 3.3. Salto no tempo no instante t_n .

Considere-se, por exemplo, a integração entre os limites $[t_{n-1}^+, t_{n+1}^-]$ da integral $\int \mathcal{W} U_{,t} dt$ (o subíndice $,t$ indica diferenciação no tempo), sendo t_{n-1}^+ e t_{n+1}^- definidos por:

$$t_{n-1}^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t_{n-1} + \epsilon) \quad (3.18)$$

$$t_{n+1}^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t_{n+1} - \epsilon) \quad (3.19)$$

Observando-se a Fig. 3.3, é possível obter para $\int \mathcal{W} U_{,t} dt$:

$$\int_{t_{n-1}^+}^{t_{n+1}^-} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt = \int_{t_{n-1}^+}^{t_{n-0}^-} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt + \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{t_{n-0}^-}^{t_{n+0}^+} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt + \int_{t_{n+0}^+}^{t_{n+1}^-} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt \quad (3.20)$$

A segunda integral do lado direito da Eq. (3.20) representa o termo de salto. No limite quando $\theta \rightarrow 0$, sendo \mathbf{W} contínua em t_n :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{t_{n-0}^-}^{t_{n+0}^+} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt = \mathbf{W} \frac{U_n^+ - U_n^-}{\Delta t} \int_{t_{n-0}^-}^{t_{n+0}^+} dt = \mathbf{W} (U_n^+ - U_n^-) \quad (3.21)$$

A Eq. (3.20) pode ser, então, reescrita como:

$$\int_{t_{n-1}^+}^{t_{n+1}^-} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt = \int_{t_{n-1}^+}^{t_{n-0}^-} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt + \int_{t_{n+0}^+}^{t_{n+1}^-} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dt + \mathbf{W} (U_n^+ - U_n^-) \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{W} (U_n^+ - U_n^-)$ representa o termo de salto e $\mathbf{W} = \mathbf{W} (t_n)$.

Ainda neste contexto, defina-se o salto da função \mathbf{U} no tempo no instante t_n , por:

$$[\mathbf{U}(t_n)] = \mathbf{U}(t_n^+) - \mathbf{U}(t_n^-) \quad (3.23)$$

Observação:

- STILLER (1999) cita alguns tipos de descontinuidade de salto que podem ser adotados na formulação do método de Galerkin descontínuo no tempo. A figura 3.4 a seguir, mostra uma maneira de se definir o comportamento da função \hat{U} na fatia espaço-tempo. Observe-se que \hat{U} é definida em $t=t_n$ e em $t=t_{n+1}$. Este será o tipo de descontinuidade adotado nesta tese. É interessante observar que a adoção deste tipo de descontinuidade juntamente com o fato de que a posição dos nós em $\hat{\Omega}^n$ é invariável dentro do intervalo I_n , leva à conclusão de que as posições dos nós correspondentes ao subdomínio espacial $\hat{\Omega}^n$ é aquela definida para o tempo t_{n+1} .

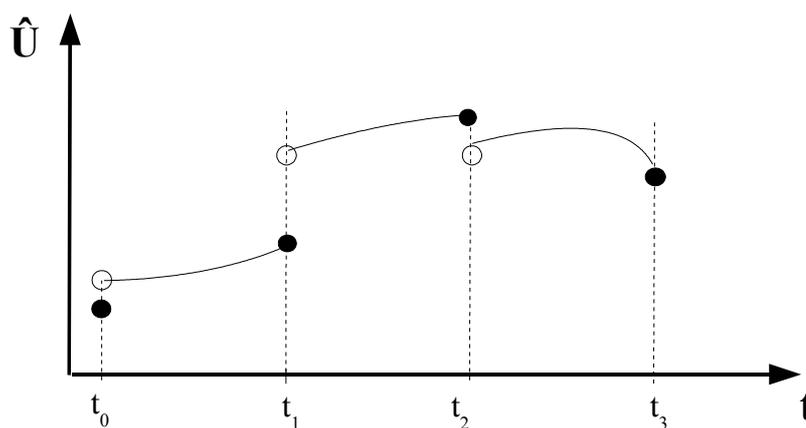


Figura 3.4. Uma maneira de se definir as descontinuidades no tempo ($I_n =]t_n, t_{n+1}]$).

3.2.3 Aproximação por Elementos Finitos da equação de Euler

Sejam $\hat{U} \in S_n^h$ e $W \in V_n^h$, onde S_n^h é o conjunto de soluções aproximadas da Eq.

(3.4) e V_n^h é o espaço das funções de ponderação, dados por:

$$S_n^h = \hat{U} \mid \hat{U} \in [C^0(\hat{Q}^n)]^m \text{ tal que } \hat{U} = \mathbf{g}, \forall (x, t) \in \hat{\Gamma}_d^n \quad (3.24)$$

$$V_n^h = W \mid W \in [C^0(\hat{Q}^n)]^{m \times m} \text{ tal que } W = \mathbf{0}, \forall (x, t) \in \hat{\Gamma}_d^n \quad (3.25)$$

Nas equações (3.24) e (3.25), m é o número de graus de liberdade do vetor \hat{U} ($m=3$ para as equações de Euler unidimensionais) e $\hat{\Gamma}_d^n$ é definido como a parte da fronteira $\hat{\Gamma}^n$ onde a variável \hat{U} é prescrita como sendo igual à condição de contorno \mathbf{g} (ou *condição de Dirichlet*, adotada aqui por simplicidade), que, por sua vez, pode ser constante ou variar com o tempo.

A formulação variacional discreta da Eq. (3.5) no domínio $\hat{\Omega}^n \times [t_n, t_{n+1}]$ para o tipo de descontinuidade temporal representado na Fig. 3.4, pode então ser escrita como:

dado $\mathbf{g}(t) \in \mathbb{R}^m$ para qualquer $W \in V_n^h$, procura-se $U \in S_n^h$ tal que:

$$\int_{x_0}^{x_1} \{ [W \hat{U}]_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} + W (\hat{U}_{t_n^+} - \hat{U}_{t_n^-}) + W (\hat{U}_{t_{n+1}^-} - \hat{U}_{t_{n+1}^+}) \} dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial W}{\partial t} \hat{U} dx dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial W}{\partial x} \hat{F} dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [W \hat{F}]_{x_0}^{x_1} dt = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

A combinação da primeira integral com os dois termos de salto em t_n e t_{n+1} resulta, finalmente, em:

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{W} (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \hat{\mathbf{U}} dx dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \hat{\mathbf{F}} dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\mathbf{W} \hat{\mathbf{F}}]_{x_0}^{x_1} dt = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

onde os subíndices t_n e t_{n+1} foram substituídos por n e $n+1$ para simplificar a notação.

3.3. Aproximações constante e linear no tempo do vetor solução

Seja, na Eq. (3.27), a solução $\hat{\mathbf{U}}_{n+1}$, aproximada da maneira usual, com funções de forma $\varphi_j = \varphi_j(x)$ tais que¹¹:

$$\hat{\mathbf{U}}_{n+1} = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j \hat{\mathbf{u}}_j^{n+1} \quad (3.28)$$

onde o somatório é realizado sobre os nós do domínio espacial $\hat{\Omega}^n$.

Na Eq. (3.28), $\varphi_j = \varphi_j(x)$ é a função de forma relativa ao nó j . A função de forma segue a definição usual onde, dados dois nós quaisquer i e j em $\hat{\Omega}^n$, a função de forma relativa ao nó j é tal que: $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$, sendo que δ é o delta de Kronecker e x_i a coordenada espacial do nó i . Tem-se também que $\hat{\mathbf{u}}_j^{n+1}$ é o valor nodal do vetor solução

¹¹ O mesmo raciocínio vale para $\hat{\mathbf{U}}_n$

\hat{U}_{n+1} . Como visto anteriormente, N_n é o número total de nós do domínio espacial.

A Fig. 3.5 ilustra o comportamento da função $\varphi_j \hat{u}_j^{n+1}$. Vê-se em tons mais claros, as funções $\varphi_j \hat{u}_j^{n-1}$ e $\varphi_j \hat{u}_j^{n+1}$, onde o nó j foi propositalmente deslocado nos dois casos a fim de se mostrar a independência da configuração espacial da malha para instantes diferentes. Finalmente, vale a pena frisar que o que caracteriza a aproximação constante no tempo é o fato do valor nodal \hat{u}_j^{n+1} não variar no intervalo I_n , como se observa na Fig. 3.5.

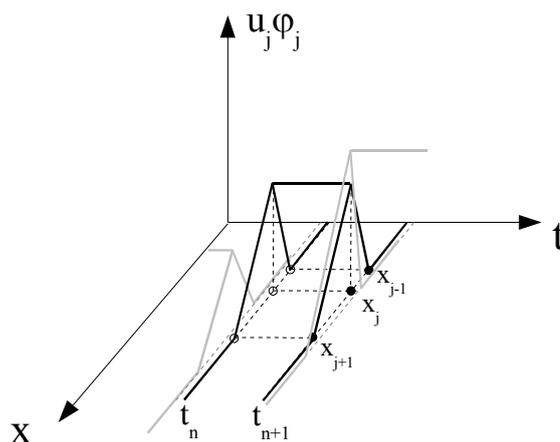


Figura 3.5. Aproximação constante no tempo.

A aproximação constante no tempo não é a única possível, muito embora seja a mais simples e será adotada neste trabalho. Apenas como exemplo, a Fig. 3.6 mostra uma aproximação linear no tempo. Neste caso, $\hat{U}_{t_{n+1}}$ não é mais aproximado como na Eq. (3.28) e sim por:

$$\hat{U}_{t_{n+1}} = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j \left[\left(\frac{t-t_n}{\Delta t} \right) \hat{u}_j^{n+1} + \left(\frac{t_{n+1}-t}{\Delta t} \right) \hat{u}_j^{n+} \right] \quad (3.29)$$

Observe-se que, neste caso, mais uma variável é adicionada ao problema: \hat{u}_j^{n+} .

Desta forma, o problema torna-se mais oneroso do ponto de vista computacional, pois o número de variáveis é duplicado. Detalhes sobre este tipo de abordagem podem ser encontrados em SHAKIB (1988).

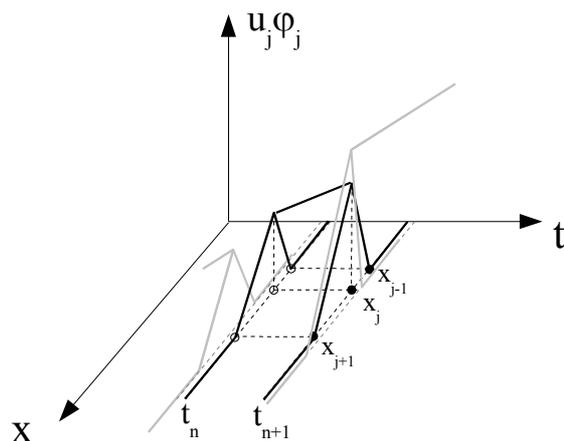


Figura 3.6. Aproximação linear no tempo.

3.4. A aproximação de Petrov-Galerkin

Na aproximação de Galerkin, a função de ponderação W é dada por:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{N_n} \varphi_i \mathbf{w}_i \quad (3.30)$$

onde \mathbf{w}_i são constantes nodais. O índice do somatório foi deliberadamente trocado de j para i pois permitirá uma maior clareza no desenvolvimento das equações.

É sabido, porém, que a aproximação de Galerkin introduz um erro de truncamento que resulta na desestabilização do método (BROOKS & HUGHES, 1982).

Assim, a função de ponderação assume a forma:

$$\bar{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^{N_n} (\varphi_i \mathbf{I} + \mathbf{P}_i) \mathbf{w}_i \quad (3.31)$$

onde \mathbf{P}_i é a função de perturbação *Petrov-Galerkin* e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem m .

Observações:

- Rigorosamente falando, na aproximação espaço-tempo, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(x, t)$ (ver SHAKIB, 1988). Neste trabalho, no entanto, será adotada uma função de perturbação bastante simplificada, onde o termo temporal não será levado em consideração, ou seja: $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(x)$. De toda maneira, as oscilações causadas pela adoção de \mathbf{W} dado pela Eq. (3.30) são, igualmente verificadas para problemas em regime permanente, sendo a análise do erro de truncamento das

equações discretizadas, resultantes da aplicação do método de Galerkin ao problema escalar de convecção-difusão linear em regime permanente, a primeira motivação para a adição da função de ponderação apresentada (BROOKS & HUGHES, 1982 e CODINA, 1993). Funções de perturbação $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(x, t)$ podem ser encontradas, por exemplo, em SHAKIB (1988) e ALIABADI & TEZDUYAR (1995). A adoção de uma função de perturbação simplificada, como será visto a seguir tem como principal inconveniente a introdução de uma excessiva difusão artificial, porém, simplifica muito a implementação, uma vez que elimina a necessidade de se recorrer a procedimentos numéricos para o seu cálculo.

- Em termos gerais, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(\nabla \varphi_i)$. Desta maneira, para funções de forma φ_i lineares, \mathbf{P}_i é descontínua nas fronteiras dos elementos no domínio espacial. Tem-se, então, que a função de ponderação \bar{W} não pertence ao espaço V_n^h . De fato, métodos de Petrov-Galerkin são assim caracterizados: as funções de ponderação \bar{W} e teste \hat{U} não pertencem ao mesmo espaço vetorial¹².
- A descontinuidade de \mathbf{P}_i nas fronteiras dos elementos traz uma dificuldade na derivação das equações discretizadas. Este problema é solucionado, definindo-se \mathbf{P}_i apenas no interior dos elementos, ou seja:

$$\mathbf{P}_i = \{ \mathbf{P}_i(x, t) | (x, t) \in \hat{Q}_e^n \} \quad (3.32)$$

¹² De fato, S_n^h não é igual a V_n^h . A bem da verdade, nem se pode chamar S_n^h de um espaço vetorial. Porém, esta definição pode ser utilizada se as condições de contorno de Dirichlet forem homogêneas.

Com estas considerações, a substituição da Eq. (3.31) na Eq. (3.27), observando-se a aproximação constante no tempo, resulta em:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_i (\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) dx - \Delta t \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (\hat{F})^{n+1} dx + \Delta t \left[\varphi_i (\hat{F})^{n+1} \right]_{x_0}^{x_1} + \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}_e^n} P_i \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x} \right)^{n+1} dx = 0 \quad (3.33)$$

3.5. Extensão do método Petrov-Galerkin para mais de uma dimensão, o método SUPG e o operador de captura de descontinuidades.

A adição de função de perturbação de Petrov-Galerkin é necessária devido à existência de termos convectivos nas equações de Euler. A fim de se estender as observações feitas para mais de uma dimensão, considere-se a equação escalar de convecção-difusão bi-dimensional com coeficientes lineares $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ e k em regime permanente:

$$\mathbf{a} \cdot \nabla u - k \nabla^2 u = 0 \quad (3.34)$$

A Fig. 3.7 ilustra o vetor \mathbf{a} e as suas coordenadas (a_x, a_y) em relação ao sistema de coordenadas xy e $(v, 0)$ em relação ao sistema $x'y'$, rotacionado de tal maneira que a direção do eixo x' seja paralelo ao vetor \mathbf{a} .

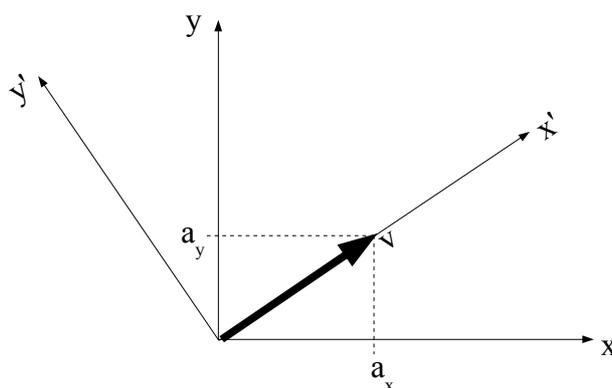


Figura 3.7. Representação no plano do vetor **a**

O método de Petrov-Galerkin pode ser facilmente estendido para a Eq. (3.34). Considere-se uma mudança de base xy para $x'y'$, que permite reescrever a Eq. (3.34) como:

$$v \frac{\partial u}{\partial x'} - k \nabla'^2 u = 0 \quad (3.35)$$

onde ∇' se refere ao sistema de coordenadas $x'y'$.

A função de ponderação de Petrov-Galerkin permite adicionar uma difusão artificial na direção x' devido à presença do termo convectivo v na Eq. (3.35). Dessa maneira, através de uma mudança para o sistema de referência original pode-se obter a função de perturbação generalizada para mais de uma dimensão. Devido ao fato da função de perturbação só atuar na direção das “linhas de corrente”, ou seja, do vetor **a** na Eq. (3.34), o método que segue é chamado de SUPG (Streamline-Upwind/ Petrov-Galerkin).

É importante observar que a Eq. (3.35) pode ser obtida através de uma projeção da equação diferencial original (3.34) não somente em um sistema orientado segundo a

direção do vetor \mathbf{a} , mas de qualquer vetor \mathbf{b} desde que a seguinte igualdade seja verificada (CODINA, 1993):

$$\mathbf{a} \cdot \nabla u = \mathbf{b} \cdot \nabla u \quad (3.36)$$

É possível mostrar que o vetor \mathbf{b} dado por:

$$\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \nabla u}{\|\nabla u\|^2} \right) \nabla u$$

satisfaz a Eq. (3.36). Desta forma, pode-se adicionar ao método SUPG, um operador semelhante que atue não na direção do vetor \mathbf{a} , mas na direção do gradiente do vetor solução ∇u . Observa-se que, mesmo sendo a Eq. (3.34) uma equação linear e de coeficientes constantes, esta nova função de perturbação é não linear e tem por objetivo adicionar uma difusão numérica extra na direção do gradiente da solução, onde a perturbação SUPG não exerce influência. Devido à este novo operador ser proporcional ao gradiente do vetor solução, ele controla as instabilidades que ocorrem nas regiões onde este gradiente é significativo, sendo conhecido como *operador de captura de descontinuidades*¹³. É claro que haverá ocasiões onde as direções dos vetores \mathbf{a} e ∇u serão coincidentes. Neste caso, é necessário se providenciar para que não haja superposição dos efeitos dos operadores SUPG e de captura de descontinuidades. Para maiores detalhes sobre o assunto, pode-se consultar, por exemplo, as seguintes referências: HUGHES et al.

¹³ Ou “operador de captura de choque”

(1986), SAMPAIO & COUTINHO (2001) e ALMEIDA & SILVA (1994).

O operador de captura de descontinuidades pode ser generalizado para sistemas de equações. Nesta tese, será utilizada uma forma bastante simples deste tipo de operador, conforme será visto no capítulo a seguir. Detalhes sobre a generalização para sistemas de equações podem ser encontrados, por exemplo, em HUGHES & MALLETT (b) (1986).

A Eq. (3.33) modificada para incluir o operador de captura de descontinuidades que passa a ser escrita como:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_i (\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) dx - \Delta t \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (\hat{F})^{n+1} dx + \Delta t \left[\varphi_i (\hat{F})^{n+1} \right]_{x_0}^{x_1} + \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}_e} \left[\mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x} \right)^{n+1} + \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right)^{n+1} \right] dx = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

onde δ_c é um parâmetro a ser definido posteriormente.

3.6. A função de perturbação Petrov-Galerkin

Para o caso particular, onde U possui apenas um grau de liberdade, a Eq. (3.1), quando escrita na sua forma quase-linear, se transforma na equação escalar de convecção escalar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.38)$$

onde $a = \frac{\partial f}{\partial u}$

Para esta equação, em se tratando de uma aproximação espacial linear de u e considerando-se apenas a dimensão espacial, a função de perturbação p_i pode ser definida analiticamente, de modo a se eliminar as oscilações espúrias decorrentes da utilização da ponderação de Galerkin (BROOKS & HUGHES, 1982):

$$p_i = \tau a \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad (3.39)$$

A Eq. (3.39) pode ser melhor entendida, observando-se inicialmente o problema de convecção-difusão unidimensional, sem o termo de fonte e em regime permanente, cuja equação é dada por:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.40)$$

Usando-se a aproximação linear na discretização espacial, é possível se mostrar que a utilização da seguinte função de perturbação, p_i :

$$p_i = \epsilon_{pg}(a, k) \tau a \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad (3.41)$$

sendo o termo¹⁴ $\epsilon_{pg}(a, k)$ igual a :

$$\epsilon_{pg}(a, k) = \coth\left(\frac{a h_e}{2k}\right) - \left(\frac{2k}{a h_e}\right) \quad (3.42)$$

onde h_e é o comprimento do elemento, resulta em valores nodais exatos na solução numérica da Eq. (3.40). No limite, quando $k \rightarrow 0$, tem-se que: $\epsilon_{pg}(a, k) \rightarrow 1$ de modo que Eq. (3.41), portanto, se aproxima da Eq. (3.39).

Na Eq. (3.39), o parâmetro τ é conhecido como *tempo intrínseco*, uma vez que possui unidade de tempo (CODINA, 1993). No caso de sistemas de equações, τ se transforma em uma matriz.

O valor de τ na Eq. (3.39) para a constante é:

$$\tau = \frac{1}{2} h_e (a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

No caso de sistemas de equações, a Eq. (3.1) quando escrita na sua forma quase-linear se torna:

¹⁴ Chamado de “magic function” por alguns autores (ver, por exemplo, NIGRO et al., 1997).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A'' \frac{\partial U}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

Para a resolução por elementos finitos da Eq. (3.44), também é possível se obter a função de perturbação P_i , como será visto adiante. Porém, para problemas em duas ou três dimensões, P_i não é simples de se determinar analiticamente, salvo em casos particulares¹⁵, havendo, geralmente, necessidade de se recorrer à procedimentos numéricos (HAUKE, 2001).

Uma maneira de se determinar τ para sistemas de equações em uma dimensão é apresentada a seguir. Seja a Eq. (2.33) escrita na sua forma quase linear, em função de um conjunto de variáveis qualquer Y e sem o termo de fonte:

$$A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + A \frac{\partial Y}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

onde $A = A'' A_0$.

A fim de se obter uma expressão para τ , considera-se, a partir de agora, o caso da Eq. (3.45) com os coeficientes A_0 e A constantes (HUGHES & MALLETT, 1986). A multiplicação de ambos os membros da Eq. (3.45) por A_0^{-1} resulta em:

¹⁵ STILLER (1999) deduz uma expressão analítica para a matriz τ para sistemas em três dimensões utilizando variáveis de entropia para elementos retangulares.

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

onde $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}$.

Na passagem da Eq. (3.45) para a Eq. (3.46), está implicitamente suposto que \mathbf{A}_0 possui inversa. Este é o caso para escoamentos compressíveis (HAUKE, 1995). Segue-se a decomposição espectral da matriz $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1} \quad (3.47)$$

Substituindo-se a Eq. (3.47) na Eq. (3.46) e multiplicando-se todo o conjunto por \mathbf{V}^{-1} , obtém-se:

$$\mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \Lambda \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

A adoção de um novo conjunto de variáveis \mathbf{Z} , tal que:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \quad (3.49)$$

finalmente produz a equação:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

A Eq. (3.50) é, na verdade, um sistema de equações independentes, onde cada equação é dada por:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial x} = 0 \quad (3.51)$$

com λ_i sendo o i -ésimo autovalor da matriz $\bar{\mathbf{A}}$, dada pela Eq. (3.47).

Os autovalores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$, por outro lado, podem ser determinados através do polinômio característico resultante da igualdade:

$$\det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.52)$$

Substituindo-se $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}'' \mathbf{A}_0$ na Eq. (3.52) e observando que $\mathbf{I} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_0$, após alguma manipulação algébrica, chega-se à conclusão de que:

$$\det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}'' - \lambda \mathbf{I}) \quad (3.53)$$

Assim os autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ são os mesmos autovalores de \mathbf{A}'' . Ora, os autovalores de \mathbf{A}'' são conhecidos (ver, por exemplo, HIRSCH, 1990):

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u + c \quad \text{e} \quad \lambda_3 = u - c \quad (3.54)$$

onde c é a velocidade do som no meio.

Com estas considerações e, tomando-se como referência a Eq. (3.43), escreve-se a seguinte expressão para o i -ésimo tempo intrínseco τ_i :

$$\tau_i = \frac{1}{2} h_e (\lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.55)$$

A formulação variacional da i -ésima equação independente (3.51) pode então ser desenvolvida. Os limites das integrais foram omitidos para não carregar demasiadamente a notação mas, subentende-se que a integração é efetuada em um elemento da fatia espaço-tempo:

$$\begin{aligned} & \int \int \varphi_i \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (z_i^{n+1} - z_i^n) dx + \\ & \int \int \left(\tau_i \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial x} \right) dx dt = 0, \quad i = 1 \dots 3 \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde, por simplificação, omitiu-se o termo de captura de discontinuidades e considerou-se apenas a adição de perturbação espacial no termo SUPG.

A Eq. (3.56) é equivalente à seguinte equação vetorial:

$$\int \int \varphi_i \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{Z}^n) dx +$$

$$\int \int \left(\tau \Lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0}$$
(3.57)

Na Eq. (3.57), as matrizes Λ e τ são dadas por:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 + c & 0 \\ 0 & 0 & u_1 - c \end{pmatrix}$$
(3.58)

$$\tau = \frac{h_e}{2} \begin{bmatrix} (u_1^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & [(u_1 + c)^2]^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & [(u_1 - c)^2]^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$
(3.59)

A matriz τ pode ser escrita como:

$$\tau = \frac{h_e}{2} (\Lambda^2)^{-\frac{1}{2}}$$
(3.60)

É necessário, agora, se obter uma expressão para a matriz τ para o sistema de equações (3.57) escrito em função de Y e não de Z . Substituindo Z , dado pela Eq. (3.49) na Eq. (3.57), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int \int \varphi_i \left(V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \Lambda V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i V^{-1} (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx + \\
& \int \int \left(\tau \Lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \left(V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \Lambda V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Multiplicando-se a Eq. (3.61) por V , chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \int \int \varphi_i \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + V \Lambda V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx + \\
& \int \int \left(V \tau \Lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \left(V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \Lambda V^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Da Eq. (3.47), tem-se que $\Lambda V^{-1} = V^{-1} \bar{\Lambda}$. Substituindo-se este resultado na Eq.

(3.62), resulta finalmente em:

$$\begin{aligned}
& \int \int \varphi_i \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \bar{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx + \\
& \int \int \left(V \tau \Lambda V^{-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \bar{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Na Eq. (3.63), a função de ponderação pode ser desenvolvida, lembrando-se que,

por se tratarem de duas matrizes diagonais $\tau \Lambda = \Lambda \tau$:

$$V \tau \Lambda V^{-1} = V \Lambda \tau V^{-1} \tag{3.64}$$

$$\mathbf{V} \Lambda \tau \mathbf{V}^{-1} = \left(\frac{h_e}{2} \right) \mathbf{V} \Lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-1} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{V} \Lambda \tau \mathbf{V}^{-1} = \left(\frac{h_e}{2} \right) \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-1} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{V} \Lambda \tau \mathbf{V}^{-1} = \left(\frac{h_e}{2} \right) \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1})^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{V} \Lambda \tau \mathbf{V}^{-1} = \left(\frac{h_e}{2} \right) \bar{\mathbf{A}} (\bar{\mathbf{A}})^{-\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{A}})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{V} \Lambda \tau \mathbf{V}^{-1} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\tau} \quad (3.69)$$

onde:

$$\bar{\tau} = \left(\frac{h_e}{2} \right) [(\bar{\mathbf{A}})^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.70)$$

Substituindo-se a Eq.(3.70) na Eq. (3.69) e daí na Eq.(3.63) e lembrando que:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}'' \mathbf{A}_0 \quad (3.71)$$

é possível chegar à uma generalização para sistemas de equações unidimensionais do método SUPG para qualquer conjunto de variáveis:

$$\int \int \varphi_i \left(A_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx +$$

$$\int \int A (A_0^{-1} \tau_u) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \left(A_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0}$$
(3.72)

Na Eq. (3.72), a matriz τ_u é dada por:

$$\tau_u = \left(\frac{h_\epsilon}{2} \right) \left[(A^u)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$
(3.73)

A função de perturbação SUPG P_i é então dada por:

$$P_i = A (A_0^{-1} \tau_u) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$$
(3.74)

Observações:

- Como A_0^{-1} não é definida no limite da incompressibilidade e, por outro lado, A^u é extremamente mal condicionada, a formulação acima não funciona para escoamentos incompressíveis.
- Em pontos de estagnação e em pontos sônicos, a matriz de estabilização τ_u se torna singular.

3.7. Uma forma simplificada para a matriz de estabilização para escoamentos compressíveis.

LE BEAU & TEZDUYAR (1991) utilizaram um parâmetro de estabilização escalar para escoamentos compressíveis. Partindo-se da Eq. (3.59), define-se a nova matriz de estabilização como:

$$\tau = \tau \mathbf{I} \quad (3.75)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e τ é definido como o maior τ_i (veja Eq. (3.55)), ou seja:

$$\tau = \frac{1}{2} h_e \left[(u_1 + c)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.76)$$

Desta forma, garante-se que em todas as equações seja adicionada uma difusão numérica maior ou igual à mínima necessária para a estabilização do método. A desvantagem de tal simplificação é claramente a adição em demasido de difusão artificial nas outras duas equações¹⁶. Com esta nova definição do termo de estabilização, a substituição de τ na Eq. (3.63) por $\tau \mathbf{I}$, dado pela Eq. (3.75) resulta, após alguma manipulação algébrica, na seguinte expressão:

¹⁶ Críticas à este tipo de abordagem podem ser encontradas, por exemplo, em HUGHES & MALLET (1986).

$$\int \int \varphi_i \left(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx +$$

$$\int \int \left[\mathbf{A} (\tau \mathbf{A}_0^{-1}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right] \left(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

Observe-se que, a presença de \mathbf{A}_0^{-1} ainda torna o termo de estabilização na Eq. (3.77) não aplicável à escoamentos incompressíveis. Com esta consideração, a Eq. (3.77) é, finalmente, reescrita como:

$$\int \int \varphi_i \left(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx +$$

$$\int \int \left[\mathbf{A} \tau_{com} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right] \left(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0} \quad (3.78)$$

onde a matriz τ_{com} é a matriz de estabilização para escoamentos compressíveis e é dada por:

$$\tau_{com} = \mathbf{A}_0^{-1} \left\{ \frac{1}{2} h_e \left[(u_1 + c)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.79)$$

3.8. A matriz de estabilização para escoamentos incompressíveis

Seja o sistema reduzido de equações diferenciais, para o caso de escoamentos incompressíveis (Eq (2.44)):

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \rho u_1 & \rho c_p \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ T \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\rho u_1 & 0 \\ \rho(e_1 + u_1^2) & \rho c_p u_1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

Pode-se escrever a Eq. (3.80) da seguinte maneira:

$$A_0^r \frac{\partial Y^r}{\partial t} + A^r \frac{\partial Y^r}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (3.81)$$

onde o superíndice r indica que se trata do sistema de equações reduzido, obtido pela consideração da densidade constante. Na Eq. (3.81), tem-se que:

$$A_0^r = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \rho u_1 & \rho c_p \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

e

$$A^r = \begin{bmatrix} 2\rho u_1 & 0 \\ \rho(e_1 + u_1^2) & \rho c_p u_1 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Considerando-se todo o procedimento que, a partir da Eq. (3.45), permitiu a obtenção da matriz de estabilização τ simplificada, para escoamentos compressíveis (Eq. (3.76)), à semelhança da Eq. (3.47), pode-se obter para a matriz dos autovalores da matriz

$$\bar{\mathbf{A}}^r = A_0^{-r} A^r :$$

$$\Lambda_i^r = \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Assim, tomando-se como modelo a Eq. (3.76), é possível escrever para a matriz τ_{inc} , a forma simplificada $\tau_{inc} = \tau_{inc} \mathbf{I}$, onde τ_{inc} é dado por:

$$\tau_{inc} = \frac{1}{2} h_e \left[(2u_1)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{h_e}{2|2u_1|} \quad (3.85)$$

Verifica-se, porém que a expressão:

$$\tau_{inc} = \frac{h_e}{2|u_1|} \quad (3.86)$$

é mais comumente utilizada, sendo idêntica à expressão para o caso escalar da equação de convecção-difusão (veja, por exemplo: BROOKS & HUGHES (1982)).

Sem maiores detalhes, considerando-se os procedimentos que levaram à dedução da Eq. (3.79), obtém-se finalmente a seguinte expressão para a matriz τ_{inc} :

$$\tau_{inc} = \tau_{inc} \mathbf{A}_0^{-r} \quad (3.87)$$

Buscando simplificar ainda mais a matriz de estabilização τ_{inc} . Considere-se o

seguinte problema de autovalor:

$$\left(\tau_{inc} \mathbf{A}_0^{-r}\right) \chi = \Lambda_\tau \chi \quad (3.88)$$

onde χ é um vetor qualquer que, para o caso unidimensional em questão, possui dimensão igual a dois. A matriz Λ_τ é dada por:

$$\Lambda_\tau = \begin{pmatrix} \frac{\tau_{inc}}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{inc}}{\rho c_p} \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Das equações (3.87) a (3.89) e, considerando-se, novamente, o sistema completo de equações diferenciais, dado pela Eq. (3.45), com sua correspondente forma variacional dada pela Eq. (3.77), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int \int \varphi_i \left(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt + \int \varphi_i (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) dx + \\ \int \int \left(\mathbf{A} \tau_{inc} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \left(\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \right) dx dt = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Na Eq. (3.90), τ_{inc} é dado por:

$$\tau_{inc} = \tau_{inc} \mathbf{A}_0^{-r} = \frac{h_e}{2} \begin{bmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho |u_1|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho c_v |u_1|} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Na Eq. (3.91), w ainda está por ser determinado. HAUKE(1995) baseado em um trabalho de FRANCA & FREY (1992), sugere a seguinte expressão para este parâmetro:

$$w = \frac{h_e |u_1|}{2} \quad (3.92)$$

Desta maneira, tem-se, finalmente:

$$\tau_{inc} = \frac{h_e}{2} \begin{bmatrix} |u_1| & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho |u_1|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho c_v |u_1|} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

A Eq. (3.93) será a expressão utilizada neste trabalho para escoamentos incompressíveis não viscosos.

3.9. Uma formulação para escoamentos compressíveis e incompressíveis

Neste trabalho, é proposta a utilização de uma matriz de estabilização mista, dada por:

$$\tau = (1 - \alpha_\tau)(\tau_{com}) + \alpha_\tau \tau_{inc} \quad (3.94)$$

onde o parâmetro α_τ é tal que para escoamentos incompressíveis $\alpha_\tau = 1$ e para escoamentos compressíveis, $\alpha_\tau = 0$. Entre estes dois extremos, todavia, não é trivial se determinar o comportamento de α_τ . HAUKE(1995) cita a seguinte expressão para α_τ :

$$\alpha_\tau = \frac{1}{1 + \left(\frac{M}{M_r}\right)^k} \quad (3.95)$$

sendo M_r um número de Mach referencial que numericamente “divide” as regiões onde o fluxo é compressível das regiões onde o fluxo é incompressível e k uma constante.

Nesta tese, em se tratando de escoamentos com massa específica constante, utilizou-se $\alpha_\tau = 1$. Para escoamentos supersônicos, por outro lado, utilizou-se $\alpha_\tau = 0$. Em nenhum momento foi feita uma tentativa de se obter uma expressão para α_τ , como aquela dada pela Eq. (3.95).

3.10. Extensão para escoamentos viscosos

No caso das equações completas de Navier-Stokes, a matriz de estabilização não é facilmente obtida. SHAKIB (1988), baseando-se na formulação Galerkin - Mínimos Quadrados¹⁷ propõe uma generalização da Eq. (3.73) para o caso das Equações de Navier-Stokes (ver Cap. 4). Como o objetivo desta tese é simplificar ao máximo a metodologia, as matrizes de estabilização para escoamentos compressíveis não levarão em conta os efeitos viscosos. No entanto, em escoamentos incompressíveis, em particular naqueles para números de Reynolds muito baixos, a utilização das matrizes de estabilização não viscosas pode levar a resultados errôneos devido ao excesso de difusão artificial adicionada. Uma das maneiras de se solucionar este problema é alterar a matriz τ_{inc} de maneira a se ter (HAUKE, 1995):

$$\tau_{inc} = \begin{bmatrix} \frac{h_e |u_1|}{2} \min\left(1, \frac{\rho |u_1| h_e}{2\mu^v}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \min\left(\frac{h_e}{2\rho |u_1|}, \frac{h_e^2}{12\mu_v}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \min\left(\frac{h_e}{2\rho c_v |u_1|}, \frac{h_e^2}{12\kappa}\right) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

¹⁷ Originalmente : *Galerkin Least Squares*

3.11. Algumas considerações sobre os métodos semi-discretos

Nesta secção, faz-se uma comparação bastante sumária do método de Galerkin descontínuo com uma formulação semi-discreta de primeira ordem no tempo. Para isso, considerou-se a formulação constante no tempo, a qual será utilizada nessa tese.

A formulação semi-discreta equivalente à formulação descontínua no tempo apresentada é a seguinte:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{x_0}^{x_1} \varphi_i dx \right) \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \hat{F} dx + [\varphi_i \hat{F}]_{x_0}^{x_1} + \\ & \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\hat{\Omega}_e^x} \left[\mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} \right) + \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right] dx = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.97)$$

A aproximação de primeira ordem no tempo para a derivada de \hat{U} pode ser obtida pela expansão em série de Taylor, tomando-se apenas o primeiro termo:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \frac{\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n}{\Delta t} \quad (3.98)$$

Observe que a Eq. (3.98) pressupõe automaticamente a continuidade de \hat{U} no tempo. A substituição da Eq. (3.98) na Eq. (3.97) resulta em:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{x_0}^{x_1} \varphi_i (\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) dx \right) - \Delta t \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \hat{F} dx + \Delta t [\varphi_i \hat{F}]_{x_0}^{x_1} + \\
& \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \left[\mathbf{P}_i \left(\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n + \Delta t \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} \right) + \Delta t \left(\delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right) \right] dx = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.99}$$

onde, caso seja tomado $\hat{F} = \hat{F}(\hat{U}_{n+1})$, tem-se o método implícito, de maneira semelhante ao que foi feito para o método de Galerkin descontínuo no tempo.

Tanto a aproximação constante descontínua no tempo quanto a aproximação contínua descrita acima possuem a mesma ordem de convergência no tempo e espaço, ou seja, $O(\Delta t, \Delta x^2)$. Observe-se que a Eq.(3.37) pode ser obtida da Eq.(3.99) pela retirada do termo Petrov-Galerkin aplicado ao salto $\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n$.

Ambas as aproximações têm suas características próprias. O método Galerkin descontínuo no tempo favorece, como foi dito anteriormente, a extensão para casos onde existe deformação da malha. Por outro lado, aproximações mais precisas no tempo, como por exemplo, a de Crank–Nicholson, de segunda ordem, são imediatamente obtidas no método semi-discreto enquanto que para se obter uma maior ordem de convergência no caso descontínuo, é necessário um maior esforço computacional. Neste trabalho, optou-se pelo método de Galerkin descontínuo no tempo, tendo em vista futuras extensões para incluir, por exemplo, problemas com fronteira móvel.

4. ESCOAMENTOS VISCOSOS EM MAIS DE UMA DIMENSÃO

Neste capítulo, serão considerados escoamentos viscosos no plano e no espaço. As equações que regem estes escoamentos são as equações de Navier-Stokes (Eq. (2.1)) que, na ausência do termo de fonte, se reduzem à:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial x_k} = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \quad (4.1)$$

onde $x_k \in \Omega$ ($\Omega \in \mathbb{R}^{n_d}$) e $t \in [0, t_{max}]$.

A Eq. (4.1) pode ser escrita em sua forma variacional como:

$$\int_0^{t_{max}} \int_{\Omega} \mathbf{W} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial x_k} \right) d\Omega dt = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \quad (4.2)$$

onde \mathbf{W} é uma função de peso qualquer $m \times m$.

A formulação pelo método de Galerkin descontínuo no tempo da Eq. (4.2) é descrita a seguir à semelhança do que foi feito no capítulo anterior.

Sejam $\hat{\mathbf{U}} \in S_n^h$ e $\mathbf{W} \in V_n^h$, onde S_n^h é o conjunto de soluções aproximadas da Eq.

(4.2) e V_n^h é o espaço das funções de ponderação, dados por:

$$S_n^h = \hat{U} \mid \hat{U} \in [C^0(\hat{Q}^n)]^m \text{ tal que } \hat{U} = \mathbf{g}, \forall (x, t) \in \hat{\Gamma}_d^n \quad (4.3)$$

$$V_n^h = \mathbf{W} \mid \mathbf{W} \in [C^0(\hat{Q}^n)]^{m \times m} \text{ tal que } \mathbf{W} = \mathbf{0}, \forall (x, t) \in \hat{\Gamma}_d^n \quad (4.4)$$

A extensão para o caso multidimensional das definições de $\hat{\Omega}_e^n$, \hat{Q}_e^n e $\hat{\Gamma}_d^n$ pode ser melhor compreendida com o auxílio da Fig. 4.1 que mostra em destaque um elemento espaço-tempo para um domínio bi-dimensional. Também estão mostrados em tons mais claros o particionamento espacial e a fronteira correspondente para o instante t_{n-1} .

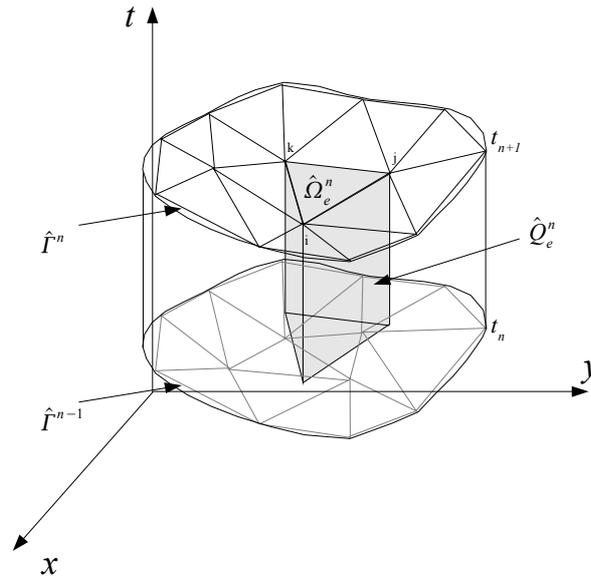


Figura 4.1. Fatia espaço-tempo. Detalhe para o domínio \hat{Q}_e^n .

Como nas equações (3.24) e (3.25) do capítulo anterior, nas equações (4.3) e (4.4), m é o número de graus de liberdade do vetor \hat{U} ($m=4$ para as equações de Navier-Stokes bi-dimensionais e $m=5$ no caso de três dimensões) e $\hat{\Gamma}_d^n$ é definido como

a parte da fronteira $\hat{\Gamma}^n$ onde a variável \hat{U} é prescrita.

A formulação variacional aproximada da Eq. (4.2) no domínio $\hat{\Omega}^n \times [t_n, t_{n+1}]$

pode ser então escrita como: *dados* $\mathbf{W} \in V_h^n$ e $\mathbf{g}(t) \in \mathbb{R}^m$, *procura-se* $\mathbf{U} \in S_h^n$ *tal que*:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}^n} \mathbf{W} (\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) d\Omega - \int_{\hat{\Omega}^n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \hat{U} dt d\Omega - \\ & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega dt + \\ & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\hat{\Gamma}} [\mathbf{W} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k] d\Gamma dt = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde n_k é a k -ésima componente do vetor normal à superfície espacial \mathbf{n}

Como visto no capítulo anterior, se faz necessária a adição de um termo de perturbação à função de ponderação \mathbf{W} a fim de se garantir a estabilidade numérica. Além do mais, é necessária a adição de um operador de captura de descontinuidades para o caso de escoamentos compressíveis. Com estas considerações e adotando-se uma função de forma linear no espaço e constante no tempo, a exemplo do que foi feito no capítulo anterior, é possível se obter:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}^n} \varphi_i (\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) d\Omega - \Delta t \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k^{n+1} - \hat{\mathbf{D}}_k^{n+1}) d\Omega + \\ & \Delta t \int_{\hat{\Gamma}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{F}}_k^{n+1} - \hat{\mathbf{D}}_k^{n+1}) n_k d\Gamma + \\ & \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_k^{n+1}}{\partial x_k} \right) + \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{U}^{n+1}}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega = \mathbf{0}, \quad k=1 \dots n_d \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1. A função de perturbação SUPG.

A generalização da função de perturbação SUPG para os casos bi e tri-dimensionais pode ser escrita como (para maiores detalhes, consultar, por exemplo, HUGHES & MALLETT, 1986):

$$\mathbf{P}_i = \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \boldsymbol{\tau}, \quad k=1 \dots n_d \quad (4.7)$$

onde a matriz $\boldsymbol{\tau}$ pode ser escrita como a combinação de duas matrizes:

$$\boldsymbol{\tau} = (1 - \alpha_\tau) (\boldsymbol{\tau}_{com}) + \alpha_\tau \boldsymbol{\tau}_{inc} \quad (4.8)$$

A determinação das matrizes $\boldsymbol{\tau}_{com}$ e $\boldsymbol{\tau}_{inc}$, mesmo para o caso de escoamentos não viscosos não é trivial. As expressões, analíticas para $\boldsymbol{\tau}_{com}$, por exemplo, são muito difíceis de se obter, tendo-se que, geralmente, recorrer-se à soluções numéricas. STILLER (1999), apresenta uma expressão analítica bastante complexa para o cálculo de $\boldsymbol{\tau}_{com}$ tendo como base variáveis de entropia para elementos retangulares. Para elementos de formas diferentes, uma expressão analítica se torna praticamente inviável, tendo-se que recorrer à procedimentos numéricos.

Expressões para a matriz $\boldsymbol{\tau}_{com}$ podem ser encontradas na literatura, por exemplo, para formulações baseadas em variáveis de entropia. Estas variáveis possuem a

propriedade de tornar as matrizes Jacobianas \mathbf{A}_0 e \mathbf{A}_k simétricas. HUGHES & MALLET (1986), aproveitando esta propriedade das variáveis de entropia, desenvolvem, à semelhança do que foi feito no capítulo anterior, uma extensão para sistemas de equações do tempo intrínseco τ , originalmente obtido para equações escalares de convecção-difusão. No caso das equações de Navier-Stokes, a extensão fica bem mais complicada mesmo em se tratando de variáveis de entropia. SHAKIB (1988) propõe a seguinte expressão para a matriz de estabilização τ_{com} para formulações baseadas em variáveis de entropia:

$$\tau_{com} = \tilde{\mathbf{A}}_0^{-1} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_j} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} \right) \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k + \left(\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x_l} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x_m} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_n} \right) \mathbf{K}_{kl} \mathbf{K}_{mn} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

onde ϵ_i é a i -ésima coordenada natural (ver Apêndice B). A matriz $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$ é a matriz Jacobiana em relação ao conjunto de variáveis de Entropia \mathbf{V} :

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} \quad (4.10)$$

Observa-se na Eq. (4.9) a dificuldade de se obter uma expressão analítica para a matriz τ_{com} . O que geralmente se faz, é obter analiticamente o somatório entre parênteses e, a partir daí, recorrer à um procedimento numérico para, a partir da decomposição espectral do resultado, se efetuar a operação de potenciação.

Neste trabalho, segue-se um procedimento baseado naquele encontrado em HAUKE (1995), porém, uma das diferenças é que expressões analíticas simplificadas para

as matrizes de estabilização são utilizadas. No caso uni-dimensional, foi apresentada uma equação bastante simples para o cálculo de τ_{com} . Para escoamentos viscosos em duas e três dimensões, utilizar-se-á uma expressão semelhante àquela, generalizada para o caso multidimensional e modificada para levar em conta o termo de captura de descontinuidades (ver ALIABADI & TEZDUYAR (1995)). Considere-se, primeiramente, a matriz τ_{com}^u , diagonal, cujo i -ésimo elemento da diagonal principal, $\tau_{com}^u(i, i)$, é dado por:

$$\tau_{com}^u(i, i) = \text{máx}[0, \tau_a - \tau_\delta] \quad (4.11)$$

onde :

$$\tau_a = \frac{h}{2(c + \|\mathbf{u}\|)} \quad (4.12)$$

$$\tau_\delta = \frac{\delta_c}{(c + \|\mathbf{u}\|)^2} \quad (4.13)$$

De posse de τ_{com}^u , a matriz τ_{com} é obtida:

$$\tau_{com} = \tau_{com}^u \mathbf{A}_0^{-1} \quad (4.14)$$

A Eq. (4.11) leva em conta a presença do operador de descontinuidades com o objetivo de se evitar a adição excessiva de difusão artificial próximo à ocorrência de choques (veja, por exemplo, CODINA, 1993).

Antes de se prosseguir com a definição de δ_c , algumas considerações são importantes. Sejam um hipervetor $\mathbf{X}_V (N_n \cdot m \times 1)$ e uma matriz $\mathbf{X}_M (m \times m)$, quaisquer, definam-se as seguintes normas:

$$\|\mathbf{X}_V\|_{\mathbf{X}_M} = \left\{ \mathbf{X}_V \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_M & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_M \end{pmatrix} \mathbf{X}_V \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

$$\|\mathbf{X}_V\| = \{\mathbf{X}_V \cdot \mathbf{X}_V\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

Definam-se, também, os gradientes do vetor \mathbf{X}_V com relação ao sistema de coordenadas cartesianas:

$$\nabla \mathbf{X}_V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{X}_V}{\partial x_{n_d}} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e com relação ao sistema de coordenadas naturais:

$$\nabla_{\epsilon} \mathbf{X}_V = \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{X}_V \quad (4.18)$$

onde \mathbf{J} é a matriz de transformação Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \epsilon_3} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

O termo δ_c , relativo ao operador de captura de descontinuidades foi obtido de ALIABADI & TEZDUYAR (1995):

$$\delta_c = \frac{\left\| \mathbf{A}_k^u \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right\|_{\tilde{\mathcal{A}}_0^{-1}}^2}{\left\| \nabla_\epsilon \mathbf{U} \right\|_{\tilde{\mathcal{A}}_0^{-1}}^2}, \quad k=1 \dots n_d \quad (4.20)$$

Para a matriz τ_{inc}^{vis} , será utilizada uma matriz diagonal, já discutida no capítulo anterior, semelhante à matriz proposta em HAUKE (1995) para funções de forma lineares.

$$\tau_{inc}^{vis}(1,1) = \frac{\|\mathbf{u}\| \cdot h_e}{2} \min \left(1, \frac{\rho \|\mathbf{u}\| h_e}{2\mu^v} \right) \quad (4.21)$$

$$\tau_{inc}^{vis}(2,2) = \tau_{inc}^{vis}(3,3) = \tau_{inc}^{vis}(4,4) = \min \left(\frac{h_e}{2\rho \|\mathbf{u}\|}, \frac{h_e}{12\mu^v} \right) \quad (4.22)$$

$$\tau_{inc}^{vis}(5,5) = \min\left(\frac{h_e}{2\rho c_v \|\mathbf{u}\|}, \frac{h_e}{12\kappa}\right) \quad (4.23)$$

onde h_e é uma dimensão característica do elemento. Neste trabalho h_e é dado por:

$$\begin{aligned} h_e &= \sqrt{A_e}; \text{ para o caso bi-dimensional} \\ h_e &= \sqrt[3]{V_e}; \text{ para o caso tri-dimensional.} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde A_e e V_e correspondem à área do elemento plano e ao volume do elemento espacial, respectivamente. No caso uni-dimensional, h_e é simplesmente o comprimento linear do elemento.

Observações:

- A matriz τ_{inc}^{vis} , dada pelas equações (4.21), (4.22) e (4.23) é válida apenas para variáveis de pressão.
- O termo de captura de discontinuidades não é o único disponível. Outras escolhas podem ser tomadas para δ_c , como, por exemplo, o operador CAU¹⁸ (GALEÃO & DO CARMO, 1988).
- O termo de captura de discontinuidade também é indefinido no limite da incompressibilidade, devido à presença da matriz \tilde{A}_0^{-1} . Desta forma, neste trabalho, multiplicar-se-á o operador de captura δ_c pelo fator $(1-\alpha)$. Desta

18 Consistent Approximate Upwind

forma, a Eq. (4.6) é reescrita como (os superíndices foram removidos dos termos $\hat{\mathbf{F}}_k$ e $\hat{\mathbf{D}}_k$ para simplificar a notação):

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) d\Omega - \Delta t \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega + \\ & \Delta t \int_{\hat{\Gamma}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k d\Gamma + \\ & \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_k}{\partial x_k} \right) + (1 - \alpha_\tau) \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $k=1 \dots n_d$

4.2. Cálculo dos fluxos e operações nas fronteiras

O fluxo difusivo $\hat{\mathbf{D}}_k$ pode ser escrito como (veja Eq. (2.24) do capítulo 2):

$$\hat{\mathbf{D}}_k = \sum_{h=1}^{n_d} \hat{\mathbf{K}}_{kh} \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial x_h} \quad (4.26)$$

Na Eq. (4.26), o fluxo difusivo depende da primeira derivada do vetor solução \mathbf{Y} . Considerando-se o elemento triangular com três conectividades mostrado na Fig. 4.1, o valor da derivada de $\hat{\mathbf{Y}}$ em relação à x_h no interior do elemento pode ser obtido de:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_h} = \sum_{j=1}^{N_{ec}} \hat{y}_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} \quad (4.27)$$

As derivadas das funções de forma φ_j podem ser encontradas no Apêndice B.

No caso do elemento de fronteira, consideraram-se as conectividades do elemento no interior do domínio adjacente ao elemento de fronteira.

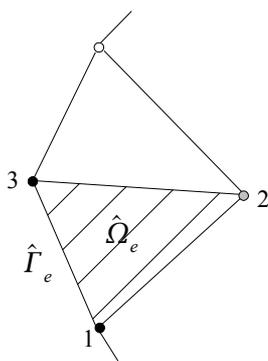


Figura 4.2. Detalhes de um elemento adjacente à fronteira.

A Fig. 4.2 mostra um elemento de fronteira de conectividades 1 e 3 ($\hat{\Gamma}_e$) e o elemento adjacente no domínio de conectividades 1,2 e 3 ($\hat{\Omega}_e$). A derivada de \hat{Y} no elemento de fronteira $\hat{\Gamma}_e$ é calculada por:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_h} = \hat{y}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_h} + \hat{y}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_h} + \hat{y}_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_h} \quad (4.28)$$

No caso do fluxo convectivo, não se faz necessária a obtenção de derivadas. Como exemplo do cálculo do fluxo, considere-se novamente a Fig. 4.2. O valor de \hat{F}_k é baseado no valor médio entre os valores das soluções nodais tomadas nos nós da fronteira: 1 e 3. Assim, sejam \hat{y}_1 e \hat{y}_3 as soluções no instante t_{n+1} para os nós do elemento $\hat{\Gamma}_e$. Tem-se que:

$$\hat{F}_k = \hat{F}_k \left(\frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_3}{2} \right) \quad (4.29)$$

O raciocínio anterior é o mesmo para qualquer elemento, seja ele de fronteira ou de domínio (LYRA, 1994), ou seja, dado um elemento qualquer com valores nodais do vetor solução: \hat{y}_j , e um vetor ou matriz genérico para calculado no elemento, denominado aqui por X_g , tem-se que:

$$X_g(\hat{Y}_{n+1}) = X_g \left[\left(\frac{1}{N_{ec}} \right) \sum_{j=1}^{N_{ec}} \hat{y}_j \right]^{n+1} \quad (4.30)$$

4.2.1 O fluxo na fronteira

O fluxo total na fronteira é dado por:

$$\hat{\mathbf{F}}_T = \sum_{k=1}^{n_d} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k \quad (4.31)$$

Pode-se demonstrar a partir da Eq.(4.31) e das expressões para $\hat{\mathbf{F}}_k$ e $\hat{\mathbf{D}}_k$, encontradas no capítulo 2, que:

$$\hat{\mathbf{F}}_T = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \rho u_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + p n_1 - \mathbf{T}_1 \\ \rho u_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + p n_2 - \mathbf{T}_2 \\ \rho u_3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + p n_3 - \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} (\rho E + p) - \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

onde \mathbf{T} é o vetor de tração, dado por:

$$\mathbf{T} = \tau^v \mathbf{n} \quad (4.33)$$

O significado do vetor de tração é melhor visualizado com o auxílio da Fig. 4.3. A força visco-elástica \mathbf{f}^1 atuante na superfície paralela ao plano horizontal de um elemento do fluido é decomposta em três vetores ortogonais. Sendo S a medida da área da superfície indicada na figura, o comprimento de cada vetor \mathbf{f}_k^1 é dado por:

$$\|\mathbf{f}_k^1\| = \tau_{1k}^v S \quad (4.34)$$

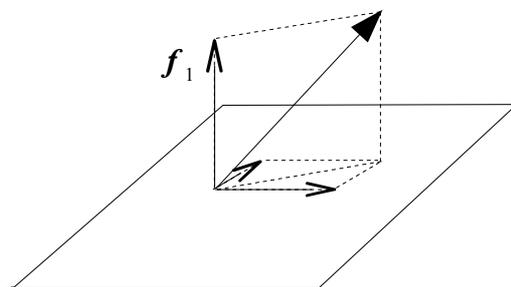


Figura 4.3. Decomposição da força \mathbf{f}^1 .

O vetor \mathbf{f}^1 pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}^1 = \begin{pmatrix} \tau_{11}^v S \\ \tau_{12}^v S \\ \tau_{13}^v S \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Seja agora um elemento infinitesimal da fronteira cuja normal é \mathbf{n} . O módulo da projeção de \mathbf{f}^1 sobre o vetor \mathbf{n} , por unidade de área, é:

$$\frac{\|\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{n}\|}{S} = \tau_{11}^v n_1 + \tau_{12}^v n_2 + \tau_{13}^v n_3 \quad (4.36)$$

Considerando-se ainda a projeção das outras forças \mathbf{f}^2 e \mathbf{f}^3 atuantes no elemento de fluido sobre a normal \mathbf{n} pode-se entender que cada componente do vetor de tração \mathbf{T} representa a contribuição da força \mathbf{f}^k para o fluxo das forças viscosas e elásticas

normais à superfície. O fluxo total do trabalho de deformação visco-elástica através da superfície é igual ao produto escalar: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$.

4.2.2 Condições de contorno naturais

Tendo como base a Eq. (4.31), é possível definir as seguintes condições de fronteira que são impostas diretamente ao vetor de fluxo $\hat{\mathbf{F}}_T$:

Condição de fluxo volumétrico prescrito.

O valor de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ é conhecido. Um caso particular é o caso onde não é permitido que haja fluxo através de uma superfície, ou seja $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (condição de parede sólida não viscosa). Impor esta condição é a mesma coisa que impor que o componente da velocidade normal à superfície velocidade seja igual a zero.

Condição de fluxo de calor prescrito.

O valor de \mathbf{q} é conhecido. Novamente, a condição de adiabaticidade é um caso particular, onde não existe fluxo de calor através da superfície ($\mathbf{q} = 0$).

Condição de simetria

A Fig. 4.4 ilustra a condição de simetria em uma superfície aqui representada por um plano π . Espera-se que os valores da velocidade e temperatura em dois pontos equidistantes do plano, situados sobre uma mesma reta que corta o plano perpendicularmente sejam iguais, ou seja, o escoamento é simétrico em relação ao plano (FORTUNA, 2000). A partir destas observações, conclui-se que:

1. $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$, uma vez que não há variação de temperatura na direção de \mathbf{n} .
2. $\tau_{nr} = \tau_{ns} = 0$, uma vez que não há variação da velocidade na direção de \mathbf{n} .
3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, uma vez que a velocidade é perpendicular a \mathbf{n} .

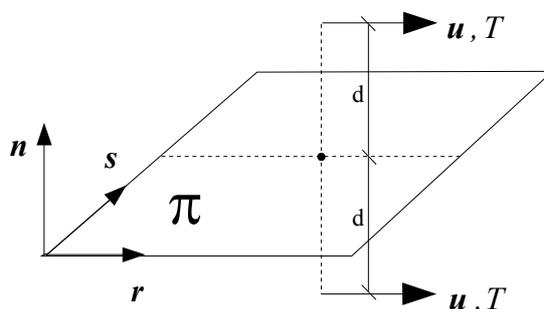


Figura 4.4. Condições de simetria.

4.2.3 Condições de contorno essenciais (ou de Dirichlet)

Podem ser impostas diretamente ao vetor solução $\hat{\mathbf{y}}$ as seguintes condições de contorno:

Pressão, temperatura e (ou) velocidade prescrita.

Condição de não deslizamento: ou seja, o vetor velocidade é igual a zero na

superfície ($\mathbf{u}=\mathbf{0}$).

Além das condições de contorno acima, ainda é possível não se prescrever nenhuma condição, natural ou essencial (fluxo livre). Mesmo assim, todos os fluxos devem ser calculados para se garantir conservação (SHAKIB, 1988).

Finalmente, a imposições das condições de contorno nas equações de Navier-Stokes está longe de ser um problema trivial (veja por exemplo: DARMOFAL et al. (2000) e CHANG et al. (2003). Assim, nesta tese, procurar-se-á reproduzir os exemplos publicados na literatura, inclusive com as condições de contorno adotadas, de maneira a se garantir que soluções coerentes sejam obtidas.

5. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

5.1. Resolução pelo método Preditor- Multicorretor

Antes de mais nada, a Eq. (4.25) é repetida abaixo por conveniência:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\hat{\Omega}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) d\Omega - \Delta t \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega + \\
 & \Delta t \int_{\hat{\Gamma}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k d\Gamma + \\
 & \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_k}{\partial x_k} \right) + (1 - \alpha_\tau) \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

A Eq. (5.1) pode ser resolvida através de um algoritmo do tipo preditor-multicorretor (ver SHAKIB, 1988). Antes de mais nada, observa-se que, devido à aproximação do vetor solução $\hat{\mathbf{U}}$, a Eq. (5.1), na verdade, deve ser reescrita de uma maneira um pouco diferente:

$$\begin{aligned}
& \int_{\hat{\Omega}^n} \varphi_i (\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n) d\Omega - \Delta t \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} (\hat{F}_k - \hat{D}_k) d\Omega + \\
& \Delta t \int_{\hat{\Gamma}^n} \varphi_i (\hat{F}_k - \hat{D}_k) n_k d\Gamma + \\
& \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{F}_k}{\partial x_k} \right) + (1 - \alpha_\tau) \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{U}^{n+1}}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega = \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde \mathbf{R} é o resíduo produzido por causa da aproximação da solução.

Na Eq. (5.2), observe-se que (ver Eq. (3.28)):

$$\hat{U}_{n+1} = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j \hat{u}_j^{n+1} \text{ e } \hat{U}_n = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j \hat{u}_j^n \tag{5.3}$$

Ainda em relação à Eq. (5.2), tem-se que (ver também a Eq. (4.7)):

$$\hat{F}_k = \hat{F}_k(\hat{U}_{n+1}), \quad \hat{D}_k = \hat{D}_k(\hat{U}_{n+1}) \text{ e } \mathbf{P}_i = \left[\mathbf{A}_k(\hat{U}_{n+1}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right]_\tau \tag{5.4}$$

A substituição das equações (5.3) nas equações (5.4) e daí na Eq. (5.2), permite a adoção de uma notação mais compacta para a Eq. (5.2):

$$\mathbf{G}(\hat{u}^{n+1}, \hat{u}^n) = \mathbf{R} \tag{5.5}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^n) = & \int_{\hat{\Omega}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) d\Omega - \Delta t \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega + \\
& \Delta t \int_{\hat{\Gamma}^n} \varphi_i (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k d\Gamma + \\
& \Delta t \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_k}{\partial x_k} \right) + (1 - \alpha_\tau) \delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Observe-se que $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^n)$ é um funcional não linear.

Na Eq. (5.5), desconsiderando-se os superíndices $n+1$ e n por simplificação,

$\hat{\mathbf{u}}$ é um hipervetor de dimensão $N_n \times m$ dado por:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{N_n} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

onde $\hat{\mathbf{u}}_j$ é o vetor solução nodal relativo ao nó j . Observe-se que é possível se escrever:

$$\hat{\mathbf{u}}_j = \hat{\mathbf{u}}_j(\hat{\mathbf{y}}_j) \tag{5.8}$$

onde $\hat{\mathbf{y}}_j$ é o vetor contendo os valores das variáveis de pressão, no caso deste trabalho, relativos ao nó j , ou seja:

$$\hat{\mathbf{y}}_j^T = (p \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad T)_j \tag{5.9}$$

A substituição da Eq. (5.8) na Eq. (5.7) leva à possibilidade de se escrever a Eq.

(5.5) da seguinte maneira alternativa:

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) = \mathbf{R} \quad (5.10)$$

A Eq. (5.1) é satisfeita se as soluções nos instantes t_n e t_{n+1} forem conhecidas. Obviamente, a solução em t_0 é fornecida como condição inicial. A solução em t_1 , no entanto, não é conhecida. O método utilizado para obtê-la pode ser encontrado em SHAKIB (1988) e será mostrado rapidamente aqui.

Supondo-se conhecida a solução $\hat{\mathbf{y}}^n$, na Eq. (5.10), prediz-se um valor para $\hat{\mathbf{y}}^{n+1}$ denominando-o $\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}$ (o subscrito 1 indica que é o primeiro valor arbitrado). Observa-se, agora, a seguinte expansão aproximada em série de Taylor para a função \mathbf{G} :

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) \approx \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) + \frac{\partial \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}} (\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}) \quad (5.11)$$

Se o novo valor $\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1}$, calculado através da Eq. (5.11) satisfizer¹⁹ a equação original, ter-se-á que:

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) \approx \mathbf{0} \quad (5.12)$$

Desta maneira, a partir de posse da solução arbitrária $\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}$, é possível se obter a

¹⁹ A menos dos termos truncados da expansão de \mathbf{G} em série de Taylor.

solução corrigida $\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1}$, mais próxima da solução real da Eq.(5.1). Substituindo-se a Eq. (5.12) na Eq. (5.11), tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}} (\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}) \approx -\mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) \quad (5.13)$$

A partir da solução $\hat{\mathbf{y}}_2^{n+1}$, pode-se obter uma nova solução $\hat{\mathbf{y}}_3^{n+1}$ e assim por diante. A Eq. (5.13) pode então ser escrita de forma geral:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}} (\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}) \approx -\mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) \quad (5.14)$$

onde $\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}$ é a i -ésima solução arbitrada e $\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1}$ é a solução corrigida.

A Eq. (5.14) pode ser escrita de maneira mais compacta como:

$$\mathbf{M}_i \Delta \hat{\mathbf{y}} = -\mathbf{R}_i \quad (5.15)$$

onde, por motivos de clareza, o sinal de aproximação foi trocado pelo sinal de igualdade, e:

$$\mathbf{M}_i = \frac{\partial \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}} \quad (5.16)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{y}} = (\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) \quad (5.18)$$

Tanto a matriz \mathbf{M}_i quanto o vetor \mathbf{R}_i são obtidos a partir da primeira solução arbitrária $\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}$. A solução corrigida $\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1}$ é obtida através da solução do sistema de equações dado pela Eq. (5.15). O algoritmo a seguir resume a implementação do método *preditor – multicorretor*, onde várias correções para a solução $\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}$ são efetuadas.

Observação:

- No caso da equação de convecção-difusão linear com coeficientes constantes, o funcional \mathbf{G} é linear em relação à $\hat{\mathbf{y}}^n$ e $\hat{\mathbf{y}}^{n+1}$, o que não ocorre no caso das equações de Navier-Stokes. De fato, \mathbf{G} pode ser escrito, neste caso, da seguinte maneira:

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^n) = k_1 \hat{\mathbf{u}}^{n+1} + k_2 \hat{\mathbf{u}}^n \quad (5.19)$$

onde k_1 e k_2 são constantes reais oriundas das diversas integrais envolvidas na determinação de \mathbf{G} .

O funcional \mathbf{G} , dado pela Eq.(5.19), sendo linear, pode ser exatamente expandido em série de Taylor observando-se apenas o termo de primeira ordem, ou seja:

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n) + \frac{\partial \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}} (\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}) \quad (5.20)$$

Como \mathbf{G} , dado pela Eq. (5.11) é não linear, a Eq. (5.20) não se aplica. Esta é a razão pela qual a Eq. (5.11) não representa uma igualdade.

5.1.1 Algoritmo para o método Preditor-Multicorretor

PROCEDIMENTOS INICIAIS

Obter $\hat{\mathbf{y}}^0$ (Solução inicial)

AVANÇO NO TEMPO

De $n=0$ até $N-1$, faça:

Predição:

$$\hat{\mathbf{y}}_1^{n+1} = \hat{\mathbf{y}}^n$$

Multicorreção ("i" etapas multicorretoras)

Faça $i=1$

Calcule :

$$\mathbf{M}_i = \frac{\partial \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}} \text{ e } \mathbf{R}_i = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{y}}^n)$$

Resolva para $\Delta \hat{\mathbf{y}}$: $\mathbf{M}_i \Delta \hat{\mathbf{y}} = -\mathbf{R}_i$

Correção de $\hat{\mathbf{y}}_i^{n+1}$

$$\hat{\mathbf{y}}_{i+1}^{n+1} = \hat{\mathbf{y}}_i^{n+1} + \Delta \hat{\mathbf{y}}$$

Fim da multicorreção (iterações em i)

O algoritmo descrito acima, é incondicionalmente estável apenas para o caso de este ser utilizado para a resolução da equação de convecção-difusão linear com coeficientes constantes, onde o funcional \mathbf{G} pode ser expandido como na Eq.(5.20). No caso das equações de Navier-Stokes, a estabilidade incondicional não é garantida (SHAKIB, 1988).

Observação

- Para a resolução do sistema de equações lineares (5.15), foi utilizado um método iterativo do tipo GMRES²⁰. O código da rotina GMRES foi obtido do CERFACS²¹ (Centre Europeen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique), e é de distribuição livre. Existem muitos “pacotes” para solução de sistemas não simétricos de equações do tipo $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Em particular, as rotinas utilizadas neste trabalho, permitem a chamada *comunicação reversa*, onde, em algum momento, é solicitado que o usuário execute uma operação do tipo: \mathbf{Ax}_g , onde o vetor \mathbf{x}_g é fornecido pela rotina. Desta maneira, tanto o pré-condicionamento quanto o produto \mathbf{Ax}_g devem ser fornecidos externamente. Esta forma de implementação tem como principal vantagem a liberdade para se calcular o produto matriz-vetor, onde se faz uso da estrutura de dados por elemento evitando-se o armazenamento da

20 GMRES (Generalized Minimum Residue)

21 Até o presente momento, a página do CERFACS possui o seguinte endereço: <http://www.cerfacs.fr>

matriz A , o que reduz bastante o uso da memória.

5.2. Matrizes e vetores elementares

Na Eq. (5.15), é possível escrever:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_e \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

onde N_e é o número de elementos e o subíndice i foi removido para não sobrecarregar a notação.

Na Eq. (5.21), \mathbf{R}_e é dado por:

$$\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_{ec}} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

onde \mathbf{r}_i é o valor nodal do resíduo e possui dimensões $m \times 1$ e N_{ec} é o número de conectividades do elemento e .

Na Eq. (5.21), operador \mathbf{A} indica uma operação de montagem, onde, a partir de todos os vetores elementares \mathbf{R}_e , é obtido o resíduo \mathbf{R} .

Da mesma maneira, a matriz \mathbf{M} pode ser obtida a partir de matrizes elementares

\mathbf{M}_e :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} (\mathbf{M}_e) \quad (5.23)$$

Na Eq. (5.23), cada matriz elementar pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{11} & \cdots & \mathbf{m}_{1N_{ec}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_{N_{ec}1} & \cdots & \mathbf{m}_{N_{ec}N_{ec}} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

onde \mathbf{m}_{ij} é a matriz nodal de dimensões $m \times m$.

O resíduo \mathbf{R}_e na Eq. (5.21) é dado por:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{M}_a [\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{y}})^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{y}})^n] + \Delta t [-\mathbf{V} + \mathbf{V}_\Gamma + \mathbf{V}_{pg} + \mathbf{V}_{DC} + \mathbf{V}_h] \quad (5.25)$$

A matriz \mathbf{M}_e , por sua vez é dada por:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_a \mathbf{A}_0 + \Delta t [\mathbf{A} + \mathbf{A}_{pg} + \mathbf{A}_{DC} + \mathbf{A}_h] \quad (5.26)$$

Nas Equações (5.25) e (5.26), as matrizes \mathbf{M}_a , \mathbf{A} , \mathbf{A}_{pg} , \mathbf{A}_{DC} , \mathbf{A}_h e os

vetores V , V_Γ , V_{pg} , V_{DC} e V_h do lado direito, são tomados por elemento, muito embora o índice e esteja omitido. Desta forma, para um elemento com conectividades 1 e 2, por exemplo, a matriz M_a possui a seguinte forma:

$$M_a = \begin{bmatrix} M_a(1,1) & M_a(1,2) \\ M_a(2,1) & M_a(2,2) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

onde $M_a(i, j)$ é uma matriz de dimensões $(m \times m)$. O mesmo vale para as outras matrizes.

De maneira semelhante, o vetor elementar V , por exemplo, tem a forma:

$$V = \begin{bmatrix} V(1) \\ V(2) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

onde $V(i)$ é um vetor de dimensões $m \times 1$.

5.2.1 Componentes nodais do vetor R_e

Pode-se obter para os elementos dos termos da Eq. (5.25):

Matriz de massa

$$\mathbf{M}_a(i, j) = \left(\int_{\hat{\Omega}_e} \varphi_i \varphi_j d\Omega \right) \mathbf{I} \quad (5.29)$$

Termo convectivo

$$\mathbf{V}(i) = \left(\mathbf{F}_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \int_{\hat{\Omega}_e} d\Omega \quad (5.30)$$

Correção Petrov-Galerkin do termo convectivo

$$\mathbf{V}_{pg}(i) = \left[\left(\mathbf{A}_k \tau \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \left(\mathbf{A}_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} \right) \int_{\hat{\Omega}_e} d\Omega \right] \hat{\mathbf{y}}_j \quad (5.31)$$

onde $\mathbf{A}_k = \partial \mathbf{F}_k / \partial Y$.

Nas equações (5.30) e (5.31) observou-se que, para elementos lineares, as primeiras derivadas são constantes, e, portanto, foram colocadas para fora do integrando. Para \mathbf{F}_k , \mathbf{A}_k e τ_k , assume-se que $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\hat{\mathbf{y}}_m)$, $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k(\hat{\mathbf{y}}_m)$ e $\tau = \tau(\hat{\mathbf{y}}_m)$, sendo $\hat{\mathbf{y}}_m$ o valor médio de $\hat{\mathbf{y}}$ no elemento (ver capítulo anterior):

$$\hat{\mathbf{y}}_m = \frac{1}{N_{ec}} \sum_{j=1}^{N_{ec}} \hat{\mathbf{y}}_j \quad (5.32)$$

O termo de captura de descontinuidades $\mathbf{V}_{DC}(i)$ é dado por:

$$V_{DC}(i) = (1 - \alpha_\tau) \mathbf{A}_0 \left(\delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \right) \hat{y}_j \quad (5.33)$$

onde δ_c é considerado constante dentro do elemento (ver as observações feitas sobre \mathbf{F}_k , \mathbf{A}_k e τ).

Termo difusivo

De maneira semelhante ao termo convectivo (Eq. (5.30)), tem-se:

$$V_h(i) = \left(\mathbf{D}_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \quad (5.34)$$

Fluxo na fronteira

$$V_\Gamma(i) = \int_{\hat{\Gamma}_e^n} \varphi_i (\mathbf{F}_k - \mathbf{D}_k) n_k d\Gamma \quad (5.35)$$

5.2.2 Componentes elementares da matriz M_e

Matriz de convecção

$$\mathbf{A}(i, j) = \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) \int_{\hat{\Omega}_e^n} \varphi_i d\Omega \quad (5.36)$$

Correção Petrov-Galerkin da matriz de convecção

$$\mathbf{A}_{pg}(i, j) = \left(\mathbf{A}_k \tau \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \left(\mathbf{A}_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} \right) \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \quad (5.37)$$

Matriz do operador de captura de descontinuidades

$$\mathbf{A}_{DC}(i, j) = (1 - \alpha_\tau) \left(\delta_c \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \right) \mathbf{A}_0 \quad (5.38)$$

Matriz de difusão

$$\mathbf{A}_h = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\mathbf{K}_{kh} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} \right) \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \quad (5.39)$$

5.3. Avanço no tempo e convergência para o estado permanente.

Para o cálculo do intervalo de tempo global Δt (equações (5.25) e (5.26))

utilizou-se como referência o número de Courant C_r (SHAKIB, 1988):

$$\Delta t = \frac{C_r}{x_d + x_c} \quad (5.40)$$

onde:

$$x_d = \frac{2}{h_e^2} \left[\text{máx} \left(\frac{2\mu^v + n_d \lambda^v}{\rho}, \frac{\kappa}{c_v \rho} \right) \right] \quad (5.41)$$

e:

$$x_c = \frac{\|\mathbf{u}\| + c}{h_e} \quad (5.42)$$

O critério utilizado nesta tese para se verificar a convergência para o regime permanente baseia-se na variação relativa do vetor solução $\hat{\mathbf{y}}$, chamada aqui de $\delta \hat{\mathbf{y}}$. Sejam $\hat{\mathbf{y}}^{n+1}$ e $\hat{\mathbf{y}}^n$ os valores do vetor solução nos instantes t_{n+1} e t_n , respectivamente. Uma maneira de se definir $\delta \hat{\mathbf{y}}$ é a seguinte:

$$\delta \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{(\hat{\mathbf{y}}^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}^n) \cdot (\hat{\mathbf{y}}^{n+1} - \hat{\mathbf{y}}^n)}{\hat{\mathbf{y}}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{y}}^{n+1}}} \quad (5.43)$$

Observa-se que, no regime permanente $\delta \hat{\mathbf{y}} \rightarrow 0$.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1. Observações iniciais

Nos exemplos que seguem, no tocante ao resolvidor GMRES, os seguintes parâmetros foram utilizados:

- a) Dimensão do subespaço de Krylov – 10.
- b) Tolerância para as iterações internas – 0,01.
- c) Pré-condicionador – do tipo bloco-diagonal.

Em todos os exemplos de escoamentos compressíveis, o fluido utilizado foi o ar, considerando-se a hipótese do gás perfeito como verdadeira. Neste sentido, foram utilizados os seguintes valores para os calores específicos²² à pressão constante e à volume constante, respectivamente: $c_p=1005,0 J/kgK$ e $c_v=718,0 J/kgK$. As outras propriedades físicas podem ser obtidas a partir da equação dos gases perfeitos:

$$p = \rho R T \quad (6.1)$$

Para o caso de escoamentos de fluidos incompressíveis, alguns exemplos utilizaram um fluido hipotético com massa específica constante, a fim de se reproduzir os resultados publicados na literatura. Em cada caso, os valores das propriedades físicas

²² O ar também é considerado como um gás caloricamente perfeito.

utilizadas são dados em momento oportuno.

Em todos os exemplos de escoamentos incompressíveis foram utilizadas variáveis primitivas de pressão. No caso de escoamentos de gases, em alguns casos, também foram utilizadas variáveis conservativas. Finalmente, todos os experimentos numéricos foram feitos em um micro computador dotado de um processador de 1,2GHz de velocidade e memória RAM de 512Mbytes.

6.2. Tubo de choque

Neste exemplo, um tubo contendo ar no seu interior é dividido no centro por uma membrana que define duas regiões, de modo que as propriedades do gás no instante inicial são diferentes em cada uma das regiões do tubo (a Fig 6.1 mostra um trecho do tubo). Ao romper-se a membrana, uma onda se propaga na direção contrária ao gradiente de pressão. Os gráficos de pressão, massa específica e temperatura podem ser determinados analiticamente para um instante qualquer t . Este exemplo serve para testar a exatidão da solução numérica em um problema transiente bem como a quantidade de difusão numérica adicionada pelo método nas regiões de descontinuidade. Além disso, são avaliadas as influências do grau de refinamento da malha e do passo de tempo utilizado, nas soluções numéricas obtidas. O tubo é considerado de comprimento infinito e o ar é considerado como um fluido não viscoso.

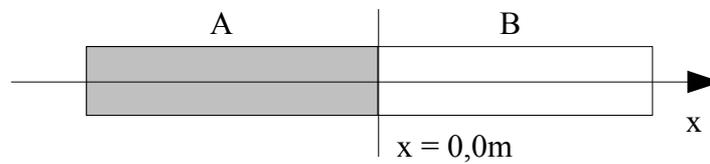


Figura 6.1. Esboço do trecho do tubo de choque contendo a membrana separadora.

Para $x < 0,0 m$: $\rho = 1,0 kg/m^3$, $u_1 = 0,0 m/s$, $p = 1,0 Pa$

Para $x > 0,0 m$: $\rho = 0,125 kg/m^3$, $u_1 = 0,0 m/s$, $p = 0,1 Pa$

O domínio espacial foi limitado a $-0,505 m \leq x \leq 0,505 m$.

A seguir, são analisados os resultados numéricos computados para o tempo $t = 0,2 s$ e as influências do passo de tempo global, grau de refinamento da malha e tipo de variável utilizado (variáveis conservativas ou variáveis de pressão) na exatidão dos resultados. Na análise do passo de tempo global e do grau de refinamento da malha, foram utilizadas apenas variáveis de pressão.

6.2.1 Influência do passo de tempo global

Para analisar a influência do passo de tempo global na exatidão da solução do problema transiente, considerou-se uma divisão uniforme do domínio espacial em 1000 elementos. As soluções numéricas para a variação da massa específica ao longo do tubo, foram obtidas em função do número de Courant (Eq.(5.40)) e podem ser observados na Fig.6.2, onde a solução exata do problema está representada por uma linha tracejada. Vê-se

claramente que existe uma grande perda de exatidão numérica à medida que o número de Courant é incrementado. Para $Cr=100$, por exemplo, a solução numérica já se torna completamente inaceitável devido ao excesso de difusão artificial adicionado.

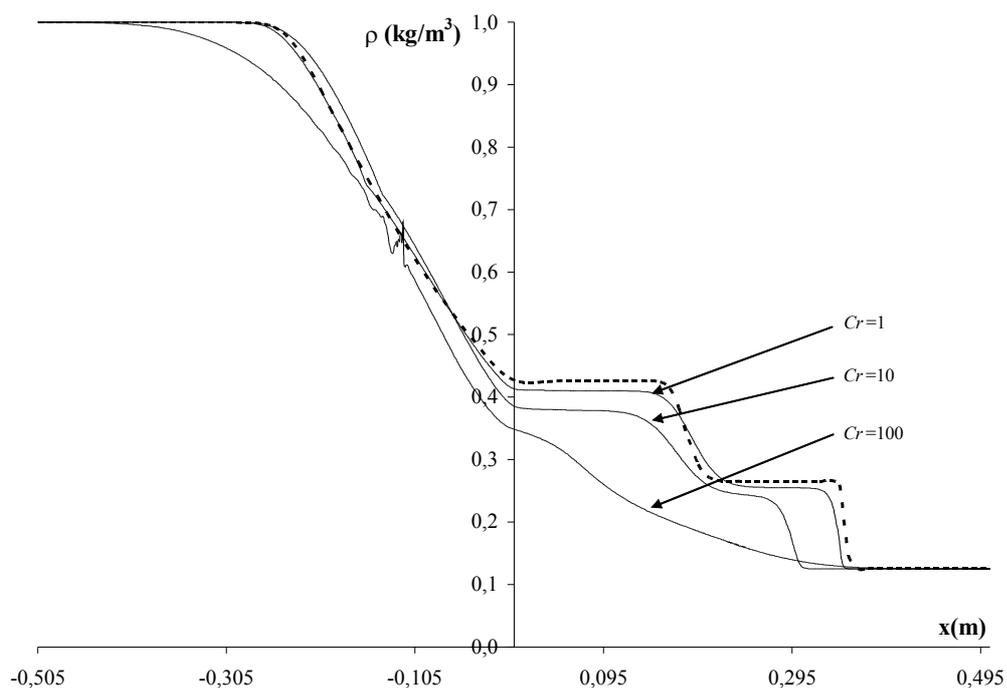


Figura 6.2. Comportamento da solução numérica em função do passo de tempo global.

6.2.2 Influência do grau de refinamento da malha

Para analisar a influência do grau de refinamento da malha sobre a exatidão da solução numérica, fixou-se o número de Courant em 1. O domínio espacial foi dividido em 10, 100 e 1000 elementos e os resultados comparativos para a variação da massa específica estão mostrados na Fig.6.3, onde também se pode ver a solução exata em uma linha

tracejada. Novamente, observa-se que a solução deteriora rapidamente à medida que se aumenta o tamanho do elemento. Vê-se que, já para uma malha de 100 elementos, a solução numérica é bastante ruim, quando comparada com a solução exata. Pode-se observar que, a medida que a malha fica mais refinada (e que o passo de tempo global diminui, segundo o observado na seção anterior), a solução numérica se aproxima consistentemente da solução exata.

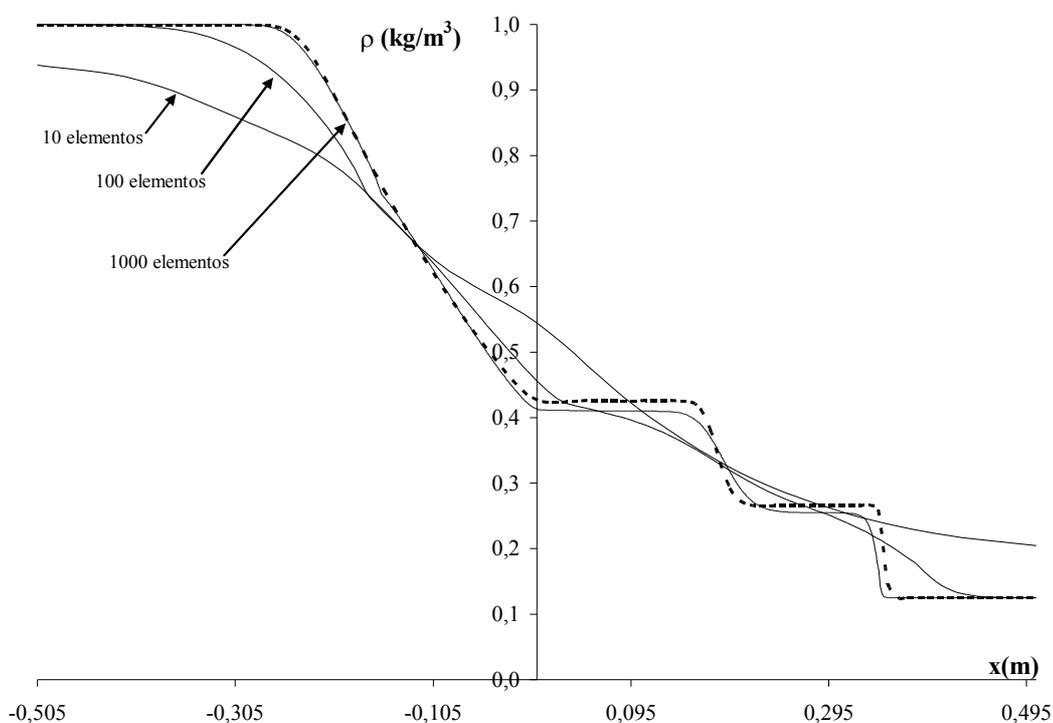


Figura 6.3. Comportamento da solução numérica em função do grau de refinamento da malha.

6.2.3 Influência do tipo de variável utilizado

Para o avanço no tempo, novamente considerou-se $Cr=1$ e, no caso dos

gráficos da Fig. 6.4, onde estão representadas as variações de massa específica e temperatura ao longo do tubo, não foi utilizado operador de captura de descontinuidades. Observa-se que em ambos os casos, o uso de variáveis conservativas produz melhores resultados em relação às variáveis de pressão. A adição do operador de captura de descontinuidade elimina as oscilações no caso de variáveis de pressão, porém, torna o método ainda mais difusivo, segundo mostra a Fig. 6.5, no caso específico do gráfico da variação da temperatura.

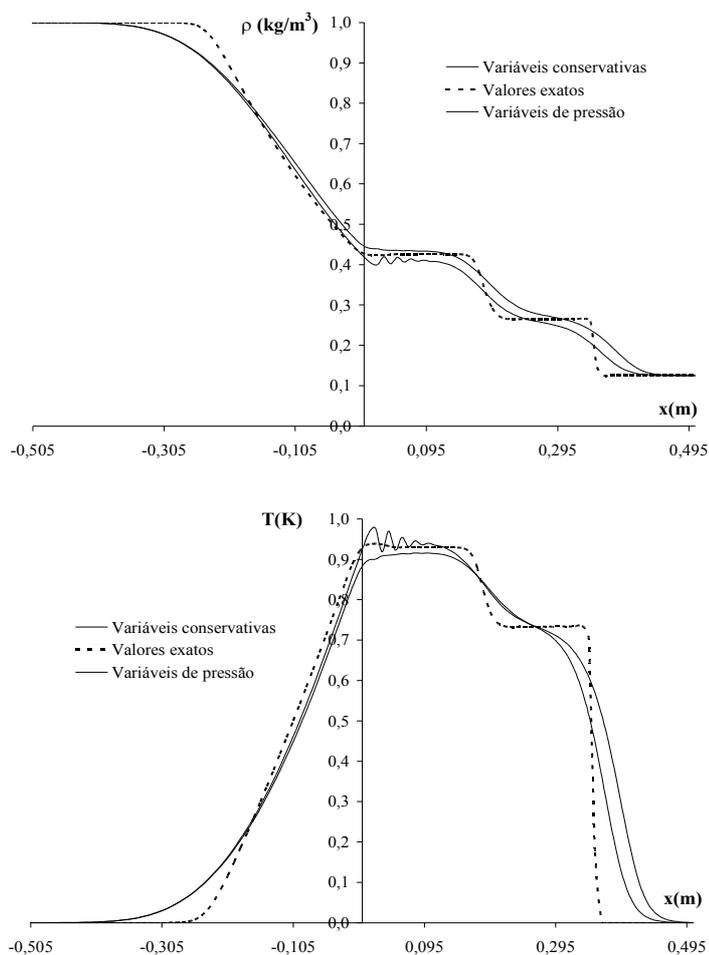


Figura 6.4. Variação da massa específica e temperatura em $t=0,2s$.

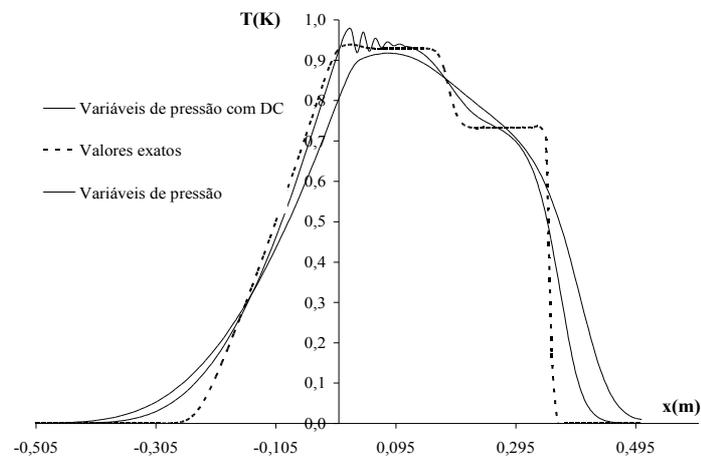


Figura 6.5. Efeito da adição do operador de captura de descontinuidades no gráfico da variação de temperatura para variáveis de pressão em $t=0,2s$.

Conclui-se que o método introduz um excesso de difusão artificial em ambos os casos: quando se utilizam variáveis conservativas e quando se usam variáveis de pressão (compare-se com os resultados publicados em LYRA & MORGAN, 2000, por exemplo). A utilização de variáveis conservativas sem o operador de captura de descontinuidades produz resultados levemente superiores. Variáveis de pressão, por outro lado necessitam do operador de captura de descontinuidades a fim de se eliminar as oscilações nas proximidades dos choques. No entanto, o operador utilizado nesta tese certamente pode ser melhorado, conquanto introduz excessiva difusão nas proximidades dos choques. Apesar da pouca precisão do método, os choques são capturados nas suas posições corretas, existindo uma boa concordância entre a solução numérica e a solução exata.

6.3. Choque oblíquo

Um fluxo de ar incide obliquamente sobre uma placa estacionária de tal forma que as linhas de corrente formam um ângulo de 10° com o plano horizontal $x-z$, como mostra a Fig. 6.6. A velocidade do fluxo de entrada é tal que o número de Mach é igual a 2.0 e são desprezadas as forças viscosas. No regime permanente, a solução analítica deste problema dita que duas regiões bem definidas de massa específica, temperatura e pressão aparecem, separadas por um plano que forma um ângulo de $29,3^\circ$ com o plano horizontal $x-z$, também representado na Fig. 6.6. As dimensões geométricas do domínio espacial são as seguintes: $L=1,0\text{m}$ e $d=0,1\text{m}$.

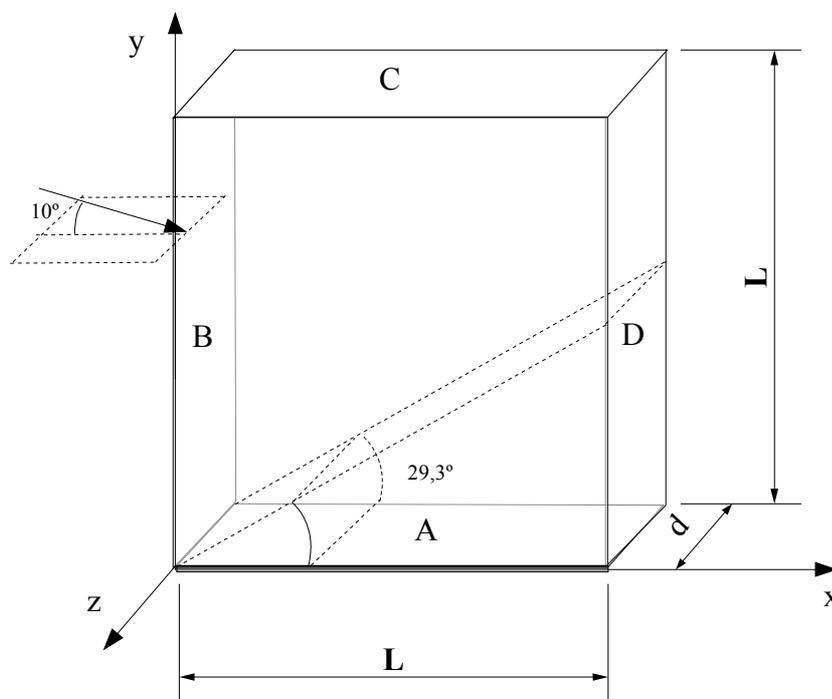


Figura 6.6. O problema do choque oblíquo

As condições de contorno para o problema do choque oblíquo são as seguintes:

Placa horizontal A: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (condição de parede sólida)

Fronteiras B e C: $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$, $u_1 = (\cos 10^\circ) \text{ m/s}$, $u_2 = -(\sin 10^\circ) \text{ m/s}$ e

$M = 2,0$.

Fronteira D: Escoamento livre.

Nas duas fronteiras limitantes perpendiculares ao eixo z , também foi imposta a condição de parede sólida e as condições iniciais adotadas correspondem às condições de contorno impostas às fronteiras B e C, ou seja, condições de escoamento livre. Para a resolução do problema, foi utilizada uma malha tetraedral não estruturada composta por 8263 elementos.

A fim de se possibilitar a obtenção do regime permanente, foram efetuadas 100 iterações no tempo com um Cr máximo de 20 ($\Delta t \sim 0,1 \text{ s}$). Para Cr maiores do que 20, não foi observada convergência, como mostra a Fig. 6.7 onde está representada a variação relativa da solução $\delta \hat{y}$ (em escala logarítmica) em função das iterações temporais (n). O tempo total de processamento para o caso de $Cr = 20$ foi de, aproximadamente, 15 min.

Os valores para as isoregiões de massa específica estão mostrados na Fig. 6.8, juntamente com os elementos triangulares de fronteira. Vê-se a formação do choque ao longo de um plano inclinado em relação ao plano horizontal. A determinação do valor aproximado da inclinação do choque será mostrada adiante, com o auxílio da Fig. 6.10.

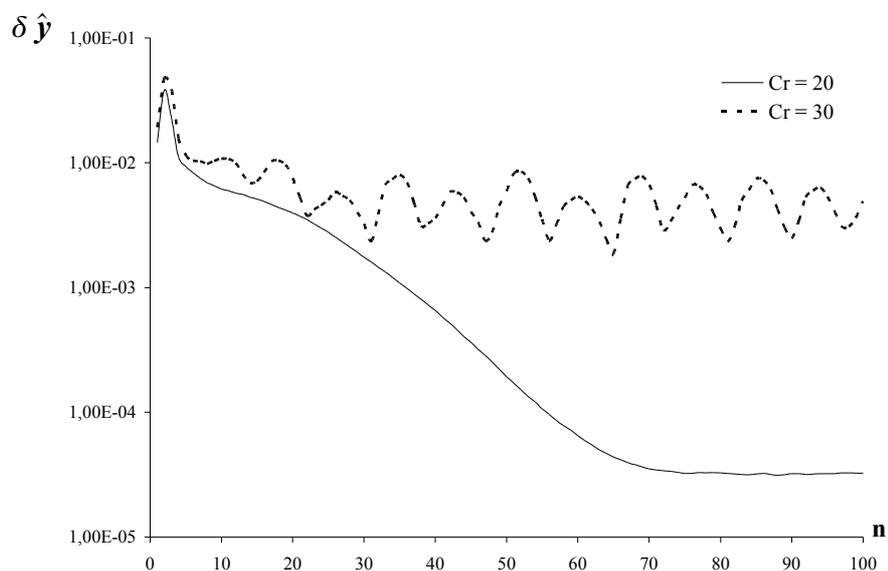


Figura 6.7. Variação relativa da solução ($\delta \hat{y}$) em função das iterações no tempo (n) para o problema do choque oblíquo (variáveis de pressão).

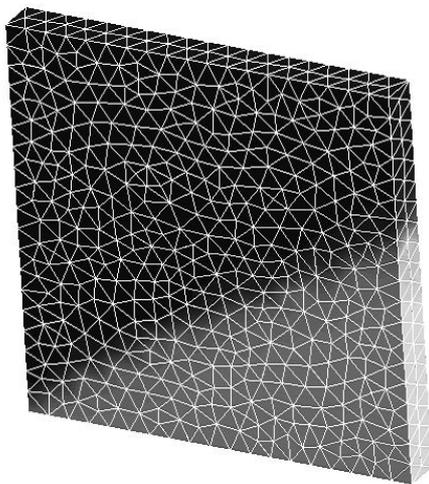


Figura 6.8. Isoregiões de massa específica. Problema do choque oblíquo.

Para a análise quantitativa dos resultados, são traçados os gráficos de massa específica, pressão e temperatura ao longo da linha formada pela intersecção do plano $x=0,9$ com o plano $z=0,05$, conforme mostra a Fig. 6.9, onde se encontram também as

soluções nodais exatas. Boa concordância foi obtida com os resultados publicados por CATABRIGA et al. (2002) .

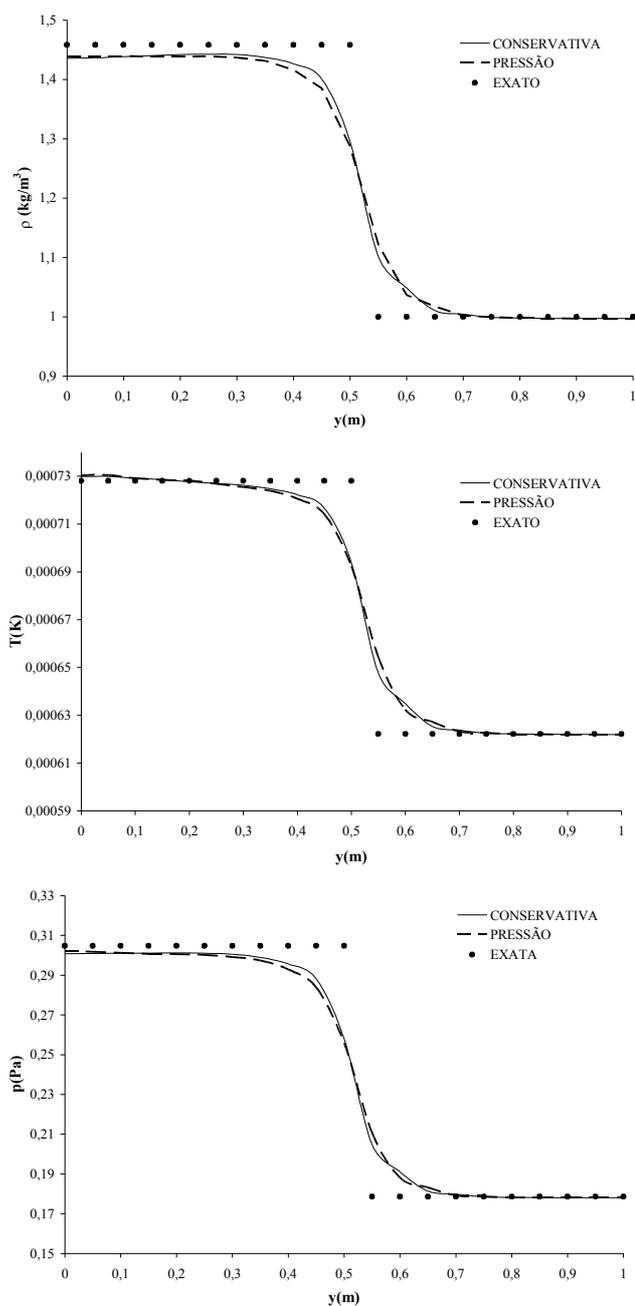


Figura 6.9. Variação da massa específica, pressão e temperatura ($x = 0,9$).

Observa-se que, praticamente não existe diferença entre os resultados obtidos com variáveis conservativas e de pressão e que novamente, o método apresenta um excesso de difusão artificial nas proximidades do choque. Em ambos os casos (variáveis de pressão e conservativas), o operador de captura de descontinuidades foi utilizado.

Finalmente, a Fig. 6.10 mostra um corte feito ao longo do plano $z=0$, obtido a partir do gráfico mostrado na Fig. 6.8. A medição aproximada da inclinação da reta ao longo da qual ocorre o choque pôde ser feita, como indicado. Vê-se também que o choque é capturado dentro de uma faixa com, no máximo, três elementos de largura. As cotas representam as medidas visuais da figura, e são usadas apenas para a determinação do ângulo que pode ser calculado (aproximadamente) por:

$$\arctan \frac{6,29}{10,98} = 29,8^\circ \quad (6.2)$$

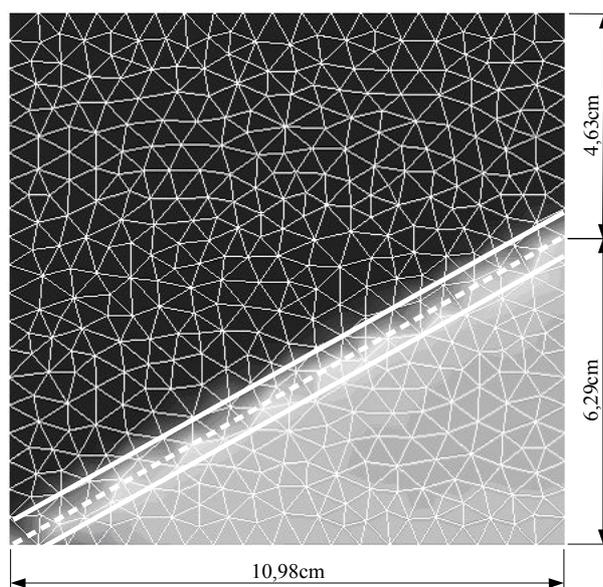


Figura 6.10. Captura do choque para o problema do choque oblíquo

6.4. Escoamento supersônico não viscoso ao redor de um cilindro

O próximo exemplo trata de um cilindro imerso em um escoamento de ar supersônico. A malha bidimensional não estruturada de 9478 elementos bem como as dimensões geométricas usadas no problema estão mostradas na Fig. 6.11.

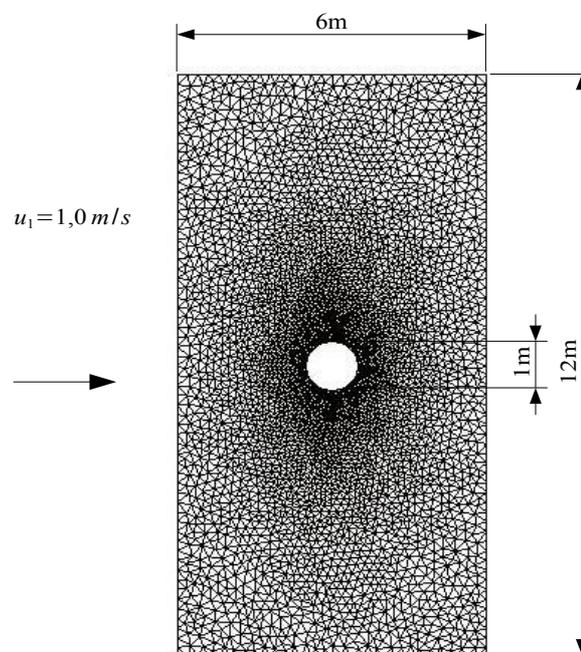


Figura 6.11. Malha não estruturada para o escoamento sobre o cilindro.

As condições de contorno nas fronteiras são:

Fronteira esquerda: $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$ $u_1 = 1,0 \text{ m/s}$; $u_2 = 0,0 \text{ m/s}$; $M = 3,0$

Superfície do cilindro: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (Condição de parede sólida)

Demais fronteiras: escoamento livre.

Como condição inicial, utilizam-se os valores das condições de contorno da fronteira esquerda.

A Fig. 6.12 mostra as isoregiões de massa específica e temperatura obtidos ao se atingir o regime permanente. A formação do choque é claramente observada.

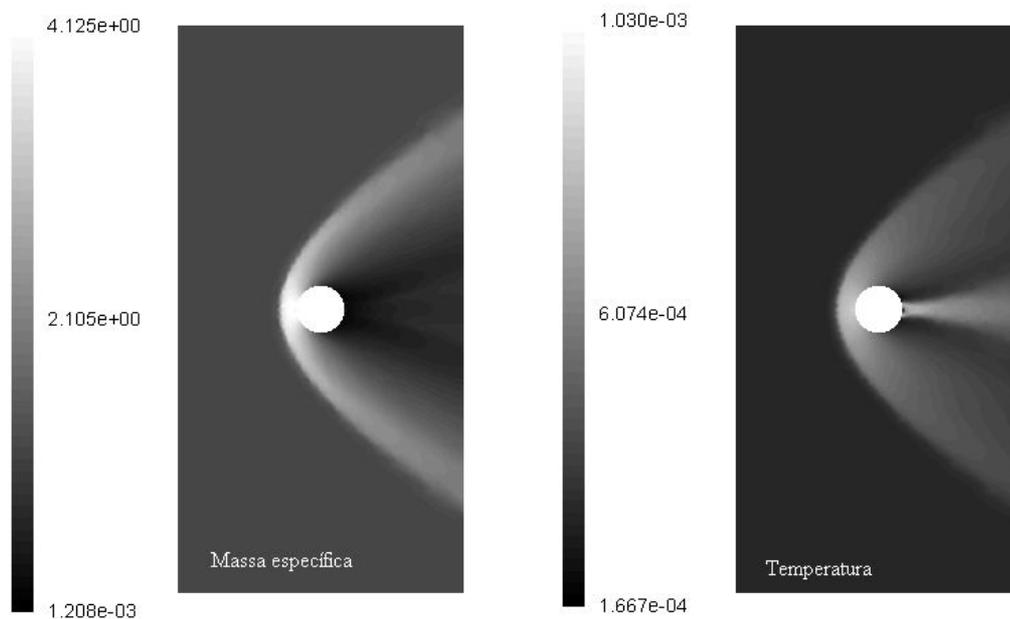


Figura 6.12. Isoregiões de massa específica e temperatura para o escoamento supersônico em torno de um cilindro (escalas à esquerda).

Novamente, para se obter uma visão mais detalhada do problema, considere-se um corte em uma linha horizontal, que passa pelo centro geométrico vertical do domínio, contornando a superfície do cilindro. A Fig. 6.1, mostra como varia o número de Mach ao longo desta linha. Os resultados mostram um comportamento idêntico aos resultados

publicados na literatura (LYRA, 1994), respeitadas as particularidades das malhas utilizadas (a referência citada, utiliza uma malha bem mais refinada na região de rarefação, além de possuir muito mais elementos no domínio). Os valores mostrados na Fig. 6.1 foram obtidos de forma bastante aproximada, computando-se os pontos cujos valores de y variam entre $-0,1$ e $0,1$, na região fora da superfície do cilindro e aqueles cujos valores de y satisfaziam a igualdade: $|x^2 + y^2 - r^2| \leq 0,1$ ($r=0,5$ é o raio do cilindro) na superfície superior do cilindro ($y \geq 0,0$).

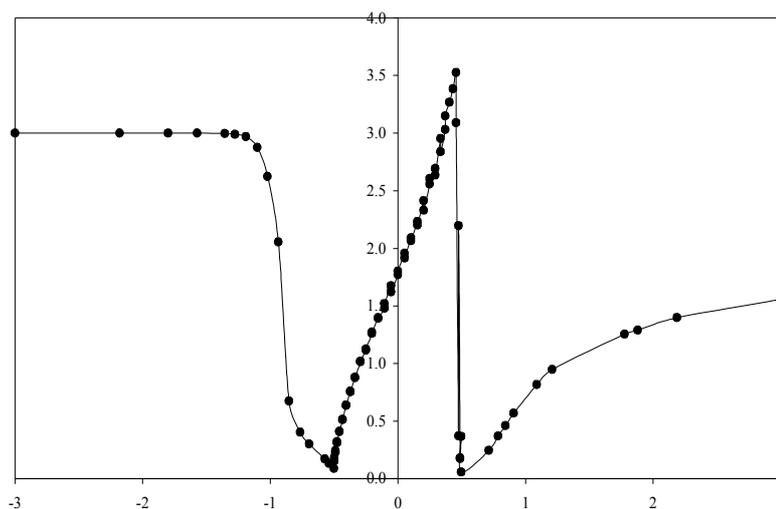


Figura 6.13. Variação do número de Mach ao longo da curvatura do cilindro e da reta $y=0$.

A Fig. 6.14 mostra a evolução da variação relativa da solução em função das iterações temporais, em escala logarítmica. O número total de iterações utilizado a fim de se atingir o estado permanente foi de 1100 para um Cr igual a 0,8, o que corresponde à um intervalo de tempo global, $\Delta t=0,017s$. A Fig. 6.14 mostra a evolução da variação

relativa da solução para dois números de Courant diferentes: 0,8 e 1. Para Cr maiores do que 1, foi observado que o algoritmo GMRES em cada passo de tempo, praticamente não convergia. O tempo total de processamento foi de aproximadamente 99 min.

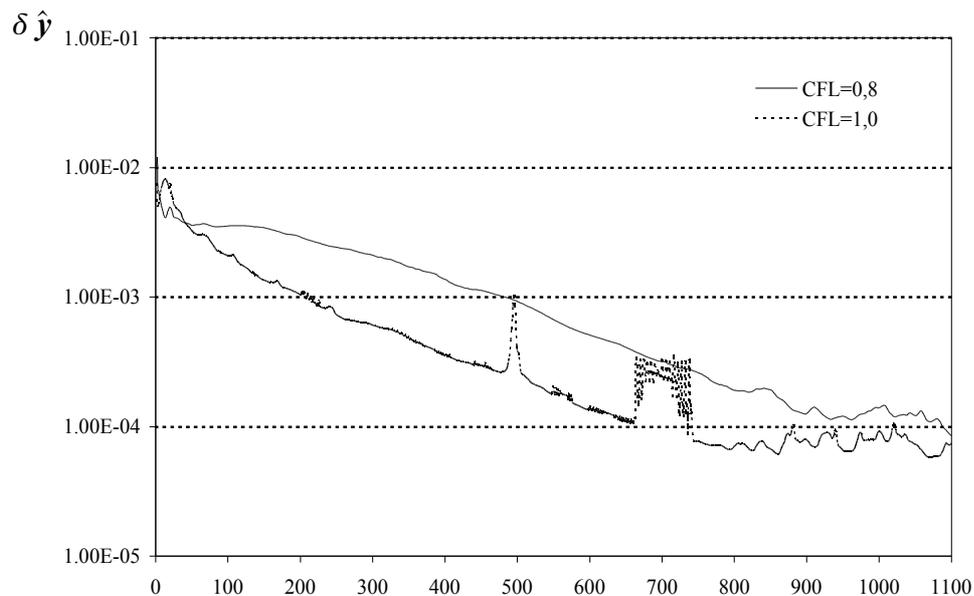


Figura 6.14. Variação relativa da solução em função das iterações no tempo (n) para o problema do escoamento supersônico ao redor de um cilindro.

6.5. Escoamento supersônico viscoso sobre uma placa plana

Considere o escoamento do ar, incidindo paralelamente à uma placa estacionária, como mostrado na Fig. 6.15. Uma camada limite viscosa é formada sobre a placa de maneira tal que o escoamento se comporta como se a placa adquirisse uma inclinação fictícia, desta forma, existe uma mudança de direção do escoamento e, conseqüentemente, uma região de choque é formada. A espessura da camada limite viscosa depende da

velocidade do escoamento, podendo se igualar à espessura da camada do choque (ANDERSON, 1995).

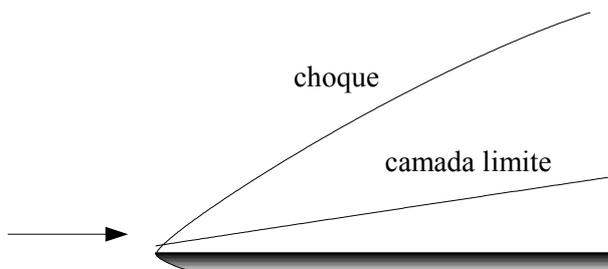


Figura 6.15. Escoamento sobre uma placa.

A Figura 6.16 mostra o domínio espacial adotado para a solução numérica. Cinco regiões de fronteira são definidas e as condições de contorno são as seguintes:

Região A : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$; $q = 0$; $\tau_{12}^v = 0$ (condições de simetria)

Região B : $u_1 = 1 \text{ m/s}$; $u_2 = 0$; $T = 2,769 \times 10^{-4} \text{ K}$; $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$

Região C : $u_1 = 1 \text{ m/s}$; $u_2 = 0$; $T = 2,769 \times 10^{-4} \text{ K}$; $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$

Região D : Escoamento livre.

Região E : $u_1 = u_2 = 0$; $T = T_0 = 7,754 \times 10^{-4} \text{ K}$

A temperatura imposta na placa (Região E) corresponde à temperatura de estagnação que pode ser calculada por :

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (6.3)$$

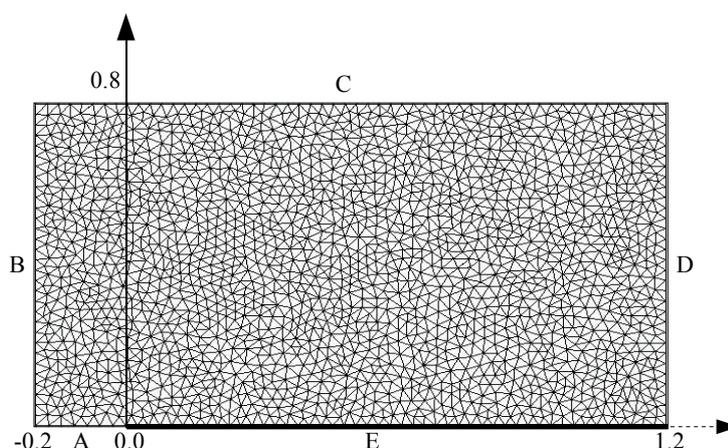


Figura 6.16. Domínio espacial e malha utilizada para o problema do escoamento sobre a placa.

A malha utilizada para o domínio consiste em 3861 elementos triangulares, como mostra a Fig. 6.16. Uma malha de dimensões semelhantes foi utilizada por ALMEIDA (1993) para resolução do mesmo problema²³. As condições de contorno nas fronteiras B e C, determinam um escoamento de Mach 3.0 sobre a placa. A solução exata para este problema foi obtida por DRIEST (1952).

Foram efetuadas 500 iterações no tempo com um Cr igual a 5. Neste problema só foram utilizadas variáveis de pressão. O gráfico que mostra a variação relativa do vetor solução em função das iterações, em escala logarítmica, está mostrado na Fig. 6.17.

As figuras 6.18 e 6.19 mostram a variação da massa específica e da temperatura ao longo da reta $x=1$ (consultar a Fig. 6.16). Comparando-se os resultados obtidos com os resultados obtidos por ALMEIDA (1994), vê-se que, apesar de não existirem divergências quanto à forma dos gráficos, os resultados deste trabalho apresentam maior difusão, devido à fatores já mencionados em exemplos anteriores. As isolinhas obtidas para

²³ Também conhecido como “problema de Carter” (SHAKIB, 1988).

o número de Mach podem ser vistas na Fig. 6.20, onde boa concordância é observada entre os resultados deste trabalho e aqueles publicados em ALMEIDA (1994).

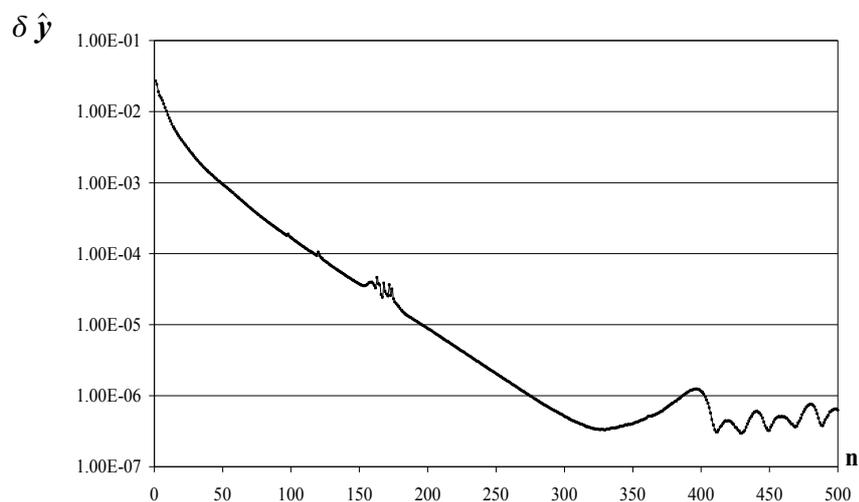


Figura 6.17. Variação relativa da solução em função das iterações no tempo (n) para o problema do escoamento sobre a placa plana.

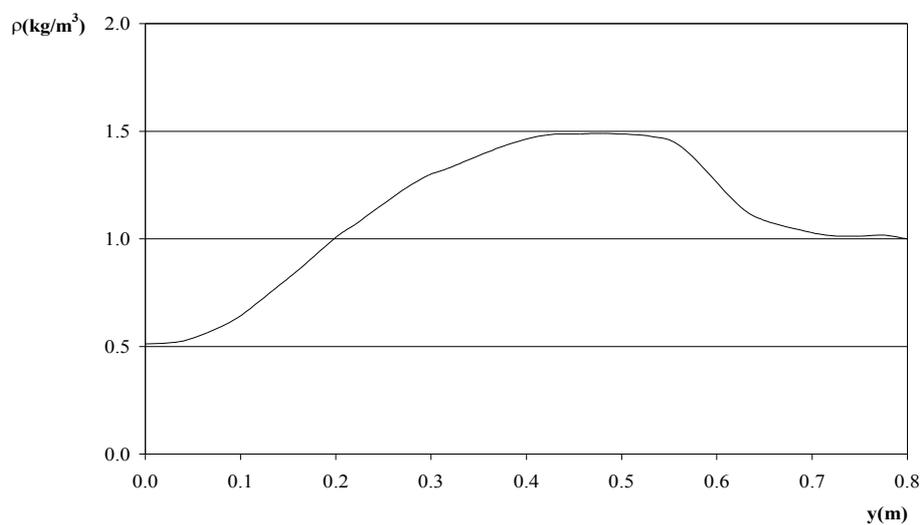


Figura 6.18. Variação da massa específica ao longo da reta $x=1$ para o problema do escoamento sobre a placa plana.

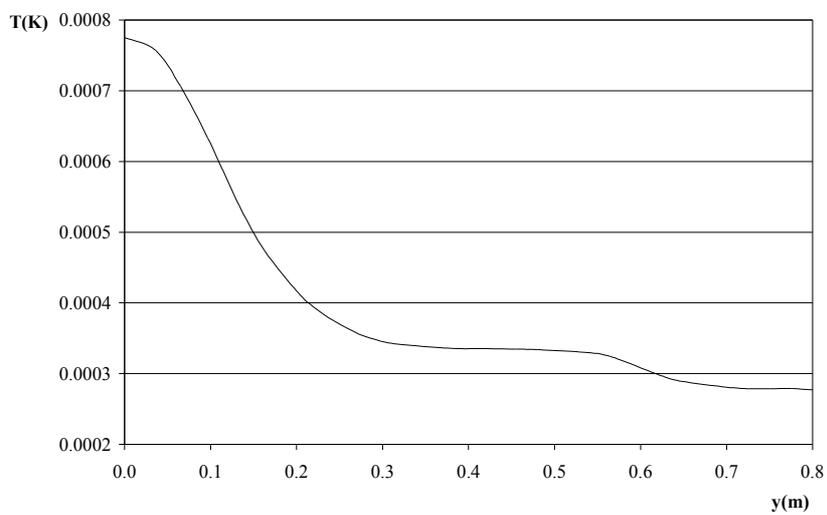


Figura 6.19. Variação da temperatura ao longo da reta $x=1$ para o problema do escoamento sobre a placa plana.

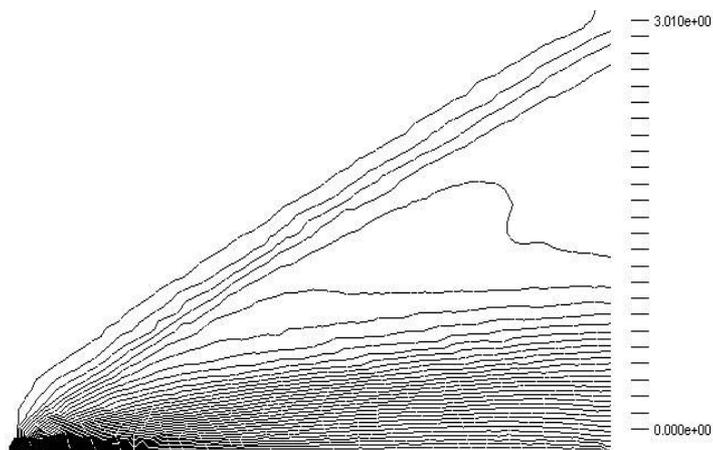


Figura 6.20. Isolinhas do número de Mach para o problema do escoamento sobre a placa plana.

6.6. Escoamento viscoso incompressível em uma cavidade

Um fluido incompressível é confinado em um de tanque de forma quadrada (cavidade), cujos lados possuem dimensão igual a $2m$, quando vistos a partir de um corte transversal. Na dimensão longitudinal, considera-se um comprimento infinito, de maneira que as paredes limitadoras nesta direção não influenciam no escoamento, sendo este caracterizado, desta maneira, como um escoamento bi-dimensional. A parede superior é móvel e se desloca para a direita com velocidade igual a 1 m/s . O problema é ilustrado na Fig. 6.21.

As condições de contorno para este problema são as seguintes:

Regiões A, B e D : $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Região C : $\mathbf{u}^T = (1 \quad 0 \quad 0)$, $T = 0,0\text{ K}$

Em um ponto situado em $(0, -1)$, a pressão p foi prescrita como sendo igual a zero.

O problema é resolvido a partir das seguintes condições iniciais em todo o domínio:

$$T = 25,0\text{ K}, \quad p = 0,0 \frac{N}{m^2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

É óbvio que tais condições inicial e de contorno para as temperaturas e pressões absolutas não possuem menor sentido físico. O objetivo aqui, porém, é reproduzir os resultados publicados na literatura a fim de validar o modelo numérico. Ainda neste sentido, o fluido hipotético utilizado para a validação dos exemplos possui os seguintes valores para as constantes físicas²⁴:

$$\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3, \quad c_p = 1005,0 \text{ J/kgK}, \quad c_v = 718,0 \text{ J/kgK}$$

$$\beta = 1 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}, \quad \alpha = 0,0036 \text{ K}^{-1}, \quad c = 340 \text{ m/s}$$

A viscosidade μ^v foi ajustada para cada situação, a fim de se obter o número de Reynolds desejado. O número de Prandtl foi tomado como constante e igual a $Pr = 0,75$ para a obtenção do valor da condutibilidade térmica.

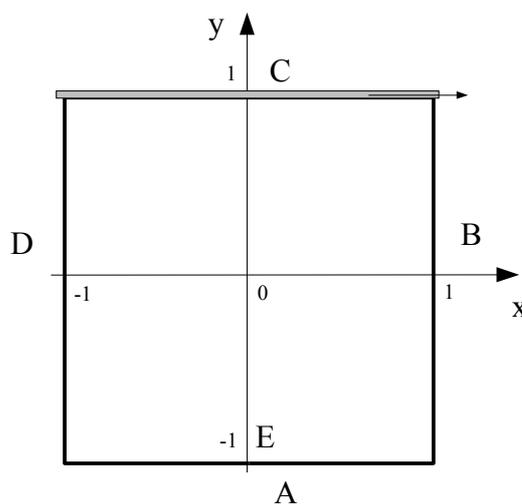


Figura 6.21. Esquema geométrico para o problema da cavidade.

²⁴ Estas propriedades físicas, a menos da viscosidade e condutibilidade térmica, correspondem aproximadamente às propriedades do ar atmosférico ao nível do mar e à temperatura de 273K.

Para resolver o problema da singularidade nos dois nós das quinas superior esquerda e direita, adotou-se o procedimento proposto em LYRA (1994), onde nos elementos de quina, se prescreve uma distribuição linear de velocidade. Isso, para funções de forma lineares, é obtido simplesmente prescrevendo-se a velocidade nos dois nós das quinas superiores como sendo iguais a $\mathbf{u}^T = (1 \ 0 \ 0)$ e nos nós adjacentes, localizados nas paredes verticais, prescreve-se a velocidade como sendo iguais a $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. A malha triangular não-estruturada utilizada possui 3419 elementos como mostra a Fig 6.22. A região perto da borda superior é um pouco mais refinada para melhor capturar o campo de pressão nesta região (HAUKE, 1995).

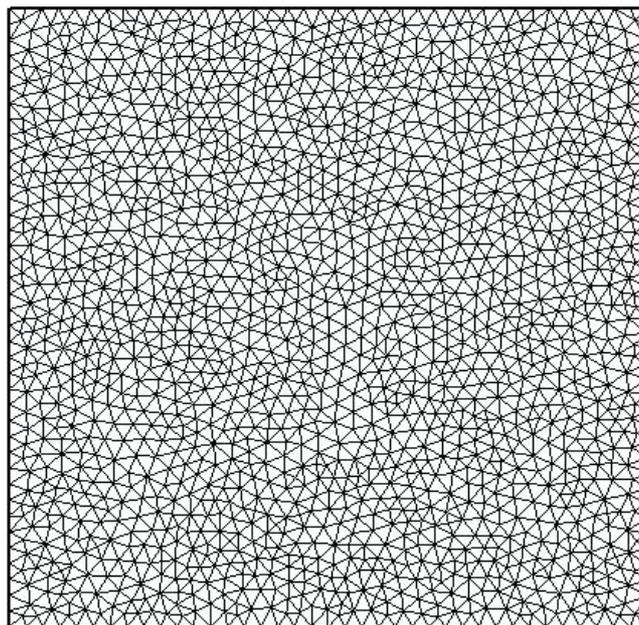


Figura 6.22. Malha não estruturada para o problema da cavidade.

6.6.1 Resolução para $Re = 1,0$

A viscosidade dinâmica assume um valor²⁵ igual a de $\mu = 2,0 \text{ Ns/m}^2$, de modo que, para o número de Reynolds, obtém-se:

$$Re = \frac{\rho \|\mathbf{u}\| l}{\mu} = \frac{1,0 \text{ kg/m}^3 \times 1 \text{ m/s} \times 2 \text{ m}}{2,0 \text{ Ns/m}^2} = 1,0 \quad (6.4)$$

Para a condutividade térmica, foi tomado um valor de $\kappa = 2680 \text{ W/(mK)}$, baseado em um número de Prandtl igual a 0,75.

A solução para $Re = 1,0$ é obtida a partir da solução inicial, avançando no tempo, a partir de um Cr igual a 1,0. A Fig. 6.23 Mostra, em escala logarítmica, a variação relativa da solução, $\delta \hat{y}$, em função das interações no caso de $Re = 1,0$. Vê-se que há uma grande variação nas primeiras interações, e depois uma variação lenta, quase imperceptível. Verificou-se que, o campo de velocidades praticamente não variou mais, a partir de $\delta \hat{y} = 7,0 \times 10^{-5}$. Desta forma, considerou-se que o regime permanente foi atingido após 20000 interações, quando $\delta \hat{y} = 6,96 \times 10^{-5}$.

Nenhuma tentativa foi feita, neste trabalho, de se encontrar o intervalo de tempo global máximo que pode ser utilizado para garantir a convergência do método. A adoção do Cr foi feita baseada simplesmente na observação do comportamento da variação relativa do vetor solução em função das interações temporais.

²⁵ É digno de nota que tal fluido possui uma viscosidade cerca de 2×10^6 vezes a viscosidade do ar à 20°C.

Não existe fluido real com tal valor de viscosidade.

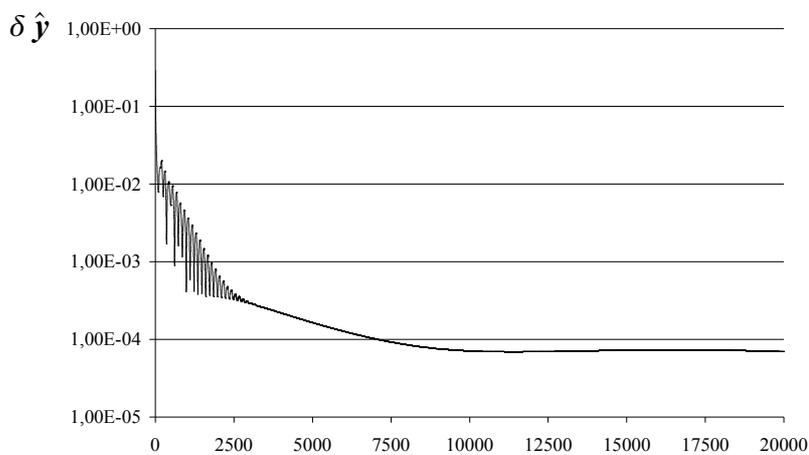


Figura 6.23. Variação relativa da solução em função das interações no tempo (n) ($Cr = 1,0$).

A Fig 6.24 mostra as isolinhas de pressão e os vetores de velocidade no regime permanente. Os resultados qualitativos são bastante semelhantes àqueles publicados em HAUKE(1995).

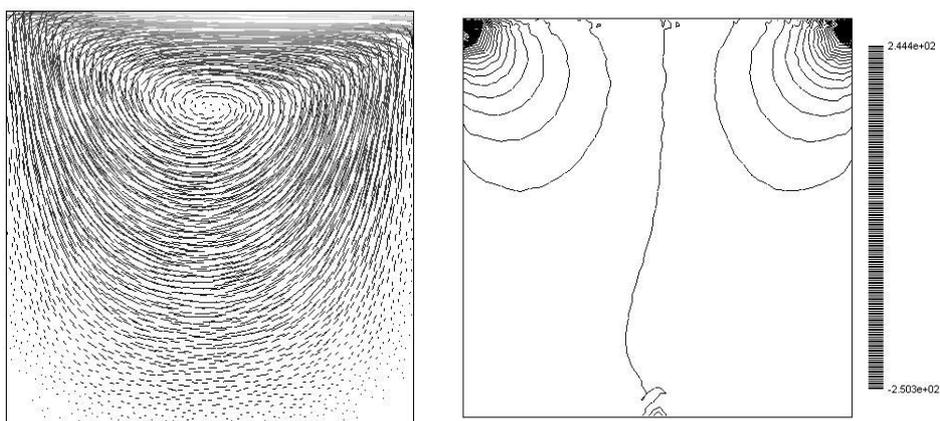


Figura 6.24. Vetores de velocidade e isolinhas de pressão para $Re = 1,0$

A Fig. 6.25, mostra um gráfico da componente u_2 do vetor velocidade com a distância horizontal x para $y=0,0$. De maneira semelhante, a Fig.6.26 mostra a variação da componente u_1 da velocidade em com a distância vertical y para $x=0,0$. Vê-se uma boa concordância entre os resultados obtidos e aqueles publicados por HAUKE (1995), representados por círculos discretos na figura.

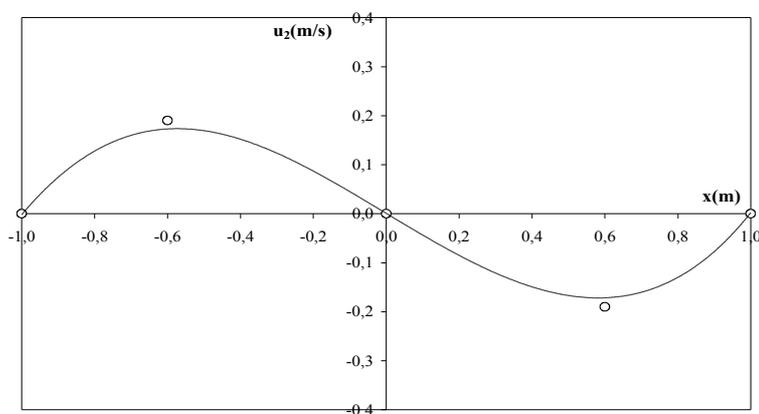


Figura 6.25. Variação da componente vertical da velocidade em função de x . Os círculos representam (aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).

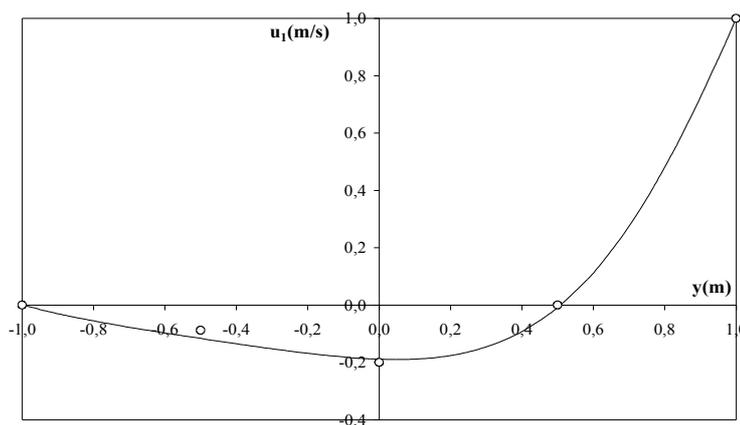


Figura 6.26. Variação da componente horizontal da velocidade em função de y . Os círculos representam (aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).

6.6.2 Resolução para $Re = 400$

Modificando-se a viscosidade e a condutividade térmica para os valores de $\mu=0,005 \text{ Ns/m}^2$ e $\kappa=6,7 \text{ W/(m K)}$, obtém-se os resultados para $Re=400$. Desta vez, a convergência para o regime permanente foi possível com um $Cr = 500$. O gráfico mostrando a variação relativa do vetor solução em função das interações está mostrado na Fig. 6.27.

Os gráficos obtidos para as componentes da velocidade estão mostrados nas figuras 6.28 e 6.29. Os resultados para u_1 e u_2 , apresentam um comportamento mais difusivo quando comparados com aqueles obtidos por HAUKE (1995), Isto ocorre, em semelhança aos exemplos dados para escoamentos compressíveis, devido à uma maior difusão artificial introduzida tanto pelas matrizes de estabilização simplificadas quanto pela aproximação temporal. Não obstante, uma melhor concordância existe quando comparado aos resultados obtidos por ZIENKIEWICZ et al., 1990 (apenas disponível para a componente u_1).

Os resultados qualitativos para o campo de pressão (Fig. 6.30) são bastante semelhantes aos publicados por HAUKE(1995), muito embora as isolinhas de pressão apresentem uma maior oscilação próximo à fronteira superior. Estas oscilações, no entanto, também se fazem presentes nos resultados publicados por ZIENKIEWICZ et al., 1990.

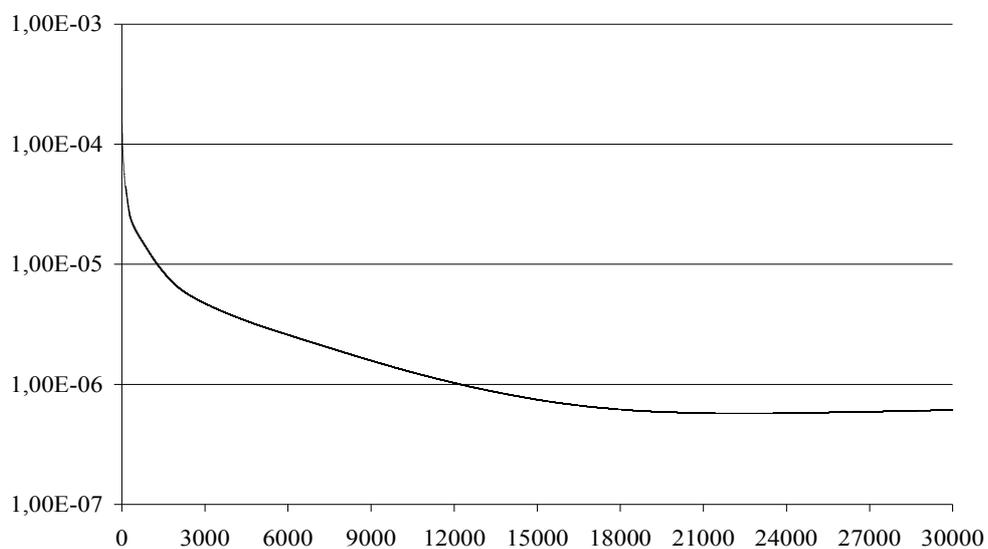


Figura 6.27. Variação relativa do vetor solução em função das iterações no tempo. ($Cr = 400,0$)

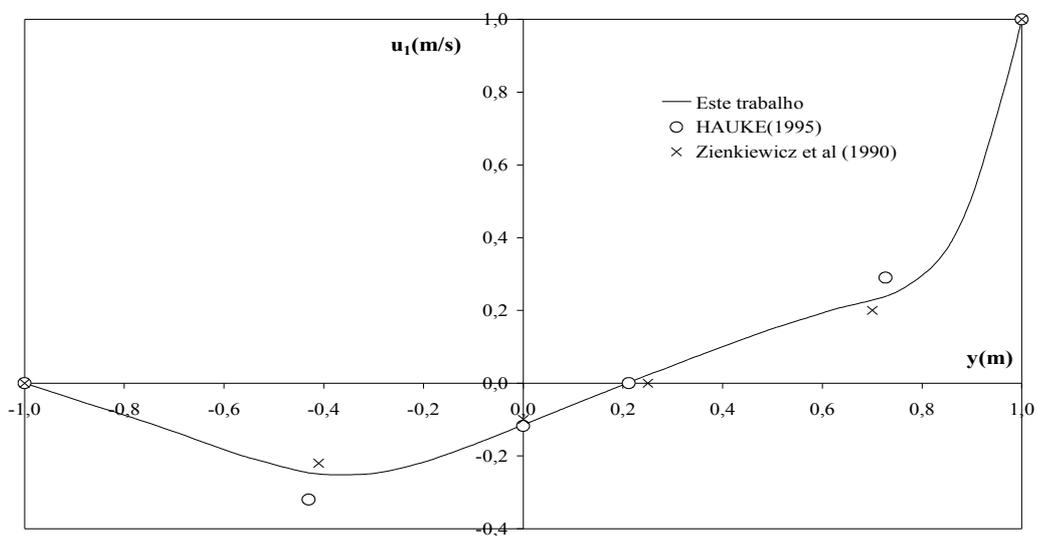


Figura 6.28. Variação da componente horizontal da velocidade em função de y para $Re = 400$. Os círculos representam (aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).

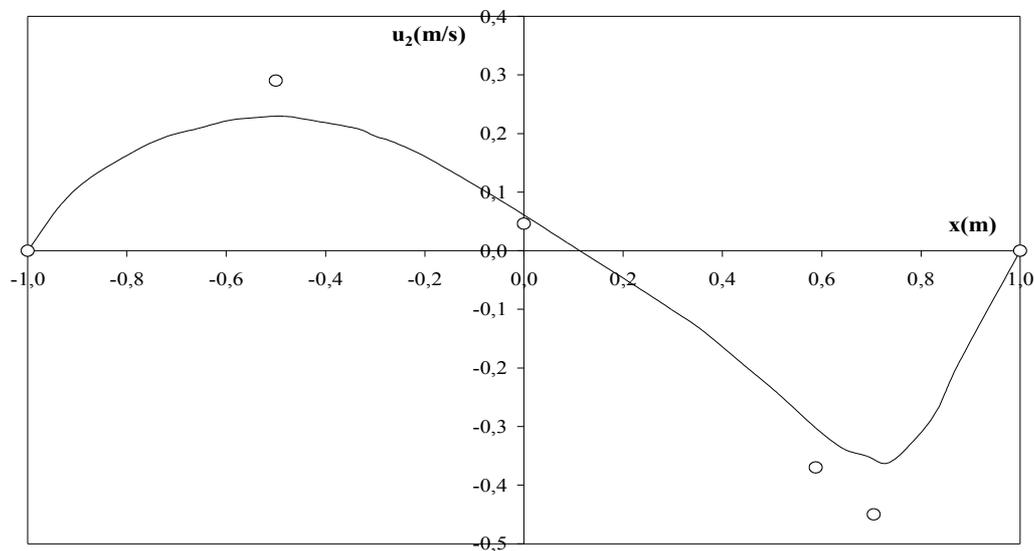


Figura 6.29. Variação da componente vertical da velocidade em função de x par $Re = 400$. Os círculos representam (aproximadamente) os valores obtidos por HAUKE(1995).

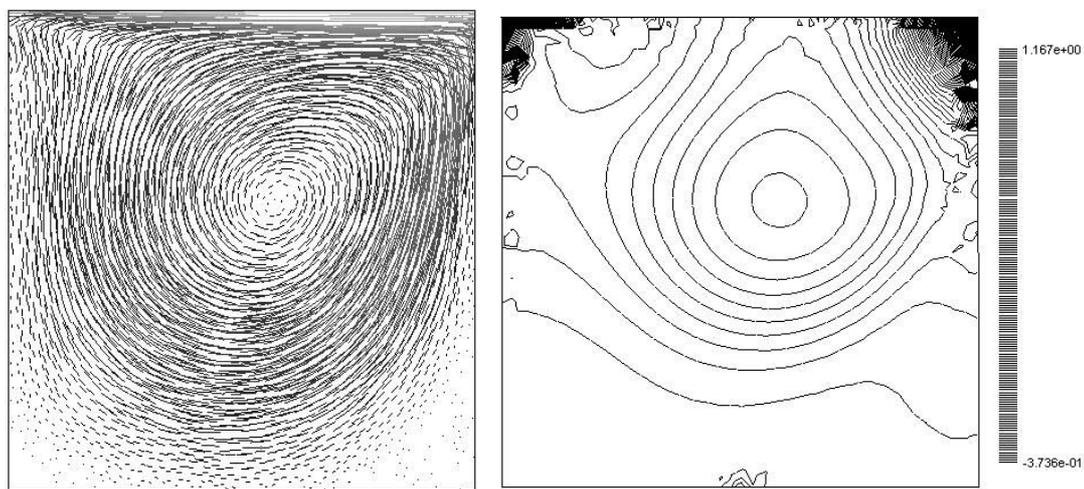


Figura 6.30. Vetores de velocidade e isolinhas de pressão para $Re = 400,0$

6.7. Escoamento incompressível de ar em volta de um cilindro

O próximo exemplo mostra o escoamento não viscoso de ar ao redor de um cilindro de raio $r=0,5m$. O cilindro está centralizado em um domínio de dimensões $6,0m \times 6,0m \times 1,0m$, como mostra a Fig. 6.31, onde se vêem também os elementos triangulares do contorno da malha composta por 5342 elementos tetraédricos. Devido à simetria do problema, apenas a metade do domínio espacial foi utilizado. São esperadas isoregiões de pressão simétricas em relação ao cilindro (WONG et al., 2001).

As condições de contorno são as seguintes: na fronteira de entrada, à esquerda, prescrevem-se a massa específica $\rho=1kg/m^3$ e a velocidade $u_1=1,0m/s$ e $u_2=0,0m/s$, na fronteira de saída, à direita, prescreve-se a massa específica $\rho=1kg/m^3$. As condições iniciais são, para todo o domínio: $\rho=1kg/m^3$, $u_1=1,0m/s$ e $u_2=0,0m/s$ e $M=0,01$. Finalmente, na superfície do cilindro e na fronteira inferior, faz-se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}=0$.

A Fig.3.1, mostra o resultado tridimensional das isoregiões de pressão e também as isolinhas de pressão obtidas através de um corte em um plano que passa pelo centro do cilindro. Vê-se que as regiões de igual pressão apresentam perfeita simetria em relação ao cilindro, como esperado. No tocante à evolução temporal, um Cr igual a 10 foi utilizado em 200 passos no tempo. A variação relativa do vetor solução em função das iterações temporais está mostrada na Fig. 2.45, onde foi utilizada uma escala logarítmica no eixo das ordenadas. Os resultados são bastantes semelhantes àqueles publicados em WONG et al. (2001). Observe-se que estes autores utilizaram uma malha bem mais refinada do que a

malha apresentada na Fig.6.31, o que explica a menor definição para as isolinhas de pressão da Fig.6.33.

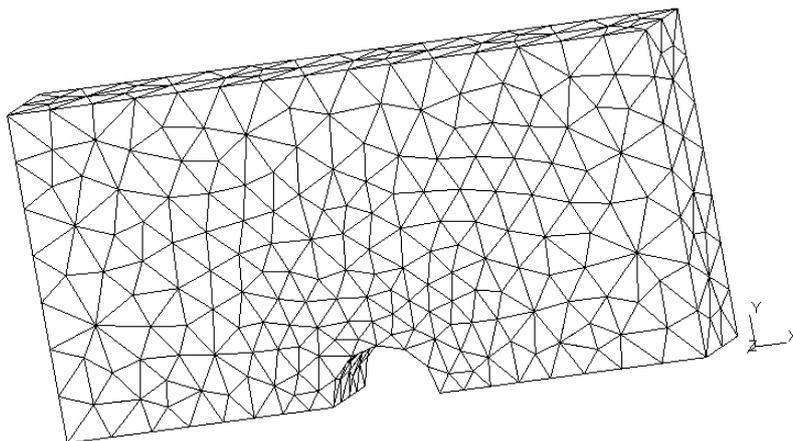


Figura 6.31. Domínio e malha superficial para o problema do escoamento incompressível de ar sobre cilindro.

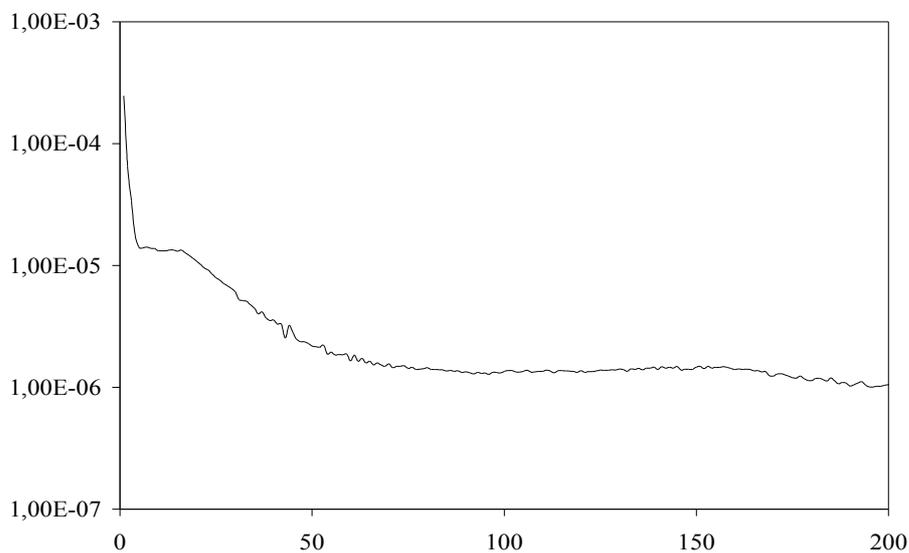


Figura 6.32. Variação relativa do vetor solução com as iterações no tempo para o problema do escoamento incompressível de ar sobre um cilindro.

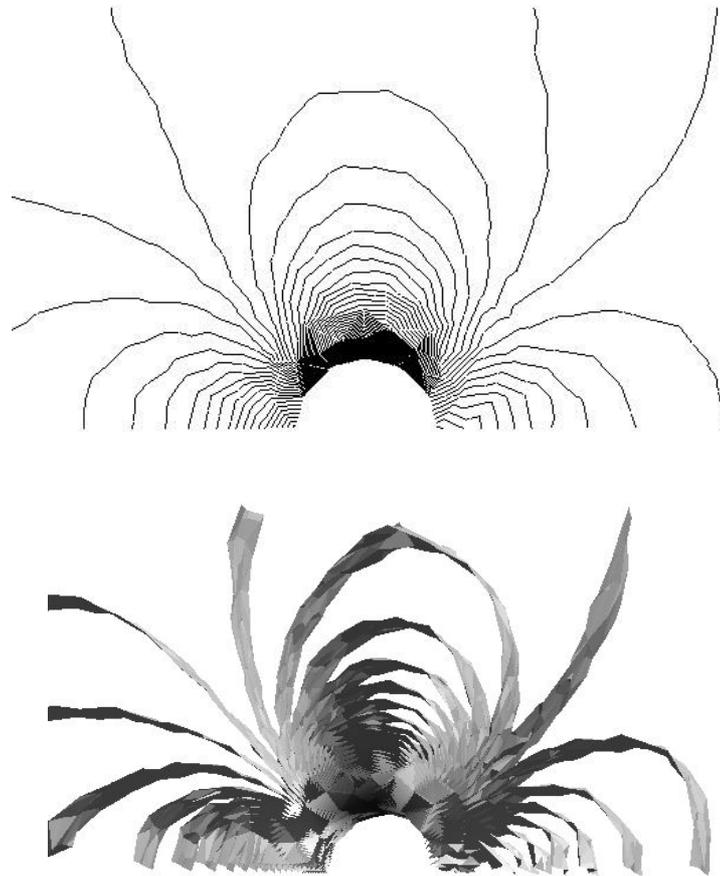


Figura 6.33. Acima- isolinhas de pressão obtidas em um corte no centro vertical do domínio. Abaixo - isoregiões tri-dimensionais de pressão.

6.7.1 Escoamento incompressível de ar em volta de um cilindro com malha bi-dimensional.

O exemplo anterior mostrou um escoamento de ar em volta de um cilindro utilizando-se uma malha em três dimensões. Neste exemplo, o mesmo problema, com condições de contorno e iniciais semelhantes é resolvido em duas dimensões para duas situações distintas no que diz respeito ao parâmetro α_T , da Eq. (3.94): na primeira situação

$\alpha_T=0$ e na segunda $\alpha_T=1$. Em ambos os casos, verifica-se a capacidade do algoritmo em lidar com escoamentos subsônicos com números de Mach decrescentes. A malha utilizada possui 1388 elementos e está mostrada na Fig. 6.34. Em todos os casos, não foi utilizado operador de captura de descontinuidades.

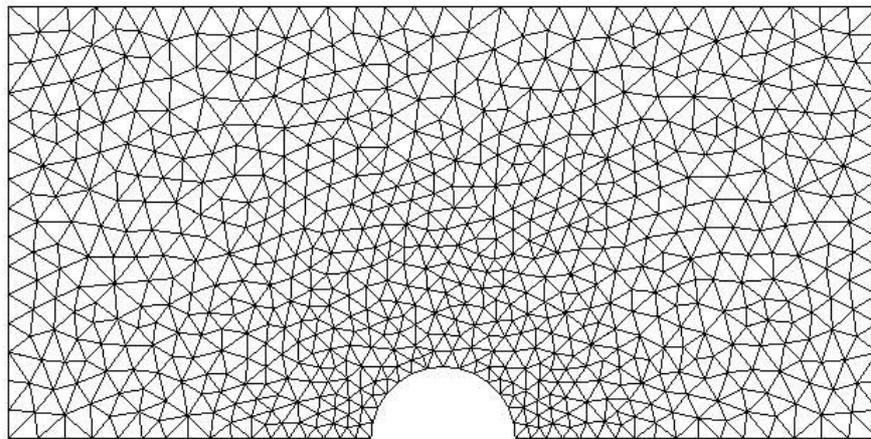


Figura 6.34. Malha para o problema do escoamento subsônico sobre o cilindro.

A Fig. 6.35 mostra as isolinhas de pressão para números de Mach igual a 0,38, 0,1 e 0,01 para $\alpha_T=1$. Vê-se que as isolinhas se tornam levemente assimétricas à medida em que se aumenta o número de Mach. Em particular, para $M=0,38$, os resultados não são tão bons. A Fig.6.35 mostra a convergência para o regime permanente para os três casos. É interessante ver que a variação relativa do vetor solução oscila bastante à medida em que se diminui o número de Mach. Para o avanço no tempo, foi tomado um Δt global médio da ordem de 1×10^{-3} . Ao contrário dos resultados publicados por WONG et al. (2001), não se conseguiu convergência para $M=0,001$.

No caso de $\alpha_7=0$, não foram obtidos bons resultados, como se pode ver na Fig. 6.36 onde as isolinhas de pressão já se apresentam relativamente distorcidas.

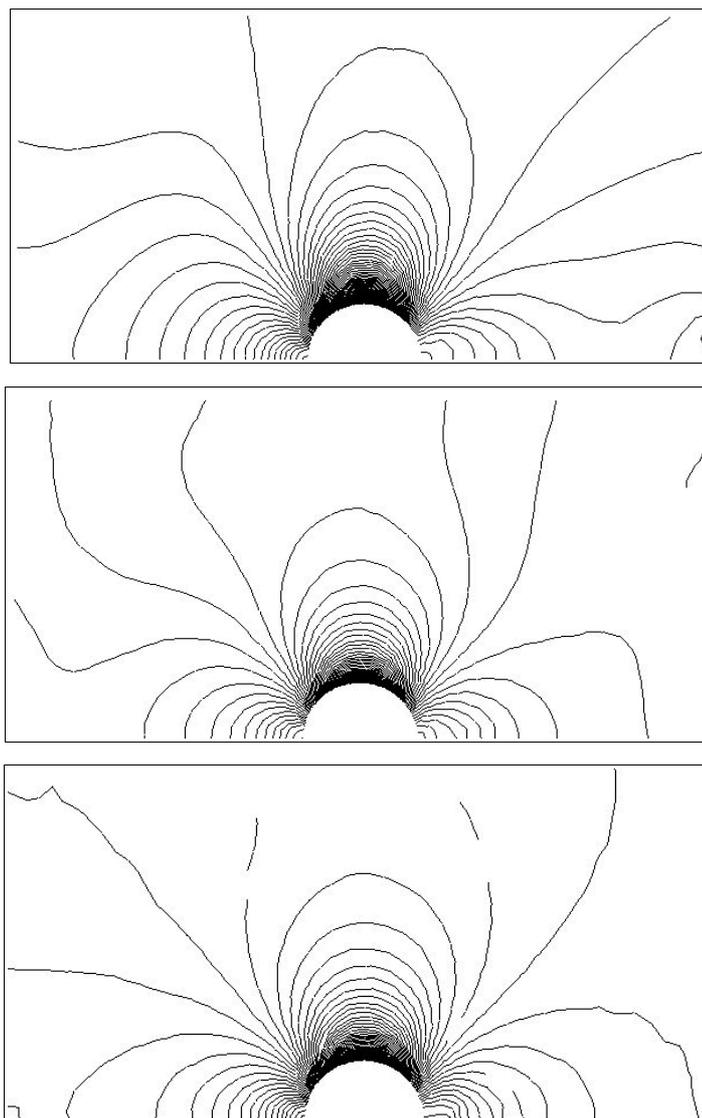


Figura 6.35. Isolinhas de pressão para $M=0,38$, $M=0,1$ e $M=0,01$ com $\alpha_7=1$, de cima para baixo.

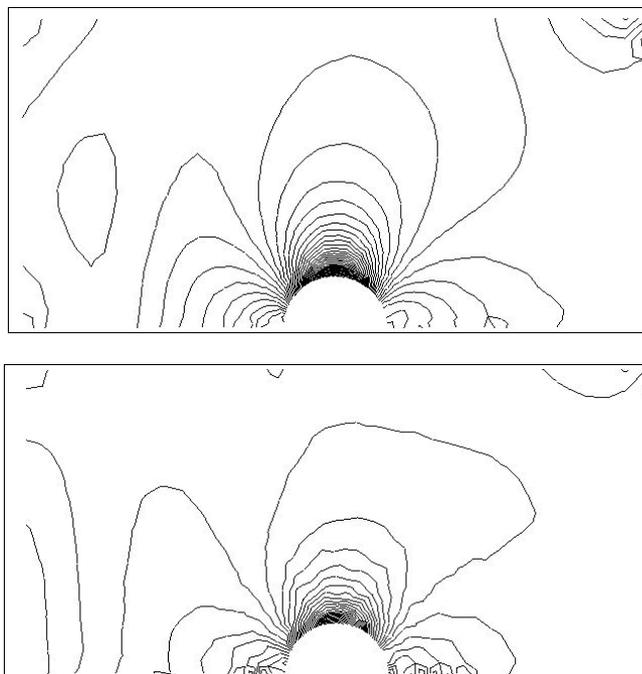


Figura 6.36. Isolinhas de pressão para $M=0,38$ e $M=0,1$ com $\alpha_T=0$, de cima para baixo.

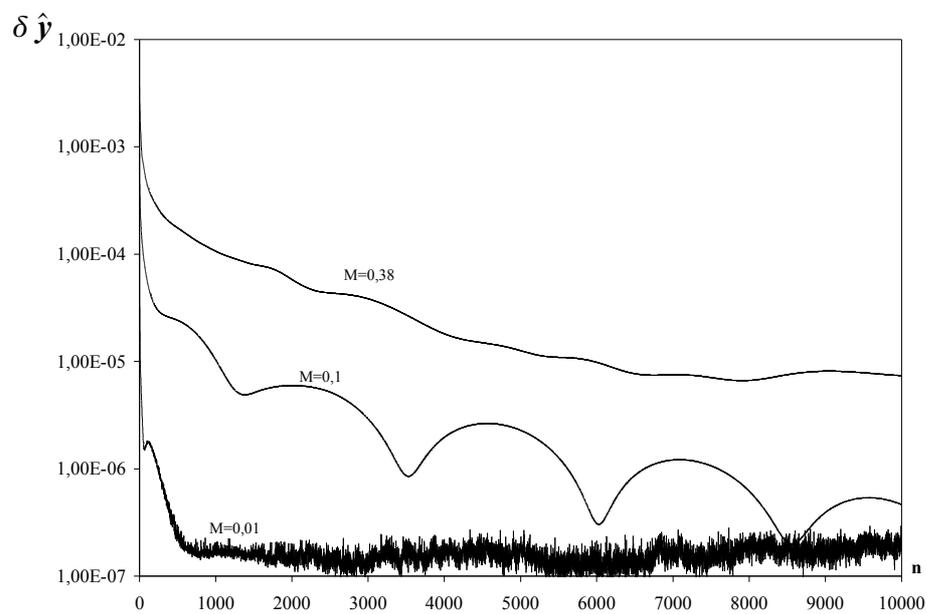


Figura 6.37. Variação relativa do vetor solução em função das iterações no tempo (n), para $\alpha_T=1$.

7. CONCLUSÕES

A formulação utilizada, a despeito de sua forma simplificada, provou ser eficiente para o cálculo de escoamentos tridimensionais de fluidos viscosos tanto em regime compressível, como em regime incompressível. Além disso, o método de Galerkin descontínuo no tempo, favorece naturalmente a extensão deste trabalho para incluir domínios que se deformam no tempo, o que abrangerá situações reais de corpos em movimento. No tocante à implementação, o programa em FORTRAN desenvolvido foi suficientemente flexível para abordar problemas em uma, duas e três dimensões.

Alguns pontos, no entanto, devem ser ressaltados:

- A formulação se apresenta robusta para escoamentos com baixos números de Mach, bem como o escoamento de líquidos, porém, uma excessiva difusão numérica é adicionada em ambos os casos.
- A convergência para o estado permanente é bem menor para o caso de escoamentos incompressíveis. Além disso, existe uma certa dependência desta convergência para com a condutibilidade térmica do fluido, já observada anteriormente por HAUKE (1995).
- Todas as malhas utilizadas foram razoavelmente regulares. É interessante, em um trabalho futuro, observar o comportamento da solução para o caso de malhas cujo tamanho do elemento varie significativamente. Ainda nesse contexto, um estudo com passos de tempo locais é interessante para casos em

que se deseje obter a solução no regime permanente.

- Na prática, não conseguimos obter convergência na situação extrema onde os coeficientes de compressibilidade α e β são identicamente nulos.

Muito ainda pode ser aperfeiçoado. Como exemplos de sugestões para trabalhos posteriores, têm-se:

- Melhoria da matriz de estabilização SUPG e o operador de captura.
- Determinação da função de ponderação α_T .
- Extensão para funções de forma lineares no tempo.
- Extensão para casos em que haja fronteira móvel.
- Inclusão de técnicas de adaptação de malha.
- Otimização do procedimento computacional.

As quatro primeiras colocações dizem respeito à formulação do problema em si, enquanto que as duas últimas têm relação com o custo computacional para resolução de problemas onde é grande o número de elementos, como por exemplo, configurações tridimensionais.

Enfim, muita coisa pode ainda ser feita que não foi explicitamente citada acima. Aspectos como a organização do código do programa, construído em linguagem FORTRAN 95 e a sua interface com outros programas e com o usuário são sempre passíveis de melhoria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALIABADI, S. K. & TEZDUYAR, T. E. Parallel fluid dynamics computations in aerospace applications. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Estados Unidos, 21: 783-805, 1995.
- ALMEIDA, R. C. C. Uma formulação de Petrov-Galerkin para a resolução das equações de Euler e Navier-Stokes compressível usando técnicas adaptativas. Rio de Janeiro. (Tese de Doutorado – COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro – Brasil), 1993, 105p.
- ALMEIDA, R. C. C. & SILVA, R.S. A new Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. TICAM Report 94-07, Texas, Estados Unidos, 1994. 16 p.
- ANDERSON, J. D. Computational fluid dynamics: the basics with applications. EUA, McGraw-Hill, 1995, 550p.
- ANDERSON, J. D. Modern compressible flow: with historical perspective, 2nd Edition. EUA, McGraw-Hill, 1989, 650p.
- BLANK, H., RUDGYARD, M. & WATHEN, A. Stabilised finite element methods for steady incompressible flow Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 174: 91-105, 1999.
- BROOKS, N. & HUGHES, T. J. R. Streamline Upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 32: 199-259, 1982.
- BUTKOV, E. Física Matemática. Rio de Janeiro- Brasil, Guanabara Dois, 1968, 752p.

- CATABRIGA, L. Soluções implícitas das equações de Euler empregando estrutura de dados por arestas., Rio de Janeiro, 2000. 102p. (Tese de Doutorado – COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro – Brasil).
- CATABRIGA, L., COUTINHO, A. L. G. A. & TEZDUYAR, T.E. Finite Element SUPG parameters computed from local matrices for compressible flows. In: IX CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, Caxambu, 2002. *Anais em CD*.
- CHANG, S. C., HIMANSU, A., LOH, C. Y., WANG, X. Y. & YU, S. T., Robust and simple non-reflecting boundary conditions for the Euler equations. A new approach based on the space-time CE/SE method. Technical Report 212495, NASA. Estados Unidos, 2003. 38 p.
- CHOI, Y. H. & MERKLE, C. L., The application of preconditioning in viscous flows. Journal of Computational Physics, Estados Unidos, 105: 207-223, 1993.
- CODINA, R. A finite element formulation for the numerical solution of the convection-diffusion equation., Barcelona, 1993. 120p. (Monografia – CIMNE, Barcelona – Espanha).
- DARMOFAL, D. L., MOINIER, P. & GILES, M.B., Eigenmode analysis of boundary conditions for the one dimensional preconditioned Euler equations. Journal of Computational Physics, Estados Unidos, 160: 369-384, 2000.
- DRIEST, E. R. V. Investigation of Laminar Boundary layer in Compressible Fluids using the Crocco Method. Technical Report 2597, NASA Technical note. Estados Unidos, 1952. 79 p.

- GALEÃO, A.C. & DO CARMO, E.G. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection dominated problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 68: 83-95, 1988.
- GOLUB, H.G., HUANG, C. L., SIMON, H., TANG, W. A fast Poisson solver for the finite difference solution of the incompressible Navier-Stokes equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, Estados Unidos, 19-5: 1606-1624, 1988.
- GRESHO, P.M. & SANI, R. L. Incompressible flow and the Finite Element Method, Vol 1. Inglaterra, John Wiley & Sons, 2000, 454p.
- FRANCA, L.P., & FREY, S.L. Stabilized finite element methods:II. The incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 99: 209-233, 1992.
- HAUKE, G. Simple stabilizing matrices for the computation of compressible flows in primitive variables. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 190: 6881-6893, 2001.
- HAUKE, G. A unified approach to compressible and incompressible flows and a new entropy-consistent formulation of the K-epsilon model. Stanford, 1995. 185p. (Tese de Doutorado – Stanford University, Stanford – Estados Unidos).
- HIRSCH, C. Numerical computation of internal and external flows. Vol 2. Inglaterra, John Wiley & Sons, 1990, 691p.
- HUGHES, T. J. R., MALLETT, M. A & MIZUKAMI, A. A new finite element formulation for computational fluid dynamics:II. Beyond SUPG. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 54: 341-355, 1986.

- HUGHES, T. J. R. & MALLETT, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics:III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 58: 305-328, 1986.
- HUGHES, T. J. R. & MALLETT, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 58: 329-336, 1986
- HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., & BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics:V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition:a stable Petrov-Galerkin formulation for the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 59: 85-99, 1992.
- LYRA, P. R. M. Unstructured grid adaptive algorithms for fluid dynamics and heat conduction. Swansea, 1994. 333p. (Tese de Doutorado – University of Wales, Swansea – Reino Unido).
- LYRA, P. R. M. & MORGAN, K. A review and comparative study of upwind biased schemes for compressible flow computation. Part II: 1-D higher-order schemes. Archives of Computational Methods in Engineering, Reino Unido, 7-3: 333-377, 2000.
- MALISKA, C. R. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. Brasil, LTC-Editora, 2004, 453p.
- MITTAL, S. & TEZDUYAR, T. A unified finite element formulation for compressible and

- incompressible flows using augmented conservation variables. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 161: 229-243, 1998
- MOREIRA, M., L. Simulação computacional de escoamentos viscosos compressíveis/quase incompressíveis. Rio de Janeiro, 1998. 120p. (Tese de Doutorado – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro – Brasil).
- NIGRO, N., STORTI, M. & IDELSOHN, S., A general algorithm for compressible and incompressible flow. Stability Analysis and explicit time integration. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Estados Unidos, 7 n° 2/3, 141-168, 1997.
- NIGRO, N., STORTI, M., IDELSOHN, S. & TEZDUYAR, T. Physics based GMRES preconditioner for compressible and incompressible Navier-Stokes equations . Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 154: 203-228, 1998.
- SAMPAIO, P. A. B. & COUTINHO, A. L. G. A. A natural derivation of discontinuity capturing operator for convection-diffusion problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 190: 6291-6308, 2001.
- SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory. Antigua, McGraw-Hill, 1979, 817p.
- STILLER, J. The Galerkin/least-squares finite element method for compressible Navier-Stokes problems. Institutsbericht I 1510, Technische Universität Dresden. Alemanha, 1999, 23p.

- SHAKIB, F. Finite Element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations. Stanford, 1988. 205p. (Tese de Doutorado – Stanford University, Stanford – Estados Unidos).
- STREETER, V. L. Mecânica dos Fluidos. Brasil, McGraw-Hill, 1974, 736p.
- TEZDUYAR, T. E., BEHR, M. & LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming -spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 94: 339-351, 1992
- WARK, K. J. Advanced Thermodynamics for Engineers. EUA, McGraw-Hill, 1995, 564p.
- WONG, J.S., DARMOFAL, D.L. & PERAIRE, J. The solution of the compressible Euler equations at low Mach numbers using a stabilized finite element algorithm. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 190: 5719-5737, 2001.
- VAZQUEZ, M., Numerical modelling of compressible laminar and turbulent flow. Barcelona, 1988. 215p. (Tese de Doutorado – Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona– Espanha).
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. The Finite Element Method Vol 2 – Solid and fluid mechanics and nonlinearity. Inglaterra, McGraw-Hill, 1991, 807p.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & CODINA, R., A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I: the split, characteristic based scheme. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Estados Unidos, 20, nº 8/9, 1995.
- ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K., SAI, B.V.K.S., CODINA, R. & VAZQUEZ, M., A

general algorithm for compressible and incompressible flow. Part II: tests on the explicit form. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Estados Unidos, 20, 887-913, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K., SAI, B.V.K.S., CODINA, R. & VAZQUEZ, M., A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part III: the semi-implicit form. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Estados Unidos, 27, 13-32, 1998.

APÊNDICE A

Neste Apêndice são apresentadas as matrizes encontradas nas equações de Navier-Stokes sem o termo de fonte quando escritas em sua forma quase-linear (ver a Eq. (2.24)). As matrizes apresentadas levam em conta a utilização de dois conjuntos de variáveis: conservativas e primitivas utilizando-se a pressão.

Matrizes Jacobianas

No que segue, considere-se as seguintes relações:

$$e_1^p = \rho \beta e_1 - \alpha T \quad (\text{A.1})$$

$$e_2^p = e_1^p + 1 \quad (\text{A.2})$$

$$e_4^p = -\rho \alpha e_1 + \rho c_p \quad (\text{A.3})$$

$$k_c = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \quad (\text{A.4})$$

$$e_1 = h + k_c \quad (\text{A.5})$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (\text{A.6})$$

$$\chi = \lambda + 2\mu \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta \rho c_v} \quad (\text{A.9})$$

$$a^2 = \frac{\gamma}{\rho \beta} \quad (\text{A.10})$$

$$d = \frac{\alpha T}{\rho \beta} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{e}_1 = h - k_c \quad (\text{A.12})$$

$$e_1^c = \frac{T \bar{\gamma}}{\rho} - \frac{\bar{e}_1}{\rho c_v} \quad (\text{A.13})$$

$$e_2^c = a^2 - \bar{e}_1 \bar{y} - e_1 \quad (\text{A.14})$$

$$e_c^3 = e_1 \quad (\text{A.15})$$

$$e_4^c = \bar{y} + 1 \quad (\text{A.16})$$

$$e_1^s = \bar{e}_1^2 - 2\bar{e}_1 d + 2k_c c_v T + \frac{c_p T}{\rho \beta} \quad (\text{A.17})$$

$$e_2^s = \bar{e}_1 - d \quad (\text{A.18})$$

$$e_e^s = e_2^s - c_v T \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{c}_1 = u_1^2 + c_v T, \quad \bar{c}_2 = u_2^2 + c_v T, \quad \bar{c}_3 = u_1^3 + c_v T \quad (\text{A.20})$$

Matrizes para variáveis conservativas (U).

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$A_1^u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 - u_1^2 - \bar{e}_1 \bar{y} & u_1(2 - \bar{y}) & -u_2 \bar{y} & -u_3 \bar{y} & \bar{y} \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 & 0 \\ -u_1 u_3 & u_3 & 0 & u_1 & 0 \\ u_1 e_2^c & e_3^c - \bar{y} u_1^2 & -\bar{y} u_1 u_2 & -\bar{y} u_1 u_3 & u_1 e_4^c \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$A_2^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 & 0 \\ a^2 - u_2^2 - \bar{e}_1 \bar{y} & -u_1 \bar{y} & u_2(2 - \bar{y}) & -u_3 \bar{y} & \bar{y} \\ -u_2 u_3 & 0 & u_3 & u_2 & 0 \\ u_2 e_2^c & -\bar{y} u_1 u_2 & e_3^c - \bar{y} u_2^2 & -\bar{y} u_2 u_3 & u_2 e_4^c \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$A_3^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_1 u_3 & u_3 & 0 & u_1 & 0 \\ -u_2 u_3 & 0 & u_3 & u_2 & 0 \\ a^2 - u_3^2 - \bar{e}_1 \bar{y} & -u_1 \bar{y} & -u_2 \bar{y} & u_3(2 - \bar{y}) & \bar{y} \\ u_3 e_2^c & -\bar{y} u_1 u_3 & -\bar{y} u_2 u_3 & e_3^c - \bar{y} u_3^2 & u_3 e_4^c \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$K_{11}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \chi u_1 & \mu u_2 & \mu u_3 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{K}_{12}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu u_2 & \lambda u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{K}_{13}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu u_3 & 0 & \lambda u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{K}_{21}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u_2 & \mu u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{K}_{22}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u_1 & \chi u_2 & \mu u_3 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{K}_{23}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu u_3 & \lambda u_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{K}_{31}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u_3 & 0 & \mu u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{K}_{32}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u_3 & \mu u_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{K}_{33}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & \mu u_1 & \mu u_2 & \chi u_3 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Matrizes para variáveis de pressão (Y)

$$A_0 = \begin{pmatrix} \rho\beta & 0 & 0 & 0 & -\rho\alpha \\ \rho\beta u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha u_1 \\ \rho\beta u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha u_2 \\ \rho\beta u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha u_3 \\ e_1^p & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & e_4^p \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho\beta u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha u_1 \\ \rho\beta u_1^2 + 1 & 2\rho u_1 & 0 & 0 & -\rho\alpha u_1^2 \\ \rho\beta u_1 u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & -\rho\alpha u_1 u_2 \\ \rho\beta u_1 u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & -\rho\alpha u_1 u_3 \\ u_1 e_2^p & e_3^p + \rho u_1^2 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 & u_1 e_4^p \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \rho\beta u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha u_2 \\ \rho\beta u_1 u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & -\rho\alpha u_1 u_2 \\ \rho\beta u_2^2 + 1 & 0 & 2\rho u_2 & 0 & -\rho\alpha u_2^2 \\ \rho\beta u_2 u_3 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & -\rho\alpha u_2 u_3 \\ u_2 e_2^p & \rho u_1 u_2 & e_3^p + \rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 & u_2 e_4^p \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \rho\beta u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha u_3 \\ \rho\beta u_1 u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & -\rho\alpha u_1 u_3 \\ \rho\beta u_2 u_3 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & -\rho\alpha u_2 u_3 \\ \rho\beta u_3^2 + 1 & 0 & 0 & 2\rho u_3 & -\rho\alpha u_3^2 \\ u_3 e_2^p & \rho u_1 u_3 & \rho u_2 u_3 & e_3^p + \rho u_3^2 & u_3 e_4^p \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \chi u_1 & \mu u_2 & \mu u_3 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu u_2 & \lambda u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu u_3 & 0 & \lambda u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u_2 & \mu u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u_1 & \chi u_2 & \mu u_3 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu u_3 & \lambda u_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{K}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u_3 & 0 & \mu u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{K}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u_3 & \mu u_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{K}_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & \mu u_1 & \mu u_2 & \chi u_3 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Matriz Jacobiana $\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}$

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{-1} = \frac{1}{\rho c_v T^2} \begin{pmatrix} e_1^s & u_1 e_3^s & u_2 e_3^s & u_3 e_3^s & -e_2^s \\ & \bar{c}_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 & -u_1 \\ & & \bar{c}_2 & u_2 u_3 & -u_2 \\ & \text{simétrica} & & \bar{c}_3 & -u_3 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

APÊNDICE B

Funções de forma

Considere-se o mapeamento $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, onde as novas coordenadas ϵ_k são conhecidas como *coordenadas naturais*. (Fig (B.1)).

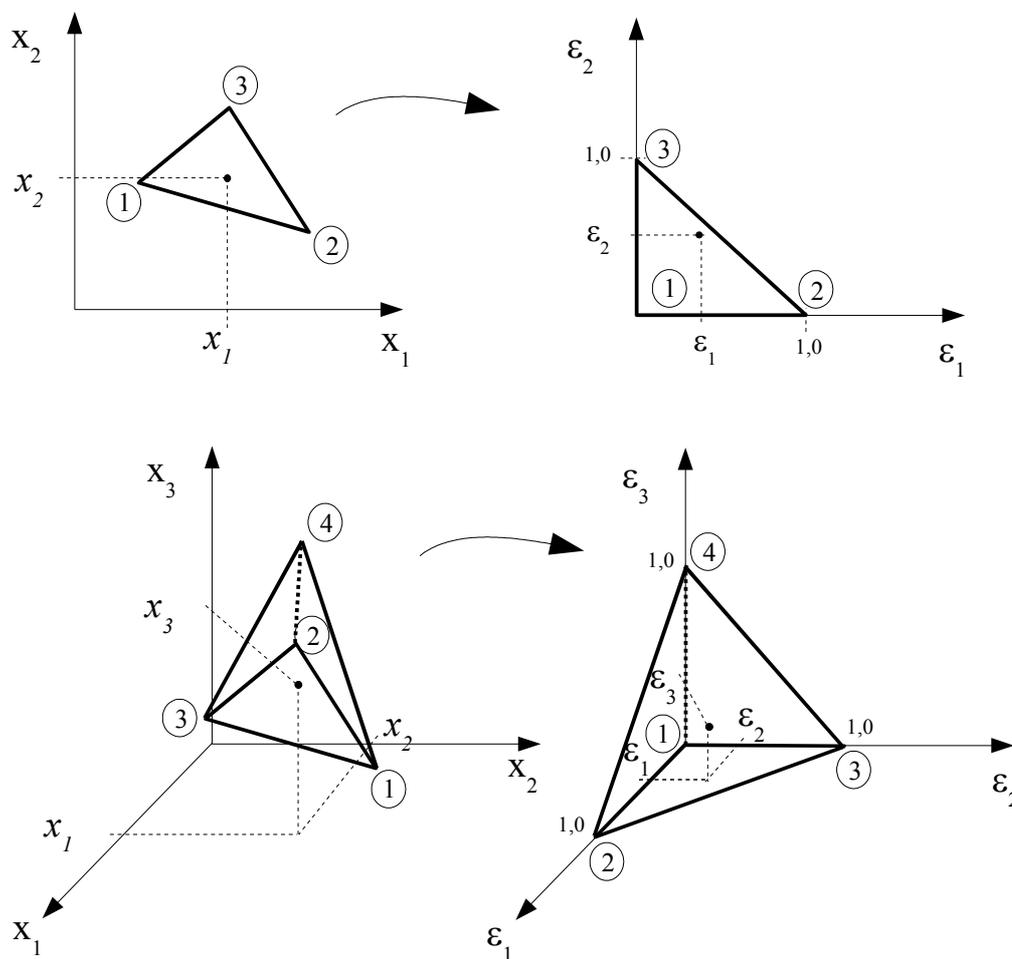


Figura B.1. Mapeamento bi e tri-dimensional dos elementos. As conectividades são representadas pelos números 1,2 e 3 circunscritos.

Considere-se também que as funções de forma são lineares em Ω .

As funções de forma lineares em coordenadas naturais são dadas pelas seguintes equações para elementos bi e tri-dimensionais, respectivamente:

Funções de forma bi-dimensionais

$$\varphi_1 = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (\text{B.1})$$

$$\varphi_2 = \epsilon_1 \quad (\text{B.2})$$

$$\varphi_3 = \epsilon_2 \quad (\text{B.3})$$

Funções de forma tri-dimensionais

$$\varphi_1 = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 \quad (\text{B.4})$$

$$\varphi_2 = \epsilon_1 \quad (\text{B.5})$$

$$\varphi_3 = \epsilon_2 \quad (\text{B.6})$$

$$\varphi_4 = \epsilon_3 \quad (\text{B.7})$$

A partir das funções de forma definidas acima, seguem algumas definições importantes:

Matriz Jacobiana do elemento

Caso bi-dimensional

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Na Eq. (B.9) e em todas que seguem, $y_{ij} = y_i - y_j$, onde y é a ordenada do nó em questão²⁶ e i, j correspondem às conectividades do elemento. O mesmo vale para x .

Chamando-se A_e a área do elemento, o seguinte resultado pode ser obtido da geometria analítica:

²⁶ A fim de não sobrecarregar a notação, considerem-se as seguintes equivalências: $x = x_1$, $y = x_2$ e

$z = x_3$.

$$2 A_e = \det(\mathbf{J}) \quad (\text{B.10})$$

A inversa da transposta da matriz Jacobiana é de igual importância, como será visto a seguir:

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \frac{1}{2 A_e} \begin{pmatrix} -y_{32} & x_{32} \\ y_{31} & -x_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Caso tri-dimensional

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \epsilon_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \epsilon_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ y_{21} & y_{31} & y_{41} \\ z_{21} & z_{31} & z_{41} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

De maneira semelhante ao caso bi-dimensional, se V é o volume do elemento, tem-se que:

$$6V_e = \det(\mathbf{J}) \quad (\text{B.14})$$

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \frac{1}{6V_e} \begin{pmatrix} y_{31}z_{41} - z_{31}y_{41} & z_{21}y_{41} - y_{21}z_{41} & y_{21}z_{31} - z_{21}y_{31} \\ z_{31}x_{41} - x_{31}z_{41} & x_{21}z_{41} - z_{21}x_{41} & z_{21}x_{31} - x_{21}z_{31} \\ x_{31}y_{41} - y_{31}x_{41} & y_{21}x_{41} - x_{21}y_{41} & x_{21}y_{31} - y_{21}x_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Derivadas das funções de forma

Para as derivadas das funções de forma, tem-se a seguinte expressão:

$$\nabla \varphi_i = (\mathbf{J}^T)^{-1} \nabla_{\epsilon} \varphi_i \quad (\text{B.16})$$

onde, para três dimensões:

$$\nabla \varphi_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\nabla_{\epsilon} \varphi_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \epsilon_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \epsilon_2} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \epsilon_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

A seguinte expressão também é bastante útil para o cálculo das integrais. Seja o domínio Ω_{ϵ} , no sistema de coordenadas naturais. É possível mostrar que:

$$d\Omega = \det(\mathbf{J}) d\Omega_{\epsilon} \quad (\text{B.19})$$

Integrais importantes

Chame-se D_e a dimensão própria do elemento podendo ser o comprimento, a área ou o volume, dependendo do número de dimensões espaciais do problema (n_d).

Defina-se também a função $m_a(i, j)$ como: $m_a(i, j) = 2$, se $i = j$ e $m_a(i, j) = 1$, se $i \neq j$.

É possível se demonstrar as seguintes igualdades:

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} \varphi_i \varphi_j d\Omega = \frac{D_e m_a(i, j)}{6 n_d} \quad (\text{B.20})$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} \varphi_i d\Omega = \frac{D_e}{1 + n_d} \quad (\text{B.21})$$

$$\int_{\Omega_e} d\Omega = D_e \tag{B.22}$$

Costa, Gustavo Koury
Simulação tridimensional de escoamentos compressíveis e incompressíveis através do método dos elementos finitos / Gustavo Koury Costa. – Recife : O Autor, 2004.
165 folhas : il., fig.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Energia Nuclear, 2004.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Energia nuclear – Engenharia de reatores. 2. Fluidos – Escoamentos compressíveis e incompressíveis – Método dos elementos finitos. 3. Formulação SUPG (Streamline upwind Petrov/Galerkin) – Equações de Navier-Stokes. I. Título.

621.039.534.22 CDU (2.ed.) UFPE
621.4835 CDD (22.ed.) BC2005-332